TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
66524-22 55, Quai des Grands-Augustins, 55

J. V. Iribarne 1942

TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

PAR

Eugène ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE

NOUVELLE ÉDITION

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^IE, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1922

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§ I. — Premières notions sur le plan.

§ II. — Droites et plans parallèles.

§ III. — Droite et plan perpendiculaires.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — Propriétés générales et aire latérale du prisme.

§ II. — Volume du prisme.

§ III. — Propriétés générales et aire latérale de la pyramide.

§ IV. — Volume de la pyramide.

Pages.

§ V. — Figures symétriques.

§ VI. — Polyèdres semblables.

APPENDICE DU SIXIÈME LIVRE.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§ I. — Cylindre de révolution.

LIVRE VIII.

LES COURBES ET LES SURFACES USUELLES.

§ I. — Propriétés fondamentales de l'ellipse.

§ II. — Propriétés fondamentales de l'hyperbole.

§ III. — Propriétés fondamentales de la parabole.

§ IV. Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle.

§ V. — Parabole considérée comme limite de l'ellipse.

§ VI. — Origine commune des trois courbes. Sections planes du cône de révolution.

§ VII. — Propriétés fondamentales de l'hélice.

APPENDICE DU HUITIÈME LIVRE.

HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

ÉTUDE DE QUELQUES SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

QUESTIONS PROPOSÉES SUR LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

EXERCICES CONCERNANT LES DIVERS PARAGRAPHES :

NOTES.

NOTE I.

Sur l'application des déterminants à la Géométrie.

NOTE II.

Sur la Géométrie non euclidienne.

NOTE III.

Sur les transformations linéaires et quadratiques, les coniques associées à un triangle et les systèmes de trois figures directement semblables.

NOTE IV.

Sur la Géométrie récente du tétraèdre.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.

LE PLAN.

§ I. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LE PLAN.

DÉFINITIONS.

487. Un plan est une surface telle qu'une ligne droite y est contenue tout entière dès qu'elle y a deux points (5). Cette surface est illimitée; toutefois, pour la représenter, on est obligé de lui assigner des limites; on représente un plan par une figure tracée dans ce plan, le plus souvent par un parallélogramme.

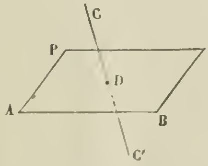
488. Il résulte de la définition du plan qu'une droite et un plan ne peuvent offrir que trois positions relatives :

1° La droite a deux points communs avec le plan, et alors elle y est contenue tout entière.

2° La droite n'a qu'un point commun avec le plan; on dit alors que la droite et le plan *se coupent*.

3° La droite n'a aucun point commun avec le plan; on dit alors que la droite et le plan *sont parallèles*.

Fig. 275.



Quand une droite CC' et un plan P se coupent (*fig.* 275), leur point commun D divise la droite CC′ en deux demi-droites DC et DC′, situées de part et d'autre du plan.

THÉORÈME.

489. 1° *Deux plans* P *et* Q, *qui ont un point commun* A, *ont une droite commune passant par ce point.*

2° *Deux plans* P *et* Q, *qui ont en commun une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette droite, coïncident dans toute leur étendue.*

En effet:

1° Par le point A commun aux deux plans P et Q (*fig.* 276), menons dans le plan Q deux droites quelconques LAL′, NAN′. Si l'une de ces droites a, avec le plan P, un point commun autre que A, elle appartient tout entière à ce plan; elle est donc commune aux deux plans P et Q, et le théorème est démontré.

Fig. 276.

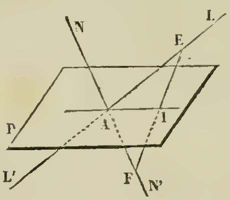
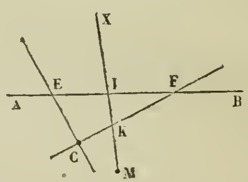


Fig. 277.



Supposons donc que les droites LAL′, NAN′ coupent l'une et l'autre le plan P, et prenons un point quelconque E sur la partie de la droite LAL′ qui est au-dessus du plan P, et un point quelconque F sur la partie de la droite NAN′, qui est au-dessous du plan P. La droite EF, passant d'un côté à l'autre du plan P, coupe ce plan en un point I; par suite, la droite AI est commune aux deux plans P et Q, puisqu'elle a deux points A et I dans chacun d'eux.

2° Par le point C et par deux points E et F, pris à volonté sur AB (*fig.* 277), menons les droites indéfinies CE et CF; ces deux droites appartiendront, comme la droite AB, aux deux plans P et Q, puisque chacune d'elles a deux points dans chacun de ces plans. Cela posé, soit M un point quelconque du plan P; menons par M, dans ce plan, une droite quelconque MX; cette droite rencontrera au moins deux des droites AB, CE, CF; les deux points de rencontre I et K appartiendront au plan Q; par suite, il en sera de même de la droite MX tout entière et, en particulier, du point M. Ainsi tout point M de l'un des plans appartient à l'autre, ce qui prouve que ces deux plans coïncident.

Corollaires.

490. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Car, dès que deux plans ont un point commun, ils ont une droite commune passant par ce point (489, 1°); et ils ne peuvent avoir aucun point commun extérieur à cette droite, sans coïncider (489, 2°).

491. Il résulte des propositions précédentes que deux plans *distincts* ne peuvent offrir que deux positions relatives :

1° Ils ont en commun une droite unique; on dit alors qu'ils *se coupent.*

2° Ils n'ont aucun point commun; on dit alors qu'ils *sont parallèles.*

THÉORÈME.

492. *Un plan est déterminé :*

1° *Par une droite* AB *et un point* C *extérieur à cette ligne;*

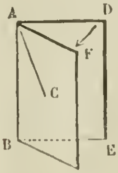
2° *Par trois points* A, B, C, *non en ligne droite;*

3° *Par deux droites* AB *et* AC *qui se coupent;*

4° *Par deux droites parallèles.*

En effet (*fig.* 278) :

Fig. 278.



1° Que l'on mène un plan ADEB par AB, et qu'on le fasse tourner autour de cette droite, comme une porte sur ses gonds, jusqu'à ce qu'il contienne le point C; on aura alors un plan AFGB passant par la droite AB et par le point C. Il ne saurait d'ailleurs en exister d'autres, puisque deux plans remplissant ces conditions coïncident (489, 2°).

2° On ramène le deuxième cas au premier en remarquant que tout plan passant par la droite AB et le point C contient les trois points A, B, C, et réciproquement.

3° On ramène le troisième cas au premier en remarquant que tout plan passant par AB et par un point quelconque de AC contient les deux droites AB, AC, et réciproquement.

4° Deux parallèles sont toujours, par définition (56), situées dans un même plan; et ce plan est le seul qui les contienne, puisqu'on ne peut mener qu'un plan par la première parallèle et par un point de la seconde.

Corollaires.

493. *Par un point* A, *on ne peut mener dans l'espace qu'une parallèle à une droite donnée* DE. Car (*fig.* 278), si AB est une parallèle à DE menée par A, AB sera située dans le plan ADE (492, 4°), et l'on sait que, dans un plan, on ne peut mener par un point qu'une parallèle à une droite (56).

494. Nous avons indiqué les positions relatives d'une droite et d'un plan, ainsi que celles de deux plans. Il nous reste, pour terminer ces préliminaires, à étudier les positions relatives de deux droites.

Deux droites AB et CD étant données d'une manière quelconque dans l'espace, le plan P, mené par AB et par un point quelconque D de CD, peut couper cette droite CD ou la contenir tout entière.

Dans le premier cas (*fig.* 275), il n'existe aucun plan qui contienne à la fois les deux droites AB et CD; car un tel plan ayant la droite AB et le point D communs avec le plan P coïnciderait avec lui, et, par suite, le plan P contiendrait la droite CD contrairement à l'hypothèse. Les deux droites AB et CD, *n'étant pas situées dans un même plan,* ne peuvent ni se couper ni être parallèles (492, 3° et 4°).

Deux droites distinctes peuvent donc offrir, dans l'espace, trois positions relatives :

1° Elles ne sont pas situées dans un même plan.

2° Elles sont parallèles.

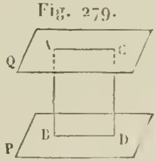
3° Elles se coupent.

Comme, dans les deux premiers cas, elles n'ont aucun point commun, on voit que, *pour prouver le parallélisme de deux droites de l'espace, il ne suffira plus, comme en Géométrie plane, d'établir qu'elles ne se rencontrent pas, si loin qu'on les prolonge; il faudra, en outre, montrer qu'elles sont situées dans un même plan.*

495. Voici, à l'appui de ce principe, deux exemples qui conduisent à deux conclusions importantes :

1° Deux droites, l'une située dans un plan, l'autre parallèle à ce plan, n'ont évidemment aucun point commun. Cependant, pour qu'elles soient parallèles, il faut encore, et *il suffit* qu'elles soient situées dans un même plan. On énonce ordinairement cette proposition en disant : *Si, par une droite* AC *parallèle à un plan* P, *on mène un plan* ACBD *qui coupe le plan* P, *l'intersection* BD *des deux plans est parallèle à* AC (*fig.* 279).

Fig. 279.



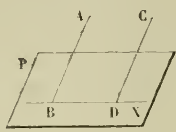
2° Deux droites situées respectivement dans deux plans parallèles P et Q n'ont évidemment aucun point commun. Cependant, pour qu'elles soient parallèles, il faut encore, et *il suffit*, qu'elles soient dans un même plan. On énonce ordinairement cette proposition en disant : *Quand deux plans parallèles* P *et* Q *sont coupés par un troisième* ACBD, *les intersections* AC *et* BD *sont parallèles* (*fig.* 279).

§ II. — DROITES ET PLANS PARALLÈLES.

THÉORÈME.

496. *Si deux droites* AB *et* CD *sont parallèles, tout plan* P *qui coupe l'une* AB *coupe l'autre* CD (*fig.* 280).

Fig. 280.



En effet, puisque la droite AB coupe le plan P, le plan ABCD des deux parallèles et le plan P se rencontrent suivant une droite BX qui, coupant AB, coupe sa parallèle CD (60). Par suite, CD a un point commun avec le plan P, et elle ne saurait en avoir d'autre, sans quoi elle coïnciderait avec BX et ne serait pas parallèle à AB.

Corollaires.

497. *Si deux droites sont parallèles, tout plan qui contient la première, ou qui lui est parallèle, contient la seconde ou lui est parallèle ;* car, s'il n'en était pas ainsi, il couperait cette seconde droite (488), et, par suite, il couperait la première.

498. *Si deux droites* A *et* B *sont parallèles, toute droite* C *parallèle à la première* A *est parallèle à la seconde* B *ou coïncide avec elle.*

D'abord, si C ne coïncide pas avec B, ces deux droites n'ont aucun point commun, sans quoi, par ce point, on pourrait mener deux parallèles à A. Pour prouver que les droites C et B sont alors parallèles, il suffit de montrer qu'elles appartiennent à un même plan, c'est-à-dire que le plan déterminé par la droite C et un point de B contient cette droite B. Or, si ce plan coupait B, il couperait sa parallèle A, et, coupant A, il couperait sa parallèle C, tandis qu'il la contient.

On énonce ordinairement cette proposition d'une manière plus rapide, mais incomplète, en disant : *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Scolies.

499. *L'intersection de deux plans parallèles à une même droite est parallèle à cette droite ;* car, si par un point commun aux deux plans on mène la parallèle à la droite considérée, cette parallèle doit appartenir à chacun des deux plans (497).

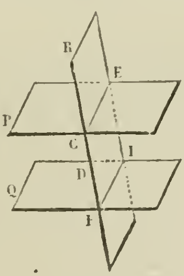
500. Deux plans conduits par deux droites parallèles peuvent être considérés comme parallèles à une droite quelconque parallèle aux deux premières (497); on a donc cette proposition comme cas particulier de celle qu'on vient d'énoncer: *L'intersection de deux plans conduits par deux droites parallèles est parallèle à ces droites.*

THÉORÈME.

501. *Si deux plans* P *et* Q *sont parallèles :* 1° *toute droite* D *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q ; 2° *tout plan* R *qui coupe le premier* P *coupe le second* Q.

En effet (*fig.* 281):

Fig. 281.



1° Par un point quelconque I du plan Q et par la droite D qui coupe le plan P en C, concevons un plan R; ce plan ayant un point commun avec chacun des deux premiers coupera ceux-ci suivant deux parallèles CE et FI (495). Or CD coupe CE; elle coupe donc sa parallèle FI et, par suite, le plan Q.

2° Menons dans le plan R, qui coupe le plan P suivant CE, une droite CD non parallèle à CE. Cette droite CD coupant le plan P coupera le plan Q (1°); donc le plan R coupe le plan Q.

COROLLAIRES.

502. *Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle au premier ou contenue dans le premier est parallèle au second ou contenue dans le second;* car, si elle coupait le second plan, elle couperait aussi le premier.

503. *Si deux plans sont parallèles, tout plan qui est parallèle au premier est parallèle au second ou coïncide avec le second;* car, s'il n'en était pas ainsi, il couperait ce second plan (491), et, par suite, il couperait aussi le premier.

504. *Par un point* A *extérieur à un plan* B'A'C', *on peut toujours mener un plan parallèle à ce plan, et l'on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 282).

En effet, menons par A deux droites AB et AC parallèles au plan B'A'C'. Le plan BAC sera parallèle au plan B'A'C'; car, s'il le rencontrait, leur intersection devrait être parallèle à la fois à AB et à AC (495); ce qui est impossible. De plus, tout plan autre que BAC mené par A coupe le plan B'A'C', puisqu'il coupe le plan BAC qui est parallèle à B'A'C' (501).

SCOLIE.

505. *Si, par un point* A *extérieur à un plan* Q, *on mène des droites parallèles à ce plan, le lieu de ces parallèles est le plan* P *mené par* A, *parallèlement au plan* Q.

Car toute parallèle au plan Q, menée par A, doit être située dans le plan P ou être parallèle à ce plan (502); or c'est le premier cas qui a lieu, puisque la droite considérée a déjà un point A commun avec le plan P.

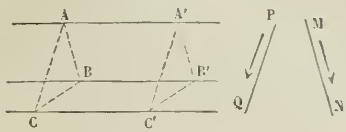
THÉORÈME.

506. *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires, et leurs plans sont parallèles* (*fig.* 282).

1° Les plans des deux angles sont parallèles en vertu du n° 504.

2° Deux angles BAC, B'A'C', dont les côtés AB et A'B', AC et A'C', sont deux à deux parallèles et de même sens, sont égaux. En effet, par deux points B et C pris à volonté et respectivement sur les côtés de l'angle A, menons des paral-

Fig. 282.



lèles à AA' jusqu'à leur rencontre B' et C' avec les côtés de l'angle A'; les droites BC, B'C' sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles BAC, B'A'C' avec le plan BB'C'C. Donc les deux triangles BAC, B'A'C' ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, comme parallèles comprises entre parallèles, et les angles BAC, B'A'C' sont égaux.

On prouvera d'ailleurs, comme en Géométrie plane, que deux angles dont les côtés sont deux à deux parallèles et de sens contraires sont égaux, et que deux angles dont deux côtés sont parallèles et de même sens, tandis que les deux autres sont parallèles et de sens contraires, sont supplémentaires.

Scolies.

507. Sur une droite quelconque MN (*fig.* 282), il y a deux sens à distinguer : le sens de MN et celui de NM.

On appelle *angle de deux droites*, dont la position dans l'espace et le sens sont donnés, l'angle que l'on forme en menant par un point quelconque de l'espace, à chacune des deux droites données, une droite parallèle et de même sens. Ainsi MN et PQ étant les deux droites données, par un point quelconque A de l'espace, menons AB parallèle à MN et de même sens, AC parallèle à PQ et de même sens ; l'angle BAC sera, par définition, l'angle des deux droites MN et PQ.

Pour que cette définition n'offre rien de contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle ainsi obtenu soit indépendante de la position qu'occupe dans l'espace le point par lequel on mène des parallèles aux droites données. Or soient BAC, B'A'C' les valeurs obtenues pour l'angle de MN et de PQ, lorsqu'on mène à ces droites des parallèles par deux points différents A et A′; les droites AC et A′C′, étant chacune parallèles à MN et de même sens que cette droite, sont parallèles entre elles et de même sens (498); il en est de même pour AB et A′B′; par suite, les deux angles BAC, B′A′C′ sont égaux.

508. On dit que *deux droites non situées dans le même plan sont perpendiculaires l'une à l'autre lorsque leur angle est droit.*

On voit, par la définition même de l'angle de deux droites, que, *lorsque deux droites sont perpendiculaires entre elles, toute parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

THÉORÈME.

509. 1° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre une droite* AC *et un plan* P *parallèles, sont égales* (*fig.* 283).

2° *Les parallèles* AB *et* CD, *comprises entre deux plans parallèles* P *et* Q, *sont égales* (*fig.* 283).

Cette double proposition résulte de ce que le plan des deux parallèles AB et CD coupe, dans le premier cas, le plan P suivant une parallèle BD à AC, et coupe, dans le second cas, les plans P et Q suivant des droites parallèles BD et AC (495); les droites AB et CD sont donc, dans les deux cas, égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Fig. 283.

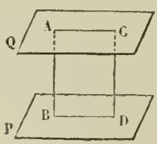
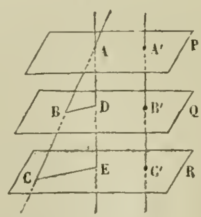


Fig. 284.



THÉORÈME.

510. *Deux droites quelconques* AC, A′C′ (*fig.* 284) *sont coupées par trois plans parallèles* P, Q, R, *en parties proportionnelles;* en d'autres termes, si la droite AC coupe les plans

P, Q, R en A, B, C, et si la droite A′C′ coupe les mêmes plans en A′, B′, C′, on a

$$(1)\qquad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

En effet, menons par A la parallèle à A′C′, et désignons par D et E les points où elle coupe les plans Q et R. Les droites BD et CE étant parallèles (495), on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE};$$

mais les segments AD, DE, AE sont respectivement égaux à A′B′, B′C′, A′C′, comme parallèles comprises entre plans parallèles. La relation (1) est donc démontrée.

Corollaire.

511. Deux droites concourantes AC et AE étant divisées en parties proportionnelles par le point A et les plans parallèles Q et R, il en est de même pour une série de sécantes partant de A. En supposant, en effet, qu'il y ait trois sécantes, le rapport des segments de la première étant égal à la fois au rapport des segments de la seconde et au rapport des segments de la troisième, ces deux derniers rapports sont égaux entre eux.

§ III. — DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES.

DÉFINITIONS.

512. On dit qu'une droite et un plan sont *perpendiculaires l'un à l'autre* lorsque la droite est perpendiculaire (508) à toutes les droites parallèles au plan ou situées dans le plan.

513. Il suit immédiatement de cette définition que :

1° *Si deux droites A et B sont parallèles, tout plan P perpendiculaire à la première est perpendiculaire à la seconde;* car toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan, étant perpendiculaire à A, est aussi (508) perpendiculaire à B

2° *Si deux plans P et Q sont parallèles, toute droite D perpendiculaire au premier est perpendiculaire au second;* car toute droite parallèle au plan P ou située dans ce plan est parallèle au plan Q ou située dans ce plan (502).

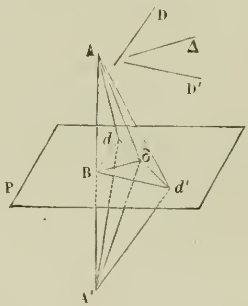
On énonce souvent ces deux propositions en disant :

Deux droites parallèles ont leurs plans perpendiculaires communs, et deux plans parallèles ont leurs perpendiculaires communes.

THÉORÈME.

514. *Pour qu'une droite* AB *soit perpendiculaire à un plan* P, *il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites* D *et* D′, *non parallèles entre elles, situées dans le plan* P *ou parallèles au plan* P (*fig.* 285).

Fig. 285.



Remarquons d'abord que la droite AB rencontre le plan P; car, sans cela, en menant par un point du plan P des parallèles aux droites AB, D et D′, on aurait dans ce plan (497) trois droites concourantes dont la première serait perpendiculaire aux deux autres.

Cela posé, par le point B où la droite AB rencontre le plan P, menons des parallèles Bd, Bd', Bδ, aux droites D et D′ et à une troisième droite quelconque Δ parallèle au plan P ou située dans ce plan. Les trois droites Bd, Bd', Bδ, seront contenues dans le plan P (497); AB sera perpendiculaire aux deux premières Bd, Bd' (508); et, pour établir le théorème énoncé, il suffira de prouver que AB est aussi perpendiculaire à la troisième droite Bδ.

A cet effet, par un point quelconque δ pris sur Bδ, traçons dans le plan P une droite qui ne soit parallèle ni à Bd ni à Bd', et qui les rencontre aux points d et d'; prolongeons AB, de l'autre côté du plan P, d'une longueur $BA' = AB$, et joignons chacun des points A et A' aux trois points d, δ, d'.

De l'égalité des triangles ABd et $A'Bd$ et de celle des triangles ABd' et $A'Bd'$, on déduit respectivement $Ad = A'd$ et $Ad' = A'd'$. Les deux triangles Add' et $A'dd'$ sont donc égaux. Cette égalité entraîne l'égalité des angles $Ad\delta$, $A'd\delta$, par suite celle des triangles $Ad\delta$, $A'd\delta$, et enfin celle des longueurs $A\delta$ et $A'\delta$.

La droite $B\delta$ ayant deux de ses points, B et δ, également distants des extrémités A et A', est perpendiculaire sur le milieu B de AA', et AB, à son tour, est perpendiculaire sur $B\delta$.

Scolie.

515. Le point B où la perpendiculaire AB rencontre le plan P est le *pied* de la perpendiculaire.

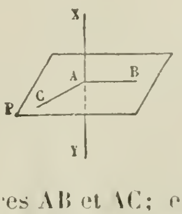
Une droite est dite *oblique* à un plan, lorsqu'elle rencontre ce plan sans lui être perpendiculaire.

THÉORÈME.

516. *Par un point donné* A, *on peut toujours mener un plan perpendiculaire sur une droite donnée* XY, *et l'on ne peut en mener qu'un.*

1° Supposons le point A situé sur la droite XY (*fig.* 286). Dans deux plans différents passant par XY, menons à cette

Fig. 286.

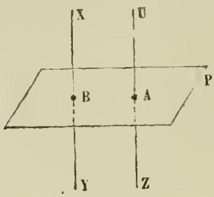


droite les perpendiculaires AB et AC; elles détermineront un plan P, perpendiculaire à XY au point A (514).

Il n'existe pas d'autre plan perpendiculaire à XY au point A. En effet, tout plan mené perpendiculairement à XY par le point A doit couper le plan XAB suivant la perpendiculaire AB à XY (512), et le plan XAC suivant la perpendiculaire AC à cette même droite; il ne diffère donc pas du plan P.

2° Supposons le point A extérieur à la droite XY (*fig.* 287). Soit UZ la parallèle à XY menée par A. Les droites paral-

Fig. 287.



lèles XY et UZ ayant leurs plans perpendiculaires communs (513), dire que par le point A on peut abaisser un plan perpendiculaire sur XY et qu'on ne peut en abaisser qu'un, c'est dire que, par le point A, on peut élever un plan perpendiculaire sur UZ et qu'on ne peut en élever qu'un; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

Corollaire.

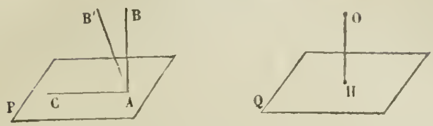
517. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles ou coïncident;* car s'ils se coupaient, d'un point de leur intersection, on pourrait mener deux plans perpendiculaires sur la même droite, ce dont nous venons de démontrer l'impossibilité.

THÉORÈME.

518. *Par un point donné A, on peut toujours mener une droite perpendiculaire à un plan donné P, et l'on ne peut en mener qu'une.*

1° Supposons le point A situé dans le plan P (*fig.* 288). Considérons à part une droite OH et le plan Q élevé perpendiculairement à cette droite par l'un de ses points H; puis, transportons cette figure tout d'une pièce, de manière que, le plan Q s'appliquant sur le plan P, le point H coïncide avec le point A. La droite OH, dans sa nouvelle position, sera une perpendiculaire AB menée au plan P par le point A.

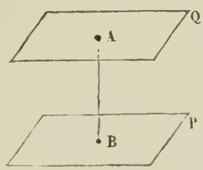
Fig. 288.



On ne peut en mener qu'une; car, si l'on pouvait en mener deux, AB et AB', le plan BAB' couperait le plan P suivant une droite AC perpendiculaire à la fois à AB et à AB'.

2° Supposons le point A extérieur au plan P (*fig.* 289).

Fig. 289.



Soit Q le plan mené par A parallèlement au plan P. Les plans parallèles P et Q ayant leurs perpendiculaires communes (513), dire que, par le point A, on peut abaisser une perpendiculaire sur le plan P et qu'on ne peut en abaisser qu'une, c'est dire que par le point A on peut élever une perpendiculaire sur le plan Q, et qu'on ne peut en élever qu'une; or c'est ce que nous venons d'établir (1°).

COROLLAIRE.

519. *Deux droites A et B, perpendiculaires à un même plan P, sont parallèles ou coïncident.*

En effet, si les droites A et B ont un point commun, elles coïncident, puisque, de ce point, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P. Si les droites A et B n'ont pas de point commun, imaginons, par un point M de B, la parallèle A' à A. Cette droite A' sera perpendiculaire au plan P (513); elle coïncidera donc avec B, puisque, du point M, on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P.

Les propositions des nos 517 et 519 sont les réciproques de celles du n° 513.

THÉORÈME.

520. *Si une droite* AB *est perpendiculaire au plan* P, *toute perpendiculaire* CD *à la droite* AB *est parallèle au plan* P, *ou située dans ce plan* (*fig.* 290).

En effet, menons par le point A la parallèle AE à CD : l'angle BAE sera droit. Par suite, la droite AE sera contenue dans le plan P; car sans cela le plan BAE couperait le plan P suivant une autre perpendiculaire à AB (512), et l'on aurait au point A, dans le plan BAE, deux perpendiculaires sur BA, ce qui est impossible. La droite CD, étant alors parallèle à une droite AE du plan P, est parallèle à ce plan ou située dans ce plan (497).

Cette proposition est la réciproque de la définition adoptée au n° 512.

COROLLAIRES.

521. *Le lieu géométrique des perpendiculaires que l'on peut mener à une droite* AB *par un point* C *est le plan* P *mené par ce point perpendiculairement à la droite* AB (*fig.* 291); car l'une quelconque CD de ces perpendiculaires doit être parallèle au plan P ou y être contenue tout entière : c'est ce dernier cas qui a lieu ici, puisque la droite CD a déjà un point commun avec le plan P.

Fig. 290.

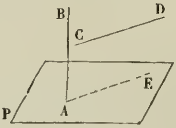
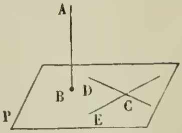


Fig. 291.



522. *Le lieu des points de l'espace équidistants des extrémités d'une droite* XY *est le plan élevé perpendiculairement sur le milieu de cette droite* (*fig.* 286). En effet, dans un plan quelconque XYB passant par XY, le lieu des points équidistants des extrémités de cette droite est la perpendiculaire AB élevée dans ce plan sur le milieu A de XY; or on vient de voir que le lieu des diverses perpendiculaires élevées sur XY

par le point A est le plan mené par ce point perpendiculairement à XY.

THÉORÈME.

523. *Si, d'un point* A *pris hors d'un plan* P (*fig.* 292), *on mène à ce plan la perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, AE :

1° *Deux obliques* AC *et* AD, *dont les pieds* C *et* D *s'écartent également du pied* B *de la perpendiculaire, sont égales.*

2° *La perpendiculaire* AB *est plus courte que toute oblique* AC, *et, de deux obliques* AC *et* AE, *l'oblique* AE, *qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire, est la plus longue.*

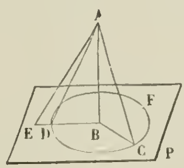
En effet :

1° Les deux triangles rectangles ABC et ABD étant égaux, comme ayant les deux côtés de l'angle droit respectivement égaux, les hypoténuses AC et AD sont égales.

2° En prenant $BD = BC$, on a, en vertu de l'alinéa précédent, $AC = AD$, et, par la Géométrie plane, $AE > AD > AB$; on a donc $AB < AC$ et $AE > AC$.

524. Les réciproques de ces propositions sont vraies. Il en résulte que *le lieu des points d'un plan* P *situés à égale distance d'un point donné* A *est une circonférence ayant pour centre la projection* B *de ce point sur le plan* (*fig.* 292). De là,

Fig. 292.



un moyen pratique pour abaisser une perpendiculaire sur un plan P par un point extérieur A : on fixe au point A l'une des extrémités d'un fil dont l'autre extrémité est armée d'un crayon, on marque trois points C, D, F sur le plan en tenant le fil tendu, on cherche le centre du cercle qui passerait par ces trois points, et l'on a le pied de la perpendiculaire demandée.

SCOLIES.

525. En Géométrie, le mot *distance* est toujours synonyme de *plus courte distance*. D'après cela, il résulte du n° 523 que *la distance d'un point* A *à un plan* P *est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.*

Si l'on rapproche ce résultat des n^{os} 509 et 519, on voit que 1° *une droite et un plan parallèles sont partout équidistants;* 2° *deux plans parallèles sont partout équidistants.*

§ IV. — PROJECTION D'UNE DROITE SUR UN PLAN. — ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN. — PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES.

DÉFINITIONS.

526. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P le pied a de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan (*fig.* 293).

La projection d'une ligne quelconque ABC... sur un plan P est le lieu des projections a, b, c, ... des divers points de cette ligne.

Fig. 293.

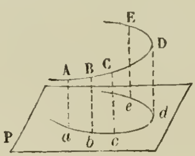
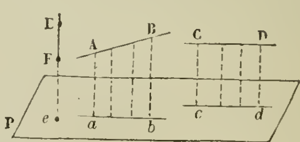


Fig. 294.



THÉORÈME.

527. *La projection d'une ligne droite* AB *sur un plan* P *est une ligne droite* (*fig.* 294).

Car toutes les perpendiculaires Aa, Bb, ... abaissées sur le plan P par les divers points de la droite AB sont parallèles (519); leur lieu est donc un plan (492), et, par suite, le lieu de leurs pieds est la droite ab suivant laquelle ce plan coupe le plan P.

SCOLIES.

528. Lorsque la droite est, comme EF, perpendiculaire au

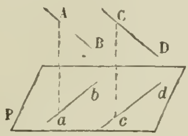
plan P, sa projection sur ce plan se réduit évidemment à un point *e*.

529. Lorsque la droite est, comme CD, parallèle au plan P, elle est parallèle à sa projection *cd* sur ce plan (495).

COROLLAIRES.

530. *Les projections ab et cd de deux droites parallèles* AB *et* CD, *sur un même plan* P, *sont parallèles* (*fig.* 295).

Fig. 295.



Car la *projetante* A*a* d'un point quelconque de AB et la projetante C*c* d'un point quelconque de CD étant parallèles, les angles BA*a*, DC*c* ont leurs plans parallèles (506); et, par suite, les droites *ab* et *cd*, suivant lesquelles le plan P coupe ces deux plans, sont parallèles.

THÉORÈME.

531. *Lorsque deux droites* AB *et* CD *de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont aussi perpendiculaires entre elles* (*fig.* 296).

Fig. 296.

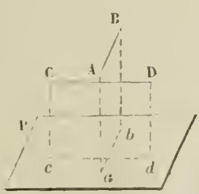
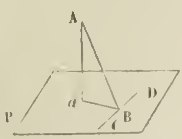


Fig 297.



En effet, la droite *cd* est, comme sa parallèle CD, à angle droit sur AB; elle est d'ailleurs à angle droit sur la projetante A*a*, droite perpendiculaire au plan P qui contient *cd*.

Donc, cd est perpendiculaire au plan ABab et, par suite, à ab.

532. Réciproquement, *deux droites de l'espace* AB *et* CD *sont perpendiculaires l'une à l'autre, si leurs projections ab et cd sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD *sont perpendiculaires entre elles* (*fig.* 296).

En effet, la droite cd, étant à angle droit sur ab et sur Aa, est perpendiculaire au plan ABba. Il en est donc de même de sa parallèle CD, qui, par suite, est perpendiculaire à AB.

Dans le cas très-particulier où le plan P contient CD et où les droites AB et CD se coupent, cette réciproque revient au théorème connu sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires:*

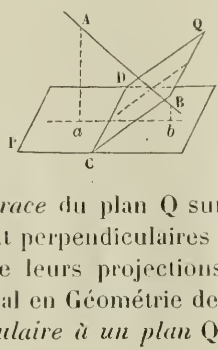
Si du pied a d'une perpendiculaire Aa *à un plan* P *on mène la perpendiculaire* aB *sur une droite quelconque* CD *tracée dans ce plan, la droite* AB *qui joint au point* B *un point quelconque de la perpendiculaire* Aa *est perpendiculaire à* CD (*fig.* 297).

Il y a une seconde réciproque que nous nous contenterons d'énoncer : *Si deux droites rectangulaires ont leurs projections rectangulaires, l'une d'elles au moins est parallèle au plan de projection.*

Corollaire.

533. Considérons une droite quelconque AB et un plan Q perpendiculaire à cette droite; soient ab la projection de AB sur un plan quelconque P (*fig.* 298), et CD l'intersection des

Fig. 298.

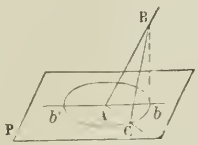


plans P et Q, ou la *trace* du plan Q sur le plan P. Les deux droites AB et CD étant perpendiculaires l'une à l'autre, il doit en être de même de leurs projections ab et CD; de là ce théorème, fondamental en Géométrie descriptive : *Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan* Q, *sa projection sur un* *plan quelconque* P *est perpendiculaire à la trace du plan* Q *sur le plan* P.

THÉORÈME.

534. *Lorsqu'une droite* AB *est oblique à un plan* P, *l'angle aigu* BAb *que cette droite fait avec sa projection sur ce plan est moindre que l'angle* BAC *qu'elle forme avec toute autre droite* AC *passant par son pied dans le plan* (*fig.* 299).

Fig. 299.



En effet, b étant la projection d'un point quelconque B de la droite AB, prenons AC $=$ Ab et menons BC. Les deux triangles BAb, BAC ont deux côtés égaux; mais le troisième côté Bb du premier étant moindre que le troisième côté BC du second, puisque la perpendiculaire est plus courte que l'oblique, il faut que l'angle BAb soit moindre que l'angle BAC.

Scolie.

535. En faisant parcourir au point C le cercle décrit dans le plan P, du point A comme centre avec Ab pour rayon, on voit que l'oblique BC croît d'une manière continue depuis le point b jusqu'au point b', puis décroît en reprenant successivement les mêmes valeurs depuis b' jusqu'en b. Par suite, l'angle BAC, minimum lorsque le point C est en b, croît jusqu'à ce que le point C soit en b' : il est alors maximum; puis il décroît, en reprenant successivement les mêmes valeurs, depuis b' jusqu'en b.

536. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle aigu que cette droite forme avec sa projection sur ce plan.

537. On voit aisément que *l'angle d'une droite* D *et d'un plan* P *est égal à l'angle d'une droite quelconque* D' *parallèle à* D *et d'un plan quelconque* P' *parallèle à* P.

THÉORÈME.

538. *Étant données deux droites* AB *et* CD *non situées dans le même plan : 1° il existe une droite, et une seule, qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit; 2° cette perpendiculaire commune est la plus courte distance des deux droites* (*fig.* 300).

Fig. 300.

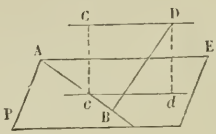
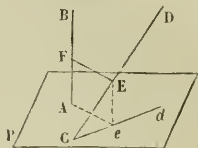


Fig. 301.



En effet :

1° Par un point quelconque A de AB, menons la parallèle AE à CD; le plan BAE, que nous désignerons par P, sera parallèle à CD; par suite, nous aurons la projection de CD sur ce plan P en menant une parallèle *dc* à la droite DC par la projection *d* d'un point quelconque D de cette droite. Cela posé, pour qu'une droite rencontre à la fois AB et CD à angle droit, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire au plan P en un point de AB, et qu'elle ait son pied sur *cd*, lieu des pieds des perpendiculaires au plan P menées par des divers points de CD. Or la perpendiculaire au plan P élevée par le point *c* commun à AB et à *cd* remplit seule ces conditions. Il existe donc une droite C*c*, et une seule qui rencontre à angle droit les deux droites données AB et CD.

2° Cette perpendiculaire commune C*c* est moindre que toute autre droite BD joignant un point de AB à un point de CD. Car, D*d* étant la projetante du point D, on a évidemment $Cc = Dd$ et $Dd < DB$.

Scolies.

539. La démonstration qui précède permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites AB et CD. Voici un second procédé très usuel (*fig.* 301).

Si l'on prend pour plan de projection un plan P *perpendiculaire à l'une quelconque* AB *des deux droites données* AB *et* CD, *la plus courte distance* EF *se projette en vraie gran-*

deur, suivant la perpendiculaire A*e abaissée du point* A *projection de* AB *sur la droite* C*d projection de* CD. En effet, EF étant perpendiculaire à AB est parallèle au plan P; elle se projette donc en vraie grandeur sur ce plan, et l'angle droit CEF se projette suivant un angle droit; la projection de EF est donc la perpendiculaire A*e* menée du point A sur la projection C*d* de CD.

540. Enfin, si l'on ne veut que la *distance*, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire commune, il suffit de mener par l'une AB des deux droites un plan P parallèle à l'autre CD, et de prendre la distance D*d* d'un point quelconque de CD au plan P (*fig.* 300).

§ V. — ANGLES DIÈDRES.

DÉFINITIONS.

541. Lorsque deux plans P et Q se rencontrent (*fig.* 302) et sont terminés à leur intersection commune BE, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*. Les deux plans P et Q sont les *faces*, et la droite BE est l'*arête* de cet angle.

542. Pour désigner un angle dièdre isolé, il suffit d'indiquer son arête; ainsi l'on dit (*fig.* 302) l'angle dièdre BE. Mais, lorsque plusieurs angles dièdres ont la même arête, pour désigner celui d'entre eux que l'on considère, il faut employer quatre lettres, savoir : une lettre pour chaque face et deux

Fig. 302.

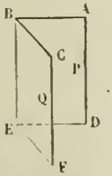


Fig. 303.

pour l'arête; on place d'ailleurs les deux lettres relatives à l'arête entre les deux autres. Ainsi, dans la *fig.* 303, on distingue les trois dièdres CABD, DABE, CABE.

Deux angles, tels que CABD, DABE (*fig.* 303), qui ont la même arête AB, une face commune ABD, et les deux autres faces situées de part et d'autre de la face commune, sont dits *adjacents*.

543. Deux angles dièdres sont égaux lorsqu'on peut les faire coïncider. Pour ajouter deux angles dièdres, on transporte le second à la suite du premier de manière à former deux angles adjacents, tels que CABD, DABE (*fig.* 303); l'angle CABE des deux faces non communes ABC, ABE est la somme des deux angles dièdres proposés.

544. On acquiert une idée nette de la grandeur de l'angle dièdre, en supposant que l'une des faces P, d'abord appliquée sur l'autre face Q (*fig.* 304), tourne autour de la droite AB; dans cette rotation, le plan mobile P fait avec le plan fixe Q un angle dièdre qui croît d'une manière continue.

Fig. 304.

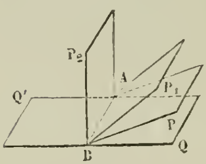


Fig. 305.

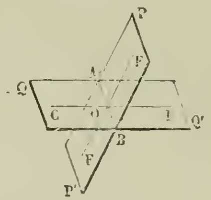
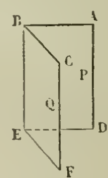


Fig. 306.



Un plan P_2 est dit *perpendiculaire* sur un plan QQ' (*fig.* 304), lorsque les deux angles adjacents P_2ABQ, P_2ABQ', qu'il forme avec celui-ci, sont égaux. Un plan P, qui forme avec QQ' des angles adjacents PABQ, PABQ', inégaux, est dit *oblique* sur le plan QQ'.

On nomme *angle dièdre droit* tout dièdre P_2ABQ dont une face est perpendiculaire sur l'autre.

545. Deux angles dièdres sont dits *opposés par l'arête* lorsque les faces de l'un sont les prolongements des faces de l'autre. Deux plans indéfinis PP', QQ' (*fig.* 305) forment en se coupant quatre angles dièdres qui sont deux à deux opposés par l'arête AB.

On nomme *plan bissecteur* d'un angle dièdre le plan qui, mené par l'arête, divise cet angle dièdre en deux autres dièdres égaux entre eux.

546. On appelle *angle plan correspondant à un angle dièdre* l'angle rectiligne que l'on forme en élevant, par un même point de l'arête, une perpendiculaire à cette arête dans chacune des faces. Ainsi, B étant un point de l'arête BE de l'angle dièdre PEBQ (*fig.* 306), si l'on élève dans le plan P la perpendiculaire BA sur l'arête BE, et dans le plan Q la perpendiculaire BC sur l'arête BE, l'angle ABC sera l'*angle plan* du dièdre considéré.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que la grandeur de l'angle plan correspondant à un angle dièdre soit la même, en quelque point de l'arête qu'on forme cet angle plan. Or, soient les angles plans ABC, DEF, formés en deux points B et E de l'arête de l'angle dièdre PBEQ (*fig.* 306) : les côtés BC et EF sont parallèles et de même sens, comme étant, dans un même plan Q, perpendiculaires à la même droite BE; il en est de même de BA et de ED par rapport au plan P; les angles ABC, DEF sont donc égaux.

Il est à remarquer que le plan ABC est perpendiculaire à l'arête BE; réciproquement, tout plan perpendiculaire à l'arête coupe les faces suivant des perpendiculaires à cette arête, et, par suite, l'angle dièdre suivant son angle plan.

THÉORÈME.

547. *Par une droite* AB, *située dans un plan* QQ', *on peut toujours élever un plan* P, *perpendiculaire sur ce plan, et l'on ne peut en élever qu'un* (*fig.* 304).

Corollaires.

548. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

La démonstration de ce théorème et de son corollaire est tout à fait semblable à celle qui a été donnée aux n^{os} 13 et 14 de la Géométrie plane.

Un angle dièdre est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est inférieur ou supérieur à l'angle dièdre droit. Deux angles dièdres sont *complémentaires* lorsque leur somme est égale à un angle dièdre droit.

549. *Tout plan* P *qui en rencontre un autre* QQ′ *fait avec celui-ci deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ′, *dont la somme est égale à deux dièdres droits* (*fig.* 304). Réciproquement, *si deux angles dièdres adjacents* PABQ, PABQ′ *sont supplémentaires, c'est-à-dire ont une somme égale à deux dièdres droits, leurs faces non communes* Q *et* Q′ *sont dans le prolongement l'une de l'autre.* (*Voir* les n^{os} 16, 17 et 18.)

550. *Lorsque deux plans* PP′, QQ′ *se coupent, les angles dièdres opposés par l'arête* AB *sont égaux* (*fig.* 305). (*Voir* le n° 21.)

THÉORÈME.

551. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

Il suffit (*voir* Note I) de prouver :

1° Que *si deux angles dièdres* AIOB, A′I′O′B′ *sont égaux, leurs angles plans* AOB, A′O′B′ *sont égaux* (*fig.* 307);

2° Que *si un angle dièdre* AIOC *est la somme de deux autres angles dièdres* A′I′O′B′, BIOC, *son angle plan* AOC *est la somme des angles plans* A′O′B′, BOC, *qui correspondent aux deux autres angles dièdres* (*fig.* 307).

En effet :

1° Transportons l'angle dièdre A′I′O′B′, de manière que l'angle droit I′O′A′ s'applique sur l'angle droit IOA; puisque

Fig. 307.

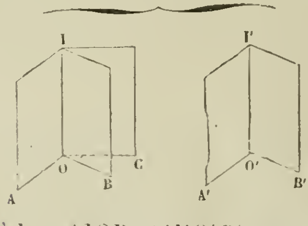
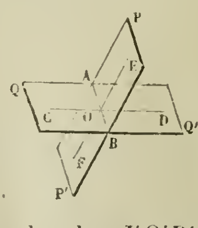


Fig. 308.



les dièdres AIOB, A′I′O′B′ sont égaux, le plan I′O′B′ tombera sur le plan IOB, et O′B′ coïncidera avec la perpendiculaire à IO élevée dans le plan IOB par le point O, c'est-à-dire avec OB; les angles plans AOB, A'O'B' sont donc égaux.

2° Puisque l'angle plan A'O'B' est égal à AOB, pour prouver que l'angle plan AOC est égal à la somme de A'O'B' et de BOC, il suffit de faire voir que les trois droites OC, OB, OA sont dans un même plan; or cela résulte du n° 521.

Corollaire.

552. Par suite, *tout angle dièdre a la même mesure que l'angle plan correspondant, pourvu que l'on prenne pour unité d'angle dièdre l'angle dièdre auquel correspond l'angle plan choisi pour unité d'angle plan ;* ou, d'une manière incorrecte, mais plus rapide, *tout angle dièdre a pour mesure son angle plan.*

Scolies.

553. *L'angle dièdre droit a pour angle plan un angle droit,* et, inversement, *un angle dièdre est droit si son angle plan est droit.* En effet, soient PABQ, PABQ' (*fig.* 308) deux angles dièdres adjacents formés par la rencontre du plan P et du plan QQ' : par un point O de l'arête AB, menons un plan perpendiculaire à cette arête; ce plan déterminera, par ses intersections avec les plans P et QQ', deux angles rectilignes adjacents EOC, EOD, qui seront les angles plans des deux angles dièdres proposés. Or, quand les deux dièdres sont égaux, les deux angles plans sont égaux, et réciproquement.

554. La proportionnalité des angles dièdres et des angles plans correspondants permet de conclure un grand nombre de propriétés des angles dièdres des propriétés analogues des angles rectilignes démontrées en Géométrie plane. Nous citerons, par exemple, les propositions suivantes, qui sont souvent utiles :

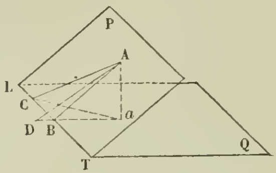
Le plan bissecteur d'un angle dièdre est le lieu des points qui, situés dans l'intérieur de cet angle, sont équidistants de ses faces ; etc. (*Voir* le n° 50.)

Deux angles dièdres qui ont leurs faces parallèles deux à deux sont égaux ou supplémentaires. (*Voir* le n° 66.)

THÉORÈME.

555. *Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point* A *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* AB *abaissée du point* A *sur l'intersection* LT *des deux plans* P *et* Q (*fig.* 309).

Fig. 309.



Soient AC une droite quelconque menée par le point A dans le plan P, et a la projection du point A sur le plan Q; aB et aC seront les projections de AB et de AC, et il s'agit de démontrer (536) que l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa. Or, la droite aB étant perpendiculaire sur LT, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite aC est une oblique, et l'on a $a\mathrm{B} < a\mathrm{C}$. Si l'on prend sur la droite aB, à partir du point a, une longueur aD égale à aC, le point D sera donc situé au delà de B, et l'angle ABa extérieur au triangle ABD surpassera l'angle intérieur ADa; mais, les triangles AaC et AaD étant égaux comme ayant un angle droit égal compris entre deux côtés égaux, l'angle ADa est égal à l'angle ACa; donc enfin l'angle ABa est plus grand que l'angle ACa.

Scolie.

556. Lorsque le plan Q est horizontal, la droite AB prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P. L'angle de cette ligne avec le plan Q est l'angle plan du dièdre PLTQ. Par chaque point d'un plan passe une ligne de plus grande pente de ce plan, et une seule.

§ VI. — PLANS PERPENDICULAIRES.

THÉORÈME.

557. *Lorsque deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires l'un à l'autre, toute droite* AB, *menée dans le premier plan* P *per-*

pendiculairement à l'intersection commune CD, *est perpendiculaire à l'autre plan* Q (*fig.* 310).

En effet, les deux plans P et Q étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'angle plan correspondant à l'angle dièdre PCDQ doit être droit ; or on forme cet angle plan ABE en élevant, dans le plan Q et par le point B, la perpendiculaire BE à CD ; donc la droite AB est perpendiculaire à BE, et, comme elle l'est aussi par hypothèse à CD, elle est perpendiculaire au plan Q.

Fig. 310.

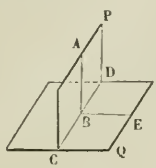
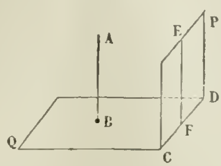


Fig. 311.



THÉORÈME.

558. *Si une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* Q, *tout plan* P *passant par cette droite ou parallèle à cette droite est perpendiculaire au plan* Q.

En effet :

1° Si le plan P passe par AB (*fig.* 310), menons dans le plan Q et par le point B la perpendiculaire BE à l'intersection CD des deux plans P et Q. L'angle ABE sera droit, puisque la droite AB est, par hypothèse, perpendiculaire au plan Q; d'ailleurs, cet angle ABE est l'angle plan du dièdre PCDQ ; donc ce dièdre est droit, et le plan P est perpendiculaire au plan Q.

2° Si le plan P est parallèle à AB (*fig.* 311), menons par un point quelconque E de ce plan la parallèle EF à AB ; cette droite EF sera à la fois perpendiculaire au plan Q et située dans le plan P. Donc le plan P, passant par une droite EF perpendiculaire au plan Q, sera perpendiculaire à ce plan (1°).

559. Réciproquement, *si deux plans* Q *et* P *sont perpendiculaires entre eux, toute droite* AB *perpendiculaire au premier plan* Q *est située dans l'autre plan* P *ou lui est parallèle.*

En effet, si la droite AB n'avait qu'un seul point commun avec le plan P, en menant de ce point une perpendiculaire sur l'intersection CD des plans P et Q (*fig.* 311), cette perpendiculaire serait perpendiculaire au plan Q, et l'on pourrait mener d'un même point deux perpendiculaires au plan Q; ce qui est impossible. La droite AB, ne pouvant couper le plan P, est donc parallèle à ce plan ou située dans ce plan.

Corollaire.

560. *Par une droite* AB *oblique à un plan* P (*fig.* 312), *on peut abaisser un plan perpendiculaire sur ce plan* P, *et l'on ne peut en abaisser qu'un.*

En effet, le plan BAa, déterminé par la droite AB et par la perpendiculaire Aa au plan P abaissée d'un point quelconque de AB, est perpendiculaire au plan P. C'est le seul, car tout plan conduit par AB perpendiculairement au plan P doit contenir la perpendiculaire Aa.

Fig. 312.

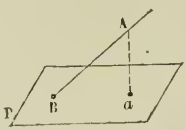
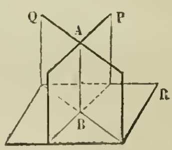


Fig. 313.



THÉORÈME.

561. *Si deux plans* P *et* Q *sont perpendiculaires à un troisième* R, *leur intersection* AB *est perpendiculaire à ce troisième plan* (*fig.* 313).

Car si, par un point quelconque de l'intersection AB, on mène la perpendiculaire au plan R, cette perpendiculaire doit se trouver à la fois dans le plan P et dans le plan Q (559); elle ne diffère donc pas de AB.

Corollaires.

562. Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.

563. Si les plans P et Q de la *fig.* 313 forment un angle dièdre droit, les trois plans P, Q, R seront perpendiculaires entre

eux ; l'intersection de deux quelconques de ces plans sera perpendiculaire au troisième, et les trois intersections seront perpendiculaires entre elles.

§ VII. — ANGLES POLYÈDRES.

DÉFINITIONS.

564. Considérons des demi-droites issues d'un même point S (*fig.* 314), et assignons-leur un ordre déterminé SA, SB, SC, SD, SE. La figure formée par les demi-droites et par les angles plans ASB, BSC, CSD, DSE, ESA, compris entre chaque demi-droite et la suivante, reçoit le nom d'*angle polyèdre*. Le point S est le *sommet*, les droites SA, SB, SC, ..., sont les *arêtes*, et les angles ASB, BSC, CSD, ... sont les *faces* de l'angle polyèdre.

On désigne un angle polyèdre par la lettre du sommet suivie des lettres relatives aux diverses arêtes. Ainsi, pour indiquer l'angle polyèdre de la *fig.* 314, on dira l'angle SABCDE, ou plus simplement l'angle S; car, quand un angle polyèdre est isolé, la lettre du sommet suffit.

Fig. 314.

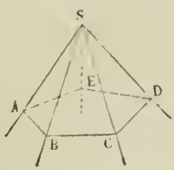
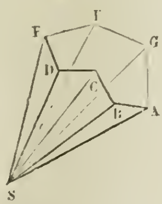


Fig. 315.

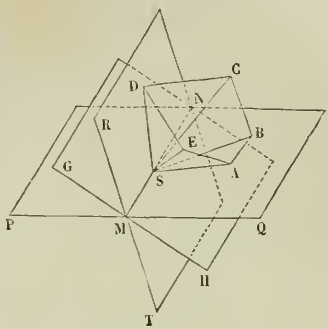


Il faut au moins trois plans pour former un angle polyèdre. L'angle formé par trois plans prend le nom d'*angle trièdre*. Dans un angle trièdre BACS (*fig.* 314), on distingue six éléments, savoir : les trois faces SBA, SBC, ABC, et les trois dièdres BA, BC, BS.

565. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe*, lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan indéfini de chacune de ses faces (*fig.* 314); il est *concave* dans le cas contraire (*fig.* 315).

Considérons un angle polyèdre convexe SABCDE (*fig.* 316) : ses arêtes seront, d'après la définition de la convexité, situées toutes d'un même côté du plan PQ d'une face quelconque ASB : dans la *fig.* 316, nous les avons placées, pour fixer les

Fig. 316.



idées, au-dessus de ce plan. Par le point S, dans le plan PQ, menons une droite MN située en dehors de l'angle ASB, et concevons une série de plans menés par la droite MN et contenant successivement chacune des arêtes SC, SD, SE. Si DSM ou RMN est celui de tous ces plans qui fait le plus petit angle avec la portion PMN du plan PQ, l'angle polyèdre proposé SABCDE sera situé tout entier dans l'angle dièdre RMNQ formé par la partie antérieure Q et la partie supérieure R des deux plans PQ, RT. Donc, tout plan GH mené par MN et situé dans l'angle dièdre PMNR et dans son opposé par l'arête QMNT sera un plan mené par le sommet S et laissant toutes les arêtes d'un même côté. Par suite, tout plan parallèle au plan GH et situé, comme l'angle polyèdre SABCDE, à droite de GH, coupera toutes les arêtes de cet angle sans passer par le sommet. Le section sera donc un polygone ABCDE ayant autant de côtés que l'angle polyèdre a de faces, et ce polygone sera convexe ; car, l'angle polyèdre étant tout entier d'un même côté, par rapport au plan de chacune de ses faces, le polygone se trouvera, par là même, situé tout entier d'un même côté par rapport à chacune des droites indéfinies qui unissent deux sommets consécutifs quelconques.

566. Si l'on prolonge au delà du sommet S toutes les arêtes d'un angle polyèdre SABCDE (*fig.* 317), on obtient un autre angle polyèdre SA′B′C′D′E′ qui est dit le *symétrique* du premier.

Deux angles polyèdres symétriques SABCDE, SA′B′C′D′E′ ont tous leurs éléments respectivement égaux : les faces ASB et A′SB′, BSC et B′SC′, ... sont égales deux à deux comme angles plans opposés par le sommet, et les angles dièdres SA et SA′, SB et SB′, ... sont égaux comme opposés par l'arête. Mais la disposition des parties égales n'est pas la même dans les deux angles polyèdres. En effet, un observateur couché sur l'arête SA, ayant la tête en S, les pieds en A, et regardant l'intérieur de l'angle SABCDE, verrait les arêtes se présenter de

Fig. 317.

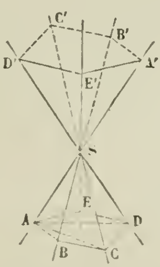
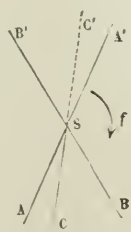


Fig. 318.



droite à gauche dans l'ordre SB, SC, SD, SE; tandis qu'un observateur placé de la même manière dans l'autre angle SA′B′C′D′E′, c'est-à-dire couché sur SA′, ayant la tête en S, les pieds en A′ et regardant l'intérieur de l'angle, verrait les arêtes se succéder de droite à gauche dans l'ordre inverse SE′, SD′, SC′, SB′.

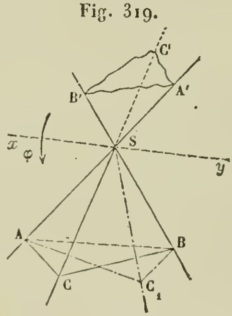
A cause de cette différence de disposition, *deux angles polyèdres symétriques, bien qu'égaux dans toutes leurs parties, ne sont pas superposables.*

En effet, considérons, par exemple, deux trièdres symétriques SABC et SA′B′C′ (*fig.* 318), et supposons, pour fixer les idées, que l'arête SC soit en avant du plan ASB, et, par suite, que son prolongement SC′ soit en arrière du même plan. Il y a deux manières différentes d'essayer la superposition des deux trièdres.

1° Concevons (*fig.* 318) la perpendiculaire élevée par le point S sur le plan ASB, et faisons tourner le trièdre SA′B′C′ de 180 degrés autour de cette droite dans le sens de la flèche f; l'arête SA′, qui dans ce mouvement ne sort pas du plan ASB, viendra sur SA; de même SB′ s'appliquera sur SB; mais l'arête SC′ restera toujours en arrière du plan ASB; par suite, dans sa nouvelle position, le trièdre SA′B′C′ ne coïncidera pas avec SABC.

2° Menons (*fig.* 319) la bissectrice xSy de l'angle BSA′, et, autour de cette droite, qui est située dans le plan ASB, faisons

Fig. 319.



tourner le trièdre SA′B′C′ de 180 degrés dans le sens de la flèche φ. L'arête SA′ s'appliquera sur SB, l'arête SB′ sur SA, et, par suite, la face A′SB′ coïncidera avec BSA ; de plus, l'arête SC′ viendra cette fois en avant du plan ASB. Mais la nouvelle position SC_1 de cette arête différera en général de SC ; car, les angles dièdres suivant les arêtes SA et SB étant en général inégaux, il en sera de même des angles dièdres SB et SA′, et, par suite, les plans CSB et C_1SB, étant inégalement inclinés sur le plan ASB, ne coïncideront pas.

On voit cependant que la coïncidence aurait lieu si le trièdre SABC avait les deux angles dièdres SA et SB égaux entre eux. Car, dans cette hypothèse, les plans C_1SB et CSB seraient également inclinés sur le plan ASB; ils tomberaient donc l'un sur l'autre; il en serait de même des plans C_1SA et CSA, et, par suite, les arêtes SC et SC_1 se confondraient. Observons d'ailleurs que la face C′SA′, qui est égale à ASC, s'applique alors sur CSB, de sorte que l'égalité des deux angles dièdres SA et SB entraîne celles des faces CSB et CSA. Donc, en résumé, *pour qu'un trièdre soit superposable à son symétrique, il faut et il suffit que ce trièdre ait deux angles dièdres égaux ; et, dans un tel trièdre, les faces opposées aux dièdres égaux sont égales.*

THÉORÈME.

567. *Dans tout angle polyèdre, une face quelconque est moindre que la somme de toutes les autres.*

Il n'y a lieu à démontrer cette proposition que lorsque la face considérée est plus grande que chacune des autres.

Cela posé, considérons d'abord un angle trièdre SABC (*fig.* 320). Dans la face ASB, que nous supposons plus grande que chacune des deux autres, formons un angle ASD égal à ASC, et prenons, à partir de S, sur les droites SD et SC, des longueurs SC et SD égales entre elles. Par le point D, menons une droite ABD qui rencontre les arêtes SA et SB en A et en B ;

Fig. 320.

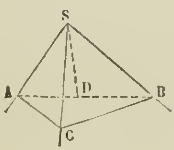
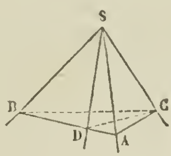


Fig. 321.



enfin, joignons le point C aux points A et B. L'égalité des deux triangles ASD, ASC, qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donne $AD = AC$; et comme on a

$$AB \quad \text{ou} \quad AD + DB < AC + CB,$$

on voit que le segment BD est moindre que CB. Dès lors, les deux triangles CSB, DSB, ayant SB commun, $SC = SD$, et $DB < BC$, il faut (41) que l'angle DSB soit moindre que CSB. Donc, en ajoutant d'une part l'angle ASD et de l'autre son égal ASC, on a

$$ASD + DSB \quad \text{ou} \quad ASB < ASC + CSB.$$

Pour étendre le théorème au cas d'un angle polyèdre quelconque, il suffit de décomposer cet angle en trièdres en menant par l'une des arêtes SA et par les arêtes opposées SC, SD, des plans diagonaux ASC, ASD (*fig.* 317); la démonstration est évidente.

COROLLAIRE.

568. *Dans tout angle trièdre, à un plus grand angle dièdre est opposée une plus grande face.*

Soit (*fig.* 321) le trièdre SABC dans lequel l'angle dièdre SC est plus grand que l'angle dièdre SB. On pourra mener dans le dièdre SC et par l'arête SC un plan CSD qui fasse, avec le plan CSB, un angle dièdre égal au dièdre SB. Le trièdre SBCD ayant deux dièdres égaux, les faces BSD, CSD, opposées à ces angles, seront égales (566). Or le trièdre SACD donne

$$\mathrm{ASC} < \mathrm{ASD} + \mathrm{DSC};$$

on aura donc, en remplaçant la face DSC par son égale DSB,

$$\mathrm{ASC} < \mathrm{ASD} + \mathrm{DSB} \quad \text{ou} \quad \mathrm{ASC} < \mathrm{ASB}.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au dernier alinéa du n° 566, et en raisonnant comme au n° 35, on verra que : RÉCIPROQUEMENT, *si un angle trièdre a deux faces égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux, et si un angle trièdre a deux faces inégales, à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.*

SCOLIE.

569. *Si, par le sommet* S *d'un angle trièdre* SABC, *on mène une droite* SO *à volonté dans l'intérieur de ce trièdre, la somme des angles* OSB, OSC *est moindre que la somme des faces* ASB, ASC.

Si les deux faces d'un angle trièdre sont respectivement égales à deux faces d'un autre angle trièdre, et si l'angle dièdre compris entre les premières est plus grand que l'angle dièdre compris entre les deux autres, la troisième face du premier trièdre est plus grande que la troisième face du second.

Cette dernière proposition est l'analogue de celle du n° 40. Elle se démontre de la même manière. Il est inutile de faire de nouvelles figures; il suffit de regarder la *fig.* 34 comme la section plane des trièdres que l'on considère, les sommets de ces trièdres étant supposés en avant, par exemple, du plan des sections.

THÉORÈME.

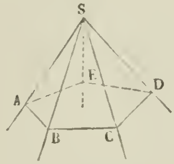
570. *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est moindre que quatre angles droits* (*fig.* 322).

En effet, soit ABCDE un polygone *convexe* obtenu en coupant l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les arêtes (565). En ajoutant les inégalités

$$\begin{aligned} EAB &< EAS + BAS, \\ ABC &< ABS + CBS, \\ BCD &< BCS + DSC, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

que fournissent les trièdres A, B, C,... (567), on voit que la somme des angles intérieurs du polygone ABCDE est moindre que la somme des angles à la base des triangles SAB, SBC, SCD,..., qui ont S pour sommet. Or, la somme des angles tant intérieurs qu'extérieurs du polygone convexe ABCDE est égale à la somme de tous les angles des triangles dont S est le sommet commun. Donc, la somme des angles en S de ces triangles, c'est-à-dire la somme des faces de l'angle polyèdre, est moindre que la somme des angles extérieurs du polygone, c'est-à-dire moindre que quatre angles droits.

Fig. 322.

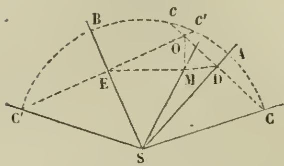


SCOLIE.

571. Il résulte des deux théorèmes précédents (567, 570) que, pour qu'on puisse former un angle trièdre avec trois faces données, *il faut* que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres, et que la somme des trois faces soit moindre que quatre angles droits. Nous allons prouver que ces deux conditions sont *suffisantes*.

Soient (*fig.* 323) ASB la plus grande face, et ASC, BSC', les deux autres faces rabattues dans le plan de la première, de part et d'autre de celle-ci;

Fig. 323.



SC et SC' sont les deux droites provenant du dédoublement de la troisième arête.

Décrivons du point S comme centre un arc de cercle CC' de rayon arbitraire : cet arc sera moindre qu'une circonférence, puisque la somme des trois faces données est inférieure à quatre angles droits. Cc et C'c' étant les cordes menées des points C et C' perpendiculairement aux arêtes SA et SB, les arcs AC et Ac sont égaux entre eux, ainsi que les arcs BC' et Bc'; et comme chacun de ces arcs est moindre que AB, les points c et c' tombent entre A et B. De plus, l'inégalité

$$\text{arc AB} < \text{arc AC} + \text{arc BC}'$$

ou

$$\text{arc AB} < \text{arc A}c + \text{arc B}c',$$

qui exprime que la plus grande face ASB est inférieure à la somme des deux autres, montre que le point c tombe entre B et c'. Il suit de là que les points C et c sont de part et d'autre de la corde C'c'; cette corde coupe donc la corde Cc en un point O situé à l'intérieur du cercle.

Élevons au point O la perpendiculaire OM au plan ASB et, dans le plan DOM, décrivons du point D comme centre, avec un rayon égal à DC, un arc de cercle qui coupera nécessairement la perpendiculaire OM, puisque OD est moindre que DC. M étant le point d'intersection, menons SM : le trièdre SABM sera formé avec les trois faces données. En effet, si l'on tire MD et ME, ces droites seront respectivement perpendiculaires sur SA et sur SB, en vertu du théorème des trois perpendiculaires ; dès lors les deux triangles SDM, SDC sont égaux comme ayant un angle droit compris entre deux côtés égaux chacun à chacun : on en conclut d'abord que la face ASM est égale à la face donnée ASC, et que l'arête SM est égale à SC. Les deux triangles rectangles SME, SC'E ont donc l'hypoténuse égale et un côté commun, et leur égalité prouve que la face MSB est égale à l'autre face donnée BSC'.

THÉORÈME.

572. *Si un angle trièdre* SA′B′C′ *est le trièdre supplémentaire d'un angle trièdre donné* SABC, *réciproquement* SABC *sera le trièdre supplémentaire de* SA′B′C′.

Pour bien comprendre la définition du trièdre supplémentaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque. Par un point O d'un plan P, menons une perpendiculaire OM à ce plan et une oblique ON. Si les deux droites OM et ON *sont d'un même côté du plan* P, l'angle MON qu'elles forment est *aigu* (*fig.* 324), car il est compris dans l'un des angles droits MOT ou MOT′ que fait la perpendiculaire OM avec la trace TOT′ du plan MON sur le plan P. Si les deux droites OM et ON sont *situées de part et d'autre* du plan P,

Fig. 324.

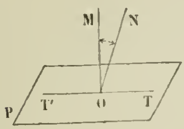


Fig. 325.

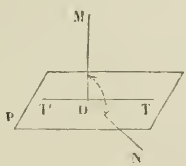
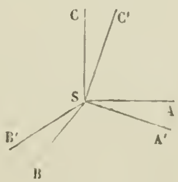


Fig. 326.



l'angle MON est *obtus* (*fig.* 325), car il contient l'un des angles MOT ou MOT′. Donc, réciproquement, suivant que l'angle MON est aigu ou obtus, on peut affirmer que la perpendiculaire OM et l'oblique ON sont d'un même côté du plan P ou de part et d'autre de ce plan.

Cela posé, on nomme trièdre supplémentaire d'un trièdre SABC (*fig.* 326) un nouveau trièdre SA′B′C′ formé de la manière suivante :

Par le sommet S, on élève une perpendiculaire SC′ à la face ASB, du même côté que SC par rapport au plan de cette face; on mène SB′ perpendiculaire à la face ASC, du même côté que SB par rapport au plan ASC, et l'on trace enfin SA′ perpendiculaire à la face BSC, du même côté que SA par rapport au plan BSC.

Il s'agit maintenant de démontrer que le trièdre SABC résulte du trièdre SA′B′C′, comme celui-ci du premier; ou, en d'autres termes, que l'arête SC, par exemple, est perpendiculaire à la face A′SB′ et du même côté que SC′ par rapport au plan de cette face. Or, par hypothèse, SA′ est perpendiculaire au plan CBS et par suite à SC; de même, SB′ est perpendiculaire à SC; donc SC est perpendiculaire au plan A′SB′. De plus, SC′ ayant été menée perpendiculairement au plan ASB et du côté de SC, l'angle CSC′ est aigu; par suite, la perpendiculaire SC au plan A′SB′ et l'oblique SC′ formant un angle aigu, ces deux droites sont situées d'un même côté par rapport à ce plan A′SB′.

THÉORÈME.

573. *Si* SABC *et* SA′B′C′ *sont deux trièdres supplémentaires, chaque angle dièdre de l'un de ces trièdres est le supplément de la face opposée dans l'autre* (*fig.* 327).

La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Lorsque, par un point O *pris sur l'arête d'un angle dièdre* OI, *on élève sur la face* IOA *une perpendiculaire* OA′ *du même côté du plan* IOA *que la face* IOB, *et sur la face* IOB *une perpendiculaire* OB′ *du même côté du plan* IOB *que la face* IOA, *l'angle* A′OB′ *est le supplément de l'angle plan* AOB *qui mesure le dièdre* (*fig.* 328, 329).

Fig. 327.

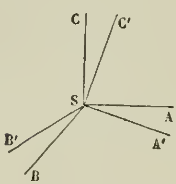


Fig. 328.

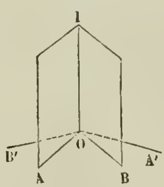
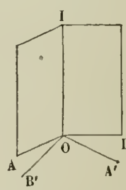


Fig. 329.



Les quatre droites OA, OB, OA′, OB′, sont dans le plan perpendiculaire à OI mené par O; d'ailleurs, OA′ perpendiculaire au plan IOA doit être perpendiculaire à OA, et de même OB′ doit être perpendiculaire sur OB; les angles AOB, A′OB′ sont donc deux angles situés dans un même plan et ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; pour prouver qu'ils sont supplémentaires, il suffit de prouver qu'ils sont toujours d'espèce différente, c'est-à-dire l'un aigu, l'autre obtus. Or, cela résulte de la direction que l'énoncé impose aux perpendiculaires OA′ et OB′. En effet, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 328), l'angle A′OB′ renferme l'angle droit AOA′ et, par suite, est obtus; si l'angle AOB est obtus (*fig.* 329), l'angle A′OB′ est contenu dans l'angle droit AOA′ et, par suite, est aigu.

Cela posé, revenons aux trièdres supplémentaires SABC, SA′B′C′ (*fig.* 327), et considérons, par exemple, le dièdre SC. La droite SB′ est une perpendiculaire à la face CSA de ce dièdre du côté de SB, et par suite du côté de l'autre face CSB; de même, SA′ est une perpendiculaire à la face CSB du dièdre, du côté de la face CSA; donc, l'angle A′SB′ est le supplément de l'angle qui mesure le dièdre SC ou, plus brièvement, le supplément du dièdre SC. On procéderait de même pour les dièdres SA et SB.

Puisque les deux trièdres SABC, SA′B′C′ se déduisent l'un de l'autre par la même construction, il est clair que la propriété qui vient d'être établie pour les dièdres du premier s'étend aux dièdres du second. D'ailleurs, la démonstration serait la même.

C'est en raison de cette double propriété que les deux trièdres ont été appelés *supplémentaires*.

Scolie.

574. Désignons par a, b, c les nombres qui mesurent les faces, et par A, B, C les nombres qui mesurent les angles dièdres d'un angle trièdre, l'angle droit étant pris pour unité d'angle. Les nombres a', b', c', qui mesureront les faces, et ceux A′, B′, C′ qui mesureront les angles dièdres du trièdre supplémentaire, seront donnés par les formules

$$a' = 2 - A, \quad A' = 2 - a,$$
$$b' = 2 - B, \quad B' = 2 - b,$$
$$c' = 2 - C, \quad C' = 2 - c.$$

Si l'on connaît une propriété quelconque d'un angle trièdre, c'est-à-dire une relation entre les éléments a, b, c, A, B, C de cette figure, en appliquant cette relation aux éléments a', b', c', A′, B′, C′ du trièdre supplémentaire, puis en remplaçant ces éléments par leurs valeurs tirées des formules précédentes, on aura une relation nouvelle entre a, b, c, A, B, C, c'est-à-dire une nouvelle propriété du trièdre primitif.

De même, toute propriété relative à plusieurs trièdres *conduira*, par la considération des trièdres supplémentaires des proposés, à une propriété nouvelle de ce système de trièdres.

On conçoit par là l'importance du théorème précédent. Voici d'ailleurs quelques applications de la méthode générale que nous venons d'indiquer.

575. Nous avons vu (570) que la somme des faces d'un trièdre était toujours comprise entre zéro et quatre angles droits. Cherchons le théorème correspondant, ou, comme on dit, le théorème *corrélatif*. Considérons à cet effet le trièdre supplémentaire du proposé; a', b', c' étant ses faces, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4.$$

Par suite, A, B, C étant les dièdres du trièdre proposé, on a

$$0 < (2 - A) + (2 - B) + (2 - C) < 4,$$

ou

$$6 > A + B + C > 2.$$

Ainsi, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.*

Nous avons vu encore (567) que, dans tout trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres : quel est le théorème corrélatif?

Soient a', b', c' les faces du trièdre supplémentaire du trièdre considéré. a' étant la plus grande, on a

$$a' < b' + c';$$

par suite, si A, B, C sont les dièdres du trièdre proposé, on aura

$$2 - A < (2 - B) + (2 - C), \quad \text{ou} \quad A + 2 > B + C.$$

D'ailleurs, le supplément d'un angle diminuant quand cet angle augmente, A doit être le plus petit des dièdres A, B, C, puisque a' est la plus grande des faces a', b', c'. Donc, enfin, la proposition demandée est la suivante : *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres dièdres.*

576. En résumé, pour qu'on puisse former un angle triedre avec trois dièdres donnés A, B, C, *il faut* que leur somme soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit augmenté de deux droits soit supérieur à la somme des deux autres.

Ces conditions sont *suffisantes;* car, quand elles sont remplies, les suppléments a', b', c' des angles donnés A, B, C satisfont aux deux conditions du n° 571. On peut donc, avec les trois faces a', b', c', construire un trièdre; par suite, en construisant le trièdre supplémentaire de celui-là, on aura un trièdre dont les dièdres seront les angles donnés A, B, C.

THÉORÈME.

577. *Deux angles trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés :*

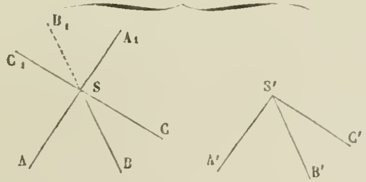
2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ;*

3° *Lorsqu'ils ont leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ;*

4° *Lorsqu'ils ont leurs angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

1° Soient les deux trièdres SABC et S'A'B'C' (*fig.* 330). Par hypothèse, la face ASB est égale à la face A'S'B', les angles

Fig. 330.



dièdres SA et S'A' sont égaux entre eux, ainsi que les dièdres SB et S'B'. On suppose en outre que la disposition est la même, c'est-à-dire que, si un observateur dont la tête est en S, le dos appuyé sur la face ASB et le regard dirigé vers SC, a l'arête SA à sa gauche et l'arête SB à sa droite, un autre observateur, dont la tête serait en S', le dos appuyé sur la face A'S'B' et le regard dirigé vers S'C', aurait l'arête S'A' à sa gauche et l'arête S'B' à sa droite.

Dans ces conditions, les deux trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables. En effet, si l'on place la face A'S'B' sur son égale ASB, de façon que S'A' coïncide avec SA et S'B' avec SB, l'arête S'C' tombe, par rapport au plan ASB, du même côté que SC, sans quoi la disposition des éléments serait différente dans les deux trièdres. Alors, les dièdres SA et S'A' étant égaux, le plan A'S'C' s'applique sur le plan ASC; de même, les dièdres SB et S'B' étant égaux, le plan B'S'C' s'applique sur le plan BSC; donc, enfin, les arêtes S'C' et SC se confondent et les deux trièdres coïncident.

2° Le deuxième cas résulte du précédent, dont il est le *corrélatif* (575). En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont une face égale adjacente à deux dièdres respectivement égaux et semblablement disposés; ils sont donc superposables et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

D'ailleurs, la démonstration directe n'offre aucune difficulté; on voit, par un raisonnement analogue au précédent (1°), que la superposition est possible, si, conformément à l'hypothèse, la disposition des éléments est la même.

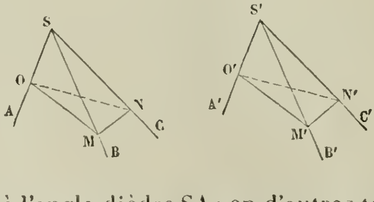
3° Pour le troisième cas, on pourrait prouver par l'absurde que le dièdre SB, par exemple, est égal au dièdre S'B', en s'appuyant sur le second théorème énoncé au n° 569.

Voici d'ailleurs une démonstration directe :

Soient SABC et S'A'B'C' les deux trièdres; il suffit évidemment de démontrer l'égalité de deux dièdres homologues, des dièdres SA et S'A', par exemple.

Supposons d'abord que les deux faces ASB, ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient deux angles aigus. En un point quelconque O de l'arête SA, formons (*fig.* 331) l'angle plan

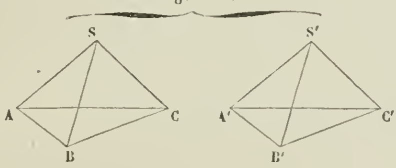
Fig. 331.



correspondant à l'angle dièdre SA; en d'autres termes, élevons par le point O des perpendiculaires sur SA dans les plans ASB et ASC; les angles ASB et ASC étant aigus, ces perpendiculaires rencontrent les arêtes SB et SC en deux points M et N que nous joindrons par une ligne droite. Prenons $S'O' = SO$ et construisons de même en O′ l'angle plan M′O′N′ du dièdre S′A′. Il s'agit de démontrer l'égalité des deux angles plans MON et M′O′N′. Or les deux triangles rectangles SOM, S′O′M′ sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : il en est de même des triangles SON et S′O′N′; par suite, les deux triangles SMN, S′M′N′ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et enfin les deux triangles OMN, O′M′N′ ont les trois côtés égaux chacun à chacun. L'égalité de ces derniers triangles entraîne celle des deux angles MON, M′O′N′.

Supposons en second lieu que les deux angles ASB et ASC, qui comprennent le dièdre SA, soient quelconques, et prenons six longueurs égales $SA = SB = SC = S'A' = S'B' = S'C'$, à partir des sommets, sur les arêtes des deux trièdres (*fig.* 332).

Fig. 332.



Les triangles isocèles ASB et A′S′B′, BSC et B′S′C′, CSA et C′S′A′ sont égaux deux à deux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux; par suite, les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. D'après cela, les deux trièdres A et A′ ont leurs faces respectivement égales; d'ailleurs, les angles SAB, SAC, qui comprennent le dièdre AS, sont aigus comme angles à la base de triangles isocèles; donc, en vertu du raisonnement fait dans l'alinéa précédent, le dièdre AS est égal au dièdre A′S′.

4° Le dernier cas résulte du précédent dont il est le *corrélatif*. En effet, les deux trièdres supplémentaires des proposés ont leurs faces respectivement égales et semblablement disposées; ils sont donc superposables, et, par suite, il en est de même des trièdres primitifs.

SCOLIE.

578. Si, dans chacun des quatre cas examinés, la disposition des éléments égaux était différente dans les deux trièdres, il n'y aurait plus *égalité*, mais seulement *symétrie*. En effet, soient T et T′ les deux trièdres proposés, et T_1 le symétrique de T, c'est-à-dire celui que l'on déduit de T en prolongeant ses arêtes au delà du sommet (*fig.* 330). Les trièdres T et T_1 ont leurs éléments égaux et inversement disposés; par suite, comme T et T′ remplissent par hypothèse toutes les conditions de l'un des cas d'égalité, sauf celle relative à la disposition des parties égales, les trièdres T′ et T_1 satisferont à toutes les conditions de ce cas d'égalité : ils seront donc superposables; d'où l'on voit que T′ est alors superposable au symétrique de T.

579. Nous avons suffisamment signalé dans le courant de ce paragraphe l'analogie entre certaines propriétés des trièdres et des triangles rectilignes. Il importe toutefois d'observer en terminant que, si, à toute propriété des triangles répond une propriété des trièdres, la réciproque n'est pas vraie; par exemple, tandis que l'égalité des angles dièdres de deux trièdres entraîne l'égalité de leurs faces, l'égalité des angles de deux triangles n'entraîne que la proportionnalité des côtés.

§ VIII. — APPENDICE.

QUADRILATÈRE GAUCHE.

580. On dit qu'un quadrilatère ABCD (*fig.* 333) est *gauche* lorsque ses quatre côtés ne sont pas dans un même plan. Pour obtenir une pareille figure, il suffit d'assembler deux triangles ABC, ADC, ayant un côté commun AC, de façon que leurs plans ne coïncident pas.

THÉORÈME.

581. *Quand un plan* P *rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD *en quatre points* a, b, c, d (*fig.* 333), *on a la relation segmentaire*

$$(1)\qquad \frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA} = +1,$$

En effet, en appliquant le théorème de Ménélaüs (310) aux deux triangles ABC et ADC coupés respectivement par les deux transversales ab

Fig. 333.

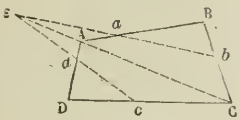
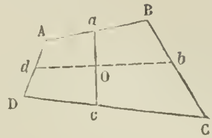


Fig. 334.



et cd, et remarquant que les deux droites ab et cd se rencontrent au point ε où la diagonale AC perce le plan P, on a les égalités

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{\varepsilon C}{\varepsilon A}=1,\quad \frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}\cdot\frac{\varepsilon A}{\varepsilon C}=1,$$

dont le produit est précisément la relation (1).

582. Réciproquement, *si sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD, *on prend quatre points* a, b, c, d, *tels qu'on ait la relation* (1), *ces quatre points sont dans un même plan* (*fig.* 334).

Car le plan P, déterminé par les trois points b, c, d, rencontre le côté AB en un point a', tel qu'on ait (581)

$$\frac{a'A}{a'B}\cdot\frac{bB}{bC}\cdot\frac{cC}{cD}\cdot\frac{dD}{dA}=1.$$

La comparaison de cette relation avec la relation (1), qui a lieu par hypothèse, donne

$$\frac{aA}{aB}=\frac{a'A}{a'B};$$

et cette proportion entraîne (303) la coïncidence des points a' et a.

Corollaires.

583. La relation (1) est satisfaite lorsqu'on a

$$\frac{aA}{aB}=\frac{cD}{cC}\quad\text{et}\quad\frac{bB}{bC}=\frac{dA}{dD}.$$

De là ce théorème : *Si une première droite ac divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* DC *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *et si une seconde droite bd divise proportionnellement les deux autres côtés* BC *et* AD, *ces deux droites sont dans un même plan* (*fig.* 334).

Dans le cas particulier où le plan transversal P est parallèle aux deux côtés opposés BC et AD, les deux points b et d passent à l'infini, les deux rapports $\frac{bB}{bC}$ et $\frac{dD}{dA}$ se réduisent à l'unité, et la relation (1) devient

$$\frac{aA}{aB}\cdot\frac{cC}{cD}=1 \quad \text{ou} \quad \frac{aA}{aB}=\frac{cD}{cC}.$$

Donc : *Tout plan* P, *parallèle à deux côtés opposés* BC *et* AD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *divise proportionnellement les deux autres côtés.*

La démonstration directe de ce théorème est d'ailleurs très-simple : si, par chacune des droites BC et AD, on imagine un plan parallèle au plan P, on a deux droites AB et CD coupées par trois plans parallèles; donc (510), etc.

Réciproquement : *Toute droite ac, qui divise proportionnellement deux côtés opposés* AB *et* CD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *est située dans un plan parallèle aux deux autres côtés* AD *et* BC. Car, si l'on imagine le plan mené par c parallèlement aux droites AD et BC, ce plan doit, en vertu du théorème direct, diviser le côté AB en parties proportionnelles à cC et cD; ce plan contient donc le point a et, par suite, la droite ac.

RAPPORT ANHARMONIQUE DE QUATRE PLANS.

584. Il est aisé de voir que, *lorsque quatre plans* A, B, C, D *passent par une même droite, le rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque est indépendant de la position de ce plan transversal.* Car les quatre droites a, b, c, d, déterminées par un premier plan P, et les quatre droites a', b', c', d', déterminées par un second plan P′, se coupent deux à deux en quatre points α, β, γ, δ, situés sur l'intersection des deux plans P et P′, et le rapport anharmonique des points α, β, γ, δ est égal (321) à celui des droites a, b, c, d, aussi bien qu'à celui des droites a', b', c', d'.

D'après cela, on donne le nom de *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans* passant par une même droite à tout rapport anharmonique du faisceau de quatre droites déterminé par un plan transversal quelconque.

585. *Lorsque quatre plans passent par une même droite, toute transversale les rencontre en quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre plans.* Car ces deux rapports ne sont autres que celui du faisceau de quatre droites déterminé par un plan quelconque contenant la transversale (321, 584).

Un faisceau de quatre plans, A, B, C, D, passant par une même droite, est dit *harmonique* lorsque le rapport anharmonique (A, B, C, D) de ces quatre plans est égal à — 1. Alors, tout plan transversal ou toute sécante détermine un système harmonique de quatre droites ou de quatre points.

PROJECTION CENTRALE OU PERSPECTIVE.

586. Le théorème du n° 527, relatif à la projection d'une droite sur un plan, subsiste lorsque les projetantes des divers points de la droite sont obliques au plan, pourvu qu'elles soient parallèles entre elles ou qu'elles divergent d'un même point de l'espace; car les projetantes sont encore, dans l'un ou l'autre cas, situées toutes dans le plan de l'une d'elles et de la droite que l'on projette.

On est ainsi conduit à étendre le sens du mot *projection*.

La projection m d'un point M sur un plan P est dite *orthogonale*, *oblique* ou *centrale*, suivant que la projetante Mm est perpendiculaire au plan P, ou qu'elle est parallèle à une direction fixe oblique à ce plan, ou enfin qu'elle est issue du point fixe S de l'espace.

La projection orthogonale, oblique ou centrale d'une figure est le lieu des projections orthogonales, obliques ou centrales de ses divers points, en supposant, bien entendu, dans les deux derniers cas, que la direction oblique des projetantes, ou que le centre S de projection, ne change pas quand on passe d'un point à un autre de la figure que l'on projette.

La *perspective* d'une figure sur un tableau P n'est autre chose que la projection centrale de cette figure sur le plan P, la position de l'œil étant prise pour centre S de projection.

D'après cela, le théorème du n° 585 peut encore être énoncé de la manière suivante :

Lorsque quatre droites concourantes sont situées dans un même plan, si l'on construit leur projection orthogonale, oblique ou centrale, sur un plan quelconque, on obtient quatre droites concourantes dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre premières.

Le théorème du n° 530 relatif aux projections de deux droites parallèles subsiste, ainsi que la démonstration, pour la projection *oblique*; mais il cesse d'être vrai pour la projection *centrale*. Nous allons, à cette occasion, donner, sur la projection centrale ou perspective, quelques définitions et quelques principes fondamentaux qu'il est indispensable de connaître.

587. On nomme *droite de front* toute droite parallèle au tableau, et *plan de front* tout plan parallèle au tableau.

On appelle *trace d'une droite* D le point t où elle rencontre le tableau P (*fig.* 335), et *trace d'un plan* la droite suivant laquelle ce plan coupe le tableau. Une droite de front n'a pas de trace, ou plutôt sa trace est à l'infini ; il en est de même d'un plan de front. Quand une droite SF passe par le centre S de projection, sa perspective se réduit à un point f, qui est sa trace. Quand un plan passe par le centre de projection, tous les points de ce plan ont donc leurs perspectives sur la trace du plan.

On nomme *point de fuite d'une droite* D non parallèle au tableau la trace f de la parallèle Sf menée à cette droite par le centre S de projection. Quand un point M s'éloigne de plus en plus sur la droite D, la projetante SM de ce point tend vers la position Sf, et la perspective m du point M tend vers f ; le point de fuite f d'une droite D est donc la perspective du point à l'infini de cette droite.

Lorsque plusieurs droites D, D', D'', ..., *non parallèles au tableau, sont parallèles entre elles,* elles ont le même point de fuite ; *leurs perspectives* d, d', d'', ... *concourent* donc en ce point f.

Une droite de front Δ n'a pas de point de fuite, ou plutôt son point de fuite est à l'infini ; elle a *pour perspective une droite* δ *qui lui est parallèle,* car son plan projetant, passant par une droite Δ parallèle au tableau, coupe le tableau suivant une parallèle δ à cette droite. Il résulte de là que, *si plusieurs droites de front sont parallèles, leurs perspectives sont parallèles.*

Fig. 335.

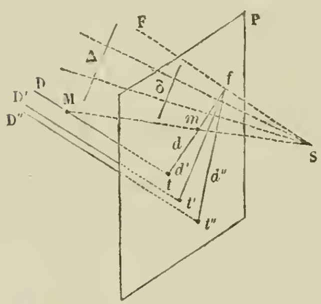
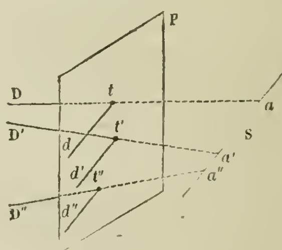


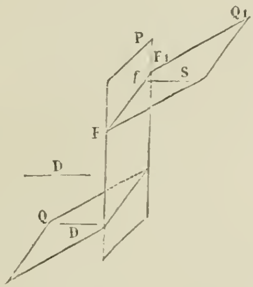
Fig. 336.



Les droites de front, parallèles entre, elles ne sont pas les seules droites qui aient leurs perspectives parallèles. *Pour que des droites* D, D', D'', ... (*fig.* 336) *aient leurs perspectives* d, d', d'',... *parallèles entre elles, il faut et il suffit qu'elles rencontrent une même droite de front* SU *passant par le centre* S *de projection.* En effet, la condition est nécessaire ; car, si les traces d, d', d'',... des plans projetants Std $St'd'$, $St''d''$ sont parallèles, ces plans se coupent suivant une droite SU parallèle (500) à d, d', d'', ..., c'est-à-dire suivant une droite de front qui rencontre chacune des droites D, D' ,D'',.... La condition est suffisante ; car, si elle est remplie, les plans projetants SaD, $Sa'D'$, $Sa''D''$,..., passant tous par une même droite de front SU, auront leurs traces d, d', d'', ... parallèles à cette droite (495). On retombe sur le même résultat que celui obtenu dans le cas très-particulier signalé d'abord, lorsque les droites D, D', D'', ... rencontrent à l'infini la droite de front SU.

588. On appelle *ligne de fuite* d'un plan Q, non parallèle au tableau P la trace FF_1 du plan Q_1, mené par le centre S de projection parallèlement au plan Q (*fig.* 337). Plusieurs plans parallèles ont donc la même ligne de fuite.

Fig. 337.



Quand une droite D *est parallèle à un plan* Q *ou située dans ce plan, son point de fuite f est sur la ligne de fuite* FF_1 *du plan ;* car la parallèle Sf à D, menée par S, est contenue dans le plan Q_1 (497).

Les points à l'infini de toutes les droites du plan Q ont, d'après cela, leurs perspectives sur la ligne de fuite FF_1 de ce plan et, comme la perspective d'une ligne plane, dont le plan ne contient pas le centre S de projection, n'est une droite qu'autant que cette ligne est droite elle-même, on voit qu'*on est conduit à considérer tous les points à l'infini d'un plan* Q *comme étant en ligne droite*. On nomme cette droite la *droite de l'infini du plan* Q.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§ I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DU PRISME.

DÉFINITIONS.

589. On appelle *polyèdre* tout corps terminé de toutes parts par des plans.

Ces plans, en se limitant mutuellement, déterminent les *arêtes*, les *faces* et les *sommets* du polyèdre. Les angles dièdres et polyèdres formés par les faces sont les angles dièdres et polyèdres de la figure. Le polyèdre a pour *diagonales* les droites qui unissent deux sommets quelconques non situés sur une même face.

On a donné des noms particuliers à certains polyèdres d'après le nombre de leurs faces. Ainsi tout polyèdre ayant quatre faces est un *tétraèdre*. Les noms *hexaèdre*, *octaèdre*, *dodécaèdre*, *icosaèdre* correspondent aux polyèdres de six, huit, douze, vingt faces.

590. Un polyèdre est *convexe*, lorsqu'il reste tout entier d'un même côté de chacune de ces faces prolongées indéfiniment.

Une droite quelconque ne peut rencontrer la surface d'un polyèdre convexe en plus de deux points. Car tout plan mené suivant cette droite rencontre nécessairement la surface du polyèdre suivant un polygone convexe (26), dont le contour a, avec la droite donnée, les mêmes points d'intersection que la surface du polyèdre.

Dans ce qui suit, il ne s'agira que de polyèdres convexes.

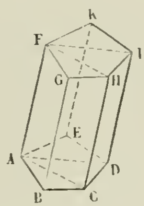
591. Parmi les polyèdres, on distingue le *prisme* et la *pyramide*.

Le *prisme* est un polyèdre compris sous plusieurs plans parallélogrammes réunis entre eux par deux faces opposées égales et parallèles.

On construit un prisme de la manière suivante :

Soit (*fig.* 338) ABCDE un polygone plan quelconque. Par le sommet A, menons extérieurement au plan de ce polygone

Fig. 338.



la droite AF et, par le point F, un plan parallèle au plan ABCDE; puis, par les sommets B, C, D, E, traçons jusqu'à la rencontre du plan mené par le point F les droites BG, CH, DI, EK, parallèles à AF. Ces droites sont toutes égales à AF (510); toutes les faces ABGF, BCHG, CDIH, ... sont donc des parallélogrammes. De plus, les deux polygones parallèles ABCDE, FGHIK sont égaux comme ayant leurs côtés égaux et parallèles. Le polyèdre obtenu est donc un prisme.

592. Si la droite AF est perpendiculaire au plan ABCDE, le prisme est *droit;* sinon, il est *oblique*.

Les droites AF, BG, CH, ... sont les *arêtes latérales* du prisme, et la somme des faces parallélogrammes ABGF, BCHG, ... forme son aire latérale.

Le prisme a pour *bases* les deux polygones égaux et parallèles ABCDE, FGHIK, et sa *hauteur* est la distance des plans de ses deux bases.

593. Dans un prisme droit, chaque arête latérale est égale à la hauteur. Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles.

Dans un prisme oblique, la hauteur est moindre que l'arête latérale.

Un prisme *régulier* est un prisme droit qui a pour bases des polygones réguliers.

594. Suivant que les bases d'un prisme sont des triangles, des quadrilatères, des pentagones, des hexagones, etc., le prisme est dit *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *hexagonal*, etc.

595. Parmi les prismes quadrangulaires, on distingue celui qui a pour bases des parallélogrammes, et on lui donne le nom de *parallélipipède*. Toutes les faces d'un parallélipipède sont des parallélogrammes (*fig*. 339).

Un parallélipipède peut être *droit* ou *oblique* (592).

Parmi les parallélipipèdes droits, on distingue le *parallélipipède rectangle*, dont les bases sont des rectangles. Toutes les faces d'un parallélipipède rectangle sont des rectangles (*fig*. 340).

On nomme *cube* le parallélipipède rectangle dont les bases et les faces latérales sont des carrés, nécessairement égaux (*fig*. 341).

On remarquera que, la perspective déformant les angles, la *fig*. 340 représente aussi bien un parallélipipède droit qu'un parallélipipède rectangle.

Fig. 339.

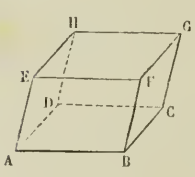


Fig. 340.

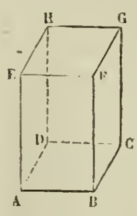
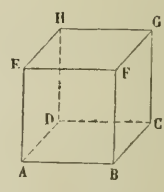


Fig. 341.



596. De même qu'on appelle *dimensions* d'un rectangle les longueurs de deux côtés adjacents, on appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs de trois arêtes contiguës, c'est-à-dire partant d'un même sommet. Le paral-

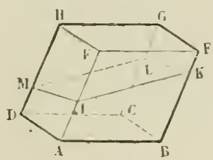
lélipipède rectangle AG (*fig.* 340) a pour dimensions les longueurs des arêtes AB, AD, AE.

THÉORÈME.

597. *Les faces opposées d'un parallélipipède sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 342) le parallélipipède AG. Ses bases ABCD, EFGH sont, par définition, des parallélogrammes égaux et parallèles.

Fig. 342.



Il faut donc prouver seulement que deux faces latérales opposées, ADHE et BCGF par exemple, remplissent la même condition. Or, AD et BC sont égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABCD; AE et BF sont aussi égaux et parallèles comme côtés opposés du parallélogramme ABFE. Par suite, les deux angles DAE et CBF sont égaux, et leurs plans sont parallèles. Les deux parallélogrammes ADHE, BCGF sont donc égaux et parallèles.

Corollaires.

598. Le parallélipipède étant un prisme compris sous six faces parallélogrammes dont les opposées sont égales et parallèles, *on peut prendre pour bases d'un parallélipipède deux faces opposées quelconques* (591).

599. *Tout plan qui rencontre deux faces opposées d'un parallélipipède le coupe suivant un parallélogramme.* Soit le plan IKLM (*fig.* 342) qui rencontre les deux faces opposées ADHE et BCGF du parallélipipède AG. Les côtés opposés de la section IKLM étant parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, cette section est un parallélogramme.

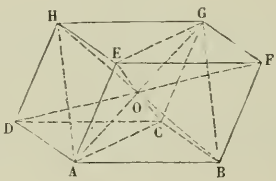
Scolie.

600. Pour construire un parallélipipède sur trois droites données AB, AD, AE, partant d'un même point A et non situées dans un même plan (*fig.* 342), il suffit de mener par l'extrémité non commune de chacune de ces droites un plan parallèle au plan des deux autres. Ainsi, par le point E, on conduira un plan parallèle au plan BAD, par le point D un plan parallèle au plan BAE, par le point B un plan parallèle au plan DAE. Le polyèdre compris sous les six plans considérés sera un parallélipipède.

THÉORÈME.

601. *Dans un parallélipipède, les quatre diagonales se coupent mutuellement en parties égales.*

Fig. 343.



Soit (*fig.* 343) le parallélipipède AG et ses quatre diagonales AG, CE, BH, DF. Les deux côtés AE et CG étant égaux et parallèles, la figure ACGE est un parallélogramme dont les diagonales AG et CE se coupent mutuellement au point O en parties égales. La figure ABGH étant aussi un parallélogramme, les diagonales AG et BH se coupent mutuellement en parties égales, c'est-à-dire au point O milieu de AG. On prouverait de même que la quatrième diagonale DF passe au point O et y est divisée en parties égales.

Scolies.

602. On appelle *centre* d'un parallélipipède le point de rencontre de ses quatre diagonales.

Toute droite KL passant par le point O et limitée à la surface du parallélipipède AG (*fig.* 343) est divisée au point O en deux parties égales. En effet, le plan déterminé par cette droite et la diagonale AG coupe les deux faces opposées ADHE et BCGF suivant les parallèles AK et GL; les deux triangles AOK, GOL sont donc égaux.

603. Si le parallélipipède proposé est rectangle, tous les parallélogrammes de la figure deviennent des rectangles. Le parallélogramme ABGH, par exemple, est alors un rectangle, parce que l'arête AB est perpendiculaire à la face ADHE. Les diagonales d'un rectangle étant égales, *les quatre diagonales d'un parallélipipède rectangle sont égales.*

604. Dans l'hypothèse précédente, les triangles HAB, HDA étant rectangles, on a

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2, \quad \overline{AH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

Par suite,

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2.$$

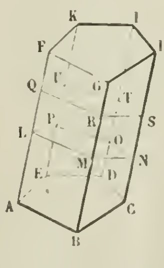
Donc, *le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois dimensions.*

Un cube étant un parallélipipède rectangle dont les dimensions sont égales, *le carré de la diagonale d'un cube est égal à trois fois le carré de son arête.*

THÉORÈME.

605. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont deux polygones égaux.*

Fig. 344.



Soient (*fig.* 344) le prisme AI et les sections LMNOP, QRSTU, faites par deux plans parallèles. Les côtés de ces sections sont deux à deux parallèles comme intersections de deux plans parallèles coupés par un troisième, et égaux comme parallèles comprises entre parallèles. Les deux polygones obtenus ont donc à la fois leurs angles égaux et leurs côtés égaux.

Corollaires.

606. Lorsque le plan sécant est parallèle à la base du prisme, la section obtenue est égale à cette base.

En supposant les arêtes latérales du prisme prolongées au delà des bases, la démonstration précédente s'applique, que les sections soient intérieures ou extérieures au prisme, et même lorsqu'elles sont en partie intérieures et en partie extérieures. Il suffit que les plans sécants rencontrent toutes les arêtes latérales.

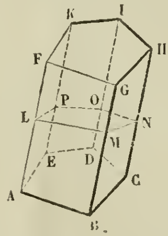
Scolie.

607. On appelle *section droite* d'un prisme la section déterminée dans ce prisme par un plan perpendiculaire à ses arêtes latérales.

THÉORÈME.

608. *L'aire latérale d'un prisme a pour mesure le produit du périmètre de sa section droite par son arête latérale.*

Fig. 345.



Soient (*fig.* 345) le prisme AH et sa section droite LMNOP. Les côtés de cette section droite sont les hauteurs des parallélogrammes qui forment l'aire latérale du prisme, et ces parallélogrames ont pour bases égales les arêtes latérales du polyèdre. La somme de leurs mesures sera donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{AF.LM} + \mathrm{BG.MN} + \ldots + \mathrm{KE.PL} \\ &= \mathrm{AF}(\mathrm{LM} + \mathrm{MN} \ldots + \mathrm{PL}). \end{aligned}$$

Corollaire.

609. Si le prisme est droit, sa section droite est égale à sa base et son arête latérale à sa hauteur (606, 593). *L'aire latérale d'un prisme droit a* donc *pour mesure le produit du périmètre de sa base par sa hauteur.*

Scolie.

610. En ajoutant à l'aire latérale d'un prisme deux fois l'aire de sa base, on obtient son aire totale.

§ II. — VOLUME DU PRISME.

DÉFINITIONS.

611. On appelle *volume* d'un polyèdre l'étendue du lieu qu'il occupe dans l'espace indéfini.

Quand deux polyèdres peuvent coïncider, ils sont *égaux*. Quand deux polyèdres ont des volumes égaux sans pouvoir coïncider, on dit qu'ils sont *équivalents*.

Pour démontrer que deux polyèdres convexes coïncident, il suffit de prouver qu'ils ont les mêmes sommets.

612. Si l'on détache une portion d'un prisme par un plan incliné à sa base, le polyèdre restant est un *prisme tronqué*. La section obtenue est la base supérieure du *tronc de prisme*.

THÉORÈME.

613. *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

Car, si l'on fait coïncider les bases inférieures de ces prismes, leurs arêtes latérales prendront deux à deux la même direction (518), et, comme elles sont égales à la hauteur donnée, les bases supérieures des deux prismes coïncideront aussi.

SCOLIE.

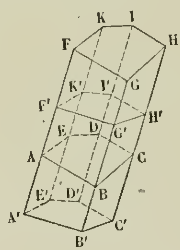
614. La démonstration précédente s'applique au cas de deux prismes droits tronqués de même base, lorsque leurs arêtes latérales sont égales deux à deux.

THÉORÈME.

615. *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur son arête latérale.*

Soit (*fig.* 346) le prisme oblique ABCDEFGHIK ou AH. Par un point G′ de l'arête BG, menons la section droite F′G′H′I′K′.

Fig. 346.



Prolongeons l'arête BG au-dessous de la base ABCDE d'une longueur $BB' = GG'$, et par le point B′ menons un plan parallèle au plan de la section droite. Les intersections de ce plan avec les arêtes latérales du prisme prolongées détermineront un polygone A′B′C′D′E′ égal (606) au polygone F′G′H′I′K′. La figure A′B′C′D′E′F′G′H′I′K′ ou A′H′ sera donc un prisme droit ayant pour base la section droite du prisme oblique AH et pour hauteur son arête latérale BG; car on a $B'G' = BG$, puisque, par construction, $BB' = GG'$.

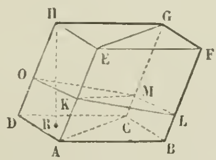
Cela posé, le volume compris entre la base inférieure du prisme oblique AH et la base supérieure du prisme droit A′H′ est commun aux deux prismes. Pour démontrer l'équivalence de ces deux prismes, il suffit donc de démontrer l'égalité des deux polyèdres ou prismes droits tronqués (612) A'B'C'D'E'ABCDE ou A'C et F'G'H'I'K'FGHIK ou F'H. Cette égalité résulte immédiatement de la remarque faite au n° 614; car les deux bases A'B'C'D'E', F'G'H'I'K' sont égales, ainsi que les arêtes correspondantes A'A et F'F, B'B et G'G, etc. A'A, par exemple, est l'arête latérale ou la hauteur du prisme droit A'H', diminuée de AF', et F'F est l'arête latérale du prisme oblique AH, diminuée de la même quantité.

THÉORÈME.

616. *Le plan mené par deux arêtes latérales opposées d'un parallélipipède le partage en deux prismes triangulaires équivalents.*

Soit (*fig.* 347) le parallélipipède quelconque AG. Le plan AEGC, mené par les arêtes opposées AE et CG, partage ce parallélipipède en deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH, dont il s'agit de démontrer l'équivalence.

Fig. 347.



Menons la section droite du parallélipipède AG. Cette section OKLM est un parallélogramme (599); et les deux triangles égaux KLM, KMO, suivant lesquels la diagonale KM la divise, sont respectivement les sections droites des prismes ABCEFG, ACDEGH.

Or le prisme triangulaire ABCEFG est équivalent au prisme droit ayant pour base KLM et pour hauteur AE (615); de même, le prisme triangulaire ACDEGH est équivalent au prisme droit ayant pour base KMO et pour hauteur AE. Les deux prismes droits énoncés étant égaux (613), les deux prismes triangulaires ABCEFG, ACDEGH sont équivalents, et chacun d'eux est la moitié du parallélipipède AG.

THÉORÈME.

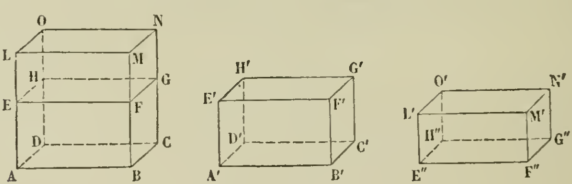
617. 1° *Si deux parallélipipèdes rectangles de même base ont des hauteurs égales, ils sont égaux.*

2° *Si trois parallélipipèdes rectangles de même base sont tels, que la hauteur du premier soit égale à la somme des hauteurs des deux autres, le premier parallélipipède est égal à la somme des deux autres.*

En effet :

1° Soient (*fig.* 348) les deux parallélipipèdes rectangles AG et A'G', dont les bases ABCD, A'B'C'D' sont égales, ainsi que les hauteurs AE et A'E'; ces deux parallélipipèdes rectangles seront égaux comme prismes droits ayant même base et même hauteur (613).

Fig. 348.



2° Soient (*fig.* 348) les trois parallélipipèdes rectangles AN, A'G', E''N', dont les bases ABCD, A'B'C'D', E''F''G''H'' sont égales, et dont les hauteurs AL, A'E', E''L', satisfont à la condition

$$AL = A'E' + E''L';$$

le parallélipipède rectangle AN est égal à la somme des deux autres. Car, si l'on prend sur AL une longueur AE égale à A'E' et qu'on mène par le point E une section EFGH parallèle à la base ABCD, EL sera égale à E''L', en vertu de l'hypothèse énoncée. Par suite, des deux parallélipipèdes rectangles AG, EN, qui composent le parallélipipède rectangle AN, le premier sera égal au parallélipipède rectangle A'G', et le second au parallélipipède rectangle E''N' (1°).

COROLLAIRES.

618. *Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs;* en d'autres termes, *le volume d'un parallélipipède rectangle de base constante est proportionnel à sa hauteur.*

Car le théorème précédent prouve qu'un parallélipipède rectangle de base constante et sa hauteur satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes (*voir* Note I) pour qu'il y ait proportionnalité entre ces grandeurs.

Dire que deux parallélipipèdes rectangles ont même base, c'est dire qu'ils ont deux dimensions communes (596). La conclusion précédente peut donc être énoncée de cette manière :

Deux parallélipipèdes rectangles, qui ont deux dimensions communes, sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions.

Il résulte de là que *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions,* puisque une grandeur proportionnelle à plusieurs autres varie proportionnellement à leur produit (Note I).

619. L'une des dimensions d'un parallélipipède rectangle étant prise pour sa hauteur, le produit des deux autres dimensions mesure sa base (419). Donc, *deux parallélipipèdes rectangles quelconques sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur.*

THÉORÈME.

620. *Le volume d'un parallélipipède rectangle a pour mesure le produit du nombre qui mesure sa base par le nombre qui mesure sa hauteur, lorsqu'on prend pour unités d'aire et de volume le carré et le cube construits sur l'unité de longueur.*

En effet, soient (*fig.* 348) AN le parallélipipède rectangle à mesurer et A'G' le cube dont le côté $A'B' = A'D' = A'E'$ représente l'unité de longueur : on a (619)

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{ABCD}{A'B'C'D'} \cdot \frac{AL}{A'E'}.$$

Or, dans le système d'unités adopté, le premier membre de cette relation est égal au nombre qui mesure le volume AN et les rapports qui composent le second membre sont respectivement égaux aux nombres qui mesurent la base et la hauteur du parallélipipède rectangle proposé. Donc le nombre qui mesure le volume du parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur. Ainsi, en désignant ces trois nombres par V, B, H, on a la formule

$$V = B.H.$$

On préfère énoncer ce théorème usuel d'une manière plus rapide, quoique incorrecte, en disant : *Le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

SCOLIES.

621. En se reportant au n° 618, le rapport du parallélipipède rectangle AN au cube A′G′ peut s'écrire

$$\frac{AN}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AD}{A'D'} \cdot \frac{AE}{A'E'}.$$

Les rapports qui composent le second membre étant respectivement égaux aux nombres qui mesurent les arêtes contiguës du parallélipipède rectangle, on voit que le nombre qui mesure le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions. En d'autres termes, *le volume d'un parallélipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions.*

Ce second énoncé n'est applicable qu'au parallélipipède rectangle ; nous allons prouver, en terminant ce paragraphe, que le premier (620), où entrent explicitement la base et la hauteur du parallélipipède, est applicable à tous les prismes.

622. Le volume d'un cube est égal à la troisième puissance de son arête. De là, le nom de *cube* donné à la troisième puissance d'un nombre.

623. Le volume d'un parallélipipède rectangle est encore

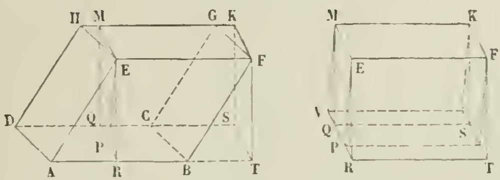
égal au produit de sa base par sa hauteur, lorsqu'on prend pour unité de volume le parallélipipède rectangle ayant pour base l'unité d'aire quelle qu'elle soit et pour hauteur la longueur prise pour unité de hauteur.

THÉORÈME.

624. *Le volume d'un parallélipipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (*fig.* 349) le parallélipipède quelconque AG ayant pour base ABCD ou EFGH et pour hauteur la perpendiculaire EP abaissée du sommet E sur le plan ABCD. Menons par le point E, dans le plan EFGH, la perpendiculaire EM à HG. Si

Fig. 349.



l'on prend la face AEHD pour base du parallélipipède proposé (598), son arête latérale sera EF, et sa section droite (607) sera le parallélogramme EMQR déterminé par le plan MEP. Le parallélipipède AG sera donc équivalent au parallélipipède droit RK ayant pour base la section droite EMQR et pour hauteur l'arête EF (615).

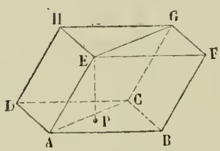
Cela posé, reproduisons à part, pour plus de clarté (*fig.* 349) ce parallélipipède droit RK, et construisons un parallélipipède rectangle PK ayant pour dimensions EF, EM, EP. Le parallélipipède droit RK et le parallélipipède rectangle PK ainsi déterminé présentent seulement comme parties non communes les deux prismes droits qui ont pour hauteur EF et pour bases les deux triangles égaux EPR, MVQ. Ces deux prismes étant égaux (613), les deux parallélipipèdes seront équivalents et, par suite, il en sera de même du parallélipipède quelconque AG et du parallélipipède rectangle PK. Donc, le produit EF.EM.EP, qui exprime la mesure (621) du parallélipipède rectangle PK, mesure aussi le volume du parallélipipède quelconque AG. Or, EF.EM mesure la base EFGH de ce parallélipipède, et EP est sa hauteur.

Donc, enfin, le volume du parallélipipède quelconque AG est égal au produit de sa base par sa hauteur.

THÉORÈME.

625. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 350.



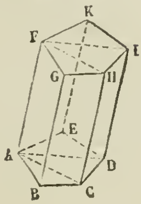
1° Soit (*fig.* 350) le prisme triangulaire ABCEFG. Par l'extrémité A de l'arête AB, menons le plan ADHE parallèle à la face BCGF, et par l'extrémité C de l'arête BC le plan CDHG parallèle à la face ABFE; prolongeons en même temps les deux bases du prisme jusqu'à la rencontre de ces plans. On obtiendra ainsi (600) le parallélipipède AG construit sur les trois droites BA, BC, BF. La face ACGE du prisme triangulaire considéré étant un plan diagonal du parallélipipède AG, ce prisme en sera la moitié (616). Donc, le volume du parallélipipède AG ayant pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur EP (624), le volume du prisme triangulaire ABCEFG aura pour mesure la moitié de ce produit, c'est-à-dire le produit de sa base ABC, moitié du parallélogramme ABCD, par sa hauteur EP.

2° Soit (*fig.* 351) un prisme quelconque ABCDEFGHIK. On le décompose en prismes triangulaires en faisant passer des plans diagonaux par l'arête AF et chacune des arêtes CH, DI. Ces prismes triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base du prisme donné, et leur hauteur commune est celle H du prisme. La somme de leurs mesures (1°)

$$ABC.H + ACD.H + ADE.H,$$

ou la mesure du prisme AI, sera donc égale au produit de sa base ABCDE par sa hauteur H.

Fig. 351.



Corollaires.

626. En désignant par V, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'un prisme, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = B.H.$$

Donc, *deux prismes de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents; deux prismes sont entre eux comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur; deux prismes de même base sont entre eux comme leurs hauteurs; deux prismes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

627. Application. — *Un bassin a la forme d'un prisme hexagonal régulier de $0^m,75$ de hauteur, le côté de la base hexagonale est égal à 1 mètre; calculer la capacité du bassin.*

L'aire de la base du prisme considéré étant six fois l'aire du triangle équilatéral de 1 mètre de côté est égale à $\frac{6^{mq}\sqrt{3}}{4}$ (427) ou à $\frac{3^{mq}\sqrt{3}}{2}$. En appliquant la formule $V = B.H$, on aura donc pour le volume cherché

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}.0,75 = \frac{9\sqrt{3}}{8} = \frac{9 \times 1,7321}{8} = 1^{mc},946,$$

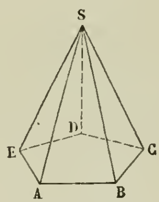
à 1 décimètre cube près.

§ III. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES ET AIRE LATÉRALE DE LA PYRAMIDE.

DÉFINITIONS.

628. La *pyramide* est un polyèdre dont l'une des faces est un polygone quelconque, et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant pour bases respectives les différents côtés de la face polygonale et, pour sommet commun, un point extérieur à cette face.

Fig. 352.



Ainsi, soit (*fig.* 352) un polygone ABCDE et un point S pris hors du plan de ce polygone. Le corps limité par la face polygonale ABCDE et par les faces triangulaires SAB, SBC, SCD, SDE, SEA est une pyramide.

629. La pyramide SABCDE a pour *base* le polygone ABCDE et pour *sommet* le point S. Sa *hauteur* est la distance du sommet S à la base ABCDE, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan.

Les droites SA, SB, SC, ... sont les *arêtes latérales* de la pyramide, et la somme des faces triangulaires SAB, SBC, SCD, ... constitue son *aire latérale*.

630. La pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier dont le centre se confond avec le pied de la hauteur de la pyramide.

Les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont nécessairement égales, comme obliques s'écartant également du pied de la hauteur; ses faces latérales sont donc des triangles isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces triangles est l'*apothème* de la pyramide régulière.

631. Suivant que la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, un hexagone, etc., la pyramide est dite *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, hexagonale*, etc.

632. Toute pyramide triangulaire ayant quatre faces, on lui donne souvent aussi le nom de *tétraèdre* (589).

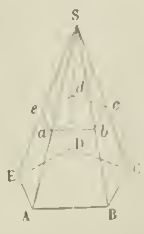
D'après la définition générale de la pyramide, on voit qu'on a le droit de prendre pour base d'un tétraèdre telle face qu'on veut; le sommet du tétraèdre est alors le sommet opposé à la base choisie.

Les tétraèdres sont dans la Géométrie de l'espace ce que les triangles sont dans la Géométrie plane. On fixe la position d'un point sur un plan en le rattachant par un triangle à deux points donnés. On fixe la position d'un point dans l'espace en le rattachant par un tétraèdre à trois points donnés.

633. Si l'on coupe une pyramide par un plan qui rencontre toutes ses faces latérales, le polyèdre compris entre la section obtenue et la base de la pyramide est une *pyramide tronquée* ou un *tronc de pyramide*.

Si le plan sécant est parallèle au plan de la base de la pyramide, le tronc de pyramide est dit *à bases parallèles*.

Fig. 353.



Soit (*fig.* 353) la pyramide SABCDE. Coupons cette pyramide par le plan *abcde* parallèle à la base ABCDE, et compris entre cette base et le sommet S. La section *abcde* et la base ABCDE sont les bases du tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. La *hauteur* du tronc est la distance constante des plans de ses deux bases. Les segments A*a*, B*b*, C*c*, ..., sont ses *arêtes latérales*, et son *aire latérale* est la somme des trapèzes AB*ab*, BC*bc*, CD*cd*, ...

634. Si la pyramide considérée est régulière, le tronc de pyramide à bases parallèles qui lui correspond est un tronc de pyramide *régulier*.

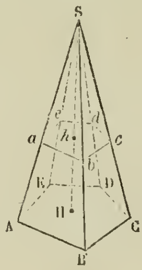
THÉORÈME.

635. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à sa base :*

1° *Ses arêtes latérales et sa hauteur sont divisées en parties proportionnelles;*

2° *La section est un polygone semblable à la base de la pyramide.*

Fig. 354.



1° Soit (*fig.* 354) la pyramide SABCDE coupée par le plan *abcde* parallèle à sa base. Ce plan rencontre les arêtes latérales SA, SB, SC, ..., et la hauteur SH de la pyramide aux points *a*, *b*, *c*, ..., *h*. Deux plans parallèles coupant en parties proportionnelles une série de sécantes issues d'un même point (511), on peut écrire immédiatement

$$\frac{Sa}{SA}=\frac{Sb}{SB}=\frac{Sc}{SC}=\ldots=\frac{Sh}{SH}.$$

2° Les polygones ABCDE et *abcde* ont leurs côtés deux à deux parallèles (495) et dirigés dans le même sens. Les angles homologues de ces polygones sont donc égaux (506). De plus, le parallélisme de leurs côtés entraîne la similitude des triangles SAB et S*ab*, SBC et S*bc*, ... Par suite,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sb}{SB}, \quad \frac{Sb}{SB}=\frac{bc}{BC};$$

d'où

$$\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

On prouverait de la même manière qu'on a

$$\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{de}{DE}=\frac{ea}{EA}.$$

Les polygones ABCDE et *abcde*, ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels, sont semblables.

Corollaire.

636. La similitude des triangles SAB et S*ab* donne

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sa}{SA}$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\frac{ab}{AB}=\frac{Sh}{SH}.$$

La similitude des polygones ABCDE et *abcde* donne à son tour

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{ab}^2}{\overline{AB}^2}.$$

On a donc

$$\frac{abcde}{ABCDE}=\frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2},$$

c'est-à-dire que, *dans une pyramide, les sections parallèles à la base et la base elle-même sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet de la pyramide.*

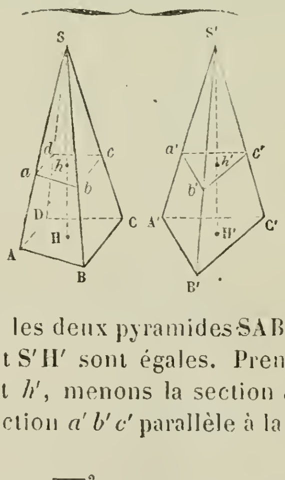
SCOLIE.

637. Si l'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle à la base, la section *abcde*, étant semblable à la base ABCDE, est aussi un polygogne régulier. Comme les arêtes latérales d'une pyramide régulière sont égales, il en est de même des arêtes du tronc de pyramide régulier obtenu. Les faces latérales d'un tronc de pyramide régulier sont donc des trapèzes isocèles tous égaux entre eux. La hauteur d'un de ces trapèzes est l'*apothème* du tronc de pyramide.

THÉORÈME.

638. *Lorsque deux pyramides ont des hauteurs égales, les sections faites dans ces pyramides parallèlement à leurs bases et à la même distance de leurs sommets sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.*

Fig. 355.



Soient (*fig.* 355) les deux pyramides SABCD, S'A'B'C', dont les hauteurs SH et S'H' sont égales. Prenons $Sh = S'h'$ et, par les points h et h', menons la section $abcd$ parallèle à la base ABCD et la section $a'b'c'$ parallèle à la base A'B'C'. Nous aurons (636)

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{\overline{Sh}^2}{\overline{SH}^2}, \quad \frac{a'b'c'}{A'B'C'} = \frac{\overline{S'h'}^2}{\overline{S'H'}^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'hypothèse et de la construction,

$$\frac{abcd}{ABCD} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'}.$$

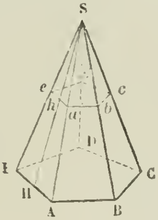
Scolie.

639. *Si les bases des deux pyramides sont équivalentes, les sections obtenues sont équivalentes.*

THÉORÈME.

640. *L'aire latérale d'une pyramide régulière a pour mesure la moitié du produit du périmètre de sa base par son apothème.*

Fig. 356.



Soit (*fig.* 356) la pyramide régulière SABCDE. Les triangles isocèles et égaux qui composent sa surface latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB, BC, ..., EA de la base de la pyramide, et pour hauteur son apothème SH (630), la somme des aires de ces triangles, c'est-à-dire l'aire demandée, a pour mesure la moitié du produit de la somme des côtés AB, BC, ..., EA par l'apothème SH, c'est-à-dire la moitié du produit du périmètre de la base de la pyramide par son apothème.

Scolie.

641. *L'aire latérale d'un tronc de pyramide régulier a pour mesure le produit de la demi-somme des périmètres de ses deux bases par son apothème.*

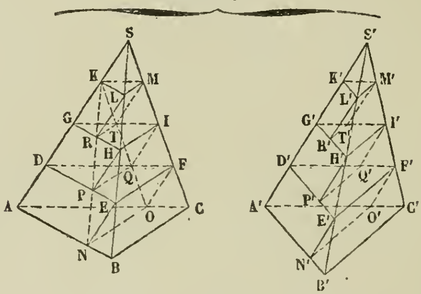
Soit (*fig.* 356) le tronc de pyramide régulier ABCDE*abcde*. Les trapèzes isocèles et égaux qui composent son aire latérale ayant respectivement pour bases les côtés AB et *ab*, BC et *bc*, ..., EA et *ea*, des bases du tronc de pyramide, et pour hauteur son apothème H*h* (637), la somme des aires de ces trapèzes, c'est-à-dire l'aire demandée, aura pour mesure le produit de la demi-somme des côtés AB et ab, BC et bc, ..., EA et ea, par l'apothème Hh, c'est-à-dire le produit de la demi-somme des périmètres des deux bases du tronc de pyramide par son apothème.

§ IV. — VOLUME DE LA PYRAMIDE.

THÉORÈME.

642. *Deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de hauteurs égales sont équivalentes.*

Fig. 357.



Nous diviserons la démonstration en deux parties.

1° Considérons (*fig.* 357) une pyramide triangulaire SABC. Divisons l'arête SA en un certain nombre n de parties égales SK, KG, GD, DA et, par les points de division K, G, D, menons des plans parallèles au plan de la base ABC. Soient KML, GIH, DFE, les sections faites dans la pyramide par ces plans. La parallèle menée par M à SA sera situee dans le plan déterminé par le point M et la droite SA, c'est-à-dire dans le plan de la face SAC; elle rencontrera donc GI en un certain point T, tandis que la parallèle menée par L à SA rencontrera à son tour la droite GH en un certain point R. La figure KMLGTR sera alors un prisme inscrit dans la tranche KMLGIH, et l'on obtiendra de même les prismes GIHDQP, DFEAON, inscrits dans les tranches suivantes GIHDFE, DFEACB.

Cela posé, nous allons prouver que *la somme* S *des volumes* *des prismes inscrits dans les diverses tranches de la pyramide* SABC *a pour limite le volume de cette pyramide, lorsque le nombre n croît indéfiniment.*

Remarquons, à cet effet, que les droites SK, LR, HP, EN, étant égales et parallèles, les figures SKLR, LRHP, HPEN, sont des parallélogrammes; les segments KR, RP, PN, sont donc parallèles à l'arête SB, et, comme l'extrémité de chacun d'eux est l'origine du suivant, ils appartiennent tous à une même droite KN parallèle à SB. Les points K, T, Q, O, sont, également, sur une même droite, KO parallèle à l'arête SC. Il en résulte que la figure AKON est un tétraèdre dont la base est parallèle à celle du tétraèdre primitif ASCB (632), qui diffère d'autant moins de ce tétraèdre que la division SK est plus petite, et qui coïncide avec lui à la limite, lorsque n croît indéfiniment, puisque, dans cette hypothèse, SK tend vers zéro. Mais le volume fixe ASCB et les volumes AKON et S qui varient avec n satisfont évidemment, pour toute valeur de l'entier n, aux inégalités

$$\mathrm{AKON} < \mathrm{S} < \mathrm{ASCB}.$$

Donc, puisque AKON a pour limite ASCB, la somme S tend vers cette même limite.

2° Considérons maintenant (*fig.* 357) deux pyramides triangulaires SABC, S′A′B′C′, de bases équivalentes et de même hauteur. Si l'on place les bases ABC, A′B′C′, sur un même plan, de façon que les sommets S et S′ soient d'un même côté de ce plan, ces sommets seront dans un plan parallèle au plan commun des bases. Si l'on opère alors sur la première pyramide SABC comme il a été dit ci-dessus, en menant des plans parallèles au plan commun des bases par les points de division de l'arête SA supposée divisée en n parties égales, ces plans partageront aussi SA′ en n segment égaux entre eux et, à chaque tranche de SABC et au prisme qui y est inscrit, correspondront une tranche de S′A′B′C′ et un prisme inscrit dans cette tranche. Mais deux prismes inscrits correspondants, tels que GHIDQP, G′I′H′D′Q′P′, sont équivalents (626); car, leurs bases GHI, G′I′H′, sont équivalentes (639), et leurs hauteurs sont les mêmes puisque les bases supérieures sont dans un même plan aussi bien que les bases inférieures. Donc, la somme des volumes des prismes inscrits dans la pyramide SABC est, quel que soit l'entier n, égale à la somme des volumes des prismes inscrits dans la pyramide S′A′B′C′; et, comme chacune de ces sommes a pour limite le volume de la pyramide correspondante lorsque n croît indéfiniment (1°), les volumes de ces pyramides sont égaux (611).

THÉORÈME.

643. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Fig. 358.

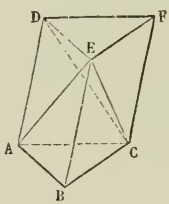
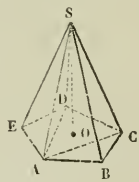


Fig. 359.



1° Soit (*fig.* 358) la pyramide triangulaire EABC. Par les sommets A et C, menons les droites AD et CF, parallèles à l'arête BE, jusqu'à leurs rencontres D et F avec un plan mené par le sommet E parallèlement à la base ABC de la pyramide. Le polyèdre ABCDEF sera un prisme triangulaire ayant même base et même hauteur que la pyramide proposée.

Si l'on fait passer un plan par les trois sommets D, E, C, le prisme triangulaire ABCDEF se trouve décomposé en trois pyramides triangulaires EABC, EDCA, EDCF. La première est la pyramide donnée. Les deux autres sont équivalentes (642), car elles ont même hauteur et leurs bases sont équivalentes comme moitiés du parallélogramme ACFD. Or, si l'on prend la face DEF pour base de la pyramide EDCF, son sommet est le point C. Cette pyramide a donc même base et même hauteur que le prisme ABCDEF ; elle est donc équivalente à la pyramide EABC.

Les trois pyramides dont se compose le prisme ABCDEF étant équivalentes, chacune d'elles est le tiers de ce prisme. Or, le volume du prisme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; le volume de la pyramide EABC a donc pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Soit (*fig.* 359) la pyramide polygonale SABCDE. On la décompose en pyramides triangulaires en faisant passer des plans par l'arête SA, et chacune des arêtes SC, SD. Ces pyramides triangulaires ont pour bases les triangles ABC, ACD, ADE, qui composent la base de la pyramide donnée, et leur hauteur commune est celle de cette pyramide. La somme de leurs mesures ou la mesure de la pyramide SABCDE sera donc égale au tiers du produit de sa base ABCDE par sa hauteur SO.

Corollaires.

644. En désignant par V, B, H les trois nombres qui mesurent respectivement le volume d'une pyramide, sa base et sa hauteur, on a la formule générale

$$V = \frac{1}{3} B.H.$$

Donc, *toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur. Deux pyramides quelconques de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes. Deux pyramides sont entre elles comme les produits respectifs de leur base par leur hauteur. Deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.*

645. Quand un tétraèdre est régulier, son volume s'exprime en fonction de son arête a.

Un tétraèdre régulier est compris sous quatre triangles équilatéraux égaux. Sa base a donc pour expression (427)

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Sa hauteur est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour second côté de l'angle droit le rayon du cercle circonscrit au triangle de base, c'est-à-dire $\frac{a}{\sqrt{3}}$, et pour hypoténuse l'arête a du tétraèdre. Cette hauteur est, par suite,

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

On a donc, pour le volume du tétraèdre régulier en fonction de son arête,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Exemple.

Quel est le volume du tétraèdre régulier dont l'arête est 1 mètre?

On a

$$V = \frac{1^{\text{mc}}\sqrt{2}}{12} = \frac{1^{\text{mc}},414\,2136}{12} = 0^{\text{mc}},117\,851,$$

à $\frac{1}{2}$ centimètre cube près.

Scolie.

646. Pour évaluer le volume d'un polyèdre, il suffit de décomposer ce polyèdre en pyramides, de calculer les volumes de ces pyramides et de faire la somme des nombres obtenus. Plus généralement, il suffit de décomposer le polyèdre proposé en parties telles, que l'expression de leur volume soit connue.

Pour opérer la décomposition en pyramides, on peut choisir un point quelconque dans l'espace et le joindre à tous les sommets du polyèdre. Les bases des différentes pyramides formées sont les faces du polyèdre, et leurs hauteurs sont les perpendiculaires abaissées du point choisi sur ces faces. Le volume du polyèdre est la somme arithmétique ou algébrique des volumes des pyramides obtenues, suivant que leur sommet commun est lui-même intérieur ou extérieur au polyèdre.

Souvent on effectue la décomposition en prenant pour centre l'un des sommets du polyèdre, c'est-à-dire en menant toutes les diagonales qui partent d'un même sommet.

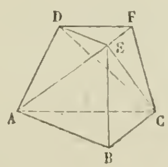
Si l'on peut trouver dans l'intérieur du polyèdre un point à égale distance de toutes ses faces, les pyramides qui le composeront auront pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'une des faces, et *le volume du polyèdre aura pour mesure le tiers du produit de son aire par cette perpendiculaire.*

THÉORÈME.

647. *Un tronc de pyramide à bases parallèles est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

1° Soit (*fig.* 360) le tronc de pyramide triangulaire à bases parallèles ABCDEF.

Fig. 360.



Les plans AEC, DEC le partagent en trois pyramides triangulaires EABC, EDCF, EDCA, dont nous désignerons les volumes respectifs par P, P′, P″.

La première EABC a pour base la base inférieure ABC du tronc de pyramide, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet E est un sommet de la base supérieure.

Si l'on prend le point C pour sommet, la seconde pyramide EDCF a pour base DEF la base supérieure du tronc, et elle a même hauteur que ce tronc, puisque son sommet C se confond avec un sommet de la base inférieure.

Pour évaluer la troisième pyramide EDCA, comparons-la successivement aux deux autres.

Si l'on prend le point C comme sommet commun des deux pyramides EABC, EDCA, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases EAB, ADE; mais ces triangles, dont la hauteur est aussi la même, sont entre eux comme leurs bases AB et DE, et l'on peut écrire

$$\frac{P}{P''} = \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad (635,\ 2^\circ).$$

De même, si l'on prend le point E comme sommet commun des deux pyramides EDCA, EDCF, elles ont même hauteur et sont entre elles comme leurs bases DAC, CDF, ou comme les bases AC et DF de ces triangles, qui ont aussi même hauteur. On a, par suite,

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'}.$$

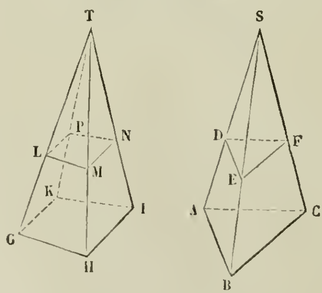
Il en résulte

$$P''^2 = P.P'.$$

Le volume de la troisième pyramide est donc la moyenne proportionnelle des volumes des deux premières, c'est-à-dire que la pyramide EDCA équivaut à une pyramide ayant pour hauteur la hauteur du tronc, et pour base la moyenne proportionnelle entre ses deux bases.

2° Soit (*fig.* 361) le tronc de pyramide polygonale GHIKLMNP.

Fig. 361.



Ce tronc a été obtenu en coupant la pyramide TGHIK par un plan parallèle à sa base. Prenons un point S à la même hauteur que le point T au-dessus de la base GHIK, et construisons dans le plan de cette base un triangle ABC qui lui soit équivalent. La pyramide triangulaire SABC sera équivalente à la pyramide polygonale TGHIK (644). Si l'on prolonge le plan LMNP jusqu'à la pyramide SABC, il déterminera dans cette pyramide une section DEF équivalente à la section LMNP (639); les deux pyramides SDEF, TLMNP seront donc aussi équivalentes. Par suite, le tronc polygonal GHIKLMNP, différence des pyramides TGHIK, TLMNP, sera équivalent au tronc triangulaire ABCDEF, différence des pyramides SABC, SDEF. Et comme le tronc de pyramide triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases, il en sera de même du tronc de pyramide polygonale qui a même hauteur et des bases équivalentes.

Corollaires.

648. En désignant par V, B, b, h les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, ses deux bases et sa hauteur, on a la formule

$$V = \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} bh + \frac{1}{3} h \sqrt{Bb}$$

ou

$$(1) \qquad V = \frac{h}{3}\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

Souvent, au lieu de donner les deux bases B et b, on donne l'une d'elles B et le rapport $\frac{a}{A}$ de deux côtés homologues de ces deux bases; on a alors

$$\frac{b}{B} = \frac{a^2}{A^2}, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{a^2}{A^2} B.$$

Il en résulte

$$(2) \qquad V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Cette formule, très-commode dans les applications, se trouve dans un Traité de Léonard de Pise, *Sur les centres de gravité.*

EXEMPLE.

Les bases parallèles d'un tronc de pyramide sont deux hexagones réguliers ayant respectivement 1 *mètre et* 2 *mètres de côté, sa hauteur est égale à* 3 *mètres : calculer son volume.*

On a dans ce cas

$$B = \frac{3A^2\sqrt{3}}{2} = 6^{mq}\sqrt{3}$$

et, en appliquant la formule (2),

$$V = \frac{6.\sqrt{3}.3}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$V = 3\sqrt{3}.3,5 = 18^{mc},186534$$

à 1 centimètre cube près.

SCOLIES.

649. On aurait pu employer, pour trouver le volume d'un tronc de pyramide polygonale, la méthode de *décomposition* déjà suivie dans d'autres cas (625, 643); mais cette marche exigeant ici la vérification d'une formule algébrique, il était préférable d'avoir recours à la méthode de *transformation* en figures équivalentes.

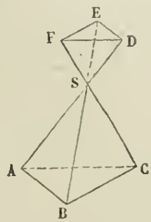
650. On peut donner au mot *tronc* une extension utile.

De même que les théorèmes relatifs aux sections d'un prisme s'étendent au cas où elles sont extérieures (606), les théorèmes relatifs aux sections d'une pyramide (635, 636) s'étendent au cas où ces sections deviennent extérieures, qu'elles soient faites au delà du sommet ou au-dessous de la base de la pyramide proposée. Les plans sécants doivent seulement rester parallèles à la base de cette pyramide.

On peut distinguer les deux cas possibles en disant que les sections faites au-dessous du sommet donnent des troncs de *première espèce,* et que les sections faites au-dessus du sommet donnent des troncs de *seconde espèce*.

Pour évaluer le volume d'un tronc de seconde espèce ABCDEF (*fig.* 362),

Fig. 362.



il suffit d'effectuer la somme des pyramides SABC, SDEF. La hauteur h du tronc est d'ailleurs égale à la somme des hauteurs H et H' des deux pyramides. On a ainsi, en conservant les notations du n° 648,

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH' = \frac{B}{3}\left(H + \frac{bH'}{B}\right).$$

De la relation (648, 636)

$$\frac{B}{b} = \frac{A^2}{a^2} = \frac{H^2}{H'^2}$$

il résulte

$$\frac{H}{A} = \frac{H'}{a} = \frac{H + H'}{A + a} = \frac{h}{A + a},$$

d'où

$$H = \frac{Ah}{A + a}, \quad H' = \frac{ah}{A + a}.$$

Par suite,

$$V = \frac{Bh}{3}\,\frac{A^3 + a^3}{A^2(A + a)} = \frac{Bh}{3}\left(1 - \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right),$$

et aussi

$$V = \frac{h}{3}\left(B - \frac{Ba}{A} + \frac{Ba^2}{A^2}\right) = \frac{h}{3}\left(B + b - \sqrt{Bb}\right).$$

Pour un tronc de seconde espèce, la formule du volume est donc la même que pour un tronc de première espèce, sauf le signe de la moyenne proportionnelle. On passe donc de l'une à l'autre formule en changeant le signe de cette moyenne ou en changeant a en $-a$.

On aurait pu suivre une marche analogue pour calculer l'expression du volume d'un tronc de pyramide de première espèce; seulement, au lieu d'ajouter les pyramides SABC, SDEF, il aurait fallu les retrancher (*fig.* 361).

651. Problème. — *On donne le volume* V, *la hauteur* h *et le côté* A *de la base inférieure d'un tronc de pyramide à bases parallèles ; on suppose que cette base est un hexagone régulier, et l'on demande le côté* x *de l'hexagone régulier, base supérieure du tronc.*

L'équation du problème sera l'équation (2) du n° 648, dans laquelle on remplacera a par l'inconnue x, c'est-à-dire

$$V = \frac{Bh}{3}\left(1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{A^2}\right),$$

d'où

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{x}{A} + 1 - \frac{3V}{Bh} = 0.$$

Les racines de cette équation restent imaginaires tant qu'on a $V < \frac{Bh}{4}$; elles deviennent réelles et elles restent toutes deux négatives tant que V est compris entre $\frac{Bh}{4}$ et $\frac{Bh}{3}$; enfin, elles sont l'une positive et l'autre négative, lorsqu'on a $V > \frac{Bh}{3}$.

Dans le premier cas, le problème est impossible; dans le deuxième cas, deux troncs de seconde espèce répondent à la question; dans le troisième cas, un tronc de première espèce et un tronc de seconde espèce y répondent à la fois.

Supposons, par exemple, $A = 1^{m}$, d'où $B = \frac{3^{mq}.\sqrt{3}}{2}$, $h = 1^{m}.\sqrt{3}$, et $V = 2^{mc}$. L'équation à résoudre sera

$$x^2 + x + 1 - \frac{4}{3} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + x - \frac{1}{3} = 0.$$

Elle donne

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} = \frac{-3 \pm 4,5825757}{6}.$$

La racine positive est $x = 0,26376$ à $\frac{1}{200}$ de millimètre près; la racine négative est $x = -1,26376$ avec la même approximation. La première répond à un tronc de première espèce; la seconde, *prise positivement,* à un tronc de seconde espèce. La hauteur de la pyramide qui correspond au tronc de première espèce est (650)

$$H = \frac{Ah}{A - x} = \frac{1^m.\sqrt{3}}{0,73624} = 2,353$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près. Celle de la pyramide qui correspond au tronc de seconde espèce est (650)

$$H = \frac{Ah}{A + x} = \frac{1^m.\sqrt{3}}{2,26376} = 0^m,765$$

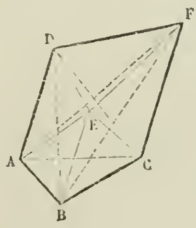
à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

THÉORÈME.

652. *Un tronc de prisme triangulaire est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour base commune la base inférieure du tronc et, pour sommets, ceux de sa base supérieure.*

Soit (*fig.* 363) le tronc de prisme triangulaire ABCDEF. En menant le plan ACE, on détache du tronc la pyramide triangulaire EABC, qui a pour base ABC et pour sommet le point E.

Fig. 363.



Il reste la pyramide quadrangulaire ECADF. En menant le plan DEC, on la partage en deux pyramides triangulaires ECDA, ECDF.

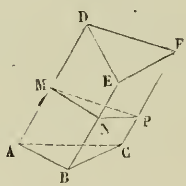
La première ECDA, qui a pour sommet le point E et pour base CDA, équivaut à la pyramide BCDA de même base CDA et de même hauteur, puisque son sommet B est situé sur l'arête EB parallèle à DA ou au plan CDA de la base commune. Or la pyramide triangulaire BCDA peut être regardée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point D.

La seconde pyramide triangulaire ECDF peut être regardée comme ayant pour base ECF et pour sommet le point D; elle équivaut donc à la pyramide ABCF, de base BCF et de sommet A. En effet, les deux bases ECF, BCF sont équivalentes comme triangles de même base CF et de même hauteur, puisque l'arête EB est parallèle à FC; et les hauteurs des deux pyramides comparées sont égales, puisque la droite DA, qui joint leurs sommets, est parallèle à FC et, par conséquent, au plan commun EBCF de leurs bases. Or, la pyramide triangulaire ABCF peut être considérée comme ayant pour base ABC et pour sommet le point F.

Scolie.

653. Si le tronc considéré est un tronc de prisme droit, les hauteurs des trois pyramides indiquées se confondent avec

Fig. 364.



les arêtes latérales EB, DA, FC, et la base ABC avec la section droite du tronc. Le volume du corps tronqué a donc alors pour mesure le *produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de ses arêtes latérales* (643).

On étend facilement cet énoncé au cas du tronc de prisme oblique. Soit (*fig.* 364) le tronc de prisme oblique ABCDEF. Menons sa section droite MNP. Elle le partage en deux troncs de prisme MNPABC, MNPDEF, qui sont droits relativement à cette section considérée comme base. Le premier a pour mesure

$$MNP\left(\frac{MA + NB + PC}{3}\right);$$

le second,

$$MNP\left(\frac{MD + NE + PF}{3}\right).$$

Le tronc de prisme oblique ABCDEF, somme des deux troncs de prismes droits MNPABC, MNPDEF, a donc pour mesure la somme de leurs mesures, c'est-à-dire

$$\text{MNP}\left(\frac{\text{AD}+\text{BE}+\text{CF}}{3}\right).$$

COROLLAIRE.

654. En désignant par V, B, β, h, h', h'', a, a', a'' les nombres qui mesurent respectivement le volume d'un tronc de prisme triangulaire, sa base et sa section droite, les hauteurs des sommets de sa base supérieure au-dessus du plan de sa base inférieure et ses arêtes latérales, on a les formules

$$\text{V}=\text{B}\left(\frac{h+h'+h''}{3}\right), \tag{1}$$

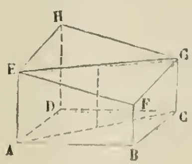
$$\text{V}=\beta\left(\frac{a+a'+a''}{3}\right). \tag{2}$$

APPLICATION.

655. *La base* B *d'un parallélipipède droit tronqué est égale à* 36 *mètres carrés; ses arêtes latérales sont égales à* 5 *mètres,* 3 *mètres,* 7 *mètres et* 9 *mètres; on demande de calculer son volume.*

Soit (*fig.* 365) ABCDEFGH le parallélipipède tronqué proposé. Menons le plan diagonal ACGE qui le partage en deux

Fig. 365.



troncs de prismes triangulaires droits, dont les bases sont égales entre elles et à la moitié du parallélogramme ABCD. Les volumes de ces deux troncs de prismes étant respectivement, d'après les formules du numéro précédent,

$$18\left(\frac{5+3+7}{3}\right) \quad \text{et} \quad 18\left(\frac{5+9+7}{3}\right),$$

le volume cherché sera

$$V = 18.\frac{36}{3} = 216^{\text{mc}}.$$

D'une manière générale, si l'on désigne par A et a, B et b, les arêtes latérales, opposées deux à deux, d'un parallélipipède tronqué quelconque et par S sa section droite, les volumes v et v' des deux prismes triangulaires tronqués qui le composent sont

$$v = \frac{S}{2}\cdot\frac{A+a+b}{3}, \quad v' = \frac{S}{2}\cdot\frac{A+a+B}{3};$$

par suite, son volume $V = v + v'$ a pour expression

$$V = S\cdot\frac{2(A+a)+(B+b)}{6}.$$

Mais, si l'on représente par δ la longueur de la droite qui unit les centres des deux bases du tronc, on a

$$A + a = B + b = 2\delta,$$

d'où

$$V = S.\delta.$$

Le volume d'un parallélipipède tronqué quelconque a donc pour mesure *le produit de sa section droite par la moyenne arithmétique de deux arêtes latérales opposées*.

THÉORÈME.

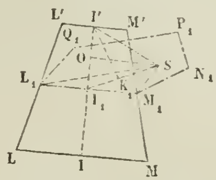
656. *Le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidistante des deux bases.* (Les faces latérales sont des trapèzes ayant un côté commun avec chacune des bases, ou des triangles ayant deux sommets communs avec l'une des bases et un sommet commun avec l'autre.)

En effet, soient $L_1M_1N_1P_1Q_1$ la section équidistante des bases (*fig.* 366) et S un point pris à volonté dans l'intérieur de cette section. Le polyèdre peut être décomposé en pyramides ayant pour bases ses diverses faces et

Fig. 366.



pour sommet commun le point S. Les volumes des deux pyramides qui reposent sur les bases B et B' ont évidemment pour mesures $\frac{BH}{6}$, $\frac{B'H}{6}$, et il reste à évaluer les volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales. Soit donc LMM'L' une quelconque de ces faces, par exemple celle qui répond au côté L_1M_1 du polygone $L_1M_1N_1P_1Q_1$; pour raisonner d'une manière générale, nous supposerons que cette face soit un trapèze (si c'était un triangle, l'un des côtés parallèles LM ou L'M' serait nul). Abaissons du point S la perpendiculaire SO sur le plan de la face LMM'L'; dans ce plan, menons par le point O la perpendiculaire $I'OI_1$ à L_1M_1; la droite SI_1 sera perpendiculaire à L_1M_1; enfin menons $I'K_1$ perpendiculaire au plan de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$: $I'K_1$ sera la moitié de la distance H des bases du polyèdre. Cela posé, la pyramide SLMM'L'a pour mesure

$$L_1M_1 . 2I'I_1 . \frac{1}{3}SO.$$

Or, le produit $I'I_1.SO$ peut être remplacé par le produit $SI_1.I'K_1$, qui, comme lui, exprime le double de l'aire du triangle $I'I_1S$; on a donc, pour le volume de la pyramide indiquée,

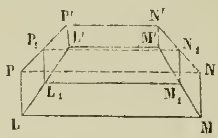
$$\frac{H}{6}2L_1M_1.SI_1 = \frac{H}{6} \cdot 4SL_1M_1.$$

Par suite, pour avoir la somme des volumes des pyramides qui reposent sur les faces latérales du polyèdre, il faut multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois la somme des triangles qui ont S pour sommet commun et pour bases les côtés de la section $L_1M_1N_1P_1Q_1$, c'est-à-dire multiplier par $\frac{H}{6}$ quatre fois l'aire B'' de cette section.

APPLICATION.

657. Les amas de pierres, les fossés ou cuvettes établis de distance en distance le long des routes, les tombereaux, etc., sont terminés haut et bas par deux rectangles parallèles LMNP, L'M'N'P', et latéralement par quatre trapèzes LMM'L', MNN'M', NPP'N', PLL'P'. Exprimons le volume d'un pareil corps en fonction de la distance h des plans des deux rectangles et des dimensions a et b, a' et b', de ces rectangles (*fig.* 367).

Fig. 367.



La section $L_1M_1P_1Q_1$, équidistante des bases, est un rectangle dont les dimensions, L_1M_1, L_1P_1, sont évidemment égales à $\frac{1}{2}(a+a')$ et $\frac{1}{2}(b+b')$. Le volume du corps est donc, en vertu du théorème précédent, donné par la formule

$$\frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')],$$

que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\frac{bh}{6}(2a+a') + \frac{b'h}{6}(2a'+a).$$

Pour $b'=0$, le volume se réduit à

$$\frac{bh}{6}(2a+a'),$$

et le corps a la forme qu'on donne dans les parcs d'artillerie aux piles de boulets sphériques rectangulaires.

§ V. — FIGURES SYMÉTRIQUES.

DÉFINITIONS.

658. Deux points A et A' sont *symétriques par rapport à un centre* O, lorsque ce centre O est le milieu de la droite AA' (*fig.* 368).

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un axe xy (*fig.* 369) ou à un plan P (*fig.* 370), lorsque cet axe ou ce plan est perpendiculaire au milieu de la droite AA'.

Deux figures sont symétriques par rapport à un centre, à un axe ou à un plan, lorsque leurs points sont deux à deux symétriques par rapport à ce centre, à cet axe ou à ce plan. Les points symétriques des deux figures sont dits *homologues*.

Fig. 368.

Fig. 369.

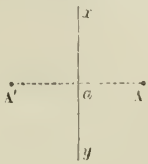
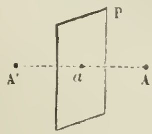


Fig. 370.



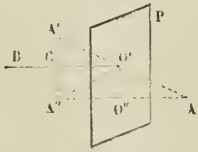
Deux figures symétriques, par rapport à un axe, sont égales. Car une rotation de 180 degrés autour de l'axe, imprimée à l'une des deux figures, amène évidemment cette figure sur l'autre.

La symétrie par rapport à un axe n'offre donc rien de particulier. Aussi, dans la suite de ce paragraphe, ne sera-t-il question que de la symétrie relative à un point ou à un plan.

THÉORÈME.

659. *Deux figures* F' *et* F'', *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux centres différents* O' *et* O'', *sont égales* (*fig.* 371) (¹).

Fig. 371.



Soient A un point quelconque de la figure F, A' son homologue dans la figure F' et A'' son homologue dans la figure F''. O' étant le milieu de AA' et O'' le milieu de AA'', la droite A'A''

(¹) BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

est parallèle à $O'O''$ et égale à $2O'O''$. La figure F'' n'est donc que la figure F' transportée parallèlement à la direction $O'O''$, d'une quantité égale à $2O'O''$.

COROLLAIRE.

660. La position du centre de symétrie n'influe ni sur la *forme* ni même sur l'*orientation* de la figure symétrique d'une figure donnée.

THÉORÈME.

661. *Si deux figures* F *et* F″ *sont symétriques par rapport à un plan* P, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un centre* O′ *pris à volonté dans ce plan;* et réciproquement, *si deux figures* F *et* F′ *sont symétriques par rapport à un centre* O′, *on peut toujours les placer de telle sorte qu'elles soient symétriques par rapport à un plan quelconque* P *passant par ce centre* (*fig* 371) [1].

Il suffit de faire tourner la figure F'' dans le premier cas, la figure F' dans le second, de 180 degrés autour de la perpendiculaire $O'CB$ élevée en O' au plan P.

En effet, considérons une figure F, un plan P et un point quelconque O' de ce plan; soient F' la figure symétrique de F par rapport au point O', et F'' la figure symétrique de F par rapport au plan P. Le théorème direct et sa réciproque seront démontrés à la fois, si l'on fait voir que les figures F' et F'' sont symétriques par rapport à la perpendiculaire $O'B$ élevée en O' au plan P (658). Or, soient A, A', A'' trois points homologues des figures F, F', F'', et O'' le point où la droite AA'' rencontre le plan P. O' étant le milieu de AA' et O'' le milieu de AA'', la droite $A'A''$ est parallèle à $O'O''$ et, par suite, perpendiculaire sur $O'B$. D'ailleurs $O'B$, étant menée parallèlement à AA'' par le milieu de AA', passe par le milieu C de $A'A''$. Donc, enfin, les points A' et A'' sont symétriques par rapport à la droite $O'B$.

---

[1] BRAVAIS, *Journal de Mathématiques*, t. XIV.

Corollaires

662. Deux figures symétriques d'une même figure F, par rapport à deux plans différents P et Q, ne sont autre chose, quant à la *forme*, que la figure symétrique de F par rapport à un centre quelconque (659); elles sont donc superposables. Mais leur *orientation* dans l'espace n'est pas la même, à moins que les plans P et Q ne soient parallèles.

663. En résumé, si l'on fait abstraction de l'orientation pour n'avoir égard qu'à la forme, on voit qu'*une figure* F *n'a qu'une seule figure symétrique*. Toutes les figures obtenues en prenant la figure symétrique de F, par rapport à tel centre ou à tel plan qu'on veut, sont superposables.

Scolie.

664. Telle propriété de deux figures *symétriques* (658) est plus ou moins aisée à démontrer, suivant que l'on considère la symétrie relative à un plan ou à un centre. Le théorème précédent (661) permet de choisir le mode de symétrie qui facilite le plus les raisonnements. C'est généralement la symétrie relative à un centre qui rend les démonstrations plus simples, parce qu'en déplaçant le centre de symétrie on n'altère pas même l'orientation de la figure symétrique (660).

THÉORÈME.

665. *La figure symétrique d'une ligne droite est une ligne droite.*

Car, si l'on prend un point quelconque de la droite pour centre de symétrie, ce qui ne peut rien changer au résultat (660), on retrouve évidemment la droite elle-même pour figure symétrique.

Corollaires.

666. *La distance de deux points est égale à celle de leurs symétriques.*

Car, si l'on prend pour centre de symétrie le milieu de la droite qui joint les deux points, on voit que ces deux points ne font que s'échanger.

667. *L'angle de deux droites est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie le sommet de cet angle, on voit que les droites symétriques forment l'angle qui lui est opposé par le sommet.

SCOLIE.

668. Il importe de se figurer nettement la situation de deux droites symétriques par rapport à un centre ou par rapport à un plan.

Soit AB (*fig.* 372) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un centre donné O'. Prenons d'abord la

Fig. 372.

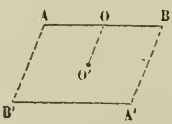
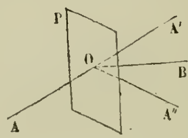


Fig. 373.



droite symétrique de AB par rapport à son milieu O : le point A aura son symétrique en B, et le point B son symétrique en A; de sorte que la droite symétrique de AB, par rapport à son milieu O pris pour centre, sera BA. Pour passer ensuite du centre O au centre O', il suffira (659) de faire décrire aux points A et B des droites BA' et AB' parallèles à OO' et doubles de OO'. On trouve ainsi, pour symétrique de AB, la droite A'B' *parallèle à* AB, *de sens contraire, et située à la même distance du centre* O' *de symétrie.*

Soit OA (*fig.* 373) une droite dont on veut la droite symétrique par rapport à un plan P qu'elle rencontre en O. En prenant d'abord la droite symétrique de OA par rapport au point O, on trouve son prolongement OA', et il suffit (661) de faire tourner OA' de 180 degrés autour de la perpendiculaire OB au plan P, pour avoir la droite OA'' demandée. On voit que *les deux droites* OA *et* OA'', *symétriques par rapport au plan* P, *sont également inclinées sur ce plan, qu'elles rencontrent d'ailleurs au même point* O.

THÉORÈME.

669. *La figure symétrique d'un plan est un plan.*

Car, si l'on prend un point du plan pour centre de symétrie, on retrouve évidemment le plan lui-même pour figure symétrique.

COROLLAIRES.

670. *La figure symétrique d'un polygone plan est un polygone égal au premier.*

D'abord, c'est un polygone plan (669); il est ensuite égal au premier, parce qu'il a ses côtés et ses angles égaux aux côtés homologues et aux angles homologues de ce polygone (666, 667).

671. *L'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs symétriques.*

Car, en prenant pour centre de symétrie un point de l'arête de l'angle dièdre donné, on voit que les plans symétriques de ses faces forment le dièdre qui lui est opposé par l'arête.

SCOLIE.

672. Deux plans symétriques par rapport à un centre sont parallèles et équidistants de ce centre.

Deux plans symétriques par rapport à un plan sont également inclinés sur ce plan, qu'ils coupent d'ailleurs suivant la même droite.

THÉORÈME.

673. *Deux polyèdres symétriques ont : 1° leurs faces égales chacune à chacune; 2° leurs angles dièdres homologues égaux; 3° leurs angles polyèdres homologues symétriques* (566).

1° L'égalité des faces homologues résulte du n° 670.

2° L'égalité des angles dièdres homologues résulte du n° 671.

3° Pour montrer clairement la relation qui existe entre un angle polyèdre A de la première figure P et l'angle polyèdre homologue A' de la seconde figure P', il suffit de construire la figure symétrique de P en prenant pour centre de symétrie le sommet A du premier angle polyèdre. On voit ainsi que l'angle polyèdre A′ est l'angle polyèdre opposé par le sommet à l'angle polyèdre A.

THÉORÈME.

674. *Deux polyèdres symétriques* P *et* P′ *sont équivalents.*

Si l'on décompose le polyèdre P en tétraèdres, à chacun de ces tétraèdres répond un tétraèdre symétrique, et l'ensemble de ces tétraèdres symétriques forme le polyèdre P′. Deux polyèdres symétriques P et P′, étant d'après cela composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques deux à deux, il suffit de démontrer que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Or, soit (*fig.* 374) SABC un tétraèdre quelconque. Formons son symétrique SA′B′C′ par rapport au point S. Les triangles ABC, A′B′C sont égaux (670), et leurs plans sont équidi-

Fig. 374.

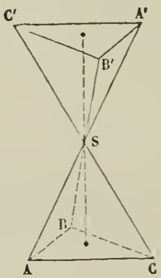
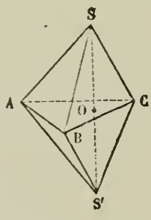


Fig. 375.



stants du point S (672). Par suite, les deux tétraèdres SABC, SA′B′C′, ayant des bases et des hauteurs égales, sont équivalents.

La symétrie relative à un plan fournirait dans ce cas une démonstration tout aussi simple ; car, comme la propriété dont il s'agit concerne la *grandeur* et non la *situation*, on peut prendre à volonté le plan de symétrie (662). Or, en construisant (*fig.* 375) la figure S′ABC symétrique de SABC par rapport au plan ABC, on voit que les deux tétraèdres SABC, S'ABC ont même base ABC et des hauteurs égales SO et S'O; d'où résulte leur équivalence.

SCOLIE.

675. Les deux prismes dans lesquels un parallélipipède est décomposé par un plan diagonal (616) sont évidemment symétriques par rapport au centre O du parallélipipède (*fig.* 343). C'est pourquoi ils ont même volume (674), bien qu'ils ne soient pas en général superposables. On ne peut les superposer que quand ils sont droits.

§ VI. — POLYÈDRES SEMBLABLES.

DÉFINITIONS.

676. On donne le nom de *polyèdres semblables* aux polyèdres qui ont leurs angles polyèdres égaux et qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune.

L'égalité des angles polyèdres entraîne évidemment l'égalité des angles dièdres homologues.

On appelle *homologues* les éléments (faces, arêtes, dièdres, etc.) qui se correspondent dans deux polyèdres semblables.

677. *Les arêtes homologues de deux polyèdres semblables sont proportionnelles.*

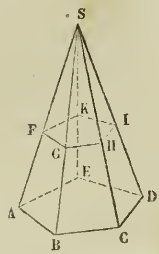
Car les faces semblables de ces polyèdres ayant le même rapport de similitude, puisqu'une même arête appartient sur chaque polyèdre à deux faces adjacentes, le rapport de deux arêtes homologues quelconques est constant.

THÉORÈME.

678. *En coupant une pyramide par un plan parallèle à la base, on détermine une seconde pyramide semblable à la première.*

Soit (*fig.* 376) la pyramide SABCDE, dans laquelle un plan parallèle à la base a déterminé la section FGHIK. Les deux pyramides SABCDE, SFGHIK ont leurs faces semblables, car les polygones ABCDE, FGHIK sont semblables (635), et les faces latérales SAB et SFG, SBC et SGH ..., le sont aussi par

Fig. 376.



suite du parallélisme des côtés de ces deux polygones.

Quant aux angles polyèdres, l'angle polyèdre S est commun, et deux angles trièdres homologues, tels que A et F, sont égaux comme ayant un angle dièdre commun compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées, savoir : l'angle dièdre SA commun, la face SAB égale à la face SFG et la face SAE égale à la face SFK.

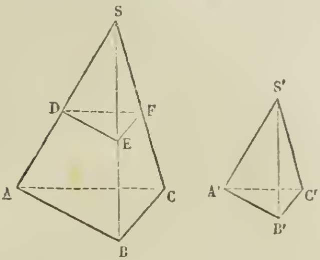
THÉORÈME.

679. *Deux pyramides triangulaires sont semblables, lorsqu'elles ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées.*

Soient (*fig.* 377) les pyramides SABC, S'A'B'C', dans lesquelles l'angle dièdre SA est égal à l'angle dièdre S'A', et les faces SAB, SAC, semblables aux faces S'A'B', S'A'C', et semblablement placées.

Portons la seconde pyramide sur la première, de manière qu'elles aient même sommet et que les faces homologues de leurs angles dièdres égaux coïncident. Le triangle S'A'B' étant semblable au triangle SAB et le point A' tombant en D sur SA, S'B' se confondra avec SB, et le point B' viendra en un point E tel, que DE soit parallèle à AB. De même le triangle S'A'C', étant semblable au triangle SAC, S'C' se confondra avec SC, et le point C′ viendra en un point F tel, que DF soit parallèle à AC. La base A′B′C′ occupera donc alors la position DEF, et

Fig. 377.

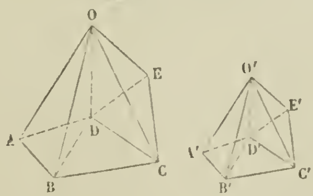


son plan sera parallèle au plan de la base ABC (506). La pyramide SDEF étant semblable à la pyramide SABC (678), il en est de même de la pyramide S′A′B′C′ qu'elle représente.

THÉORÈME.

680. *Deux polyèdres, composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et semblablement disposés, sont semblables.*

Fig. 378.



Soient (*fig.* 378) OABD, OBCD, OCDE, ..., O′A′B′D′, O′B′C′D′, O′C′D′E′, ... deux séries de tétraèdres respectivement semblables et semblablement disposés; le polyèdre formé par les premiers tétraèdres est semblable au polyèdre formé par les seconds.

En effet :

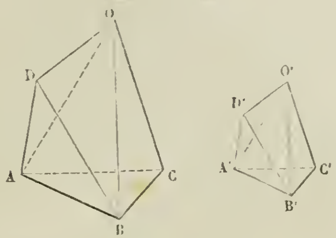
1° Les faces homologues des deux polyèdres sont semblables comme composées d'un même nombre de triangles semblables et semblablement disposés. Considérons, par exemple, la face ABCD du premier polyèdre. Les triangles ABD, BCD, qui la constituent, sont semblables aux triangles A'B'D', B'C'D', comme faces homologues de tétraèdres semblables. De plus, les triangles ABD, BCD étant dans un même plan, les angles dièdres OBDA, OBDC des deux tétraèdres OABD, OBCD sont supplémentaires; il en est donc de même des angles dièdres homologues O'B'D'A', O'B'D'C', des tétraèdres semblables O'A'B'D', O'B'C'D'. Par suite, les deux triangles A'B'D', B'C'D' sont aussi dans le même plan, et constituent sur le second polyèdre une face A'B'C'D' semblable à la face ABCD.

2° Les angles polyèdres des deux polyèdres sont égaux comme ayant tous leurs éléments égaux et semblablement disposés; car les faces homologues des deux polyèdres étant semblables et semblablement disposées, leurs angles polyèdres ont d'abord toutes leurs faces égales chacune à chacune et semblablement disposées. De plus, les angles dièdres homologues de ces angles polyèdres sont égaux, soit comme dièdres homologues de deux tétraèdres semblables, soit comme somme d'angles dièdres égaux. L'angle dièdre BCDE, par exemple, formé par les deux faces ABCD, CDE du premier polyèdre, est la somme des deux angles dièdres BCDO, ECDO, qui appartiennent aux deux tétraèdres OBCD, OCDE: et l'angle dièdre B'C'D'E', formé par les deux faces A'B'C'D', C'D'E' du second polyèdre, est la somme des deux angles dièdres homologues B'C'D'O', E'C'D'O', qui appartiennent aux deux tétraèdres semblables O'B'C'D', O'C'D'E'.

681. Réciproquement, *deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés.*

Soit (*fig.* 379) un point O pris dans l'intérieur du premier polyèdre; décomposons-le en tétraèdres en prenant le point O pour centre de décomposition (646), et soit OABC l'un des tétraèdres obtenus. Les points A, B, C, ayant pour homologues sur le second polyèdre les points A', B', C', menons un plan O'A'B' faisant au-dessus de A'B'C' un angle dièdre égal à celui que forme le plan AOB au-dessus de ABC, et dans ce plan O'A'B' construisons le triangle O'A'B' semblable au

Fig. 379.



triangle OAB. En prenant le point O' pour centre de décomposition, on décompose donc le second polyèdre en tétraèdres, qui correspondent à ceux du premier polyèdre, et il reste seulement à prouver que ces tétraèdres sont semblables deux à deux.

Soit D un quatrième sommet du premier polyèdre, tel que les deux triangles ABC, ABD aient un côté commun et soient situés sur la même face ou sur deux faces adjacentes. Comparons les deux tétraèdres OABD, O'A'B'D'. Les faces OAB, O'A'B' sont semblables comme faces homologues des deux tétraèdres semblables OABC, O'A'B'C'; les faces ABD, A'B'D' le sont aussi comme triangles homologues de deux faces semblables des polyèdres donnés. De plus, si les deux triangles ABC, ABD sont dans un même plan, les deux dièdres OABD, O'A'B'D' sont égaux comme suppléments des angles dièdres égaux OABC, O'A'B'C'; si les deux triangles ABC, ABD ne sont pas dans un même plan, les deux angles dièdres OABD, O'A'B'D' sont encore égaux comme différences des angles dièdres égaux, DABC et OABC d'une part, D'A'B'C' et O'A'B'C' d'autre part. Dans les deux cas, les tétraèdres OABD, O'A'B'D' sont semblables (679).

La même démonstration s'appliquera de proche en proche. La similitude des deux tétraèdres considérés en dernier lieu permettra toujours de vérifier la similitude des deux tétraèdres suivants.

SCOLIE.

682. Deux points O et O' rapportés à deux polyèdres semblables sont dits *homologues*, lorsqu'en joignant l'un d'eux O aux sommets consécutifs A, B, C de l'un des polyèdres, et l'autre O' aux sommets homologues A', B', C' de l'autre polyèdre, on obtient deux tétraèdres OABC, O'A'B'C' semblables et semblablement disposés par rapport aux deux polyèdres.

Il résulte de la démonstration précédente que deux points homologues quelconques peuvent être pris pour centres de décomposition de deux polyèdres semblables, en tétraèdres semblables et semblablement disposés.

Si le point O est extérieur au premier polyèdre, son homologue O' est aussi extérieur au second polyèdre; il faut alors considérer les deux polyèdres comme composés de tétraèdres additifs et de tétraèdres soustractifs.

Si le point O coïncide avec l'un des sommets A du premier polyèdre, son homologue O' coïncide avec le sommet A' du second polyèdre, et les diagonales homologues des deux polyèdres, relatives aux sommets A et A', se confondent avec les arêtes latérales de leurs tétraèdres homologues.

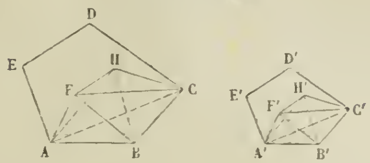
683. Deux droites rapportées à deux polyèdres semblables sont dites *homologues*, lorsque leurs extrémités sont deux à deux des points homologues. Telles sont, par exemple, les diagonales relatives à des sommets homologues.

Le rapport de deux droites homologues quelconques est égal au rapport de similitude des faces homologues des deux polyèdres.

Soient (*fig.* 380) ABCDE, A'B'C'D'E' deux faces homologues quelconques des polyèdres donnés, et FH, F'H' deux droites homologues quelconques. Formons les tétraèdres homologues FABC, F'A'B'C', HABC, H'A'B'C'. La similitude de ces tétraèdres entraîne celle des tétraèdres FHAC, F'H'A'C'. En effet, les faces FAC, HAC sont respectivement semblables aux faces F'A'C', H'A'C', et l'angle dièdre FACH, différence des angles dièdres FACB, HACB, est égal à l'angle dièdre

F'A'C'H', différence des angles dièdres égaux F'A'C'B',

Fig. 380.



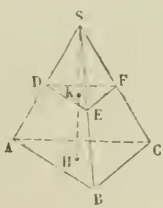
H'A'C'B'. Les deux tétraèdres FHAC, F'H'A'C' étant semblables, on a (677)

$$\frac{FH}{F'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

THÉORÈME.

684. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de similitude de leurs faces homologues, ou deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Fig. 381.



Soient d'abord (*fig.* 381) deux tétraèdres semblables SABC, SDEF, qu'on peut toujours supposer placés l'un dans l'autre, comme l'indique la figure (678), de manière que leurs bases ABC, DEF soient parallèles.

Le premier tétraèdre SABC ayant pour base ABC et pour hauteur SH, son volume a pour expression

$$\frac{ABC.SH}{3}.$$

Le second tétraèdre ayant pour base DEF et pour hauteur SK, son volume est égal à

$$\frac{\text{DEF}.\text{SK}}{3}.$$

Le rapport cherché est par suite égal à

$$\frac{\text{ABC}.\text{SH}}{\text{DEF}.\text{SK}} = \frac{\text{ABC}}{\text{DEF}} \cdot \frac{\text{SH}}{\text{SK}}.$$

Mais le plan DEF étant parallèle au plan ABC, on a (636, 635)

$$\frac{\text{ABC}}{\text{DEF}} = \frac{\overline{\text{SH}}^2}{\overline{\text{SK}}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\text{SH}}{\text{SK}} = \frac{\text{SA}}{\text{SD}} = \frac{\text{AB}}{\text{DE}}.$$

Le rapport des volumes des deux tétraèdres est donc représenté par

$$\frac{\overline{\text{SH}}^3}{\overline{\text{SK}}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{DE}}^3}.$$

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P′. Le rapport de similitude de leurs faces homologues sera (677) celui de deux arêtes homologues quelconques AB et A′B′. Ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres semblables et semblablement disposés (681), et le rapport de similitude des faces homologues de deux tétraèdres homologues est égal (683) au rapport $\frac{\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'}$. Si le polyèdre P est composé des tétraèdres T, T_1, T_2, et le polyèdre P′ des tétraèdres homologues T′, T'_1, T'_2, on aura donc, d'après ce qui précède,

$$\frac{\text{T}}{\text{T}'} = \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3}, \quad \frac{\text{T}_1}{\text{T}'_1} = \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3}, \quad \frac{\text{T}_2}{\text{T}'_2} = \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3},$$

et, par suite, en appliquant un théorème connu,

$$\frac{\text{T} + \text{T}_1 + \text{T}_2}{\text{T}' + \text{T}'_1 + \text{T}'_2} = \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{P}}{\text{P}'} = \frac{\overline{\text{AB}}^3}{\overline{\text{A}'\text{B}'}^3}.$$

Scolies.

685. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de leurs arêtes homologues.*

686. De la relation démontrée, on déduit réciproquement

$$\frac{AB}{A'B'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}}.$$

Donc, lorsqu'on veut *amplifier* ou *réduire* un polyèdre dans un rapport donné, l'*échelle* à adopter pour amplifier ou réduire les arêtes de ce polyèdre est égale à la racine cubique du rapport donné. Par exemple, si le volume du nouveau polyèdre doit être la millième partie du polyèdre donné, il faudra faire ses arêtes dix fois plus petites que les arêtes homologues du polyèdre donné.

Application.

687. *Étant donnée une pyramide dont l'une des arêtes* SA *est égale à* 1 *mètre, par quels points a et a' de cette arête faut-il mener des plans parallèles à la base de la pyramide, pour partager son volume en trois parties équivalentes?*

Les pyramides partielles dont les arêtes sont Sa et Sa' représentent respectivement le tiers et les deux tiers de la pyramide donnée. On aura donc

$$\frac{Sa}{SA} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \quad \frac{Sa'}{SA} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}};$$

d'où, en opérant par logarithmes et en faisant $SA = 1^m$,

$$Sa = 0^m,693 \quad \text{et} \quad Sa' = 0^m,874$$

à $\frac{1}{2}$ millimètre près.

§ VII. — APPENDICE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES POLYÈDRES.

THÉORÈME.

688. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de 2 est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.*

Soient A le nombre des arêtes, F celui des faces, et S celui des sommets du polyèdre; il faut démontrer l'égalité

$$(1) \qquad F + S = A + 2.$$

Considérons d'abord une figure plane Σ formée par la juxtaposition de plusieurs polygones convexes réunis successivement autour de l'un d'eux sans laisser de vide. Soient a_1 et s_1 le nombre des côtés et celui des sommets du premier polygone, a_2 et s_2 les nombres des côtés et des sommets du second polygone qui ne lui soient pas communs avec le premier, a_3, s_3 les nombres des côtés et des sommets du troisième polygone qui ne lui soient pas communs avec les deux premiers, et ainsi de suite. Si F′ est le nombre total des polygones qui composent Σ on aura les F′ équations

$$a_1 = s_1$$
$$a_2 = s_2 + 1$$
$$a_3 = s_3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

qui donnent, par addition,

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) = (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots) + F' - 1,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad A' = S' + F' - 1$$

si l'on désigne par A′ et S′ le nombre des côtés et celui des sommets de la figure Σ.

Ce lemme établi, revenons au polyèdre convexe. Si on supprime l'une des faces, les faces restantes, dont le nombre sera $F - 1$, pourront être considérées comme formant une suite de polygones convexes juxtaposés et renfermés dans le contour de la face supprimée; nous pourrons d'ailleurs raisonner sur ce réseau comme s'il était plan, puisque le théorème ne dépend que des nombres des polygones, des sommets et des arêtes. La relation (2) doit donc être satisfaite par les valeurs

$$A' = A, \quad S' = S, \quad F' = F - 1;$$

on tombe ainsi sur la relation (1), qui est attribuée à Euler (*Mémoires de Pétersbourg*, 1758) [1].

Corollaires.

689. Désignons par t, q, p, h, h', o, ... les nombres des faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, hexagonales, heptagonales, octogo-

[1] En réalité la formule (1) appartient à Descartes; on la trouve en effet dans l'écrit posthume de ce grand géomètre intitulé *De solidorum elementis*. Voir sur ce sujet un remarquable mémoire de M. de Jonquières (Académie des Sciences, 31 mars 1890).

nales, ... Chaque arête étant commune à deux faces, on aura évidemment

(2) $$F = t + q + p + h + h' + o + \ldots,$$
(3) $$2A = 3t + 4q + 5p + 6h + 7h' + 8o + \ldots.$$

Soient T, Q, P, H, H′, O, ... les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, ... du polyèdre proposé; chaque arête unissant deux sommets, on aura de même

(4) $$S = T + Q + H + H' + O + \ldots,$$
(5) $$2A = 3T + 4Q + 5P + 6H + 7H' + 8O + \ldots.$$

D'après l'égalité (3), *le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair* (c'est-à-dire le nombre $t + p + h' + \ldots$) *est toujours pair*; d'après l'égalité (5), *le nombre des angles polyèdres ou des sommets dont le nombre des arêtes est impair* (c'est-à-dire le nombre $T + P + H' + \ldots$) *est toujours pair*.

690. On peut exprimer F en fonction de T, Q, P, H, H′, O, ...; il suffit d'éliminer S et A entre les relations (1), (4) et (5). On trouve

(6) $$2F = 4 + T + 2Q + 3P + 4H + 5H' + 6O + \ldots.$$

De même, on peut exprimer S en fonction de t, q, p, h, h', o, ...; il suffit d'éliminer F et A entre les relations (1), (2) et (3). On trouve

(7) $$2S = 4 + t + 2q + 3p + 4h + 5h' + 6o + \ldots.$$

Scolie.

691. *Si l'on conçoit la surface d'un polyèdre convexe décomposé en plusieurs portions, chaque portion étant une face seule ou le système de plusieurs faces voisines, le théorème d'Euler a encore lieu entre le nombre des portions dont il s'agit, le nombre des arêtes qui servent de limites à ces mêmes portions, et le nombre des sommets compris entre ces arêtes.*

En effet, que les droites qui terminent chaque portion soient ou non dans un même plan, les nombres considérés ne varient pas. Or, dans la première hypothèse, sans rien changer à ces mêmes nombres, on pourrait former un nouveau polyèdre en substituant à chaque portion une face plane terminée au même contour, et le théorème d'Euler serait applicable à ce polyèdre.

Toutes les formules que nous venons d'établir subsistent dans ce cas; seulement, t est alors le nombre des portions de la surface, terminées par un contour triangulaire; q, p, ... les nombres des portions dont le contour est quadrangulaire, pentagonal, etc.

THÉORÈME.

692. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires, augmenté de celui des angles trièdres, est au moins égal à huit.*

En effet, si dans la relation (1), qu'on peut écrire

$$4F + 4S = 4A + 8,$$

on remplace F par la valeur (2), S par la valeur (4), et 4 A par la somme des valeurs (3) et (5), on trouve

$$t + T = 8 + (p + P) + 2(h + H) + 3(h' + H') + 4(o + O) + \ldots.$$

D'après cela, *il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne renferme ni face triangulaire, ni angle trièdre.*

THÉORÈME.

693. 1° *Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de cinq côtés ;* 2° *il n'existe aucun polyèdre convexe dont tous les angles polyèdres aient plus de cinq arêtes.*

En effet :

1° Si, dans l'inégalité $2A > 3S$, qui résulte de la comparaison des relations (4) et (5), on remplace A et S par les valeurs (3) et (7), on trouve la formule

$$3t + 2q + p > 12 + (h' + 2o + \ldots),$$

qui prouve que t, q et p ne peuvent être nuls à la fois.

2° Si, dans l'inégalité $2A > 3F$, qui résulte de la comparaison des relations (2) et (3), on remplace A et F par les valeurs (5) et (6), on trouve la formule

$$3T + 2Q + P > 12 + (H' + 2O + \ldots),$$

qui prouve que T, Q et P ne peuvent être nuls à la fois.

Scolie.

694. La symétrie de la formule d'Euler par rapport aux nombres F et S et la similitude des équations (2) et (4), (3) et (5) entraînent dans les relations qu'on peut en déduire une corrélation que le lecteur a sans doute déjà remarquée.

THÉORÈME.

695. *Il ne peut exister que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre n de côtés et dont tous les angles polyèdres aient le même nombre m d'arêtes.*

En effet, chaque arête appartenant à deux faces et joignant deux sommets, on a

$$2A = nF = mS.$$

L'élimination de A et de S entre ces équations et la formule d'Euler donne

$$F = \frac{4m}{2(m+n) - mn}.$$

Pour $n = 3$, cette relation devient

$$F = \frac{4m}{6 - m},$$

et l'on ne peut donner alors à m que les valeurs 3, 4 et 5, auxquelles répondent respectivement les valeurs $F = 4$, $F = 8$, $F = 20$.

Pour $n = 4$ ou $n = 5$, on a

$$F = \frac{2m}{4 - m} \quad \text{ou} \quad F = \frac{4m}{10 - 3m}.$$

On ne peut donner dans les deux cas à m que la valeur 3, et il en résulte $F = 6$ ou $F = 12$.

Pour $n = 6$, on a

$$F = \frac{m}{3 - m},$$

et l'on ne peut donner à m aucune valeur. Il en est de même *a fortiori* pour $n > 6$; ce résultat était d'avance indiqué par le théorème du n° 693.

Il n'y a donc que cinq espèces de polyèdres convexes dont toutes les faces aient le même nombre de côtés et tous les angles polyèdres le même nombre d'arêtes : ce sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre à faces triangles; l'hexaèdre à faces quadrilatères; le dodécaèdre à faces pentagones.

THÉORÈME.

696. *L'angle droit étant pris pour unité, la somme des angles de toutes les faces d'un polyèdre convexe est égale à quatre fois le nombre des sommets diminué de 2.*

L'angle droit étant l'unité d'angle, on sait que, pour une face quelconque de n côtés, la somme des angles est $2n - 4$. En désignant par n, n', n'', ... les nombres de côtés des différentes faces, on aura donc pour toutes les faces

$$(2n - 4) + (2n' - 4) + (2n'' - 4) + \ldots.$$

Cette suite contiendra d'ailleurs F termes. La somme cherchée a donc pour expression

$$2(n + n' + n'' + \ldots) - 4F.$$

Chaque côté appartenant à deux faces, la parenthèse est égale à $2A$, et l'on obtient la formule

$$4(A - F) \quad \text{ou} \quad 4(S - 2),$$

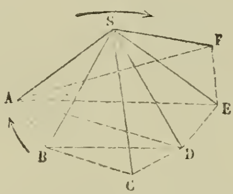
d'après le théorème d'Euler.

CONDITIONS D'ÉGALITÉ ET DE SIMILITUDE DE DEUX POLYÈDRES CONVEXES.

LEMME.

697. *Si, dans un angle polyèdre convexe dont toutes les faces sauf une restent invariables, un ou plusieurs angles dièdres non adjacents à la face variable augmentent ou diminuent tous à la fois, cette face elle-même augmente ou diminue.*

Fig. 382.



Soient (*fig.* 382) l'angle polyèdre SABCDEF et, dans cet angle, SAB la seule face qui puisse varier. Supposons d'abord qu'un seul angle dièdre SD augmente ou diminue. Menons les plans ASD, BSD. Les deux angles polyèdres SBCD, SADEF ne changent ni de forme ni de grandeur, d'après les conditions de constance imposées à leurs faces et à leurs angles dièdres. Par suite, si l'angle dièdre SD augmente ou diminue, ce ne peut être que par sa partie ASDB; et, comme ce dernier angle dièdre est compris dans l'angle trièdre SABD entre deux faces invariables de grandeur, la face opposée ASB augmente ou diminue (569).

Si plusieurs angles dièdres non adjacents à la face ASB augmentent ou diminuent à la fois, il en sera de même de cette face; car on peut faire varier isolément, et l'un après l'autre, les angles dièdres considérés et, d'après ce qui précède, chaque changement partiel en produira toujours un de même nature sur la face ASB.

Corollaire.

698. Si, toutes les faces demeurant constantes, certains dièdres d'un angle polyèdre viennent à changer, il est impossible que tous varient dans le même sens, c'est-à-dire qu'il est impossible que tous augmentent ou que tous diminuent.

LEMME.

699. *Soit un angle polyèdre convexe ayant plus de trois faces; si, les faces demeurant constantes et l'angle polyèdre restant convexe, on suppose que les angles dièdres aient, les uns augmenté, les autres diminué; et si, en faisant le tour de l'angle polyèdre, on affecte du signe + l'arête de chaque angle dièdre augmenté, et du signe — l'arête de chaque angle dièdre diminué, on trouvera toujours dans le tour entier au moins quatre variations de signes.*

Il est impossible qu'il n'y ait que deux variations de signes, en d'autres termes il est impossible qu'à une série de signes + succède une série de signes — qui ramène au premier signe +. En effet, si (*fig.* 382) les arêtes SA, SF, SE étant affectées du signe +, les arêtes suivantes SD, SC, SB étaient affectées du signe —, la face ASE qui sépare les deux angles polyèdres SAFE, SEDCBA augmenterait dans l'un et diminuerait dans l'autre (697).

Puisqu'il y a plus de deux variations de signes et qu'on doit fermer le circuit en rejoignant le signe qui a servi de point de départ, il est impossible que le nombre des variations soit impair. Puisque ce nombre est pair et plus grand que 2, il est au moins égal à 4.

THÉORÈME.

700. *Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont constantes, les angles dièdres sont aussi constants.*

« En effet, supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que l'on puisse faire » varier les inclinaisons des faces adjacentes, sans détruire le polyèdre; » et pour simplifier encore la question, supposons d'abord que l'on puisse » faire varier toutes les inclinaisons à la fois. Les inclinaisons sur certaines » arêtes varieront en plus, les inclinaisons sur d'autres arêtes varieront » en moins; et en comparant deux à deux, relativement aux signes de » leurs variations, les inclinaisons des arêtes qui, dans chaque face, abou- » tissent aux mêmes sommets, on trouvera, en passant successivement » d'une arête à l'autre, plusieurs changements de signes. C'est le nombre » de ces changements que nous allons chercher à déterminer [1]. »

Il suit du lemme précédent que chaque angle polyèdre présente sur ses arêtes au moins quatre changements de signes. Le nombre des changements de signes obtenus en considérant tous les angles polyèdres du polyèdre serait donc au moins égal à 4S. Or il est aisé de voir que cela est impossible.

---

(1) Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*, XVI^e Cahier, p. 96. Dans le langage de Cauchy, le mot *inclinaison* est ici synonyme de *dièdre*.

Remarquons qu'en faisant le tour de chaque sommet ou en faisant celui du périmètre de chaque face on doit trouver le même nombre total de variations de signes. En effet, chaque variation de signes autour d'un sommet correspond à deux arêtes de signes différents qui se suivent sur le périmètre d'une même face, et réciproquement.

Mais, sur un périmètre, le nombre des variations ne peut dépasser le nombre des côtés et ne peut être impair ; car, puisqu'on doit revenir au point de départ, chaque variation en entraîne nécessairement une seconde. Chaque face triangulaire ne peut donc fournir plus de deux changements de signes ; les quadrilatères et les pentagones ne peuvent en fournir plus de quatre ; de même, les hexagones et les heptagones plus de six, et ainsi de suite. Toutes les faces ou tous les sommets du polyèdre ne pourront donc donner plus de changements de signes qu'il n'y a d'unités dans la somme

$$2t + 4q + 4p + 6h + 6h' + 8o + \ldots.$$

Or cette somme est inférieure à $4S$; car on a (690), d'après la formule (7),

$$4S = 8 + 2t + 4q + 6p + 8h + 10h' + 12o + \ldots.$$

Il faut en conclure qu'il est impossible que les inclinaisons sur les arêtes changent toutes à la fois.

« Si l'on suppose, en second lieu, que, dans le polyèdre donné, non-
» seulement les faces, mais encore les inclinaisons sur plusieurs arêtes
» restent invariables, et que cependant on puisse, sans détruire le po-
» lyèdre, faire varier les inclinaisons sur les arêtes restantes, alors, pour
» démontrer l'absurdité de l'hypothèse, il suffira de concevoir la surface
» du polyèdre décomposée en autant de portions que les arêtes sur les-
» quelles les inclinaisons varient forment de contours différents, et d'ap-
» pliquer aux portions, aux arêtes qui les terminent, et aux sommets
» compris entre ces arêtes, les mêmes raisonnements que nous avons ap-
» pliqués, dans l'hypothèse précédente, aux faces, aux arêtes et aux som-
» mets du polyèdre [1]. » On y parviendra en s'appuyant encore sur le lemme précédent et sur le scolie du n° 691.

COROLLAIRES.

701. Il suit du théorème précédent que *deux polyèdres convexes, compris sous un même nombre de faces égales, sont égaux ou symétriques*, suivant que les faces égales sont ou non semblablement disposées.

702. Il suit encore du théorème précédent que, *lorsque deux polyèdres convexes sont compris sous un même nombre de faces semblables, le*

---

[1] CAUCHY, *loc. cit.*

second est semblable au premier ou à un troisième polyèdre symétrique du premier, suivant que les faces semblables sont ou non semblablement placées.

PROBLÈME.

703. *Chercher le nombre de conditions nécessaires pour déterminer un polyèdre convexe.*

1° Le polyèdre est d'une nature déterminée, c'est-à-dire qu'on connaît le nombre des faces, le nombre des côtés de chacune d'elles et la manière de les assembler.

Prenons pour base une des faces du polyèdre. Si elle a n côtés, il faut $2n-3$ conditions pour la déterminer. Or il y a hors de cette base $S-n$ sommets, et comme pour déterminer un point dans l'espace il faut trois conditions, on aura en tout $2n-3+3(S-n)$, ou $3S-n-3$ conditions. Mais les sommets qui répondent à une même face sont dans un même plan, et trois points suffisent pour déterminer un plan. Par conséquent, pour tous les sommets d'une même face, en sus des trois premiers, il ne faut réellement que deux conditions. On doit donc diminuer $3(S-n)$ de la somme $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$, en désignant par n', n'', n''',... les nombres de côtés des $F-1$ faces qui restent en dehors de la base choisie. Le nombre de conditions demandé est donc finalement

$$3(F+S-2)-(n+n'+n''+n'''+\ldots);$$

mais (688, 689)

$$n+n'+n''+n'''+\ldots=2A \quad \text{et} \quad F+S-2=A.$$

Le nombre cherché se réduit donc à A. Ainsi, *le nombre des données nécessaires pour déterminer un polyèdre,* dans les conditions indiquées, *est égal au nombre de ses arêtes.*

« Remarquez cependant que les données dont il s'agit ne doivent pas » être prises au hasard parmi les lignes et les angles qui constituent les » éléments du polyèdre ; car, quoiqu'on eût autant d'équations que d'in- » connues, il pourrait se faire que certaines relations entre les quantités » connues rendissent le problème indéterminé. Ainsi, il semblerait, d'après » le théorème qu'on vient de trouver, que la connaissance des arêtes » seules suffit en général pour déterminer un polyèdre ; mais il y a des » cas où cette connaissance n'est pas suffisante. Par exemple, étant donné » un prisme non triangulaire quelconque, on pourra former une infinité » d'autres prismes qui auront des arêtes égales et placées de la même ma- » nière. Car, dès que la base a plus de trois côtés, on peut, en conser- » vant les côtés, changer les angles et donner ainsi à cette base une infi- » nité de formes différentes ; on peut aussi changer la position de l'arête » longitudinale du prisme par rapport au plan de la base ; enfin, on peut » combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera

» combiner ces deux changements l'un avec l'autre, et il en résultera » toujours un prisme dont les arêtes ou côtés n'auront pas changé. D'où » l'on voit que les arêtes seules ne suffisent pas dans ce cas pour déterminer le polyèdre. Les données qu'il convient de prendre sont celles » qui ne laissent aucune indétermination (¹). »

2° La nature du polyèdre n'est pas déterminée, et l'on connaît seulement le nombre des sommets.

Prenons trois de ces points à volonté. Pour déterminer le triangle formé par eux, il faudra trois conditions; puis, pour déterminer chacun des $S - 3$ autres sommets, il suffira de donner ses distances aux trois premiers, ce qui exige $3(S-3)$ conditions. Le nombre cherché est donc ici $3 + 3(S-3)$ ou $3S - 6$.

SCOLIE.

704. Si un côté et $A - 1$ angles déterminent un polyèdre de nature donnée, un autre côté pris à volonté et les mêmes angles déterminent un polyèdre semblable au premier. Donc, *pour que deux polyèdres de même nature soient semblables, il faut* $A - 1$ *conditions*.

Si les deux polyèdres ne sont pas de nature déterminée, et s'ils ont seulement le même nombre S d'angles polyèdres, il faut $3S - 7$ conditions pour qu'ils soient semblables.

RELATION ENTRE L'ÉTENDUE D'UNE FIGURE PLANE ET CELLE DE SA PROJECTION ORTHOGONALE.

THÉORÈME.

705. *La projection d'une droite AB sur un axe XY est égale au produit de la longueur AB de cette droite par le cosinus de l'angle aigu α qu'elle fait avec l'axe.*

Fig. 383.

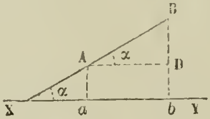
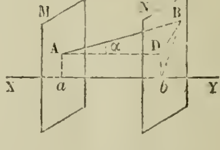


Fig. 384.



Nous supposons ici (*fig.* 384) que la droite AB et l'axe XY ne soient

(¹) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 14ᵉ édition, Note VIII.

pas dans un même plan, sans quoi le théorème ne différerait pas de celui qui a été démontré déjà en Géométrie plane (Appendice du III^e Livre). Dans notre hypothèse, la projection ab est égale à la portion de l'axe XY comprise entre deux plans M et N menés par A et B perpendiculairement à cet axe, ou bien encore à la portion AD de la parallèle à l'axe menée par le point A jusqu'à la rencontre du plan N. Or le triangle rectangle ADB donne

$$AD = AB\cos\alpha \quad \text{ou} \quad ab = AB\cos\alpha.$$

THÉORÈME.

706. *L'aire de la projection d'un triangle sur un plan est égale à l'aire de ce triangle multipliée par le cosinus de l'angle aigu que forme le plan du triangle avec le plan de projection.*

Fig. 385.

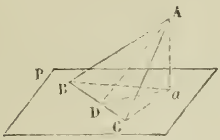
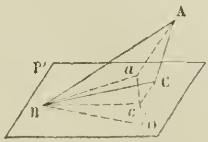


Fig. 386.



Supposons d'abord que le triangle proposé ABC ait un de ses côtés BC situé dans le plan P de projection (*fig.* 385). Si de la projection a du sommet A on mène la perpendiculaire aD sur BC, la droite AD sera, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la hauteur du triangle ABC. Or, le rapport des triangles aBC, ABC, de même base BC, est égal au rapport des hauteurs aD et AD, c'est-à-dire au cosinus de l'angle aigu ADa qui mesure l'inclinaison des deux plans.

Considérons actuellement un triangle ABC placé d'une manière quelconque par rapport au plan de projection (*fig.* 386), et menons par le sommet B le plus voisin de ce plan un plan P′ qui lui soit parallèle. La projection aBc du triangle ABC sur le plan P′ est égale à celle qu'on obtiendrait en le projetant sur le plan primitif. Or, soient O le point où le côté AC prolongé rencontre le plan P′, et α l'angle du plan ABC et du plan de projection; le triangle ABC étant la différence de deux triangles ABO, CBO, qui ont un côté BO dans le plan P′, on a

$$\begin{aligned} aBc = aBO - cBO &= ABO\cos\alpha - CBO\cos\alpha \\ &= (ABO - CBO)\cos\alpha = ABC\cos\alpha, \end{aligned}$$

COROLLAIRE.

707. *Le théorème s'étend à la projection de l'aire d'un polygone plan et même d'une courbe plane fermée.*

Il suffit de faire voir que la proposition a lieu pour un polygone, puisqu'une courbe n'est qu'un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits.

Or, soient T, T′, T″, ... les aires des triangles qui composent le polygone plan P et t, t', t'', ... les triangles correspondants du polygone p, qui est la projection de P ; chacun des triangles de la deuxième série est évidemment la projection du triangle correspondant de la première, et si l'on appelle α l'inclinaison du plan du polygone P sur le plan de projection, on a

$$t = \mathrm{T}\cos\alpha, \quad t' = \mathrm{T}'\cos\alpha, \quad t'' = \mathrm{T}''\cos\alpha, \quad \ldots,$$

d'où, en ajoutant,

$$t + t' + t'' + \ldots = (\mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \ldots)\cos\alpha \quad \text{ou} \quad p = \mathrm{P}\cos\alpha.$$

CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

708. Soient A et B deux points donnés, α un *coefficient* ou nombre fixe, d'ailleurs positif ou négatif, correspondant au point A, et 6 un coefficient relatif au point B. On sait que, sur la droite indéfinie qui passe par les points A et B, il existe un point unique M tel que le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ soit égal en grandeur et en signe à $-\frac{6}{\alpha}\cdot$ Projetons les trois points A, B, M sur un plan quelconque P, parallèlement à une direction donnée arbitrairement, et proposons-nous de déterminer la longueur de la projetante MM_1 ou z du point M en fonction des coefficients α et 6, et des projetantes $\mathrm{AA}_1 = a$ et $\mathrm{BB}_1 = b$ des points A et B.

Il y a deux cas à distinguer, suivant que les coefficients α et 6 sont de même signe ou de signes contraires.

Fig. 387.

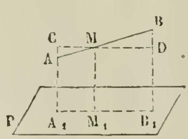
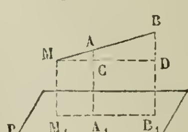


Fig. 388.



Dans le premier cas (*fig.* 387), le rapport $-\frac{6}{\alpha}$ est négatif, et, par suite, le point M est situé entre A et B. D'ailleurs, en menant CMD parallèle au plan P, on voit que le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ est égal, en valeur absolue, à $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \frac{z-a}{b-z}$; on a donc $-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = -\frac{z-a}{b-z}$, d'où

$$z = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}.$$

Dans le second cas (*fig.* 388), le rapport $-\frac{\beta}{\alpha}$ est positif et, par suite, le point M est situé sur l'un des prolongements de AB. On a alors

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \frac{a-z}{b-z} \quad \text{ou} \quad \frac{z-a}{z-b},$$

d'où

(1)
$$z = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha + \beta}.$$

C'est la même formule que dans le premier cas. $\alpha + \beta$ sera le coefficient attribué au point M.

709. Nous avons supposé jusqu'ici que les points A, B, M étaient situés d'un même côté du plan P : mais cette restriction n'est pas nécessaire, et la formule (1) subsiste pour toutes les dispositions possibles de la figure, pourvu qu'on regarde les nombres a, b, z, qui mesurent les projetantes, comme positifs pour les points situés d'un côté du plan P, et comme négatifs pour les points situés du côté opposé.

En effet, les points A, B, M, étant situés d'une manière quelconque par rapport au plan P, menons un plan P' parallèle à P et à une distance h assez grande pour que les trois points A, B, M, soient au-dessus du plan P'. Alors, si a', b', z' mesurent les projetantes relatives à ce plan P', on aura (708)

$$(\alpha + \beta)z' = a'\alpha + b'\beta.$$

En retranchant de cette égalité l'identité

$$(\alpha + \beta)h = h\alpha + h\beta,$$

on obtient la relation

$$(\alpha + \beta)(z' - h) = (a' - h)\alpha + (b' - h)\beta.$$

Mais, en ayant égard aux signes des projetantes, on a toujours

$$z' - h = z, \quad a' - h = a, \quad b' - h = b,$$

a, b, z étant les projetantes relatives au plan P. Donc la formule

$$(\alpha+\beta)z = a\alpha + b\beta$$

subsiste dans tous les cas.

710. Cela posé, soient A, B, C, D, ..., L autant de points qu'on voudra, situés d'une manière quelconque dans l'espace; désignons par α, β, γ, δ, ..., λ les coefficients correspondants, et par a, b, c, d, ..., l les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les droites projetant obliquement ou orthogonalement les points A, B, C, D, ..., L, sur un plan quelconque P.

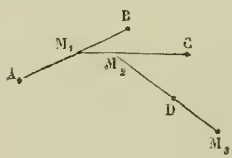
Sur la droite AB (*fig.* 389) prenons le point M_1 tel, que

$$\frac{M_1A}{M_1B} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

La projetante z_1 de ce point sera, en grandeur et en signe,

$$z_1 = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha+\beta}.$$

Fig. 389.



Menons M_1C et prenons sur cette droite le point M_2 tel, que

$$\frac{M_2M_1}{M_2C} = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

La projetante z_2 de ce point sera

$$z_2 = \frac{z_1(\alpha+\beta)+c\gamma}{(\alpha+\beta)+\gamma} = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

En menant de même M_2D et prenant sur cette droite un point M_3 tel, que

$$\frac{M_3M_2}{M_3D} = -\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

et continuant ainsi jusqu'au dernier point L, on obtiendra finalement un point M dont la projetante z aura pour expression

$$(2) \qquad z = \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots+l\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda}.$$

On dit que ce point M est le *centre des distances proportionnelles* des points donnés (A, α) (B, β), $(C, \gamma), \ldots$, (L, λ). On arrive d'ailleurs au même point M dans quelque ordre que l'on joigne les points donnés; cela résulte de ce que la formule (2), qui exprime la distance du point M à un plan quelconque P, ne porte aucune trace de l'ordre suivi.

Dans le cas où tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont égaux entre eux, le point M prend le nom de *centre des moyennes distances;* sa distance à un plan quelconque, comptée parallèlement à une droite arbitraire, est donnée par la formule

$$z = \frac{a + b + c + \ldots + l}{n},$$

n étant le nombre des points considérés.

711. La formule (2), qu'on peut écrire

$$(3) \qquad z\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha,$$

en désignant en général par la notation $\Sigma\alpha$ la somme de tous les coefficients et par $\Sigma a\alpha$ la somme de tous les produits $a\alpha$, $b\beta, \ldots, l\lambda$, exprime que *la somme des produits obtenus en multipliant la projetante de chaque point par son coefficient est égale au produit de la projetante du centre des distances proportionnelles par la somme des coefficients.*

Pour que z soit nul, il faut et il suffit que $\Sigma a\alpha$ le soit, car on suppose expressément que la somme $\Sigma\alpha$ des coefficients donnés est différente de zéro. Donc, *pour qu'un plan passe par le centre des distances proportionnelles, il faut et il suffit que la somme des produits obtenus en multipliant chaque projetante relative à ce plan par le coefficient correspondant soit égale à zéro.* Cette condition se réduit à $\Sigma a = 0$, lorsqu'il s'agit du centre des moyennes distances.

712. Dans le cas où tous les points donnés A, B, C, ..., L sont dans un même plan Q, le centre M est aussi dans ce plan. Si l'on prend alors pour direction des projetantes une parallèle au plan Q, tous les pieds des projetantes seront situés sur l'intersection XY du plan Q et du plan P de projection ; cela revient donc à projeter sur une droite quelconque XY du plan Q.

713. Soient $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ deux groupes de points; M le centre des distances proportionnelles du premier groupe, et Z le centre des distances proportionnelles du système formé par tous les points des deux groupes.

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ les coefficients, $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ les projetantes des points donnés, et désignons par m et par z les projetantes de M et de Z. On aura, par la formule (2),

$$m\Sigma\alpha = \Sigma a\alpha, \quad z(\Sigma\alpha + \Sigma\beta) = \Sigma a\alpha + \Sigma b\beta,$$

d'où, en posant $\Sigma\alpha = \mu$,

$$z(\mu + \Sigma\beta) = m\mu + \Sigma b\beta.$$

Le point Z est donc le centre des distances proportionnelles des points M, B_1, B_2, ..., quand on donne à M un coefficient égal à μ.

Ainsi, *dans la recherche du centre des distances proportionnelles d'un système de points, on peut remplacer plusieurs de ces points par leur centre particulier, pourvu qu'on donne à ce centre un coefficient égal à la somme des coefficients des points correspondants.*

Inversement, *on peut remplacer un point par plusieurs autres, dont il est le centre, et dont la somme des coefficients est égale à son coefficient.*

CENTRE DE GRAVITÉ.

714. On appelle *centre de gravité d'une ligne droite* AB le centre des moyennes distances de ses extrémités A et B, c'est-à-dire par conséquent le milieu de cette droite.

Le *centre de gravité d'une ligne brisée* plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des divers côtés de ce contour polygonal, ces centres ayant des coefficients proportionnels aux côtés correspondants.

Il est aisé de voir, d'après cela, que *le centre de gravité du périmètre d'un triangle* ABC *est le centre* O *du cercle inscrit au triangle* A'B'C' *formé en joignant les milieux des côtés du triangle primitif* (*fig.* 390). En effet,

Fig. 390.

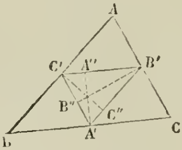
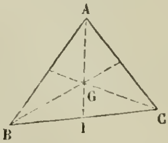


Fig. 391.



si l'on mène les trois hauteurs A'A'', B'B'', C'C'' du triangle A'B'C', et si l'on applique la formule (3) en projetant successivement sur chacun des côtés de ce triangle, on trouve

$$\frac{AB.C'C''}{AB + BC + CA}, \quad \frac{BC.A'A''}{AB + BC + CA}, \quad \frac{CA.B'B''}{AB + BC + CA},$$

pour les distances du centre de gravité aux trois droites A'B', B'C', C'A'.

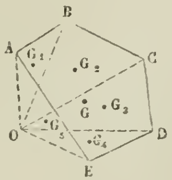
Or, comme les numérateurs de ces trois fractions représentent chacun l'aire du triangle ABC, on voit que le centre de gravité cherché est équidistant des trois côtés du triangle A'B'C'.

715. On appelle centre de gravité de l'aire d'un triangle, ou plus rapidement *centre de gravité d'un triangle*, le centre des moyennes distances des trois sommets.

Il est aisé de voir (*fig.* 391) que *le centre de gravité* G *d'un triangle* ABC *est le point de concours des médianes de ce triangle;* car, pour avoir ce centre, il faut, d'après la construction même du n° 710, prendre le milieu I de BC, puis diviser IA de telle sorte que $\frac{GI}{GA} = -\frac{1}{2}$. Donc le point G est sur la médiane AI, au tiers de sa longueur à partir de la base, etc.

716. Un polygone ABCDE étant donné (*fig.* 392), si on le décompose en triangles, en joignant tous ses sommets à un point O pris dans son plan,

Fig. 392.



et que l'on cherche le centre G des distances proportionnelles des centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 de ces triangles, en leur attribuant des coefficients proportionnels aux aires des triangles correspondants, on aura ce qu'on appelle le *centre de gravité du polygone*. Si le point O est pris à l'intérieur du polygone, tous les triangles sont additifs, et l'on donne à tous les coefficients le signe $+$: si le point O est pris à l'extérieur du polygone, il y a des triangles additifs et des triangles soustractifs, et l'on donne pour coefficients aux centres de gravité des triangles additifs les aires de ces triangles précédées du signe $+$, et aux centres de gravité des triangles soustractifs les aires de ces triangles précédées du signe $-$.

Pour légitimer cette définition, il faut prouver que la position du centre de gravité G du polygone est indépendante de la position qu'occupe le point O dans son plan. A cet effet, projetons la figure sur un plan quelconque P, en donnant aux projetantes une direction perpendiculaire au plan ABCDE. Soient g, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 les projetantes des points G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, et γ, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5 les coefficients correspondants, c'est-à-dire les aires du polygone ABCDE et des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEA, prises avec les signes convenables.

La formule (3) donnant

$$\gamma.g = \gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2 + \gamma_3.g_3 + \gamma_4.g_4 + \gamma_5.g_5,$$

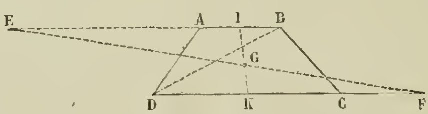
$\gamma.g$ représente le volume du tronc de prisme droit dont ABCDE est la base. En effet g_1, projetante du point G_1, est égal au tiers des projetantes des points O, A et B, puisque g_1 est le centre des moyennes distances des trois sommets du triangle OAB. Donc $\gamma_1.g_1$ représente (653) le volume du tronc du prisme droit dont OAB est la base. De même, les produits $\gamma_2.g_2$, $\gamma_3.g_3$, ... représentent les volumes des troncs de prisme construits sur OBC, OCD,.... D'ailleurs, comme les facteurs γ_1, γ_2, γ_3,... sont positifs ou négatifs, suivant que les triangles correspondants sont additifs ou soustractifs, on voit que les produits $\gamma_1.g_1$, $\gamma_2.g_2$, ... ont naturellement le signe + ou le signe —, suivant que les troncs de prisme qu'ils représentent sont additifs ou soustractifs. Donc, enfin, le second membre de la relation précédente exprime la mesure du volume du tronc de prisme construit sur le polygone ABCDE; et, en désignant ce volume par V, on a

$$\gamma.g = V \quad \text{ou} \quad g = \frac{V}{\gamma}.$$

La distance du point G à un plan quelconque P, comptée perpendiculairement au plan ABCDE, est donc indépendante de la position que le point O occupe dans le plan du polygone.

717. Cherchons, par exemple, le centre de gravité d'un trapèze ABCD (*fig.* 393).

Fig. 393.



D'après le théorème précédent, le point G est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des triangles ABD, BDC, ces points ayant des coefficients proportionnels aux aires de ces triangles, c'est-à-dire à leurs bases AB et DC, puisqu'ils ont même hauteur, ou à 3 AI et 3 KC, les points I et K étant les milieux de AB et de DC. Mais (713) on peut remplacer le centre de gravité du triangle ABD par le système des trois points A, B, D, affectés chacun d'un coefficient égal à AI, et le centre de gravité du triangle BDC par le système des trois points B, D, C, affectés chacun d'un coefficient égal à KC. On a donc en somme à prendre le centre des distances proportionnelles des quatre points A, B, C, D, affectés respectivement de coefficients égaux à AI, AI + KC, KC, AI + KC.

Or, les points A et B peuvent être à leur tour remplacés par le point I, ayant $2AI + KC$ pour coefficient, et les points D et C par le point K, ayant $2KC + AI$ pour coefficient. Le centre de gravité G du trapèze, étant le centre des distances proportionnelles de ces deux points I et K, s'obtiendra en divisant IK en deux parties telles que

$$\frac{GI}{GK} = -\frac{2KC + AI}{2AI + KC} = -\frac{DC + AI}{AB + KC}.$$

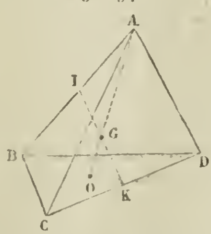
Par suite, si l'on prolonge BA d'une longueur AE égale à DC, et DC d'une longueur CF égale à AB, la droite EF coupera IK au point demandé G.

718. Pour déterminer les centres de gravité des volumes, on suit une marche entièrement analogue à celle qu'on vient d'exposer.

Après avoir défini le *centre de gravité d'un tétraèdre* comme étant le centre des moyennes distances de ses sommets, on définira le *centre de gravité d'un polyèdre* quelconque comme étant le centre des distances proportionnelles des centres de gravité des tétraèdres additifs ou soustractifs qu'on obtient en joignant à tous les sommets du polyèdre un point O pris à volonté dans l'espace ; ces centres de gravité doivent être d'ailleurs affectés chacun d'un coefficient proportionnel au volume du tétraèdre correspondant. On démontrera, par un raisonnement semblable à celui du n° 716, que la position du centre de gravité ainsi défini ne dépend pas de la position du point O.

Nous laissons au lecteur le soin de développer ce sujet et d'en faire des applications. Les problèmes de ce genre ont leur véritable place dans la Statique, où l'on aperçoit mieux leur utilité. Les centres de gravité ne jouent qu'un rôle fort restreint en Géométrie pure, où ils interviennent cependant d'une manière intéressante pour l'évaluation de quelques aires et de certains volumes, comme nous allons le voir immédiatement pour le tronc de prisme quelconque, et comme nous le montrerons plus tard à la suite de l'étude des corps ronds.

Fig. 394.



Nous nous arrêterons néanmoins un instant sur le *centre de gravité du* *tétraèdre.* En remplaçant (*fig.* 394) les deux sommets A et B par leur milieu I affecté du coefficient 2 et, de même, les sommets C et D par leur milieu K affecté du coefficient 2, on voit que *le centre de gravité* G *du tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées* AB *et* CD.

Si, procédant autrement, on remplace les trois points B, C, D par le centre de gravité O du triangle BCD, affecté du coefficient 3, on voit que le centre de gravité G est sur la droite AO en un point tel, que

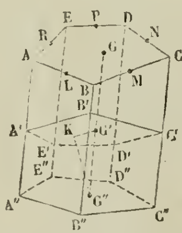
$$\frac{GO}{GA} = -\frac{1}{3}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad GO = \frac{AO}{4}.$$

En réunissant ces deux résultats, on a la proposition suivante : *Dans tout tétraèdre, les trois droites qui joignent les milieux de chaque couple d'arêtes opposées, et les quatre droites qui joignent chaque sommet au point de rencontre des médianes de la face opposée, passent par un même point ; ce point est situé au milieu des trois premières droites, et pour chacune des quatre autres il est aux trois quarts de sa longueur comptée à partir du sommet correspondant.*

THÉORÈME.

719. *L'aire latérale d'un tronc de prisme quelconque est égale au produit du périmètre de la section droite par la portion de la parallèle aux arêtes du prisme, menée par le centre de gravité du contour de la section droite et comprise entre les deux bases du tronc* (*fig.* 395.)

Fig. 395.



Soient A'B'C'D'E' A''B''C''D''E'' le tronc de prisme, et ABCDE une section droite située, par exemple, au-dessus des deux bases. Par les milieux L, M, N, P, R des côtés de la section droite, et par le centre de gravité G du contour de cette section, concevons des parallèles aux arêtes du prisme, et appelons respectivement l', m', n', p', r', g' les longueurs de ces parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A'B'C'D'E', et l'', m'',

n'', p'', r'', g'' les longueurs des mêmes parallèles prolongées jusqu'au plan de la base A″B″C″D″E″. λ, μ, ν, π, ρ étant les côtés AB, BC, CD, DE, EA de la section droite, on aura, par la formule (3),

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g' = \lambda l' + \mu m' + \nu n' + \pi p' + \rho r',$$
$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)g'' = \lambda l'' + \mu m'' + \nu n'' + \pi p'' + \rho r'',$$

d'où, en retranchant,

$$(\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho)(g''-g') = \lambda(l''-l') + \mu(m''-m') + \nu(n''-n') + \pi(p''-p') + \rho(r''-r').$$

Le second membre représente évidemment la somme des aires des faces latérales du tronc de prisme ; il doit donc en être de même du premier. Or, ce premier membre est le produit du périmètre $\lambda+\mu+\nu+\pi+\rho$ de la section droite, par la portion $g''-g'$ de la parallèle aux arêtes du prisme menée par G et comprise entre les plans A′B′C′D′E′ et A″B″C″D″E″.

THÉORÈME.

720. *Les centres de gravité des aires de toutes les sections planes d'un prisme sont situés sur une même parallèle aux arêtes de ce prisme.*

Le théorème est évident pour le prisme triangulaire, car, lorsqu'on projette obliquement ou orthogonalement un triangle sur un plan, chaque médiane du triangle primitif a pour projection une médiane du nouveau triangle.

Considérons actuellement un prisme quelconque ; soit ABCDE (*fig.* 392) sa section droite, qu'on a décomposée en triangles en joignant aux divers sommets un point quelconque O de son plan ; soit P le plan d'une section quelconque incliné d'un angle α sur le plan de la section droite. Conservons toutes les notations du n° 716, et désignons par A′, B′, C′, D′, E′, O′, G′, G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 les points où les arêtes du prisme et les parallèles à ces arêtes menées par les points O, G, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 rencontrent le plan P. G étant le centre de gravité de la section droite, on a

$$\gamma.g = \gamma_1.g_1 + \gamma_2.g_2 + \gamma_3.g_3 + \gamma_4.g_4 + \gamma_5.g_5$$

et, par suite, en multipliant par $\cos\alpha$,

$$\gamma\cos\alpha.g = \gamma_1\cos\alpha.g_1 + \gamma_2\cos\alpha.g_2 + \gamma_3\cos\alpha.g_3 + \gamma_4\cos\alpha.g_4 + \gamma_5\cos\alpha.g_5.$$

Mais les points G'_1, G'_2, G'_3, G'_4, G'_5 sont, d'après le premier alinéa, les centres de gravité des triangles O′A′B′, O′B′C′, O′C′D′, O′D′E′, O′E′A′, dont se compose la section par le plan P, et $\gamma_1\cos\alpha$, $\gamma_2\cos\alpha$, $\gamma_3\cos\alpha$,

$\gamma_4 \cos\alpha$, $\gamma_5 \cos\alpha$ sont (706) les aires de ces triangles prises avec le signe + ou le signe —, suivant que ces triangles sont additifs ou soustractifs. Donc la dernière relation exprime que le point G est le centre de gravité de la section oblique.

721. Le théorème correspondant sur les centres de gravité des *périmètres* des diverses sections planes d'un prisme n'est pas vrai. Les centres des périmètres des sections faites par une série de plans parallèles sont bien situés sur une même droite parallèle aux arêtes, mais cette droite se déplace lorsque l'inclinaison de la série des plans parallèles vient à changer.

THÉORÈME.

722. *Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'aire de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*

Dans le cas où la section droite est l'une des deux bases du tronc, le théorème résulte immédiatement de ce qui a été dit aux nos 716 et 720. En effet, on a vu au n° 716 qu'en désignant par V le volume d'un pareil tronc, par γ l'aire de la section droite, et par g la parallèle aux arêtes du prisme menée par le centre de gravité de cette section droite jusqu'à l'autre base, on avait $V = g.\gamma$, et l'on sait, d'après le n° 720, que cette droite g réunit les centres de gravité des deux bases.

Considérons actuellement un prisme dont les arêtes soient obliques sur les bases $A'B'C'D'E'$ et $A''B''C''D''E''$ (*fig.* 395). Désignons par V son volume, menons une section droite ABCDE au-dessus des deux bases, et appelons S, V′, V″ l'aire de cette section et les volumes des deux troncs compris entre cette section et chacune des deux bases primitives. Si l'on observe que les centres de gravité G, G′, G″ de la section droite et des deux bases sont sur une même parallèle aux arêtes, on a

$$V'' = S.GG'', \quad V' = S.GG'$$

et, par soustraction,

$$V'' - V' = S(GG'' - GG'), \quad \text{ou} \quad V = S.G'G''.$$

SCOLIE.

723. Soit (*fig.* 395) $G''K$ la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'une des bases sur l'autre; α étant l'angle G'' du triangle rectangle $G''KG'$, on a

$$G''K = G'G''\cos\alpha;$$

mais l'angle α est égal à l'angle du plan de la section droite ABCDE et du plan de la base $A'B'C'D'E'$, dont nous désignerons l'aire par B; on a donc (707)

$$S = B \cos \alpha$$

et, par suite,

$$V = S.G'G'' = B \cos \alpha \frac{G''K}{\cos \alpha} = B.G''K.$$

De là, cet autre énoncé :

Le volume d'un tronc de prisme quelconque est égal au produit de l'une des bases par la perpendiculaire abaissée du centre de gravité de l'autre base sur le plan de la première.

724. Nous devons signaler à l'attention du lecteur le mode de démonstration employé au n° 716. Cette méthode, dite *par les solides auxiliaires* et qui consiste à faire intervenir la Géométrie de l'espace dans la solution d'un problème de Géométrie plane, se distingue par le caractère intuitif des démonstrations qu'elle fournit. Les travaux de Desargues, de Monge et de Poncelet, en offrent des exemples nombreux et remarquables.

MÉTHODE FONDÉE SUR LA PROJECTION CENTRALE.

725. Quand deux figures planes sont la perspective (586) l'une de l'autre, certaines propriétés de la première figure conviennent encore à la seconde; on qualifie de *projectives* les propriétés qui se conservent ainsi en projection.

Toutes les propriétés descriptives sont projectives; car, si plusieurs points sont en ligne droite, leurs projections sont en ligne droite, et, quand plusieurs droites concourent en un même point, leurs projections passent par la projection de ce point.

Il n'en est pas de même des relations métriques. Quelques-unes, comme la proportion harmonique, sont projectives; mais la plupart, même les plus simples, ne le sont pas. Ainsi, l'égalité entre les deux segments d'une ligne droite n'est projective que dans le cas très-particulier où il y a parallélisme, soit entre les projetantes, soit entre la droite considérée et sa projection.

Pour démontrer sur une figure donnée une propriété que l'on sait être projective, il suffit de prouver que la propriété a lieu pour l'une quelconque des projections de cette figure. L'application de ce principe évident constitue un moyen de recherche connu sous le nom de *méthode par projection,* et qui est de beaucoup le plus fécond parmi les procédés qui reposent sur l'intervention de la Géométrie de l'espace dans les questions de Géométrie plane.

Toutefois, comme on ne fait ainsi que ramener un problème à un autre, il importe de choisir le centre et le plan de projection, de façon que la nouvelle figure offre des circonstances plus propres à la recherche qu'on a en vue. *Pour obtenir une projection plus simple que la figure proposée, on projette ordinairement celle-ci de telle sorte qu'un de ses points ou une de ses droites passe à l'infini dans la projection.* Il suffit évidemment pour cela que le plan de projection soit parallèle, dans le premier cas à la projetante du point considéré, et dans le second cas au plan projetant de la droite qu'on veut rejeter à l'infini. C'est ainsi qu'*un quadrilatère complet donne un parallélogramme, quand on projette sur un plan parallèle à celui qui passe par le centre* S *de projection et par l'une de ses trois diagonales;* et même, comme l'un des angles de ce parallélogramme est égal à celui sous lequel on voit du point S la diagonale considérée, on peut, par un choix convenable du centre S, donner au parallélogramme obtenu un angle de telle grandeur qu'on voudra (entre zéro et 180 degrés).

726. Nous allons appliquer la méthode par projection à trois théorèmes, déjà démontrés d'une autre manière (315, 326, 327).

1° *Dans un quadrilatère complet* ABCDEF, *chaque diagonale* AC *est divisée harmoniquement par les deux autres* BD *et* EF (*fig.* 206). En projetant de façon à rejeter la projection de EF à l'infini, on obtient un parallélogramme *abcd* dans lequel la propriété énoncée est évidente ; car la droite *ac*, étant rencontrée par *bd* en son milieu et par la troisième diagonale à l'infini, se trouve divisée harmoniquement (333).

2° *Quand deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tels que leurs côtés homologues se coupent deux à deux en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite, les droites qui joignent les sommets homologues concourent en un même point* O (*fig.* 211). En projetant la figure de façon que la projection de la droite $\alpha\beta\gamma$ passe à l'infini, on est ramené à démontrer la même propriété pour deux triangles *abc*, *a'b'c'*, ayant leurs côtés homologues parallèles; or, on sait que deux triangles de ce genre sont homothétiques (361).

3° *Quand deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tels que les droites qui joignent leurs sommets homologues concourent en un même point* O, *les côtés homologues se coupent deux à deux en trois points* α, β, γ, *situés en ligne droite* (*fig.* 211). En projetant la figure de façon que la droite qui joint les deux points α et β ait sa projection à l'infini, on obtient deux triangles *abc*, *a'b'c'*, qui, comme les premiers, ont leurs sommets homologues situés sur des rayons issus d'un même point *o* (projection de O), mais qui ont en outre deux couples *cb* et *c'b'*, *ca* et *c'a'* de côtés homologues parallèles; il suffit alors de prouver le parallélisme de *ab* et de *a'b'*.

Or, cela résulte de ce que le rapport de oa' à oa est égal à celui de ob' à ob, puisque chacun de ces rapports équivaut à celui de oc' à oc.

727. Ces exemples suffisent pour faire comprendre l'esprit de la méthode, dont toute la portée n'apparaîtra d'ailleurs que lorsque nous traiterons des coniques.

Voici, pour terminer, une règle importante, qui permet de reconnaître à simple vue que certaines relations métriques sont projectives.

Une fraction, dont le numérateur et le dénominateur sont chacun le produit de facteurs exprimant de simples distances AB, CD, ..., *entre les divers points d'une figure plane, est projective, si les mêmes lettres se retrouvent dans les facteurs linéaires qui composent les deux termes, et si à chaque distance appartenant à l'un des termes correspond dans l'autre terme une distance qui soit sur la même droite que la première.*

En effet, soient A, B, C, D, ... les divers points d'une figure plane, et A′, B′, C′, D′, ... les points correspondants de sa projection sur un autre plan. Désignons par a, b, c, d, ... les longueurs des projetantes SA, SB, SC, SD, ..., et par p, q, ... les distances du centre S de projection aux droites AB, CD, ... En égalant deux expressions bien connues de l'aire du triangle SAB, on a

$$\mathrm{AB}.p = a.b.\sin \mathrm{ASB}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AB} = \frac{a.b}{p} \sin \mathrm{ASB},$$

et l'on aurait de même

$$\mathrm{CD} = \frac{c.d}{q} \sin \mathrm{CSD}, \ldots.$$

Or, quand on substituera aux facteurs linéaires AB, CD, ... les valeurs ci-dessus, les quantités a, b, ... disparaîtront en vertu de la première condition, et il en sera de même des quantités p, q, ..., en vertu de la deuxieme hypothèse. Il ne restera donc qu'une fraction qui se déduira de la proposée en y remplaçant chaque facteur AB, CD, ... par le sinus de l'angle sous lequel on voit du point S chaque segment correspondant AB, CD, ... La valeur de la fraction considérée ne dépend donc que des valeurs des angles des projetantes, et nullement de la position du plan de la figure ABCD..., de sorte que la fraction composée de la même manière avec les segments homologues A′B′, C′D′, ... de la figure A′B′C′D′, ... aura la même valeur.

Cette proposition contient évidemment comme cas particulier celle du n° 320, car l'expression

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} : \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{CA.DB}}{\mathrm{CB.DA}}$$

remplit les conditions prescrites dans la règle précédente. On retrouve ainsi la projectivité du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, ainsi que l'expression

$$\frac{\sin \mathrm{CSA}}{\sin \mathrm{CSB}} : \frac{\sin \mathrm{DSA}}{\sin \mathrm{DSB}}$$

du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites SA, SB, SC, SD, situées dans un même plan, qui ne dépend que des angles de ces droites, et qui n'exige pas la considération d'une transversale auxiliaire.

Ajoutons que le rapport anharmonique de quatre plans A, B, C, D, passant par une même droite, est susceptible de l'expression analogue

$$\frac{\sin \widehat{\mathrm{CA}}}{\sin \widehat{\mathrm{CB}}} : \frac{\sin \widehat{\mathrm{DA}}}{\sin \widehat{\mathrm{DB}}},$$

dans laquelle la notation $\widehat{\mathrm{CA}}$ représente l'angle des plans C et A. Cette remarque résulte de ce que le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans est égal à celui du faisceau des quatre droites suivant lesquelles ces plans sont coupés par un plan perpendiculaire à leur arête commune.

FIGURES HOMOLOGIQUES.

728. A la méthode par projection se rattache directement la théorie des figures homologiques qui est due à Poncelet, et qui se recommande à la fois par le rôle considérable qu'elle joue en Géométrie pure, et par l'heureux parti qu'on peut en tirer en Géométrie descriptive.

On dit que *deux figures situées dans un même plan sont homologiques, quand elles se correspondent point par point et droite par droite, de telle sorte que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe, et que deux droites homologues quelconques se coupent sur une droite fixe.* Le point fixe prend le nom de *centre d'homologie*, et la droite fixe celui d'*axe d'homologie*.

Des deux dernières conditions énoncées dans la définition, il suffit que l'une soit satisfaite pour que l'autre soit remplie; ainsi :

Deux figures sont homologiques, si elles se correspondent point par point et droite par droite, de façon que deux points homologues quelconques soient en ligne droite avec un point fixe	*Deux figures sont homologiques, si elles se correspondent point par point et droite par droite, de façon que deux droites homologues quelconques se coupent sur une droite fixe.*

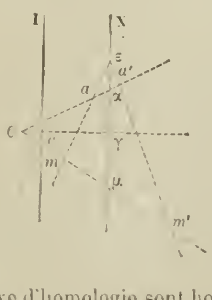
Il suffit, en effet, de prouver que, si β est le point de concours d'un premier couple (AC, A′C′) de droites homologues (*fig.* 211), et γ le point de concours d'un second couple (AB, A′B′), le point de concours α d'un troisième couple quelconque (BC, B′C′) est situé sur la droite $\beta\gamma$. Or cela résulte du théorème démontré aux n^{os} 326, etc.

Il suffit, en effet, de prouver que, si O est le point d'intersection des droites AA′, BB′, qui joignent deux premiers couples (A, A′) (B, B′) de points homologues, la droite CC′ qui unit un troisième couple quelconque (C, C′) passe par O. Or cela résulte du théorème démontré aux n^{os} 327, etc.

C'est en projetant sur un plan quelconque P deux figures homothétiques situées dans un autre plan Q, que Poncelet (*Traité des propriétés projectives,* Section III, Chapitre I) est arrivé à la notion des figures homologiques. Il est évident, en effet, que dans les deux nouvelles figures la droite qui joint deux points homologues quelconques passe par la perspective du centre de similitude des figures primitives, et que deux droites homologues quelconques provenant de la perspective de deux droites parallèles ont leur point de concours (588) sur la ligne de fuite du plan Q.

720. La transformée homologique F′ d'une figure F est déterminée (*fig.* 396) dès qu'on donne, outre ce centre O et l'axe X d'homologie, le point a', homologue d'un premier point a de la figure F; car, pour obtenir l'homologue m' d'un point quelconque m de la figure F, il suffit alors de déterminer le point ε où la droite am coupe l'axe X d'homologie, et de prendre l'intersection m' du rayon Om avec la droite $a'\varepsilon$ homologue de $a\varepsilon$.

Fig. 396.



Souvent, le centre ou l'axe d'homologie sont hors des limites de la feuille de dessin, et il faut savoir trouver l'homologue m' d'un point quelconque m de la première figure en n'employant que le centre d'homologie O et deux couples de droites correspondantes, ou bien que l'axe d'homologie et deux couples de points correspondants. Voici la marche qu'on suit.

1° Soient (*fig.* 397) O le centre d'homologie, et $(ap, a'p')$, $(aq, a'q')$ deux couples de droites homologues. A l'aide de deux rayons quelconques Obb', Occ', menés par O, on déterminera un troisième couple $(bc, b'c')$ de droites homologues ; le point g commun à am et à bc aura pour homologue le point g' commun à $b'c'$ et au rayon Og, et $a'g'$ homologue de ag rencontrera Om au point cherché m'.

2° Soient (*fig.* 398) X l'axe d'homologie, et (a, a') (b, b') deux couples de points correspondants. En joignant au point a' le point α où am coupe l'axe d'homologie, on aura l'homologue de la droite am ; on obtiendra de même l'homologue $b'\beta$ de la droite bm ; l'homologue m' du point m sera donc le point commun à $a'\alpha$ et à $b'\beta$.

Fig. 397.

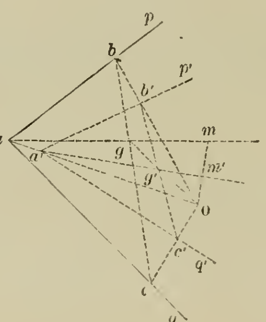
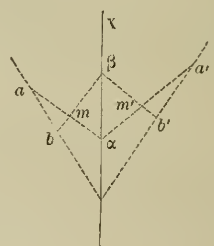


Fig. 398.



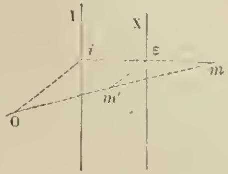
Nous devons faire remarquer que toutes ces constructions n'exigent que l'emploi de la règle.

730. Il est évident : 1° que toute droite passant par le centre d'homologie se correspond à elle-même ; 2° que le centre d'homologie coïncide avec son homologue, et qu'il partage cette propriété avec chacun des points de l'axe d'homologie.

Puisque deux droites homologues coupent l'axe d'homologie au même point, à la droite de l'infini de la première figure F doit correspondre dans la seconde figure F′ une droite J′ parallèle à l'axe d'homologie ; et de même, à la droite de l'infini de la figure F′ répond dans la figure F une droite I parallèle à l'axe X ; la droite I prend le nom de *droite limite* de la figure F, et la droite J′ celui de *droite limite* de la figure F′.

Rien de plus simple que de construire la figure F′ quand on connaît la figure F, sa droite limite I ainsi que le centre O et l'axe X d'homologie; m étant (*fig.* 399) un point quelconque de F, on mènera par m une

Fig. 399.



droite quelconque im; on joindra le centre O au point i où cette droite coupe I, et par le point ε où cette même droite coupe X on mènera la parallèle à Oi; cette parallèle, qui est évidemment l'homologue de la droite εmi, rencontrera le rayon Om au point demandé m'.

On lit immédiatement sur la figure la relation

$$\frac{Om'}{i\varepsilon} = \frac{Om}{im} = \frac{m'm}{\varepsilon m},$$

d'où l'on déduit les deux formules

$$Om' = i\varepsilon \frac{mO}{mi}, \qquad m'm = Om \frac{m\varepsilon}{mi},$$

qui nous seront utiles plus tard. La seconde de ces formules a été donnée, en 1704, par le géomètre belge Le Poivre qui, comme de la Hire et Newton, avait étudié quelques cas particuliers de la transformation homologique, bien avant que Poncelet eût créé la théorie complète de ces figures.

731. *Quand deux figures sont homologiques : 1° le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite, a, b, c, d, est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues a', b', c', d'*; car ces rapports sont égaux l'un et l'autre à celui du faisceau Oaa', Obb', Occ', Odd'; 2° *le rapport anharmonique d'un faisceau* SA, SB, SC, SD *de quatre droites est égal au rapport anharmonique du faisceau formé par les quatre droites homologues* S'A', S'B', S'C', S'D'; car les rayons homologues des deux faisceaux se croisant sur l'axe d'homologie, les rapports anharmoniques considérés sont égaux à celui de la section commune faite par l'axe d'homologie.

732. Considérons deux figures homologiques; soient (*fig.* 396) O le centre et X l'axe d'homologie, (a, a') et (m, m') deux couples de points

homologues, μ et α les points où les rayons Omm' et Oaa' coupent l'axe X, et ε le point de concours de am et de $a'm'$. Le faisceau (εO, εa, εX, $\varepsilon a'$) étant coupé par les deux transversales Omm', Oaa', on a

$$\frac{mO}{m\mu} : \frac{m'O}{m'\mu} = \frac{aO}{a\mu} : \frac{a'O}{a'\mu}.$$

Le rapport anharmonique ($O\mu mm'$) *a donc une valeur constante ;* on donne à cette constante, que nous désignerons par λ, le nom de *coefficient d'homologie.*

La réciproque de cette proposition est vraie, et elle conduit à une nouvelle définition des figures homologiques :

Étant donnés dans un plan un point fixe O *et une droite fixe* X (*fig.* 396), *si sur chaque rayon* $O\mu$ *on prend deux points* m *et* m' *tels que le rapport anharmonique* ($O\mu mm'$) *ait une valeur constante* λ, *les points* m *et* m' *décrivent deux figures homologiques.*

En effet, par la définition même, deux points homologues quelconques m et m' sont en ligne droite avec le point fixe O; il suffit donc de prouver que, si le point m décrit une droite $a\varepsilon$, le point m' décrit à son tour une droite coupant l'axe X au même point ε que la première. Or, menons par le point O une droite quelconque, et désignons par a, α, a' les points où elle rencontre les droites εm, εX, $\varepsilon m'$; le faisceau (εO, εm, εX, $\varepsilon m'$) étant coupé par les deux transversales $O\mu$, $O\alpha$, les rapports anharmoniques ($O\mu mm'$) ($O\alpha aa'$) seront égaux; le second aura donc comme le premier la valeur λ; donc le point a', qui est situé sur $\varepsilon m'$, sera la position que prend m' quand m vient en a.

La constante λ *est égale au rapport des distances de la droite limite* I *au centre et à l'axe d'homologie.* Car, en désignant par c et γ les projections orthogonales du centre O sur les droites I et X, et appliquant le théorème précédent au système formé par les quatre points O, γ, c et c', le dernier étant à l'infini, on a

$$\frac{cO}{c\gamma} : \frac{\infty' O}{\infty' \gamma} = \lambda, \quad \text{ou} \quad \frac{cO}{c\gamma} = \lambda.$$

On voit de même que le rapport des distances de la droite limite J' au centre et à l'axe d'homologie est égal à $\frac{1}{\lambda}$.

Quand la constante λ est égale à -1, les deux droites limites coïncident avec la droite unique qui est équidistante du centre et de l'axe d'homologie; ce genre particulier d'homologie prend le nom d'*homologie harmonique.*

Quand l'axe d'homologie est à l'infini, le rapport anharmonique $(O\mu mm')$ se réduit à $\frac{mO}{m'O}$, et la relation

$$\frac{mO}{m'O} = \lambda$$

montre que l'*homologie* devient *homothétie;* le point O est le centre de similitude, et λ est le rapport de similitude.

Enfin, si c'est au contraire le centre d'homologie qui est à l'infini, le rapport anharmonique $(O\mu mm')$ se réduit à $\frac{m'\mu}{m\mu}$, et la relation

$$\frac{m'\mu}{m\mu} = \lambda$$

montre que la seconde figure résulte de la première en *dilatant* dans un rapport constant les *ordonnées* abaissées de ses divers points sur l'axe fixe X dans une direction donnée; quelques géomètres donnent à ce genre d'homologie, qui se présente fréquemment, le nom d'*affinité.*

733. Nous terminerons par un théorème très important tant au point de vue théorique qu'au point de vue des applications; d'une part, il montre la concordance entre l'homologie et la perspective; d'autre part, il intervient fort utilement, en géométrie descriptive, pour la solution du problème des rabattements et des questions relatives aux sections planes des prismes et des pyramides, des cônes et des cylindres.

Quand deux figures planes F *et* F' *sont en perspective, leurs projections sur un plan quelconque* II, *à l'aide d'un centre de projection quelconque* ω, *sont deux figures homologiques; le centre d'homologie est la projection o du point de vue* V, *et l'axe d'homologie est la projection* ll_1 *de l'intersection* LL_1 *des plans* P *et* P' *des deux figures.*

La démonstration est presque intuitive :

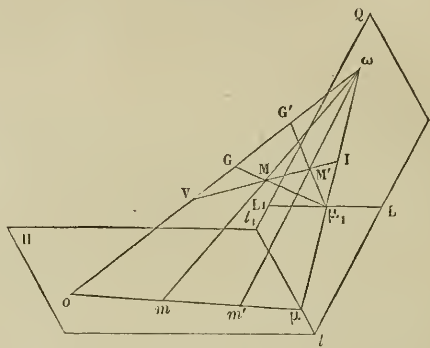
En effet : d'abord, à chaque point m de la figure f répond évidemment un point unique m' de la figure f', et la droite mm' passe par o puisque les points correspondants M et M' des figures F et F' sont en ligne droite avec V. En second lieu, à une droite quelconque d de la figure f répond évidemment une droite et une seule d' de la figure f', et le point de concours de d et de d' est sur ll_1 puisque les droites correspondantes D et D' des figures F et F' se croisent sur LL_1.

La réciproque exige plus d'attention :

Deux figures homologiques f *et* f' *peuvent, d'une infinité de manières, être considérées comme la projection sur leur plan* II *de deux figures planes* F *et* F' *qui sont en perspective* (*fig.* 400).

En effet, soit ω un point pris à volonté dans l'espace, et o le centre d'homologie de f et de f'; dans le plan Q déterminé par ω et par l'axe d'homologie ll_1 des figures f et f', choisissons arbitrairement une droite LL_1; imaginons par cette droite deux plans P et P' et appelons G et G' les points où ces plans coupent la droite ωo. Enfin, désignons respectivement par F et F' les figures qu'on obtient en projetant, du point ω comme centre, les figures f et f', la première sur le plan P, la seconde sur le plan P'. Tout se réduit à démontrer que les figures F et F' sont

Fig. 400.



en perspective; en d'autres termes, si M et M' sont les points de F et F' situés sur les projetantes ωm, $\omega m'$ de deux points homologues quelconques m et m' de f et de f', il suffit de prouver que la droite MM' passe par un point fixe. Or, soit μ le point où mm' coupe ll_1, μ_1 le point où $\omega\mu$ coupe LL_1 et I et V les points où MM' rencontre $\omega\mu$ et ωo. Le rapport anharmonique de la division $\mu omm'$ est constant et égal au rapport d'homologie des figures f et f'; mais ce rapport anharmonique est égal à celui de la division IVMM' et, par suite, égal aussi à celui de la division ωVGG' qu'on obtient en projetant la précédente du point μ_1 sur $o\omega$. D'ailleurs, les points ω, G et G' sont fixes; donc il en est de même du point V. C.Q.F.D.

Un cas particulier intéressant est celui où F et F' sont deux positions d'une même figure qui tourne autour d'une droite de son plan; dans ce cas, F et F' sont, en effet, en perspective, le point de vue V étant à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre formé par les plans de F et de F'. Enfin, si l'on choisit alors pour plan de projection le plan de la figure F', f' ne différera pas de F'; ce qui montre que *la projection f d'une figure* F *et son rabattement* F' *sont homologiques, et inversement.*

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§ I. — CYLINDRE DE RÉVOLUTION.

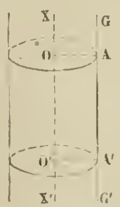
DÉFINITIONS.

734. On nomme *surface cylindrique de révolution* la surface engendrée par une droite GG′ qui tourne autour d'une droite fixe XX′ à laquelle elle est parallèle et invariablement liée (*fig.* 401).

La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou *d'arête*.

735. Tout point A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe; car, pendant la rotation, la perpendiculaire AO abaissée du point A sur XX′ reste perpendiculaire à cet axe et conserve toujours la même longueur.

Fig. 401.



On appelle *section droite* toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe. Il résulte des considérations précédentes que *les diverses sections droites d'une même surface cylindrique sont des circonférences égales :* le rayon commun de ces cercles, c'est-à-dire la distance des deux parallèles XX' et GG', est le *rayon de la surface cylindrique,* et l'on voit que *le lieu des points de l'espace situés à une distance donnée d'une droite fixe est la surface cylindrique de révolution qui a cette droite pour axe et la distance donnée pour rayon.*

736. Considérons une droite fixe XX', un plan P parallèle à cette droite, et désignons par R la distance de la droite au plan, ou, ce qui revient au même, la distance de la droite à sa projection AA' sur le plan (*fig.* 402). Le lieu des points du plan P, situés à une distance donnée δ de la droite XX', se compose de deux droites BB' et CC' parallèles à XX', placées de part et d'autre de AA', et à une distance de cette droite égale au côté AB de l'angle droit d'un triangle rectangle OAB, dont l'hypoténuse OB est égale à δ, et l'autre côté OA de l'angle droit égal à R. Il en est ainsi tant que δ est plus grand que R ; lorsque δ devient égal ou inférieur à R, le lieu se réduit à la droite AA' ou cesse d'exister.

D'après cela (735), un plan parallèle à l'axe d'une surface cylindrique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou n'a aucun point commun avec la surface, suivant que la distance du plan à l'axe est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la surface.

Fig. 402.

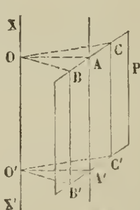
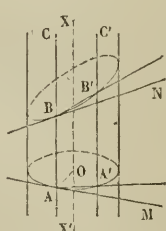


Fig. 403.



737. Arrêtons-nous un moment sur le cas où le plan et la surface n'ont en commun qu'une génératrice AC (*fig.* 403).

Un tel plan peut être considéré comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe AC et par une génératrice voisine A'C', tourne autour de AC jusqu'à ce que A'C' vienne, en restant sur la surface cylindrique, se confondre avec AC. Cela étant, soit BB' une courbe quelconque tracée sur la surface cylindrique; la sécante BB', qui unit les points B et B' où la courbe rencontre les génératrices AC et A'C', reste constamment dans le plan variable ACA'C'; d'ailleurs, cette sécante devient la tangente BN à la courbe BB', lorsque la génératrice mobile A'C' vient se confondre avec AC, c'est-à-dire lorsque le plan variable ACA'C' atteint sa position limite; donc ce plan limite contient la tangente BN. Ainsi, le plan limite considéré renferme les tangentes à toutes les courbes que l'on peut tracer sur la surface, aux points où ces courbes rencontrent la génératrice AC; on lui donne le nom de *plan tangent suivant la génératrice* AC.

La génératrice AC, et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface au point où cette courbe rencontre AC, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à la section droite AA', on voit que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et par la génératrice de contact;* en effet, le plan tangent renferme la droite AM qui, étant à angle droit sur AO et sur AC, est perpendiculaire à leur plan CAOX.

738. On appelle *cylindre de révolution* le corps compris entre une surface cylindrique et deux plans perpendiculaires à l'axe de cette surface, ou, en d'autres termes, la figure engendrée par la rotation d'un rectangle AA'O'O autour d'un de ses côtés OO' (*fig.* 404).

Fig. 404.

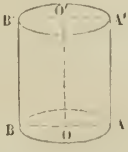


Fig. 405.

La surface cylindrique engendrée par le côté AA' est la *surface latérale* du cylindre; les cercles décrits par les côtés

OA et O'A' en sont les *bases*, et la droite OO' en est la *hauteur*.

739. En construisant un prisme droit, de même hauteur que le cylindre, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cylindre, on obtient un *prisme inscrit ou circonscrit* au cylindre (*fig.* 405). Le plan de chaque face latérale du prisme circonscrit est tangent au cylindre (737). Si le polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base est régulier, le prisme inscrit ou circonscrit au cylindre est régulier.

Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit. L'aire latérale du prisme s'obtient en multipliant le périmètre de sa base par sa hauteur (609). Or, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe et indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro; d'ailleurs, la hauteur du prisme reste constamment égale à la hauteur du cylindre. Donc l'aire latérale du prisme inscrit tend vers une limite fixe indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de sa base tendent vers zéro : *c'est cette limite que l'on appelle l'aire latérale du cylindre.*

Considérons en second lieu un cylindre de révolution et deux prismes réguliers de bases semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cylindre (*fig.* 405). Le volume du cylindre est compris entre les volumes des deux prismes. Or, ces deux prismes ont même hauteur, et le rapport des aires de leurs bases a pour limite l'unité (447), lorsque le nombre commun de leurs côtés croît indéfiniment; par suite, le rapport des volumes des deux prismes tend vers l'unité, et il en est de même *a fortiori* du rapport du volume du cylindre au volume de l'un quelconque de ces prismes. Donc *le volume d'un cylindre de révolution est la limite commune des volumes des prismes réguliers de bases semblables, inscrit et circonscrit, dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

Il importe de remarquer que ce dernier énoncé est un véritable *théorème*, tandis que l'énoncé de l'alinéa précédent relatif à l'aire n'est qu'une *définition*.

740. Deux cylindres de révolution sont dits *semblables*, lorsqu'ils sont engendrés par des rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons de leurs bases.

THÉORÈME.

741. *L'aire latérale d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur.*

L'aire latérale du cylindre est la limite des aires latérales des prismes réguliers inscrits dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, H l'aire latérale, la circonférence de base et la hauteur du cylindre considéré; soient s et p l'aire latérale et le périmètre de la base d'un prisme régulier inscrit. On a (609)

$$s = p.\mathrm{H}.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du prisme, s tend vers S et p vers C; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{S} = \mathrm{C.H}.$$

Corollaires.

742. Si R est le rayon du cylindre, on a $\mathrm{C} = 2\pi\mathrm{R}$ et, par suite,

$$\mathrm{S} = 2\pi\mathrm{RH}.$$

En ajoutant à cette aire latérale les aires des deux bases ou le double $2\pi\mathrm{R}^2$ de l'aire de l'une d'elles, on obtient, pour l'aire totale T du cylindre,

$$\mathrm{T} = 2\pi\mathrm{RH} + 2\pi\mathrm{R}^2 = 2\pi\mathrm{R}(\mathrm{R} + \mathrm{H}).$$

743. Soient S, S′ les aires latérales; T, T′ les aires totales; R, R′ les rayons et H, H′ les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables. On aura (740)

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R} + \mathrm{H}}{\mathrm{R}' + \mathrm{H}'}$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\mathrm{RH}}{\mathrm{R}'\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2},$$

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} = \frac{\mathrm{R}(\mathrm{R} + \mathrm{H})}{\mathrm{R}'(\mathrm{R}' + \mathrm{H}')} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}.\frac{\mathrm{R} + \mathrm{H}}{\mathrm{R}' + \mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}'^2} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}'^2}.$$

Donc, *les aires latérales ou totales de deux cylindres de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou comme les carrés des hauteurs.*

Scolie.

744. Considérons un cylindre de révolution et un prisme régulier inscrit ABCDEFA′B′C′D′E′F′ (*fig.* 406); par une rotation autour de l'arête BB′, amenons la face ABB′A′ dans le prolongement de la face BCC′B′; puis, par une rotation autour de CC′, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante CDD′C′, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales du prisme soient réunies sur le plan de la dernière d'entre elles AFF′A′. Dans son mouvement autour

Fig. 406.

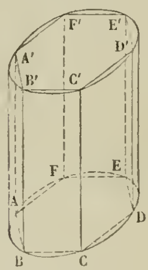
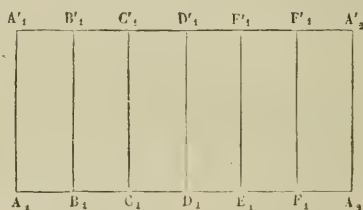


Fig. 407.



de l'arête BB′, le côté AB reste perpendiculaire à cette arête; il se place donc sur le prolongement de CB; de même la droite ABC, formée par la réunion de AB et de BC, vient se placer sur le prolongement de DC, ... On obtient donc finalement sur le dernier plan un rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ (*fig.* 407) dont la hauteur est celle du prisme droit et dont la base est égale au périmètre de la base du prisme. Ce rectangle est le *développement* de l'aire latérale du prisme.

Si le nombre des faces du prisme régulier inscrit dans le cylindre croît indéfiniment, le rectangle $A_1A_2A'_2A'_1$ conserve la même hauteur, et la longueur de sa base A_1A_2 tend vers la circonférence de la base du cylindre. Le rectangle limite, qui a une hauteur égale à celle du cylindre et une base égale à la circonférence de la base du cylindre, est dit le *développement* de l'aire latérale de ce cylindre.

THÉORÈME.

745. *Le volume d'un cylindre de révolution a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes réguliers inscrits, dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H le volume du cylindre, l'aire de sa base et sa hauteur; soient v et b le volume et l'aire de la base d'un prisme régulier inscrit au cylindre; on a (626)

$$v = b.\mathrm{H}.$$

Mais lorsque le nombre des faces du prisme croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{V} = \mathrm{B}.\mathrm{H}.$$

Corollaires.

746. Si R est le rayon du cylindre considéré, on a $\mathrm{B} = \pi \mathrm{R}^2$ et par suite

$$\mathrm{V} = \pi \mathrm{R}^2.\mathrm{H}.$$

747. Soient V, V' les volumes, R, R' les rayons, H, H' les hauteurs de deux cylindres de révolution semblables; on aura (740)

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'}.$$

et, par suite,

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'} = \frac{\mathrm{R}^2\mathrm{H}}{\mathrm{R}'^2\mathrm{H}'} = \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{H}'} = \frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{R}'^3} = \frac{\mathrm{H}^3}{\mathrm{H}'^3}.$$

Donc, *les volumes de deux cylindres de révolution semblables sont entre eux comme les cubes des rayons ou comme les cubes des hauteurs.*

748. Exemple.

Pour mesurer les liquides, on emploie des vases ayant la forme de cylindres de révolution dont la hauteur est double du diamètre : calculer d'après cela les dimensions du litre.

La capacité du cylindre dont on demande la hauteur H est 1 décimètre cube; en prenant le décimètre pour unité de longueur, et en remarquant que le rayon du cylindre est $\frac{\mathrm{H}}{4}$, on a la relation

$$\pi\left(\frac{\mathrm{H}}{4}\right)^2 \cdot \mathrm{H} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi \mathrm{H}^3}{16} = 1 ;$$

on en déduit

$$H = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}} = 1^{\mathrm{dm}}, 720.$$

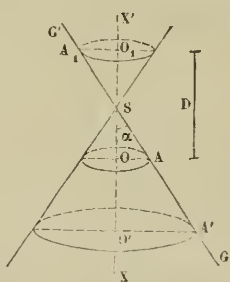
Le litre est donc un cylindre dont la hauteur a 172 millimètres, et dont le rayon a par suite 43 millimètres.

§ II. — CONE DE RÉVOLUTION.

DÉFINITIONS.

749. On appelle *surface conique de révolution* la surface engendrée par une droite GSG′ tournant autour d'une droite fixe XSX′ qu'elle rencontre en un point S, et à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 408).

Fig. 408.



La droite fixe XX′ reçoit le nom d'*axe* de la surface, et la droite mobile GG′ celui de *génératrice* ou d'*arête*. Le point S, qu'on nomme *sommet*, divise la surface conique en deux parties indéfinies qu'on appelle *nappes*.

Le lieu géométrique des droites qui, passant par un point donné S, font un angle donné α avec une droite donnée D, est une surface conique de révolution ayant le point S pour sommet et pour axe la parallèle menée à D par le point S.

Un point quelconque A de la droite GG′ décrit une circonférence dont le centre est sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe (735). Par suite, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des circonférences dont le lieu des centres est l'axe lui-même. Quant aux rayons OA, O′A′ de ces cercles, la similitude des triangles SOA, SO′A′ prouve qu'ils sont proportionnels aux distances SO, SO′ de leurs plans au sommet, ou encore aux portions correspondantes SA, SA′ de la génératrice GSG′. Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des mêmes lignes.

730 Considérons une droite fixe XSX′, un plan P passant par un point S de cette droite, et désignons par α l'angle de la droite et du plan, c'est-à-dire l'angle aigu de la droite SX avec sa projection SA sur ce plan (*fig.* 409). Par le point S, on peut mener dans le plan P (535) deux droites SB, SC, faisant avec SX un angle aigu donné ω. Ces deux droites sont symétriques par rapport à AA′. Il en est ainsi tant que ω est supérieur à α; lorsque ω devient égal ou inférieur à α, les deux droites se réduisent à la droite unique SA ou cessent d'exister.

D'après cela, un plan passant par le sommet d'une surface conique de révolution renferme deux génératrices de cette surface, ou une seule, ou enfin n'a de commun avec la surface que le sommet, suivant que l'inclinaison du plan sur l'axe est inférieure, égale ou supérieure à l'angle aigu de la génératrice avec l'axe, c'est-à-dire au *demi-angle au sommet* de la surface conique.

Fig. 409.

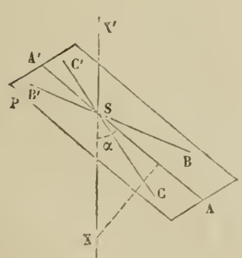
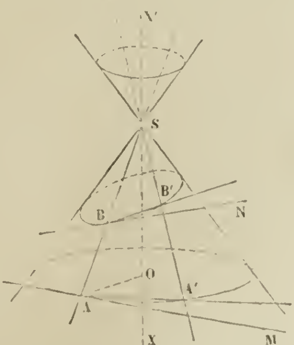


Fig. 410.



Dans le cas où le plan donné n'a de commun avec la surface qu'une seule génératrice SA (*fig.* 410), on peut le considérer comme la position limite d'un plan variable qui, passant par la génératrice fixe SA et par une génératrice voisine SA′, tourne autour de SA jusqu'à ce que SA′ vienne se confondre avec SA. On voit dès lors, par un raisonnement identique à celui qu'on a fait pour le cylindre (737), que ce plan renferme les tangentes AM, BN,... à toutes les courbes AA′, BB′,..., que l'on peut tracer sur la surface, aux points A, B,..., où la génératrice SA rencontre ces courbes. On donne à ce plan le nom de *plan tangent suivant la génératrice* SA.

La génératrice SA et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface, au point où cette courbe rencontre SA, suffisent pour déterminer le plan tangent suivant cette génératrice. Si l'on choisit en particulier la tangente AM à une section AA′ perpendiculaire à l'axe, on voit, comme pour le cylindre, que *le plan tangent est perpendiculaire au plan déterminé par l'axe et la génératrice de contact.*

751. On nomme *cône de révolution* le corps engendré par la rotation d'un triangle rectangle SOA autour de l'un des côtés SO de l'angle droit SOA (*fig.* 411).

La surface conique engendrée par l'hypoténuse SA est la *surface latérale* du cône; le cercle décrit par le côté OA est la *base*, la droite SO est la *hauteur*, et l'hypoténuse SA est le *côté* ou l'*apothème* de ce cône.

Fig. 411.

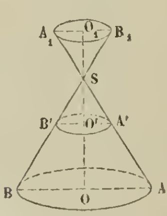
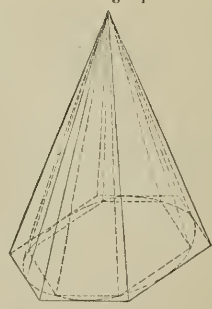


Fig. 412.



752. Si l'on coupe une surface conique de révolution (*fig.* 411) par deux plans AB, A′B′, perpendiculaires à l'axe

et situés d'un même côté du sommet S, on obtient un volume terminé par une portion de la surface conique, et par les deux cercles AB, A'B'. Ce corps, que l'on nomme *tronc de cône de révolution à bases parallèles*, est la différence des deux cônes SAB, SA'B'. On peut encore le considérer comme engendré par la rotation du trapèze rectangle AOO'A' autour du côté OO'. La droite OO' est la *hauteur* du tronc; les cercles AB, A'B' en sont les bases et AA' en est le *côté* ou l'*apothème*.

En coupant une surface conique de révolution par deux plans AB, A_1B_1, perpendiculaires à l'axe, mais situés de part et d'autre du sommet S (*fig.* 411), on obtient un corps qui est la somme des deux cônes SAB, SA_1B_1. Il convient de donner encore à ce corps le nom de *tronc de cône;* mais, pour le distinguer du tronc de cône proprement dit, que nous avons défini dans l'alinéa précédent, nous l'appellerons *tronc de cône de seconde espèce* (650).

753. En construisant une pyramide de même sommet que le cône, et ayant pour base un polygone inscrit ou circonscrit au cercle de base du cône, on obtient une pyramide inscrite ou circonscrite au cône (*fig.* 412). Le plan de chaque face latérale de la pyramide circonscrite est tangent au cône. Si le polygone de base est régulier, la pyramide inscrite ou circonscrite est régulière.

On appelle *aire latérale d'un cône* la limite de l'aire latérale d'une pyramide régulière inscrite dont le nombre des faces croît indéfiniment. On légitime cette *définition* en montrant que la limite considérée existe et est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la base de la pyramide tendent vers zéro. Le raisonnement est analogue à celui qu'on a employé pour le cylindre (739); seulement, tandis que la hauteur du prisme inscrit au cylindre reste fixe, l'apothème de la pyramide régulière inscrite au cône est variable et tend vers l'apothème du cône.

On *démontre,* absolument comme dans le cas du cylindre, que *le volume d'un cône de révolution est la limite commune des volumes des pyramides régulières de bases semblables, inscrite et circonscrite, dont on fait croître indéfiniment le nombre des faces.*

754. Deux cônes de révolution sont dits *semblables* lorsqu'ils sont engendrés par des triangles rectangles semblables, c'est-à-dire lorsque leurs hauteurs sont entre elles comme les rayons des bases.

THÉORÈME.

755. *L'aire latérale d'un cône de révolution a pour mesure le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothème.*

L'aire latérale du cône est la limite des aires latérales des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient S, C, A l'aire latérale, la circonférence de base et l'apothème du cône considéré, et s, p, a l'aire latérale, le périmètre de la base et l'apothème d'une pyramide régulière inscrite. On a (640)

$$s = p \cdot \frac{1}{2} a.$$

Lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base de la pyramide, s tend vers S, p vers C, a vers A; on a donc, à la limite,

$$S = C. \frac{1}{2} A.$$

Corollaire.

756. Si R est le rayon de la base du cône, on a $C = 2\pi R$, et par suite

$$S = \pi RA.$$

En ajoutant la base πR^2, on a, pour l'aire totale,

$$T = \pi RA + \pi R^2 = \pi R(A + R).$$

757. En raisonnant comme au n° 743, on reconnaît que *les aires latérales ou totales de deux cônes de révolution semblables sont entre elles comme les carrés des rayons ou des apothèmes ou des hauteurs.*

758. Considérons un cône de révolution et une pyramide régulière inscrite SABCDEF (*fig.* 413); par une rotation autour de l'arête SB, amenons la face SAB dans le prolongement de la face SBC; puis, par une rotation autour de SC, amenons les deux faces déjà réunies dans le prolongement de la face suivante SCD; et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les faces latérales de la pyramide soient réunies dans le plan de la dernière

d'entre elles FSA. On obtiendra ainsi un secteur polygonal régulier $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ (*fig.* 414), ayant pour rayon l'arête de la pyramide

Fig. 413.

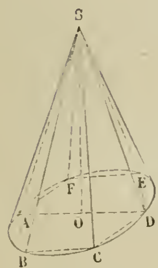
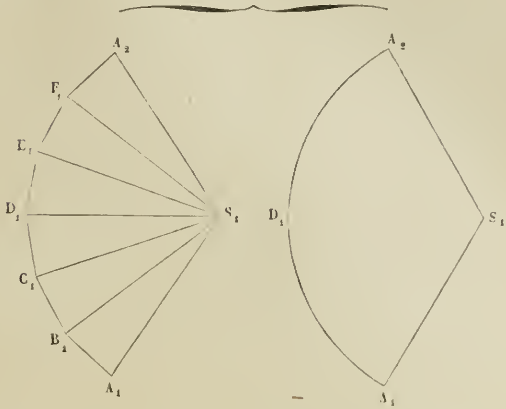


Fig. 414.



régulière, c'est-à-dire l'apothème du cône, et pour base une ligne brisée régulière $A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ égale au périmètre de la base de la pyramide.

Si le nombre des faces de la pyramide régulière inscrite dans le cône croît indéfiniment, le secteur $S_1A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2$ conserve le même rayon, et la base dégénère en un arc de cercle ayant une longueur égale à celle de la circonférence du cône. Le secteur circulaire $S_1A_1D_1A_2$ obtenu est dit le *développement* de l'aire latérale du cône. Il est aisé de calculer le nombre n de degrés contenus dans l'angle $A_1S_1A_2$ de ce secteur circulaire. A étant l'apothème du cône et R le rayon de sa base, on a

$$\frac{n}{360} = \frac{\text{arc } A_1A_2}{2\pi . S_1A_1} = \frac{2\pi R}{2\pi A}, \quad \text{d'où} \quad n = 360^\circ \frac{R}{A}.$$

Pour $A = 2R$, on a $n = 180^\circ$, de sorte que le développement est un demi-cercle. Le cône correspondant est dit *équilatéral;* sa section par un plan passant par l'axe SO est un triangle équilatéral SAD.

THÉORÈME.

759. *L'aire latérale d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles a pour mesure le produit de la demi somme des circonférences de ses bases par son apothème.*

L'aire latérale du tronc de cône ADD'A' (*fig.* 415) est la différence des aires latérales des cônes SAD, SA'D'. Cela posé, inscrivons dans le cône SAD une pyramide régulière SABCDEF; le plan $A'D'$ de la base supérieure du tronc de cône décompose cette pyramide en deux parties qui sont, l'une, $SA'B'C'D'E'F'$, une pyramide régulière inscrite dans le cône $SA'D'$, l'autre, $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône $ADD'A'$. Or les aires latérales des cônes SAD, $SA'D'$ étant les limites des aires latérales des pyramides SABCDEF, $SA'B'C'D'E'F'$, lorsque le nombre commun de leurs faces croît indéfiniment, l'aire latérale du tronc de cône sera égale à la limite de l'aire latérale du tronc de pyramide régulier inscrit. Soient s, a, p, p' l'aire latérale, l'apothème, et les périmètres des bases du tronc de pyramide; soient de même S, A, C, C' l'aire latérale, l'apothème et les circonférences des bases du tronc de cône; on aura (641)

$$s = \frac{1}{2}(p + p')a.$$

Mais, à la limite, lorsque les côtés du polygone ABCDEF tendent vers zéro, s tend vers S, p vers C, p' vers C', a vers A, et l'on a

$$S = \frac{1}{2}(C + C')A.$$

Fig. 415.

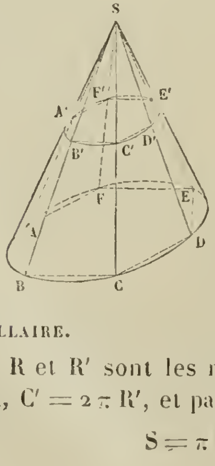
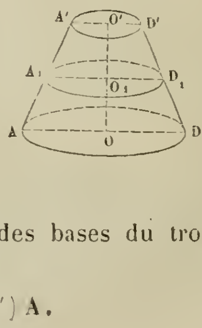


Fig. 416.



COROLLAIRE.

760. Si R et R' sont les rayons des bases du tronc, on a $C = 2\pi R$, $C' = 2\pi R'$, et par suite

$$S = \pi(R + R')A.$$

761. Par le milieu A_1 du côté AA' (*fig.* 416), menons un plan parallèle aux bases du tronc de cône; le rayon A_1O_1 de la section circulaire déterminée par ce plan est parallèle (495) aux rayons AO, $A'O'$, des bases et, par suite (433), égal à la demi-somme de ces rayons. Donc la circonférence A_1D_1 est la moyenne arithmétique des circonférences de base, et l'on peut dire que *l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution a pour mesure le produit de l'apothème par la circonférence équidistante des deux bases.*

Ce dernier énoncé s'applique aussi au cylindre et au cône ; car la circonférence équidistante des bases est égale, dans le cylindre, à celle de la base, et, dans le cône, à la moitié de celle de la base.

THÉORÈME.

762. *Le volume d'un cône de révolution a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Le volume du cône est la limite des volumes des pyramides régulières inscrites dont le nombre des faces croît indéfiniment. D'après cela, soient V, B, H le volume du cône, l'aire de sa base et sa hauteur ; soient v et b le volume et l'aire de la base d'une pyramide régulière inscrite dans ce cône. On a (643)

$$v = \frac{1}{3} b \mathrm{H}.$$

Mais, lorsque le nombre des faces de la pyramide croît indéfiniment, v tend vers V et b vers B ; on a donc, à la limite,

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \mathrm{BH}.$$

COROLLAIRES.

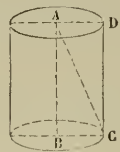
763. Si R est le rayon de la base du cône, on a $\mathrm{B} = \pi \mathrm{R}^2$ et, par suite,

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}.$$

On voit, comme au n° 747, que *les volumes de deux cônes* *de révolution semblables sont dans le rapport des cubes des hauteurs ou des rayons des bases.*

764. Lorsqu'un rectangle ABCD tourne autour de l'un de ses côtés AB (*fig.* 417), le triangle ABC engendre un cône

Fig. 417.



dont le volume est le tiers (745, 762) de celui du cylindre engendré par le rectangle ABCD. Par suite, le volume engendré en même temps par le triangle ADC est les deux tiers du même cylindre. Cette remarque nous sera utile plus tard.

THÉORÈME.

765. *Le volume d'un tronc de cône de révolution à bases parallèles est égal à la somme des volumes de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, le premier la base inférieure, le deuxième la base supérieure, et le troisième la moyenne proportionnelle entre les deux bases du tronc.*

Considérons, comme au n° 759, un tronc de pyramide régulier inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des deux pyramides dont ce tronc de pyramide est la différence ayant respectivement pour limites les volumes des deux cônes dont le tronc de cône proposé est la différence, on aura le volume de ce tronc de cône en prenant la limite du volume du tronc de pyramide. D'après cela, soient V, b, B, H le volume, les bases et la hauteur du tronc de cône, v_1, b_1, B_1 le volume et les bases du tronc de pyramide inscrit; on aura (648)

$$v_1 = \frac{H}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}).$$

Mais, lorsque le nombre des faces du tronc de pyramide croît indéfiniment, v_1 tend vers V, b_1 vers b, B_1 vers B; et l'on a, à la limite, la formule

$$V = \frac{H}{3}\left(B + b + \sqrt{Bb}\right),$$

dont l'énoncé ci-dessus n'est que la traduction en langage ordinaire.

Corollaires.

766. Si R est le rayon de la base inférieure B, et r le rayon de la base supérieure b, on a $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, et par suite

$$(1)\qquad V = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

767. Le raisonnement qui précède s'applique au tronc de *seconde espèce*; il faut seulement substituer le mot *somme* au mot *différence* et remarquer que, le tronc de pyramide inscrit correspondant étant de seconde espèce, le radical qui figure dans l'expression de v_1 doit avoir le signe — (650). On obtient ainsi, pour le volume du tronc de cône de seconde espèce, la formule

$$V = \frac{H}{3}\left(B + b - \sqrt{Bb}\right) = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 - Rr\right).$$

768. Parfois, dans la pratique, notamment pour le *cubage des troncs d'arbres* non équarris, les bases diffèrent assez peu pour qu'on puisse assimiler sans inconvénient le cône tronqué à un cylindre ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la section faite dans le tronc à égale distance des deux bases. L'erreur commise est d'ailleurs facile à évaluer; en retranchant le volume cylindrique

$$(2)\qquad v = \pi H\left(\frac{R + r}{2}\right)^2$$

du cône tronqué dont le volume est donné par la formule (1), on trouve

$$V - v = \frac{1}{3}\pi H\left(\frac{R - r}{2}\right)^2.$$

L'erreur commise est donc égale au volume d'un cône ayant pour hauteur la hauteur du tronc et pour rayon de sa base la demi-différence des rayons des bases du tronc.

Quand on veut appliquer la formule (2) au cubage d'un tronc d'arbre, il convient de la préparer de la manière suivante : soit C la longueur de la circonférence moyenne que l'on évalue au moyen d'un cordon métrique; le rayon de cette circonférence sera $\frac{C}{2\pi}$ et, par suite, le volume cherché

$$v = \frac{\pi HC^2}{4\pi^2} = \frac{HC^2}{4\pi}.$$

Ainsi, supposons qu'on ait trouvé $1^m,80$ pour la circonférence moyenne et $6^m,50$ pour la hauteur, on aura pour le volume

$$\frac{6,5 \times (1,8)^2}{4\pi} = \frac{6,5 \times (0,9)^2}{\pi} = 1^{mc},676.$$

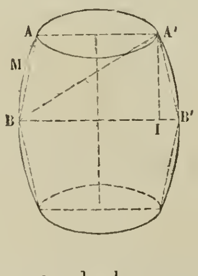
769. La question du *jaugeage des tonneaux* se rattache à la mesure du tronc de cône.

En considérant le tonneau (*fig.* 418) comme la somme de deux troncs de cône identiques opposés par leur grande base, on aurait la formule

$$V = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr),$$

dans laquelle H est la hauteur totale du double tronc, r le rayon

Fig. 418.



du *fond* AA', et R le rayon de la grande base BB' à laquelle on donne le nom de *bouge*. Mais cette formule donne évidemment un résultat trop faible. En introduisant, suivant l'usage, les diamètres Δ et δ au lieu des rayons R et r, et ayant égard à l'identité $\Delta^2 + \delta^2 = 2\,\Delta\delta + (\Delta - \delta)^2$, on peut mettre la formule précédente sous la forme $V = \frac{\pi}{4} H\,\Delta\delta + \frac{\pi}{12} H(\Delta - \delta)^2$. Or, le dernier terme est négligeable; car, son rapport

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta - \delta}{\sqrt{\Delta\delta}}\right)^2$$

au précédent, ne dépasse guère un demi-centième dans les conditions ordinaires, ce qui correspond à une erreur d'un demi-litre par hectolitre.

Mais alors la formule réduite $V = \frac{\pi}{4} H\,\Delta\delta$ est *a fortiori* un peu trop faible. Aussi, par compensation, les tonneliers remplacent-ils le coefficient $\frac{\pi}{4} = 0{,}785$ par $0{,}8$; ce qui conduit à la formule très simple $V = (0{,}8)\,H\,\Delta\delta$, qui donne le volume, en mètres cubes, lorsque H, Δ, δ sont évalués en prenant le mètre pour unité. Pour avoir le volume en hectolitres, il suffit de multiplier par 10; c'est ce que l'on fait habituellement, et on parvient ainsi à la formule définitive

$$(1) \qquad V = 8\,H\,\Delta\delta,$$

qui est généralement employée dans le Midi de la France, et dont de nombreuses expériences ont permis de constater la suffisante exactitude. Pour $H = 0^m{,}756$, $\Delta = 0^m{,}69$, $\delta = 0^m{,}61$, cette formule donne $V = 254^{\text{lit}}$.

Appliquée aux *foudres* ou grands tonneaux de 100 à 200 hectolitres, la formule (1) donne un résultat trop fort, à cause de la forme concave que l'on donne, dans ce cas, aux fonds pour augmenter leur résistance. L'expérience montre qu'il convient alors de diminuer de 4 pour 100, dans les conditions ordinaires, l'évaluation fournie par la formule (1), en entendant par H la distance des deux fonds prise à la partie inférieure, c'est-à-dire au bas de la porte.

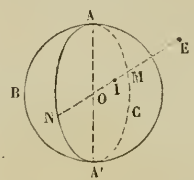
Observons enfin que l'on peut trouver des formules plus exactes, mais en augmentant leur complication et en faisant intervenir un plus grand nombre de mesures.

§ III. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

770. On appelle *surface sphérique* la surface engendrée par la rotation d'une demi-circonférence ABA' autour du diamètre AA' qui la termine (*fig.* 419).

Fig. 419.



Dans ce mouvement, tout point de cette demi-circonférence décrit un cercle dont le centre est situé sur l'axe de rotation AA' et dont le plan est perpendiculaire à cet axe.

La *sphère* est le corps limité par une surface sphérique. On confond souvent dans le discours les mots *sphère* et *surface sphérique*, de même qu'en Géométrie plane on dit parfois *cercle* pour *circonférence de cercle*.

771. Considérons la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABA' autour du diamètre AA' et un point quelconque de l'espace. Quand le demi-cercle générateur vient se placer suivant ACA' dans le plan déterminé par AA' et par le point considéré, il peut se faire que ce point soit comme E à l'extérieur du cercle ACA', ou comme I à l'intérieur, ou enfin comme M sur la circonférence de ce cercle. Dans le premier cas, le point E est *extérieur* à la sphère, et sa distance au centre O du cercle ACA' est plus grande que le rayon R de ce cercle; dans le second cas, le point I est *intérieur* à la sphère et la distance OI est moindre que R; enfin, dans le troisième cas, le point M est sur la surface sphérique et la distance OM est égale à R.

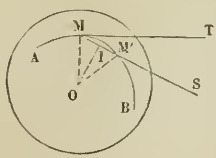
La *surface sphérique* peut donc être encore définie le *lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe.*

Ce point fixe O est dit le *centre* de la sphère. On nomme *rayon* toute droite, telle que OA ou OM, menée du centre O à la surface; *tous les rayons d'une même sphère sont égaux.* On nomme *diamètre* toute droite, telle que MN, passant par le centre et limitée à la surface sphérique; *tous les diamètres d'une même sphère sont égaux,* car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

Deux sphères de même rayon sont égales.

772. La définition donnée au n° 111 pour la tangente aux courbes planes s'étend aux courbes de l'espace. Il est aisé de voir, d'après cela, que *la tangente* MT *à une courbe quelconque* AMB *tracée sur la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon* OM *mené au point de contact.* En effet (*fig.* 420),

Fig. 420.



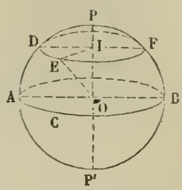
prenons sur la courbe AMB un point M′ voisin du point M, menons la sécante MM′S et joignons le centre O au milieu I de la corde MM′. Le triangle MOM′ étant isocèle, la droite OI est perpendiculaire sur MM′. Or, lorsque la sécante MM′S tourne autour du point M de manière à devenir à la limite la tangente MT, le point I milieu de MM′ se réunit au point M en même temps que le point M′. L'angle OMT, position limite de l'angle droit OIS, est donc lui-même un angle droit.

THÉORÈME.

773. *Toute section plane de la sphère est un cercle.*

En effet, les points de la section sont, puisqu'ils appartiennent à la sphère, situés à la même distance du centre de cette sphère; or on sait (91, 524) que le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe est une circonférence de cercle.

Fig. 421.



COROLLAIRES.

774. Si le point fixe O, qui est ici le centre de la sphère (*fig.* 421), est situé dans le plan sécant, ce point est le centre même de la section ACB, dont le rayon ne diffère pas de celui de la sphère.

Si le point fixe O est extérieur au plan sécant, le centre I de la section DEF est la projection du centre O de la sphère sur le plan sécant (524). Quant au rayon IE $= r$ de la section, c'est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle OIE dont l'hypoténuse OE est le rayon R de la sphère et dont l'autre côté de l'angle droit OI est la distance d du centre de la sphère au plan sécant. Ce rayon r résulte donc de la formule

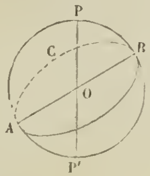
$$r^2 = R^2 - d^2.$$

On est ainsi conduit à diviser les sections planes de la sphère en deux classes : les *grands cercles*, dont les plans passent par le centre de la sphère et qui sont tous égaux entre eux, puisqu'ils ont tous pour rayon le rayon de la sphère; et les *petits cercles*, dont les plans ne contiennent pas le centre de la sphère, et dont les rayons, inférieurs à celui de la sphère, décroissent à mesure que leurs plans s'éloignent du centre de la sphère.

Deux petits cercles également éloignés du centre de la sphère sont égaux, et, de deux petits cercles inégalement éloignés du centre de la sphère, le plus grand est celui qui est le plus voisin de ce centre.

Ajoutons qu'il faut *trois points* de la surface sphérique pour déterminer un petit cercle (116, 492), tandis que *deux points* suffisent pour déterminer un grand cercle, attendu que le centre est connu; toutefois, dans ce dernier cas, les deux points donnés ne doivent pas être en ligne droite avec le centre de la sphère, sans quoi le plan du grand cercle, assujetti seulement à passer par un diamètre, pourrait occuper une infinité de positions (492).

Fig. 422.



775. *Tout grand cercle divise la surface sphérique et la sphère en deux parties égales.* Car si, après avoir séparé les deux parties, on les applique sur la base commune en tournant leur convexité dans le même sens, les deux surfaces coïncideront, sans quoi tous les points de la surface sphérique ne seraient pas à la même distance du centre.

776. *Deux grands cercles* APBP′, ABC (*fig.* 422) *se divisent mutuellement en deux parties égales;* car le centre O de la sphère, appartenant à la fois aux plans de ces deux cercles, est situé sur leur intersection commune, qui est alors un diamètre.

777. *Une droite ne peut couper la surface sphérique en plus de deux points.* Car cette droite ne peut avoir plus de deux points communs avec la circonférence de grand cercle, située dans le plan déterminé par cette droite et le centre de la sphère.

778. *La sphère est de révolution autour d'un diamètre quelconque* AB. Car la circonférence ACB déterminée par un plan quelconque passant par AB, ayant même centre O et même rayon OA que la sphère, engendrera évidemment cette surface en tournant autour de AB (*fig.* 422).

779. On nomme *pôles* d'un cercle de la sphère les extrémités du diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan du cercle.

Deux cercles DFE, ACB (*fig.* 423), dont les plans sont parallèles, ont les mêmes pôles P et P'.

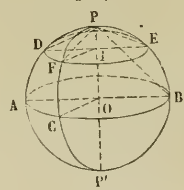
Le centre I d'un cercle quelconque DE, ses pôles P et P', et le centre O de la sphère sont sur une même perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout grand cercle PFCP' passant par les pôles P et P' d'un cercle DFE a son plan perpendiculaire au plan de ce cercle, puisqu'il contient la droite PP' qui est perpendiculaire à ce dernier plan.

THÉORÈME.

780. *Tous les points de la circonférence d'un cercle* DFE *de la sphère sont à égale distance de chacun des pôles* P *et* P' *de ce cercle.*

Fig. 423.



En effet, la droite PI, qui joint le pôle P au centre I du cercle DFE, étant perpendiculaire au plan DFE, les droites PD, PF, PE, ... sont des obliques qui s'écartent également du pied I de la perpendiculaire et qui, par suite, sont égales.

On voit encore que les arcs de grand cercle PD, PF, PE, ... sont égaux comme sous-tendus par des cordes égales.

Enfin, dans le cas où le cercle considéré DFE devient un grand cercle ACB, la même propriété subsiste; mais les angles droits POA, POC, POB, ... ayant leurs sommets au centre des grands cercles PAP', PCP', PBP', ..., les arcs PA, PC, PB, ... sont tous égaux au quart d'une circonférence de grand cercle.

SCOLIE.

781. Des deux pôles P et P' d'un petit cercle DFE, nous ne considérerons désormais, à moins d'avertissement contraire,

que le pôle P qui est le plus rapproché du plan de ce cercle. Nous donnerons à la distance rectiligne PD, qui sépare le pôle P d'un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *distance polaire* de ce cercle, et à la longueur de l'arc de grand cercle PD, qui va du pôle à un point quelconque D du cercle DFE, le nom de *rayon sphérique* de ce cercle.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est égal au quart de la circonférence de ce cercle ou à un quadrant, et sa distance polaire est égale à la corde de cet arc, c'est-à-dire au côté du carré inscrit dans un grand cercle.

782. Le théorème précédent permet de tracer des circonférences sur une sphère solide comme on les trace sur un plan. On emploie à cet effet un *compas à branches courbes*, afin de ne pas être gêné par la convexité de la sphère. On donne au compas une ouverture (distance des deux pointes) égale à la distance polaire voulue, et l'on place la pointe sèche au point choisi pour pôle; l'autre pointe décrit alors le cercle demandé.

Pour décrire un grand cercle, il faut avoir sa distance polaire, c'est-à-dire la corde d'un arc égal au quart d'un grand cercle; ce qui exige la connaissance du rayon de la sphère.

PROBLÈME.

783. *Trouver le rayon d'une sphère solide* (*fig.* 424).

D'un point P de la surface sphérique comme pôle, avec une

Fig. 424.

ouverture de compas arbitraire, on décrit un cercle ABC. On relève avec le compas les trois distances rectilignes AB, BC, CA, et l'on construit sur le papier un triangle abc ayant pour côtés ces trois longueurs. On détermine le centre i du cercle circonscrit au triangle abc, et la droite ai est égale au rayon AI du cercle ABC. Par suite, si du point a comme centre, avec une ouverture de compas égale à celle qui a servi à décrire le cercle ABC sur la sphère, on décrit un petit arc de cercle jusqu'à la rencontre p de la perpendiculaire pip' élevée en i sur ai, on forme un triangle api égal à API, et il ne reste plus qu'à élever la perpendiculaire ap' sur ap pour avoir en pp' le diamètre PP′ de la sphère.

Pour obtenir des résultats précis lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une portion de sphère, il faut : choisir le point P à peu près au milieu de la portion de surface dont on dispose, prendre une distance polaire PA aussi grande que possible, et, enfin, dans tous les cas, choisir les points A, B, C, sur le cercle ABC, de telle sorte que le triangle ABC soit à peu près équilatéral.

Scolie.

784. On emploie souvent, pour déterminer le rayon d'une sphère solide, un instrument spécial, qui est décrit dans les *Traités de Physique* et qu'on nomme *sphéromètre*. Cet instrument fait connaître le rayon $AI = r$ du cercle ABC, et la flèche $PI = h$. La construction graphique plane reste la même ; seulement, au lieu de déterminer le point p à l'aide d'un arc de cercle décrit du point a, on prend $ip = h$. Mais, dans ce cas, on préfère le calcul à la construction graphique ; R étant le rayon inconnu de la sphère, le triangle rectangle PAP′ donne

$$\overline{AI}^2 = IP.IP' \quad \text{ou} \quad r^2 = h(2R - h),$$

d'où l'on déduit

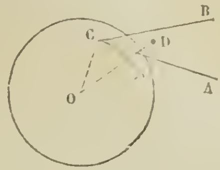
$$R = \frac{1}{2}\left(h + \frac{r^2}{h}\right).$$

THÉORÈME.

785. *Tout plan* ACB *perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon* OC *est tangent à la sphère et*, réciproquement, *tout plan* ACB

tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OC *mené au point de contact* C (*fig.* 425).

Fig. 425.



On dit qu'un plan ACB est *tangent* à la sphère lorsqu'il n'a avec cette surface qu'un point commun C, qu'on nomme *point de contact*.

Cela posé, soit ACB un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon OC. D étant un point quelconque de ce plan, autre que C, OD est oblique à ce plan, et l'on a $OD > OC$, de sorte que le point D est extérieur à la sphère. Le plan ACB, n'ayant d'après cela que le point C commun avec la surface sphérique, est tangent à cette surface.

Inversement, si ACB est un plan tangent à la sphère au point C, tout point D de ce plan, autre que C, est extérieur à la sphère, et l'on a $OD > OC$; donc OC, étant la plus courte distance du centre O au plan ACB, est perpendiculaire sur ce plan.

Corollaires.

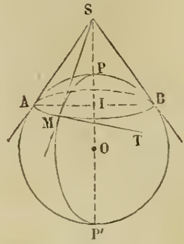
786. *Par un point pris sur la surface sphérique, on peut toujours mener un plan tangent à cette surface, et l'on ne peut en mener qu'un* (516).

787. Le plan tangent à la sphère en un point C contient les tangentes en ce point à toutes les courbes qu'on peut tracer par ce point sur la surface sphérique (772, 521).

788. Considérons une sphère O et un point extérieur S (*fig.* 426). Par la droite OS, menons un plan quelconque qui déterminera dans la sphère un grand cercle PAP′, et menons par S une tangente SA à ce cercle. Pendant que le demi-cercle PAP′, en tournant autour de l'axe SO, engendre la sphère, la

tangente SA engendre un cône de révolution qui a en commun avec la sphère le cercle AB décrit par le point A. De

Fig. 426.



plus, en tout point M de ce cercle, le cône et la sphère ont le même plan tangent; car la génératrice SM et la tangente MT au cercle AB, qui déterminent le plan tangent au cône (750), sont situées l'une et l'autre (787) dans le plan tangent à la sphère. On dit d'après cela que *le cône est circonscrit à la sphère* et que *la sphère est inscrite au cône* le long du cercle commun AB.

On voit encore par là que, *par un point extérieur* S, *on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère* O, et que *toutes les tangentes* SA, SM, SB,... *à la sphère, issues du même point* S, *sont égales.*

Si le point S s'éloigne indéfiniment sur la droite PP', le cône dégénère en un *cylindre circonscrit*, et le lieu des points de contact de la sphère et de ce cylindre de révolution devient le grand cercle perpendiculaire à la direction PP' des génératrices du cylindre.

THÉORÈME.

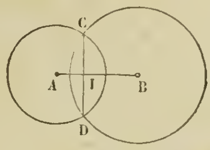
789. *L'intersection de deux sphères* A *et* B *est une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres* AB *des deux sphères et dont le centre est sur cette ligne* (*fig.* 427).

Car cette intersection n'est autre que la circonférence engendrée par la rotation autour de AB du point C commun aux deux circonferences suivant lesquelles les deux sphères sont coupées par un plan quelconque passant par AB.

Scolie.

790. Lorsque deux sphères n'ont qu'un point commun, on dit qu'elles sont tangentes en ce point, qu'on nomme *point de contact;* le point de contact est situé sur la ligne des centres, et en ce point les sphères ont le même plan tangent (120).

Fig. 427.

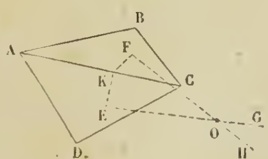


Les positions relatives de deux sphères sont au nombre de cinq (122), et les relations correspondantes entre la distance des centres et les rayons sont celles qui ont lieu pour les circonférences de grand cercle déterminées dans les sphères données par un plan quelconque passant par la droite des centres.

THÉORÈME.

791. *Par quatre points* A, B, C, D, *non situés dans un même plan, on peut faire passer une surface sphérique, mais une seule* (*fig.* 428).

Fig. 428.



Il s'agit de prouver qu'il existe un point, et un seul, situé à la même distance des quatre points A, B, C, D.

Or, tout point équidistant de A, B, C, D doit se trouver sur la perpendiculaire FH élevée au plan ABC par le centre F du cercle circonscrit au triangle ABC, puisque cette perpendiculaire est le lieu des points équidistants de A, B, C (524); il doit aussi appartenir à la perpendiculaire EG élevée au plan ACD par le centre E du cercle circonscrit au triangle ACD. Comme deux droites FH, EG ne peuvent avoir qu'un point commun, on voit d'abord qu'il ne saurait jamais exister qu'un seul point équidistant de A, B, C, D. En second lieu, un tel point existe toujours si, conformément à l'hypothèse, les points A, B, C, D ne sont pas situés dans un même plan. En effet, le plan perpendiculaire sur le milieu K de AC, étant le lieu des points équidistants de A et de C, doit contenir EG et FH; d'ailleurs, les deux droites KF et KE, suivant lesquelles il rencontre les plans ABC et ADC, se coupent, puisque les plans ABC et ADC sont distincts; donc les deux droites EG et FH, étant situées dans un même plan EKF, et étant, dans ce plan, perpendiculaires à deux droites KF et KE qui se coupent, ont un point commun O qui est le centre de la sphère demandée.

Corollaires.

792. Deux sphères, qui ont quatre points communs non situés dans un même plan, coïncident.

793. Les perpendiculaires élevées aux quatre faces d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à chacune de ces faces se coupent en un même point.

§ IV. — PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

DÉFINITIONS.

794. On nomme *angle de deux courbes* passant par un même point de l'espace l'angle de leurs tangentes en ce point. *L'angle de deux courbes tracées sur la sphère est* donc *égal à l'angle des plans menés respectivement par le centre de la sphère et par les tangentes à ces courbes au point commun;* car, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon qui aboutit au point commun (772), leur angle mesure le dièdre des deux plans considérés. En particulier, *l'angle de deux arcs de grand cercle est égal à l'angle des plans de ces arcs.*

THÉORÈME.

795. *L'angle* APB *de deux arcs de grand cercle* PAP', PBP' *a pour mesure, soit l'arc de grand cercle* AB *décrit de son som-*

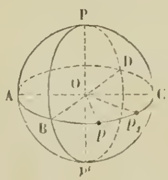
met P *comme pôle et compris entre ses côtés, soit le plus petit arc de grand cercle* pp_1, *qui unit les pôles de ses côtés* (*fig.* 429).

En effet :

1° Les arcs PA, PB étant des quadrants, les angles POA, POB sont droits, et l'angle AOB est l'angle plan qui mesure l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles. Mais (794) cet angle dièdre est égal à l'angle APB des deux arcs de grands cercles, et l'angle au centre AOB a pour mesure l'arc AB; donc l'arc AB est aussi la mesure de l'angle APB.

2° Prenons sur la circonférence ABC, à partir des points A et B, *dans le même sens*, deux arcs Ap et Bp_1, égaux à un quadrant; l'arc pp_1 est évidemment égal à l'arc AB, et, pour justifier le second énoncé du théorème, il suffit de prouver que p et p_1 sont les pôles des cercles PAP′, PBP′. Or, la droite Op, perpendiculaire à OA, puisque l'arc Ap est un quadrant,

Fig. 429.



et perpendiculaire à OP, puisqu'elle est dans le plan ABC, est perpendiculaire au plan du grand cercle PAP′; p est donc le pôle de ce grand cercle. De même, p_1 est le pôle du grand cercle PBP′.

Nous avons dit que nous portions les arcs Ap et Bp_1 dans le même sens, à partir de leurs origines respectives A et B; si on les portait l'un dans un sens et l'autre en sens contraire, l'arc pp_1 serait le supplément de l'angle des deux grands cercles. Il y a donc une précaution à prendre dans l'application du second énoncé. Il faut considérer, pour l'un des grands cercles PAP′, le pôle p qui est du même côté que le demi-cercle PBP′ et, pour l'autre grand cercle PBP′, le pôle p_1 qui n'est pas du même côté que le demi-cercle PAP′.

COROLLAIRES.

796. Le lieu géométrique des pôles des grands cercles inclinés d'un angle donné sur un grand cercle donné se compose de deux cercles dont les pôles se confondent avec ceux du grand cercle donné. Le rayon sphérique de ces cercles est égal à l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné.

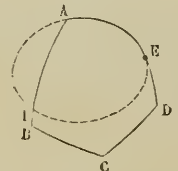
797. Pour que deux grands cercles se coupent à angle droit, il faut et il suffit que chacun d'eux renferme le pôle de l'autre.

798. Deux grands cercles APC, BPD (*fig.* 429) forment en se coupant au point P quatre angles APB, BPC, CPD, DPA; les angles adjacents APB, BPC sont supplémentaires, les angles opposés par le sommet APB, CPD sont égaux.

DÉFINITIONS.

799. On appelle *polygone sphérique* la portion de surface sphérique ABCDE comprise entre plusieurs arcs de grand cercle. Ces arcs AB, BC, CD, DE, EA sont les *côtés* du polygone; les angles ABC, BCD,... qu'ils forment, et les sommets B, C,... de ces angles sont les *angles* et les *sommets* du polygone (*fig.* 430).

Fig. 430.



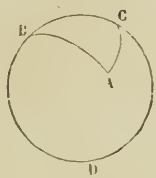
Un polygone sphérique est dit *convexe* lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère.

Chaque côté d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une demi-circonférence de grand cercle. Car, si le côté AB, par exemple, était plus grand qu'une demi-circonférence, on pourrait prendre sur AB, entre A et B, un point I tel, que AI fût égal à une demi-circonférence; dès lors, le grand cercle auquel appartient le côté AE passerait par le point I (776), et le polygone ne serait pas tout entier dans l'un des deux hémisphères déterminés par ce grand cercle AE.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (26).

800. Le polygone sphérique le plus simple est le *triangle sphérique;* c'est la portion ABC de la surface de la sphère comprise entre trois arcs de grand cercle AB, BC, CA, *qui sont chacun moindres qu'une demi-circonférence.* D'après cela, un triangle sphérique est toujours convexe (*fig.* 431).

Fig. 431.



On pourrait admettre des côtés qui surpasseraient la demi-circonférence, et appeler encore triangle sphérique la figure formée par des arcs tels que AB, AC, BDC, dont le dernier est supérieur à une demi-circonférence. Mais d'abord cela serait incommode, parce que ces nouvelles figures présenteraient des angles, tels que A, qui surpasse deux angles droits ; et ensuite cela est inutile, car la connaissance des éléments du triangle sphérique proprement dit ABC entraîne celle de tous les éléments de la figure formée par les arcs AB, AC, BDC.

Un triangle sphérique est *isocèle, équilatéral, rectangle,* dans les mêmes circonstances qu'un triangle rectiligne.

801. En joignant les sommets d'un triangle sphérique ABC (*fig.* 432) au centre O de la sphère, on forme un angle trièdre OABC, dont les faces AOB, BOC,... ont la même mesure (127) que les côtés correspondants AB, BC, ... du triangle sphérique, et dont les angles dièdres OA, OB, ... ont la même mesure (794) que les angles A, B, ... de ce triangle. La même

remarque s'étend à un polygone sphérique ABCD (*fig.* 433) et à l'angle polyèdre correspondant OABCD.

D'après cela, *à chaque propriété des angles trièdres ou polyèdres répond une propriété analogue des triangles ou polygones sphériques;* et, pour énoncer cette propriété, il suffit de remplacer respectivement les mots *face* et *angle dièdre* par les mots *côté* et *angle*.

Fig. 432.

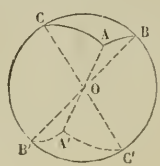
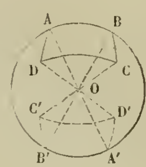


Fig. 433.



C'est même cette marche que l'on suit pour établir les premières propriétés des figures sphériques. Mais plus tard, et pour des propriétés moins simples, il est ordinairement préférable de faire l'inverse, c'est-à-dire d'établir directement les propriétés des figures sphériques pour en déduire les propriétés des angles polyèdres correspondants. On raisonne en effet sur une surface, et en particulier sur la sphère, presque aussi aisément que sur un plan, tandis qu'il faut un certain effort pour se représenter une figure de l'espace un peu compliquée. L'étude de l'Astronomie ne laisse à cet égard aucun doute, et la conception de la sphère céleste est un des plus heureux artifices géométriques qu'on ait imaginés.

802. Si l'on prolonge les arêtes de l'angle polyèdre OABCD (*fig.* 433) au delà du sommet O, on forme un angle polyèdre symétrique OA'B'C'D', qui détermine sur la surface de la sphère un polygone A'B'C'D'. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D', dont les sommets sont ainsi diamétralement opposés deux à deux, sont appelés *polygones sphériques symétriques.* Les considérations développées au n° 566 conduisent aux propriétés suivantes :

1° *Deux polygones symétriques ont leurs angles et leurs côtés égaux deux à deux ;* 2° *ces polygones ne sont pas en gé-*

néral superposables, attendu que les parties respectivement égales sont disposées dans un ordre inverse ; 3° pour qu'un triangle sphérique soit superposable à son symétrique (*fig.* 432), *il faut et il suffit qu'il ait deux angles égaux, et dans un tel triangle les côtés opposés aux angles égaux sont égaux ;* en d'autres termes, ce triangle est *isocèle.*

THÉORÈME.

803. *Dans tout polygone sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

En effet, soit ABCD le polygone proposé (*fig.* 433). Dans l'angle polyèdre correspondant OABCD, on a (567)

$$AOB < BOC + COD + DOA.$$

Donc (127)

$$\text{arc}\,AB < \text{arc}\,BC + \text{arc}\,CD + \text{arc}\,DA.$$

SCOLIES.

804. *Dans tout triangle sphérique* ABC (*fig.* 434), *à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

Fig. 434.

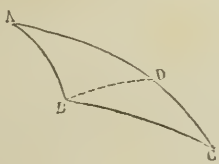
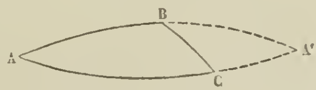


Fig. 435.



Cela résulte de la propriété analogue de l'angle trièdre (568). On peut aussi le démontrer comme il suit. Soit l'angle ABC plus grand que l'angle C; on pourra mener dans l'angle ABC un arc de grand cercle BD qui fasse avec BC un angle DBC égal à l'angle C. Le triangle BDC ayant deux angles égaux DBC, DCB sera isoscèle (802), et l'on aura $BD = DC$. Or le triangle ABD donne (803)

$$AB < AD + BD$$

et, en remplaçant le côté BD par son égal DC,

$$AB < AD + DC \quad \text{ou} \quad AB < AC.$$

En rapprochant ce théorème de celui qui a été démontré au n° 802 (3°), on voit que : réciproquement, *si un triangle sphérique est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux, et si un triangle sphérique a deux côtés inégaux, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

805. De ce qu'un triangle sphérique isocèle est superposable à son symétrique, il résulte que, *dans tout triangle sphérique isocèle, l'arc de grand cercle qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et divise l'angle au sommet en deux parties égales.*

806. Enfin les propriétés du triangle rectiligne, démontrées aux nos 40 et 41, s'appliquent au triangle sphérique et s'énoncent de même ; il suffit de remplacer le mot *droite* par les mots *arc de grand cercle.*

THÉORÈME.

807. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence.*

Car la somme des faces de l'angle polyèdre correspondant est moindre que quatre angles droits (570).

La démonstration directe est d'ailleurs facile. Considérons d'abord un triangle sphérique ABC (*fig.* 435), et prolongeons les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre A'; les deux arcs ABA', ACA' sont des demi-circonférences de grand cercle (776) et, comme dans le triangle BCA' le côté BC est moindre que BA' + CA', la somme AB + AC + BC des côtés du triangle ABC est inférieure à ABA' + ACA', c'est-à-dire à une circonférence de grand cercle.

En opérant d'une manière analogue sur un polygone, c'est-à-dire en remplaçant un côté par les prolongements des deux qui lui sont adjacents, on voit que, si la proposition est vraie pour un polygone convexe, elle subsiste pour le polygone convexe qui a un côté de plus ; donc elle est générale.

THÉORÈME.

808. *Si un triangle sphérique* A′B′C′ *est le triangle polaire d'un triangle sphérique donné* ABC, *réciproquement* ABC *sera le triangle polaire de* A′B′C′.

Pour bien comprendre la définition du triangle polaire et l'objet du présent théorème, il convient de faire une remarque.

Soient EIF un grand cercle (*fig.* 436), P l'un de ces pôles, et M un point quelconque de la sphère. Si P et M sont d'un même côté du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle qui va de P en M est moindre qu'un quadrant PI. Si P et M sont de part et d'autre du grand cercle EF, le plus petit arc de grand cercle allant de P en M est supérieur à un quadrant.

Fig. 436.

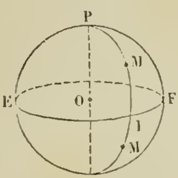
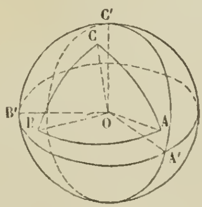


Fig. 437.



Cela posé, on nomme *triangle polaire* d'un triangle sphérique ABC un nouveau triangle A′B′C′ (*fig.* 437) dont les sommets sont définis de la manière suivante : A′ est celui des deux pôles du grand cercle BC qui est, par rapport à ce grand cercle, du même côté que le sommet opposé A; de même B′ est le pôle de AC qui est situé par rapport à AC du même côté que B, et C′ est le pôle de AB qui est placé par rapport à AB du même côté que C.

Il s'agit de démontrer que, réciproquement, le triangle ABC est le triangle polaire de A′B′C′. A cet effet, considérons l'un quelconque de ses sommets, C par exemple; A′ étant le pôle de BC, l'arc de grand cercle qui joindrait C et A′ est un quadrant; de même l'arc de grand cercle CB′ est un quadrant, puisque B′ est le pôle de AC. Donc, le point C (780) est le pôle de A'B'. De plus, puisque C' est le pôle de AB qui se trouve par rapport à AB du même côté que C, le plus petit arc du grand cercle allant de C en C' est moindre qu'un quadrant ; par suite, C est le pôle de A'B' qui se trouve par rapport à A'B' du même côté que C'.

Scolie.

809. D'après cela, le triangle polaire A'B'C' d'un triangle donné ABC peut être considéré comme obtenu en décrivant des sommets A, B, C, pris successivement pour pôles, trois circonférences de grand cercle. Ces trois circonférences divisent la surface de la sphère (*fig.* 437) en huit triangles, dont l'un A'B'C' est le triangle polaire de ABC. C'est celui qui est tel, que les sommets A et A' soient d'un même côté par rapport à BC, les sommets B et B' d'un même côté par rapport à AC, et les sommets C et C' d'un même côté par rapport à AB.

Les deux trièdres OABC, OA'B'C', qui répondent à deux triangles polaires ABC, A'B'C', sont supplémentaires (572). En effet, d'après la construction du point C', on voit que l'arête OC', par exemple, est perpendiculaire (779) au plan AOB et située par rapport à ce plan du même côté que OC : on raisonnerait de même pour les autres arêtes OB' et OA'. Chaque angle de l'un des triangles ABC, A'B'C', doit donc (573) être le supplément du côté opposé de l'autre triangle. Mais cette propriété, en vertu de laquelle deux triangles polaires sont aussi appelés *triangles supplémentaires*, mérite d'être démontrée directement; c'est là l'objet du théorème qui suit.

THÉORÈME.

810. *Si* ABC, A'B'C' *sont deux triangles polaires, chaque angle de l'un de ces triangles a pour mesure une demi-circonférence de grand cercle, moins le côté opposé dans l'autre triangle* (*fig.* 438).

En effet, considérons, par exemple, l'angle A et prolongeons, s'il le faut, les côtés AB et AC jusqu'à la rencontre de l'arc B'C'; puisque A est le pôle de B'C', l'angle A a pour mesure l'arc DE (795); mais on a évidemment

$$DE = B'E + DC' - B'C'.$$

D'ailleurs B'E et DC' sont des quadrants, puisque B' est le pôle de AC et C' le pôle de AB; on a donc

$$DE = \tfrac{1}{2}\text{ circ. de grand cercle} - B'C'.$$

On procéderait de la même manière pour les angles B et C.

Fig. 438.

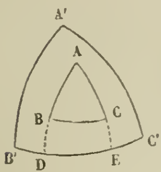


Fig. 439.

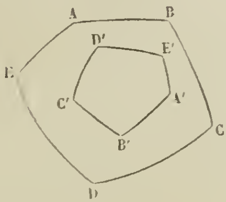
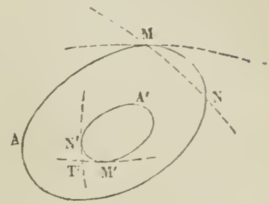


Fig. 440.



Les triangles ABC et A'B'C' résultant l'un de l'autre par la même construction (808), la propriété que nous venons de démontrer pour les angles A, B, C du premier triangle convient aux angles A', B', C' du second. On prouverait d'ailleurs directement que l'angle A', par exemple, a pour mesure le supplément de BC, en prolongeant BC jusqu'à la rencontre de A'B' et de A'C'.

Scolie.

811. Les propriétés des triangles polaires s'étendent aux polygones et aux courbes sphériques.

Soit (*fig.* 439) un polygone sphérique convexe ABCDE; prenons, des deux pôles de l'arc de grand cercle EA, celui A' qui, par rapport à EA, est dans le même hémisphère que le polygone ABCDE; prenons d'une manière analogue les pôles B', C', D', E' des côtés AB, BC, CD, DE. Le polygone A'B'C'D'E' sera le polygone *polaire* du proposé, et l'on démontrera, comme aux nos 808 et 810 : 1° que, *si un polygone sphérique* A'B'C'D'E' *est le polygone polaire d'un polygone donné* ABCDE, *réciproquement* ABCDE *est le polygone polaire de* A'B'C'D'E'; 2° que, *dans deux polygones polaires, tout angle de l'un est le supplément du côté de l'autre dont le sommet de l'angle considéré est le pôle.*

812. On appelle *arc de grand cercle tangent en un point* M *d'une courbe sphérique* AMN (*fig.* 440) la limite des positions que prend le

grand cercle mené par le point M et un point voisin N, lorsque ce second point N de la courbe tend vers le premier. Une courbe sphérique est *convexe* si le grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points laisse la courbe tout entière dans un seul hémisphere (799). Une courbe sphérique convexe ne saurait être rencontrée par un grand cercle en plus de deux points; et, des deux *arcs* de grand cercle qui joignent deux points quelconques de la courbe, le plus petit, c'est-à-dire celui qui est moindre qu'une demi-circonférence, est à l'*intérieur* de la courbe.

Cela posé, soit A'M' (*fig.* 440) une courbe sphérique convexe; en un point quelconque M' de cette courbe, menons le grand cercle tangent et prenons le pôle M de ce cercle qui est dans le même hémisphère que la courbe A'M'; le lieu des points M est la *courbe polaire* AM de A'M'. Inversement, la courbe A'M' est la courbe polaire de AM; en d'autres termes, le point M' est le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe AM; car si N est le pôle de l'arc de grand cercle N'T' tangent à la courbe A'M' en un point N' voisin de M', le point T' sera le pôle (780) de l'arc sécant MN, et, quand ce dernier arc deviendra tangent en M, le point T' se confondra avec M'. Ainsi les points M et M' des deux courbes se correspondent deux à deux, de telle sorte que le point M soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M' et que le point M' soit le pôle de l'arc de grand cercle tangent en M.

Deux figures sphériques polaires sont des figures corrélatives : à tout point de l'une répond un arc de grand cercle dans l'autre, de telle sorte que, si trois points de la première sont sur un même grand cercle, les trois arcs de grand cercle correspondants de la seconde passent par un même point, pôle de ce grand cercle. Tout théorème en engendre immédiatement un autre; et c'est même cette corrélation des figures sphériques qui a suggéré l'idée du principe général de *dualité*.

Corollaires.

813. *Dans tout triangle sphérique :* 1° *la somme des angles est comprise entre deux et six angles droits;* 2° *le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres angles.*

La démonstration est la même que pour les angles trièdres (575), et les propriétés énoncées peuvent être elles-mêmes considérées comme une conséquence des propriétés correspondantes des trièdres.

Il résulte de là qu'un triangle sphérique peut avoir un, deux ou trois angles droits. Quand le triangle est *birectangle*, le sommet de l'angle qui n'est pas droit est le pôle du côté opposé, et les côtés qui comprennent cet angle sont des quadrants. Dans le triangle sphérique *trirectangle*, tous les côtés sont des quadrants; le triangle trirectangle est le *huitième* de la sphère sur laquelle il est tracé : on le voit immédiatement en prolongeant les arcs de grand cercle qui forment les côtés du triangle.

THÉORÈME.

814. *Deux triangles sphériques tracés sur la même sphère ou sur des sphères égales sont égaux dans toutes leurs parties : 1° lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; 2° lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; 3° lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun; 4° lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun. — Dans tous les cas, ils sont égaux ou symétriques, suivant que la disposition des éléments donnés est la même ou est inverse.*

Ce théorème est une conséquence des propriétés analogues (577, 578) des angles trièdres. On peut aussi le démontrer directement.

Supposons d'abord que la disposition des éléments soit la même dans les deux triangles, on démontrera l'égalité pour les trois premiers cas en raisonnant comme au n° 32 de la Géométrie plane. Quant au quatrième cas, il résulte du troisième par la considération du triangle polaire (810). Remarquons, en outre, que les deux premiers cas sont aussi corrélatifs l'un de l'autre.

Si la disposition des éléments donnés est inverse, le premier triangle et le symétrique du second présenteront la même disposition : ils seront donc égaux en vertu des données; par suite, les triangles proposés seront symétriques.

Scolie.

815. Un trièdre, dont le sommet est placé au centre de deux sphères concentriques, détermine évidemment sur ces sphères deux triangles sphériques dont les angles sont respectivement égaux et les côtés proportionnels (296). Deux triangles sphériques de cette nature sont dits *semblables*.

THÉORÈME.

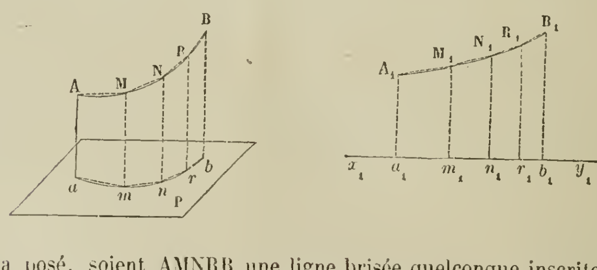
816. *Le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface de la sphère est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces deux points.*

1° Il faut, avant tout, définir *la longueur d'un arc de courbe gauche*, c'est-à-dire dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan. Cette longueur se définit comme celle d'un arc de courbe plane. *C'est la limite du périmètre d'une ligne brisée qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle on fait tendre vers zéro les divers côtés de la ligne brisée.

Soient (*fig.* 441) AB un arc de courbe gauche, ab sa projection orthogonale sur un plan quelconque P, M un point quelconque de AB et m la projection de ce point. Dans un plan pris à volonté, menons une droite indéfinie x_1y_1 (*fig.* 442) et prenons sur cette droite, à partir d'un point a_1, une longueur a_1m_1 égale à la longueur de l'arc am; puis, au point m_1, élevons sur x_1y_1 la perpendiculaire m_1M_1 égale à la projetante Mm. A tout point M de la courbe AB répondra ainsi un point M_1 et, lorsque le point M décrira l'arc AB, le point M_1 décrira un arc de courbe plane A_1B_1, dont nous désignerons la longueur par l.

Fig. 441. Fig. 442.



Cela posé, soient AMNRB une ligne brisée quelconque inscrite dans l'arc AB et $amnrb$, $A_1M_1N_1R_1B_1$ les lignes brisées correspondantes inscrites dans la projection ab et dans la ligne plane A_1B_1. La valeur du rapport

$$(1) \qquad \frac{AM + MN + NR + RB}{A_1M_1 + M_1N_1 + N_1R_1 + R_1B_1}$$

est comprise entre les valeurs de deux des rapports

$$(2) \qquad \frac{AM}{A_1M_1}, \quad \frac{MN}{M_1N_1}, \quad \frac{NR}{N_1R_1}, \quad \frac{RB}{R_1B_1}.$$

Par suite, si l'on peut prouver que chacun de ces rapports a l'unité pour limite, il en sera de même du rapport (1); et, comme le dénominateur de ce rapport a pour limite la quantité bien définie l, quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés de la ligne brisée AMNRB tendent vers zéro (291), son numérateur aura aussi l pour limite, quelle que soit cette loi.

Prenons donc l'un quelconque des rapports (2), $\frac{MN}{M_1N_1}$ par exemple. Désignons par δ la différence $Nn - Mm$, ou son égale $N_1n_1 - M_1m_1$. Le carré du rapport considéré aura pour expression

$$\frac{\overline{mn}^2 + \delta^2}{\overline{m_1n_1}^2 + \delta^2}.$$

La valeur de ce carré est donc comprise entre

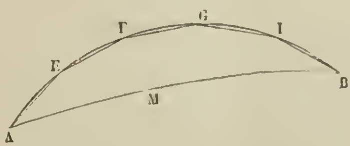
$$\left(\frac{mn}{m_1n_1}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\delta^2}{\delta^2} \text{ ou } 1.$$

Mais, m_1n_1 étant la longueur de l'arc de courbe plane dont mn est la corde, le rapport $\frac{mn}{m_1n_1}$ a l'unité pour limite (292) quand m_1n_1 tend vers zéro. La limite de $\frac{MN}{M_1N_1}$ est donc égale à 1.

2° *La longueur d'un arc de courbe sphérique est égale à la limite du périmètre d'une ligne brisée sphérique qui est inscrite dans cet arc et dont les côtés tendent vers zéro.*

En effet, soient AGB (*fig.* 443) un arc de courbe quelconque

Fig. 443.



tracé sur la sphère, et AEFGIB une ligne brisée sphérique inscrite dans cet arc, c'est-à-dire une ligne formée de portions d'arcs de grands cercles, ayant ses extrémités en A et en B et ses sommets intermédiaires situés sur l'arc de courbe AGB.

Si les arcs de grands cercles, dont la longueur de la ligne brisée sphérique est la somme, tendent séparément vers zéro, suivant une loi d'ailleurs quelconque, le rapport de chacun de ces arcs à sa corde aura l'unité pour limite. Il en sera donc de même du rapport de la longueur de la ligne brisée à la somme des cordes. Et, comme (1°) la somme des cordes a pour limite la longueur de l'arc de courbe AGB, on voit que la longueur de la ligne brisée sphérique inscrite dans l'arc de courbe quelconque AGB a aussi pour limite la longueur de cet arc.

3° Il est maintenant très-facile de trouver le plus court chemin entre deux points A et B sur la surface de la sphère (*fig.* 443).

Soient AMB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui unit les points A et B, et AGB une courbe sphérique quelconque tracée entre ces deux points. AEFGIB étant une portion de polygone sphérique inscrite dans cette courbe, on aura (803)

$$\text{AMB} < \text{AE} + \text{EF} + \text{FG} + \text{GI} + \text{IB}.$$

Or, si l'on fait tendre vers zéro les côtés du polygone inscrit, le second membre a pour limite (2°) la longueur de l'arc de courbe AGB. Donc l'arc de grand cercle AMB est moindre que toute autre courbe sphérique allant de A en B : c'est le plus court chemin du point A au point B sur la sphère.

D'après cela, on appelle *distance sphérique* de deux points A et B d'une sphère la longueur de l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui unit ces deux points.

THÉORÈME.

817. *Pour qu'un grand cercle soit perpendiculaire à un petit cercle* AMB, *il faut et il suffit que le grand cercle passe par les pôles* P *et* P′ *du petit cercle* (*fig.* 426).

En d'autres termes, si l'on désigne par O le centre de la sphère et, respectivement, par MS et par MT les tangentes au grand cercle et au petit cercle au point commun M, pour que l'angle SMT soit droit, il faut et il suffit que les plans OMS, MPP′ coïncident.

En effet, le plan MPP′ est perpendiculaire à MT, puisqu'il contient deux droites OM et PP′ qui sont à angle droit sur MT. Donc, si l'angle SMT est droit, MS est dans le plan MPP′ qui, par suite, coïncide avec le plan OMS. Inversement, si les plans OMS, MPP′ coïncident, la droite MS contenue dans le plan MPP′ est à angle droit sur la perpendiculaire MT à ce plan.

Corollaires.

818. *Par un point* O *de la sphère, on peut mener un grand cercle perpendiculaire à un cercle donné* AB *et l'on ne peut en mener qu'un :* c'est le grand cercle OPI′P′I qui passe par le point O et par les pôles P et P′ du cercle AB (*fig.* 444).

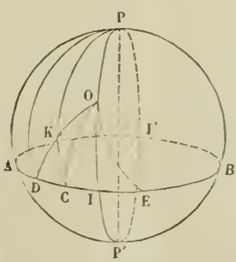
Il y aurait toutefois indétermination si le point O coïncidait avec l'un des pôles P et P′.

En laissant de côté ce cas singulier, on voit que, du point O, on peut mener deux *arcs* de grand cercle, OI et OPI′, normaux à un cercle donné AB.

THÉORÈME.

819. *Si, d'un point* O *d'une sphère, on mène, sur un cercle* AB, *le plus petit*, OI, *des deux arcs de grand cercle normaux et plusieurs arcs de grand cercle obliques* OC, OD, OE (*fig.* 444) :

Fig. 444.



1° *L'arc perpendiculaire* OI *est moindre que tout arc oblique* OC ;

2° *Deux arcs obliques*, OC *et* OE, *dont les pieds* C *et* E *sont équidistants du pied* I *de l'arc normal, sont égaux ;*

3° *De deux arcs obliques*, OC *et* OD, *ou* OE *et* OD, *celui dont le pied s'écarte le plus du pied* I *de l'arc normal est le plus long.*

En effet, le cercle AB divise la sphère en deux calottes dont l'une contient le point O; soit P le pôle de AB qui est situé dans cette calotte : menons les arcs de grand cercle PC, PD, et désignons par K l'intersection des arcs OD et PC.

1° Dans le triangle sphérique POC, on a

$$PC - PO < OC,$$

c'est-à-dire

$$PI - PO \quad \text{ou} \quad OI < OC.$$

2° Les points C et E étant symétriques par rapport au plan du grand cercle PIP′, les cordes OC et OE sont symétriques par rapport au même plan et, par suite, égales entre elles; donc les arcs de même rayon, OC et OE, qu'elles sous-tendent, sont égaux.

3° Les triangles sphériques OKC, PKD donnent

$$OC < OK + KC, \quad PD < PK + KD,$$

d'où, en ajoutant,

$$OC + PD < OD + PC$$

et, enfin, à cause de $PD = PC$,

$$OC < OD.$$

Corollaires.

820. Si le point C décrit le cercle AB en partant du point I, l'arc de grand cercle OC, d'abord égal à OI, croît, devient égal à OPI′, puis décroît jusqu'à la valeur primitive OI. Parmi les chemins qui conduisent du point O au cercle AB, le plus court est donc le plus petit, OI, des deux arcs normaux qu'on peut mener du point O au cercle AB. Aussi, donne-t-on à la longueur de cet arc OI le nom de *distance sphérique* du point O au cercle AB.

Les réciproques des propositions précédentes sont vraies (7).

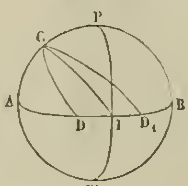
Le lieu géométrique des points de la sphère équidistants de deux points de cette surface est le grand cercle perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui unit les deux points (49).

Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques : 1° *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle oblique égal ;* 2° *lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal* (50).

L'arc de grand cercle bissecteur de l'angle de deux grands cercles est le lieu des points de la sphère équidistants des deux côtés de cet angle (53).

Les raisonnements sont les mêmes qu'en Géométrie plane.

Fig. 445.



821. Voici encore deux remarques importantes :

1° *Dans tout triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés supé-*

rieurs à un quadrant est pair. En effet, soient (*fig.* 445) trois grands cercles APB, AIB, PIP′, perpendiculaires deux à deux; sur AP, prenons un arc AC moindre qu'un quadrant et joignons par un arc de grand cercle CD le point C à un point quelconque D de AIB. Dans le triangle rectangle CAD, le côté AC est aigu, et l'on voit que tant que AD reste aigu, c'est-à-dire moindre que le quadrant AI, CD reste inférieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant; si AD devient obtus comme AD_1, l'arc CD_1 est supérieur à CI, c'est-à-dire à un quadrant. Le triangle ACD a donc ses trois côtés aigus, ou un aigu et deux obtus. On prouverait pareillement que le triangle rectangle CDB, dont le côté BPC est obtus, possède toujours deux côtés obtus et un aigu, car, BD étant obtus, CD est aigu, et, BD_1 étant aigu, CD_1 est obtus.

2° *Dans tout triangle sphérique rectangle, tout angle oblique est de même espèce que le côté opposé*. En effet, l'angle ACI étant droit, l'angle ACD est aigu et l'angle ACD_1 est obtus; or AD est aigu et AD_1 est obtus.

THÉORÈME.

822. *L'arc de grand cercle, tangent à un petit cercle, est perpendiculaire à l'extrémité du rayon sphérique qui aboutit au point de contact.*

Car le rayon sphérique, étant un grand cercle passant par le pôle du petit cercle, est perpendiculaire (817) à ce petit cercle et, par suite, au grand cercle tangent.

Scolie.

823. Les propositions suivantes se démontrent comme en Géométrie plane.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère se coupent, l'arc de grand cercle qui passe par leurs pôles est perpendiculaire sur le milieu de l'arc de grand cercle qui passe par leurs deux points d'intersection.

Lorsque deux petits cercles d'une sphère sont tangents, leur point de contact est situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, et l'arc de grand cercle mené par le point de contact à angle droit sur celui qui unit les pôles est tangent à chacun des deux petits cercles.

On dit qu'un *point* de la sphere est *intérieur* ou *extérieur à un petit cercle*, suivant qu'il est situé dans la plus petite ou dans la plus grande des deux calottes que ce cercle détermine sur la sphère. Sa distance sphérique (816) au pôle du petit cercle est, dans le premier cas, inférieure et, dans le second, supérieure au rayon sphérique (781) de ce cercle.

Étant donnés deux petits cercles d'une sphère, on dit: 1° que les deux cercles sont *extérieurs*, lorsque tout point de chacun d'eux est extérieur à l'autre; 2° que le premier est *intérieur* au second, lorsque tout point du premier est intérieur au second, et alors tout point du second est extérieur au premier.

Cela posé, soient R et r les rayons sphériques de deux petits cercles, et D la distance sphérique de leurs pôles. Le quart d'un grand cercle étant pris pour unité, R et r sont moindres que 1 et D est inférieur à 2. *Si les cercles sont extérieurs,* on a $D > R + r$; *si les cercles sont tangents extérieurement,* on a $D = R + r$; *si les cercles se coupent,* on a à la fois $R + r > D > R - r$; *si le cercle r touche intérieurement le cercle* R, on a $D = R - r$; enfin, *si le cercle r est intérieur au cercle* R, on a $D < R - r$. Les réciproques sont vraies.

THÉORÈME.

824. *Le lieu des sommets des triangles sphériques, qui ont une base commune* DE *et dans lesquels la différence entre l'angle au sommet et la somme des angles à la base est constante en valeur absolue, se compose de deux petits cercles passant par les points* D *et* E *et symétriques par rapport au plan* DEA *du grand cercle* DE.

En effet, C étant un point pris arbitrairement sur la sphère et P étant le pôle du cercle circonscrit au triangle sphérique CDE, désignons respectivement par γ, δ, ε les valeurs des angles à la base dans les triangles isocèles PCD, PDE, PEC. Si le pôle P est à l'intérieur du triangle DEC (comme dans la *fig.* 446), on a

$$D + E - C = (\delta + \gamma) + (\delta + \varepsilon) - (\gamma + \varepsilon) = 2\delta;$$

si P est extérieur au triangle DEC, mais situé du même côté que C par rapport au grand cercle DE, on a

$$D + E - C = (\delta + \gamma) + (\delta - \varepsilon) - (\gamma - \varepsilon) = 2\delta,$$

ou

$$D + E - C = (\delta - \gamma) + (\delta + \varepsilon) - (\varepsilon - \gamma) = 2\delta;$$

enfin, si P et C sont de part et d'autre du grand cercle DE, on a

$$D + E - C = (\gamma - \delta) + (\varepsilon - \delta) - (\gamma + \varepsilon) = -2\delta.$$

Il résulte de là que, si le point C se déplace de façon que la différence $(D + E) - C$ reste constante en valeur absolue, l'angle δ et, par suite, le triangle isocèle DPE restent invariables de grandeur; en sorte que le point P ne peut avoir que deux positions, qui sont symétriques par rapport au plan DEA. Le lieu du sommet C se compose donc du cercle décrit du point P comme pôle avec PD pour rayon et du cercle symétrique par rapport au plan DEA.

Lorsque la différence $(D + E) - C$ est donnée à la fois *en grandeur et en signe,* il faut prendre seulement sur chacun de ces deux cercles l'arc qui est situé par rapport au plan DEA du même côté que son pôle si la différence est positive, et au contraire l'autre arc si la différence est négative.

Quand la différence $(D + E) - C$ est nulle, δ est aussi nul; les deux points P coïncident avec le milieu de DE, et le lieu est le cercle décrit sur DE comme diamètre dans un plan perpendiculaire au plan DEA.

Ce théorème est l'analogue de celui du n° 134 de la *Géométrie plane*. En effet, lorsque, dans un triangle rectiligne CDE, on donne l'angle C, on donne par cela même la différence $D + E - C$.

PROBLÈME.

825. *Tracer sur la sphère un grand cercle passant par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 447).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or la distance de ce pôle P à chacun des points A et B est égale à la corde du quadrant (780); on l'obtiendra donc en décrivant successivement deux arcs de cercles, des points A et B comme pôles, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant.

Fig. 446.

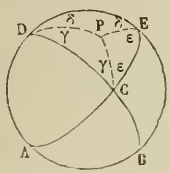


Fig. 447.

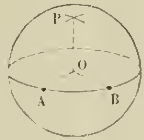
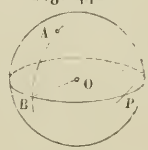


Fig. 448.



PROBLÈME.

826. *Mener par un point donné* A *sur la sphère un arc de grand cercle perpendiculaire à un grand cercle donné* BP (*fig.* 448).

L'inconnue de la question est le pôle du cercle demandé. Or ce pôle P doit se trouver sur le cercle BP (797), et être à une distance du point A égale à la corde du quadrant. On l'obtiendra donc en décrivant, du point A comme pôle, avec une distance polaire égale à la corde du quadrant, un arc de cercle qui rencontre en P le cercle donné BP.

PROBLÈME.

827. *Mener un arc de grand cercle perpendiculaire sur un arc de grand cercle donné* AB, *en son milieu ;* ou, *diviser un arc de grand cercle* AB *en deux parties égales* (*fig.* 449).

Il suffit de décrire des points A et B comme pôles, avec la même ouverture de compas, deux arcs qui se coupent en C et D; puis, de faire passer un grand cercle par C et D.

Remarquons que ce grand cercle CD divise aussi en deux parties égales tous les arcs de petit cercle dont les extrémités sont A et B.

Fig. 449.

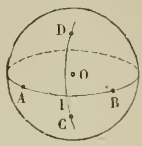
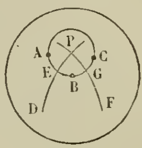


Fig. 450.



PROBLÈME.

828. *Trouver le pôle d'un petit cercle passant par trois points donnés* A, B, C, *sur la sphère* (*fig.* 450).

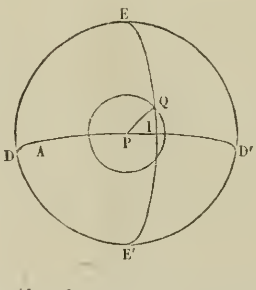
Ce pôle P, étant équidistant de A, B, C, est à l'intersection des arcs de grand cercle élevés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AB et BC (827).

Le pôle P une fois connu, on tracera le petit cercle avec une ouverture de compas égale à PA.

PROBLÈME.

829. *Par un point* A *donné sur la sphère, mener un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné* DED' (*fig.* 451).

Fig. 451.



Soit P celui des deux pôles du grand cercle donné qui se trouve dans le même hémisphère que le point A, et soit α l'arc de grand cercle qui mesure l'angle donné, lequel peut toujours être supposé aigu.

Le pôle Q du cercle inconnu doit se trouver sur le grand cercle EE' dont A est le pôle, puisque le grand cercle demandé passe par A. Le pôle Q doit aussi appartenir au petit cercle décrit du point P comme pôle avec un rayon sphérique égal à α, puisque ce petit cercle est le lieu des pôles des grands cercles qui coupent, sous l'angle donné, le grand cercle DED′ (796).

On décrira donc deux cercles, l'un du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde du quadrant, l'autre du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α. Tout point commun Q à ces deux cercles sera le pôle d'un grand cercle satisfaisant à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, c'est-à-dire pour que les cercles auxiliaires se coupent, il faut et il suffit, puisque l'angle donné est aigu, que l'on ait

$$PQ > PI \quad \text{ou} \quad \alpha > \delta,$$

en désignant par δ la distance sphérique AD du point donné A au grand cercle donné DED′.

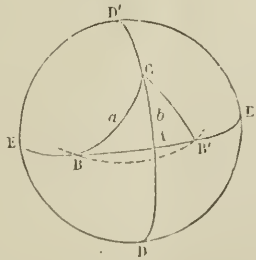
Lorsque le point A est sur le grand cercle donné DED′, le grand cercle EE′ passe par P, et il suffit, pour avoir le point Q, de porter sur le grand cercle EPE′, à partir de P, une ouverture de compas égale à la corde de l'arc α.

PROBLÈME.

830. *Construire un triangle sphérique rectangle, connaissant :* 1° *un côté de l'angle droit et l'hypoténuse ;* 2° *un angle et le côté opposé.*

1° Après avoir tracé (*fig.* 452) deux grands cercles perpendiculaires l'un à l'autre, c'est-à-dire deux grands cercles DAD′, EAE′, tels que le

Fig. 452.

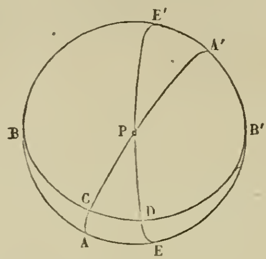


pôle de l'un soit sur l'autre, on portera sur l'un d'eux DD′, à partir du point commun A, un arc AC égal au côté donné b ; puis, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à l'hypoténuse donnée a, on décrira un cercle BB′ qui coupera le grand cercle EE′ en deux points symétriques par rapport à DCD′ ; en menant les arcs de grands cercles CB, CB′, on aura deux triangles sphériques symétriques BAC, B'AC, qui répondent à la question proposée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le nombre a qui mesure l'hypoténuse soit compris entre les nombres b et $2-b$ qui mesurent les distances sphériques minimum et maximum du point C au grand cercle EE'.

2° On commencera par tracer deux grands cercles BAB', BCB' (*fig.* 453)

Fig. 453.



faisant entre eux l'angle donné B; soit P le pôle du premier et EPE' le grand cercle qui est perpendiculaire à la fois sur BAB' et BCB'; le problème se réduit à mener un grand cercle, perpendiculaire à BAB', c'est-à-dire passant par P, et tel que la partie CA, interceptée dans le fuseau BEB'D, soit égale au côté donné b. Or PC sera égal alors à $1-b$. On décrira donc du point P, avec un rayon sphérique égal à $1-b$, un cercle qui coupera BDB' en deux points; C étant l'un quelconque de ces points, le triangle BCA satisfera à la question, ainsi que le triangle B'CA.

La condition de possibilité consiste dans l'inégalité

$$PC > PD \quad \text{ou} \quad 1-b > 1-B,$$

c'est-à-dire

$$b < B.$$

Nous avons supposé l'angle B aigu; s'il était obtus, on aurait

$$PC = b-1, \quad PD = B-1,$$

et la condition de possibilité serait $b > B$.

PROBLÈME.

831. *Construire un triangle sphérique, connaissant trois quelconques de ses six éléments* (angles ou côtés).

Ce problème offre six cas distincts; on peut donner : 1° les trois côtés ou les trois angles; 2° deux côtés et l'angle compris, ou un côté et les deux angles adjacents; 3° deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Dans cette énumération, nous avons réuni chaque fois les deux cas corrélatifs, c'est-à-dire qui se ramènent l'un à l'autre par la considération du triangle polaire. Il n'y a donc que trois cas à traiter directement.

1° *On donne les trois côtés* a, b, c.

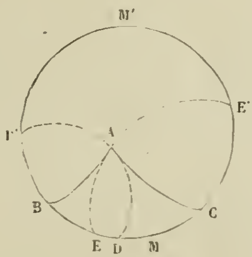
Supposons, pour fixer les idées, $a > b > c$.

Pour que le problème soit possible, il faut (803, 807) que l'on ait à la fois

$$a < b + c, \quad a + b + c < 4.$$

Ces conditions sont suffisantes. En effet, sur un grand cercle MM′ de la sphère, prenons un arc BMC égal à a (*fig.* 454); du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc c, décrivons un

Fig. 454.



arc de cercle DD′ et, du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc b, décrivons un second arc de cercle EE′. Puisque l'arc BC est plus grand que chacun des arcs BD et CE, les points D et E sont situés dans la portion BMC du grand cercle MM′ et, comme BC est moindre que la somme BD + CE, les arcs BD et CE empiètent l'un sur l'autre : le point E tombe donc entre B et D. D'ailleurs, la somme BD′ + BC + CE′ étant moindre qu'une circonférence de grand cercle, le point E′ est situé sur l'arc CM′D′ entre C et D′. Il résulte de là que le point E et le point E′ sont, le premier intérieur, le second extérieur à la calotte qui, déterminée par le cercle DD′, a pour pôle B. L'arc EE′, qui, par rapport à cette calotte, unit un point intérieur à un point extérieur, doit donc couper la base DD′ de cette calotte en un certain point A, lequel est le troisième sommet du triangle demandé ABC.

Les cercles DD′ et EE′ se coupent en un second point A′, sommet d'un second triangle A′BC, symétrique du premier.

Ainsi, *pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois côtés donnés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres et que la somme des côtés soit inférieure à une circonférence de grand cercle.*

Dans les applications, il peut se faire que l'une de ces conditions soit remplie d'elle-même; il ne reste plus alors qu'à considérer l'autre. Par exemple, au n° 823, lorsqu'on cherche les conditions pour que deux petits cercles se coupent, on n'a pas à faire intervenir la relation

$$D + R + r < 4,$$

parce que, d'après la manière dont D, R et r sont définis, cette relation est satisfaite d'elle-même.

Souvent, on ignore l'ordre relatif de grandeur des côtés donnés. Dans ce cas, on exprime que le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, en écrivant que chaque côté est moindre que la somme des deux autres.

Pour qu'on puisse construire un triangle sphérique avec trois angles donnés, il faut et il suffit que le plus petit angle augmenté de deux droits soit plus grand que la somme des deux autres et que la somme des trois angles soit supérieure à deux angles droits, car, en prenant les suppléments de ces angles comme côtés, on peut construire le triangle supplémentaire, d'où l'on déduit ensuite le triangle demandé par le tracé indiqué au n° 809.

2° *On donne deux côtés a et b et l'angle compris* C.

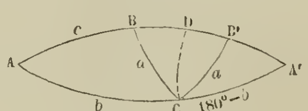
Même solution qu'en *Géométrie plane* (145).

3° *On donne deux côtés a et b et l'angle* A *opposé au côté a* (*fig.* 455).

Construisons sur la sphère deux grands cercles formant un angle égal à A (829). Prenons, à partir du sommet, sur l'un des côtés de cet angle, un arc AC égal à b, et du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde de a, décrivons un arc de cercle; B étant l'intersection de ce cercle avec le second côté de l'angle, le triangle ABC sera le triangle demandé.

La discussion de ce problème exige quelque attention.

Fig. 455.



« Achevons le fuseau A, et du point C abaissons l'arc CD perpendicu-
» laire sur l'autre côté de l'angle. Dans le triangle sphérique rectangle

» ACD, l'arc perpendiculaire CD sera aigu ou obtus suivant que l'angle » donné A sera lui-même aigu ou obtus (821. 2°). Si l'arc CD est aigu, » il sera le plus court de tous les arcs qu'on pourrait mener du point C » dans le fuseau aux divers points de l'arc ABA′, et les arcs obliques aug- » menteront en s'éloignant du pied de l'arc perpendiculaire; si l'arc CD » est obtus, il sera au contraire le plus grand des arcs menés du point C, » et les arcs obliques augmenteront en se rapprochant du pied de la per- » pendiculaire (819, 820).

» Cela posé, *pour que le triangle proposé soit possible, il faudra d'abord » que le côté opposé a soit au moins égal à l'arc perpendiculaire, si » l'angle donné* A *est aigu; ou plus petit, si l'angle donné* A *est obtus.* » Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite lorsque » l'angle donné A et le côté opposé a aussi donné sont de nature différente.

» Je dis maintenant que :

» A *et a étant de nature différente, le problème, s'il est possible, n'a » qu'une solution;*

» A *et a étant de même nature, le problème, s'il est possible, a une ou » deux solutions.*

» En effet, soient A *aigu et a obtus*, par exemple. Si l'on peut tracer » dans le fuseau, par le point C, une oblique CB égale au côté a, elle ne » pourra se trouver évidemment que du côté de celle des obliques ex- » trêmes b ou $180° - b$ qui sera de même nature que a; ainsi le problème » ne peut avoir qu'une solution. *Cette solution existera* pour $a <$ celui » des arcs b ou $180° - b$ de même nature; *le triangle sera impossible* » pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180° - b$ de même nature.

» Si l'on supposait A *obtus et a aigu*, on arriverait aux mêmes conclu- » sions; seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc per- » pendiculaire CD serait obtus.

» Soient A *et a aigus*. L'arc perpendiculaire CD étant alors aussi aigu, » on voit qu'il pourra exister dans le fuseau une oblique CB′ égale à a du » côté de celui des arcs b ou $180° - b$ qui sera aigu, et, *a fortiori*, qu'il en » existera alors une autre CB du côté de celui des deux arcs b ou $180° - b$ » qui sera obtus. Ainsi le problème pourra avoir deux solutions. *Ces » deux solutions existeront* pour $a <$ celui des arcs b ou $180° - b$ de » même nature; *une de ces deux solutions ne sera plus possible* pour a au » moins égal à celui des arcs b ou $180° - b$ de même nature. *Le triangle » sera impossible* pour $a <$ l'arc perpendiculaire CD.

» Si l'on supposait A et *a obtus*, on arriverait aux mêmes conclusions; » seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendicu- » laire CD serait obtus [1]. »

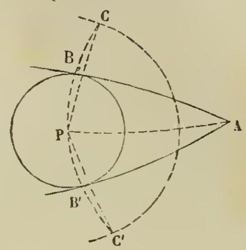
---

[1] LENTHÉRIC, *Nouvelles Annales*, t. II, 1re série.

PROBLÈME.

832. *Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné* (*fig.* 456).

Fig. 456.



Si le point donné est sur le cercle, il suffit d'élever par ce point un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon sphérique correspondant (822).

Supposons, en second lieu, que le point donné A soit extérieur au petit cercle donné, c'est-à-dire soit situé dans la plus grande des deux calottes sphériques séparées par ce petit cercle. Considérons le problème comme résolu; nommons P le pôle du petit cercle donné, B le point de contact de l'arc BA, et prolongeons le rayon sphérique PB d'une quantité BC = PB. Le point C se trouve d'abord sur un cercle décrit du point P comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde d'un arc de grand cercle double du rayon sphérique r du petit cercle. Il se trouve en outre sur un second cercle décrit du point A comme pôle avec une ouverture de compas égale à la corde de l'arc PA = D; car, BA étant perpendiculaire sur le milieu de PBC, le point A est équidistant de P et de C.

Le point C une fois obtenu à l'aide de ces deux cercles auxiliaires, on mènera l'arc de grand cercle PC qui coupera le petit cercle en B, et, en joignant B et A par un arc de grand cercle, on aura l'arc tangent demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le triangle APC, dont on a les trois côtés, existe, c'est-à-dire qu'on ait (831)

$$D < D + 2r, \quad 2r < D + D, \quad D + D + 2r < 4.$$

La première condition est toujours remplie, et les deux autres équivalent à

$$r < D < 2 - r;$$

elles expriment que le point A doit être situé hors de la calotte sphérique PB, et hors de la calotte symétrique.

Les cercles auxiliaires se coupent en deux points C et C′; de là deux solutions AB et AB′.

La construction précédente s'applique au problème correspondant de Géométrie plane; mais elle exige plus de place que celle du n° 157.

Observons enfin que, lorsque deux cercles de la sphère ont deux points communs, les symétriques de ces points par rapport au centre de la sphère appartiennent évidemment à la fois aux deux cercles symétriques des premiers. Si les deux points considérés se confondent, c'est-à-dire si les deux cercles proposés se touchent, les deux cercles symétriques se touchent au point symétrique du premier point de contact. Enfin, si l'un des cercles est un grand cercle, comme il est à lui-même son symétrique, on voit que *tout grand cercle tangent à un petit cercle est aussi tangent au petit cercle symétrique du premier par rapport au centre de la sphère.* Ainsi, dans le problème qui nous occupe, les grands cercles trouvés AB et AB′ touchent non-seulement le cercle donné PB, mais encore son symétrique.

PROBLÈME.

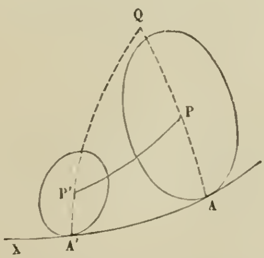
833. *Décrire un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.*

Soient P et P′ les pôles (781) des deux petits cercles, R et R′ leurs rayons sphériques, D la distance sphérique (816) des deux pôles P et P′. Nous supposerons, pour fixer les idées, $R > R'$.

Le grand cercle cherché X peut laisser les deux cercles R et R′ dans un même hémisphère ou dans des hémisphères opposés.

Dans le premier cas (*fig.* 457), nous prendrons pour inconnue le pôle Q

Fig. 457.



du grand cercle X, qui est dans le même hémisphère que les cercles R et R′. Si A et A′ sont les points où le cercle X touche respectivement les cercles R et R′, le pôle Q est à la fois sur les grands cercles PA et PA′; il est donc le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP′, dont on connaît deux sommets P et P′ et les trois côtés

$$PP' = D, \quad PQ = QA - AP = 1 - R, \quad P'Q = QA' - A'P' = 1 - R'.$$

Les conditions de possibilité sont (831)

$$\begin{array}{lcl} D < 1 - R + 1 - R' & \text{ou} & 2 - D > R + R', \\ 1 - R' < D + 1 - R & \text{ou} & D > R - R', \\ 1 - R < D + 1 - R' & \text{ou} & D > R' - R, \\ D + 1 - R + 1 - R' < 4 & \text{ou} & D < 2 + R + R'. \end{array}$$

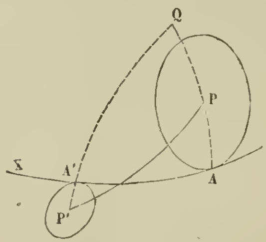
Supprimant les deux dernières relations qui sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque l'on a $D < 2$ et $R' < R$, il ne reste plus que les conditions

$$D > R - R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R + R'.$$

Les principes du n° 823, applicables ici puisque D est moindre que 2 et que $1 - R$ et $1 - R'$ sont moindres que 1, les auraient fournies immédiatement; ils permettent d'ailleurs d'interpréter géométriquement ces deux conditions. La première exprime que la calotte R' n'est pas contenue dans la calotte R. Quant à la seconde, comme $2 - D$ est la distance sphérique de P au symétrique de P', elle signifie que la calotte R et la calotte symétrique de la calotte R' sont extérieures l'une à l'autre.

Dans le second cas (*fig.* 458), on voit, d'une manière analogue, que

Fig. 458.



le pôle Q du grand cercle X qui se trouve dans le même hémisphère que le cercle R est le troisième sommet d'un triangle sphérique QPP', dont on a les deux sommets P et P' et les longueurs D, $1 - R$, $1 + R'$, des trois côtés. Les conditions de possibilité sont

$$D > R + R' \quad \text{et} \quad 2 - D > R - R'.$$

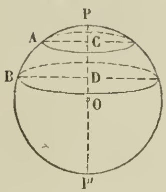
Elles expriment que les calottes R et R' sont extérieures l'une à l'autre et que la calotte R ne contient pas la calotte symétrique de la calotte R'.

§ V. — AIRE DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

834. On appelle *zone* la portion de la surface sphérique comprise entre deux cercles dont les plans sont parallèles. Ces cercles sont les *bases* de la zone et la distance de leurs plans est sa *hauteur*. Ainsi, tandis que la demi-circonférence PABP′ engendre une sphère en tournant autour du diamètre PP′ (*fig.* 459), l'arc AB décrit une zone dont les bases sont les

Fig. 459.



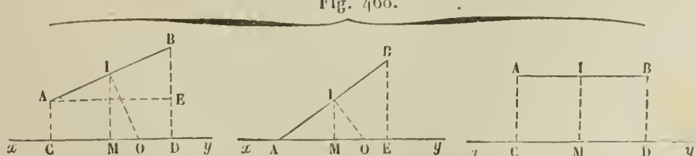
cercles AC et BD décrits par les points A et B, et dont la hauteur est la projection CD de l'arc AB sur l'axe PP′.

Si l'un des plans est tangent à la sphère, l'un des cercles considérés se réduit à un point, et la zone, qui n'a plus alors qu'une base, devient une *calotte sphérique*. Ainsi l'arc PA, en tournant autour de PP′, engendre une calotte sphérique dont le cercle AC est la base et dont PC est la hauteur.

THÉORÈME.

835. *Lorsqu'une droite* AB *tourne autour d'un axe xy situé dans son plan, l'aire qu'elle engendre a pour mesure le produit de la projection* CD *de cette droite sur l'axe par la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* IO, *élevée au milieu* I *de la droite* AB *jusqu'à la rencontre de l'axe xy* (*fig.* 460).

Fig. 460.



Nous supposerons que la droite AB est située tout entière d'un même côté de l'axe xy. Quelles que soient alors les positions relatives de AB et de xy, l'aire engendré par AB a pour mesure (761)

$$(1) \qquad 2\pi . \mathrm{IM} . \mathrm{AB},$$

IM étant la perpendiculaire abaissée du point I sur xy.

Si la droite AB est parallèle à xy, le théorème proposé est tout démontré; sinon, il faut transformer l'expression (1). A cet effet, menons AE parallèle à xy jusqu'à la rencontre de la projetante BD; les triangles AEB, IMO sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, et l'on a

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{IO}}{\mathrm{AB}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{IM} . \mathrm{AB} = \mathrm{IO} . \mathrm{AE}.$$

L'expression (1) peut donc être remplacée par

$$2\pi . \mathrm{IO} . \mathrm{AE} \quad \text{ou} \quad 2\pi . \mathrm{IO} . \mathrm{CD},$$

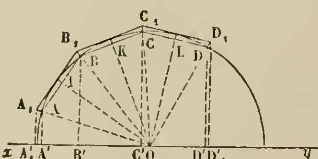
ce qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas où le point A est situé sur l'axe xy, le raisonnement subsiste; seulement la droite AE se confond avec l'axe.

THÉORÈME.

836. *L'aire engendrée par une ligne brisée régulière* ABCD, *tournant autour d'un diamètre* xy *qui ne la traverse pas, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne brisée par la projection* A′ D′ *de cette ligne sur l'axe* xy (*fig.* 461).

Fig. 461.



Soient O le centre et OI = OK = OL l'apothème de la ligne brisée régulière ABCD; si l'on désigne par aire AB l'aire engendrée par la rotation de AB autour de xy, on a, d'après le théorème précédent,

$$\text{aire } AB = A'B'.\text{circ}.OI,$$

et de même

$$\text{aire } AC = B'C'.\text{circ}.OI,$$

$$\text{aire } CD = C'D'.\text{circ}.OI,$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{aire } ABCD = (A'B' + B'C' + C'D').\text{circ}.OI = \text{circ}.OI.A'D'.$$

Corollaires.

837. Considérons un arc de cercle AD et une ligne brisée régulière inscrite ABCD; tandis que l'arc AD tourne autour du diamètre xOy, la ligne brisée engendre une aire qui tend vers une limite indépendante de la loi suivant laquelle ses côtés tendent vers zéro. En effet, dans le produit $A'D'.\text{circ}.OI$ qui mesure cette aire, le premier facteur $A'D'$ est invariable et le second circ.OI a toujours pour limite circ.OA. C'est cette limite de l'aire engendrée par la ligne brisée régulière inscrite qu'on appelle *aire de la zone* décrite par l'arc AD.

On voit sans peine que la ligne brisée $A_1B_1C_1D_1$ circonscrite au même arc et semblable à la ligne inscrite ABCD engendre une aire qui tend vers la même limite. En effet, on a

$$\frac{\text{aire } A_1B_1C_1D_1}{\text{aire } ABCD} = \frac{A'_1D'_1.\text{circ}.OA}{A'D'.\text{circ}.OI}.$$

Or le rapport $\dfrac{\text{circ}.OA}{\text{circ}.OI} = \dfrac{OA}{OI}$ tend vers l'unité lorsque le nombre des côtés de la ligne brisée ABCD croît indéfiniment, et il en est de même du rapport $\dfrac{A'_1D'_1}{A'D'}$ qui, en vertu de la similitude des polygones $A'ABCDD'$, $A'_1A_1B_1C_1D_1D'_1$, est aussi égal à $\dfrac{OA}{OI}$.

THÉORÈME.

838. *L'aire d'une zone sphérique a pour mesure le produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.*

Par définition, l'aire de la zone est la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur de la zone, lorsque le nombre des côtés de cette ligne brisée croît indéfiniment. D'après cela, soient S l'aire de la zone, H sa hauteur, et R le rayon de l'arc générateur, c'est-à-dire le rayon de la sphère à laquelle la zone appartient; soient de même s l'aire engendrée par une ligne brisée régulière inscrite dans l'arc générateur, et a l'apothème de cette ligne brisée. On a (836), puisque la projection de la ligne brisée sur l'axe est aussi égale à H,

$$s = \mathrm{H}.2\pi a.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, H reste invariable, s tend vers S, et a vers R. On a donc, à la limite,

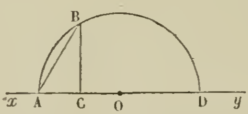
$$\mathrm{S} = \mathrm{H}.2\pi\mathrm{R}.$$

Corollaires.

839. Dans des sphères égales, deux zones sont entre elles comme leurs hauteurs et, par suite, deux zones de même hauteur sont équivalentes.

840. Considérons la calotte sphérique engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre AD (*fig.* 462). En vertu du théo-

Fig. 462.



rème précédent, l'aire de cette calotte a pour mesure

$$2\pi.\mathrm{AO}.\mathrm{AC} = \pi.\mathrm{AD}.\mathrm{AC} \quad \text{ou (223)} \quad \pi.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Donc, *une calotte sphérique quelconque équivaut au cercle dont le rayon est égal à la corde de l'arc générateur de la calotte.*

THÉORÈME.

841. *L'aire de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence d'un grand cercle.*

Car cette aire peut être considérée comme celle d'une zone dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère. D'ailleurs, le raisonnement fait pour la zone s'applique textuellement à ce cas particulier.

COROLLAIRES.

842. S étant l'aire d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$S = 2R . 2\pi R = 4\pi R^2 = \pi D^2.$$

L'aire de la sphère est donc *égale à quatre grands cercles.* On peut dire encore qu'elle équivaut à l'aire d'un cercle dont le rayon serait égal au diamètre de la sphère.

Les aires des deux sphères sont entre elles comme les carrés des rayons ou des diamètres.

843. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver, à moins d'un myriamètre carré, la surface du globe terrestre.*

On sait, par la définition du mètre, que la circonférence d'un grand cercle du globe renferme 40 millions de mètres ou 4000 myriamètres; son diamètre est donc égal à $\frac{4000}{\pi}$ et, par suite (842), l'aire du globe est

$$\pi \left(\frac{4000}{\pi}\right)^2 = \frac{16\,000\,000}{\pi} = 5\,092\,958^{\text{Mmq}},$$

à 1 myriamètre carré près.

2° *L'aire d'une sphère est* 1 *mètre carré : quel est son rayon?* La formule

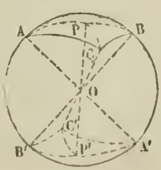
$$4\pi R^2 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0^{\text{m}},282,$$

à 1 millimètre près.

THÉORÈME.

844. *Deux triangles sphériques symétriques* ABC, A'B'C' *sont équivalents* (*fig.* 463).

Fig. 463.

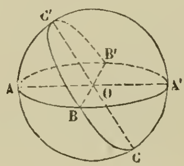


Prenons le pôle P du petit cercle qui passerait par les points

A, B, C, et menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC, qui sont égaux entre eux (780). Traçons le diamètre POP′ et les arcs de grand cercle P′A′, P′B′, P′C′. L'égalité des angles POA, P′OA′ entraîne celle des arcs PA et P′A′; on voit de même que PB = P′B′, et PC = P′C′; par suite, comme PA = PB = PC, il faut qu'on ait P′A′ = P′B′ = P′C′. D'après cela, les triangles PAB, P′A′B′ sont symétriques et isocèles; ils sont donc superposables. De même, les triangles PAC, P′A′C′ sont égaux entre eux, ainsi que les triangles PBC, P′B′C′. Donc, enfin, le triangle ABC, somme de PAB, PAC et PBC, est équivalent au triangle A′B′C′, somme de P′A′B′, P′A′C′ et P′B′C′.

Si le pôle P tombait à l'extérieur du triangle ABC, ce triangle ne serait plus une somme, mais une différence.

Fig. 464.



Corollaire.

845. *Si deux arcs de grand cercle* AC′A′, BC′B′ *se coupent dans un même hémisphère* C′ABA′B′, *la somme des triangles opposés* AC′B, A′C′B′ *est égale au fuseau dont l'angle est* AC′B (*fig.* 464).

On nomme *fuseau* la portion de surface sphérique comprise entre deux demi-grands cercles CAC′, CBC′, qui se terminent à un diamètre commun COC′; l'angle ACB ou AC′B de ces deux arcs est dit l'*angle du fuseau*.

Cela étant, le fuseau compris entre CAC′ et CBC′ se compose du triangle ABC′ et du triangle ABC; et, comme le triangle A′B′C′ est évidemment le symétrique de ABC et que deux triangles symétriques sont équivalents, on voit que le fuseau dont l'angle est C′ est égal à la somme des triangles opposés AC′B, A′C′B′.

THÉORÈME.

846. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, un fuseau a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle.*

On voit immédiatement que, *sur la même sphère ou sur des sphères égales : 1° deux fuseaux de même angle sont superposables; 2° un fuseau est égal à la somme de deux autres, si son angle est égal à la somme des angles de ces deux autres.*

Il résulte de là (1re Partie, Note I) que *deux fuseaux quelconques d'une même sphère sont entre eux comme leurs angles.*

Cela étant, soient A et A′ les nombres qui mesurent les angles de deux fuseaux d'une même sphère, l'angle droit étant pris pour unité; et soient F et F′ les nombres qui mesurent ces fuseaux, le triangle trirectangle (813) étant pris pour unité d'aire; on aura

$$\frac{F}{F'} = \frac{A}{A'}.$$

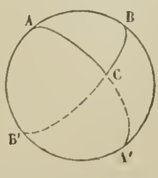
Prenons $A' = 1$; le fuseau correspondant, ayant son angle droit, sera égal au quart de la sphère, c'est-à-dire au double du triangle trirectangle : on aura donc $F' = 2$ et, par suite,

$$\frac{F}{2} = \frac{A}{1}, \quad \text{d'où} \quad F = 2A.$$

THÉORÈME.

847. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle trirectangle pour unité d'aire, l'aire d'un triangle sphérique a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de 2.*

Fig. 465.



Soit (*fig.* 465) ABC le triangle proposé; achevons le grand cercle AB, et prolongeons les côtés AC, BC, jusqu'aux points A′ et B′ où ils rencontrent ce grand cercle. On aura évidemment

$$ABC + BCA' = \text{fus. } A,$$

$$ABC + ACB' = \text{fus. } B,$$

et (845)

$$ABC + B'CA' = \text{fus. } C.$$

La somme des premiers membres de ces trois égalités se compose de la demi-sphère et de deux fois l'aire du triangle ABC. Comme, dans le système d'unités adopté, la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, si l'on désigne par S, A, B, C les nombres qui mesurent l'aire et les angles du triangle, on aura (846)

$$4 + 2S = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

(1) $$S = A + B + C - 2.$$

Scolies.

848. Soient R le rayon de la sphère évalué en mètres, σ l'aire du triangle en mètres carrés, et α, β, γ les angles de ce triangle évalués en degrés; on aura, en observant que le triangle trirectangle est égal au huitième $\frac{1}{2}\pi R^2$ de la sphère,

$$A = \frac{\alpha}{90}, \quad B = \frac{\beta}{90}, \quad C = \frac{\gamma}{90}, \quad S = \frac{\sigma}{\frac{1}{2}\pi R^2},$$

et, par suite, en vertu de la relation (1),

(2) $$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{180}\pi R^2.$$

Voici deux exemples :

1° *Quelle est, sur la sphère dont l'aire est égale à* 1 *mètre carré, l'aire du triangle dont les angles sont de* 61 *degrés,* 109 *degrés,* 127 *degrés?*

Le rapport de ce triangle au triangle trirectangle est, d'après la formule (1),

$$\frac{61 + 109 + 127 - 180}{90} = \frac{117}{90} = 1,3;$$

et, comme le triangle trirectangle est ici le huitième du mètre carré, l'aire du triangle donné est

$$\frac{1}{8} \times 1,3 = 0^{mq},1625.$$

2° *Quelle est, sur la sphère dont le rayon est* $2^m,4$, *l'aire du triangle sphérique dont les angles sont de* $51°37'$, $73°11'$, $87°43'$?

La formule (2) donne, en réduisant en minutes,

$$\sigma = \frac{(51 + 73 + 87 - 180)\,60 + 37 + 11 + 43}{180.60}\,\pi(2,4)^2$$
$$= 1,040533 \times \pi = 3^{mq},2689,$$

à 1 centimètre carré près.

849. En analyse, on évalue généralement les angles en parties du rayon (297. 3°); alors l'angle droit répond à $\frac{\pi}{2}$, et, si l'on désigne par A', B', C' les angles du triangle évalués en parties du rayon, on a

$$A = \frac{A'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2A'}{\pi}, \quad B = \frac{2B'}{\pi}, \quad C = \frac{2C'}{\pi},$$

et, par suite,

$$A + B + C - 2 = \frac{2}{\pi}(A' + B' + C' - \pi).$$

D'ailleurs, le rayon de la sphère étant 1, l'aire du triangle trirectangle est alors mesurée par $\frac{\pi}{2}$, de sorte qu'on a

$$S = \frac{S'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2S'}{\pi},$$

S' étant le nombre qui mesure l'aire du triangle dans ce nouveau système d'unités. On a donc enfin (847), à cause de la formule (1),

$$S' = A' + B' + C' - \pi.$$

On donne à ce nombre abstrait $A' + B' + C' - \pi$ le nom d'*excès sphérique* du triangle.

THÉORÈME.

850. *Si l'on prend l'angle droit pour unité d'angle et le triangle tri-rectangle pour unité d'aire, l'aire d'un polygone sphérique de n côtés a pour mesure la somme des nombres qui mesurent ses angles, diminuée de* $2(n-2)$.

On arrive à ce résultat en décomposant le polygone en triangles à l'aide d'arcs de grand cercle diagonaux issus d'un même sommet, et en appliquant la formule (1) du n° 847 aux $(n-2)$ triangles ainsi obtenus.

SCOLIE.

851. Soient, dans le système d'unités adopté, S, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les mesures de l'aire et des angles d'un polygone sphérique convexe de n côtés ; on aura

$$S = (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) - 2(n-2).$$

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les nombres qui mesurent les côtés du polygone polaire (811), en prenant pour unité de longueur le quart de la circonférence d'un grand cercle ; on aura

$$A_1 = 2 - a_1, \quad A_2 = 2 - a_2, \quad \ldots, \quad A_n = 2 - a_n,$$

et, par suite,

$$S = [2n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] - 2(n-2) = 4 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n),$$

ou enfin, en désignant par p le périmètre du polygone polaire,

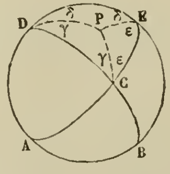
$$S = 4 - p.$$

Ainsi, l'*aire d'un polygone sphérique convexe est égale à* 4 *moins le périmètre du polygone polaire ;* cette relation mérite d'être remarquée.

THÉORÈME.

852. *Le lieu géométrique des sommets* C *des triangles sphériques, de même base* AB *et de même aire* S, *se compose de deux arcs de petits cercles symétriques par rapport au plan du grand cercle* AB *et passant par les points* E *et* D *diamétralement opposés aux extrémités de la base* AB (*fig.* 466).

Fig. 466.



En effet, en désignant par A, B, C les angles d'un triangle quelconque

ABC satisfaisant à la question et par D, E, C les angles du triangle correspondant DCE, on a $A = 2 - E$, $B = 2 - D$, et par suite

$$S = (2 - E) + (2 - D) + C - 2,$$

d'où

$$D + E - C = 2 - S;$$

on tombe ainsi sur le lieu étudié au n° 824, dans le cas où la différence $(D + E) - C$ est donnée en grandeur et en signe; ce qui démontre l'énoncé.

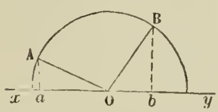
Ce théorème est dû à Lexell (*Acta Petrop.*, 1781).

§ VI. — VOLUME DE LA SPHÈRE.

DÉFINITIONS.

853. Pendant que la demi-circonférence $xABy$ engendre la surface sphérique en tournant autour du diamètre xy, l'arc AB engendre une zone, et les rayons OA et OB engendrent

Fig. 467.



les surfaces latérales de deux cônes de révolution. La portion du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales de ces deux cônes et la zone AB est le *secteur sphérique* correspondant au secteur circulaire AOB. Un secteur sphérique est donc le volume engendré par la rotation d'un secteur circulaire autour d'un axe passant par son sommet, situé dans son plan et extérieur à sa surface; la zone engendrée par l'arc du secteur circulaire est la *base* du secteur sphérique.

854. On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants parallèles. Les cercles déterminés par ces plans parallèles sont les *bases* du segment sphérique, et leur distance en est la *hauteur*.

Lorsqu'un des plans parallèles devient tangent à la sphère, le cercle correspondant se réduit à son pôle, et l'on a un segment sphérique à *une base*.

Si l'on ajoute (*fig.* 467) au secteur sphérique AOB les deux cônes AOa, BOb, on obtient le segment sphérique compris entre les deux plans parallèles déterminés par la rotation des perpendiculaires Aa, Bb, autour de xy. Ce segment sphérique correspond donc à la rotation du trapèze mixtiligne $aABb$ autour du même axe.

THÉORÈME.

855. *Lorsqu'un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par l'un de ses sommets sans traverser sa surface, il engendre un volume qui a pour mesure le produit de l'aire que décrit le côté opposé au sommet fixe, par le tiers de la hauteur relative à ce côté.*

Soit le triangle ABC ayant son sommet A sur l'axe xy et AE pour hauteur relative à ce sommet : nous distinguerons trois cas.

Fig. 468.

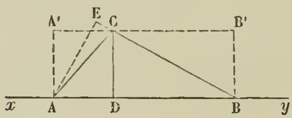
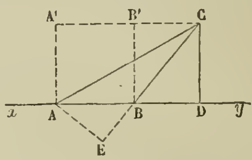


Fig. 469.



1° Supposons l'un des côtés AB du triangle ABC confondu avec l'axe xy. Suivant que la hauteur CD qui correspond au côté AB tombe à l'intérieur (*fig.* 468) ou à l'extérieur (*fig.* 469) du triangle ABC, le volume engendré par ce triangle est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ACD, BCD.

En même temps, le cylindre engendré par la rotation du rectangle ABB'A', qui a même base et même hauteur que le triangle donné ABC, est la somme (*fig.* 468) ou la différence (*fig.* 469) des cylindres engendrés par la rotation des rectangles ADCA', BDCB', dont le rectangle ABB'A' est lui-même la somme ou la différence. D'ailleurs, le cône ACD est le tiers du cylindre ADCA', et le cône BCD, le tiers du cylindre BDCB' (764). Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est le tiers du cylindre ABB'A', et l'on a

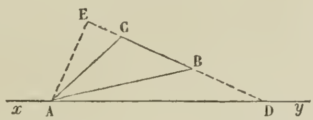
$$\text{vol.ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2 \cdot AB \quad \text{ou} \quad \text{vol.ABC} = \frac{1}{3}\pi CD . BC . AE,$$

puisque les produits CD.AB et BC.AE représentent tous deux le double de l'aire du triangle donné. Or, π.CD.BC exprime (756) l'aire latérale du cône BCD ou l'aire de la surface engendrée par le côté BC dans la rotation du triangle ABC. Par suite,

$$\text{vol.ABC} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

2° Supposons (*fig.* 470) que, le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC prolongé vienne rencontrer l'axe au point D.

Fig. 470.



Le triangle ABC étant la différence des triangles ACD, ABD, le volume qu'il engendre est la différence des volumes engendrés par ces triangles. On a donc (1°)

$$\text{vol. ABC} = (\text{aire DC} - \text{aire DB})\frac{\text{AE}}{3} = \text{aire BC} \cdot \frac{\text{AE}}{3}.$$

3° Supposons enfin que le côté AB du triangle n'ayant plus que le sommet A sur l'axe xy, le côté BC soit parallèle à cet axe.

Le volume engendré par le triangle ABC est la somme (*fig.* 471) ou la différence (*fig.* 472) des volumes engendrés par les triangles ABE, ACE. Or, le volume engendré par le

Fig. 471.

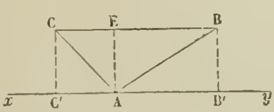
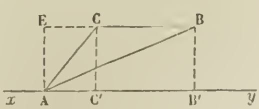


Fig. 472.



triangle ABE est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AB'BE, et le volume engendré par le triangle ACE, les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle AC'CE (764).

Donc, dans l'un et l'autre cas, le volume engendré par le triangle ABC est les deux tiers du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB, somme (*fig.* 471) ou différence (*fig.* 472) des rectangles AB'BE, AC'CE; et l'on a encore

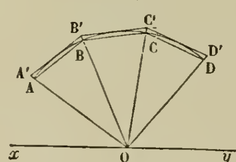
$$\text{vol. ABC} = \frac{2}{3}\pi\,\overline{\text{AE}}^2\cdot\text{BC} = \text{aire BC}\cdot\frac{\text{AE}}{3}.$$

2π. AE.BC exprime en effet l'aire latérale du cylindre engendré par le rectangle B'C'CB ou l'aire de la surface décrite par le côté BC du triangle ABC.

THÉORÈME.

856. *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface a pour mesure le produit de l'aire que décrit la ligne brisée qui lui sert de base, par le tiers de l'apothème de cette ligne brisée.*

Fig. 473.



Soit (*fig.* 473) le secteur polygonal régulier (443) OABCD, tournant autour du diamètre xy. Décomposons ce secteur en triangles, en joignant au centre O les sommets de sa base ABCD, et appelons a l'apothème de cette base. Le volume engendré par le secteur sera la somme des volumes engendrés par les triangles qui le constituent. Or (855)

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB}\cdot\frac{a}{3},$$

$$\text{vol. BOC} = \text{aire BC}\cdot\frac{a}{3},$$

$$\text{vol. COD} = \text{aire CD}\cdot\frac{a}{3}.$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\text{vol. OABCD} = (\text{aire AB} + \text{aire BC} + \text{aire CD}) \cdot \frac{a}{3}$$

ou

$$\text{vol. OABCD} = \text{aire ABCD} \cdot \frac{a}{3}.$$

SCOLIE.

857. Soient (*fig.* 473) AOD un secteur circulaire et OABCD, OA′B′C′D′, deux secteurs polygonaux réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit au secteur circulaire. Si l'on désigne par a et a' les apothèmes des deux secteurs polygonaux, le rapport des volumes engendrés par la rotation de ces secteurs autour de l'axe xy est

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire A'B'C'D'}}.$$

Mais, lorsqu'on fait tendre vers zéro les côtés de la ligne brisée régulière ABCD, suivant une loi d'ailleurs quelconque, les deux facteurs du produit qu'on vient d'écrire tendent l'un et l'autre vers l'unité (291, 837). Donc le rapport des volumes engendrés par les deux secteurs polygonaux a l'unité pour limite et, par suite, il en est de même, *a fortiori*, du rapport du volume du secteur sphérique engendré par le secteur circulaire AOD au volume décrit par chacun des secteurs polygonaux qui le comprennent. Donc enfin :

Le volume d'un secteur sphérique est la limite commune des volumes engendrés par des secteurs polygonaux réguliers semblables, inscrit et circonscrit au secteur circulaire correspondant, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases.

THÉORÈME.

858. *Le volume d'un secteur sphérique a pour mesure le produit de l'aire de la zone qui lui sert de base par le tiers du rayon de la sphère.*

Le volume d'un secteur sphérique est la limite des volumes engendrés par les secteurs polygonaux réguliers inscrits dans le secteur circulaire correspondant, quand on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de leurs bases. D'après cela, soient v le volume engendré par un secteur polygonal régulier inscrit, s l'aire de la surface décrite par sa base, a son apothème; soient de même V le volume du secteur sphérique, S l'aire de la zone qui lui sert de base, R le rayon de la sphère. On a (856)

$$v = s \cdot \frac{a}{3}.$$

Mais, lorsqu'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la base du secteur polygonal, v tend vers V, s vers S et a vers R. On a donc, à la limite,

$$V = S \cdot \frac{R}{3}.$$

Corollaires.

859. Dans des sphères égales, deux secteurs sphériques sont entre eux comme les zones qui leur servent de bases, et, par suite, deux secteurs sphériques dont les bases ont même hauteur sont équivalents.

THÉORÈME.

860. *Le volume de la sphère a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon.*

Car ce volume peut être considéré comme celui d'un secteur sphérique ayant pour secteur circulaire correspondant un demi-cercle ou pour base l'aire de la surface sphérique elle-même. D'ailleurs, le raisonnement fait pour le secteur sphérique s'applique textuellement à ce cas particulier.

Corollaires.

861. V étant le volume d'une sphère de rayon R ou de diamètre D, on a

$$V = 4\pi R^2 \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

862. *Les volumes de deux sphères sont entre eux comme les cubes des rayons ou des diamètres.*

863. Voici deux applications numériques :

1° *Trouver le volume du globe terrestre.*

L'aire du globe est (843), à moins d'un myriamètre carré, 5092958 myriamètres carrés. Son rayon est d'ailleurs $\frac{20\,000\,000^{m}}{\pi}$ ou 6366 kilomètres, à 1 kilomètre près. Le volume du globe terrestre, égal au produit de son aire par le tiers du rayon, sera donc 1081000000 myriamètres cubes, à un million de myriamètres cubes près.

Si l'on prend le rayon du globe terrestre pour unité, le rayon du Soleil est représenté par 108,5. L'aire et le volume du Soleil sont donc environ 11800 fois et 1280000 fois l'aire et le volume de la Terre (842, 862).

2° *Trouver le rayon de la sphère dont le volume est un mètre cube.*

La formule

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1 \quad \text{donne} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0^{m},620,$$

à moins d'un millimètre.

Scolie.

864. *Les volumes de deux polyèdres circonscrits à la même sphère ou à des sphères égales sont entre eux comme les aires de ces mêmes polyèdres.*

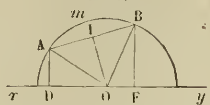
Si l'on décompose, en effet, les polyèdres donnés en pyramides, en prenant pour centre de décomposition le centre de la sphère inscrite, la mesure du volume de chacun d'eux s'obtient en multipliant l'aire de sa surface par le tiers du rayon de la sphère (646).

THÉORÈME.

865. *Le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface équivaut au sixième du cylindre qui a pour rayon la corde du segment et pour hauteur la projection de cette corde sur l'axe.*

Le segment AmB (*fig.* 474) est la différence du secteur circulaire AOB et du triangle isocèle AOB; la portion du volume de la sphère engendrée par la rotation de ce segment sera donc égale à la différence des volumes du secteur sphérique AOB et du triangle tournant AOB.

Fig. 474.



DF étant la projection de AB sur xy et OI la hauteur du triangle AOB, on aura (858, 838, 855, 835)

$$\text{sect. sph. AOB} = \text{zone AB}.\frac{\text{OA}}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OA}}^2.\text{DF},$$

$$\text{vol. AOB} = \text{aire AB}\frac{\text{OI}}{3} = \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2.\text{DF}.$$

Par suite,

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{\text{AO}}^2 - \overline{\text{OI}}^2\right)\text{DF}.$$

Le triangle rectangle OIA donnant

$$\overline{\text{OA}}^2 - \overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{4},$$

il vient, en réduisant,

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF},$$

ce qui vérifie l'énoncé.

THÉORÈME.

866. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment, augmenté de la demi-somme des volumes de deux cylindres ayant pour hauteur commune celle du segment, et pour bases respectives les bases du segment.*

Le trapèze mixtiligne DAmBF (*fig.* 475) engendre un segment sphérique en tournant autour du diamètre xy (854). Ce segment est donc la somme des volumes engendrés par le segment circulaire AmB et le trapèze rectangulaire DABF. On a d'abord (865)

$$\text{vol. A}m\text{B} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{DF}.$$

Le trapèze DABF engendrant un tronc de cône de révolution, on a aussi (766)

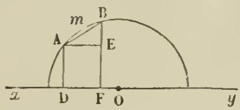
$$\text{vol.DABF} = \frac{1}{3}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 + \text{BF.AD}\right).$$

Par suite,

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{AB}}^2 + 2\overline{\text{BF}}^2 + 2\overline{\text{AD}}^2 + 2\,\text{BF.AD}\right).$$

D'ailleurs, la corde AB est liée à la hauteur DF et aux rayons

Fig. 475.



BF et AD des bases du segment sphérique par la relation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{AE}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + (\text{BF} - \text{AD})^2$$

ou

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 + \overline{\text{BF}}^2 + \overline{\text{AD}}^2 - 2\,\text{BF.AD}.$$

En substituant cette valeur de $\overline{\text{AB}}^2$ et en simplifiant, il vient

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\text{DF}\left(\overline{\text{DF}}^2 + 3\overline{\text{BF}}^2 + 3\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\text{vol. DA}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\left(\pi\,\overline{\text{BF}}^2.\text{DF} + \pi\overline{\text{AD}}^2.\text{DF}\right)$$

de manière à vérifier l'énoncé (861, 746).

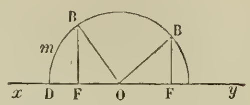
Si le segment considéré n'a qu'une base, c'est-à-dire si (*fig.* 476) le point D vient occuper l'une des extrémités du diamètre xy, on a simplement

$$\text{vol. D}m\text{BF} = \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{DF}}^3 + \frac{1}{2}\pi\,\overline{\text{BF}}^2.\text{DF}.$$

SCOLIE.

867. Quand le segment sphérique n'a qu'une base (*fig.* 476), on peut exprimer son volume V en fonction de sa hauteur

Fig. 476.



$DF = h$ et du rayon R de la sphère. On a d'abord, d'après la formule précédente,

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi \overline{BF}^2 . h.$$

D'ailleurs (223),

$$\overline{BF}^2 = h(2R - h),$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h^2(2R - h)$$

ou, en simplifiant,

$$(1) \qquad V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

On peut trouver directement cette formule, en regardant le segment à une base comme la somme ou la différence du secteur sphérique terminé à la même calotte sphérique et du cône de révolution qui, ayant la même base que le segment, a son sommet au centre de la sphère. Le segment sphérique est la somme ou la différence des deux volumes indiqués, suivant qu'il est plus grand ou plus petit que la demi-sphère.

Dans le second cas (*fig.* 476), on a

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2(R - h);$$

dans le premier (même figure),

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi \overline{BF}^2(h - R).$$

Ces deux formules sont identiques, puisque $\overline{BF}^2$ a toujours la même expression; et, en les simplifiant, on retrouve la formule (1).

THÉORÈME.

868. *Le volume d'une pyramide sphérique a pour mesure le produit de sa base par le tiers du rayon de la sphère.*

Une *pyramide sphérique* est la portion du volume de la sphère comprise entre les faces d'un angle polyèdre dont le sommet est au centre de la sphère; le polygone sphérique correspondant à cet angle polyèdre est la *base* de la pyramide. Deux pyramides sphériques sont dites *symétriques* lorsqu'elles ont pour bases des polygones sphériques symétriques.

On appelle *onglet* la portion du volume de la sphère comprise entre deux demi-grands cercles CAC′, CBC′ (*fig.* 464) : le fuseau C′ACBC′ est la *base* de l'onglet, et son angle est l'*angle* de l'onglet.

On démontre que :

1° *Deux pyramides sphériques triangulaires symétriques sont équivalentes* (844);

2° *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité de volume la pyramide trirectangle qui est le huitième du volume de la sphère, un onglet a pour mesure le double du nombre qui mesure son angle* (846);

3° *Dans le même système d'unités, le volume d'une pyramide sphérique triangulaire a pour mesure le nombre* $A + B + C - 2$, A, B, C *étant les mesures des angles du triangle sphérique qui sert de base à la pyramide* (847).

Il résulte de là que le rapport du volume d'une pyramide sphérique triangulaire à l'aire de sa base est égal au rapport de la pyramide sphérique trirectangle au triangle trirectangle; mais ce dernier rapport est égal à celui du volume de la sphère à son aire, c'est-à-dire au tiers du rayon. Donc le volume de la pyramide sphérique triangulaire est égal au produit de sa base par le tiers du rayon; et ce théorème s'étend à la pyramide sphérique polygonale, en décomposant sa base en triangles.

§ VII. — GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

DÉFINITIONS.

869. Une surface est le lieu des positions successives d'une ligne qui change de position et même de forme, suivant une loi déterminée et continue. Le plus souvent on règle, au moins en partie, le mouvement de cette ligne, qu'on nomme *génératrice*, en l'astreignant à rencontrer sans cesse certaines lignes fixes qu'on appelle *directrices*.

Voici des exemples :

1° Une *surface conique* est le lieu des positions successives d'une droite A_1SA (*fig.* 477) qui passe toujours par un point fixe S et qui s'appuie sur une ligne fixe AMB plane ou gauche. Ici la génératrice est constante de forme, c'est une droite, et l'une des directrices se réduit à un point S qu'on nomme *sommet*. Une surface conique a deux nappes SA_1B_1, SAB, séparées par le sommet.

Fig. 477.

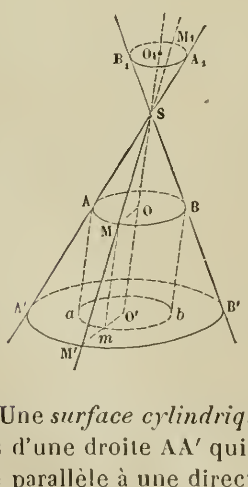
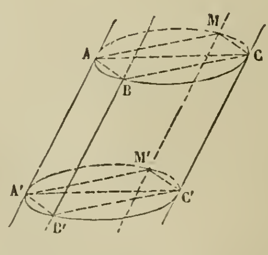


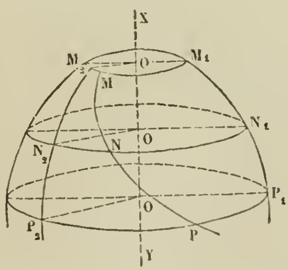
Fig. 478.



2° Une *surface cylindrique* est le lieu des positions successives d'une droite AA' qui s'appuie sur une ligne fixe ABC et reste parallèle à une direction donnée (*fig.* 478). Une surface cylindrique peut être considérée comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'est éloigné indéfiniment dans la direction donnée; ou, plus brièvement, c'est une surface conique dont le sommet est à l'infini dans une certaine direction.

3° Une *surface de révolution* est le lieu des positions successives d'une ligne MNP qui tourne autour d'une droite fixe XY à laquelle elle est invariablement liée (*fig.* 479). Dans ce mouvement, tout point M de la génératrice MNP décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe XY, et dont le centre O est sur cet axe; d'après cela, toutes les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe sont des cercles : ces cercles M_1MM_2, N_1NN_2, P_1PP_2,... sont les *parallèles* de la surface. On appelle *méridiens* les sections faites dans la surface par des plans passant par l'axe XY; deux méridiens quelconques $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$ sont des lignes superposables: car, si l'on fait tourner le plan XOP_1 de l'angle P_1OP_2, de manière à amener le point P_1 sur le point P_2, les points M_1, N_1,... arriveront respectivement sur M_2, N_2, ..., attendu que les angles M_1OM_2, N_1ON_2, ..., P_1OP_2, sont égaux, comme angles plans d'un même dièdre.

Fig. 479.



Toute courbe tracée sur une surface de révolution peut être prise pour génératrice de cette surface; le plus souvent on choisit pour génératrice la courbe méridienne. Nous avons déjà étudié trois surfaces de révolution : la surface conique de révolution dont le méridien est une droite qui rencontre l'axe, la surface cylindrique de révolution dont le méridien est une droite parallèle à l'axe, et la sphère dont le méridien est une circonférence ayant son centre sur l'axe.

Les surfaces de révolution admettent un second mode de génération fort remarquable : on peut les considérer comme le lieu des positions d'un cercle dont le centre parcourt l'axe fixe XY, dont le plan reste perpendiculaire à cet axe, et dont le rayon varie suivant une loi telle, que le cercle rencontre sans cesse un méridien ou toute autre courbe tracée sur la surface. C'est ce cercle, variable de grandeur et de position, qui est alors la *génératrice*, et le méridien ou la courbe fixe considérée sur la surface qui est la *directrice*.

THÉORÈME.

870. 1° *Les sections d'une surface cylindrique, par deux plans parallèles, sont égales.*

2° *Les sections d'une surface conique, par deux plans parallèles, sont semblables.*

En effet :

1° Soient la surface cylindrique AA' et deux sections ABC, A'B'C', faites par deux plans parallèles (*fig.* 478). Prenons quatre points A, B, C, M, sur la première section, et menons les génératrices AA', BB', CC', MM', qui rencontrent la seconde section en A', B', C', M'. Les quadrilatères ABCM, A'B'C'M' sont superposables comme bases opposées d'un prisme quadrangulaire. D'après cela, si l'on transporte le plan de la seconde section sur celui de la première, dès que les trois points A', B', C' seront appliqués sur leurs correspondants A, B, C, tout point M' de la seconde section coïncidera avec son correspondant M de la première.

La section A'B'C' peut être considérée comme la projection oblique (586) de ABC; on peut donc encore énoncer ce théorème de la manière suivante : *Une courbe plane quelconque est égale à sa projection oblique* (*ou orthogonale*) *sur un plan parallèle au sien.*

2° Soient la surface conique SAMB et deux sections AMB, A'M'B', faites par deux plans parallèles (*fig.* 477). Menons par le sommet une droite quelconque SOO' qui rencontre les deux plans en O et O′, et projetons, parallèlement à SOO′, la première section AMB sur le plan de la seconde; cette projection *amb* étant égale à AMB (1°), la proposition sera démontrée si nous prouvons que *amb* et A′M′B′ sont homothétiques. Or, SMM′ étant une génératrice quelconque de la surface, les droites OM et O′M′ sont parallèles, et l'on a

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O'M'}} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}},$$

ou, en observant que la projection m de M est située sur O′M′ et que $\mathrm{O'}m = \mathrm{OM}$,

$$\frac{\mathrm{O'}m}{\mathrm{O'M'}} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}}.$$

Le second membre de cette égalité ayant une valeur indépendante de la position du point M′ sur la courbe A′M′B′, les courbes *amb* et A′M′B′ sont homothétiques.

Scolies.

871. On nomme *section droite d'une surface cylindrique* la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

Un *cylindre* est le corps compris entre une surface cylindrique et deux sections planes parallèles. Ces sections sont les *bases* du cylindre, et la distance de leurs plans parallèles est la hauteur de ce corps. Le cylindre est droit ou *oblique*, suivant que ses génératrices sont perpendiculaires ou obliques au plan de la base. *Le cylindre droit à base circulaire* n'est autre que le cylindre de révolution étudié dans le § I.

L'aire latérale d'un cylindre quelconque est égale au produit de son arête par le périmètre de sa section droite.

Le volume d'un cylindre quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ces théorèmes en considérant le cylindre comme la limite d'un prisme inscrit, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

Les théorèmes relatifs au prisme tronqué, démontrés aux n°s 719, 720, 722, 723, sont de même applicables au cylindre tronqué.

872. Un *cône* est le corps compris sous une surface conique limitée d'une part à son sommet et de l'autre à une section plane, qui prend le nom de *base ;* la hauteur du cône est la distance du sommet au plan de la base. Un cône à *base circulaire* est *droit* ou *oblique* suivant que la projection orthogonale du sommet sur le plan de la base coïncide ou non avec le centre du cercle. Le cône circulaire droit n'est autre que le cône de révolution étudié au § II.

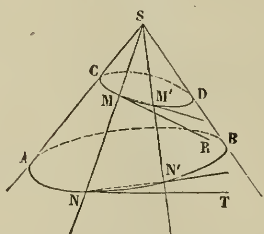
Le volume d'un cône quelconque est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

On arrive à ce théorème en considérant le cône comme la limite d'une pyramide inscrite, lorsque les côtés de la base polygonale tendent vers zéro.

THÉORÈME.

873. *Dans un cône ou dans un cylindre, le plan* SNT, *déterminé par une génératrice* SN *et par la tangente* NT *menée à une courbe* ANB *située sur la surface, au point* N *où cette courbe rencontre la génératrice, est le même, quelle que soit la courbe considérée* (*fig.* 480).

Fig. 480.



Il suffit de prendre une seconde courbe CMD sur la surface, coupant la génératrice SN au point M, et de prouver que le plan SNT renferme la tangente MR menée par le point M à cette courbe. Or le plan NSN' mené par la génératrice SMN et une génératrice voisine SM'N' a pour limite SNT, puisque la corde NN' tend vers la tangente NT. D'ailleurs, quand N' vient en N, M' vient en M, et les sécantes NN', MM' deviennent en même temps les tangentes NT et MR; comme les sécantes MM′ NN′ sont sans cesse contenues dans le plan SNN′, on voit que le plan SNT renferme la tangente MR.

Ce plan SNT est dit le *plan tangent au cône* ou *au cylindre suivant la génératrice* SN.

COROLLAIRE.

874. En supposant que la courbe ANB soit plane, on arrive à ce théorème : *La tangente* NT *à la projection ou à la perspective* ANB *d'une courbe* CMD *est la projection ou la perspective de la tangente* MR *à cette courbe* (586).

Ce corollaire souffre toutefois une exception, lorsque la tangente de l'espace est elle-même une des droites projetantes. La projection ou la perspective de la tangente se réduit alors à un point, tandis que la tangente de la projection ou de la perspective est une droite bien déterminée; c'est la trace, sur le plan de projection, du plan tangent au cylindre ou au cône projetant, suivant la génératrice qui coïncide avec la tangente de l'espace.

THÉORÈME.

875. *Dans le cône oblique à base circulaire, toute section anti-parallèle à la base est un cercle.*

Soit (*fig.* 481) S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle O. On nomme *plan principal* le plan SAB mené par la droite qui joint le sommet S au centre O de la base, perpendiculairement au plan de cette base; on dit qu'un plan CMD est *anti-parallèle à la base*, lorsqu'il est perpendiculaire sur le plan principal SAB et que sa trace CD sur ce plan principal est anti-parallèle à AB par rapport à l'angle ASB (189). Il s'agit de prouver que la section CMD est un cercle.

Par un point quelconque M de la section, menons un plan parallèle à la base; ce plan coupera le cône suivant un cercle A′MB′ (870) décrit sur A′B′ comme diamètre, et le plan CMD suivant une droite MP perpendiculaire au plan principal (561). Or, dans le cercle A′MB′, on a (223)

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB'.$$

D'ailleurs, les triangles PCA′, PDB′ sont semblables comme ayant leurs angles égaux ; ils donnent

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'}, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Donc

$$\overline{MP}^2 = PC.PD$$

et, par suite (223), le point M appartient à un cercle décrit sur CD comme diamètre.

Fig. 481.

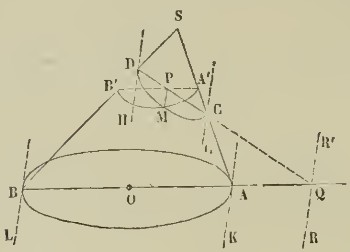
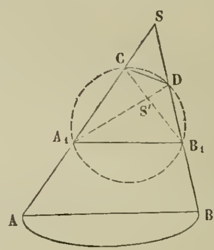


Fig. 482.



876. Réciproquement, *il n'y a que les sections parallèles et les sections anti-parallèles à la base qui soient des cercles.*

En effet, considérons une section circulaire CMD non parallèle à la base, et soit (*fig.* 481) RR' la trace de son plan sur le plan de la base ; du centre O, abaissons sur RR' la perpendiculaire OQ qui rencontre la circonférence de base en A et B ; menons les génératrices SA, SB, et les tangentes AK et BL qui sont évidemment parallèles à QR. Les plans SAK, SBL, tangents au cône, couperont le plan MRR' suivant deux droites CG et DH, tangentes au cercle CMD et parallèles à RR' ; par suite, la droite DCQ sera perpendiculaire à RR', et l'on conclut de là que les cercles AB et CD sont perpendiculaires au même plan SAB qui passe par leurs centres et par le sommet du cône. D'ailleurs, en menant la section B'MA' parallèle à la base, on a

$$\overline{MP}^2 = PA'.PB', \quad \overline{MP}^2 = PC.PD, \quad \text{d'où} \quad PA'.PB' = PC.PD.$$

Les triangles PA'C, PDB' sont donc semblables, et les angles DB'A', DCA' sont égaux, de sorte que CD est anti-parallèle à AB.

Corollaires.

877. La même propriété subsiste pour le cylindre oblique à base circulaire.

878. *Deux sections, l'une* A_1B_1 *parallèle, l'autre* CD *anti-parallèle à la base d'un cône oblique à base circulaire, sont toujours situées sur une même sphère;* car les deux sections circulaires A_1B_1 et CD (*fig.* 482) doivent (875) être perpendiculaires à un même plan SAB passant par leurs centres, et le quadrilatère A_1B_1DC situé dans ce plan doit être inscriptible; les cercles A_1B_1 et CD sont donc sur la sphère dont le grand cercle passe par les quatre points A_1, B_1, C, D.

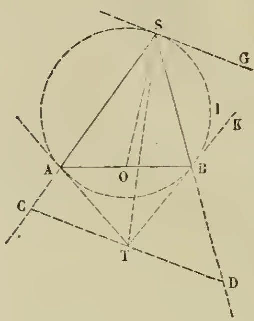
Inversement, *par deux cercles* A_1B_1 *et* CD *placés sur la surface d'une sphère, on peut toujours faire passer deux cônes.* — En effet, soient (*fig.* 482) A_1B_1DC une section passant par le centre de la sphère et par les centres des deux cercles, et A_1B_1, CD les diamètres de ces cercles, déterminés par la section A_1B_1CD; les plans de ces cercles seront perpendiculaires au plan sécant A_1B_1CD. Or, si l'on mène les droites A_1C et B_1D, leur point de concours S sera le sommet d'un cône ayant pour base le cercle A_1B_1 et passant par les points C et D. Mais l'angle DCS est égal à l'angle A_1B_1S : donc la section CD faite dans le cône par un plan perpendiculaire à A_1B_1DC sera un cercle ayant CD pour diamètre; donc ce cercle se confond avec le cercle CD de la sphère. Il y a un second cône qui coupe la sphère suivant les mêmes cercles A_1B_1 et CD ; son sommet est à l'intersection S' des deux diagonales B_1C et A_1D. Ces deux cônes peuvent, dans certains cas, dégénérer en cylindres.

879. Il résulte encore des considérations précédentes que, *lorsqu'un cône* S *pénètre dans une sphère suivant un cercle* A_1B_1, *il en sort suivant un second cercle* CD.

880. Dans un cône oblique à base circulaire, les centres des sections parallèles à la base sont distribués sur une même droite passant par le sommet; les centres des sections anti-parallèles à la base sont aussi placés sur une seconde droite passant par le sommet. Il importe de connaître la situation respective de ces deux droites.

Soit SAB la section principale du cône dont la base est le cercle décrit sur AB comme diamètre. Le cercle circonscrit au triangle ASB (*fig.* 483) est un grand cercle de la sphère qui contient le cercle AB et le sommet S du cône. La tangente SG au cercle SAB est la trace sur SAB du plan tangent à la sphère en S, et ce plan tangent est perpendiculaire au plan SAB de la figure; d'ailleurs, la droite SG est anti-parallèle à AB, à cause de l'égalité des angles BAS, BSG. Donc le plan tangent SG est parallèle aux plans des sections anti-parallèles à la base AB, et la question se réduit à trouver le centre d'une section quelconque parallèle à ce plan tangent. Nous choisirons celle qui passe par le point de concours T des tangentes en A et en B au cercle ASB, c'est-à-dire par le sommet T du cône qui est circonscrit à la sphère suivant le cercle AB. En menant par le point T la parallèle CTD à SG, on aura le diamètre de cette section. Or il est aisé de voir que le point T en est précisément le centre, c'est-à-dire que le

Fig. 483.



point T est le milieu de CD. En effet, l'angle TBD, égal à SBK, a pour mesure la moitié de l'arc SIB ; l'angle TDB, alterne-interne de BSG, a la même mesure; donc le triangle TBD est isocèle et l'on a TD = TB. On voit pareillement que TC = TA ; par suite, comme TA = TB (158), on a TC = TD. Ainsi, *le lieu des centres des sections anti-parallèles à la base* AB *est la droite* ST, *qui joint le sommet* S *au sommet* T *d'un cône auxiliaire circonscrit, suivant le cercle* AB, *à la sphère déterminée par ce cercle et par le sommet* S *du cône primitif.*

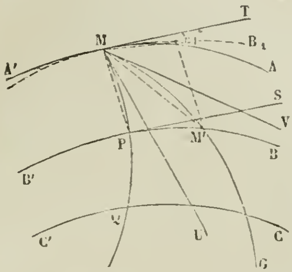
THÉORÈME.

881. *Le lieu des tangentes, menées par un point d'une surface aux diverses courbes que l'on peut tracer par ce point sur la surface, est un plan.*

Soient M le point donné, AMA′ une section plane passant par ce point, et BB′, CC′,... des sections voisines faites par des plans parallèles au premier (*fig.* 484). Si l'on prend sur ces courbes les points P, Q,..., où la tangente est parallèle à MT, on obtiendra une courbe continue MPQ,..., située sur la surface. Soit MU la tangente à cette courbe au point M; tout se réduit à prouver que le plan TMU renferme la tangente MV à une courbe quelconque MG tracée par M sur la surface.

Or, soit M′ le point où la courbe MG rencontre la section BPB′; menons les cordes MP, MM′, et projetons, parallèlement à MP, sur le plan de la première section AMA′, la section BPB′ ; la courbe MM_1B_1 ainsi obtenue sera tangente en M à MT. En effet, la tangente à la projection MM_1B_1 doit être la projection de la tangente PS à la courbe de l'espace BPB′ (874), et la projection de PS, parallèlement à MP, est précisément MT, puisque, par hypothèse, PS et MT sont parallèles. Cela étant, si M_1 est la projection de M', le plan M_1MP des deux cordes MM_1 et MP

Fig. 484.



renferme sans cesse la corde MM'; par suite, la tangente MV sera contenue dans le plan limite de M_1MP; or ce plan n'est autre que TMU, puisque les cordes MM_1 et MP ont respectivement pour limites les tangentes MT et MU.

Ce plan, lieu des tangentes aux diverses courbes que l'on peut mener par le point M sur la surface, prend le nom de *plan tangent de la surface* au point M.

Scolies.

882. La *normale* à une surface au point M est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

883. Le plan tangent en un point d'une surface est déterminé par les tangentes à deux courbes quelconques menées par ce point sur la surface.

884. Dans toute *surface réglée,* c'est-à-dire engendrée par une ligne droite, le plan tangent en un point contient la génératrice qui passe par ce point; il est alors déterminé par cette génératrice et par la tangente à une courbe quelconque menée par ce point sur la surface. Ce plan *tourne* en général autour de la génératrice. Il est pourtant une classe de surfaces réglées, pour lesquelles le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, comme cela arrive (873) pour les cônes et les cylindres. Ces surfaces sont dites *développables,* tandis qu'on appelle *gauches* les surfaces réglées qui ne jouissent pas de cette propriété. Les surfaces développables sont ainsi nommées, parce qu'on peut les étendre sur un plan sans les déchirer ni les replier. Considérons, en effet, une surface telle que les plans tangents soient les mêmes le long de chaque génératrice, c'est-à-dire ne changent qu'en passant d'une génératrice à l'autre : l'ensemble des plans tangents, suivant les diverses génératrices, formera

une surface polyédrique circonscrite, qui a pour limite la surface considérée. Or cette surface polyédrique peut être étendue sur un plan, en faisant tourner chaque face plane autour d'une arête, de manière à la rabattre sur le plan de la face précédente; et, comme cette propriété a lieu, quelque rapprochées que soient les génératrices, il en est de même à la limite pour la surface considérée.

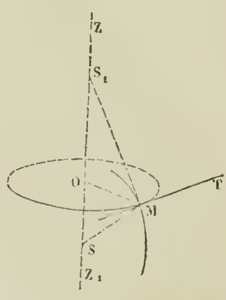
885. Le plan tangent à une surface peut laisser la surface tout entière d'un seul côté; il y a alors un point de contact unique ou une ligne de contact; le premier cas se présente, par exemple, pour la sphère, le second pour le cylindre et le cône à base circulaire. Le plan tangent peut aussi couper la surface, et la section est alors une courbe à nœud : c'est ce qui arrive, par exemple, en un point de la gorge d'une poulie.

886. Enfin nous devons observer que le théorème précédent (881) cesse parfois d'être vrai en certains points *singuliers*, tels que le sommet d'un cône; en ce point, le lieu des tangentes forme, non pas un plan, mais la surface conique proposée. Il en est de même au point d'une surface de révolution situé sur l'axe, lorsque la méridienne rencontre cet axe sous un angle différent de 90 degrés. Ajoutons cependant que, si un point décrit sur la surface d'un cône une courbe bien déterminée et aboutissant au sommet, le plan tangent au cône en chacune des positions du mobile sur sa trajectoire est parfaitement déterminé, et il l'est encore au moment où le mobile atteint le sommet du cône; c'est le plan tangent suivant la génératrice qui touche au sommet la courbe considérée.

THÉORÈME.

887. *Le plan tangent en un point* M *d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien* ZOM *qui passe par le point de contact* (*fig.* 485).

Fig. 485.



En effet, le plan tangent en M contient la tangente MT au parallèle

OM, et cette tangente MT est perpendiculaire au plan méridien ZOM, comme étant à angle droit sur les deux droites OM et OZ de ce plan.

Corollaires.

888. La normale MS à la surface au point M est contenue dans le plan méridien ZOM (882). Le point S, où elle rencontre l'axe ZZ_1, est d'ailleurs le même pour toutes les normales qui répondent aux divers points d'un même parallèle; d'où l'on conclut que *les normales menées à une surface de révolution par les divers points d'un parallèle forment un cône de révolution qui a son sommet S sur l'axe de la surface. Les tangentes aux différents méridiens en des points situés sur une même parallèle forment* aussi *un cône de révolution qui est circonscrit à la surface et qui a son sommet* S_1 *sur l'axe de cette surface.* L'angle S_1MS, qui mesure l'angle des plans tangents aux deux cônes au point M, est droit; *les deux cônes sont donc orthogonaux.*

THÉORÈME.

889. *Quatre plans tangents à une surface gauche, menés par une même génératrice, ont leur rapport anharmonique égal à celui de leurs quatre points de contact.*

En effet, soient G une génératrice d'une surface gauche (884), et A, B, C, D les plans qui touchent cette surface respectivement aux points a, b, c, d de cette génératrice. Considérons quatre courbes fixes $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, tracées à volonté sur la surface et passant respectivement par les points a, b, c, d; désignons par a', b', c', d' les points où ces courbes rencontrent une génératrice G' voisine de la génératrice G, et menons les cordes aa', bb', cc', dd'. Le faisceau des quatre plans Gaa', Gbb', Gcc', Gdd', étant coupé par la transversale G' aux points a', b', c', d', le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre plans. Cette propriété ayant lieu, quelle que soit la position de G' sur la surface, subsiste quand G' vient se confondre avec G; mais alors les points a', b', c', d' se confondent avec a, b, c, d, et les plans Gaa', Gbb', Gcc', Gdd' deviennent les plans tangents A, B, C, D, puisque les cordes aa', bb', cc', dd' ont pour limites les tangentes en a, b, c, d, aux courbes $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$. Donc le rapport anharmonique des quatre plans tangents A, B, C, D est égal à celui de leurs points de contact a, b, c, d.

Corollaires.

890. La relation (727)

$$\frac{ca}{cb}:\frac{da}{db}=\frac{\sin\widehat{CA}}{\sin\widehat{CB}}:\frac{\sin\widehat{DA}}{\sin\widehat{DB}},$$

qui est la traduction analytique du théorème précédent, permet de déterminer le plan D qui touche la surface en un point donné quelconque d de la génératrice G, dès qu'on connaît les plans tangents A, B, C en trois points donnés a, b, c de cette génératrice.

891. On dit que deux surfaces gauches S et S', qui ont une génératrice commune G, *se raccordent* suivant cette génératrice, lorsqu'elles se touchent en tout point de cette ligne.

Deux surfaces gauches S *et* S' *se raccordent suivant une génératrice commune* G *dès qu'elles se touchent en trois points* a, b, c *de cette génératrice.*

En effet, soient d un point quelconque de la génératrice G ; D et D' les plans qui touchent respectivement au point d les surfaces S et S'; enfin, A, B, C les plans tangents communs en a, b, c. Les rapports anharmoniques des deux systèmes de quatre plans (A, B, C, D), (A, B, C, D') sont égaux entre eux, puisque, d'après le théorème précédent, chacun d'eux est égal à celui des quatre points a, b, c, d. Donc les plans D et D' coïncident, et les deux surfaces S et S' se touchent en un point quelconque d de la génératrice commune.

C'est surtout en étudiant la Géométrie descriptive qu'on comprendra l'importance de ce principe fondamental.

§ VIII. — APPENDICE.

I. — Théorème de Guldin.

892. L'importante proposition connue sous ce nom se trouve indiquée dans Pappus (fin du IV^e siècle). Elle a été ensuite retrouvée par Guldin (commencement du XIV^e siècle).

THÉORÈME.

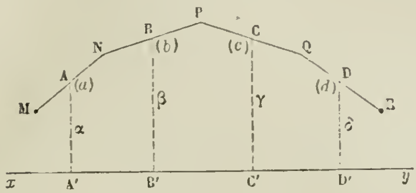
893. *L'aire engendrée par une ligne brisée plane quelconque, tournant autour d'un axe extérieur quelconque situé dans son plan, a pour mesure le produit de la longueur de la ligne brisée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Nous savons que le centre de gravité d'une ligne brisée plane est le centre des distances proportionnelles des centres de gravité de ses côtés (714).

Si la ligne brisée se réduit à une droite AB, la proposition a déjà été démontrée (761), puisque le centre de gravité d'une droite est en son milieu (714).

Soient maintenant (*fig.* 486) la ligne brisée plane quelconque MNPQR tournant autour de l'axe xy. Soient a, b, c, ... les longueurs des côtés

Fig. 486.



de cette ligne; α, β, γ, ... les distances des milieux A, B, C, ... de ses côtés à l'axe xy. L'aire totale S, engendrée par la ligne brisée MNPQR, étant la somme des aires engendrées par ses côtés MN, NP, ..., on aura (761)

$$S = a.2\pi\alpha + b.2\pi\beta + c.2\pi\gamma + \ldots = 2\pi(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots).$$

Si l'on désigne par z la distance à l'axe xy du centre des distances proportionnelles des points A, B, C, ..., on a (710)

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots = z(a + b + c + \ldots);$$

d'où

$$S = (a + b + c + \ldots).2\pi z,$$

expression de l'énoncé.

Corollaires.

894. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés de la ligne brisée, c'est-à-dire à la limite, quand il s'agit d'une ligne courbe en tout ou en partie. Le centre de gravité de la ligne obtenue est alors la position limite du centre de gravité de la ligne polygonale. Par suite, *l'aire engendrée par une ligne courbe plane tournant autour d'un axe exterieur quelconque situé dans son plan a pour mesure le produit de sa longueur par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Applications.

895. 1° *Quelle est l'expression de l'aire engendrée par une circonférence de rayon r, en tournant autour d'une droite xy de son plan qui ne la coupe pas ?*

Soit d la distance du centre de cette circonférence à l'axe xy; le centre d'une circonférence est évidemment son centre de gravité, car, dans la recherche du centre des moyennes distances, on peut remplacer plusieurs points par leur centre particulier (713), et le centre qui correspond aux extrémités d'un diamètre quelconque est le centre de la circonférence. L'aire de la surface engendrée, qu'on appelle *tore*, sera donc

$$2\pi r . 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'une demi-circonférence de rayon r.*

Soit x la distance du point cherché au diamètre qui termine la demi-circonférence. Si on la fait tourner autour de ce diamètre, elle engendrera une surface sphérique de rayon r. On devra donc avoir (842)

$$\pi r . 2\pi x \quad \text{ou} \quad 2\pi^2 r x = 4\pi r^2, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{2r}{\pi}.$$

Le centre de gravité cherché étant d'ailleurs, d'après une remarque précédente, situé sur le rayon perpendiculaire à l'axe, sa position est parfaitement déterminée.

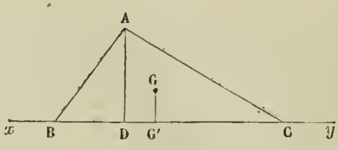
THÉORÈME.

896. *Le volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan, a pour mesure le produit de l'aire du triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Nous distinguons trois cas :

1° L'un des côtés du triangle se confond avec l'axe (*fig.* 487).

Fig. 487.



Le volume engendré par le triangle ABC tournant autour de l'axe xy a pour expression (855, 1°)

$$\frac{1}{3}\pi . \text{AD}^2 . \text{BC},$$

c'est-à-dire, en désignant par S l'aire du triangle dont le double est représenté par AD.BC,

$$\frac{2}{3}\pi . \text{AD} . \text{S}.$$

Si G est le centre de gravité du triangle ABC, on a (715), pour la perpendiculaire GG′ à l'axe,

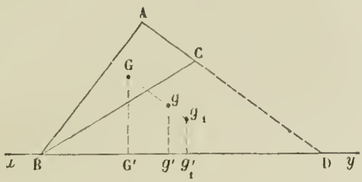
$$GG' = \frac{AD}{3}.$$

Le volume engendré a donc finalement pour mesure

$$S.2\pi.GG'.$$

2° Le triangle n'a qu'un sommet situé sur l'axe (*fig.* 488).

Fig. 488.



Prolongeons le côté AC jusqu'à sa rencontre avec l'axe xy. On a

$$\text{vol.ABC} = \text{vol.ABD} - \text{vol.CBD}.$$

Si g et g_1 sont les centres de gravité des triangles ABD et CBD, il vient donc, d'après le premier cas,

$$\text{vol.ABC} = 2\pi(\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1).$$

Le triangle ABC étant la différence des deux triangles ABD et CBD, son centre de gravité G est le centre des distances proportionnelles des points g, g_1, si l'on attribue aux trois points considérés des coefficients proportionnels aux aires des trois triangles correspondants, en donnant à ces coefficients les signes convenables (716). On aura, par suite,

$$\text{ABD}.gg' - \text{CBD}.g_1g'_1 = \text{ABC.GG}';$$

d'où

$$\text{vol.ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

3° L'axe est complétement extérieur au triangle (*fig.* 489).

Les trois côtés du triangle ne pouvant être parallèles à l'axe, prolongeons le côté AB, par exemple, jusqu'à sa rencontre en D avec l'axe xy, et joignons CD. On aura

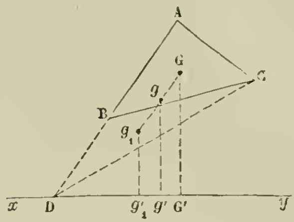
$$\text{vol.ABC} = \text{vol.ACD} - \text{vol.BCD},$$

c'est-à-dire, d'après le second cas, en désignant par g et g_1 les centres de gravité des triangles ACD et BCD,

$$\text{vol.ABC} = 2\pi(\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1).$$

Le triangle ABC, dont le centre de gravité est G, étant la différence

Fig. 489.



des triangles ACD et BCD, on a, comme ci-dessus,

$$\text{ACD}.gg' - \text{BCD}.g_1g'_1 = \text{ABC.GG}';$$

d'où encore

$$\text{vol.ABC} = \text{ABC}.2\pi\text{GG}'.$$

THÉORÈME.

897. *Le volume engendré par un polygone tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Décomposons le polygone donné, dont l'aire est S, en triangles ayant pour aires t, t', t'',.... Soient δ, δ', δ'',... les distances des centres de gravité de ces triangles à l'axe, et d la distance du centre de gravité du polygone (716) au même axe. Le volume engendré par le polygone, somme des volumes engendrés par les triangles qui le composent, est

$$2\pi(t\delta + t'\delta' + t''\delta'' + \ldots).$$

Mais, d'après les propriétés du centre des distances proportionnelles, la parenthèse est égale à $S.d$. Par suite, le volume cherché a pour expression

$$S.2\pi d.$$

Corollaires.

898. Le théorème subsiste, quels que soient le nombre et la grandeur des côtés du polygone, c'est-à-dire à la limite, quand le polygone ou une partie du polygone devient une courbe. Dans ce cas, le centre de gravité de la surface obtenue est la position limite du centre de gravité de la

surface polygonale. Par suite, *le volume engendré par une surface plane quelconque tournant autour d'un axe extérieur situé dans son plan a pour mesure le produit de son aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

APPLICATIONS.

899. 1° *Quel est le volume du tore?*

En conservant les notations du n° 895, ce volume a pour expression

$$\pi r^2 . 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

2° *Trouver la position du centre de gravité d'un demi-cercle de rayon r.*

Le centre de gravité cherché appartient évidemment au rayon perpendiculaire au diamètre qui termine le demi-cercle donné. De plus, si l'on fait tourner le demi-cercle autour de ce diamètre, il engendre une sphère de rayon r. On a donc, en appelant x la distance du centre de gravité à l'axe,

$$\frac{\pi r^2}{2} \cdot 2\pi x = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{4r}{3\pi}.$$

La position du point demandé est donc complétement déterminée.

II. — Sur le maximum et le minimum des figures.

900. Les propriétés qui font l'objet du § III de l'Appendice du IVe Livre ainsi que leurs démonstrations s'appliquent aux figures sphériques aussi bien qu'aux figures planes. Toutefois le théorème du n° 481 et son corollaire doivent alors être énoncés comme il suit :

Entre tous les triangles sphériques construits avec deux côtés donnés AB *et* AC, *le triangle maximum est celui dans lequel l'angle* A *de ces deux côtés est égal à la somme* B + C *des deux autres* (*fig.* 446).

Entre tous les triangles sphériques dont la somme AB + AC *de deux côtés est donnée, le triangle maximum est celui dans lequel ces deux côtés sont égaux et comprennent un angle* A *égal à la somme* B + C *des deux autres.*

Cette seconde proposition se déduit de la première par un raisonnement semblable à celui du n° 482; il ne reste donc qu'à démontrer la première.

A cet effet, laissons AB fixe; le point C sera alors astreint à rester sur un cercle ω ayant A pour pôle et pour rayon sphérique la longueur donnée du côté AC. Par les points E et D symétriques de A et de B par rapport au centre de la sphère, imaginons un plan; le cercle suivant lequel ce plan coupe la sphère rencontre le cercle ω en deux points C_1 et C_2

qui sont les sommets de deux triangles C_1AB, C_2AB équivalents (852). L'aire de ces triangles augmente avec l'inclinaison du plan du cercle sur le plan EDAB, c'est-à-dire à mesure que les points C_1 et C_2 se rapprochent l'un de l'autre sur le cercle ω; cette aire est donc maximum quand ces deux points se confondent, et par suite le triangle maximum demandé est le triangle ABC obtenu en choisissant le sommet C sur le cercle ω de telle sorte que ce cercle ω et le cercle circonscrit au triangle DEC soient tangents; mais alors le pôle du cercle DEC est sur EC (822); donc on a $C = 0$, $C = \gamma$, $E = \delta$; et par suite $A = 2 - E = 2 - \delta$, $C = \gamma$, $B' = 2 - D = 2 - (\delta + \gamma)$, d'où, enfin, $A = B + C$.

901. On peut dire encore que dans le *triangle maximum* ABC *construit avec deux côtés donnés* AB *et* AC, *le troisième côté* CB *est le diamètre sphérique du cercle circonscrit;* car, en imaginant l'arc de grand cercle qui partagerait l'angle A en deux parties, l'une égale à B, l'autre égale à C, on voit immédiatement, par les deux triangles isocèles dans lesquels cet arc décompose le triangle ABC, que le point où cet arc coupe BC est équidistant de A, B et C, et par suite est le pôle du cercle inscrit à ABC.

THÉORÈME.

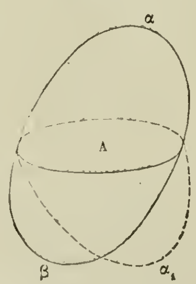
902. *Parmi tous les corps de même aire, la sphère est celui qui a le plus grand volume.*

Soit K un corps ayant le volume maximum sous une aire donnée, et Σ la surface qui le limite.

1° *La surface* Σ *est convexe,* sans quoi on pourrait augmenter le volume du corps sans augmenter l'aire.

2° *Tout plan* A *qui divise l'aire de* K *en deux parties équivalentes divise aussi le volume en deux parties* α *et* β *équivalentes* (*fig.* 490); car,

Fig. 490.



si l'on avait, par exemple, $\alpha > \beta$, en remplaçant β par la figure α_1 symétrique de α par rapport au plan A, on obtiendrait un corps (α, α_1) de même aire que K et de volume plus grand.

Nous donnerons, pour abréger le discours, aux plans tels que A, le nom de *plans médians*. Par toute tangente à la surface Σ, on peut mener un plan médian (raisonnement analogue à celui du n° 13, en faisant tourner un plan autour de la tangente depuis la position où il est tangent jusqu'à ce qu'il le redevienne); de même, on peut mener un plan médian parallèle à un plan quelconque.

3° *Tout plan médian* A *est normal à la surface* Σ *en tout point de la ligne suivant laquelle il coupe cette surface;* car, si en un point de cette ligne le plan tangent était oblique au plan A, en remplaçant l'une des parties α ou β par la symétrique de l'autre par rapport au plan A, on obtiendrait un corps ayant le volume maximum sous l'aire donnée, et qui, étant coupé par le plan tangent au point considéré, ne serait pas convexe.

4° *Tout plan* R *passant par l'intersection* D *de deux plans médians* P *et* Q *est un plan médian*. En effet, soit X un point commun à la droite D et à la surface Σ et XT la tangente à la section que le plan R détermine dans la surface Σ; par XT on peut mener un plan médian (2°), et ce plan doit être normal en X (3°); mais la normale en X devant appartenir aussi aux plans médians P et Q (3°) n'est autre que D; donc le plan médian considéré est le plan DXT, c'est-à-dire le plan R.

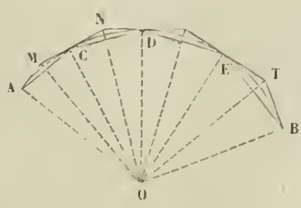
5° *Toutes les normales à la surface* Σ *passent par un même point.*

Qu'on imagine, en effet, les trois plans médians respectivement parallèles aux trois faces d'un trièdre quelconque; ces trois plans formeront un nouveau trièdre. Or la normale en un point quelconque M de Σ passe par le sommet O de ce trièdre; car, les trois plans déterminés par le point M et par chacune des arêtes du trièdre étant médians (4°), leur droite commune OM est la normale en M (3°).

6° *La surface* Σ *est une sphère.*

En effet, soient A et B deux points quelconques de Σ (*fig.* 491), O le

Fig. 491.



point de concours des normales à cette surface, AB la section faite dans Σ

par le plan AOB. ACD ... B, une ligne brisée inscrite dans l'arc AB, et AMN ... TB la ligne brisée circonscrite correspondante (291). La relation

$$\overline{OA}^2 + \overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{MC}^2$$

donne

$$\overline{OA}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2,$$

d'où

$$OA - OC = \frac{MC - MA}{OA + OC}(MC + MA) < \frac{AC}{OA + OC}(MA + MC),$$

et l'on a de même

$$OC - OD < \frac{CD}{OC + OD}(NC + ND),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$OE - OB < \frac{EB}{OE + OB}(TE + TB).$$

Faisons tendre vers zéro les côtés de la ligne brisée inscrite; toutes les fractions des seconds membres des inégalités précédentes tendent vers zéro; en désignant par ε la plus grande d'entre elles et ajoutant les inégalités membre à membre, on a

$$OA - OB < \varepsilon . P,$$

P étant le périmètre de la ligne brisée circonscrite; comme P tend vers la longueur de l'arc AB, et que ε tend vers zéro, on voit que la différence OA — OB peut devenir moindre que toute quantité donnée. Or cette différence est *fixe;* donc elle est nulle, et l'on a OA = OB. Deux points quelconques de la surface Σ sont donc équidistants du point O, ce qui prouve que cette surface est sphérique.

III. — Polyèdres réguliers.

DES POLYÈDRES RÉGULIERS CONVEXES.

904. Un *polyèdre régulier* est un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux et dont tous les angles polyèdres sont égaux entre eux.

THÉORÈME.

905. *Il ne peut exister que cinq polyèdres réguliers convexes.*

Cette proposition n'est qu'un cas particulier de celle du n° 695. On peut d'ailleurs la démontrer directement en quelques mots.

La somme des faces d'un angle polyèdre convexe devant être inférieure à quatre angles droits (570), si les faces sont des triangles équilatéraux, on ne peut assembler autour d'un même point, pour former un angle polyèdre, que *trois* ou *quatre* ou *cinq* de ces triangles. On construit ainsi : le *tétraèdre* régulier compris sous quatre triangles équilatéraux ; l'*octaèdre* régulier, compris sous huit triangles équilatéraux : l'*icosaèdre* régulier, compris sous vingt triangles équilatéraux. Au delà, *six* triangles équilatéraux assemblés autour d'un même point donnent six angles plans dont la somme est égale à quatre angles droits; il n'y a plus d'angle polyèdre : les six triangles se trouvent développés dans un même plan.

On ne peut employer les carrés et les pentagones réguliers qu'en les assemblant par *trois*, puisque l'angle d'un carré est droit et que celui d'un pentagone régulier est égal à $\frac{6}{5}$ d'angle droit. On a ainsi l'*hexaèdre* régulier ou cube, compris sous six carrés égaux, et le *dodécaèdre* régulier, compris sous douze pentagones réguliers.

Aucun autre polyèdre régulier convexe n'est possible, puisque, l'angle d'un hexagone régulier étant égal à $\frac{4}{3}$ d'angle droit, trois angles d'hexagone régulier font en somme quatre angles droits.

Nous prouverons l'existence des cinq polyèdres réguliers énoncés, en montrant comment on peut effectuer leur construction.

PROBLÈME.

906. *Construire un polyèdre régulier, connaissant son arête.*

La construction du tétraèdre régulier (*fig.* 492) et celle du cube (*fig.* 493) ne peuvent offrir aucune difficulté, d'après ce qui a été dit aux n^{os} 591 et 645. Nous ne nous occuperons que de l'octaèdre, du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Fig. 492.

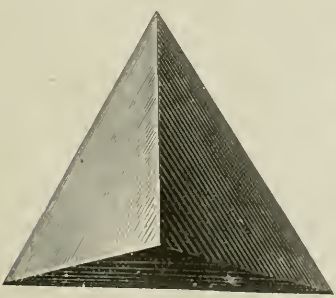
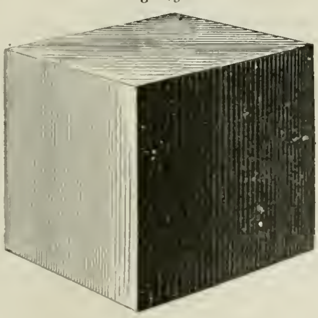


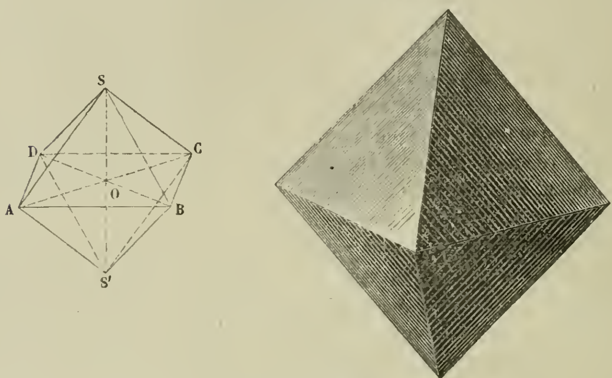
Fig. 493.



Octaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 494) un carré ABCD de côté *a*. Élevons en son centre O une perpendiculaire indéfinie, et portons de part et d'autre du point O sur cette perpendiculaire une longueur égale au rayon du carré ABCD, c'est-à-dire à $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. En joignant les points S et S′ ainsi obtenus aux sommets

Fig. 494.



A, B, C, D, on forme un octaèdre régulier SABCDS′. En effet, les huit arêtes SA, SB, ..., S′D sont égales entre elles et à

$$\sqrt{\overline{OS}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=a.$$

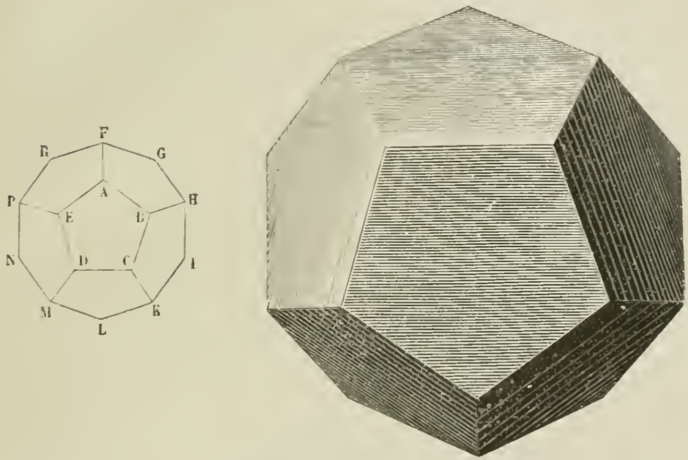
Les huit faces du polyèdre construit sont donc des triangles équilatéraux égaux. De plus, les six angles polyèdres sont égaux entre eux ; car les angles S et B, par exemple, sont les angles au sommet de deux pyramides quadrangulaires régulières SABCD, BASCS′, évidemment superposables comme ayant même base et même hauteur.

On peut résumer la construction de l'octaèdre régulier en remarquant que trois droites égales et perpendiculaires entre elles en leur milieu, telles que AC, BD, SS′, ont pour extrémités les six sommets d'un pareil polyèdre.

Dodécaèdre régulier.

Soit (*fig.* 495) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Prenons d'autres pentagones réguliers de côté a. Avec deux de ces pentagones joints au pentagone ABCDE, formons en A un angle trièdre qui, ayant ses faces égales, aura aussi ses angles dièdres égaux. Les trois côtés BA, BC, BH déterminent alors un angle trièdre B, égal à l'angle trièdre A, comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. On peut donc former à tous les sommets du pentagone ABCDE des angles trièdres égaux à A, en employant des pentagones réguliers égaux à ce pentagone et disposés comme l'indique la figure. Le pentagone ABCDE est commun à tous les angles trièdres : le deuxième, le troisième et le quatrième trièdre nécessitent l'addition d'un nouveau pentagone; le dernier angle trièdre en E se trouve tout construit.

Fig. 495.



On obtient ainsi un assemblage de six pentagones réguliers égaux et également inclinés. Cet assemblage constitue une surface polyédrale ouverte, moitié du dodécaèdre, et les sommets du décagone *gauche* [1] FGHIKLMNPR qui la termine correspondent successivement à *un* et à *deux* pentagones. D'ailleurs les angles de ce décagone sont égaux entre eux; en effet, les deux angles triedres en A et en F sont égaux comme ayant un dièdre égal compris entre deux faces égales entre elles et chacune à chacune. L'angle RFG est donc égal à l'angle EAB et, par suite, à l'angle FGH. On peut alors faire tourner le polygone FGHIKLMNPR sur lui-même, en faisant passer le sommet F en G, le sommet G en H, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié du dodécaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra, d'après cela, rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur

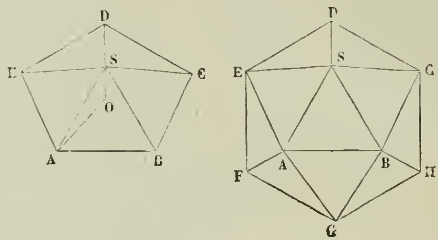
[1] Ce décagone est *gauche* ; car si les quatre points R, F, G, H étaient dans un même plan, ce plan contenant aussi le point A, il n'y aurait plus d'angle trièdre en A.

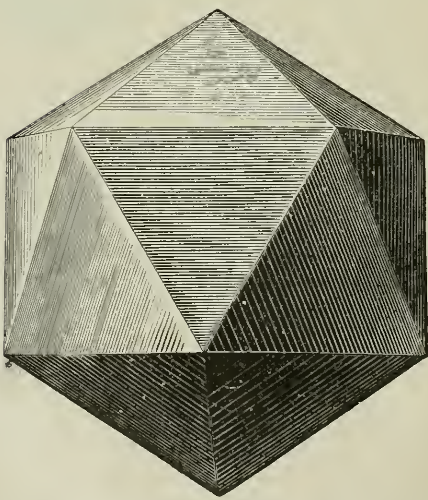
l'autre les polygones qui les terminent, en établissant la coïncidence des sommets du premier où il n'y a qu'*un* pentagone et des sommets du second qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces pentagones ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour composer un angle trièdre égal à l'angle A, l'ensemble obtenu sera bien un dodécaèdre régulier compris sous douze pentagones réguliers égaux formant vingt angles trièdres égaux.

Icosaèdre régulier.

Prenons (*fig.* 496) un pentagone régulier ABCDE de côté a. Élevons en

Fig. 496.





son centre O une perpendiculaire et, dans le plan déterminé par le rayon OA et cette perpendiculaire, décrivons du point A comme centre, avec a

pour rayon, un arc de cercle qui coupera la perpendiculaire au point S; car a est plus grand que $OA = a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$. Les arêtes SA, SB, ..., SE seront égales entre elles et à a. Par suite, la surface latérale de la pyramide pentagonale SABCDE sera formée de cinq triangles équilatéraux égaux entre eux et également inclinés, puisque les angles trièdres isocèles en A, B, ..., E sont égaux entre eux comme ayant leurs trois faces égales chacune à chacune.

Cela posé, en chacun des sommets A et B du triangle SAB, plaçons (comme l'indique la seconde figure) le sommet d'une pyramide identique à la première SABCDE, de manière que les deux nouvelles pyramides ABSEFG, BASCHG aient respectivement avec la première les faces communes ASB et ASE, BAS et BSC, et entre elles les faces communes ASB et ABG. Nous aurons ainsi un assemblage de dix triangles équilatéraux égaux et également inclinés.

Cet assemblage forme une surface polyédrale ouverte, moitié de l'icosaèdre, et les sommets de l'hexagone *gauche* [1] CDEFGH qui la termine réunissent successivement *deux* et *trois* triangles. D'ailleurs, les angles de cet hexagone sont égaux : l'angle DEF, par exemple, est égal à l'angle EFG, car tous deux sont évidemment égaux à l'angle EAG. On peut donc faire tourner le polygone CDEFGH sur lui-même, en faisant passer le sommet C en H, le sommet H en G, etc., sans qu'il cesse de coïncider avec sa première position.

Si l'on construit de la même manière la seconde moitié de l'icosaèdre et si on la retourne pour l'opposer à la première moitié, on pourra donc rapprocher les deux calottes polyédrales et appliquer l'un sur l'autre les polygones qui les limitent, en faisant correspondre les sommets de l'un qui réunissent *trois* triangles aux sommets de l'autre qui en réunissent *deux*. Comme les plans de ces triangles ont déjà entre eux l'inclinaison nécessaire pour constituer alors en chaque sommet un angle polyèdre égal à l'angle S, l'ensemble obtenu sera bien un icosaèdre régulier compris sous vingt triangles équilatéraux égaux, formant douze angles pentaèdres égaux.

Scolie.

907. En ayant recours aux formules $S = \frac{nF}{m}$ et $A = \frac{nF}{2}$ du n° 695, on

[1] Le contour CDEFGH est gauche; car si les quatre points C, D, E, F étaient dans un même plan, les deux pentagones ABCDE, BSEFG, qui ont déjà dans le plan CDE les sommets B et E communs, seraient tous deux dans ce même plan, qui contiendrait le point A en même temps que les points B, E, F; ce qui est impossible, d'après ce qui précède.

forme facilement le tableau suivant, qui renferme les nombres des éléments des cinq polyèdres réguliers convexes, dont nous connaissons les nombres de faces :

	F	n	S	m	A
Tétraèdre régulier...	4	3	4	3	6
Hexaèdre régulier...	6	4	8	3	12
Octaèdre régulier...	8	3	6	4	12
Dodécaèdre régulier.	12	5	20	3	30
Icosaèdre régulier...	20	3	12	5	30

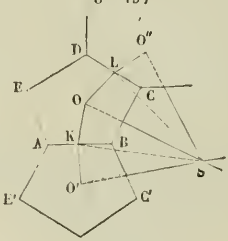
Le nombre des faces de l'hexaèdre et le nombre de côtés de ses faces sont respectivement égaux au nombre des sommets de l'octaèdre et au nombre d'arêtes de ses angles polyèdres. Il en est de même réciproquement pour l'octaèdre comparé a l'hexaèdre ; le nombre d'arêtes reste le même de part et d'autre. Les mêmes conditions sont remplies par le dodécaèdre et l'icosaèdre. On peut donc regarder les polyèdres réguliers convexes comme *conjugués* deux àdeux ; car le tétraèdre régulier, ayant autant de faces que de sommets, est conjugué à lui-même.

THÉORÈME.

908. *Tout polyèdre régulier convexe est inscriptible et circonscriptible à la sphère.*

Soient (*fig.* 497) dans le polyèdre régulier considéré deux faces adjacentes ABCDE, ABC'D'E', dont O et O' sont les centres.

Fig. 497.



Les perpendiculaires OK et O'K au côté commun AB se couperont en un même point K ; les perpendiculaires OS et O'S aux deux faces ABCDE, ABC′D′E′, lieux respectifs des points à égale distance de leurs sommets, se couperont en un point S, car elles sont situées dans le plan OKO′ perpendiculaire à AB au point K. Les deux triangles rectangles KOS, KO′S seront d'ailleurs égaux entre eux, puisqu'ils ont l'hypoténuse KS commune et le côté KO égal au côté KO′ comme apothèmes de deux polygones réguliers égaux. L'angle OKO′ mesurant l'inclinaison constante de deux faces adjacentes du polyèdre, l'angle OKS égal à l'angle O′KS sera la moitié de cette inclinaison, et le triangle KOS sera, par suite, constant pour toutes les faces.

Si l'on considère une troisième face O″, contiguë à la face ABCDE par le côté CD dont le milieu est L, la perpendiculaire élevée à cette face par son centre O″ coupera donc la droite OS au point S, de manière que le triangle LO″S soit identique au triangle KOS ou à son égal OLS.

En continuant de proche en proche, on voit que les perpendiculaires élevées aux différentes faces du polyèdre par leurs centres se coupent mutuellement en un même point S, situé à la même distance de toutes les faces et à la même distance de tous les sommets.

Donc la sphère de centre S et de rayon SA passe par tous les sommets du polyèdre régulier ou lui est *circonscrite;* la sphère de même centre S et de rayon SO est tangente à toutes les faces du polyèdre en leurs centres ou lui est *inscrite*.

Le point S est le *centre* du polyèdre régulier; SA est son *rayon*, SO son *apothème*.

Corollaires.

909. Si l'on décompose un polyèdre régulier en pyramides en prenant pour centre de décomposition le centre même du polyèdre, les pyramides obtenues sont régulières : *Tout polyèdre régulier peut donc être partagé en autant de pyramides régulières qu'il a de faces.*

Les faces latérales de ces pyramides étant prolongées décomposent évidemment la sphère inscrite ou circonscrite en autant de polygones sphériques réguliers égaux que le polyèdre considéré a de faces.

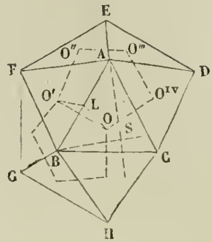
Le volume d'un polyèdre régulier a pour mesure le produit de son aire par le tiers du rayon de la sphère inscrite (646).

Deux polyèdres réguliers de même ordre étant nécessairement semblables, *le rapport des côtés, des aires* ou *des volumes de ces polyèdres est* aussi *celui des rayons, des carrés* ou *des cubes des rayons des sphères inscrites* ou *circonscrites.*

910. *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier conjugué du premier* (*fig.* 498).

Soient A l'un des sommets du polyèdre donné et S le centre commun des sphères inscrite et circonscrite à ce polyèdre. Désignons par O, O′, O″, ... les centres des faces réunies autour du point A. Ces points,

Fig. 498.



étant également distants des points S et A, sont situés dans un même plan perpendiculaire à SA en un point qui est le centre du cercle circonscrit au polygone OO′O″.... De plus, L étant le milieu du côté AB, le triangle OLO′ est constant, et le polygone inscrit OO′O″... ayant ses côtés égaux est régulier. Le polyèdre formé en joignant les centres des faces du polyèdre proposé a donc déjà pour faces des polygones réguliers égaux, et le nombre de ces polygones est égal à celui des sommets du polyèdre donné. Il reste seulement à prouver que ces polygones sont également inclinés. Or, si l'on considère les deux faces du nouveau polyèdre qui s'appuient sur le côté OO′, l'angle dièdre qu'elles comprennent est le supplément de l'angle constant ASB des deux perpendiculaires SA et SB à ces deux faces.

La réciproque de ce théorème est évidente.

On voit qu'en appliquant la construction indiquée sous l'une ou sous l'autre forme, le tétraèdre régulier conduit à un nouveau tétraèdre; l'hexaèdre régulier à un octaèdre régulier, et, réciproquement: le dodécaèdre régulier à un icosaèdre régulier, et réciproquement; ce qui justifie la dénomination de *conjugués* donnée à ces polyèdres (907).

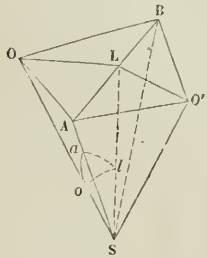
PROBLÈME.

911. *Un polyèdre régulier convexe étant donné, trouver : 1° l'inclinaison de deux faces adjacentes; 2° les rayons des sphères inscrite et circonscrite.*

1° Soient (*fig.* 499) S le centre de la sphère inscrite ou circonscrite, AB le côté commun aux deux faces adjacentes dont les centres sont O et O′, L son milieu : l'angle OLO′ mesure l'inclinaison cherchée I.

AB étant perpendiculaire au plan OLO′, les plans OLO′ et ASB sont perpendiculaires. Par suite, si du point S comme centre nous décrivons une sphère, sa rencontre avec l'angle trièdre SAOL déterminera un triangle sphérique aol, rectangle en l.

Fig. 499.



Soient, dans le polyèdre considéré, n le nombre de côtés de chaque face, m le nombre d'arêtes de chaque angle polyèdre. On aura évidemment

$$\text{angle}\, aol = \text{angle AOL} = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n},$$

$$\text{angle}\, oal = \text{angle OAL} = \frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}.$$

Le triangle sphérique rectangle aol donne d'ailleurs

$$\cos oal = \cos ol . \sin aol.$$

Mais

$$\cos ol = \cos \text{OSL} = \sin \text{OLS} = \sin \frac{1}{2} \text{I}.$$

On a donc la formule générale

$$\sin \frac{1}{2} \text{I} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

En l'appliquant aux différents polyèdres réguliers convexes, on trouve pour l'inclinaison I les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier........	70°31′43″,6
Hexaèdre régulier........	90°
Octaèdre régulier.........	109°28′16″,4
Dodécaèdre régulier......	116°33′54″,2
Icosaèdre régulier........	138°11′22″,75

Les valeurs indiquées sont exactes pour l'hexaèdre et l'icosaèdre, approchées pour les trois autres polyèdres. Les inclinaisons des faces du tétraèdre et de l'octaèdre régulier sont supplémentaires l'une de l'autre.

2° Soient a le côté du polygone donné, r son apothème, R son rayon. Le triangle OLA donne

$$\mathrm{OL} = \mathrm{AL}\cot\mathrm{AOL} = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n}.$$

Le triangle rectangle SOL donne à son tour

$$\mathrm{SO} = \mathrm{OL}\operatorname{tang}\mathrm{OLS},$$

c'est-à-dire

$$(1)\qquad r = \frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{I}.$$

Le triangle sphérique aol donne enfin

$$\cos oa = \cot aol . \cot oal.$$

Or

$$\cos oa = \cos\mathrm{OSA} = \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SA}}.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SO}} = \operatorname{tang} aol . \operatorname{tang} oal$$

ou

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\operatorname{tang}\frac{\pi}{m}.$$

On en déduit

$$(2)\qquad \mathrm{R} = \frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\mathrm{I}.$$

En appliquant les formules (1) et (2) aux différents polyèdres réguliers convexes, on obtient les valeurs suivantes :

Tétraèdre régulier.......	$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$,	$\mathrm{R} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.
Hexaèdre régulier........	$r = \frac{a}{2}$,	$\mathrm{R} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Octaèdre régulier........	$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$,	$\mathrm{R} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Dodécaèdre régulier......	$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$,	$\mathrm{R} = \frac{a(\sqrt{3} + \sqrt{15})}{4}$.
Icosaèdre régulier........	$r = \frac{a\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}$,	$\mathrm{R} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$.

Scolie.

912. Pour deux polyèdres *conjugués*, les nombres n et m ne faisant que s'échanger (907), le rapport $\frac{R}{r}$ demeure constant. Donc, si R est le même pour ces deux polyèdres, r est aussi le même. En d'autres termes, si les deux polyèdres conjugués sont inscrits à une même sphère, ils sont aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

POLYÈDRES RÉGULIERS D'ESPÈCE SUPÉRIEURE.

913. Nous avons déjà parlé (270) des nouveaux polygones réguliers découverts par M. Poinsot, et nous savons qu'*il y a autant de polygones réguliers différents de m côtés que de nombres premiers à m depuis* 1 *jusqu'à* $\frac{1}{2}(m-1)$

Si p est l'un quelconque de ces nombres, on joint les m points de division de la circonférence de p en p, et l'on revient au point de départ après avoir fait un nombre de tours égal à p.

914. Les polygones étoilés qu'on obtient en suivant la marche indiquée « ont leurs m côtés et leurs m angles bien nets et bien distincts : » ce sont les angles qui ont lieu aux bouts réunis deux à deux des » m droites dont la chaîne continue achève complétement la figure. Les » autres angles, formés par les côtés non contigus qui se traversent,..., » ne doivent pas être comptés ; pas plus que, dans les polygones ordi- » naires, on ne compte les angles qui auraient lieu à la rencontre des » côtés non contigus suffisamment prolongés. Sous ce point de vue, la » différence de ces polygones étoilés aux polygones ordinaires est que, » dans ceux-ci, un côté quelconque aurait besoin d'être prolongé pour » être rencontré par les côtés non contigus aussi prolongés, au lieu que, » dans les autres, les côtés mêmes peuvent être actuellement traversés » par les autres côtés.... Mais toutes ces distinctions sont plus appa- » rentes que réelles, et disparaissent tout à fait dans l'analyse où ces » polygones se présentent d'une manière inséparable. Si l'on cherche, en » effet, le côté d'un polygone régulier, on trouve une équation de degré » supérieur, dont toutes les racines sont réelles, et qui donne à la fois les » différents côtés de toutes les espèces de polygones réguliers de l'ordre » que l'on considère. » Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, t. IV, p. 25).

915. *L'ordre m d'un polygone* est marqué par le nombre m de ses côtés ou de ses sommets ; son *espèce* varie en raison du nombre premier

à m qui lui a donné naissance. Or, si ce nombre est p, il faut décrire p fois la circonférence (270) pour décrire le polygone lui-même. L'espèce d'un polygone étoilé est donc le nombre de circonférences parcourues en suivant tous ses sommets, ou le nombre de fois que les projections de ses côtés sur la circonférence circonscrite recouvrent cette circonférence. Si l'espèce d'un polygone étoilé est p, la somme de ses angles au centre vaut p fois quatre angles droits.

916. *L'ordre d'un angle polyèdre* est marqué par le nombre de ses faces. Il est d'ailleurs de même *espèce* que le polygone qui résulte de sa section par un plan. Si l'on considère une pyramide régulière ayant pour base un pentagone étoilé ou de seconde espèce, l'angle polyèdre au sommet est de seconde espèce, et les angles plans qui le forment, projetés sur la base de la pyramide, remplissent deux fois les quatre angles droits.

917. « ... En conservant toujours la définition générale des polyèdres » réguliers,..., on voit la possibilité de construire de nouveaux polyèdres » réguliers, non-seulement avec les nouveaux polygones (réguliers),..., » mais même avec les polygones réguliers ordinaires; et, pour bien en- » tendre cela, il faut commencer par distinguer nettement dans un po- » lyèdre ses faces, ses arêtes et ses sommets.

» Comme un même polyèdre peut paraître également construit sous » tels ou tels polygones, on prend pour les *faces* les plans qui, en plus » petit nombre, achèvent complétement ce même polyèdre.....

» Pour les *arêtes*, ce sont les côtés mêmes qui terminent les faces du » polyèdre, et par lesquels ces faces se joignent deux à deux, de sorte » que chaque arête sert de côté à deux faces adjacentes, et qu'ainsi le » nombre des arêtes est (toujours) égal à la moitié du nombre des côtés » de toutes les faces.

» C'est à ces seules droites, comme faîtes, que se trouvent les angles » dièdres du polyèdre; les autres angles que pourraient former les faces » en se traversant n'en font point partie, et de même c'est aux seuls » points où se réunissent les extrémités des arêtes que sont les *sommets* » et les angles polyèdres du polyèdre.

» Cela posé,... on peut construire de nouveaux polyèdres parfaitement » réguliers... : ils ont toutes leurs faces égales et régulières, également » inclinées deux à deux, et assemblées en même nombre autour de chaque » sommet. Ils peuvent être inscrits et circonscrits à la sphère (¹).... La

---

(¹) Car la démonstration du n° 908 est fondée seulement sur l'égale inclinaison des faces égales et régulières du polyèdre et sur l'identité de position du centre de chacune d'elles par rapport à ses intersections avec les faces adjacentes.

» différence essentielle de ces polyèdres aux polyèdres (réguliers) ordi-
» naires est que, dans ceux-ci, les faces étant projetées par des rayons
» sur la sphère inscrite ou circonscrite, les polygones (sphériques) cor-
» respondants recouvrent une seule fois la sphère; au lieu que, dans les
» autres, ces polygones la recouvrent exactement plusieurs fois. »
(Poinsot, *loc. cit.*). Ce dernier point exige une explication : soient α_1 $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et ω les projections sur la sphère des sommets successifs et du centre du polygone régulier convexe ou étoilé qui constitue l'une des faces du polyèdre; ce que nous entendons par *aire sphérique recouverte par la projection de cette face*, c'est la somme des aires des triangles sphériques isocèles successifs $\omega\alpha_1\alpha_2$, $\omega\alpha_2\alpha_3$, $\ldots$, $\omega\alpha_n\alpha_1$.

918. On nomme *ordre* d'un polyèdre régulier le nombre de ses faces, et *espèce* d'un polyèdre régulier le nombre exact de fois que sa projection sur la sphère (c'est-à-dire la somme des aires sphériques recouvertes par les projections de ses diverses faces) recouvre cette sphère.

919. Il est facile de voir qu'en prolongeant les côtés d'un polygone régulier jusqu'à leur rencontre on forme un polygone étoilé de même ordre, qui a pour noyau le polygone primitif. On peut faire provenir d'une manière analogue les polyèdres réguliers d'espèce supérieure des polyèdres réguliers ordinaires; en prolongeant les arêtes ou les faces d'un des polyèdres réguliers déjà connus, on obtient, sauf les cas d'impossibilité, un nouveau polyèdre régulier qui a pour noyau le polyèdre régulier ordinaire qui a servi de point de départ. C'est ce qu'a établi M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, t. IX, p. 68).

Plus tard, M. J. Bertrand (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLVI) a rattaché les nouveaux polyèdres aux polyèdres réguliers déjà connus, par une démonstration du même genre, mais beaucoup plus simple : c'est celle que nous allons exposer.

920. Nous regarderons d'abord comme évident que, *des points quelconques étant donnés dans l'espace, on peut toujours trouver un polyèdre* CONVEXE, *dont les sommets soient pris parmi les points donnés, et qui contienne tous les autres points dans son intérieur, à moins qu'il n'ait précisément pour sommets tous les points donnés eux-mêmes.*

Nous savons d'ailleurs (693) qu'il ne peut exister de polyèdre convexe dont chaque sommet soit la réunion de plus de cinq faces.

THÉORÈME.

921. *Étant donné un polyèdre régulier* A, *d'espèce quelconque, il existe toujours un polyèdre régulier convexe* X *qui a les mêmes sommets que le polyèdre* A.

Les sommets du polyèdre régulier quelconque A étant sur une même sphère (908), tout polyèdre convexe dont les sommets sont pris parmi ceux de A ne saurait contenir les autres dans son intérieur. Il existe donc (920) un polyèdre convexe X dont tous les sommets se confondent avec ceux du polyèdre A. Il reste à prouver que ce polyèdre convexe X est régulier.

Désignons par P la figure formée par l'ensemble des deux polyèdres considérés, et par Q une autre figure identique à la première. Puisque le polyèdre A est régulier, la coïncidence des deux figures pourra être obtenue en plaçant un sommet quelconque de Q sur un sommet déterminé de P, ce qui entraîne l'égalité de tous les angles polyèdres du polyèdre convexe X.

De plus, deux sommets étant l'un sur l'autre, la coïncidence des deux polyèdres A qui font partie de P et de Q, et par suite celles des figures totales, pourra être obtenue au moins de trois manières différentes; car les sommets considérés appartiennent à des angles au moins trièdres et, sur l'une des faces du premier angle, on peut placer une face quelconque du second. Les angles polyèdres correspondants des deux polyèdres convexes X sont donc, à leur tour, non-seulement égaux, mais susceptibles de coïncider aussi de trois manières différentes au moins; et, comme ces angles sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres (695), ils ont alors nécessairement toutes leurs faces égales et également inclinées.

Les faces des deux polyèdres X sont donc des polygones équiangles et également inclinés, dont la coïncidence peut être établie en plaçant un sommet arbitraire de Q sur un sommet désigné de P; en d'autres termes, ces faces sont des polygones réguliers égaux. Le polyèdre X, ayant pour faces des polygones réguliers égaux et pour angles des angles polyèdres égaux, est régulier.

Il convient de remarquer que l'ordre des angles polyèdres est le même pour le polyèdre A et pour le polyèdre X. On le voit sans peine en se fondant sur ce que cet ordre ne peut être que 3, 4 ou 5.

THÉORÈME.

922. *Il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèces supérieures.*

« En vertu du théorème précédent, pour obtenir les polyèdres régu-
» liers d'espèces supérieures, il faut évidemment prendre les polyèdres
» réguliers convexes (905), et procéder de la manière suivante : choisir
» un sommet sur l'un de ces polyèdres, et chercher s'il existe d'au-
» tres sommets qui, réunis à celui-là, puissent former un polygone ré-
» gulier. » (J. Bertrand, *loc. cit.*) Ce polygone est alors une face possible d'un polyèdre d'espèce supérieure ayant mêmes sommets que le polyèdre convexe proposé. Si le polyèdre d'espèce supérieure existe, le nombre des polygones égaux partant alors d'un même sommet est le

nombre de faces de son angle polyèdre : mais, pour qu'il en soit ainsi, ces polygones égaux doivent pouvoir former un angle polyèdre.

« Il est clair que cette construction appliquée au tétraèdre ne donne rien.

» Chaque sommet de l'octaèdre appartient à deux carrés, lesquels ne peuvent évidemment pas former les faces d'un polyèdre.

» Chaque sommet du cube peut former, avec deux autres sommets con-
» venablement choisis, un triangle équilatéral, et cela de trois manières
» différentes ; mais ces trois triangles appartiennent à un tétraèdre régulier.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut, de trois manières dif-
» férentes, former des triangles équilatéraux avec des sommets apparte-
» nant à deux des faces qui s'y réunissent ; mais ces triangles ne feront
» pas un angle polyèdre, deux d'entre eux n'ayant jamais d'arête commune.

» Chaque sommet du dodécaèdre régulier peut également être consi-
» déré comme le sommet de six triangles équilatéraux dont les autres
» sommets appartiennent à des faces contiguës à celles qui contiennent
» le sommet donné. Mais ces six triangles équilatéraux sont les faces de
» deux tétraèdres réguliers.

» Chaque sommet du dodécaèdre est enfin le sommet commun de trois
» pentagones réguliers dont les quatre autres sommets appartiennent au
» même polyèdre. Ces trois pentagones ne forment pas les faces d'un
» angle trièdre, parce que deux d'entre eux n'ont pas d'arête commune ;
» mais les pentagones étoilés qui ont les mêmes sommets forment un
» angle trièdre, et leur ensemble, pour tout le polyèdre, forme le dodé-
» caèdre régulier (de septième espèce).

» Chaque sommet de l'icosaèdre est le sommet commun de cinq trian-
» gles équilatéraux ayant pour côtés les droites les plus courtes que l'on
» puisse mener entre les sommets, après celles qui forment les côtés des
» faces. Ces triangles forment l'icosaèdre de septième espèce.

» Chaque sommet de l'icosaèdre peut être considéré comme le sommet
» commun de cinq pentagones réguliers de première espèce, dont les
» quatre autres sommets appartiennent également à l'icosaèdre ; ces pen-
» tagones sont les faces du dodécaèdre de troisième espèce (à faces con-
» vexes). Enfin les mêmes sommets peuvent être considérés comme
» appartenant à des pentagones étoilés qui forment le dodécaèdre (de
» troisième espèce, à faces étoilées).

» Il n'y a donc en tout que quatre polyèdres étoilés, qui sont précisé-
» ment ceux que M. Poinsot a découverts. » (J. Bertrand, *loc. cit.*)

Nous croyons devoir ajouter ici le raisonnement suivant, dû à M. Kœnigs, pour prouver que le dodécaèdre ne fournit qu'un polyèdre étoilé et que l'icosaèdre n'en donne que trois.

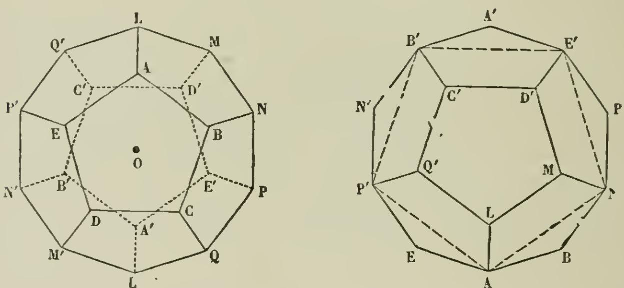
D'après ce qui précède le dodécaèdre ne peut donner que des polyèdres étoilés à sommets trièdres.

Or, parmi les plans passant par A (*fig.* 499 *bis*), le plan (AL, A'L') déterminé par les deux arêtes AL, A'L' joignant des couples de points diamétralement opposés A et A', L et L', est un plan de symétrie du dodécaèdre; et, il y a en chaque sommet A de ce corps trois plans de symétrie tels que le précédent.

Un plan de symétrie du *polyèdre primitif* étant un plan de symétrie du *polyèdre dérivé*, nous allons chercher à former au sommet A un trièdre admettant le plan (AL, A'L') pour plan de symétrie et ayant par suite une arête dans ce plan, tandis que la face opposée est perpendiculaire à ce plan.

Pour cela, nous ferons tourner un demi-plan autour d'une droite menée par A perpendiculairement au plan de symétrie; et, en considérant les positions du plan contenant des sommets du polyèdre primitif, nous chercherons à former avec ces sommets des polygones réguliers pouvant être pris pour faces d'un polyèdre dérivé.

Fig. 499 *bis*.



Le plan est supposé tourner vers l'arrière de la figure ([1]). Voici le tableau de ses positions successives :

Première position. — Le plan contient, outre A, le sommet L seul.

Deuxième position. — Le plan est AMQ'. Le triangle AMQ' est équilatéral; les deux autres sont AP'D, ACN; ils n'ont pas d'arête commune.

Troisième position. — Le plan est AC'D'. Le triangle AC'D' n'est pas équilatéral.

Quatrième position. — Le plan est AP'N; il contient aussi B' et E', car les arêtes LA, Q'P', C'B', D'E', MN sont également inclinées sur la face LQ'C'D'M. Les sommets A, N, E', B', P' forment un pentagone semblable au pentagone qui forme la face du dodécaèdre primitif. Les trois penta-

([1]) L, N, Q, M', P' sont dans un même plan; L', N', Q', M, P sont dans un autre; aucun de ces plans ne contient le centre O qui est dans un plan parallèle intermédiaire.

gones convexes formés de la sorte autour de A ont deux à deux en commun deux sommets non consécutifs ; ils ne peuvent pas former un angle polyèdre ; mais, par la même raison, les pentagones étoilés ayant les mêmes sommets ont deux à deux une arête commune et donnent le *dodécaèdre étoilé* (de septième espèce).

Cinquième position. — Le plan est AN'P. Le triangle AN'P est isocèle, mais on peut démontrer que N'P est plus grand que AP.

Sixième position. — Le plan est AM'Q. Le triangle AM'Q n'est pas équilatéral, car M'Q est égal à AD, lequel est inférieur à AM'.

Septième position. — Le plan est ABCDE ; c'est la face même du dodécaèdre primitif.

A partir de là, le demi-plan, en achevant sa rotation, ne rencontre plus aucun sommet.

Le dodécaèdre ne peut donc fournir qu'un polyèdre étoilé.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer le même raisonnement à l'icosaèdre ; la chose est encore plus simple, et l'on reconnaît de la sorte que l'icosaèdre ne donne que trois polyèdres étoilés.

PROBLÈME.

923. *Trouver l'espèce d'un polyèdre régulier*,

La relation d'Euler

$$(1) \qquad S + F = A + 2,$$

démontrée au n° 688, ne s'applique pas seulement aux polyèdres convexes ; elle subsiste sans modification pour tout polyèdre jouissant de cette propriété qu'il existe, dans leur intérieur, un point tel que chaque demi-droite issue de ce point rencontre la surface en un point, mais en un seul. C'est ce que montre clairement la démonstration suivante que l'on peut substituer à celle du n° 688.

Imaginons une sphère ayant pour centre le point en question et, en considérant ce point comme centre de projection, projetons le polyèdre sur la sphère. A chaque face du polyèdre répondra un polygone sphérique ayant le même nombre n de côtés et dont l'aire aura (850) pour expression $s - 2n + 4$, s désignant la somme des angles de ce polygone sphérique. La somme des aires de tous les polygones sphériques ainsi formés, c'est-à-dire l'aire de la sphère, sera donc représentée par $\Sigma s - 2\Sigma n + 4F$ et, comme dans le système d'unités adopté (813) l'aire de la sphère est égale à 8, on aura la relation

$$(2) \qquad \Sigma s - 2\Sigma n + 4F = 8.$$

Or, d'une part, la somme des angles sphériques autour de la projection de chaque sommet du polyèdre étant égale à 4, on a $\Sigma s = 4S$. D'autre part, la projection de chaque arête du polyèdre formant un côté appartenant à deux polygones sphériques, on a $\Sigma n = 2A$. La relation (2) devient donc $4S - 4A + 4F = 8$, c'est-à-dire la relation (1).

Cette démonstration offre d'ailleurs l'avantage de montrer la route à suivre pour modifier la formule d'Euler de manière à la rendre applicable aux polyèdres réguliers étoilés. Il faut alors tenir compte à la fois de l'espèce du polyèdre considéré (918), de l'espèce de ses faces (915) supposées toutes de même espèce, et de celle de ses angles polyèdres (916) supposés tous de même espèce. A cet effet, projetons le polyèdre donné sur la sphère inscrite ou circonscrite, en prenant pour centre de projection le centre de cette sphère (917).

Soient n le nombre des côtés de l'une des faces du polyèdre, φ le nombre qui en marque l'espèce, a l'aire sphérique que sa projection recouvre (917), s la somme des angles de ce polygone sphérique. Décomposons-le en triangles en joignant à ses sommets, par des arcs de grands cercles, la projection du centre de la face considérée. L'aire de l'un de ces triangles, ayant α pour somme de ses angles, sera, en prenant pour unités l'angle droit et le triangle trirectangle (847), $\alpha - 2$. L'aire a qui contient n de ces triangles, sera $a = \Sigma\alpha - 2n$. Or $\Sigma\alpha$, c'est la somme des angles des n triangles ou la somme s des angles du polygone augmentée de la somme des angles au sommet de ces mêmes triangles, somme qui est égale à 4φ, puisque l'espèce de la face projetée est φ (916). Il vient donc

$$a = s + 4\varphi - 2n$$

Soit E l'espèce du polyèdre ou le nombre exact de fois que sa projection recouvre la sphère dont l'aire est ici représentée par 8 (813); nous aurons $Fa = 8E$ en désignant par F le nombre des faces.

On a d'ailleurs $Fn = 2A$. A étant le nombre des arêtes du polyèdre. Quant à Fs, elle représente la somme des angles de tous les polygones sphériques obtenus. Mais la somme des angles réunis autour de chacun de leurs sommets, projection de toutes les faces de l'angle polyèdre correspondant vaut σ fois quatre angles droits, σ marquant l'espèce des angles polyèdres (916). On aura donc, s'il y a S sommets,

$$Fs = 4\sigma S,$$

et en substituant les valeurs de a, n, s dans la relation ci-dessus, il vient

$$\text{(I)} \qquad A + 2E = \varphi.E + \sigma.S.$$

Si l'on fait dans cette formule $E = \varphi = \sigma = 1$, on retrouve la formule d'Euler. Au lieu de la formule que nous venons d'obtenir, Poinsot (Mémoire cité) trouve

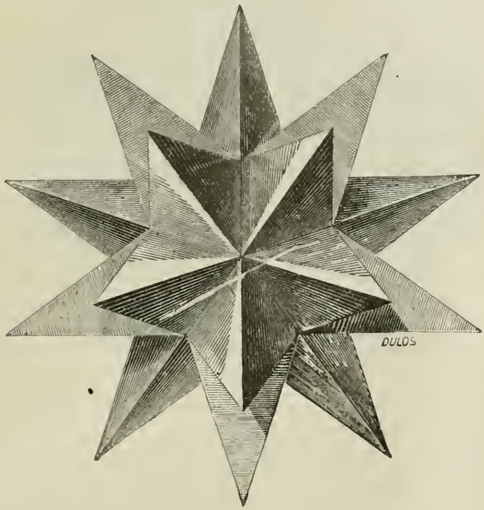
$$A + 2E = F + \sigma S,$$

parce qu'il ne tient pas compte de l'espèce de la face du polyèdre.

924. *Dodécaèdre régulier de septième espèce* (Poinsot, quatrième espèce).

On l'obtient à l'aide de pentagones étoilés ou de seconde espèce, formant des angles trièdres de première espèce autour de chaque sommet d'un dodécaèdre régulier ordinaire (922). Ce nouveau polyèdre (*fig.* 500)

Fig. 500.



a donc vingt sommets (907). En désignant par m le nombre des arêtes d'un de ses angles polyèdres et par n le nombre des côtés d'une de ses faces, on a (695)

$$2A = mS \quad \text{et} \quad 2A = nF;$$

d'où l'on déduit (en faisant $S = 20$, $m = 3$, $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, en faisant $\sigma = 1$, $\varphi = 2$, $A = 30$, $F = 12$, $S = 20$,

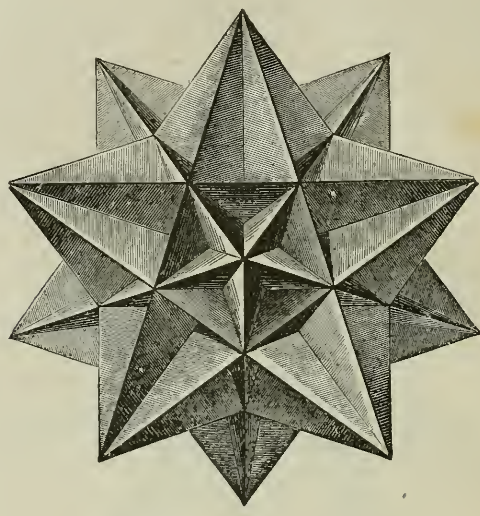
$$2E = 24 + 20 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouveau dodécaèdre est donc de septième espèce.

925. *Icosaèdre régulier de septième espèce.*

On l'obtient (922) à l'aide de triangles équilatéraux formant des angles pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre (*fig.* 501) a donc 12 sommets (907).

Fig. 501.



En faisant $S = 12$, $m = 5$, $n = 3$, dans les équations $2A = mS$ et $2A = nF$, on trouve

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 20.$$

La formule (I) donne ensuite, en y faisant $\varphi = 1$ et $\sigma = 2$,

$$2E = 20 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 7.$$

Ce nouvel icosaèdre est donc de septième espèce.

926. *Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces convexes.*

On l'obtient (922) à l'aide de pentagones réguliers ordinaires formant des angles pentaèdres de seconde espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre ayant douze sommets, les équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent (pour $m = 5$ et $n = 5$)

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, pour $\varphi = 1$ et $\sigma = 2$,

$$2E = 12 + 24 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces convexes (*fig.* 502) est donc de troisième espèce.

Fig. 502.

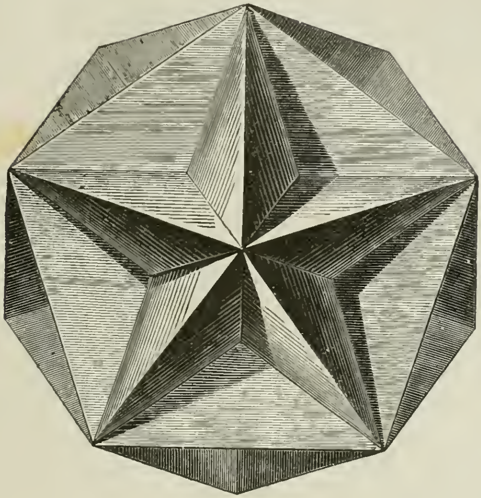
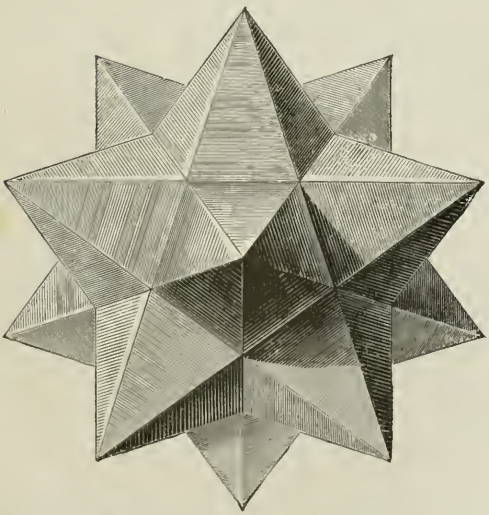


Fig. 503.



927. *Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces étoilées* (Poinsot, deuxième espèce).

On l'obtient (922) à l'aide de pentagones étoilés formant des angles pentaèdres de première espèce autour de chaque sommet d'un icosaèdre régulier ordinaire. Ce nouveau polyèdre a donc douze sommets (907). Les équations $2A = mS$ et $2A = nF$ donnent alors, pour $m = 5$ et $n = 5$,

$$A = 30 \quad \text{et} \quad F = 12.$$

La formule (I) donne ensuite, pour $\varphi = 2$ et $\sigma = 1$,

$$2E = 24 + 12 - 30 \quad \text{ou} \quad E = 3.$$

Ce nouveau dodécaèdre à faces étoilées (*fig.* 503) est donc aussi de troisième espèce.

928. Voici le tableau des éléments des quatre nouveaux polyèdres réguliers.

	F	n	φ	S	m	σ	A	E
Dodécaèdre régulier de septième espèce	12	5	2	20	3	1	30	7
Icosaèdre régulier de septième espèce	20	3	1	12	5	2	30	7
Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces convexes	12	5	1	12	5	2	30	3
Dodécaèdre régulier de troisième espèce, à faces étoilées	12	5	2	12	5	1	30	3

On voit que les nouveaux polyèdres sont *conjugués* deux à deux, comme les polyèdres réguliers ordinaires (907).

929. Pour familiariser davantage le lecteur avec les nouveaux polyèdres, nous terminerons en indiquant aussi leur mode de construction d'après Cauchy (919), parce qu'il fait peut-être mieux image que celui qui a été adopté plus haut (922).

« En prolongeant dans le dodécaèdre ordinaire les arêtes qui forment » les côtés des douze pentagones, on obtient le dodécaèdre étoilé (de troi- » sième espèce).

» Si, dans le dodécaèdre ordinaire, on prolonge le plan qui contient » chaque face jusqu'à la simple rencontre des plans des cinq faces qui » entourent la face opposée, on obtiendra le dodécaèdre de troisième » espèce, compris, comme le dodécaèdre ordinaire, sous des pentagones » de première espèce.

» Enfin, si l'on prolonge les arêtes qui, dans ce dodécaèdre de troi-
» sième espèce, forment les côtés des douze pentagones, on obtiendra le
» dodécaèdre de septième espèce.

» On obtiendra l'icosaèdre de septième espèce, en prolongeant chaque
» face de l'icosaèdre ordinaire jusqu'à la rencontre des plans des trois
» triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère. »

IV — Homothétie et homologie dans l'espace.

FIGURES HOMOTHÉTIQUES DANS L'ESPACE.

930. Étant donné un système de points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace (*fig.* 225 et 226), si, sur les rayons SA, SB, SC, ..., issus d'un point S pris à volonté, on prend à partir de ce point des segments SA′, SB′, SC′, ..., tels que

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \ldots = k,$$

k étant un nombre quelconque, on dit que le nouveau système de points A′, B′, C′, ... est *homothétique* au système primitif ABC.... Suivant que le *rapport* k *d'homothétie* est positif ou négatif, les points homologues tels que A et A′ sont situés d'un même côté ou de côtés différents par rapport au *centre* S *d'homothétie*, et les deux systèmes ABC..., A′B′C′... sont dits *homothétiques directs* ou *homothétiques inverses*.

La définition de l'homothétie est donc la même pour les figures de l'espace et pour les figures planes (354). Toutefois, il n'est plus vrai de dire ici, comme dans le plan, que l'homothétie inverse donne, abstraction faite de la position, les mêmes figures que l'homothétie directe; F étant une figure quelconque de l'espace, si l'on construit, à l'aide d'un centre S arbitraire, la figure homothétique directe F′ suivant le rapport k et la figure homothétique inverse F_1, suivant le rapport $-k$, les deux figures F′ et F_1 seront *symétriques* par rapport au point S (658). Or on ne peut plus faire coïncider deux pareilles figures (673), tandis que dans le plan une rotation de 180 degrés autour du point S entraînait la coïncidence (354).

931. *La figure homothétique d'une sphère est une sphère;* la démonstration est la même que celle du n° 355. Par suite, comme un cercle peut toujours être considéré comme l'intersection de deux sphères, *la figure homothétique d'une circonférence par rapport à un point quelconque de l'espace est une circonférence.*

932. Le théorème du n° 356 et sa démonstration subsistent. *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle à la première, et l'angle de deux droites est égal à celui de leurs droites homologues* (357, 358).

La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle au premier, car, si l'on considère dans le plan donné une droite qui tourne autour d'un point A, dans chacune de ses positions cette droite aura pour homothétique une droite parallèle passant par un point fixe A′ homothétique de A. Il résulte de là : 1° qu'*un plan qui passe par le centre d'homothétie est à lui-même son homothétique ;* 2° que *l'angle de deux plans est égal à l'angle de leurs homothétiques.*

Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles, comme limites de sécantes parallèles. Par suite (883), *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces homothétiques sont parallèles.*

933. *Deux systèmes sont homothétiques, s'il existe dans l'espace deux points* O *et* O′ *tels, que les droites qui joignent le point* O *aux divers points du premier système, et les droites qui joignent le point* O′ *aux divers points du second système, soient parallèles et dans un même rapport* k; la démonstration est la même qu'au n° 360.

Il résulte de là que *deux sphères quelconques sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses* (362) ; les deux centres d'homothétie divisent harmoniquement la ligne des centres des deux sphères; ces centres sont en outre les sommets des deux cônes qu'on peut circonscrire aux deux sphères. Lorsque les deux sphères sont tangentes, leur point de contact est un centre d'homothétie, *directe* si le contact est *intérieur, inverse* si le contact est *extérieur.*

934. Le théorème du n° 363 et sa démonstration subsistent. Ainsi, *deux systèmes homothétiques à un troisième sont homothétiques entre eux, et les trois centres d'homothétie sont sur une même ligne droite,* qu'on nomme *axe d'homothétie des trois systèmes.*

Trois sphères considérées deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse (933). Elles ont donc quatre axes d'homothétie : un *axe d'homothétie directe* qui contient les trois centres d'homothétie directe, et trois *axes d'homothétie inverse* qui renferment chacun deux centres d'homothétie inverse et le centre direct qui répond au troisième centre inverse. Ces *quatre axes d'homothétie* sont ceux des trois cercles (366) que l'on obtient en coupant les trois sphères par le plan qui passe par leurs centres.

935. *Lorsque quatre systèmes* P, P′, P″, P‴ *sont homothétiques deux à deux, leurs six centres d'homothétie sont situés dans un même plan.*

En effet, soient respectivement O_1, O_2, O_3, les centres d'homothétie de P et P′, de P et P″, de P et P‴; le plan $O_1 O_2 O_3$ est à lui-même son homologue dans les systèmes P et P′, puisqu'il contient leur centre O_1; il est aussi à lui-même son homologue dans les systèmes P et P″, puisqu'il contient leur centre O_2. Donc ce même plan est encore à lui-même son homologue dans les systèmes P′ et P″ (934); et, par suite, il contient leur centre d'homothétie. On prouverait de même que ce plan passe par les centres d'homothétie de P′ et P‴, et de P″ et P‴.

Ces six centres d'homothétie sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés sont les quatre axes d'homothétie des quatre systèmes proposés pris trois à trois. Le plan de ce quadrilatère reçoit le nom de *plan d'homothétie* des quatre systèmes P, P′, P″, P‴.

936. Considérons en particulier le *cas de quatre sphères*. Comme deux sphères sont à la fois homothétiques directes et homothétiques inverses, on aura *douze centres d'homothétie*, dont *six directs* et *six inverses*. Il est aisé de voir qu'il y a *huit plans d'homothétie*. En effet, imaginons le tétraèdre dont les sommets sont les centres des quatre sphères; sur chaque face de ce tétraèdre, il y a six centres d'homothétie, trois directs et trois inverses (934). Considérons l'un O des six centres qui sont sur l'une des faces; ce point O appartient à deux droites A et B dont chacune passe par deux autres centres de la même face. D'ailleurs, ce même point O est commun à une autre face du tétraèdre, et, par suite, il appartient également à deux autres droites C et D situées sur cette seconde face. En combinant les deux droites A et B de la première face avec les deux droites C et D de la seconde, on obtient quatre plans, AOC, AOD, BOC, BOD, dont chacun passant par cinq centres d'homothétie renferme nécessairement le sixième centre correspondant. Ainsi, par chaque centre O de la première face, passent quatre plans d'homothétie; mais chacun de ces plans est commun à trois centres de cette même face. Donc le nombre total des plans d'homothétie est égal à huit.

937. Deux figures de l'espace sont *semblables* lorsque, par un déplacement convenable, on peut amener la seconde sur l'une des homothétiques directes de la première. Or, d'après le n° 930, pour avoir tous les systèmes homothétiques à un système donné, il n'est pas nécessaire de faire varier le centre; il suffit, en prenant un centre arbitraire, de faire varier k de o à ∞ (364). Donc on obtiendra toutes les figures semblables à une figure donnée, en construisant, avec un centre pris à volonté, les surfaces homothétiques qui répondent à toutes les valeurs du rapport k, depuis zéro jusqu'à l'infini.

Ainsi *deux sphères quelconques sont semblables* (931).

La seule figure semblable à une surface conique est cette surface conique elle-même; car, si l'on prend le sommet O pour centre d'homothétie, l'homologue A′ d'un point quelconque A de la surface conique proposée est situé sur la génératrice OA.

Enfin *deux surfaces cylindriques sont homothétiques lorsque leurs génératrices sont parallèles, et leurs directrices deux courbes homothétiques;* car la figure homothétique d'une droite est une droite parallèle. Par suite, *les sections par un même plan de deux cylindres homothétiques sont deux courbes homothétiques* dont le centre est à la rencontre du plan sécant et de la parallèle aux génératrices menée par le centre d'homothétie des deux cylindres.

FIGURES HOMOLOGIQUES DANS L'ESPACE.

938. La nouvelle définition donnée au n° 732 pour les figures planes s'étend aux figures de l'espace, lorsqu'on remplace la droite fixe X par un plan fixe.

Ainsi, *étant donnés un point fixe* O *et un plan fixe* Q, si, sur *chaque rayon* Oμ *joignant le point fixe* O *à un point quelconque* μ *du plan* Q, *on prend deux points* m *et* m' *tels que le rapport anharmonique* $(O\mu mm')$ *ait une valeur constante* λ, *les points* m *et* m' *décrivent deux figures* F *et* F′ *qu'on dit* HOMOLOGIQUES.

O est le *centre* d'homologie, Q le *plan* d'homologie, et λ le *coefficient* d'homologie.

Le point O est son propre homologue, et il partage cette propriété avec chacun des points du plan Q.

Au lieu de donner la constante λ, on peut donner un premier couple (a, a') de points homologues. Alors, pour obtenir l'homologue d'un point quelconque m de la première figure F, il suffit de prendre l'intersection m' du rayon Om avec la droite $a'\varepsilon$ qui joint le point a' au point ε, où la droite am rencontre le plan d'homologie. Ce tracé est la généralisation de celui du n° 729 et, d'après les considérations développées au n° 732, il équivaut à la définition donnée ci-dessus.

939. Les sections faites dans les figures F et F′ par un plan quelconque R passant par le centre d'homologie O sont évidemment deux figures homologiques planes ayant pour centre d'homologie le point O, pour axe d'homologie l'intersection des plans Q et R, et pour coefficient λ.

D'après cela, à une droite quelconque de la figure F répond, dans la figure F′, une droite coupant la première sur le plan d'homologie. Toute droite passant par O est sa propre homologue.

A tout plan P de la figure F répond, dans la figure F′, un plan qui rencontre le premier sur le plan d'homologie. En effet, soient Δ l'intersection du plan P et du plan d'homologie Q; a un point fixe du plan P et a' son homologue; l'homologue m' d'un point quelconque m du plan P appartient à la droite homologue de am; or le point α où am rencontre Δ étant son propre homologue, la droite $am\alpha$ a pour homologue $\alpha a'$ et, par suite, le point m' est dans le plan déterminé par le point a' et la droite Δ. Tout plan passant par le centre d'homologie est son propre homologue. Si un plan est parallèle au plan d'homologie, il en est de même de son homologue ; par suite, si une figure F est située dans un plan parallèle au plan d'homologie, la figure homologue F′ est semblable à la première.

940. Dans deux figures homologiques, le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues.

Il en est de même pour un faisceau plan de quatre droites et pour le faisceau correspondant ; pour le faisceau de quatre plans passant par une même droite et pour le faisceau formé par les plans homologues.

Le premier principe est évident, d'après la remarque faite en tête du numéro qui précède ; les deux autres s'en déduisent immédiatement.

941. Lorsqu'un point m' de la figure F′ est à l'infini, l'égalité

$$(O\mu m m') = \lambda$$

se réduit à

$$\frac{mO}{m\mu} = \lambda.$$

Donc tous les points à l'infini de la figure F′ ont leurs homologues situés dans un plan U parallèle au plan d'homologie ; ce plan est dit le *plan limite* de la figure F.

On est ainsi conduit à généraliser la notion acquise au n° 588, sur les points à l'infini dans un plan. Puisque tous les points à l'infini dans l'espace ont leurs homologues situés dans un plan, et que la figure homologue d'un plan est un plan, *on doit considérer tous les points à l'infini dans l'espace comme étant situés dans un même plan* qu'on nomme *plan à l'infini ;* ce plan contient les droites à l'infini de tous les plans de l'espace.

Mais revenons aux figures homologiques. La figure F′ a aussi son plan limite V′ qui répond aux points à l'infini de la figure F ; et l'on voit, comme au n° 732, que le rapport des distances du plan limite U au centre O et au plan Q d'homologie est égal à λ, tandis que ce rapport est égal à $\frac{1}{\lambda}$ pour le plan limite V′.

Étant donnés une figure F, son plan limite U, ainsi que le centre O et le plan Q d'homologie, on obtient l'homologue m' d'un point quelconque m de la figure F de la manière suivante : p et q étant les points où une droite menée par m rencontre les plans U et Q, on mène par le point q la parallèle au rayon Op, et l'on prend l'intersection m' de cette droite (homologue de pmq) avec le rayon Om.

942. Pour $\lambda = -1$, l'homologie est dite *harmonique;* les deux plans limites se confondent avec le plan qui est équidistant du centre et du plan d'homologie.

Quand le plan d'homologie est à l'infini, l'homologie devient *homothétie*. Si, de plus, l'homologie est alors harmonique, on est ramené à la *symétrie par rapport à un centre*.

Lorsque le centre d'homologie est à l'infini, l'homologie devient *affinité;* la seconde figure se déduit de la première en dilatant dans un rapport constant ses ordonnées normales ou obliques par rapport au plan d'homologie. Si, de plus, l'homologie est alors harmonique, on est ramené à la *symétrie* (normale ou oblique) *par rapport à un plan.*

943. Nous montrerons plus tard les ressources qu'offre à la Géométrie pure la transformation homologique. Nous nous bornerons à signaler ici une des plus intéressantes applications pratiques de cette théorie; nous voulons parler de la construction des *bas-reliefs,* c'est-à-dire de ces figures qui forment une faible saillie sur le mur d'un édifice et à l'aide desquelles on représente un sujet ou une scène quelconque. Le bas-relief F et la scène F′ qu'il représente sont deux figures homologiques. Soit O l'œil du spectateur qui est en avant du mur, tandis que la figure F′ est supposée en arrière; désignons par a' le point de F′ qui est le plus voisin du mur, et par P′ le plan mené parallèlement au mur par le point le plus éloigné. On prend le point O pour centre d'homologie, le plan P du mur pour plan homologue de P′, et l'on se donne à volonté, un peu en avant du mur, le point a qu'on veut faire correspondre au point a' et qui sera le point le plus saillant du bas-relief. Ces données, c'est-à-dire le centre d'homologie O, un couple (a, a') de points homologues et un couple (P, P′) de plans homologues, suffisent évidemment pour déterminer la figure F homologue de F′. m' étant un point quelconque de F′, on prend l'intersection b' de la droite $a'm'$ et du plan P′; le rayon Ob' donne, par sa rencontre avec le plan P, l'homologue b de b'; par suite, l'intersection m de ab et du rayon Om' est le point m du bas-relief qui répond au point m' de la figure à représenter. On pourrait aussi commencer par déterminer, à l'aide de ces données, le plan d'homologie, et opérer ensuite à l'aide du plan et du centre d'homologie, et du couple (a, a').

V. — Plan polaire et plan radical.

POLE ET PLAN POLAIRE PAR RAPPORT A LA SPHÈRE.

944. *Un point* O *et une sphère* C *étant situés d'une manière quelconque dans l'espace, si par le point* O *on mène une sécante quelconque* OFE (*fig.* 216 et 217, n° 340), *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I, *lorsque*

la sécante tourne autour du point O, *est un plan* P *perpendiculaire au diamètre* AB *qui passe par le point* O ; car, dans chaque plan mené par OC, le lieu est une droite (340) perpendiculaire au diamètre AB et menée par le point H, conjugué harmonique de O par rapport à ce diamètre.

On dit que le point O est le *pôle* du plan P, et que le plan P est le *plan polaire* du point O par rapport à la sphère C.

Le plan polaire P *d'un point* O *est* évidemment *le lieu des polaires du point* O *par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par* O.

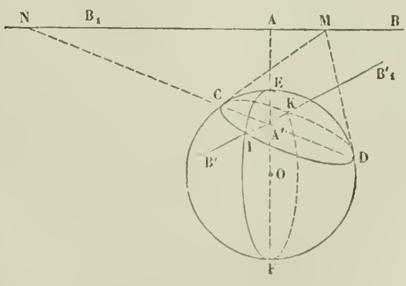
Le rayon de la sphère est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle et au plan polaire. La discussion des positions du pôle et du plan polaire par rapport à la sphère est la même qu'au n° 341. Nous remarquerons seulement que, *lorsque le pôle est extérieur à la sphère, le plan polaire est le plan de la circonférence de contact du cône qui est circonscrit à la sphère et qui a le pôle pour sommet.*

945. *Les plans polaires de tous les points d'un plan passent par le pôle de ce plan;* et inversement, *les pôles de tous les plans qui passent par un même point sont sur le plan polaire de ce point.* La démonstration du n° 342 subsiste; seulement, XY (*fig.* 218) représente alors la projection, sur le plan considéré, de la droite CO qui joint un point quelconque O de ce plan au centre C de la sphère.

Il résulte de là que, *si chacun des points d'un plan* P *est pris pour sommet d'un cône circonscrit à la sphère, les plans des cercles de contact passent tous par un même point p, pôle du plan* P; inversement, *si, suivant chacun des cercles de la sphère dont les plans passent par un même point p, on circonscrit un cône à la sphère, les sommets de ces cônes sont tous dans un même plan* P, *qui est le plan polaire du point p.*

946. Soient une sphère dont le centre est O et une droite quelconque

Fig. 504.



AB (*fig.* 504). Prenons le pôle A' de AB par rapport au grand cercle

ECFD situé dans le plan AOB, et par le point A′ élevons la perpendiculaire A′B′ à ce plan AOB ; on voit que, réciproquement, la droite AB est la perpendiculaire au plan OA′B′ élevée par le pôle A de A′B′ par rapport au grand cercle EIFK situé dans le plan OA′B′. Les deux droites AB, A′B′ ont reçu, d'après cela, le nom de *droites réciproques* par rapport à la sphère O.

Quand deux droites sont réciproques par rapport à une sphère, chacune d'elles est le lieu des pôles de tous les plans passant par l'autre; ou, ce qui revient au même, *chacune d'elles est l'intersection commune des plans polaires des divers points de l'autre.* En effet, le plan polaire d'un point quelconque M de AB est perpendiculaire au plan FCE, et sa trace sur ce plan est la polaire du point M par rapport au cercle FCE. Cette trace passe donc (342) par le point A′ qui est le pôle de AB par rapport au cercle FCE. Par suite, le plan polaire CID du point M renferme la droite A′B′.

Il résulte de là que, *lorsque deux plans sont tangents à la sphère, leur intersection est réciproque de la droite qui unit les deux points de contact,* car ces points de contact sont les pôles des plans tangents.

Remarquons enfin que *la droite* AB *est le lieu des pôles de sa réciproque* A′B′ *par rapport à tous les cercles de la sphère dont les plans passent par* A′B′. En effet, A′ étant le pôle de la droite AB par rapport au cercle FCE, si N est le point où la droite AB rencontre le diamètre CD d'un cercle quelconque CID conduit par A′B′, les points C, A′, D, N forment un système harmonique ; donc N est le pôle de A′B′ par rapport au cercle CID.

PLAN RADICAL DE DEUX SPHÈRES.

947. Si, par un point M de l'espace, on mène à une sphère O une sécante arbitraire qui rencontre la sphère en A et B, le produit MA.MB a une valeur indépendante de la direction de la sécante. Ce produit constant, qui est positif lorsque le point M est extérieur à la sphère, négatif lorsque le point M est intérieur, et nul lorsque le point M est sur la surface sphérique, prend le nom de *puissance du point* M *par rapport à la sphère* O.

La puissance d'un point par rapport à une sphère est égale, en grandeur et en signe, à l'excès du carré de la distance de ce point au centre sur le carré du rayon (372). *Lorsque le point est extérieur à la sphère, sa puissance est égale au carré de la tangente menée à la sphère par ce point.*

Quand deux sphères se coupent orthogonalement, le carré du rayon de chacune d'elles est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre sphère (383).

948. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres* (373).

Ce plan a reçu le nom de *plan radical* des deux sphères. — *Lorsque deux sphères se coupent, leur plan radical est le plan du cercle commun;* lorsque deux sphères se touchent, leur plan radical est le plan tangent au point commun. — Le plan radical de deux sphères concentriques disparaît à l'infini

Le plan radical de deux sphères est le lieu des points d'où l'on peut leur mener des tangentes égales (374). *C'est aussi le lieu des centres des sphères qui coupent les deux premières orthogonalement* (383).

949. *Les plans radicaux de trois sphères considérées deux à deux passent par une même droite* (376). Cette droite est la perpendiculaire au plan des centres des trois sphères, élevée par le centre radical des trois grands cercles contenus dans ce plan; elle a reçu le nom d'*axe radical* des trois sphères.

Lorsque les centres des trois sphères sont en ligne droite, l'axe radical se transporte à l'infini : il peut cependant arriver que les trois plans radicaux coïncident, auquel cas les trois sphères ont un plan radical au lieu d'un axe radical.

950. Enfin, les *six plans radicaux de quatre sphères considérées deux à deux passent par un même point*. Car le point où l'axe radical des trois premières sphères rencontre le plan radical de l'une de ces sphères et de la quatrième est d'égale puissance par rapport aux quatre sphères; il est donc commun aux six plans radicaux des sphères considérées deux à deux, et aussi aux quatre *axes radicaux* des sphères considérées trois à trois.

Ce point est dit le *centre radical* des quatre sphères. Il est unique, à moins que les centres des quatre sphères ne soient dans un même plan; dans ce cas, il peut arriver que le centre radical disparaisse à l'infini, ou bien qu'il soit remplacé par un axe radical, ou même par un plan radical si les centres des quatre sphères sont en ligne droite.

951. Les propriétés relatives aux points antihomologues ainsi que leurs démonstrations subsistent pour les sphères. Il suffit de remplacer, dans le n° 378, *cercles* par *sphères, axe radical* par *plan radical,* et, dans le n° 379, *le pôle t* par *la droite réciproque, le point de rencontre des tangentes* par *l'intersection des plans tangents.*

VI. — Figures inverses dans l'espace.

COMPLÉMENT DE LA MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

952. La définition du n° 384 s'applique à des points A, B, C, ..., situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Le *cercle d'inversion* devient alors une sphère, et, lorsqu'on fait varier le rayon de cette sphère sans déplacer son centre, les figures inverses de la figure donnée ainsi obtenues sont homothétiques (385) entre elles.

953. *Un plan* L *et une sphère* O *quelconque peuvent être considérés comme deux figures inverses l'une de l'autre* (388). *La figure inverse d'un plan* L *est une sphère* O *passant par l'origine; et la figure inverse d'une sphère* O, *par rapport à l'un quelconque de ses points pris pour origine, est un plan* L *perpendiculaire au diamètre passant par l'origine.*

On voit aisément que :

1° Si plusieurs cercles situés dans un même plan ont le même centre radical, l'inversion les transforme en cercles dont les plans passent par un même point.

2° Si plusieurs cercles situés dans un même plan ont le même axe radical, l'inversion les transforme en cercles dont les plans passent par une même droite.

954. *Deux sphères quelconques* O *et* O′ *peuvent être considérées comme deux figures inverses l'une de l'autre* (390). *La figure inverse d'une sphère* O, *par rapport à un point* S *extérieur ou intérieur pris pour origine, est une autre sphère* O′.

955. *L'inverse d'une circonférence* C *par rapport à un point quelconque* S *de l'espace pris pour origine est une autre circonférence* C′. Car, la circonférence C étant considérée comme l'intersection de deux sphères O et O′, son inverse est l'intersection des deux sphères O′ et O'_1, inverse des sphères O et O_1, c'est-à-dire un cercle.

Il résulte immédiatement de la définition des figures inverses que *trois couples quelconques a et a', b et b', c et c', des points correspondants de deux figures inverses sont situés sur une même sphère.* Donc une circonférence quelconque C et son inverse C′ appartiennent à une même sphère, et par suite (878) elles sont des sections antiparallèles d'un même cône oblique qui a l'origine S pour sommet. De là le moyen de trouver le centre de la circonférence C′ inverse d'une circonférence C; *ce centre est* (880) *sur la droite qui joint l'origine* S *au sommet d'un* *cône auxiliaire, circonscrit suivant le cercle* C *à la sphère déterminée par la circonférence* C *et le point* S.

956. La formule du n° 386 et sa démonstration subsistent. Quant au théorème du n° 387, il s'applique aussi à deux lignes quelconques de l'espace; mais une nouvelle démonstration est nécessaire.

Et d'abord on démontre, absolument comme au n° 387, en considérant (*fig.* 240) une ligne quelconque plane ou gauche MN et son inverse M′N′, que leurs tangentes MT, M′T′ font des angles égaux TMM′, TM′M avec le rayon vecteur SMM′. Cela étant, soient (*fig.* 241) deux courbes gauches MA et Ma qui se coupent en M, et les courbes inverses M′A′, M′a'; il faut prouver que l'angle des deux premières, c'est-à-dire l'angle tMT de leurs tangentes, est égal à l'angle tM′T des deux autres. Or on a, d'après l'observation précédente,

$$t\mathrm{MM}' = t\mathrm{M}'\mathrm{M}, \quad \mathrm{TMM}' = \mathrm{TM}'\mathrm{M};$$

donc le trièdre formé par les droites MM′, MT, Mt, et le trièdre formé par les droites M′M, M′T, M′t, ont un angle dièdre égal MM′ compris entre deux faces égales chacune à chacune; ces deux trièdres sont donc symétriques et, par suite, les troisièmes faces TMt, TM′t sont respectivement égales.

957. *L'angle de deux surfaces* F *et* F_1, *en un point quelconque m de leur ligne d'intersection amb, est égal à l'angle sous lequel les surfaces inverses* F′ *et* F'_1 *se coupent au point correspondant m′.*

En effet, menons par m sur les surfaces F et F_1 deux courbes mp et mp_1 à angle droit sur la ligne d'intersection amb; leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$ couperont (956) à angle droit la ligne $a'm'b'$ commune aux surfaces F′ et F'_1, et de plus l'angle des deux premières courbes mp et mp_1 sera égal à celui de leurs inverses $m'p'$ et $m'p'_1$. Or l'angle des courbes mp et mp_1 mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F et F_1 au point m, et l'angle de $m'p'$ et $m'p'_1$ mesure l'inclinaison mutuelle des deux surfaces F′ et F'_1 au point correspondant m'.

Puisque l'inversion conserve les angles des surfaces, *les sphères inverses de deux sphères tangentes sont aussi tangentes;* d'ailleurs on voit, comme au n° 393, que *le contact entre les deux nouvelles sphères et le contact entre les deux sphères primitives sont semblables ou dissemblables suivant que les puissances du centre d'inversion par rapport aux deux sphères primitives ont le même signe ou des signes opposés.*

Les lignes et les surfaces inverses jouissent, relativement à la courbure, de propriétés très importantes que nous ne pouvons pas développer ici. Nous renverrons sur ce sujet aux Mémoires déjà cités dans le n° 398, et à un Mémoire de M. Hirst, *Annales de Tortolini*, t. II, 1859.

APPLICATIONS.

958. Voici quelques applications des principes qui précèdent.

On nomme *projection stéréographique* d'une figure sphérique la perspective de cette figure faite en prenant pour *point de vue* S un point de la sphère, et pour plan de projection ou *tableau* le plan P du grand cercle dont le pôle est au point de vue S.

D'après le n° 953, on peut considérer le plan diamétral P comme l'inverse de la surface sphérique, en prenant pour origine le point S et pour puissance le double du carré du rayon de la sphère. La projection stéréographique n'est donc qu'un cas particulier de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et l'on peut énoncer les propositions suivantes qu'on utilise dans la construction des mappemondes :

1° *Les projections stéréographiques de deux lignes tracées sur la sphère se coupent sous le même angle que ces lignes elles-mêmes;*

2° *La projection stéréographique d'un cercle de la sphère est un cercle dont le centre est la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant le cercle proposé.*

La projection stéréographique a été connue des Grecs : Ptolémée l'a décrite sous le nom de *planisphère*, et les auteurs du moyen âge l'appelaient *astrolabe* La construction du centre est due à M. Chasles.

959. *On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères ayant leurs centres en ligne droite; le lieu de l'origine ou du pôle de transformation est la circonférence qui coupe à angle droit les grands cercles des sphères données situés dans le plan des trois centres.* En effet, il est évident que les pôles de transformation doivent être dans le plan des trois centres, et que tout revient à transformer les grands cercles situés dans ce plan en trois autres ayant leurs centres en ligne droite. Or, si l'on prend pour pôle un des points de la circonférence qui coupe orthogonalement ces trois grands cercles, cette circonférence orthogonale se transforme en une droite qui coupe à angle droit les transformées des circonférences données et qui, par suite, contient les centres de ces transformées.

VII. — Problèmes relatifs au contact des sphères.

SPHÈRES TANGENTES A QUATRE SPHÈRES DONNÉES.

960. Il s'agit ici d'étendre aux sphères le problème d'Apollonius relatif aux cercles tangents à trois cercles donnés situés dans un même plan (n° 401). L'extension étant facile, nous nous bornerons, comme

M. Fouché, à indiquer sommairement et parfois même sans démonstration, la suite des propositions qui mènent à la règle finale.

1° *Toute sphère* σ *qui passe par deux points* a *et* a' *homologues de deux sphères fixes* O *et* O' *est isogonale à ces deux sphères;* et, *réciproquement.* On se rend compte de cette proposition en considérant le plan des trois centres et se reportant au n° 400'.

La droite aa' passe par l'un C des centres de similitude de O et de O', et le produit $Ca.Ca'$ exprime à la fois la puissance de C par rapport à σ et le module de l'inversion qui, ayant C pour pôle, transforme les sphères O et O' l'une dans l'autre. Comme il y a deux centres de similitude, on peut énoncer le théorème suivant :

Les sphères isogonales à deux sphères données O *et* O' *se répartissent en deux groupes suivant qu'elles ont pour centre radical l'un ou l'autre des deux centres de similitude.*

Les sphères tangentes à O et O' appartiennent au premier ou au second groupe suivant que leurs contacts avec O et O' sont *de même espèce ou d'espèces différentes.*

2° *Les sphères isogonales à trois sphères fixes* O, O', O'', *se répartissent en quatre familles; les sphères d'une même famille ayant pour axe radical l'un* L *des quatre axes de similitude des sphères* O, O', O''.

Le lieu des centres des sphères d'une même famille est le plan perpendiculaire à L mené par l'axe radical de O, O', O''.

Les plans radicaux de chaque sphère d'une même famille avec l'une des trois sphères données coupent L au même point.

3° Parmi les sphères isogonales à O, O', O'' se trouvent en particulier les sphères ω tangentes à ces trois sphères données. Le plan radical de O et d'une sphère ω devient alors le plan tangent au point T où ω touche O. Il doit couper l'axe de similitude L en un point H qui reste fixe quand ω varie; il enveloppe donc le cône qui ayant pour sommet H est circonscrit à la sphère O. Le lieu des points de contact T est un cercle, et comme il y a un tel cercle par famille, on a cet élégant théorème

Le lieu des points de contact des sphères tangentes à trois sphères fixes avec l'une de ces sphères se compose de quatre cercles. (Dupuis, *Correspondance sur l'École Polytechnique,* t. I.)

4° *Les sphères isogonales à quatre sphères fixes* O, O', O'', O''' *se répartissent en huit faisceaux; les sphères d'un même faisceau ont pour plan radical l'un* P *des huit plans de similitude des quatre sphères données.*

La démonstration est analogue à celle du n° 400''.

Le lieu des centres des cercles φ d'un même faisceau est la perpendiculaire menée du centre radical des quatre sphères données sur le plan de similitude considéré P.

Soit (H) la droite suivant laquelle le plan P rencontre le plan radical de l'une des sphères φ et de l'une des sphères données, O par exemple, Lorsque φ varie (en appartenant toujours au même faisceau), la droite (H) reste fixe, car tous les points de cette droite conservent la même puissance par rapport à φ et à O.

De là résulte la construction d'une sphère tangente à quatre sphères données O, O', O'', O''' :

Après avoir choisi trois centres de similitude de la sphère donnée O *avec les trois autres sphères données* O', O'', O''', *on prend arbitrairement sur* O *un point quelconque* M *dont on cherche les antihomologues* M', M'', M''' *sur* O', O'', O'''. *La sphère qui passe par* M, M', M'', M''' *coupe la sphère* O *suivant un cercle dont le plan rencontre, suivant une droite* (H), *le plan des trois centres de similitude considérés. Par la droite* (H) *on mène un plan tangent à la sphère* O; A *étant le point de contact, on construit ses antihomologues* A', A'', A''' *par rapport à* O', O'', O'''. *La sphère qui passe par* A, A', A'', A''' *répond à la question.*

Il y a seize solutions.

Mais la discussion serait beaucoup plus compliquée que dans le cas du problème plan (n° 401'). Il n'est pas vrai d'ailleurs que les seize solutions soient réelles toutes les fois que les quatre sphères données sont deux à deux extérieures.

961. La plupart des auteurs qui se sont occupés du problème relatif à la sphère tangente à quatre sphères données (Gaultier de Tours, *Journal de l'École Polytechnique,* t. IX; Heegmann, *Mémoires de l'Académie de Lille*, 1823; J.-A. Serret, *Journal de Crelle,* t. XXXVII, et *Nouvelles Annales*) ont fondé leur démonstration sur le théorème de Dupuis. Au lieu de suivre cette marche, qui rompt l'analogie avec la Géométrie plane, nous avons tenu à conserver cette analogie, et l'on peut constater que le raisonnement employé au n° 960 n'est que l'extension naturelle de celui déjà fait au n° 400. Le théorème de Dupuis n'en est alors qu'un corollaire immédiat, comme nous venons de le voir. On peut toutefois en désirer une démonstration directe. Une des plus simples repose sur la remarque du n° 959 :

Considérons la figure formée par les trois sphères fixes S_1, S_2, S_3, la sphère variable X qui les touche; transformons cette figure de façon que S_1, S_2, S_3 deviennent trois sphères Σ_1, Σ_2, Σ_3 ayant leurs centres σ_1, σ_2, σ_3 en ligne droite. La transformée ξ de X touchera Σ_1, Σ_2, Σ_3 et le lieu de son point de contact avec l'une quelconque de ces sphères sera évidemment un cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Donc, en revenant à la figure primitive et se rappelant que la transformée d'un cercle est un cercle, on voit que le point de contact de la sphère variable X décrit un cercle sur chacune des sphères fixes S_1, S_2, S_3. (Mannheim, *Nouvelles Annales*, 1re série, tome XIX.)

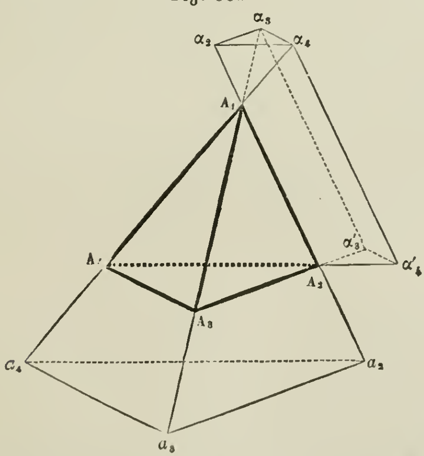
SPHÈRE TANGENTE A QUATRE PLANS DONNÉS.

962. Établissons d'abord un lemme :

Soit $A_1A_2A_3A_4$ un tétraèdre. k étant l'un quelconque des indices 1, 2, 3, 4, désignons par s_k l'aire de la face opposée au sommet A_k, par MP_k la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque M de l'espace sur le plan de cette face, et par x_k le nombre qui mesure la longueur de cette perpendiculaire, précédé du signe + ou du signe — suivant que le point M et le sommet A_k sont d'un même côté ou de côtés différents par rapport au plan de la face s_k.

Les quantités x_1, x_2, x_3, x_4, reçoivent le nom de *coordonnées tétraédriques* du point M.

Fig. 505.



Les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque M *de l'espace satisfont à la relation*

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 3v, \qquad (1)$$

v étant le volume du tétraèdre.

En effet, les plans des faces du tétraèdre indéfiniment prolongés partagent l'espace en quinze régions ; ce sont (*fig.* 505) :

L'espace $A_1A_2A_3A_4$ occupé par le tétraèdre;

Le *trièdre* $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, opposé par le sommet au trièdre A_1 du tétraèdre; il y a quatre trièdres de ce genre, un relatif à chaque sommet;

Le *tronc* de pyramide indéfini $A_2A_3A_4a_2a_3a_4$, qu'on obtient en retranchant du trièdre A_1 l'espace occupé par le tétraèdre; il y a quatre troncs de ce genre, un relatif à chaque face;

Le *comble* $A_1A_2\alpha'_3\alpha_3\alpha'_4\alpha_4$ qui a pour *faîte* l'arête A_1A_2 et pour *arêtes* les prolongements $A_1\alpha_3$, $A_1\alpha_4$, des arêtes qui aboutissent en A_1 et les prolongements $A_2\alpha'_3$, $A_2\alpha'_4$, des arêtes qui aboutissent en A_2; il y a six combles de ce genre, un relatif à chaque arête.

Cela posé, si le point M est situé dans l'intérieur du tétraèdre, les quantités x_1, x_2, x_3, x_4, sont positives; les expressions $\frac{1}{3}s_1x_1$, $\frac{1}{3}s_2x_2$, $\frac{1}{3}s_3x_3$, $\frac{1}{3}s_4x_4$, représentent les volumes des pyramides triangulaires qui ont M pour sommet et, pour bases, les faces s_1, s_2, s_3, s_4; et, comme la somme des volumes de ces pyramides est égale au volume du tétraèdre, la relation (1) est démontrée pour ce cas.

Si le point M est dans le trièdre $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, les hauteurs des pyramides qui ont pour bases s_1, s_2, s_3, s_4, et pour sommet le point M, sont respectivement égales à $x_1, -x_2, -x_3, -x_4$, et, comme le tétraèdre équivaut à la pyramide ayant pour base s_1, diminuée de la somme des pyramides ayant pour bases s_2, s_3, s_4, on a

$$s_1x_1 - s_2(-x_2) - s_3(-x_3) - s_4(-x_4) = 3v,$$

c'est-à-dire encore la relation (1).

On voit de même que, suivant que le point M est situé dans le tronc $A_2A_3A_4\,a_2a_3a_4$ ou dans le comble (A_1A_2), on a

$$-s_1(-x_1) + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 3v$$

ou

$$s_1x_1 + s_2x_2 - s_3(-x_3) - s_4(-x_4) = 3v,$$

c'est-à-dire toujours la relation (1), qui se trouve ainsi établie pour tous les cas.

Réciproquement, *si quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4, satisfont à la relation* (1), *il existe un point de l'espace et un seul dont ces quantités sont les coordonnées tétraédriques.*

En effet, menons un plan Q_k parallèle au plan de la face s_k, à une distance de celui-ci égale à la valeur absolue de x_k, et du même côté du plan s_k que le sommet A_k ou du côté opposé, suivant que x_k est positif ou négatif; nous obtiendrons ainsi quatre plans Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, bien déterminés. Trois quelconques d'entre eux, Q_2, Q_3, Q_4, se coupent en un point unique μ dont nous désignerons les coordonnées tétraédriques par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. D'après la construction du point M, on a

$$\xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3, \quad \xi_4 = x_4;$$

d'ailleurs, le point μ est le seul point de l'espace dont les trois coordonnées d'indices 2, 3, 4 soient respectivement égales à x_2, x_3, x_4. Il reste donc seulement à prouver que ξ_1 est égal à x_1. Or on a, par le théorème direct,

$$s_1\xi_1 + s_2\xi_2 + s_3\xi_3 + s_4\xi_4 = 3v,$$

c'est-à-dire, à cause des relations précédentes,

$$s_1\xi_1 + s_2x_2 + s_3x_3 + s_4x_4 = 3v,$$

et la comparaison de cette relation avec la relation (1), qui, par hypothèse, est ici satisfaite, donne $\xi_1 = x_1$.

963. Abordons maintenant le problème de la sphère tangente à quatre plans que nous supposerons former un tétraèdre.

Pour qu'il existe une sphère *inscrite* dans le tétraèdre, il faut et il suffit qu'on puisse satisfaire à la relation (1) en prenant

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = \rho, \quad x_3 = \rho, \quad x_4 = \rho,$$

ρ désignant le nombre fini et positif qui mesure le rayon de la sphère. Or, une telle solution est toujours possible et est unique, car la substitution des valeurs précédentes dans (1) donne

$$(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\rho = 3v,$$

d'où l'on tire pour ρ la valeur unique, finie et positive,

$$\rho = \frac{3v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}.$$

Il y a donc une sphère inscrite au tétraèdre et une seule; son rayon est donné par la formule précédente; d'ailleurs, son centre, étant équidistant des quatre faces, appartient à tous les plans bissecteurs des dièdres intérieurs du tétraèdre, et trois de ces plans, relatifs aux trois arêtes d'une même face, suffisent pour le déterminer.

Pour qu'une sphère tangente eût son centre dans le trièdre $A_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, il faudrait qu'on pût satisfaire à la relation (1) par les valeurs

$$x_1 = \rho, \quad x_2 = -\rho, \quad x_3 = -\rho, \quad x_4 = -\rho,$$

ρ étant fini et positif; or, la substitution de ces valeurs donne

$$(s_1 - s_2 - s_3 - s_4)\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{s_1 - s_2 - s_3 - s_4},$$

ce qui est impossible, puisque, une face quelconque d'un tétraèdre étant moindre que la somme des trois autres, le second membre est négatif. Ainsi, il n'y a aucune sphère tangente ayant son centre dans le trièdre considéré ni dans les trois autres trièdres analogues.

Il y a, au contraire, une sphère dans le tronc $A_2A_3A_4a_2a_3a_4$, car la substitution des valeurs

$$x_1 = -\rho, \quad x_2 = \rho, \quad x_3 = \rho, \quad x_4 = \rho$$

donne

$$(-s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{-s_1 + s_2 + s_3 + s_4},$$

valeur unique, finie et positive, puisque dans un tétraèdre une face quelconque est moindre que la somme des trois autres. Cette sphère est dite *exinscrite* suivant la face s_1; son centre est à l'intersection des plans bissecteurs des dièdres extérieurs relatifs aux arêtes de cette face. Il y a de même une sphère exinscrite dans chaque tronc.

Voilà donc *cinq* sphères, *la sphère inscrite et les quatre sphères exinscrites*, dont l'existence est certaine. Il reste à examiner ce qui se passe pour les combles.

Pour raisonner d'une manière générale, désignons par A_iA_k l'arête relative au comble considéré et par $A_{i'}A_{k'}$ l'arête opposée. Pour qu'il y ait une sphère tangente dans le comble (A_iA_k), il faut et il suffit que la substitution des valeurs

$$x_i = \rho, \quad x_k = \rho, \quad x_{i'} = -\rho, \quad x_{k'} = -\rho,$$

dans la relation (1) donne pour ρ une valeur finie et positive. Or, cette substitution conduit à

$$(s_i + s_k - s_{i'} - s_{k'})\rho = 3v, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{3v}{s_i + s_k - s_{i'} - s_{k'}}.$$

Donc, *pour qu'il y ait une sphère tangente dans l'un des combles, il faut et il suffit que la somme $s_i + s_k$ des deux faces qui ont pour côté commun l'arête du comble soit supérieure à la somme $s_{i'} + s_{k'}$ des deux autres faces.*

Il suit de là immédiatement que, *s'il y a une sphère dans un comble, il n'y en a pas dans le comble opposé*, et que, *si la somme de deux faces est égale à la somme des deux autres, il n'y a de sphère tangente ni dans le comble qui a pour arête le côté commun aux deux premières faces, ni dans le comble opposé qui a pour arête le côté commun aux deux autres faces.*

Donc, enfin, le nombre des sphères tangentes à quatre plans formant un tétraèdre est au moins égal à *cinq* et au plus égal à *huit*.

Admettons, ce qui est permis, qu'on ait

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq s_4,$$

et posons

$$s_1 + s_2 - s_3 - s_4 = q_2, \quad s_1 + s_3 - s_2 - s_4 = q_3, \quad s_1 + s_4 - s_2 - s_3 = q_4.$$

L'égalité $q_2 = 0$ entraîne $q_3 = 0$ et $q_4 = 0$; car, si l'on a

$$0 = q_2 = (s_1 - s_3) + (s_2 - s_4) = (s_1 - s_4) + (s_2 - s_3),$$

c'est que les différences entre parenthèses, qui ne peuvent être négatives, sont nulles; on a donc

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4$$

et, par suite,

$$q_3 = 0 \quad \text{et} \quad q_4 = 0.$$

L'égalité $q_3 = 0$ entraîne $q_4 = 0$; car, si l'on a

$$0 = q_3 = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4),$$

c'est que les différenees entre parenthèses sont nulles; on a donc $s_1 = s_2$, $s_3 = s_4$ et, par suite, $q_4 = 0$.

Ces remarques très simples permettent d'achever la discussion.

Si les trois quantités q_2, q_3, q_4 sont nulles, on a $s_1 = s_2 = s_3 = s_4$, et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 5, *il faut et il suffit que le tétraèdre ait toutes ses faces équivalentes.*

Si deux seulement des quantités q_2, q_3, q_4 sont nulles, c'est qu'on a

$$q_3 = 0, \quad q_4 = 0, \quad q_2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1 = s_2, \quad s_3 = s_4, \quad s_2 > s_3,$$

et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 6, *il faut et il suffit que les faces du tétraèdre soient équivalentes deux à deux sans être toutes équivalentes.*

Si une seule des quantités q_2, q_3, q_4 est nulle, c'est qu'on a

$$q_4 = 0, \quad q_2 > 0, \quad q_3 > 0,$$

c'est-à-dire

$$s_1 + s_4 = s_2 + s_3, \quad s_1 > s_2 \geq s_3 > s_4,$$

et réciproquement. Donc, *pour que le nombre des sphères soit égal à* 7, *il faut et il suffit que le tétraèdre ait une face maximum et une face minimum, et que la somme de ces deux faces soit égale à la somme des deux autres,* lesquelles peuvent d'ailleurs être équivalentes entre elles ou non.

Enfin, *si aucune des trois conditions précédentes n'est réalisée, le nombre des sphères est égal à* 8.

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner les cas où les quatre plans donnés ne forment pas un tétraèdre.

VIII. — Figures tracées sur la sphère.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

964. On nomme *rapports anharmoniques de quatre points* A, B, C, D, *situés sur un grand cercle* d'une sphère dont nous désignerons le centre par ω, les rapports anharmoniques du faisceau formé par les quatre rayons ωA, ωB, ωC, ωD, qui aboutissent à ces points.

Lorsqu'un faisceau de quatre arcs de grand cercle OM, ON, OP, OQ, *issus d'un même point* O *de la surface sphérique, est coupé par un arc de grand cercle* L, *le rapport anharmonique des quatre points* A, B, C, D, *déterminés par le faisceau sur cet arc transversal, a une valeur indépendante de la position de cet arc* L. Car ce rapport est, par définition, égal à celui du faisceau formé par les rayons ωA, ωB, ωC, ωD, lequel ne diffère pas de celui du faisceau des quatre plans ωOA, ωOB, ωOC, ωOD (584).

D'après cela, on nomme *rapport anharmonique d'un faisceau de quatre arcs de grand cercle* le rapport anharmonique de quatre points déterminés par ce faisceau sur un arc de grand cercle transversal quelconque.

Les deux propositions fondamentales (322 et 324) s'étendent aux figures sphériques ; par suite, il en est de même de leurs corollaires (323) et (325), de la propriété des triangles homologiques (326 et 327), et des théorèmes de Pascal et de Brianchon (328 et 329). Les démonstrations que nous en avons données subsistent entièrement ; le lecteur devra seulement remplacer dans les énoncés et dans les raisonnements les mots *ligne droite* par les mots *arc de grand cercle.*

RAPPORT HARMONIQUE.

965. Quatre points A, B, C, D, situés sur un arc de grand cercle, forment un *système harmonique* lorsque le rapport anharmonique (ABCD) est égal à -1.

Un faisceau de quatre arcs de grands cercles OA, OB, OC, OD est harmonique, lorsque le rapport anharmonique (O.ABCD) est égal à -1, c'est-à-dire lorsqu'on peut trouver un arc de grand cercle qui coupe le faisceau suivant un système de quatre points harmoniques ; alors tout autre arc de grand cercle transversal jouira de la même propriété (964).

Il résulte de là que, si par un point C de la surface sphérique on mène, à travers un angle AOB formé par deux arcs de grands cercles, diverses sécantes telles que ACB, et que l'on prenne sur chacune d'elles le point D conjugué harmonique de C par rapport au segment AB intercepté entre les côtés de l'angle, le lieu du point D sera l'arc de grand cercle OD conjugué harmonique de OC par rapport au segment AOB. Le point C et l'arc de grand cercle OD sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à l'angle AOB.

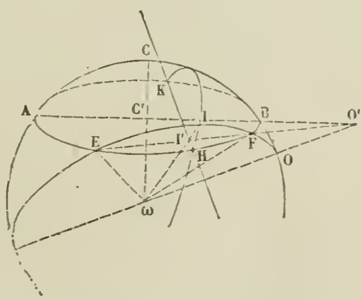
La proposition (315) relative au quadrilatère complet et la démonstration que nous en avons donnée (337) subsistent pour la sphère ; il suffit de remplacer les mots *ligne droite* par *arc de grand cercle*. Il en résulte un moyen simple de tracer sur la sphère : 1° le quatrième harmonique de trois points d'un grand cercle ; 2° la polaire d'un point par rapport à un angle (316 et 337).

PÔLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN CERCLE DE LA SPHÈRE.

966. *Un point* O *et un petit cercle* AEFB *étant donnés sur la sphère* (*fig.* 506), *si par le point* O *on mène un arc de grand cercle sécant* OFE *et qu'on détermine le conjugué harmonique* I *du point* O *par rapport à* EF, *le lieu géométrique du point* I *lorsque l'arc* OFE *tourne autour du point* O *est un arc de grand cercle perpendiculaire au grand cercle* OC *déterminé par le point* O *et par le pôle* C *du cercle donné.*

En effet, soit O′ le point où le rayon ωO rencontre le plan du cercle donné : les trois points E, F, O′ seront en ligne droite, et le faisceau des quatre rayons ωE, ωI, ωF, ωO′ sera par hypothèse harmonique ; donc, si I′ est le point de rencontre de EF et de ωI, le système rectiligne E, I′, F, O′ sera aussi harmonique. Mais le lieu du point I′ est une droite KH située dans le plan AEB et perpendiculaire au diamètre O′BA ;

Fig. 506.



donc le lieu du point I est l'intersection de la sphère par le plan ωKH ; c'est donc un grand cercle perpendiculaire au grand cercle OC.

On dit que le point O est le *pôle* du grand cercle ωKH, et que ce grand cercle est la *polaire* du point O par rapport au cercle AEB.

Le mot *pôle* a déjà reçu une autre acception, mais il ne pourra jamais y avoir d'ambiguïté si l'on fait la convention suivante : quand nous emploierons le mot *pôle* dans le nouveau sens que lui attribue le théorème précédent, il sera toujours suivi des mots *par rapport au cercle considéré*, tandis que, lorsqu'il sera pris dans le sens primitif (944), ce mot ne sera suivi d'aucune indication.

Nous avons étudié avec détail au n° 341 les positions relatives du point O′ et de la droite KH : le lecteur en déduira aisément les positions relatives du point O et du grand cercle ωKH.

Quand le point O′ décrit une droite dans le plan AEB, on sait (342) que la droite KH tourne dans ce plan autour du pôle de cette droite ; mais alors le point O décrit un grand cercle, et le plan ωKH tourne autour du diamètre qui perce la sphère au pôle, par rapport à AEB, du grand cercle décrit par O. Donc, *les polaires de tous les points d'un grand cercle passent par le pôle de ce grand cercle par rapport au cercle directeur* AEB : et *les pôles par rapport au cercle directeur* AEB, *de tous les grands cercles qui passent par un point de la sphère, sont situés sur le grand cercle polaire de ce point.*

Le théorème du n° 344, sa démonstration et ses conséquences (345, 346) subsistent pour la sphère en remplaçant les droites par des arcs de grand cercle ; il en résulte le moyen de construire sur la sphère la polaire d'un point par rapport à un cercle directeur donné.

Enfin, la méthode de transformation par les polaires réciproques (348 et suiv.) s'étend aussi aux figures sphériques. Le mode de transformation général par polaires réciproques dans l'espace contient comme cas particulier le mode de transformation spécial que nous avons exposé au n° 808 pour les figures sphériques, et dans lequel on fait correspondre à un triangle un triangle supplémentaire. Soient, en effet, une sphère de rayon R et un point A de l'espace situé à une distance d du centre ω de la sphère ; le plan polaire de ce point est un plan perpendiculaire à ωA et situé à une distance de ω égale à $\frac{R^2}{d}$. Si le rayon R de la sphère tend vers zéro, $\frac{R^2}{d}$ tend aussi vers zéro, et les plans polaires de tous les points de la droite indéfinie ωA ont pour limite le plan unique mené par ω perpendiculairement à ωA. On peut, d'après cela, donner à ce plan le nom de *plan polaire* de la droite ωA par rapport à une sphère infiniment petite ayant ω pour centre. Cela posé, si l'on a une figure formée de droites et de plans passant tous par un point ω, on aura la figure corrélative en menant par ω des plans et des droites perpendiculaires aux droites et aux plans de la figure primitive. Sur la sphère, à un grand cercle répondra son pôle, et inversement, de sorte que l'on retombe sur les figures supplémentaires des n°s 811 et 812.

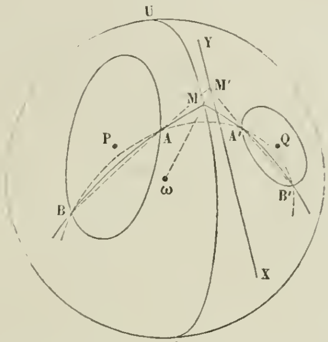
AXE RADICAL DE DEUX CERCLES.

967. On nomme *axe radical* de deux petits cercles P et Q tracés sur la sphère l'arc de grand cercle UV dont le plan passe par l'intersection XY des plans des deux petits cercles P et Q. D'après cela, cet axe radical est

perpendiculaire à l'arc de grand cercle PQ qui joint les pôles des deux petits cercles donnés (*fig.* 507).

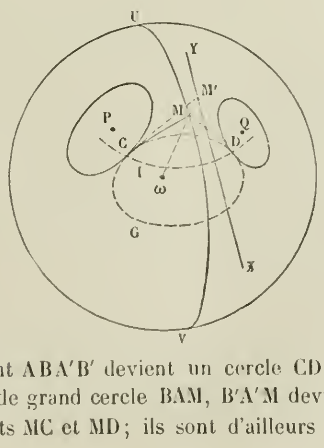
Si l'on coupe les deux cercles fixes P *et* Q *par un cercle auxiliaire*

Fig. 507.



variable qui coupe le premier en A *et* B, *et le second en* A' *et* B', *le lieu des points de rencontre* M *des arcs de grand cercle* AB *et* A'B' *est l'axe radical des cercles* P *et* Q. Car les droites AB, A'B', se coupant évidemment en un point M' de XY, le point M où le rayon ωM' perce la sphère appartient à la fois aux trois grands cercles dont les plans passent respectivement par les droites AB, A'B', XY. Cette propriété permet de construire sur la sphère l'axe radical de deux cercles.

Fig. 508.



Si le cercle sécant ABA'B' devient un cercle CD tangent en C et D (*fig.* 508), les arcs de grand cercle BAM, B'A'M deviennent des arcs de grand cercle tangents MC et MD; ils sont d'ailleurs égaux comme tangentes sphériques menées d'un même point M au cercle auxiliaire CD (832, 820). Donc *l'axe radical* UV *des deux cercles* P *et* Q *est le lieu des deux points de la sphère d'où l'on peut leur mener des tangentes sphériques égales.*

Le cercle CID, décrit du point M comme pôle, coupe orthogonalement les deux cercles P et Q; car il est à angle droit sur les arcs de grand cercle MC et MD. Donc *l'axe radical des deux cercles* P *et* Q *est sur la sphère le lieu des pôles ou centres sphériques des cercles qui coupent orthogonalement les deux cercles* P *et* Q.

Enfin, le plan du cercle CID est le plan polaire du point M' qui appartient à XY; car son plan est perpendiculaire à ωM', et il contient le point C qui appartient évidemment au plan polaire. D'ailleurs, comme lorsque le cercle orthogonal CID varie, son pôle M' décrit la droite XY, le plan de ce cercle CID passe constamment par la droite réciproque (946) de XY. Donc, *lorsque deux systèmes de cercles se coupent orthogonalement sur la sphère, les plans des cercles de chaque système passent par une droite, et ces deux droites sont réciproques par rapport à la sphère.* Inversement, *deux séries de plans passant par deux droites réciproques par rapport à une sphère tracent sur cette sphère deux systèmes de cercles orthogonaux* ([1]). Ajoutons que la droite réciproque de l'intersection des deux cercles P et Q est précisément la droite qui joint les sommets des deux cônes (878, 880) que l'on peut faire passer par ces deux cercles. En effet, prenons pour plan de la figure le grand cercle (*fig.* 219, p. 344) perpendiculaire aux deux cercles donnés, qui sont alors représentés par les deux droites AA' et BB'; en joignant AB et A'B', puis AB' et BA', on aura les sommets N et O des deux cônes considérés, et, comme la droite NO est (346) la polaire de l'intersection M des deux droites AA' et BB', la perpendiculaire au plan de la figure élevée par le point M, c'est-à-dire la droite commune aux plans des deux cercles AA' et BB', aura pour réciproque NO (946).

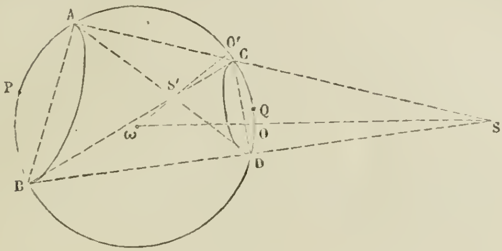
Les axes radicaux de trois cercles d'une sphère considérés deux à deux concourent en un même point; car le rayon qui aboutit au sommet du trièdre formé par les plans des trois cercles perce la sphère en un point commun aux trois axes radicaux. Ce point prend le nom de *centre radical* des trois cercles. C'est le *centre sphérique* du cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles donnés.

([1]) L'étude du double système des cercles orthogonaux sur la sphère a des conséquences importantes relativement aux surfaces dont les lignes de courbure sont planes (O. BONNET, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXV^e cahier — PICART, *Essai d'une Théorie géométrique des surfaces*, 1863).

CENTRES DE SIMILITUDE DE DEUX CERCLES.

968. On nomme *centres de similitude* de deux cercles AB et CD situés sur une sphère (*fig.* 509) les points O et O′ où la sphère est rencontrée par

Fig. 509.



les rayons ωS et ωS′ qui vont aux sommets S et S′ des deux cônes (878) que l'on peut faire passer par les deux cercles. Ces deux centres sont d'ailleurs sur le grand cercle qui passe par les pôles P et Q des deux cercles donnés.

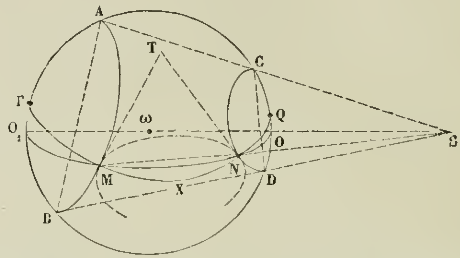
On dit que deux points M et N, appartenant, l'un au cercle P, l'autre au cercle Q, sont *anti-homologues* lorsque la droite qui les joint est une génératrice de l'un des deux cônes S et S′. *L'arc de grand cercle* MN *passe alors par le centre de similitude* O *relatif au cône considéré* S, car son plan contient les points ω et S, et, par suite, le point O de la droite ωS (*fig.* 510).

Deux couples M *et* N, B *et* D, *de points anti-homologues par rapport à un même cône* S *appartiennent à un même cercle de la sphère,* car ils sont situés dans le plan des génératrices MN et BD du cône. On en conclut (967) que *l'arc de grand cercle qui joint deux points quelconques du cercle* P *et l'arc de grand cercle qui joint les points anti-homologues du cercle* Q *se coupent sur l'axe radical des cercles* P *et* Q.

Si les deux points considérés sur le cercle P se confondent, les deux propositions qui précèdent deviennent les suivantes : *Quand deux cercles* P *et* Q *d'une même sphère sont touchés par un troisième* X, *les points de contact* M *et* N *sont anti-homologues et le plan de ce cercle* X *passe par le sommet* S *du cône correspondant. Les tangentes sphériques en deux points anti-homologues* M *et* N *de deux cercles* P *et* Q *se coupent sur l'axe radical de ces deux cercles.*

Le plan d'un cercle tangent à trois cercles de la sphère est tangent à trois cônes qui passent par ces cercles pris deux à deux, et réciproquement. Or, trois cercles pris deux à deux forment trois combinaisons, à chacune desquelles répondent deux cônes. Du sommet de l'un des cônes de la première combinaison on peut mener, en général, deux plans tangents à l'un des cônes de la seconde, et ces plans seront tangents non-seulement aux deux cônes, mais encore à un des cônes de la troisième combinaison. Donc l'intersection de ces deux plans passe par les sommets des trois cônes. Nous avons considéré dans ce raisonnement un cône de la première combinaison et un cône de la seconde, ce qui a déterminé le cône

Fig. 510.



de la troisième. Mais on peut associer de quatre manières différentes un cône de la première combinaison et un cône de la seconde. Par suite, les sommets des six cônes sont situés trois à trois sur quatre droites, chaque sommet appartenant à deux droites différentes; donc ces quatre droites se coupent deux à deux et sont toutes situées dans un même plan. Il résulte de là que *les six centres de similitude de trois cercles d'une même sphère sont situés trois à trois sur quatre grands cercles.*

CERCLES ISOGONAUX.

969. *Pour que, sur une sphère, un cercle* L, *qui rencontre un cercle* P *en un point* M *et un cercle* Q *en un point* N, *coupe ces deux cercles sous des angles égaux* (*ou supplémentaires*), *il faut et il suffit que les points* M *et* N *soient anti-homologues.*

Remarquons d'abord que, si par deux points appartenant respectivement à deux lignes sphériques on peut mener un cercle qui coupe ces lignes sous des angles égaux, tout autre cercle passant par les deux points coupera aussi ces lignes sous des angles égaux, car les nouveaux angles différeront respectivement des premiers d'un angle égal à celui des deux cercles. Il suit de là qu'il suffit de démontrer le théorème proposé dans l'hypothèse où le cercle L est un grand cercle. Soit donc (*fig.* 510) MN un grand cercle coupant P et Q sous des angles égaux, et soit X le point d'intersection des rayons sphériques PM, QN. Les angles XMN, XNM étant égaux, le triangle sphérique XMN est isocèle, et, par suite, le cercle décrit de X comme centre sphérique et passant par M passe aussi par N; ce cercle touche d'ailleurs en M et N les cercles P et Q (823); donc les points M et N sont anti-homologues (968). Inversement, soient MN l'arc de grand cercle qui joint deux points anti-homologues des cercles P et Q et X le pôle du petit cercle qui touche (968) P et Q en M et N; les grands cercles PX et QX passent respectivement par les points de contact M et N (823) et, dans le triangle sphérique isocèle XMN, il y a égalité entre les angles à la base M et N, et, par suite, entre les angles que MN fait avec P et Q.

On peut encore énoncer ce théorème en disant (968) : *Pour que, sur une sphère, un cercle* L *coupe deux cercles* P *et* Q *sous des angles égaux (ou supplémentaires), il faut et il suffit que son plan contienne le sommet de l'un des cônes qui passent par* P *et* Q.

Si A, B, C *sont trois cercles d'une sphère ayant deux à deux même axe radical* (c'est-à-dire dont les plans passent par une même droite K), *et si un autre cercle* L *se déplace sur la sphère en faisant avec* A *un angle constant* α *et avec* B *un angle constant* β, *ce cercle mobile fera avec* C *un angle constant* γ. En effet, soient L et L_1 deux positions du cercle mobile. A coupant L et L_1 sous le même angle α, son plan passe par le sommet S de l'un des cônes déterminés par L et L_1 ; pour la même raison, le plan du cercle B passe par S ; donc le point S appartient à la droite K et, par suite, au plan du cercle C qui, dès lors, coupe L et L_1 sous le même angle.

Il suit de là que, *si un cercle* L *se déplace sur une sphère en coupant respectivement deux cercles* A *et* B *sous des angles constants* α *et* β, *ce cercle mobile reste tangent à deux cercles fixes*. En effet, L_1 étant une position particulière du cercle mobile, menons par la droite K, commune aux plans A et B, un plan qui coupe la sphère suivant un cercle C tangent à L_1 ; le cercle mobile devra, dans toutes ses positions, faire un angle invariable avec C d'après le théorème précédent; et comme, dans la position particulière L_1, il touche C, c'est-à-dire fait avec C un angle nul (ou égal à deux droits), il devra toucher C dans toutes ses positions. D'ailleurs, par la droite K, on peut mener deux plans coupant la sphère suivant un cercle tangent à L_1 ; donc le cercle mobile touche constamment deux cercles fixes C et C'. Observons enfin que, les cercles A, B, C, C', ayant leurs plans passant par une même droite K, leurs pôles sont sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à cette droite.

PROBLÈMES RELATIFS AUX CERCLES SUR LA SPHÈRE.

970. 1° *Par deux points donnés* A *et* B, *mener un cercle tangent à un grand cercle donné* KL (*fig.* 183_1).

La solution est analogue à celle du problème correspondant de Géométrie plane. On joindra A et B par un arc de grand cercle qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre C avec KL. L'inconnue de la question est le point T où le cercle demandé touche KL. Or, la longueur CT étant égale à celle de la tangente sphérique menée du point C à un cercle quelconque tracé par A et B sur la sphère, on déterminera cette longueur à l'aide d'un cercle mené à volonté par A et B, puis on la portera sur KL en CT ou CT′, ce qui donnera deux solutions.

2° *Par deux points donnés* B *et* C, *mener un cercle tangent à un petit cercle donné* O (*fig.* 183_2).

Le tracé est le même qu'en Géométrie plane. Par B et C, menez un cercle quelconque qui coupe le cercle donné O en deux points D et E, et du point M, intersection des grands cercles BC, DE, menez deux arcs de grand cercle tangents au cercle O ; A et A′ étant les points de contact, il suffira de mener des cercles par B, C, A et par B, C, A′, pour avoir les deux solutions du problème.

971. *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés sur la sphère.*

Le raisonnement et la construction sont les mêmes qu'au n° 400, à condition de remplacer les droites par des arcs de grand cercle.

Voici quelques détails à ce sujet :

1° Par inversion, la proposition du n° 400′ devient la suivante : *Les cercles isogonaux à deux cercles de la sphère se répartissent en deux groupes tels que chacun d'eux est formé de cercles ayant leurs plans passant par un même point.* Et le théorème du n° 400″ se transforme en celui-ci : *Les cercles isogonaux à trois cercles donnés sur la sphère se répartissent en quatre faisceaux tels que chacun d'eux est formé de cercles ayant pour axe radical commun l'un des quatre axes de similitude des trois cercles donnés.* D'ailleurs le lieu des pôles des cercles isogonaux d'un même faisceau est le grand cercle mené perpendiculairement sur l'axe de similitude par le centre radical des trois cercles donnés (car parmi les cercles orthogonaux figure le cercle orthogonal aux trois cercles).

2° Le théorème du n° 400‴ subsiste puisqu'il exprime que le point H est le centre radical commun à tous les cercles isogonaux et au cercle O. On le voit directement en observant que H est sur le rayon de la sphère qui passe par le point où l'axe du faisceau coupe le plan du cercle O.

Il résulte de là que la *construction indiquée au n° 400 pour tracer un cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan s'applique à trois cercles donnés sur une sphère.*

Il y a encore huit solutions (réelles ou imaginaires), et les conclusions de la discussion subsistent entièrement.

972. *Décrire sur une sphère un cercle* X *qui coupe trois cercles donnés* A, B, C, *sous des angles donnés* α, β, γ.

Le cercle X, coupant A et B sous des angles constants α et β, est tangent à deux cercles dont les pôles sont sur le grand cercle qui contient les pôles de A et de B (969). En considérant de même A et C, puis B et C, on voit que le cercle X doit être tangent à six cercles. Il suffira donc, pour le déterminer, de connaître trois de ces six cercles et de leur appliquer le problème précédent. Voici comment on obtient l'un des six cercles, par exemple l'un des cercles relatifs au couple (A, B). Ce cercle doit toucher tout cercle L qui coupe A sous l'angle α et B sous l'angle β; il suffira donc d'avoir trois de ces cercles L. Or, pour avoir un cercle L, on se donnera à volonté son rayon sphérique, et, alors, son pôle sera à des distances sphériques déterminées des pôles des cercles A et B.

Le problème correspondant de Géométrie plane a été traité au n° 403 comme application de la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques. On pourrait le résoudre exactement par les principes appliqués ci-dessus en remplaçant les arcs de grand cercle par des droites.

Enfin la méthode précédente s'étend également au problème analogue relatif aux sphères. On voit aisément que *la sphère variable, assujettie à couper deux sphères sous des angles constants, reste tangente à deux sphères fixes dont les centres sont sur la droite des centres des sphères données*. Dès lors, *la sphère qui coupe quatre sphères données sous des angles donnés doit toucher douze sphères,* dont quatre (952) suffiront pour la trouver.

Le triple problème dont nous venons d'esquisser la solution a occupé divers géomètres; mais il avait été résolu dès 1826, par Steiner (*Journal de Crelle*, t. I) et par Heegmann (*Mémoires de la Société des Sciences de Lille*).

LIVRE VIII.

LES COURBES ET LES SURFACES USUELLES.

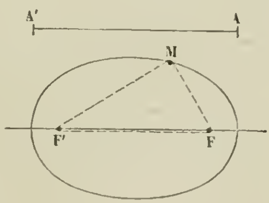
§ I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'ELLIPSE.

973. L'*ellipse* est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 511), les deux points fixes étant F et F′ et la longueur donnée étant représentée par la droite AA′, on a pour tout point M de l'ellipse

$$MF + MF' = AA'.$$

D'après cela, pour décrire une ellipse d'*un mouvement continu*, on plante sur la feuille de dessin, en F et en F′, deux

Fig. 511.



épingles qu'on entoure d'un fil sans fin (c'est-à-dire dont les deux bouts sont réunis), auquel on donne la longueur totale FF′ + AA′. On tend constamment ce fil à l'aide d'un crayon que l'on fait mouvoir sur le papier jusqu'à ce qu'on soit ramené au point de départ. La pointe du crayon trace évidemment l'ellipse demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$FF' + MF + MF' = FF' + AA' \quad \text{ou} \quad MF + MF' = AA'.$$

Le procédé qu'on vient d'indiquer est surtout applicable sur le terrain : on remplace alors les épingles par des piquets, le fil par une corde et le crayon par un jalon. Nous mentionnerons plus loin d'autres tracés bien préférables au point de vue de l'exécution des épures.

Les points F et F′ sont les *foyers* de l'ellipse, les droites MF et MF′ sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur constante AA′ est ordinairement représentée par $2a$.

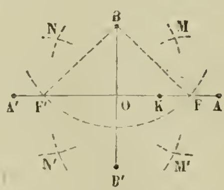
La distance FF′ ou *distance focale* est représentée par $2c$. L'existence du triangle MFF′ entraîne alors la condition $2c < 2a$ ou $c < a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'ellipse. Cette excentricité peut varier de 0 à 1. Pour $c = 0$, elle est nulle, les foyers se confondent et l'ellipse devient un cercle de rayon a. Pour $c = a$, l'excentricité est égale à 1, et l'ellipse se réduit à la portion de droite $FF' = 2a$. Entre ces deux limites, l'ellipse se rapproche d'autant plus de la droite FF′ que son excentricité est plus grande.

974. On peut aussi tracer l'ellipse par points.

En effet, marquons (*fig.* 512) le milieu O de la distance focale

Fig. 512.



FF′ et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point quelconque K sur AA′. Si des points F et F′ comme centres, avec des rayons respectivement égaux à AK et A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs points d'intersection M et M′ appartiendront à l'ellipse, puisqu'on aura

$$MF + MF' = M'F + M'F' = AK + A'K = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours moindre que la somme $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, qu'on ait, en supposant K à droite de O,

$$FF' > A'K - AK \quad \text{ou} \quad 2c > 2a - 2AK.$$

La condition cherchée est donc $AK > a - c$ ou $AK > AF$.

D'ailleurs, on peut échanger les centres F et F' sans modifier les rayons employés, de manière à obtenir pour chaque point K quatre points M et M', N et N' de l'ellipse. Les limites des positions du point K sont alors l'un des foyers F et le point O. Tout cela résulte immédiatement de la symétrie de l'équation de condition $MF + MF' = 2a$ par rapport aux deux rayons vecteurs d'un même point.

Si le point K est en O, les points correspondants de l'ellipse sont en B et en B' sur la perpendiculaire élevée à la droite FF' par son milieu. Si le point K est en F, les deux points correspondants de l'ellipse sont en A et en A'. Le rayon vecteur minimum est AF ou $a - c$, le rayon vecteur maximum est A'F ou $a + c$.

THÉORÈME.

975. *L'ellipse a : 1° pour axes, la droite* AA' *qui passe par ses deux foyers et la droite* BB' *perpendiculaire au milieu de la première ; 2° pour centre, l'intersection de ces deux droites.*

On appelle *axe* d'une courbe toute droite par rapport à laquelle les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux ; on appelle *centre* d'une courbe tout point par rapport auquel les divers points de cette courbe sont symétriques deux à deux (658).

1° Soit M un point de l'ellipse (*fig.* 513); on aura

$$MF + MF' = 2a.$$

Supposons alors que le plan de la figure fasse une demi-révolution autour de AA'. Dans ce mouvement, les foyers restent fixes, le point M vient dans la position symétrique M_1 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a

$$M_1F + M_1F' = 2a,$$

c'est-à-dire que le point M_1 appartient à l'ellipse. Donc à tout point M de l'ellipse correspond un point M_1, symétrique de M par rapport à AA'.

Si le plan de la figure fait de même une demi-révolution autour de BB', les foyers ne font que s'échanger, le point M vient dans la position symétrique M_2 et, comme le triangle MFF' ne se déforme pas, on a encore

$$M_2F + M_2F' = 2a;$$

ce qui montre qu'à tout point M de l'ellipse correspond un autre point M_2 de la courbe, symétrique de M par rapport à BB'.

Fig. 513.

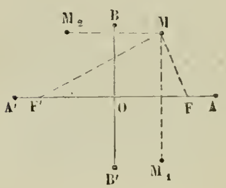


Fig. 514.

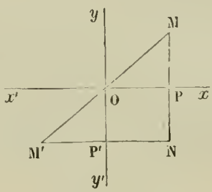
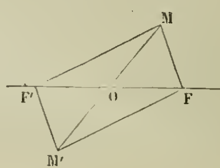


Fig. 515.



2° L'autre partie de la proposition n'est qu'un cas particulier de ce théorème plus général : *Quand une courbe possède deux axes rectangulaires xx' et yy', leur intersection* O *est un centre de la courbe* (*fig.* 514).

Soient M un point de la courbe, M' son symétrique par rapport au point O, et N l'intersection des parallèles menées respectivement aux deux axes par les points M et M'. L'égalité des triangles rectangles MOP, OM'P' donne

$$MP = OP' = PN \quad \text{et} \quad M'P' = OP = P'N.$$

Le point N est donc à la fois symétrique de M par rapport à xx' et symétrique de M' par rapport à yy'. Or, le point N étant sur la courbe comme symétrique de M, le point M' en fait aussi partie comme symétrique de N. Donc à tout point M de la courbe correspond un point M' symétrique de M par rapport à O.

Il résulte de là que le milieu O de la distance focale FF' est un centre de l'ellipse.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit (*fig.* 515).

Soient M un point de l'ellipse et M′ son symétrique par rapport à O; menons les rayons vecteurs de ces points. Les diagonales MM′ et FF′ se coupant mutuellement en parties égales, le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme, et le point M′ appartient à l'ellipse en vertu de l'égalité des deux contours FMF′ et FM′F′.

Corollaires.

976. On appelle *longueurs* des axes de l'ellipse les longueurs AA′ et BB′ interceptées sur ces axes par la courbe (*fig.* 513). La longueur du premier axe AA′ est donc (974) égale à $2a$, la longueur du second BB′ est représentée par $2b$.

La perpendiculaire BO (*fig.* 513) étant moindre que l'oblique $BF = a$, on a

$$b < a.$$

AA′ est dit alors le *grand axe* et BB′ le *petit axe* de l'ellipse.

Les extrémités A et A′, B et B′ des deux axes sont appelées les *sommets* de la courbe.

Le triangle rectangle BOF (*fig.* 513) donne $a^2 = b^2 + c^2$, relation qui permet de déterminer l'une des trois quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres.

977. Quand on donne les longueurs a et b, il est facile de déterminer graphiquement les foyers : on n'a qu'à décrire de l'extrémité B du petit axe comme centre (*fig.* 513), avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe le grand axe aux deux foyers F et F′.

THÉORÈME.

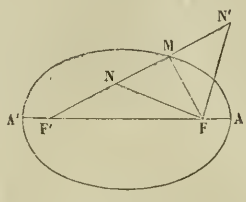
978. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que $2a$.*

Soit d'abord (*fig.* 516) un point N intérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers, prolongeons F′N jusqu'à la rencontre de la courbe en M, et menons MF. Un théorème connu donne immédiatement

$$NF + NF' < MF + MF' \quad \text{ou} \quad NF + NF' < 2a.$$

Soit de même un point N′ extérieur à l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers; N′F′ coupant la courbe au point M,

Fig. 516.



menons MF. En s'appuyant sur le même théorème, on aura ici

$$N'F + N'F' > MF + MF' \quad \text{ou} \quad N'F + N'F' > 2a.$$

Corollaire.

979. Le théorème précédent, rapproché de la définition de l'ellipse, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque du plan de la courbe par rapport à cette courbe supposée non tracée. *Suivant que la somme des distances d'un point aux deux foyers est supérieure, égale ou inférieure à 2a, ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

980. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact, extérieurement à leur angle.*

Prenons sur l'ellipse (*fig.* 517) deux points voisins M et M′; menons la sécante MM′S et les rayons vecteurs des deux points M et M′. Portons sur F′M une longueur F′D = F′M′ et sur FM une longueur FC = FM′. Le segment MD représente alors l'augmentation que subit le rayon vecteur mené du foyer F′ quand on passe du point M au point M′, et MC la diminution que subit le rayon vecteur mené du foyer F quand on passe du même point M au même point M′; comme la somme des rayons vecteurs d'un point de l'ellipse reste constante, MD est égal à MC.

Cela posé, d'un point quelconque G de la sécante MM′S, menons aux droites M′D et M′C des parallèles GI et GH jusqu'à la rencontre des rayons vecteurs du point M. Le quadrilatère GHMI étant semblable au quadrilatère M′CMD (208), l'égalité de MD et de MC entraîne celle de MI et de MH. D'ailleurs, les droites GH et GI, étant parallèles aux bases M′C et M′D des triangles isocèles CFM′, DF′M′, sont perpendiculaires aux bissectrices de leurs angles au sommet.

Quand le point mobile M′ se rapproche du point fixe M, la sécante MM′S tend vers la tangente au point M. Les bissectrices des angles CFM′, DF′M′, ayant alors pour limites les rayons vecteurs FM, F′M du point M, les droites GH et GI ont elles-mêmes pour limites les perpendiculaires abaissées du point G sur ces rayons vecteurs. D'ailleurs, pendant ce mouvement, MH et MI varient en restant égaux entre eux.

Fig. 517.

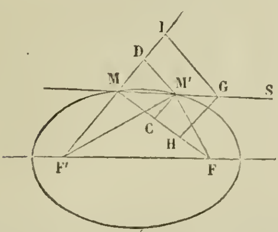
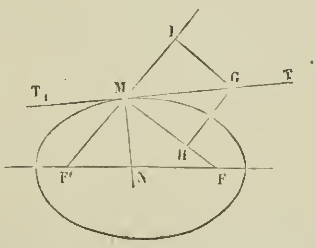


Fig. 518.



On voit, d'après cela, en passant à la limite, que ce qui caractérise la tangente MT au point M (*fig.* 518), c'est que, si, d'un point quelconque G de cette droite, on abaisse des perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs MF et MF′ du point M, on ait MH = MI. Les triangles rectangles MGH, MGI sont alors égaux, et il en est de même des angles GMH, GMI. *La tangente à l'ellipse est donc bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

L'angle F′MT₁ étant l'opposé par le sommet de l'angle GMI, les deux angles GMH ou FMT et F′MT₁ sont égaux, ce qui vérifie le premier énoncé du théorème.

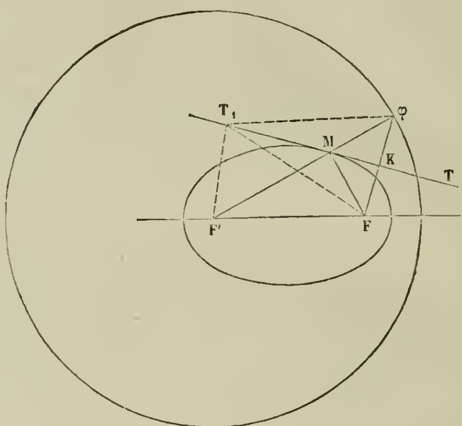
Corollaires.

981. *La droite* F′φ, *qui joint un foyer* F′ *de l'ellipse au symétrique* φ *de l'autre foyer* F *par rapport à une tangente*

quelconque TT_1, *passe par le point de contact* M *de cette tangente et est égale à la longueur* $2a$ *du grand axe* (*fig.* 519).

En effet, joignons le point de contact M aux points F', F et φ, et désignons par K le point où $F\varphi$ rencontre la tangente TT_1. L'égalité des triangles MKF, $MK\varphi$, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux entraîne celle des angles KMF,

Fig. 519.



$KM\varphi$; d'ailleurs, d'après le théorème précédent, le prolongement de $F'M$ doit faire avec MT un angle egal à KMF; donc le prolongement de $F'M$ n'est autre que $M\varphi$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. D'autre part, les mêmes triangles donnent $M\varphi = MF$, d'où l'on déduit

$$F'\varphi = F'M + M\varphi = F'M + MF = 2a.$$

982. *Tous les points de la tangente à l'ellipse sont extérieurs à la courbe, sauf le point de contact.*

En effet, la tangente étant perpendiculaire sur le milieu de $F\varphi$, un point quelconque T_1 de cette droite est équidistant de F et de φ. On a donc, d'après le triangle $F'T_1\varphi$,

$$T_1\varphi + T_1F' \quad \text{ou} \quad T_1F + T_1F' > F'\varphi \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Tous les points de la tangente MT, sauf le point M, sont donc extérieurs à l'ellipse (979).

La tangente en un point d'une courbe peut couper la courbe en d'autres points; mais elle a nécessairement (111) avec la courbe au moins un point commun de moins que les droites qui en ont le plus. De ce qu'on vient de démontrer, il résulte donc qu'*une droite ne peut rencontrer l'ellipse en plus de deux points*, c'est-à-dire que *l'ellipse est une courbe convexe.*

983. Si l'on mène au point M (*fig.* 518) la perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, F'MN sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'ellipse est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact.*

La normale en un sommet de l'ellipse se confond avec l'axe correspondant, et la tangente est perpendiculaire à cet axe, de sorte que la courbe est *inscrite* dans le rectangle construit sur ses axes.

Les propriétés précédentes justifient la dénomination de *foyer*. L'angle d'incidence et l'angle de réflexion étant égaux, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F d'une ellipse, viennent, en vertu d'une loi physique, après leur réflexion sur la courbe, converger à l'autre foyer F'.

THÉORÈME.

984. *Le lieu des symétriques* φ *de l'un des foyers* F *de l'ellipse par rapport aux tangentes est un cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre, avec la longueur* $2a$ *du grand axe pour rayon* (*fig.* 519).

D'abord, tout point φ du lieu est sur le cercle en question, puisque (981) $F'\varphi$ est égal à $2a$.

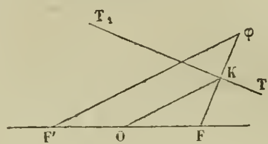
Inversement, tout point φ de ce cercle est le symétrique de F par rapport à une certaine tangente à l'ellipse qui a F et F' pour foyers et le rayon $F'\varphi$ pour la longueur de son grand axe. En effet, soit M le point où $F'\varphi$ rencontre la perpendiculaire TT_1 sur le milieu K de $F\varphi$. L'égalité des triangles KMF, $KM\varphi$, qui ont un angle droit compris entre deux côtés égaux, donne $MF = M\varphi$, d'où l'on déduit $MF' + MF = MF' + M\varphi = F'\varphi$; donc (979) le point M appartient à l'ellipse. Les mêmes triangles entraînent, en outre, l'égalité des angles KMF, $KM\varphi$, et par suite celle des angles KMF, T_1MF'. Donc, la droite TT_1 est la tangente à l'ellipse en M (980). Donc, enfin, le point φ du cercle est le symétrique de F par rapport à la tangente KT.

On donne au cercle $F'\varphi$ le nom de *cercle directeur relatif au foyer* F'. Au foyer F répond aussi un cercle directeur de même rayon $2a$.

THÉORÈME.

985. *Le lieu des projections des foyers d'une ellipse sur ses tangentes est la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre.*

Fig. 520.



Soient (*fig.* 520) F et F' les deux foyers, K la projection du foyer F sur une tangente quelconque TT_1 et φ le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le côté $F'\varphi$ du triangle $FF'\varphi$ étant égal à $2a$ (981), la droite OK qui joint les milieux des deux autres côtés est égale à a. Le point K appartient donc à la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre.

Réciproquement, tout point K de cette circonférence est la projection de l'un des foyers F sur une tangente; car, si l'on prolonge FK d'une quantité $K\varphi = KF$, on aura

$$F'\varphi = 2OK = 2a.$$

Par suite le point φ appartient au cercle directeur relatif au foyer F', et l'on a démontré au n° 984 que tout point de ce cercle est le symétrique de F par rapport à une tangente à l'ellipse.

Le cercle OK est dit le *cercle principal* de l'ellipse[1].

SCOLIE.

986. *Si le sommet d'une équerre décrit le cercle principal d'une ellipse, pendant que l'un de ses côtés passe constamment par un foyer de la courbe, l'autre côté de l'équerre lui reste toujours tangent.*

---

(1) Si l'on considère, au lieu de la projection orthogonale K du foyer F sur la tangente T_1T, la projection oblique L sous un angle donné α, le lieu du point L serait encore une circonférence. On le voit en remarquant qu'on passe du lieu (K) au lieu (L) par une rotation suivie d'une dilatation.

THÉORÈME.

987. 1° *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F′ *et d'un point intérieur* F *est une ellipse dont les points* F *et* F′ *sont les foyers et dont le grand axe est égal au rayon du cercle* (*fig.* 519).

En effet, soit M un point du lieu; sa distance à la circonférence est égale au segment Mφ obtenu en prolongeant le rayon F′M jusqu'à sa rencontre avec cette ligne. On a donc $MF = M\varphi$, et par suite $F'M + MF = F'M + M\varphi = F'\varphi$. Le point M appartient donc à l'ellipse définie dans l'énoncé.

Inversement, tout point M de cette ellipse est équidistant de la circonférence et du point F; car, puisque $F'M + MF$ est égal à $F'\varphi$, c'est-à-dire à $F'M + M\varphi$, c'est que MF est égal à Mφ.

2° *La tangente en un point quelconque* M *du lieu est perpendiculaire sur le milieu* K *de la droite qui joint le point intérieur* F *à l'extrémité* φ *du rayon* F′M *passant par* M.

En effet, la tangente doit être également inclinée sur MF et MF′, ou, ce qui revient au même, être la bissectrice de l'angle φMF, et, comme ce triangle est isocèle, elle est perpendiculaire sur le milieu de la base Fφ.

988. De là résulte, pour l'ellipse, un nouveau tracé donnant à la fois le point et la tangente :

De l'un des foyers F′, *comme centre, décrivez un cercle de rayon égal à* $2a$; *joignez l'autre foyer* F *à un point quelconque* φ *de ce cercle, et menez la perpendiculaire* TT_1 *sur le milieu de* Fφ; *cette perpendiculaire coupe le rayon* F′φ *en un point* M *du lieu, et elle est en outre la tangente en ce point.*

PROBLÈME.

989. *Mener une tangente à l'ellipse par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe*, on le joint aux deux foyers (*fig.* 518), et l'on mène la bissectrice de l'angle FMI formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement MI de l'autre rayon MF′ (980).

2° *Si le point donné* P *est extérieur à l'ellipse* (*fig.* 521), on remarque que la question serait résolue, si l'on connaissait le symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait dès lors cette tangente en abaissant de P une perpendiculaire TT_1 sur $F\varphi$: la droite TT_1 couperait d'ailleurs $F'\varphi$ au point de contact M (988). Or, le point φ se trouve à la fois sur le cercle directeur relatif au foyer F′ (984) et sur le cercle de centre P et de rayon PF.

Pour que ces deux cercles se coupent, c'est-à-dire pour que le triangle $F'P\varphi$ existe, il faut et il suffit que chacun des côtés PF', $P\varphi = PF$, $F'\varphi = 2a$, soit moindre que la somme des deux autres; de là les inégalités

$$PF' < 2a + PF, \quad PF < 2a + PF', \quad 2a < PF + PF'.$$

Les deux premières sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque a est plus grand que c et que le triangle PFF′ donne

$$PF' < 2c + PF, \; PF < 2c + PF';$$

il ne reste donc que la troisième condition, qui (979) exprime que le point P doit être extérieur à l'ellipse.

Fig. 521.

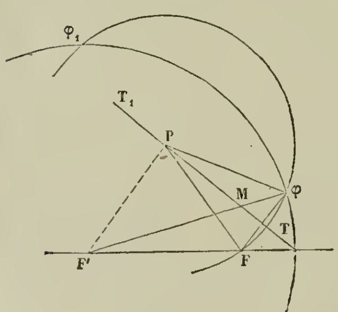
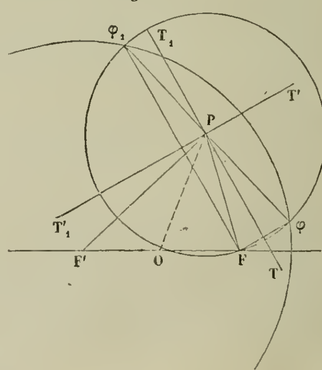


Fig. 522.



Comme les circonférences tracées se coupent en deux points φ et φ_1, il y a deux solutions qui se réduisent à une seule lorsqu'on a $PF + PF' = 2a$, c'est-à-dire lorsque le point P est sur la courbe.

Corollaires.

990. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à l'ellipse soient à angle droit.

Si les deux tangentes TT_1, $T'T'_1$, menées du point P, sont à angle droit (*fig.* 522), comme elles sont respectivement perpendiculaires sur le milieu des droites $F\varphi$, $F\varphi_1$, l'angle $\varphi F \varphi_1$ de ces deux droites doit être lui-même un angle droit. Cet angle étant inscrit dans la circonférence PF dont le centre est P, la droite $\varphi\varphi_1$ est un diamètre de cette circonférence, et P est le milieu de ce diamètre.

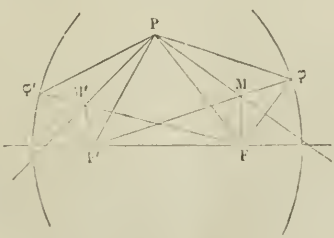
Le lieu du point P est donc le lieu décrit par le milieu de la corde interceptée dans le cercle directeur relatif au foyer F', par un angle droit tournant autour de son sommet fixe F. Or, si l'on joint le point P aux foyers F et F', on a $P\varphi = PF$, et le triangle rectangle $F'P\varphi$ donne alors

$$\overline{PF'}^2 + \overline{P\varphi}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{F'\varphi}^2 = 4a^2.$$

La somme des carrés des distances du point P aux points F et F' étant constante, *le lieu des sommets* P *des angles droits circonscrits à l'ellipse est une circonférence concentrique à cette courbe* (232). Le rayon de ce cercle est d'ailleurs égal à $\sqrt{a^2+b^2}$, puisque les sommets du rectangle construit sur les axes appartiennent évidemment au lieu.

991. *Les tangentes* PM, PM', *menées à l'ellipse par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du point* P *aux deux foyers; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M' (*fig.* 523).

Fig. 523.



Menons les deux cercles directeurs de l'ellipse. φ étant le symétrique de F par rapport à la tangente PM et φ' le symétrique de F' par rapport à la tangente PM', les deux triangles PFφ' et PF'φ sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles FPφ' et F'Pφ sont donc égaux. Si l'on enlève la partie commune FPF', les restes FPφ, F'Pφ', sont égaux, ainsi que leurs moitiés MPF, M'PF'.

En second lieu, l'égalité des triangles PFφ', PF'φ, entraîne celle des angles PFφ', PφF'. Mais les deux triangles PMφ, PMF étant égaux, l'angle PφF' est aussi égal à l'angle PFM, et la droite PF est la bissectrice de l'angle MFM'.

PROBLÈME.

992. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point symétrique φ de l'un des foyers F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point est à l'intersection du cercle directeur relatif au foyer F' (984) et de la perpendiculaire menée du foyer F sur la droite donnée DD' (*fig.* 524). Cette perpendiculaire coupe toujours le

Fig. 524.

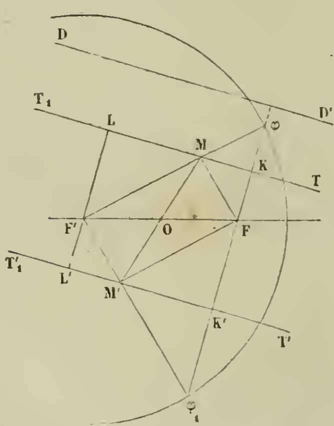
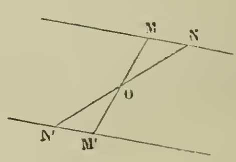


Fig. 525.



cercle F' en deux points φ et φ_1, puisque le point F est intérieur à ce cercle. Les perpendiculaires TT_1 et $T'T'_1$ élevées aux droites Fφ et Fφ_1 par leurs milieux sont les tangentes demandées, et leurs points de contact M et M' sont à leurs rencontres respectives avec les rayons F'φ et F'φ_1 (988).

Corollaires.

993. *Les deux points de contact* M *et* M′ *des deux tangentes parallèles* TT_1, $T'T'_1$ *sont symétriques par rapport au centre* O *de l'ellipse.*

En effet, les triangles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$, $\varphi F'\varphi_1$ sont des triangles isocèles ayant tous un angle égal à la base; ils sont donc semblables et ont leurs côtés parallèles. La figure MFM′F′ étant un parallélogramme, la diagonale MM′ passe par le milieu O de la diagonale FF′ et y est divisée en deux parties égales.

Inversement, *les tangentes menées à l'ellipse en deux points symétriques par rapport au centre sont parallèles.* Car le quadrilatère MFM′F′ étant dans ce cas un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en parties égales, les angles $FM\varphi$, $FM'\varphi_1$ ont leurs côtés parallèles et sont égaux. Il en est donc de même de leurs moitiés (980) FMT, $\varphi_1 M'T'$, ce qui entraîne le parallélisme des tangentes MT, M′T′, aux points M et M′.

994. La propriété précédente appartient d'ailleurs à toutes les courbes à centre. *Dans toute courbe à centre, les tangentes en deux points* M *et* M′ *symétriques par rapport au centre* O *sont parallèles et, par suite, équidistantes du centre.*

En effet, si N (*fig.* 525) est un point de la courbe voisin de M, et N′ son symétrique par rapport à O, l'égalité des triangles MON, M′ON′, prouve le parallélisme des cordes ou sécantes MN, M′N′, et leur égale distance au centre. Quand N tend vers M, N′ tend vers M′. Les deux sécantes tournent donc à la fois autour des points M et M′, de manière à devenir ensemble tangentes, en restant toujours parallèles et équidistantes du centre.

995. Les points K et K′ (*fig.* 524) appartiennent au cercle principal de l'ellipse (985). Les deux segments FK, FK′, étant alors ceux d'une corde quelconque de ce cercle passant par le foyer F, leur produit est constant. On peut donc dire que *le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.* Si l'on mène par le foyer F′ la corde LL′ du cercle principal qui est parallèle à KK′, on a évidemment FK′ = F′L. On peut donc dire aussi que *le produit des distances des deux*

foyers à une même tangente est constant. Si l'on veut connaître cette constante, il suffit de considérer la tangente à l'une des extrémités du petit axe, et l'on obtient immédiatement le carré du demi-petit axe b^2 pour sa valeur.

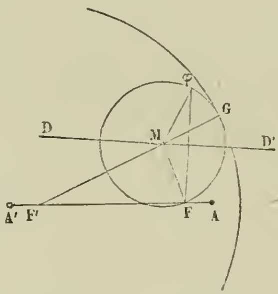
SCOLIE.

996. Les constructions des nos 989 et 992 n'exigent pas que la courbe soit tracée.

PROBLÈME.

997. *Étant donnés les foyers* F *et* F′ *et le grand axe* AA′ *d'une ellipse, déterminer ses points de rencontre avec une droite* DD′ (*fig.* 526).

Fig. 526.



Supposons le problème résolu, et déterminons le symétrique φ du foyer F par rapport à DD′. M étant l'un des points de rencontre de la droite DD′ avec l'ellipse, on aura M φ = MF. Prolongeons F′M d'une longueur MG = MF; F′G sera égal à AA′, et le point G appartiendra au cercle directeur relatif au foyer F′. Le cercle décrit du point M comme centre avec MF pour rayon passe donc par les deux points F et φ et est tangent au cercle directeur F′G. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à un cercle donné F′G. Nous avons résolu ce problème (262, 2°).

Comme le foyer F est intérieur au cercle directeur relatif au foyer F′, il y aura évidemment deux solutions, une seule ou aucune, suivant que le point φ sera lui-même intérieur, com-

pera donc l'ellipse en deux points, lui sera tangente ou *extérieure,* suivant les mêmes conditions (¹).

Corollaire.

998. *Une droite ne pouvant rencontrer une ellipse en plus de deux points, l'ellipse est une courbe convexe* (982).

§ II. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'HYPERBOLE

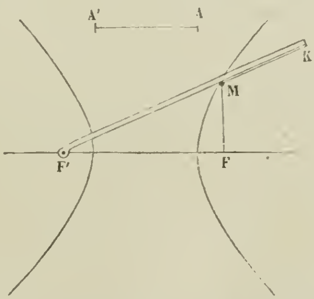
999. L'*hyperbole* est une courbe plane telle, que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes de son plan est égale à une longueur constante. Ainsi (*fig.* 527), les deux points fixes étant F et F' et la longueur donnée étant représentée par la droite AA', on aura pour tout point M de l'hyperbole

$$MF - MF' = \pm AA',$$

suivant que le point considéré sera plus éloigné du point F ou du point F'.

D'après cela, pour décrire un arc d'hyperbole d'un *mouvement continu,* on prend une règle F'K dont on fixe l'une des extrémités au point F' (*fig.* 527), de manière qu'elle puisse seulement tourner autour de ce point. Un fil dont la longueur est moindre que celle de la règle de la constante AA' est fixé

Fig. 527.



(¹) Quand la droite DD' est tangente, φ est en G; en d'autres termes, G est alors le symétrique de F par rapport à DD'; donc DD' est la bissectrice de l'angle GMF, ce qui fournit une seconde démonstration de la propriété fondamentale de la tangente. Mais cette démonstration a, comme beaucoup d'autres plus ou moins ingénieuses, le tort d'être *particulière;* celle que nous avons donnée au n° 980 est bien préférable, car elle consiste dans l'application à l'ellipse de la méthode *générale* pour la détermination des tangentes dans le système bipolaire.

par l'une des ses extrémités au point F et, par l'autre, au point K. Si l'on tend alors constamment ce fil le long de la règle à l'aide d'un crayon, en faisant tourner la règle autour de F', la pointe du crayon trace un arc de l'hyperbole demandée; car, pour une position quelconque M de cette pointe, on a (dans le cas de la figure)

$$MF' - MF = (MF' + MK) - (MF + MK) = AA'.$$

En prenant pour centre de rotation de la règle le point F, et en attachant la seconde extrémité du fil au point F', on obtient la seconde partie de la courbe. Quand la règle est au-dessus de FF', le fil doit être tendu contre son arête inférieure; c'est l'inverse quand la règle est au-dessous de FF'.

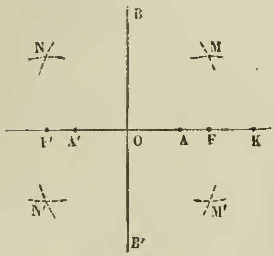
On voit que l'hyperbole est formée de deux parties qui ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on a toujours, pour la partie de droite de la figure, $MF' > MF$, et pour celle de gauche, $MF > MF'$. Chaque partie, c'est-à-dire chacune des deux *branches*, s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de la droite FF'; rien ne limite en effet l'éloignement des points obtenus sur la courbe, que la longueur même de la règle et du fil employés.

1000. Les points F et F' sont les *foyers* de l'hyperbole, les droites MF et MF' sont les *rayons vecteurs* du point M. La longueur AA' est ordinairement représentée par $2a$. La distance FF' se nomme *distance focale* et on la représente par $2c$. L'existence du triangle MFF' entraîne la condition $2c > 2a$ ou $c > a$.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* de l'hyperbole. Cette excentricité peut varier de 1 à ∞. Pour $c = a$, elle est égale à 1, et l'hyperbole se réduit aux deux portions de la droite FF' qui sont séparées par la distance FF'; pour $a = 0$, elle est infinie, et l'hyperbole se réduit à la perpendiculaire élevée sur le milieu de FF'. Entre ces deux limites, l'hyperbole se rapproche d'autant plus de la droite FF' que l'excentricité est plus petite.

1001. On peut aussi tracer l'hyperbole *par points* (*fig.* 528). En effet, marquons le milieu O de la distance focale FF' et, de part et d'autre du point O, prenons $OA = OA' = a$, puis un point K quelconque sur le prolongement de OA. Si des points F et F′ comme centre, avec des rayons respectivement égaux à AK et à A′K, nous décrivons des arcs de cercle, leurs

Fig. 528.



points d'intersection M et M′ appartiendront à l'hyperbole, car on aura

$$MF' - MF = M'F' - M'F = A'K - AK = 2a.$$

La distance des centres FF′ étant toujours plus grande que la différence $2a$ des rayons, il suffit, pour l'intersection des deux circonférences, que cette distance soit moindre que la somme des rayons, c'est-à-dire qu'on ait

$$FF' < AK + A'K \quad \text{ou} \quad 2c < 2AK + 2a.$$

La condition cherchée est donc

$$AK > c - a \quad \text{ou} \quad AK > AF.$$

Comme on peut échanger les centres sans modifier les rayons, chaque point K permet d'obtenir quatre points M et M′, N et N′ de l'hyperbole. Le point K doit seulement être au delà du point F, sans que rien limite sa position à droite de ce point. Ce que nous venons de dire résulte d'ailleurs de la symétrie de l'équation de condition $MF' - MF = \pm 2a$, par rapport aux deux rayons vecteurs.

Si le point K est en F, les points correspondants de l'hyperbole sont les points A et A′. Le rayon vecteur minimum est $c - a$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, puisque les rayons vecteurs d'un point de la courbe peuvent croître jusqu'à l'infini.

THÉORÈME.

1002. *L'hyperbole a : 1° pour axes, la droite* AA′ *qui passe par ses deux foyers, et la droite* BB′ *perpendiculaire au milieu de la première; 2° pour centre, l'intersection* O *de ces deux droites* (*fig.* 528).

Même démonstration que pour l'ellipse (975), en considérant la différence des rayons vecteurs au lieu de leur somme.

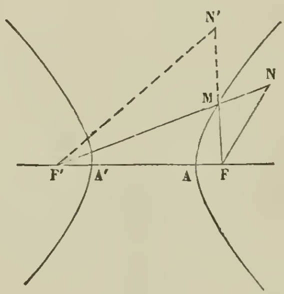
1003. Des deux axes AA′ et BB′, le premier seul rencontre la courbe. L'axe AA′ est dit l'axe *transverse* de l'hyperbole, l'axe BB′ est dit son axe *non transverse*. Les extrémités A et A′ de l'axe transverse sont les *sommets* de la courbe.

Un point du plan est dit *extérieur* à l'hyperbole lorsqu'il est situé entre les deux branches (F) et (F′); il est dit *intérieur* s'il est placé soit à gauche de la branche (F′), soit à droite de la branche (F).

THÉORÈME.

1004. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'hyperbole, la différence de ses distances aux deux foyers est plus grande ou plus petite que* $2a$ (*fig.* 529).

Fig. 529.



Soit N un point intérieur et supposons, pour fixer les idées, qu'il soit à droite de la branche (F); NF′ coupera cette branche en un point M, et on aura

$$NF < MN + MF, \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > NF' - MN - MF,$$

c'est-à-dire

$$NF' - NF > MF' - MF \quad \text{ou} \quad 2a.$$

Soit N' un point extérieur; $N'F$ coupera la branche (F) en un point M, et on aura

$$N'F' - MN' < MF', \quad \text{d'où} \quad N'F' - MN' - MF < MF' - MF,$$

c'est-à-dire

$$N'F' - N'F < 2a.$$

COROLLAIRE.

1005. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à l'hyperbole supposée non tracée. *Suivant que la différence des distances du point considéré aux deux foyers est inférieure, égale ou supérieure à* $2a$, *ce point est hors de la courbe, sur la courbe ou dans son intérieur.*

THÉORÈME.

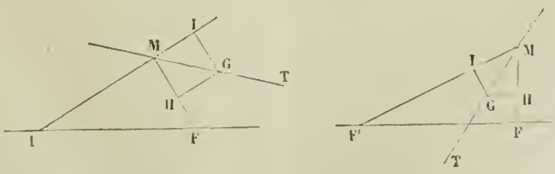
1006. *La tangente à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs du point de contact* (*fig.* 530, 531).

Même démonstration que pour l'ellipse (980), en remarquant que dans l'ellipse les rayons vecteurs d'un même point varient en sens contraires, tandis que dans l'hyperbole ils varient dans le même sens.

1007. RÉCIPROQUEMENT, *la courbe dont la tangente fait des angles égaux, extérieurement ou intérieurement, avec les rayons vecteurs menés du point de contact à deux points fixes, est une ellipse ou une hyperbole dont ces points fixes sont les foyers.*

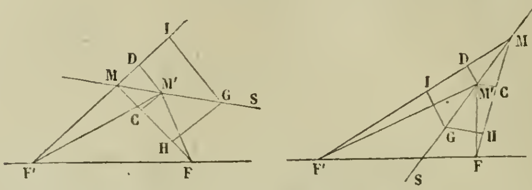
En effet, si l'on abaisse d'un point G de la tangente MT (*fig.* 530) des

Fig. 530.



perpendiculaires GH et GI sur les rayons vecteurs du point M, les triangles rectangles ainsi formés seront égaux, puisque la tangente est, par hypothèse, la bissectrice de l'angle HMI; on aura donc MH = MI, Considérons maintenant la sécante MM'S (*fig.* 531) qui coupe la courbe en M et en M', et portons les rayons vecteurs du point M' sur ceux du point M en FC et en F'D. Si l'on mène alors d'un point G quelconque de

Fig. 351.



la sécante les parallèles GH et GI à M'C et à M'D, les quadrilatères M'CMD, GHMI, seront semblables, et l'on aura constamment

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MI}}.$$

Mais à la limite, quand le point M' vient en M, la sécante MM'S est remplacée par la tangente MT, et l'on a MH = MI. Donc la limite du rapport $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MD}}$ est aussi l'unité.

Cela posé, soient P et Q deux points quelconques de la courbe, mais tels qu'en allant de P en Q le rayon vecteur relatif au foyer F aille toujours en croissant; alors le rayon vecteur relatif au foyer F' ira toujours en décroissant ou toujours en croissant. Concevons l'arc PQ divisé en n parties telles, que, lorsque n croît indéfiniment, chacune des parties tende vers zéro; désignons par u et v les rayons vecteurs de P, par u' et v' ceux de Q, et par (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_{n-1}, v_{n-1}), ceux des points intermédiaires.

Si les rayons vecteurs v, v_1, ..., v_{n-1}, v', relatifs au foyer F', vont en croissant, les rapports

$$\frac{u_1 - u}{v_1 - v}, \quad \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}, \quad \ldots, \quad \frac{u' - u_{n-1}}{v' - v_{n-1}},$$

auront tous l'unité pour limite, lorsque n croîtra indéfiniment; et comme le rapport

$$\frac{u' - u}{v' - v},$$

obtenu en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, a une valeur comprise entre celles des premiers, il faut qu'on ait

$$\frac{u' - u}{v' - v} = 1, \quad \text{d'où} \quad u' - v' = u - v.$$

La courbe est donc une hyperbole, puisque la différence des rayons vecteurs reste constante.

Si les rayons vecteurs $v, v_1, \ldots, v_{n-1}, v'$ relatifs au foyer F' vont en décroissant, le raisonnement subsiste, à la condition de changer les signes des dénominateurs; on arrive ainsi à

$$\frac{u'-u}{v-v'} = 1, \quad \text{d'où} \quad u'+v' = u+v.$$

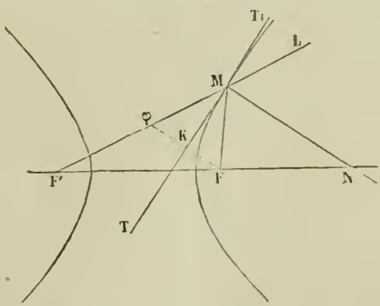
La courbe est donc une ellipse, puisque la somme des rayons vecteurs reste constante.

Enfin, si l'arc PQ était trop étendu pour que les rayons vecteurs relatifs au foyer F varient toujours dans le même sens, on décomposerait cet arc en plusieurs parties satisfaisant à la condition, et la somme (ou la différence) des rayons vecteurs restant constante dans chaque partie serait la même à l'origine P et à l'extrémité Q.

Corollaires.

1008. 1° *La droite* F'φ *qui joint un foyer* F' *de l'hyperbole au symétrique* φ *de l'autre foyer* F *par rapport à une tangente quelconque* TT_1 *passe par le point de contact de cette tangente et est égale à la longueur* $2a$ *de l'axe transverse* (*fig.* 532).

Fig. 532.



2° *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point* M, *sont extérieurs à l'hyperbole, qui est, par suite, une courbe convexe.*

Mêmes démonstrations que pour l'ellipse (981, 982), en remplaçant la somme des rayons vecteurs par leur différence.

1009. Si l'on mène au point M (*fig.* 532) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les angles FMN, LMN sont égaux comme compléments d'angles égaux. Donc, *la normale à l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs du point de contact et le prolongement de l'autre rayon.*

La normale en un sommet de l'hyperbole se confond avec l'axe transverse, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Si une ellipse et une hyperbole ont les mêmes foyers ou sont *homofocales*, elles se coupent à angle droit; car, en l'un quelconque des points d'intersection, la tangente de l'une est la normale de l'autre (980, 983).

Dans le cas de l'hyperbole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent de l'un des foyers F, s'éloignent de plus en plus de l'autre foyer F' après leur réflexion sur la courbe; mais toutes leurs directions prolongées viennent y converger.

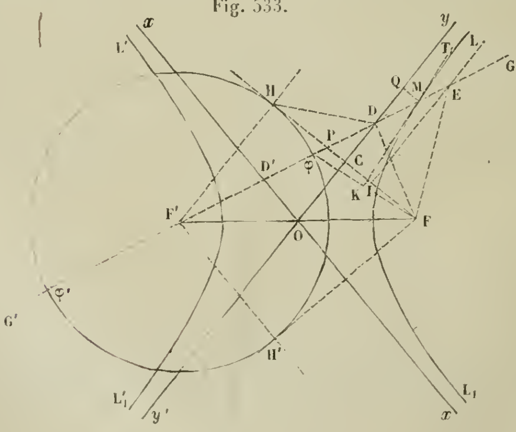
THÉORÈME.

1010. *Le lieu des points symétriques* φ *de l'un des foyers* F *par rapport aux tangentes est un cercle (directeur) décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec la longueur* $2a$ *de l'axe transverse pour rayon* (*fig.* 532) [984].

THÉORÈME.

1011. *Le lieu des projections des foyers d'une hyperbole sur*

Fig. 533.



ses tangentes est la circonférence décrite sur l'axe transverse comme diamètre (*fig.* 532).

On donne à cette circonférence le nom de *cercle principal.*

Même démonstration que pour l'ellipse (985).

THÉORÈME.

1012. *Le lieu des points équidistants d'un cercle de centre* F′ *et d'un point extérieur* F *est une hyperbole dont les points* F *et* F′ *sont les foyers, et dont l'axe transverse est égal au rayon du cercle* (*fig.* 533).

La tangente en un point quelconque M *du lieu est la perpendiculaire sur le milieu* K *de la droite qui joint le point* F *à l'extrémité du rayon* F′φ *passant par* M.

Comme pour l'ellipse (987).

Corollaire.

1013. De là, pour l'hyperbole, un nouveau tracé donnant à la fois le point et la tangente.

Décrivez le cercle directeur relatif à l'un des foyers F′, c'est-à-dire le cercle dont le centre est F′ et dont le rayon est égal à $2a$; *joignez l'autre foyer* F *à un point quelconque* φ *de ce cercle, et menez la perpendiculaire* KT *sur le milieu de* Fφ; *cette perpendiculaire rencontre le rayon* F′φ *en un point* M *de l'hyperbole et elle est en outre la tangente en ce point.*

Il suit de cette construction que, sur toute droite indéfinie GG′ passant par F′, il y a deux points de l'hyperbole et seulement deux; ils correspondent aux deux points φ et φ' où le diamètre GG′ coupe le cercle directeur.

Scolie.

1014. Une droite OY est dite *asymptote* d'une branche infinie de courbe AL, si la distance MP d'un point quelconque M de la courbe à la droite tend vers zéro quand le point M s'éloigne indéfiniment en restant sur la courbe.

THÉORÈME.

1015. *L'hyperbole a pour asymptotes les perpendiculaires* Ox *et* Oy *abaissées du centre* O *sur les tangentes* FH′, FH,

---

(1) Le théorème s'étend aux projections obliques (n° 985).

menées par l'un des foyers F *au cercle directeur relatif à l'autre foyer* F′ (*fig.* 533).

En effet, remarquons d'abord que tout point de chacune des droites xx' et yy' est extérieur à la courbe, car, soit D, par exemple, un point quelconque de yy'; cette droite, étant parallèle à F′H et passant par le milieu de FF′, passe par le milieu de FH; on a donc $DF = DH$, et, par suite,

$$DF' - DF = DF' - DH < F'H \quad \text{ou} \quad 2a.$$

En second lieu, il est facile de voir que, P désignant le point commun à GG′ et HF, le point E où GG′ rencontre la perpendiculaire élevée sur le milieu I de PF est intérieur à la courbe. Car on a

$$EF' - EF = EF' - EP = F'P > 2a.$$

On conclut de là, en désignant par D′ et D les points où GG′ coupe xx' et yy', que les *deux* points (1013) M′ et M, où GG′ rencontre l'hyperbole, sont situés, l'un entre F′ et D′, l'autre entre D et E; car, en allant de F′ en D′, on passe de l'intérieur à l'extérieur, et en allant de D en E, on passe de l'extérieur à l'intérieur.

Cela posé, considérons, par exemple, le point M correspondant au point φ du cercle directeur : pour que ce point s'éloigne indéfiniment sur la courbe, il faut et il suffit que les deux droites $F'\varphi$ et KT, dont il est l'intersection, deviennent parallèles; et, comme la seconde est sans cesse perpendiculaire à $F\varphi$, il faut et il suffit que $F\varphi$ devienne perpendiculaire à $F'\varphi$, c'est-à-dire devienne la tangente FH au cercle directeur. Mais lorsque φ tend vers H, PH tend vers zéro, et, comme on a

$$\tfrac{1}{2}PH = \tfrac{1}{2}FH - \tfrac{1}{2}FP = FC - FI = IC,$$

IC tend aussi vers zéro; or, d'après l'alinéa précédent, le point M est situé entre D et E; sa distance MQ à Oy est donc moindre que IC; donc MQ a pour limite zéro, et par suite Oy est asymptote

Scolies.

1016. Il importe de remarquer que *l'asymptote* Oy *est la* *limite vers laquelle tend la tangente* KT *au point* M, *quand* M *s'éloigne indéfiniment sur la courbe;* car la tangente KM, étant sans cesse perpendiculaire sur le milieu de Fφ, devient à la limite la perpendiculaire élevée sur le milieu de FH.

1017. La droite OKy étant parallèle à F′H et égale à sa moitié a, on voit que le cercle principal AA′ (*fig.* 534) touche au point K la tangente FH au cercle directeur.

Fig. 534.

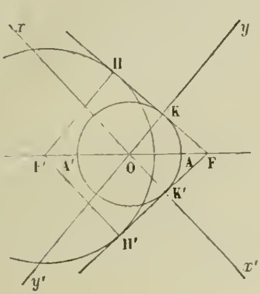
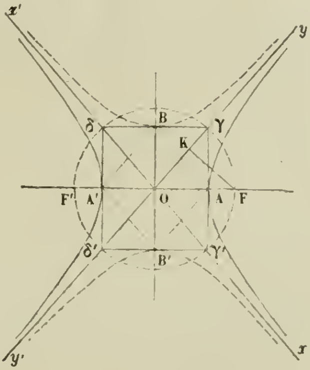


Fig. 535.



Menons (*fig.* 535) Aγ perpendiculaire à FF′ jusqu'à sa rencontre avec l'asymptote Oy; puisqu'on a $\text{OK} = a = \text{OA}$, les triangles rectangles OAγ, OKF sont égaux, et l'on en conclut $\text{O}\gamma = \text{OF} = c$.

Achevons le rectangle $\gamma\gamma'\delta\delta'$, et soient B et B′ les points où l'axe non transverse rencontre $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$; par analogie avec l'ellipse, on donne à la longueur BB′ le nom de *longueur de l'axe non transverse de l'hyperbole,* et on la représente par $2b$.

Les trois longueurs a, b, c sont liées entre elles par la relation $c^2 = a^2 + b^2$. Elles sont liées dans l'ellipse par la relation $c^2 = a^2 - b^2$, qui ne diffère de la précédente que par le changement de b^2 en $-b^2$. Par suite, *les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole qui ne dépendent que des longueurs de leurs axes se déduisent les unes des autres par le simple changement de* b^2 *en* $-b^2$.

Lorsqu'on donne les longueurs des axes de l'hyperbole, il est facile de déterminer graphiquement les foyers. On n'a qu'à élever à l'extrémité A de l'axe transverse une perpendiculaire $A\gamma = b$ (*fig.* 535) et à décrire du point O comme centre, avec $O\gamma$ pour rayon, une circonférence qui coupe l'axe transverse aux deux foyers F et F'. On trouve en même temps l'asymptote $O\gamma$ et sa symétrique $O\gamma'$.

1018. On appelle hyperbole *équilatère* une hyperbole dont les deux axes ont la même longueur. Le rectangle $\gamma\gamma'\delta\delta'$ (*fig.* 535) devenant alors un carré, on voit que *les asymptotes d'une hyperbole équilatère sont à angle droit l'une sur l'autre.*

1019. On entend par *hyperboles conjuguées* deux hyperboles qui, ayant les mêmes axes et, par suite, le même centre, la même distance focale et les mêmes asymptotes, sont situées par rapport à ces asymptotes dans des angles différents ; c'est-à-dire que l'axe transverse de l'une est l'axe non transverse de l'autre, et réciproquement (*fig.* 535).

Deux hyperboles conjuguées ne sont identiques et ne peuvent se substituer l'une à l'autre par un quart de révolution, que lorsqu'elles sont équilatères (1018).

PROBLÈME.

1020. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.*

Mêmes procédés que pour l'ellipse (989). Ici c'est la troisième des inégalités du n° 989, 2°, qui est satisfaite d'elle-même, puisque a est moindre que c, et que le triangle PFF' donne $2c < PF + PF'$; les deux premières expriment (1005) que *le point* P *doit être extérieur à l'hyperbole.*

COROLLAIRES.

1021. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hyperbole est une circonférence concentrique à la courbe et ayant pour rayon* $\sqrt{a^2 - b^2}$ (990).

La démonstration directe est la même que pour l'ellipse.

Seulement, la question revient ici à chercher le lieu des milieux des cordes interceptées dans le cercle directeur relatif au foyer F′, par un angle droit dont le sommet F lui est extérieur. Le problème peut alors être impossible, et le lieu cesser d'exister, si l'on a $a < b$.

La tangente de l'angle aigu formé par l'asymptote Oy avec l'axe transverse étant représentée par $\frac{b}{a}$, le problème est impossible quand cet angle est supérieur à 45 degrés ou quand l'angle yOx des deux asymptotes (*fig.* 535) est obtus : il est possible, au contraire, quand cet angle est aigu.

En effet, l'angle des deux asymptotes est précisément (1017) le supplément de celui des deux tangentes qu'on peut mener au cercle directeur F′ par le foyer F. Or, ce n'est que lorsque l'angle de ces deux tangentes est obtus que les deux côtés de l'angle droit dont le sommet est en F peuvent rencontrer à la fois le cercle F′.

Lorsque l'angle des asymptotes est droit, celui des deux tangentes menées du foyer F au cercle directeur F′ est aussi droit, et il n'y a pas d'autre angle droit circonscrit à l'hyperbole que celui de ses asymptotes. Ce résultat limite est d'ailleurs évident ; car, la courbe étant alors équilatère (1018), on a $a = b$, et le lieu se réduit au centre de l'hyperbole.

1022. *Les tangentes* PM, PM′, *menées à l'hyperbole par un point extérieur* P, *font des angles égaux avec les droites qui vont du foyer* P *aux deux foyers ; la droite qui va du point* P *à l'un des foyers est bissectrice de l'angle intérieur ou extérieur des rayons vecteurs qui vont de ce foyer aux deux points de contact* M *et* M′, *suivant que les deux tangentes touchent l'hyperbole dans la même région ou dans deux régions différentes.*

Même démonstration que pour l'ellipse (991).

Les propositions des nos 991 et 1022 conduisent à une démonstration très simple (Darboux, *Bulletin*, t. XIV) de la condition pour qu'un quadrilatère, convexe ou non, soit circonscriptible à un cercle. Cette condition, d'abord mal énoncée par Pitot (*Mémoires de l'Académie*, 1725), puis rectifiée par Steiner (*Journal de Crelle*, t. 32), consiste en ce que :

Dans tout quadrilatère circonscrit, la somme de deux côtés (opposés ou adjacents, suivant les cas) *est égale à la somme des deux autres; et réciproquement.*

La proposition directe est évidente; elle résulte immédiatement de l'égalité des deux tangentes menées à un cercle par un point extérieur. C'est la réciproque seule qui exige quelque attention pour être établie en toute généralité. ABCD étant le quadrilatère considéré, l'hypothèse consistera dans l'une des égalités

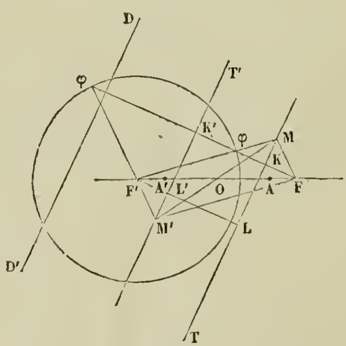
$$AB + BC = AD + DC, \quad AB - BC = AD - DC, \quad AB - BC = DC - AD;$$

mais l'une quelconque de ces égalités exprime qu'il y a une ellipse ou une hyperbole ayant pour foyers les deux sommets opposés A et C et passant par B et D. Les tangentes en B et D à cette courbe se coupent en un point P, et il résulte des théorèmes (991 et 1022) que par ce point P viennent passer une des bissectrices de l'angle A et une des bissectrices de l'angle C; ce point P est donc équidistant des quatre côtés du quadrilatère, et, par suite, il est le centre d'un cercle inscrit à cette figure.

PROBLÈME.

1023. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 536).

Fig. 536.



Même procédé que pour l'ellipse (992). Seulement, le problème n'est pas toujours possible. Il faut que, si l'on mène par le centre de la courbe une parallèle à la droite donnée, elle ne tombe pas dans les angles des asymptotes qui renferment l'hyperbole. En effet, pour que la perpendiculaire menée du foyer F à la droite donnée rencontre le cercle directeur F', il faut et il suffit que l'angle aigu de Fφ avec l'axe transverse soit moindre que l'angle aigu que fait avec le même axe la tangente menée de F au cercle F'; or ces angles sont respectivement les compléments des angles aigus δ et θ que l'axe transverse forme avec la droite donnée DD' et avec les asymptotes; on doit donc avoir

$\frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2} - \theta$, d'où $\delta > \theta$.

Si la condition est remplie, il y a deux solutions T et T'. Pour $\delta = \theta$, il n'y a plus qu'une solution : c'est l'asymptote à laquelle la droite donnée est alors parallèle.

Corollaires.

1024. *Les deux tangentes parallèles à une droite donnée ont leurs points de contact symétriques par rapport au centre* (993).

1025. *Le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles ou le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant.*

Comme pour l'ellipse (995).

Les constructions des nos 1020 et 1023 n'exigent pas que l'hyperbole soit tracée (996).

PROBLÈME.

1026. *Connaissant les foyers* F *et* F' *et l'axe transverse d'une hyperbole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée.*

Même procédé que pour l'ellipse (997), seulement la discussion exige quelque attention.

Soient h l'hyperbole, d la droite donnée, δ l'angle aigu de cette droite et de l'axe transverse, θ l'angle aigu des asymptotes et du même axe.

Les points communs à h et à d sont les centres des cercles qui, touchant le cercle directeur F′, passent par l'autre foyer F et par le point φ symétrique de F par rapport à d. De plus, un point commun à h et à d appartient à l'une ou à l'autre branche de l'hyperbole, suivant que le cercle directeur F′ est extérieur au cercle tangent ou est enveloppé par ce cercle.

Cela posé :

1° *Si δ est inférieur à θ, d coupe h en deux points situés sur deux branches distinctes;* car la droite indéfinie Fφ étant alors extérieure au cercle F′, il y a deux cercles tangents dont un seul enveloppe le cercle F′.

2° *Si δ est supérieur à θ*, la droite indéfinie Fφ coupe le cercle F′, et il y a trois cas à distinguer. F′φ *étant inférieur à $2a$, d* ne *rencontre pas h*; car φ est alors intérieur au cercle F′, et il n'y a pas de cercle tangent. F′φ *étant égal à $2a$, d* touche h; car φ est alors sur la circonférence F′, et les deux cercles tangents se réduisent à un seul. Enfin, F′φ *étant supérieur à $2a$, d coupe h en deux points appartenant à une même branche;* car φ est alors extérieur au cercle F′, et il y a deux cercles tangents qui enveloppent tous deux le cercle F′ ou auxquels le cercle F′ est à la fois extérieur, suivant que F′ et φ sont séparés ou non par le cercle F′.

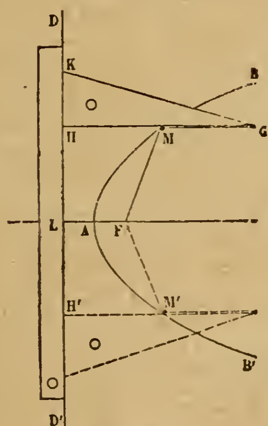
3° *Si δ est égal à θ*, la droite Fφ est tangente au cercle F′, et il y a deux cas. *Si d est une asymptote, elle a deux points communs à l'infini avec h*, puisque le point φ est alors sur la circonférence F′ et que les deux cercles tangents se réduisent à la droite Fφ. *Si d n'est que parallèle à une asymptote, elle a avec l'hyperbole deux points communs, dont un seul à distance finie;* car le point φ est alors extérieur au cercle F′, et il y a deux cercles tangents dont l'un se réduit à la droite Fφ.

Observons enfin qu'on peut donner d'autres formes aux énoncés des conditions précédentes, en introduisant la considération, soit de la parallèle menée par le centre à la droite donnée, soit des tangentes parallèles à cette droite. Par exemple, la condition $\delta > \theta$ peut être remplacée par l'une des suivantes : la parallèle à d menée par le centre doit être comprise dans les angles des asymptotes qui ne renferment pas la courbe, ou la courbe doit avoir des tangentes parallèles à d.

§ III. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA PARABOLE.

1027. La *parabole* est une courbe plane telle, que chacun de ses points est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe donnés dans son plan. Ainsi (*fig.* 537), le point fixe

Fig. 537



étant F et la droite fixe DD', on aura, pour tout point M de la parabole, en abaissant MH perpendiculaire sur DD', MF = MH Par sa définition même, la parabole est nécessairement située tout entière du même côté que le point fixe par rapport à la droite fixe.

D'après ce qu'on vient de dire, pour décrire un arc de parabole d'*un mouvement continu*, on fait coïncider l'arête d'une règle avec la droite DD', et l'on applique contre cette règle le petit côté KH d'une équerre KHG. Un fil, égal en longueur au grand côté HG de cette équerre, est fixé par ses deux extrémités, d'une part au point F, et de l'autre à l'extrémité G du côté HG. Si l'on tend alors constamment ce fil contre le grand côté de l'équerre à l'aide d'un crayon, et si l'on fait en même temps glisser l'équerre le long de la règle, la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, pour une position quelconque M de cette pointe, on a

$$GM + MF = GH = GM + MH, \quad \text{d'où} \quad MF = MH.$$

En opérant de cette manière, on trace d'un mouvement continu l'arc BA, qui va du point B de la courbe dont la distance au point F est égale à GH, jusqu'au point A milieu de la perpendiculaire FL abaissée du point F sur la droite DD'. Il faut ensuite retourner l'équerre, comme l'indique la figure, pour décrire l'arc AB'.

On voit que la parabole est formée de deux branches qui s'étendent indéfiniment, à partir du point A, au-dessus et au-dessous de la droite FL; car, si l'on emploie une règle, une équerre et un fil assez longs, rien ne limite l'éloignement des points obtenus sur la courbe. La parabole est donc une courbe à branches infinies, mais sans séparation, et d'un seul côté de la droite fixe.

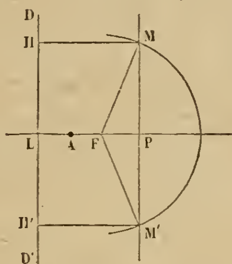
1028. Le point F est le *foyer* de la parabole, la droite DD' est sa *directrice*. La droite MF est le *rayon vecteur* du point M. La distance FL du foyer à la directrice se nomme le *paramètre* de la courbe, et on la représente par p.

1029. On peut aussi tracer la parabole *par points*.

En effet, prenons (*fig.* 538) un point P quelconque sur la perpendiculaire FL abaissée du foyer sur la directrice. Par le point P, menons une perpendiculaire à FL ou une parallèle à la directrice, et du foyer F comme centre, avec PL pour rayon, décrivons une circonférence qui coupera cette parallèle en deux points M et M' appartenant à la parabole, comme équidistants du foyer et de la directrice.

Pour que les points d'intersection M et M′ existent, il suffit que le point P soit à l'intérieur du cercle décrit du foyer F comme centre avec PL pour rayon, c'est-à-dire qu'on ait $FP < PL$. Cette condition sera toujours remplie lorsque le point P sera à droite du foyer F (dans le cas de la figure); mais elle exige, si le point P est à gauche de F, qu'il reste à

Fig. 538.



droite du point A milieu de FL. Si l'on a dans ce cas, comme condition limite, $FP = PL$, le point P se confond avec le point A, et les deux points M et M′ se réunissent en ce point. Le rayon vecteur minimum est donc AF ou $\frac{p}{2}$; il n'y a pas de rayon vecteur maximum, rien ne limitant l'éloignement du point P à droite du foyer F.

THÉORÈME.

1030. *La parabole a pour axe la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice* (*fig.* 537).

Même démonstration que pour l'ellipse (975, 1°).

Le point A, commun à la parabole et à son axe, est le *sommet* de la courbe.

THÉORÈME.

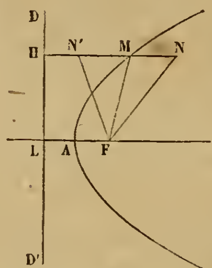
1031. *Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est moindre ou plus grande que sa distance à la directrice* (*fig.* 539).

Soit d'abord un point N intérieur à la courbe. Menons la droite NF et la perpendiculaire NH à la directrice, laquelle coupera la parabole au point M (1027). Le triangle NFM donne alors

$$NF < NM + MF \quad \text{ou} \quad NF < NH, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Soit de même un point N′ extérieur à la courbe. Si le point N′ et le foyer sont de côtés différents par rapport à la directrice, la proposition est évidente. Sinon, menons la

Fig. 539.



droite N′F et la perpendiculaire N′H à la directrice, laquelle, prolongée, coupera la parabole au point M. Le triangle N′FM donne alors

$$N'F > MF - MN' \quad \text{ou} \quad N'F > N'H, \quad \text{puisque} \quad MF = MH.$$

Corollaire.

1032. Ce théorème, rapproché de la définition de la courbe, fournit un critérium pour juger de la position d'un point quelconque de son plan par rapport à la parabole supposée non tracée. *Suivant que la distance du point considéré au foyer est égale, supérieure ou inférieure à sa distance à la directrice, ce point est à la courbe, il lui est extérieur ou intérieur.*

THÉORÈME.

1033. *La tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point.*

Prenons sur la parabole (*fig.* 540) deux points voisins M et M'; menons la sécante MM'S, abaissons des deux points considérés les perpendiculaires $M\varphi$, $M'\varphi'$, sur la directrice DD', et traçons leurs rayons vecteurs. Portons sur FM une longueur $FC = FM'$, et sur φM une longueur $\varphi E = \varphi' M'$. D'après la définition de la parabole, MC est égal à ME.

Fig. 540.

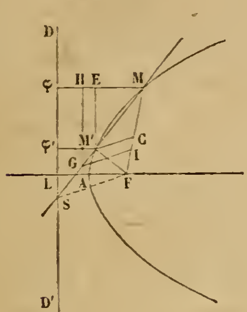
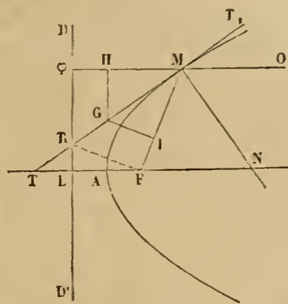


Fig. 541.



D'un point G quelconque de la sécante MM'S, menons à M'C et à M'E, jusqu'à la rencontre de FM et de φM, les parallèles GI et GH. Les deux quadrilatères CM'EM, IGHM sont semblables (208), et l'égalité de MC et de ME entraîne celle de MI et de MH.

A mesure que le point M' se rapproche du point M, GH reste, comme M'E, perpendiculaire à $M\varphi$, tandis que GI, perpendiculaire à la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle M'FC, tend à le devenir au rayon vecteur FM. On a de plus constamment $MI = MH$. La tangente à la parabole (*fig.* 541) doit donc être telle, que si, d'un point quelconque G pris sur cette droite, on abaisse des perpendiculaires GI et GH sur le rayon vecteur du point de contact M et sur la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, on ait $MI = MH$. Les triangles rectangles MGI, MGH sont donc égaux, ainsi que les angles GMI, GMH. *La tangente à la parabole est* donc *bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice.*

Mais, l'angle GMH étant l'opposé par le sommet de l'angle

T_1MO, les deux angles GMI ou TMF et T_1MO sont égaux ; ce qui conduit à l'énoncé adopté.

1034. Réciproquement, *la courbe dont la tangente est bissectrice de l'angle formé par les droites menées d'un point de la courbe à un point fixe, et perpendiculairement à une droite fixe, est une parabole ayant le point et la droite fixes pour foyer et pour directrice.*

Démonstration analogue à celle donnée pour l'ellipse et l'hyperbole (1007).

Corollaires.

1035. Soit S le point où la sécante MM'S (*fig.* 540) coupe la directrice DD'. On a, à cause des parallèles,

$$\frac{MS}{M'S} = \frac{M\varphi}{M'\varphi'} = \frac{MF}{M'F};$$

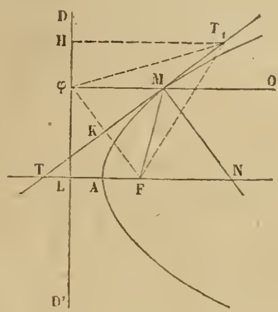
la droite SF est donc la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle MFM' (185). *La droite qui joint le foyer d'une parabole au point de rencontre d'une sécante quelconque avec la directrice est donc bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs des points d'intersection de la sécante avec la courbe.*

A la limite, quand la sécante devient tangente, c'est-à-dire quand l'angle MFM' devient nul, la droite SF est remplacée (*fig.* 541) par la droite RF bissectrice de l'angle supplémentaire de cet angle nul. Par suite, *la droite qui joint le foyer d'une parabole au point où une tangente quelconque rencontre la directrice est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.*

1036. *Tous les points de la tangente* MT, *sauf le point de contact* M, *sont extérieurs à la parabole* qui, par suite (982), est une courbe convexe (*fig.* 542).

En effet, le triangle $FM\varphi$ étant isocèle et la tangente étant la bissectrice de son angle au sommet (1033), elle est perpendiculaire sur le milieu K de $F\varphi$. Pour un point T_1 quelconque de la tangente, on a donc, T_1H étant la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice, $T_1H < T_1\varphi$ ou $T_1H < T_1F$. Le point T_1 est donc extérieur à la courbe (1032).

Fig. 542.



1037. Si l'on mène au point M (*fig.* 542) une perpendiculaire MN à la tangente MT, les deux angles FMN, OMN sont égaux comme compléments d'angles égaux (1033). Donc, *la normale à la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée à l'axe par ce point.*

Au sommet de la parabole, la normale se confond avec l'axe, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.

Soient T et N (*fig.* 542) les points où la tangente et la normale rencontrent l'axe. Les triangles TMF, NMF étant évidemment isocèles, on a $MF = FT = FN$. *Le foyer* F *est* donc *à une distance, soit du pied de la tangente, soit du pied de la normale sur l'axe, égale au rayon vecteur du point de contact.*

1038. Dans le cas de la parabole, les rayons lumineux, sonores ou calorifiques, qui partent du foyer, deviennent tous parallèles à l'axe après leur réflexion sur la courbe. C'est pourquoi l'on emploie des réflecteurs paraboliques, lorsqu'on veut projeter au loin un faisceau de rayons lumineux parallèles (lanternes de voitures, phares). Réciproquement, tout rayon qui vient rencontrer la parabole parallèlement à son axe se réfléchit au foyer de la courbe. De là, par exemple, l'usage des réflecteurs paraboliques dans les télescopes, pour concentrer au foyer les rayons lumineux venant de l'astre observé.

THÉORÈME.

1039. *Le lieu des points symétriques φ du foyer* F *par rapport aux tangentes à la parabole est la directrice* (*fig.* 542).

Cette proposition est évidente d'après ce qui a été dit au n° 1036.

SCOLIES.

1040. *Étant donnés un point* F *et une droite* DD′ (*fig.* 542), *si l'on mène des droites* F φ *aux différents points de la droite* DD′, *les perpendiculaires élevées à ces droites par leurs milieux enveloppent une parabole qui a pour foyer le point* F *et pour directrice la droite* DD′; *les points de contact de ces tangentes sont à leurs rencontres avec les perpendiculaires menées à la directrice par les points* φ.

C'est là un nouveau procédé pour décrire la parabole par points (1029). En le suivant, on n'obtient qu'un point à la fois; mais on a en même temps la tangente en ce point.

1041. On voit que *les parallèles à l'axe de la parabole ne rencontrent la courbe qu'en un seul point.* Il serait donc faux de dire qu'une droite qui n'a qu'un point commun avec une courbe, même convexe, lui est tangente. Une droite tangente à une courbe convexe n'a qu'un point commun avec elle (982); mais la réciproque n'est pas vraie.

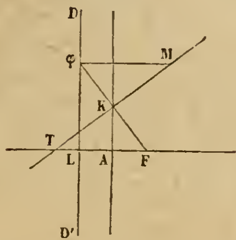
THÉORÈME.

1042. *Le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet.*

MT étant la tangente à la courbe au point M (*fig.* 543), et φ le symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, le point K où Fφ coupe la tangente est le milieu de Fφ. D'ailleurs, le sommet A est le milieu de FL. Donc, dans le triangle FLφ, AK est parallèle à la directrice ou se confond avec la tangente au sommet (1037). La projection K du foyer sur une tangente se trouve par suite sur la tangente au sommet.

Réciproquement, K étant un point de la tangente au sommet, si l'on mène la droite FKφ, le point φ sera le symétrique du foyer F par rapport à la tangente qui passe par le point K

Fig. 543.



(1040) ; le point K sera donc la projection du foyer F sur cette tangente[1].

Corollaire.

1043. Si l'un des côtés d'une équerre passe constamment par le foyer F, tandis que son sommet parcourt la tangente AK au sommet de la courbe, l'autre côté de l'équerre reste constamment tangent à la parabole.

THÉORÈME.

1044. *Dans toute courbe rapportée à des axes rectangulaires, l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre la sous-tangente et la sous-normale.*

Pour indiquer la position d'un point M sur un plan (*fig.* 544), il suffit de donner ses projections P et Q sur deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ tracés dans ce plan, ou, ce qui revient au même, les nombres (positifs ou négatifs) qui mesurent les segments OP et OQ. On convient d'ailleurs de fixer le sens positif sur chacun des axes de la manière suivante : après avoir choisi à volonté le sens positif sur l'axe $x'Ox$, on place sur cette droite les lettres x' et x de façon que le sens positif que l'on a adopté soit celui de x' vers x ; puis, on place les lettres y' et y sur l'autre axe de telle sorte qu'une rotation de 90°, autour de O, dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, amène la demi-droite Oy sur la demi-droite

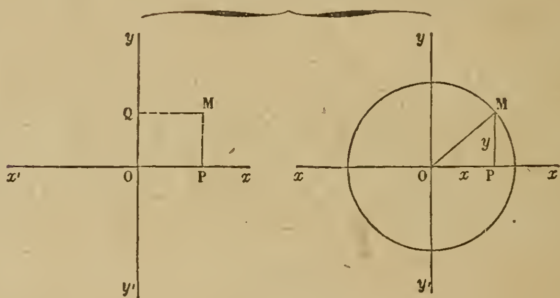
[1] Le théorème s'étend aux projections obliques (n° 985).

Ox, et l'on adopte pour sens positif sur $y'Oy$ le sens de y' vers y.

La valeur algébrique du segment OP, ou de son égal QM, reçoit le nom d'*abscisse* du point M, et l'on nomme *ordonnée* de ce même point la valeur algébrique du segment OQ ou de son égal PM. L'abscisse et l'ordonnée d'un point sont les *coordonnées* de ce point; les axes $x'Ox$, $y'Oy$ sont les *axes des coordonnées* et O est l'*origine des coordonnées*.

Quand un point appartient à une courbe donnée, son ordonnée y dépend de son abscisse x, et elle est déterminée

Fig. 544.



par le choix de cette abscisse. Par exemple, l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point quelconque d'une circonférence de rayon R rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre (*fig.* 544) sont évidemment liées par la relation

$$y^2 + x^2 = R^2, \quad \text{d'où} \quad y^2 = R^2 - x^2.$$

Le choix des axes coordonnés est arbitraire. On adopte de préférence les droites les plus remarquables du plan relativement à la courbe, telles que ses axes, ses tangentes aux sommets, etc. Dans la parabole, on choisit l'axe et la tangente au sommet.

Cela posé, soit (*fig.* 545) une courbe C rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires xOx', yOy'. Menons en un point quelconque M la tangente MT, la normale MN et l'ordonnée MP. La projection TP sur l'axe Ox de la portion de tangente MT comprise entre son point de contact M et son pied T sur cet axe s'appelle *sous-tangente ;* de même, PN est la *sous-normale*. Le triangle TMN étant rectangle en M, et MP étant perpendiculaire sur l'hypoténuse TN, le théorème énoncé est démontré.

Au lieu d'axes rectangulaires, on peut employer des *axes obliques*. Les coordonnées d'un point sont encore ses distances aux deux axes, mais comptées parallèlement à ces axes. Les projections ne sont plus alors orthogonales, mais obliques, et le théorème précédent cesse d'être vrai.

THÉORÈME.

1045. *Dans la parabole : 1° la sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact ; 2° la sous-normale est constante et égale au paramètre* (*fig.* 546).

1° Soit la tangente en M à la parabole. Si l'on prend pour axes coordonnés l'axe Ax de la courbe et la tangente au sommet Ay, le point M aura MP pour ordonnée et AP pour abscisse. Le triangle TFM étant isocèle (1037), la projection K du foyer F sur la tangente MT est le milieu de MT. La tangente au sommet AKy étant parallèle à l'ordonnée MP, le sommet A est donc le milieu de la sous-tangente TP, et $TP = 2AP$.

Fig. 545.

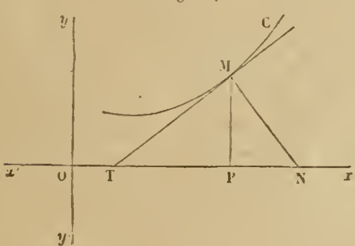
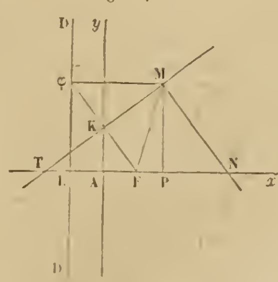


Fig. 546.



2° Soit la normale MN. Elle est perpendiculaire à la tangente MT comme la droite $F\varphi$. La figure $M\varphi FN$ est donc un parallélogramme, et $\varphi F = MN$. Les deux triangles rectangles MPN, φLF, sont donc égaux, et l'on a $PN = LF = p$.

Corollaire.

1046. *Le carré de l'ordonnée d'un point de la parabole est proportionnel à l'abscisse de ce point* (*fig.* 546).

Soient y et x les coordonnées MP et AP d'un point quelconque M de la parabole. On a (1044, 1045)

$$y^2 = \mathrm{TP}.\mathrm{PN} = 2x.p \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px.$$

PROBLÈME.

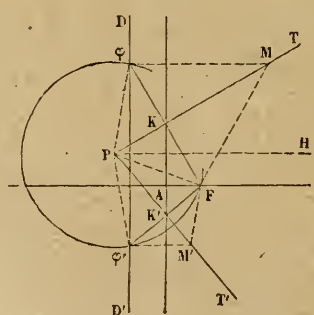
1047. *Mener une tangente à la parabole par un point donné.*

1° *Si le point donné* M *est sur la courbe* (*fig.* 546), on mène le rayon vecteur MF et la perpendiculaire Mφ sur la directrice; puis, la bissectrice de l'angle FMφ, qui est la tangente demandée (1033).

Il vaut mieux prendre sur l'axe, du côté du sommet, une longueur FT égale à MF; en joignant le point T ainsi obtenu au point donné M, on a (1037) la tangente demandée.

2° *Si le point donné* P *est extérieur à la parabole*, on remarque que la question serait résolue si l'on connaissait le symétrique φ du foyer F par rapport à la tangente cherchée; car on aurait alors cette tangente en abaissant du point P une perpendiculaire TP sur Fφ (*fig.* 547). La droite TP coupe-

Fig. 547.



rait d'ailleurs la parallèle menée à l'axe par le point φ, au point de contact M. Or, le point φ se trouve à la fois sur la directrice

DD′ (1039) et sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF comme rayon.

Ce cercle et la directrice se coupent toujours, quand le point P est extérieur à la courbe; car il est alors plus près de la directrice que du foyer (1031), et il y a deux solutions, qui se réduisent à une seule quand le point P est sur la parabole, ou disparaissent lorsqu'il est intérieur à la courbe.

Corollaires.

1048. Cherchons la condition pour que les deux tangentes menées du point P à la parabole soient à angle droit.

Ces tangentes étant supposées à angle droit, comme elles sont respectivement perpendiculaires aux milieux des droites $F\varphi$ et $F\varphi'$, l'angle $\varphi F\varphi'$ est aussi droit; par suite, $\varphi\varphi'$ est un diamètre de la circonférence PF, et le point P est sur la directrice. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole est* donc *la directrice.*

Dans ce cas, l'angle PFM est droit ainsi que l'angle PFM′ (1035); la corde des contacts MM′ passe donc alors par le foyer et est perpendiculaire à PF.

1049. *Les tangentes* PM, PM′, *menées d'un point extérieur* P *à la parabole, font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec la parallèle menée à l'axe par ce point; la droite qui va du foyer au point* P *est bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs des points de contact* M *et* M′.

Reportons-nous à la *fig.* 547, et soit PH la parallèle menée à l'axe par le point P. La tangente PMT étant perpendiculaire sur le milieu de $F\varphi$, comme la tangente PM′T′ sur le milieu de $F\varphi'$, les deux angles MPH, $F\varphi\varphi'$, ont leurs côtés respectivement perpendiculaires et sont égaux; la droite PM′ est la bissectrice de l'angle φ'PF, et l'angle au centre M′PF, égal alors à l'angle inscrit $F\varphi\varphi'$, l'est aussi à l'angle MPH. De plus, les angles PFM, PFM′ sont respectivement egaux aux angles $P\varphi M$, $P\varphi' M'$. Or, le triangle $\varphi P\varphi'$ étant isocèle, les angles $P\varphi M$, $P\varphi' M'$ sont égaux comme composés d'angles égaux; et leur égalité démontre celle des angles PFM, PFM′.

PROBLÈME.

1050. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Tout revient encore à trouver le point φ symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée. Or, ce point se trouve à l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la droite donnée. Il y a toujours une solution, et une seule.

SCOLIE.

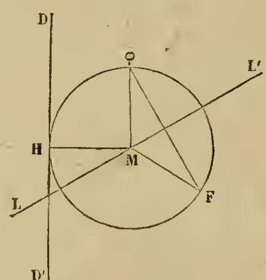
1051. Les constructions des nos 1047 et 1050 n'exigent pas que la courbe soit tracée : il suffit d'en connaître le foyer et la directrice.

PROBLÈME.

1052. *Connaissant le foyer* P *et la directrice* DD′ *d'une parabole, déterminer ses points de rencontre avec une droite donnée* LL′.

Supposons le problème résolu, et prenons (*fig.* 548) le symétrique φ du foyer F par rapport à LL′. Si M est l'un des

Fig. 548.



points de rencontre de la droite LL′ avec la courbe, on aura $M\varphi = MF = MH$, MH étant la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. Le cercle décrit du point M comme centre, avec MF pour rayon, passe donc par les points F et φ et est tangent à la directrice. La question est ainsi ramenée à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et φ et tangent à une droite donnée DD′. Nous avons résolu ce problème (262, 1°).

Comme il n'est possible que lorsque les deux points F et φ sont situés d'un même côté de la droite DD′, la droite LL′ coupera la parabole, lui sera tangente ou ne la rencontrera pas, suivant que le point φ sera du même côté que le foyer par rapport à la directrice, sur cette directrice, ou de l'autre côté de cette droite par rapport au foyer.

COROLLAIRE.

1033. La parabole, ne pouvant être coupée par une droite en plus de deux points, est une courbe convexe (1036).

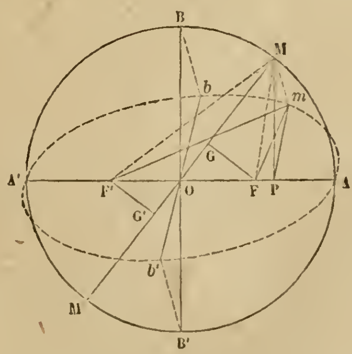
§ IV. — ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION ORTHOGONALE DU CERCLE.

THÉORÈME.

1034. *La projection orthogonale d'une circonférence de cercle sur un plan est une ellipse.*

Les projections d'une figure sur deux plans parallèles étant égales, on peut toujours supposer que le plan de projection passe par le centre O du cercle considéré ABA′B′.

Fig. 549.



Soient donc AA′ le diamètre situé dans le plan de projection et bOb' la projection du diamètre BB' perpendiculaire a AA'; l'angle bOA sera droit, puisqu'il est la projection d'un angle droit BOA sur un plan contenant l'un de ses côtés.

M étant un point quelconque du cercle, et m sa projection, prenons, sur AA', OF = OF' égal à la projetante Bb du point B, et abaissons FG, F'G' perpendiculaires sur le diamètre MM'.

Il suffit de prouver que le rayon vecteur mF est égal à MG; car on prouverait de même que mF' est égal à MG', d'où l'on conclurait

$$mF + mF' = MG + MG' = MG + M'G = MM' = AA'.$$

Mais l'égalité mF = MG résulterait de celle des triangles rectangles mFM, GFM et, par conséquent, de l'égalité FG = Mm. Or cette dernière ressort immédiatement de la comparaison des proportions

$$\frac{MP}{Mm} = \frac{BO}{Bb}, \quad \frac{MP}{FG} = \frac{MO}{OF} \text{ ou } \frac{BO}{Bb},$$

qui sont fournies, la première par les triangles à côtés parallèles MPm, BOb, la deuxième par les triangles rectangles équiangles MOP, GOF.

On voit que le grand axe de l'ellipse obtenue est toujours égal au diamètre du cercle donné. On a, de plus, dans le triangle rectangle BbO (705),

$$Ob = OB \cos BOb, \quad \text{ou} \quad b = a \cos V,$$

en désignant par $2a$ et $2b$ les axes AA' et bb' de l'ellipse, et par V l'angle des plans des deux courbes.

Corollaires.

1033. L'ordonnée MP du cercle (*fig.* 549) étant représentée par Y et l'ordonnée correspondante mP de l'ellipse par y, le triangle rectangle MmP donne

$$y = Y \cos V, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{b}{a} Y.$$

On passe donc du cercle principal d'une ellipse (985) à cette ellipse, en diminuant toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe au grand axe. Cette remarque fournit un nouveau procédé pour décrire l'ellipse par points.

On trace un cercle sur chacun des axes de l'ellipse comme diamètre (*fig.* 550); un rayon quelconque coupe ces cercles aux points N et S. Si l'on mène alors l'ordonnée NP du point N et la parallèle SM au grand axe, l'intersection M de ces deux droites est un point de l'ellipse. On a, en effet,

$$\mathrm{MP} = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{ON}} \cdot \mathrm{NP}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{MP} = \frac{b}{a}\,\mathrm{NP}.$$

1056. Si l'on considère sur l'ellipse et sur le cercle $2b$ deux points M et S ayant la même ordonnée OQ, leurs abscisses x et X sont liées par la relation

$$\frac{x}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OS}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{X} = \frac{b}{a}\,x.$$

Pour passer de l'ellipse au cercle ayant le petit axe pour diamètre, il faut donc diminuer les abscisses de l'ellipse dans le rapport de b à a.

L'ellipse peut donc être regardée comme provenant de la contraction ou de la dilatation des cercles qui ont ses axes pour diamètres.

Scolie.

1057. On a démontré que le rayon vecteur Fm (*fig.* 549) est égal à MG, c'est-à-dire à a — OG; mais les triangles équiangles MOP, GOF, donnent

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{OG} = \frac{cx}{a};$$

on a donc

$$\mathrm{F}m = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et, par suite,} \quad \mathrm{F}'m = a + \frac{cx}{a}.$$

PROBLÈME.

1058. *Mener à l'ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Soit d'abord le point donné m situé sur la courbe.*

Supposons le problème résolu (*fig.* 551), et soit mT la tangente demandée. Dilatons toute la figure, perpendiculairement à AA', dans le rapport de OB à OA. L'ellipse deviendra le cercle AA', le point m deviendra le point M, le point T ne changera pas, et la droite MT sera la tangente au cercle principal. On déterminera donc réciproquement le point T en construisant la tangente en M au cercle principal, et, en traçant mT, on aura la tangente à l'ellipse au point m.

Fig. 550.

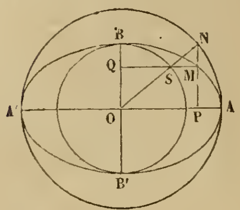
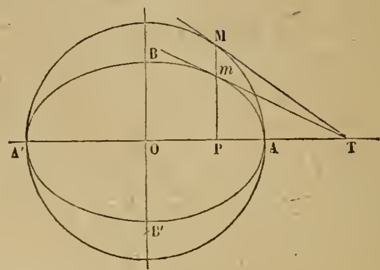


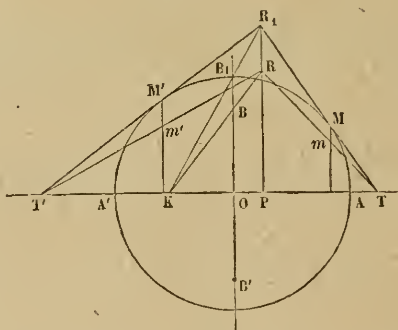
Fig. 551.



2° *Soit maintenant le point donné* R *extérieur à l'ellipse* (*fig.* 552).

Supposons de même le problème résolu (*fig.* 552) et soient RmT, Rm'T' les tangentes qui répondent à la question. Dilatons la figure,

Fig. 552.



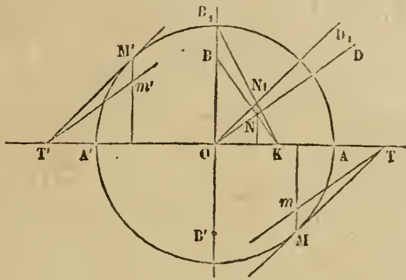
comme dans le premier cas. L'ellipse deviendra le cercle AA', la droite RBK deviendra la droite B_1K, et le point R_1 correspondant au point R, devant se trouver à la fois sur l'ordonnée PR et sur la droite B_1K, sera déterminé. On en déduira les tangentes R_1MT, R_1M'T' au cercle principal et, par suite, les tangentes RmT, Rm'T' à l'ellipse, dont les points de contact m et m' se trouveront d'ailleurs sur les ordonnées des points M et M'.

PROBLÈME.

1059. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* (*fig.* 553).

Soit OD la droite donnée (*fig.* 553). En suivant toujours le même procédé, on considère la droite quelconque BK qui coupe OD au point N ; à

Fig. 553.



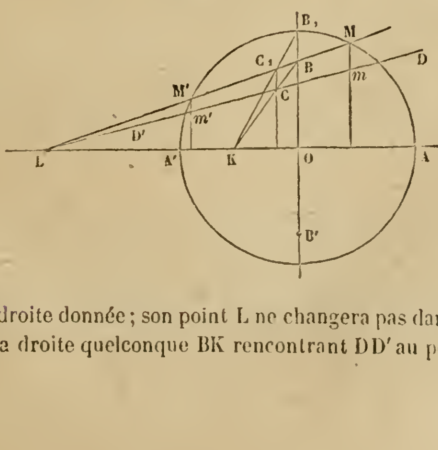
cette droite BK correspond la droite B_1K qui rencontre en N_1 l'ordonnée du point N. La droite ON_1D_1 est donc celle qui correspond à OD. On n'a alors qu'à mener au cercle principal les tangentes MT, M'T', parallèles à ON_1D_1 et à tracer, par les points T et T', des parallèles à OD qui sont les tangentes demandées ; leurs points de contact m et m' appartiennent aux ordonnées des points M et M'.

1060. Les constructions précédentes (1058, 1059) n'exigent pas que l'ellipse soit tracée : il suffit que ses axes soient donnés.

PROBLÈME.

1061. *Connaissant les axes d'une ellipse, construire ses points d'intersection avec une droite donnée* (*fig.* 554).

Fig. 554.



Soit DD' la droite donnée ; son point L ne changera pas dans la dilatation de l'ellipse. La droite quelconque BK rencontrant DD' au point C et devenant B_1K, le point C devient C_1. La droite LC_1 correspond donc à la droite DD' et, comme elle coupe le cercle principal aux points M et M', on n'a plus qu'à ramener ces points sur DD', par des perpendiculaires à AA', pour avoir en m et en m' les points demandés.

THÉORÈME.

1062. *Tous les diamètres de l'ellipse sont des lignes droites passant par son centre.*

On entend par *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes de cette courbe parallèles à une direction donnée. Dans le cercle, tout diamètre est une droite perpendiculaire au système de cordes qu'il divise en deux parties égales (103) ou qui lui est *conjugué*.

Cela posé, tout système de cordes parallèles du cercle a pour projection un système de cordes parallèles de l'ellipse, projection du cercle. Les milieux des cordes du cercle étant sur un même diamètre, les projections de ces milieux ou les milieux des cordes correspondantes de l'ellipse sont sur une même droite, projection du diamètre du cercle, c'est-à-dire passant par le centre de l'ellipse. Le théorème est donc démontré.

1063. Réciproquement, *toute droite passant par le centre de l'ellipse est un diamètre de la courbe:* car elle est la projection d'un certain diamètre du cercle dont l'ellipse est la projection. Les cordes conjuguées au diamètre de l'ellipse sont les projections des cordes conjuguées au diamètre correspondant du cercle.

Corollaires.

1064. On nomme *diamètres conjugués* deux diamètres tels, que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Pour avoir deux diamètres conjugués dans l'ellipse, il suffit évidemment de projeter deux diamètres rectangulaires du cercle.

1065. La tangente à l'extrémité du diamètre du cercle, étant perpendiculaire à ce diamètre, est parallèle au système de cordes qui lui est conjugué. Il en résulte que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre de l'ellipse est parallèle au système de cordes conjugué à ce diamètre.*

1066. Si l'on mène deux tangentes à un cercle par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours est perpendiculaire sur le milieu de la corde qui joint leurs points de contact. Par suite, *si l'on mène à une ellipse deux tangentes par un point extérieur, le diamètre mené à leur point de concours passe par le milieu de la corde qui unit leurs points de contact.*

Nous renvoyons à l'Appendice pour le développement de la théorie des diamètres dans l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

THÉORÈME.

1067. *L'aire de l'ellipse est la moyenne proportionnelle des aires des cercles construits sur ses deux axes comme diamètres.*

L'ellipse donnée, dont les axes sont $2a$ et $2b$, peut être regardée comme la projection orthogonale d'un cercle de diamètre $2a$, dont le plan fait avec celui de l'ellipse un angle V, tel que $\cos V = \dfrac{b}{a}$ (1054). D'après un théorème connu (707), on obtiendra alors l'aire de l'ellipse en multipliant l'aire du cercle par $\cos V$. On trouve ainsi, pour l'expression de cette aire,

$$\pi ab, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{\pi a^2 . \pi b^2}.$$

THÉORÈME.

1068. *Lorsque les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M *de cette droite décrit une ellipse dont les axes sont dirigés suivant* Ox *et* Oy, *et ont pour demi-longueurs* a *et* b *les distances* MA *et* MB *du point* M *aux extrémités de la droite* AB (*fig.* 555).

Fig. 555.

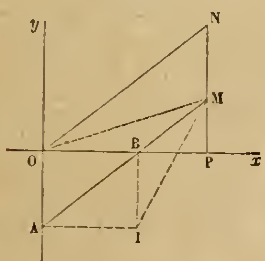
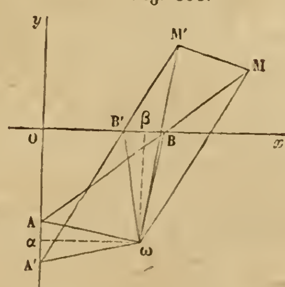


Fig. 556.



Prenons pour axes coordonnés (1044) les deux droites Ox et Oy; les coordonnées du point M seront MP et OP. Par le point O, menons ON parallèle à ABM, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée MP. La figure OAMN étant un parallélogramme, ON sera égale à la longueur constante AM ou a. Les triangles rectangles semblables BPM, OPN, donnent d'ailleurs

$$\frac{MP}{NP}=\frac{BM}{ON} \quad \text{ou} \quad MP=\frac{b}{a}\cdot NP.$$

Le point M décrit donc l'ellipse (1055) dont le cercle ON est le cercle principal, et qui a pour demi-axes a et b, c'est-à-dire les distances MA et MB.

Ce théorème donne un moyen pratique très-simple de construire une ellipse par points, à l'aide d'une bande de papier sur les bords de laquelle on marque les trois points A, B, M. Il existe un *compas elliptique* fondé sur ce même principe.

Corollaires.

1069. Considérons (*fig.* 556) la droite donnée dans les deux positions voisines ABM, A'B'M'. Sur les milieux de AA' et de BB', élevons les perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ qui se coupent en ω. La perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' passera par le point ω. En effet, les deux triangles $A\omega B$, $A'\omega B'$ étant égaux, les angles $AB\omega$, $A'B'\omega$ sont égaux. Les angles ωBM, $\omega B'M'$ le sont alors eux-mêmes comme suppléments d'angles égaux. Il en résulte l'égalité des triangles ωBM, $\omega B'M'$ et, par suite, celle des distances ωM, $\omega M'$.

Si l'on suppose maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M considéré comme fixe sur l'ellipse qu'il décrit, MM' tendra vers la tangente à la courbe en M, et la perpendiculaire élevée sur le milieu de MM' vers la normale au même point. D'ailleurs, $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ ont pour limites les perpendiculaires élevées en A et en B aux axes Oy et Ox. En joignant le point I d'intersection de ces perpendiculaires au point M (*fig.* 555), on aura donc la normale en M à l'ellipse tracée.

1070. Il est utile de remarquer que *la longueur* MI *comptée sur la normale en* M (*fig.* 555), *est égale à la longueur du demi-diamètre qui est conjugué au diamètre* OM.

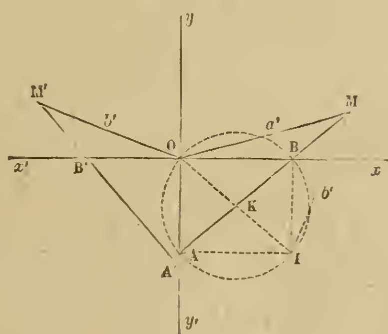
Soit, en effet (*fig.* 557), OM' le diamètre conjugué au diamètre OM; ce diamètre conjugué est parallèle à la tangente en M (1065), c'est-à-dire que la normale MI lui est perpendiculaire. De plus, le rayon du cercle principal qui correspond à OM est parallèle à la position de la droite AB qui donne le point M de l'ellipse (1068), et le rayon de ce cercle qui correspond à OM′ est de même parallèle à A′B′M′. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondant à des diamètres rectangulaires du cercle principal (1064), on en conclut que ABM est perpendiculaire à A′B′M′. Comme BI, d'ailleurs, est perpendiculaire à OB′, les deux triangles MBI, M′B′O, qui ont le côté MB égal au côté M′B′, ont leurs angles égaux (77) et sont égaux; par suite, MI = OM′.

PROBLÈME.

1071. *Étant donnés deux diamètres conjugués de l'ellipse en grandeur et en direction, construire les axes de la courbe.*

Soient (*fig.* 557) OM et OM′ les demi-diamètres conjugués

Fig. 557.

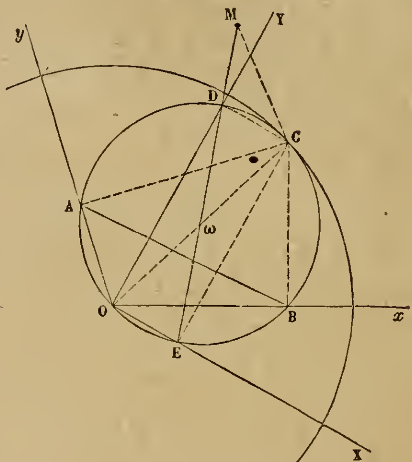


donnés, dont les longueurs sont a' et b'. En menant par le point M une perpendiculaire à OM′ et en prenant sur cette perpendiculaire MI = b', nous aurons le sommet I du rectangle inconnu IAOB (1070). Les sommets B et A de ce rectangle se trouvent à la fois sur le cercle circonscrit dont le diamètre est IO et sur la droite qui unit le point M au centre K de ce cercle: ils sont donc déterminés. En joignant ces points B et A au point O, on a les axes de l'ellipse en direction; de plus, MA et MB représentent leurs demi-longueurs (1068, 1069).

THÉORÈME.

1072. *Quand les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites fixes quelconques* Ox *et* Oy, *un point quelconque* M, *lié invariablement à* AB *dans le plan* AOB, *décrit une ellipse* (*fig.* 558).

Fig. 558.



Considérons une position quelconque de la droite AB et faisons passer un cercle par les trois points A, B, O. Si l'on suppose ce cercle lié à la droite AB et entraîné dans son mouvement, il passera toujours par le point O; car l'angle AOB, ayant pour mesure la moitié de l'arc invariable AB compris entre ses côtés, ne peut pas cesser d'être inscrit. Le diamètre OC de ce cercle, dans la position actuelle de la droite AB, s'obtient en élevant en B et en A, aux axes Ox et Oy, des perpendiculaires qui se coupent au point C.

Le cercle OC changeant de position en même temps que la droite AB, l'arc AD qui sépare le point A d'un point quelconque D de sa circonférence reste constant; par suite, l'angle AOD restant lui-même constant et ayant son côté OA fixe, tout point D du cercle OC décrit une droite OY.

Si l'on trace le diamètre du cercle OC qui passe par le point donné M, les extrémités D et E de ce diamètre décrivent donc pendant le mouvement de AB les deux droites fixes ODY et OEX. Ces droites étant à angle droit, il résulte du théorème précédent (1068) que le point M décrit une ellipse ayant pour demi-longueurs de ses axes, dirigés suivant OX et OY, les distances ME et MD.

Les perpendiculaires variables élevées en D et en E aux droites OY et OX se coupant au point mobile C, on obtiendra la normale en M à cette ellipse en menant la droite MC (1069).

Scolie.

1073. La position du point C est indépendante de celle du point donné M. Donc, si le point M varie, toutes les normales aux points correspondants des différentes ellipses obtenues viendront, pour une même position de la droite AB, se couper au point C.

D'ailleurs, le lieu du point C est la circonférence décrite du point O comme centre avec la longueur constante OC pour rayon, et le cercle ωC, variable de position, reste constamment tangent au cercle OC dont le rayon est double du sien.

On peut donc se figurer le mouvement du triangle ABM, en le supposant entraîné dans le mouvement du cercle ωC qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe OC de rayon double.

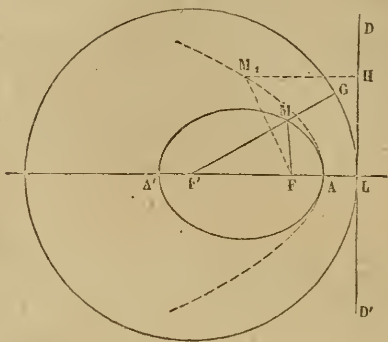
On sait que, dans un pareil mouvement, *tout point du cercle mobile décrit un diamètre du cercle fixe* (théorème de de la Hire), résultat qui coïncide avec la remarque sur laquelle la démonstration précédente est fondée. De plus, d'après ce qu'on vient de voir, *tout point* M *lié invariablement au cercle mobile, et situé en dehors ou en dedans de ce cercle, décrit une ellipse;* c'est un autre énoncé de la proposition du n° 1072.

§ V. — PARABOLE CONSIDÉRÉE COMME LIMITE DE L'ELLIPSE.

THÉORÈME.

1074. *La limite d'une ellipse (ou d'une hyperbole) dont un sommet et le foyer voisin restent fixes, tandis que l'autre foyer s'en éloigne indéfiniment dans la direction du grand* *axe (ou de l'axe transverse), est une parabole qui a pour sommet et pour foyer le sommet et le foyer fixes* (*fig.* 559).

Fig. 559.



En effet, le cercle directeur relatif au foyer mobile F′ coupe toujours le grand axe à droite du foyer fixe F, en un même point L déterminé par la condition évidente $AL = AF$. A mesure que le centre F′ de ce cercle s'éloigne dans la direction AA′, son rayon croît indéfiniment, de sorte qu'il a pour limite la perpendiculaire DD′ menée par le point L au grand axe AA′. D'ailleurs, tout point M de l'ellipse étant également distant du foyer F et du cercle directeur F′ (987), on a constamment $MF = MG$, c'est-à-dire à la limite, quand l'ellipse se déformant le point M vient en M_1, $M_1F = M_1H$, en désignant par M_1H la perpendiculaire abaissée du point M_1 sur la droite DD′, limite du cercle F′. Le lieu des positions limites des points de l'ellipse donnée est donc une parabole ayant pour foyer et pour sommet les points F et A et, par suite, la droite DD′ pour directrice.

La même démonstration s'applique à l'hyperbole (1012). Dans ce cas, la parabole est la limite de la demi-hyperbole de droite à laquelle appartiennent le sommet A et le foyer F; l'autre demi-hyperbole de gauche disparaît à l'infini.

Corollaire.

1075. Le théorème précédent permet de prévoir et de démontrer les propriétés de la parabole, en les déduisant par voie de transformation des propriétés correspondantes de l'ellipse.

Par exemple, pour démontrer que *la tangente à la parabole fait extérieurement des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et avec la parallèle menée à l'axe par le même point* (1033), il suffit de remarquer que, lorsque l'un des foyers de l'ellipse s'éloigne à l'infini, le rayon vecteur relatif à ce foyer tend à devenir parallèle au grand axe.

De même, pour établir que *le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente au sommet* (1042), on n'a qu'à observer que le cercle principal de l'ellipse tend vers la tangente au sommet fixe du grand axe, lorsque l'autre sommet se transporte à l'infini.

Si les propriétés considérées dépendent explicitement des axes a et b de l'ellipse et de sa distance focale c, on substitue à a et à b leurs valeurs en fonction de c et du paramètre $p=2(a-c)$ de la parabole limite; puis, en supposant c infini dans les formules obtenues, on passe des propriétés de l'ellipse représentées par ces formules aux propriétés correspondantes de la parabole exprimées en fonction du paramètre p.

THÉORÈME.

1076. *Tous les diamètres de la parabole sont des droites parallèles à l'axe.*

On démontre immédiatement cette proposition en regardant la parabole comme la limite d'une ellipse (1074) dont l'un des foyers et le sommet voisin coïncident avec le foyer et le sommet de la parabole, mais dont l'autre foyer et, par suite, le centre se transportent à l'infini sur le grand axe de la courbe.

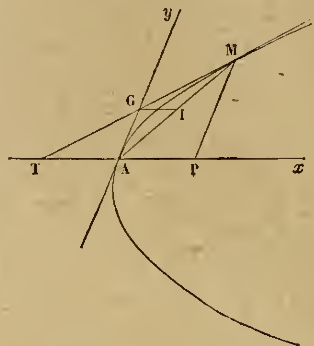
Les propriétés de l'ellipse démontrées aux nos 1065 et 1066 appartiennent aussi à la parabole limite. Ces propriétés vont nous permettre d'établir la proposition suivante.

THÉORÈME.

1077. *La parabole étant rapportée au système d'axes obliques formé par un diamètre et la tangente à son extrémité, dans ce nouveau système d'axes, la sous-tangente est encore double de l'abscisse du point de contact* (1045).

En effet, soient (*fig.* 560) la tangente Ay et le diamètre Ax pris pour axes coordonnés; menons la tangente MT en un point quelconque M de la parabole. Si, par le point d'intersection G des tangentes Ay et MT, on

Fig. 560.

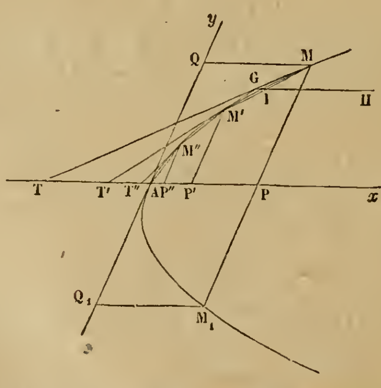


mène une parallèle à Ax, cette parallèle coupera la corde AM en son milieu (1066) : le point G est donc le milieu de TM. AGy étant parallèle à l'ordonnée MP, le point A est alors le milieu de la sous-tangente TP.

THÉORÈME.

1078. *L'aire d'un segment parabolique est les deux tiers du parallélogramme qui a pour côtés la corde et la flèche du segment, cette flèche étant mesurée sur le diamètre conjugué à la corde du segment.*

Fig. 561.



Soit (*fig.* 561) le segment parabolique MAM_1 déterminé par la corde

MM_1. Prenons pour axes coordonnés le diamètre Ax conjugué à cette corde et la tangente parallèle Ay. Évaluons d'abord l'aire de la portion MAP.

Inscrivons dans l'arc AM une ligne brisée MM′M″... A et, par les sommets de cette ligne brisée, menons à la courbe les tangentes MT, M′T′,..., jusqu'à la rencontre du diamètre Ax; menons aussi les ordonnées MP, M′P′,..., des sommets de la ligne brisée.

Comparons le trapèze MM′P′P au triangle correspondant GTT′. Si l'on mène par le sommet G du triangle une parallèle GH à Ax, elle passera par le milieu I de la corde MM′ (1076). La perpendiculaire abaissée du milieu du côté MM′ sur le côté PP′ du trapèze MM′P′P est donc égale à la hauteur du triangle GTT′. Pour avoir le rapport de leurs aires, il suffit d'après cela de comparer le côté PP′ du trapèze à la base TT′ du triangle. Or (1077)

$$AT = AP \quad \text{et} \quad AT' = AP',$$

d'où

$$TT' = PP'.$$

Le triangle est donc la moitié du trapèze. Et, comme on peut répéter le même raisonnement pour chaque trapèze et pour le triangle correspondant, la somme des trapèzes reste toujours égale au double de la somme des triangles. La limite de la première somme étant l'aire MAP et la limite de la seconde l'aire MAT, l'aire MAP est les deux tiers du triangle total MTP ou du parallélogramme équivalent APMQ.

L'aire M_1AP étant de même les deux tiers du parallélogramme APM_1Q_1, l'aire cherchée MAM_1 est enfin les deux tiers du parallélogramme MQQ_1M_1, qui a pour côtés la corde MM_1 du segment ou le double de l'ordonnée MP, et la flèche de ce segment ou l'abscisse AP.

§ VI. — ORIGINE COMMUNE DES TROIS COURBES. SECTIONS PLANES DU CONE DE RÉVOLUTION.

1079. Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, à chaque foyer F correspond une droite D qu'on nomme *directrice;* c'est la perpendiculaire à l'axe focal élevée par le point E qu'on obtient en portant sur cet axe, à partir du centre O et de O vers F, une longueur OE égale à $\frac{a^2}{c}$ (*fig.* 562).

Dans l'ellipse, a étant plus grand que c, OE est plus grand que OF : le point E tombe donc sur le prolongement de OF, en d'autres termes le foyer est entre la directrice correspondante et le centre. Dans l'hyperbole au contraire, a étant plus petit que c, OE est moindre que OF;

le point E tombe donc entre O et F, en d'autres termes la directrice passe entre le centre et le foyer correspondant.

THÉORÈME.

1080. *La directrice* D *relative à un foyer* F *est :*

1° *La polaire* P *de ce foyer par rapport au cercle principal;*

2° *L'axe radical* R *de ce foyer et du cercle directeur relatif à l'autre foyer.*

En effet :

1° La polaire P est (341) perpendiculaire à OF et située par rapport au centre du même côté que le foyer F, à une distance égale à $\frac{a^2}{c}$ puisque le rayon a du cercle principal est moyen proportionnel entre les distances du centre au pôle F et à la polaire P.

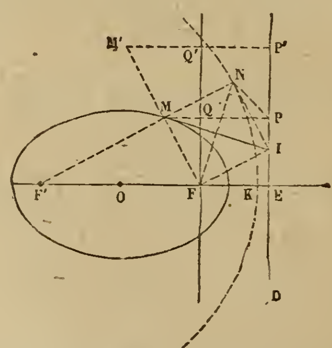
2° L'axe radical R (401, 10°) est perpendiculaire à FF', du même côté que F par rapport au point O et à une distance de ce centre égale à $\frac{(2a)^2}{4c} = \frac{a^2}{c}$, puisque $2a$ est le rayon du cercle directeur (F').

THÉORÈME.

1081. *Dans l'ellipse ou dans l'hyperbole, le rapport des distances d'un point quelconque* M *de la courbe à un foyer* F *et à la directrice correspondante* D *est constant et égal à l'excentricité* $\frac{c}{a}$ (*fig.* 562).

En effet, soient P la projection du point M sur la directrice D, N le point

Fig. 562.



où F'M prolongé rencontre le cercle directeur (F'), et I le point où la tangente en N à ce cercle rencontre D. D'après le théorème précédent, on a IN = IF; d'ailleurs MN est égal à MF; les deux triangles MNI, MFI ont donc les trois côtés égaux; par suite, l'angle MFI est droit comme l'angle MNI et le cercle décrit sur MI comme diamètre passe par F, N, P. Il résulte de là que l'angle NPM est égal à NFM ou (puisque le triangle MNF est isocèle) à MNF.

D'ailleurs les angles NMP, NF′F sont égaux comme correspondants. Les triangles NMP, F′NF sont donc équiangles, et l'on a la proportion

$$\frac{MN}{MP} = \frac{FF'}{NF'} \qquad \text{ou} \qquad \frac{MF}{MP} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

qui exprime le théorème énoncé.

Corollaire.

1082. *Le lieu des points dont les distances à un point fixe et à une droite fixe ont un rapport constant* λ *est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le rapport* λ *est inférieur, supérieur ou égal à l'unité* (*fig.* 562).

Pour $\lambda = 1$, la proposition résulte de la définition même de la parabole.

Supposons $\lambda < 1$, et considérons l'ellipse qui a pour foyer le point fixe F, pour directrice correspondante la droite fixe D et pour excentricité le rapport λ. Cette ellipse est bien déterminée, car les relations

$$\frac{c}{a} = \lambda, \qquad \frac{a^2}{c} - c = FE,$$

dont les seconds membres sont connus, assignent des valeurs uniques et finies aux éléments a et c. Or, d'après le théorème précédent, tout point de cette ellipse appartient au lieu, et il reste seulement à montrer que tout autre point M′ du plan ne saurait faire partie du lieu. Or soient M le point où la demi-droite FM′ rencontre l'ellipse, P et P′ les projections de M et M′ sur la directrice D, et Q et Q′ les points où MP et M′P′ coupent la parallèle à D menée par le foyer F. On aura

$$\frac{FM}{FM'} = \frac{MQ}{MQ'} = \frac{MP \pm FE}{M'P' \pm FE},$$

les signes se correspondant. Mais, d'après un théorème connu sur les fractions dont on augmente ou on diminue les termes d'une même quantité, le dernier rapport et, par suite, le premier, diffère de $\frac{MP}{M'P'}$; donc les rapports $\frac{FM}{MP}$, $\frac{F'M'}{M'P'}$ sont inégaux; comme le premier est égal à λ, le second ne saurait l'être et, par suite, le point M' n'appartient pas au lieu.

Le raisonnement subsiste pour $\lambda > 1$; il n'y a qu'à substituer au mot *ellipse* le mot *hyperbole*.

D'après ce corollaire, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole ont une même origine; aussi leur a-t-on donné une dénomination commune. Le nom qui a prévalu est celui de *conique*, que nous adopterons désormais, et dont nous allons montrer tout à l'heure l'origine.

THÉORÈME.

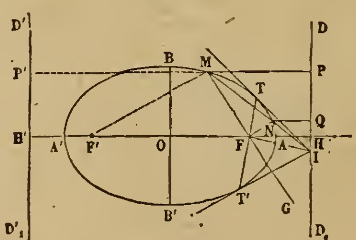
1083. *La droite* FI *qui joint le foyer d'une conique au point où une corde quelconque* MN *rencontre la directrice est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM *et* FN *ou de son supplément, suivant que les deux points* M *et* N *appartiennent à des branches différentes ou à une même branche* (*fig.* 563).

En effet, P et Q étant les projections de M et N sur la directrice D, les rapports

$$\frac{\mathrm{IM}}{\mathrm{IN}}, \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FN}}$$

sont égaux entre eux comme étant égaux respectivement à $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{NQ}}$. Donc la droite FI bissecte l'angle MFN ou son supplément, suivant que le

Fig. 563.



point I est situé entre M et N ou sur le prolongement de MN. Or le premier cas ne peut se présenter que si la courbe est une hyperbole et si M et N appartiennent à des branches différentes.

Corollaires.

1084. *Si d'un point quelconque* I *de la directrice* D *on mène des tangentes* IT, IT' *à une conique, la droite des contacts* TT' *passe par le* *foyer* F *correspondant et est perpendiculaire à la droite qui joint le point* I *au foyer.*

En effet, supposons que dans le théorème précédent les points M et N viennent se confondre, auquel cas M et N appartiennent forcément à la même branche, la ligne FI sera la bissectrice de la limite du supplément de l'angle MFN, c'est-à-dire la perpendiculaire à la droite FT qui représente les deux rayons vecteurs confondus. On verrait de même que FT' est perpendiculaire à FI. Donc les trois points T, F, T' sont sur une même perpendiculaire à FI.

1085. Le même théorème fournit une solution simple du problème qui consiste à *construire une conique connaissant un foyer* F *et trois points* A, B, C.

Tout revient à trouver la directrice D relative au foyer F. Or on obtient deux points de cette droite en appliquant successivement la proposition (1083) aux deux cordes AB et BC.

On verra aisément qu'il y a quatre solutions et que, des quatre coniques obtenues, trois sont certainement des hyperboles; la quatrième est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant la disposition des données.

THÉORÈME.

1086. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.*

1° Supposons que *le plan sécant rencontre toutes les génératrices du cône sur une même nappe* (*fig.* 564).

Menons le plan méridien (869, 3°) du cône qui est perpendiculaire au plan sécant AMA'; il coupera le cône suivant les deux génératrices SA et SA' qui font entre elles l'*angle au sommet* de la surface, et le plan sécant suivant la droite AA'. Dans le plan méridien considéré, construisons les circonférences O et O' qui, situées de part et d'autre de AA', sont à la fois tangentes aux génératrices SA et SA' et à la droite AA' qu'elles touchent aux points F et F'. Si l'on fait tourner le plan méridien autour de l'axe SO, ces deux circonférences engendreront deux sphères tangentes à la surface conique suivant les parallèles (869, 3°) BC et B'C', et tangentes au plan sécant en F et en F'.

Cela posé, prenons un point M quelconque sur la courbe d'intersection; menons les droites MF, MF' et la génératrice SM qui coupera en G et en G' les parallèles BC B'C'. La droite MF étant tangente à la sphère O (787), on a (788) MF = MG. On a de même, par rapport à la sphère O', MF' = MG'.

Par suite,

$$MF + MF' = MG + MG' = GG' = BB' = \text{const.}$$

D'ailleurs, en vertu des propriétés rappelées, on a

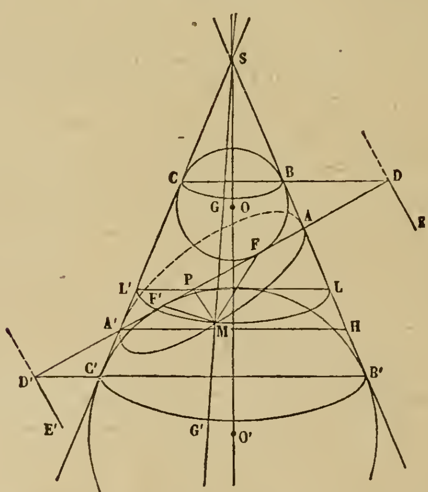
$$BB' = AB + AB' = AF + AF' \quad \text{et} \quad BB' = CC' = CA' + A'C' = A'F + A'F'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une ellipse ayant* AA' *pour grand axe et les points* F *et* F' *pour foyers.*

Fig. 564.



Si l'on trace A'H parallèle à BC, AH est la *distance focale* de cette ellipse. En effet,

$$AF' = AB' \quad \text{et} \quad HB' = A'C' = AF.$$

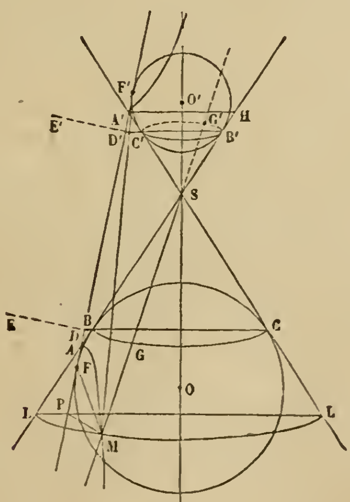
Les plans des parallèles BC, B'C', prolongés jusqu'à la rencontre du plan sécant, le coupent suivant deux droites DE, D'E', perpendiculaires au plan méridien considéré (561). Si l'on mène le parallèle LL' de la surface qui passe par le point M, son intersection avec le plan sécant est de même dirigée suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport au grand axe AA', et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les triangles APL, ADB, AA'H, évidemment semblables, donnent alors

$$\frac{\text{BL ou MF}}{\text{PD}} = \frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AH}}{\text{AA}'} = \text{const.}$$

Ainsi, les distances de chaque point de l'ellipse trouvée au foyer F et à la droite DE sont entre elles dans un rapport égal à l'excentricité (973) de la courbe. La même démonstration s'applique au foyer F' et à la droite D'E'. Les droites DE, D'E', sont donc les *directrices* de la section.

2° Supposons que *le plan sécant rencontre les deux nappes du cône* (*fig.* 565).

Fig. 565.



On a alors

$$\text{MF}' - \text{MF} = \text{MG}' - \text{MG} = \text{GG}' = \text{BB}' = \text{const.};$$

d'ailleurs,

$$\text{BB}' = \text{AB}' - \text{AB} = \text{AF}' - \text{AF} \quad \text{et} \quad \text{BB}' = \text{CC}' = \text{A}'\text{C} - \text{A}'\text{C}' = \text{A}'\text{F} - \text{A}'\text{F}'.$$

Il en résulte évidemment

$$AF = A'F' \quad \text{et} \quad BB' = AA'.$$

La courbe obtenue est donc *une hyperbole, ayant* AA' *pour axe transverse et les points* F *et* F' *pour foyers.*

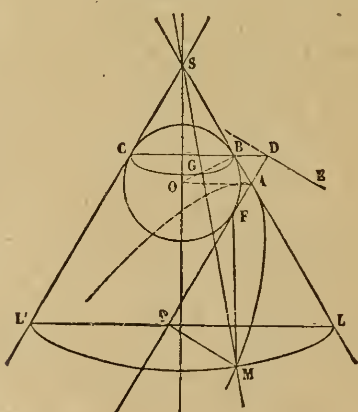
Si l'on trace A'H parallèle à B'C', AH est la *distance focale* de cette hyperbole. En effet,

$$AB' = AF' \quad \text{et} \quad B'H = C'A' = A'F'.$$

Les droites DE et D'E', intersections des parallèles BC, B'C', avec le plan sécant, sont les *directrices* de l'hyperbole. Le rapport des distances du point M au foyer F et à la droite DE est égal à l'excentricité de la courbe. C'est ce que les triangles semblables APL, ADB, AA'H, montrent immédiatement.

3° Supposons le *plan sécant parallèle à l'une des génératrices du cône* (*fig.* 566).

Fig. 566.



Ayant mené le plan méridien LSL' perpendiculaire au plan sécant, ce dernier se trouve parallèle à la génératrice SL' et est alors coupé par le plan méridien suivant une droite AP parallèle (495, 1°) à cette génératrice Dans le plan méridien, construisons la circonférence O, tangente aux génératrices principales en B et en C, et à la droite AP au point F. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO, la sphère engendrée par la circonférence O est tangente au cône suivant le parallèle BC et touche en F le plan sécant.

Cela posé, prenons un point quelconque M sur la courbe d'intersection; menons la droite MF et la génératrice SM qui coupe en G le parallèle BC de la surface; menons également le parallèle LL′ de la surface qui passe par le point M et qui rencontre le plan sécant suivant l'ordonnée MP de ce point par rapport à AP. On aura toujours

$$MF = MG = BL.$$

D'ailleurs, l'intersection du plan sécant et du parallèle BC est une droite DE perpendiculaire au plan méridien, et PD représente la distance du point M à la droite DE. Les deux triangles APL, ABD étant isocèles, puisqu'ils sont tous deux semblables au triangle SLL′, on a

$$PD = BL, \quad \text{c'est-à-dire} \quad MF = PD.$$

La courbe obtenue est donc *une parabole ayant le point* F *pour foyer et la droite* DE *pour directrice.*

Scolie.

1087. Les sphères considérées dans la démonstration précédente peuvent, tout en restant inscrites au cône, cesser d'être tangentes au plan sécant qui les coupe alors suivant deux cercles. Les mêmes raisonnements étant applicables à ce cas, on arrive à cette proposition : *Le lieu des points tels, que le rapport qui existe entre les tangentes menées de ces points à un cercle fixe et les distances de ces mêmes points à une droite fixe soit constant, est une section conique dont la nature dépend de la valeur de ce rapport comparée à l'unité* (1086).

THÉORÈME.

1088. *Placer une ellipse, une hyperbole ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

1° Si l'on se reporte à la *fig.* 564, on voit qu'on connaît dans le triangle AA′H le grand axe AA′ de l'ellipse donnée et sa distance focale AH, ainsi que l'angle AHA′, complément du demi-angle au sommet du cône donné. La question revient donc à construire un triangle avec deux côtés et l'angle opposé à l'un deux. Comme l'angle donné est opposé au plus grand des deux côtés donnés, ce triangle est complètement déterminé (146). Quand il sera construit, on élèvera une perpendiculaire sur le milieu de A'H, et la surface conique engendrée par AH en tournant autour de cette perpendiculaire sera coupée suivant l'ellipse donnée par un plan mené suivant AA' perpendiculairement au plan du triangle AA'H. *On peut donc toujours placer une ellipse donnée sur un cône donné.*

2° Si l'on se reporte à la *fig.* 565, on voit qu'on connaît dans le triangle AA'H l'axe transverse AA' et la distance focale AH de l'hyperbole donnée, ainsi que l'angle AHA', complément du demi-angle au sommet du cône donné. Comme cet angle est opposé ici au plus petit des deux côtés donnés, le problème peut avoir deux solutions ou n'en avoir aucune (146). Pour qu'il soit possible, il faut que AA' surpasse la perpendiculaire abaissée du point A sur HA', c'est-à-dire qu'on ait, en appelant 2β l'angle au sommet du cône et en posant (1000) $AA' = 2a$, $AH = 2c$,

$$2a > 2c\cos\beta \quad \text{ou} \quad \cos\beta < \frac{a}{c}.$$

Mais, si l'on appelle 2θ l'angle des deux asymptotes de l'hyperbole proposée, on a évidemment (1015)

$$\frac{a}{c} = \cos\theta.$$

La condition cherchée est donc

$$\cos\beta < \cos\theta,$$

ou, puisqu'il s'agit d'angles inférieurs à un droit,

$$\beta > \theta \quad \text{ou} \quad 2\beta > 2\theta.$$

Donc, *pour pouvoir placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution d nné, il faut que l'angle au sommet du cône surpasse celui des deux angles des asymptotes de l'hyperbole qui comprend la courbe.*

3° S l'on se reporte à la *fig.* 566, on voit que la droite OA est perpendiculaire à l'axe SO, d'après la détermination du point O et le parallélisme des droites SL' et AP. Dans le triangle rectangle OBA, on connaît par suite le côté $AB = AD = \frac{FD}{2}$, demi-paramètre de la parabole donnée (1028), et l'angle BAO, complément du demi-angle au sommet du cône donné. Ce triangle est donc complètement déterminé (32). L'ayant construit, on élèvera OS perpendiculaire sur OA, et la surface conique engendrée par la rotation de AB autour de SO sera coupée suivant la parabole donnée par un plan mené perpendiculairement à celui du triangle OBA et passant par la droite AP, tracée de manière que AO soit la bissectrice de l'angle SAP. *On peut* donc *toujours placer une parabole donnée sur un cône donné.*

SCOLIE.

1089. Le sommet d'un cône de révolution s'éloignant à l'infini dans la direction de l'axe, ce cône dégénère en cylindre de révolution. *Un cylindre circulaire droit est* donc *coupé suivant une ellipse par un plan sécant quelconque* (1086, 1°).

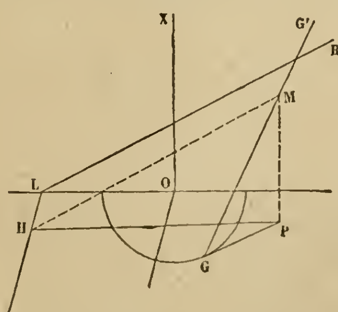
C'est ce qu'on démontrera, du reste, directement en adoptant la même marche que précédemment. Cette marche permettra de déterminer le grand axe, le foyer et les directrices de la section proposée. On en déduira facilement que *toutes les ellipses trouvées en coupant par un plan quelconque un cylindre de révolution ont pour petit axe le diamètre de ce cylindre.*

On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cylindre de révolution donné (1088, 1°), *lorsque le petit axe de l'ellipse est égal au diamètre du cylindre.*

THÉORÈME.

1090. *Si l'on coupe une surface gauche de révolution par un plan, la projection de l'intersection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la surface est une section conique* (*fig.* 567).

Fig. 567.



On appelle *surface gauche de révolution* la surface engendrée par une droite non située dans un même plan avec l'axe autour duquel elle tourne.

Le plus petit parallèle de la surface, engendré par la plus courte distance de la génératrice à l'axe (538), porte le nom de *cercle de gorge* de la surface. La projection de la génératrice sur le plan du cercle de gorge est tangente à ce cercle, car, cette génératrice étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon du cercle de gorge, il en est de même de sa projection (531).

Cela posé, représentons la surface par son axe OX, son cercle de gorge OG et l'une de ses génératrices GG'. Coupons-la par un plan HLR. Si ce plan rencontre en M la génératrice GG', M sera un point de la courbe d'intersection. Sa projection sur le plan du cercle de gorge sera en P, sur la tangente GP à ce cercle. La génératrice faisant un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PG à MP reste constant.

Menons par le point M la ligne de plus grande pente MH (555, 556) du plan HLR par rapport au plan du cercle de gorge, et traçons la droite PH. La droite MH faisant de même un angle constant avec le plan du cercle de gorge, le rapport de PH à MP reste constant; le rapport de PG à PH est donc aussi constant, et le théorème est démontré (1087).

Corollaires.

1091. Si le rayon du cercle de gorge devient nul, la surface gauche de révolution dégénère en un cône. Donc, *la projection d'une section conique sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône de révolution sur lequel elle est placée est une section conique, dont l'un des foyers est la projection du sommet de cône sur le plan de projection et dont la directrice correspondante est la projection sur le même plan de l'intersection du plan sécant avec le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan de projection.*

§ VII. — L'HÉLICE.

DÉFINITIONS.

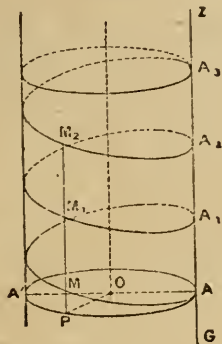
1092. Considérons un cylindre droit à base circulaire AA' et une génératrice fixe GAZ.

Soient M un point quelconque de la surface cylindrique et P sa projection sur AA' (*fig.* 568). Le point M sera déterminé de position si l'on connaît ses *coordonnées*

$$\text{arc AP} = s, \qquad \text{PM} = z.$$

La première, comptée dans un sens convenu sur la circonférence AA', reçoit le nom d'*abscisse curviligne* et l'on appelle

Fig. 568.



ordonnée la seconde, comptée dans un sens convenu parallèlement aux génératrices.

1093. Parmi les lignes situées sur la surface du cylindre, on nomme *hélice* celle dont l'*ordonnée est proportionnelle à l'abscisse curviligne,* c'est-à-dire celle qui a pour équation

$$z = ks, \tag{1}$$

où k désigne un nombre positif donné.

On en déduit immédiatement la relation

$$\Delta z = k\,\Delta s, \tag{2}$$

entre les accroissements correspondants Δs, Δz de l'abscisse curviligne s et de l'ordonnée z. En particulier, si l'accroissement de l'abscisse est égal à la longueur $2\pi R$ de la circonférence de base, l'accroissement de l'ordonnée sera $k.2\pi R$, et comme cette expression est indépendante de la valeur de z, on voit que *le segment compris entre deux points de rencontre successifs* M et M_1 *de l'hélice avec une même génératrice* PMM_1 *est constant* (non seulement sur une même géné ratrice, mais encore en passant d'une génératrice à l'autre). On donne à cet intervalle le nom de *pas* et on le désigne habituellement par H.

On a donc

$$(3) \qquad H = k.2\pi R \qquad \text{d'où} \qquad k = \frac{H}{2\pi R},$$

et, par suite, l'équation de l'hélice devient

$$(4) \qquad z = \frac{H}{2\pi R}s,$$

que l'on peut écrire encore

$$(5) \qquad z = \frac{H}{2\pi}\omega,$$

ω désignant l'angle au centre AOP de l'arc s.

L'arc d'hélice MA_1M_1 compris entre deux points de rencontre M et M_1 de l'hélice et d'une même génératrice prend le nom de *spire*.

1094. Par deux points A et B situés sur une surface cylindrique, il passe un arc d'hélice moindre qu'une spire, mais un seul.

En effet, si l'on prend A pour origine, toute hélice passant par A aura une équation de la forme (5); pour qu'elle passe par B, il faut et il suffit qu'on ait

$$z_1 = \frac{H}{2\pi}\omega_1.$$

z_1 et ω_1 étant les coordonnées du point B. On tire de là, pour le pas H, la valeur *unique*

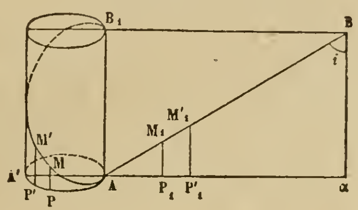
$$(6) \qquad H = \frac{2\pi z_1}{\omega_1}.$$

THÉORÈME.

1095. *Dans le développement du cylindre, l'hélice a pour transformée une ligne droite* (*fig.* 569).

En effet, considérons une spire $AMM'B_1$, et soit $A\alpha BB_1$ le rectangle qui est le développement de la partie correspondante du cylindre; $A\alpha$ est égale à la circonférence de base et HB_1 est égale au pas. Pour avoir les points M_1 et M'_1 de

Fig. 569.



développement qui correspondent à deux points quelconques M et M' de l'hélice, on prendra AP_1 et AP'_1 égaux respectivement aux arcs AP et AP' et l'on mènera par P_1 et P'_1 perpendiculairement à $A\alpha$ des droites P_1M_1, $P'_1M'_1$ égales aux ordonnées PM et PM_1.

Cela posé, l'équation de l'hélice donne

$$\frac{PM}{\text{arc}\,AP} = \frac{P'M'}{\text{arc}\,AP'}.$$

Mais on a

$$PM = P_1M_1, \qquad P'M' = P'_1M'_1,$$
$$\text{arc}\,AP = AP_1, \qquad \text{arc}\,AP' = AP'_1.$$

La proportion précédente devient donc

$$\frac{P_1M_1}{AP_1} = \frac{P'_1M'_1}{AP'_1},$$

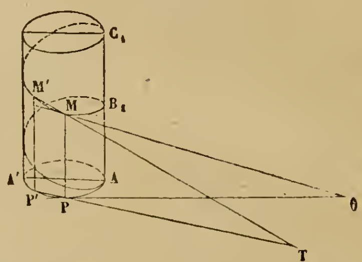
ce qui prouve que les trois points A, M_1, M'_1 sont en ligne droite.

THÉORÈME.

1096. *La tangente* $M\theta$ *en un point quelconque* M *d'une hélice fait avec les génératrices du cylindre un angle constant* α, *dont la cotangente est égale à* k (*fig.* 570).

En effet, soit M′ un point voisin de M sur l'hélice considérée; menons les ordonnées MP, M′P′ et soit T le point de rencontre des cordes prolongées M′M, P′P.

Fig. 570.



Si α_1 désigne l'angle de TMM′ avec les ordonnées, on aura

$$k \operatorname{arc} AP = PM = TP \operatorname{cotg} \alpha_1,$$
$$k \operatorname{arc} AP' = P'M = TP' \operatorname{cotg} \alpha_1;$$

d'où, par soustraction,

$$k \operatorname{arc} PP' = \operatorname{corde} PP' \operatorname{cotg} \alpha_1,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = k \frac{\operatorname{arc} PP'}{\operatorname{corde} PP'}.$$

Mais, lorsque M′ tend vers M en restant sur l'hélice, l'angle α_1 tend vers l'angle $PM\theta$ que la tangente $M\theta$ fait avec les génératrices du cylindre. Donc, comme le rapport de l'arc PP′ à sa corde tend vers l'unité, l'équation précédente deviendra, à la limite,

$$(7) \qquad \operatorname{cotg} \alpha = k = \frac{H}{2\pi R}.$$

COROLLAIRE :

1097. *La sous-tangente en un point quelconque* M *d'une hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point.*

En effet, menons la tangente en P à la base du cylindre jusqu'à sa rencontre θ avec la tangente en M à l'hélice ; c'est la longueur $P\theta$ qu'on nomme *sous-tangente*. Or le triangle rectangle $PM\theta$ donne

$$P\theta = PM \operatorname{tg}\alpha = z\frac{1}{k} = s = \operatorname{arc} AP.$$

MOUVEMENT HÉLICOÏDAL.

1098. On donne le nom de *solide* ou de *système indéformable* à tout système de points dont les distances mutuelles restent les mêmes, quels que soient les déplacements que le système prenne dans l'espace.

Voici quelques propositions remarquables relatives à ces déplacements :

1° Nous avons vu au n° 175 qu'*une figure plane indéformable, mobile dans son plan peut être amenée d'une quelconque de ses positions à toute autre par une rotation autour d'un point fixe.*

Un raisonnement analogue prouve qu'*une figure sphérique indéformable, mobile sur la sphère, peut être amenée d'une quelconque de ses positions à toute autre par une rotation autour d'un diamètre de la sphère.*

2° Il résulte de là qu'*un solide qui possède un point fixe peut être amené de l'une quelconque de ses positions à toute autre par une rotation autour d'un axe passant par le point fixe.* Il suffit, pour démontrer cette proposition, de considérer une sphère ayant le point fixe pour centre et d'appliquer le théorème précédent à la figure suivant laquelle la sphère rencontre le solide.

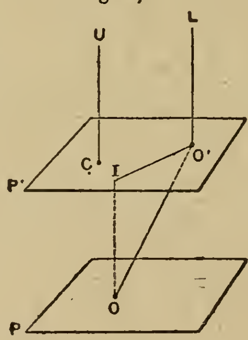
3° *Tout déplacement d'un solide, libre de se mouvoir d'une manière quelconque dans l'espace, peut être produit par une translation et une rotation* (*fig.* 571).

En effet, soient S la position primitive du solide et S_1 la position que ce solide a prise lorsqu'on a fait décrire à tous ses points des droites égales et parallèles à celle OO′ qui unit la position initiale O à la position finale O′ de l'un de ses points. Ce mouvement, qui amène le solide de S en S_1 est une *translation,* et il reste à prouver que le passage de la position S_1 à la position finale S′ peut être produit par une rotation. Or, cela résulte (3°) de ce que, dans ce passage, le point O′ reste fixe; l'axe de rotation L passe d'ailleurs par O′.

On peut faire en sorte que l'axe de rotation soit parallèle à la translation.

En effet, soient P et P′ deux plans perpendiculaires à l'axe L menés respectivement par les points O et O′, et soit I la projection de O sur le plan P′. La translation OO′ peut être remplacée par deux autres : l'une OI, parallèle à l'axe L, l'autre IO′, dans le plan P′. La première amène le plan P sur le plan P′; la seconde et la rotation autour de L déplacent le

Fig. 571.



plan P′ sur lui-même et peuvent (1°) être remplacées à la fois par une rotation autour d'un point C du plan, c'est-à-dire autour d'un axe U perpendiculaire à ce plan. On a donc, en définitive, une translation OI et une rotation autour d'un axe U parallèle à la translation. On donne à cet axe U le nom d'*axe central.*

1099. On nomme *mouvement hélicoïdal* d'un *solide* un mouvement tel que les divers points de ce solide décrivent des hélices de même axe, de même sens et de même pas.

Cela posé, on a ce théorème fondamental :

Tout déplacement d'un solide libre peut être produit par un mouvement hélicoïdal.

En effet, soient U l'axe central, z_1 la translation parallèle à U et ω_1 l'angle de rotation autour de U qui amènent un point quelconque M du corps de sa position initiale A à sa position finale B. Au lieu de faire décrire au point M ces deux déplacements successifs, on peut lui faire décrire l'arc d'hélice déterminé (1094) par les points A et B. Mais z_1 et ω_1 étant les mêmes pour tous les points du solide, il en est de même du pas $\frac{2\pi z_1}{\omega_1}$ des diverses hélices et le déplacement du système est ainsi produit par un mouvement hélicoïdal.

§ VIII. — APPENDICE.

I. — HOMOGRAPHIE ET INVOLUTION.

DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES.

1100. On donne le nom de *division* à une suite quelconque de points situés en ligne droite. Sur cette droite, qu'on appelle *base* de la division, on choisit à volonté une origine fixe a, et l'on indique sans ambiguïté la position d'un point quelconque m en donnant le segment am en grandeur et en signe.

Dans un grand nombre de questions de Géométrie, on est conduit à considérer deux divisions dont les points se correspondent un à un suivant une loi déterminée ; on appelle alors *homologues* deux points correspondants quelconques, et on les désigne par une même lettre, non accentuée pour le point de la première division, et affectée d'un accent pour le point de la seconde. Soient L et L′ les deux bases (*fig.* 572), m et m' deux points homologues; a l'origine prise sur la base L et b' l'origine choisie sur la base L′ (¹); la loi suivant laquelle les points homologues des deux divisions se correspondent s'exprimera alors par une équation entre les segments am et $b'm'$.

On dit que deux divisions sont *homographiques* lorsque l'équation qui exprime la loi de correspondance des points homologues m et m' est du

(¹) Nous supposons, pour plus de généralité, que les origines a et b' ne sont pas nécessairement deux points homologues.

premier degré par rapport à chacun des segments am et $b'm'$, c'est-à-dire est de la forme

$$(1)\qquad A.am.b'm' + B.am + C.b'm' + D = 0,$$

A, B, C, D, étant des constantes données.

Deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles; car soit une autre division homographique de la première; en désignant par c'' l'origine et par m'' l'homologue de m, on aura

$$A_1.am.c''m'' + B_1.am + C_1.c''m'' + D_1 = 0,$$

et, comme l'élimination de am entre les deux relations précédentes conduit évidemment à une équation de même forme entre $b'm'$ et $c''m''$, les deux divisions engendrées par les points m' et m'' sont homographiques.

Souvent, au lieu de donner les quantités A, B, C, D, on donne des couples de points homologues. Or, l'équation (1) ne renferme en réalité que trois coefficients arbitraires, qui sont les rapports de trois quelconques des quantités A, B, C, D, à la quatrième; d'ailleurs, donner un couple de points homologues, c'est donner une valeur de am et la valeur correspondante de $b'm'$, c'est-à-dire une équation du premier degré entre les trois rapports considérés. Pour déterminer ces rapports, il est donc nécessaire et suffisant d'avoir trois équations de ce genre, c'est-à-dire de connaître trois couples de points correspondants. Ainsi, *deux divisions homographiques sont déterminées par trois couples de points homologues.*

1101. Écartons, pour le moment, le cas particulier où A est nul; nous pourrons alors diviser par A, et la relation homographique (1) prendra la forme

$$(2)\qquad am.b'm' - \lambda.am - \mu.b'm' + \nu = 0.$$

Les coefficients λ et μ ont des significations géométriques remarquables. Nous désignerons toujours, dans la suite, par I le point de la première division qui est l'homologue du point situé à l'infini dans la seconde, et par J' le point de la seconde division qui répond à l'infini de la première. Si, dans la relation (2), on fait am infini après avoir divisé par am, on trouve

$$b'J' - \lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = b'J',$$

et l'on a de même, en faisant $b'm'$ infini,

$$aI - \mu = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = aI.$$

La relation homographique (2) peut être transformée de bien des manières. Voici les deux autres formes les plus utiles:

1° L'équation (2) peut s'écrire

$$(am - \mu)(b'm' - \lambda) = k,$$

k étant une constante; en remplaçant alors λ et μ par les valeurs ci-dessus, on trouve

$$(3) \qquad \mathrm{I}m.\mathrm{J}'m' = k,$$

formule très-usuelle; car, dans les applications, on détermine en général très-aisément les points I et J', auxquels on donne le nom de *points limites*.

2° Soient a, b, c, trois points choisis à volonté dans la première division; a', b', c', leurs homologues dans la seconde, et m, m', un quatrième couple quelconque de points correspondants. La relation (3) donne

$$\mathrm{I}a = \frac{k}{\mathrm{J}'a'}, \quad \mathrm{I}c = \frac{k}{\mathrm{J}'c'}, \quad \text{d'où} \quad ca = \mathrm{I}a - \mathrm{I}c = -\frac{k}{\mathrm{J}'a'.\mathrm{J}'c'}.c'a'.$$

En formant les valeurs analogues de cb, ma, mb, et les portant dans l'expression du rapport anharmonique

$$(abcm) \quad \text{ou} \quad \frac{ca}{cb} : \frac{ma}{mb},$$

on trouve

$$(4) \qquad (abcm) = (a'b'c'm').$$

Donc, *pour que deux divisions soient homographiques, il faut et il suffit que tout système de quatre points de la première ait le même rapport anharmonique que les quatre points homologues de la seconde*. C'est cette propriété que M. Chasles prend pour définition dans sa *Géométrie supérieure*.

1102. Examinons maintenant le cas où A est nul. La relation homographique (1) se réduit alors à

$$\mathrm{B}.am + \mathrm{C}.b'm' + \mathrm{D} = 0,$$

ou, comme B et C ne sauraient être nuls à la fois, à

$$am = k(b'm' - h),$$

h et k étant deux constantes. Lorsque m est en a, le premier membre s'annule, et, comme m' coïncide alors avec l'homologue a' de a, on voit que $h = b'a'$ et, par suite, que l'équation précédente peut s'écrire

$$am = k(b'm' - b'a') \quad \text{ou} \quad am = k.a'm'.$$

Donc *les deux droites* L *et* L' *sont divisées en parties proportionnelles.*

On dit, dans ce cas, que les deux divisions homographiques sont *semblables*.

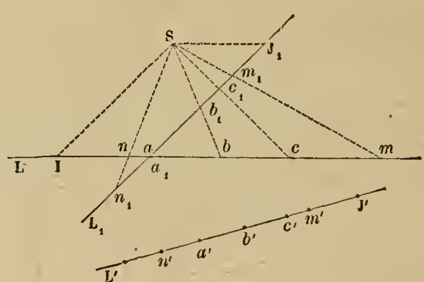
Dans deux divisions semblables, les points à l'infini sont homologues; car, d'après l'équation précédente, am et $a'm'$ deviennent infinis en même temps. Réciproquement, *deux divisions homographiques dont les points à l'infini se correspondent sont semblables;* car, si dans l'équation (1), préalablement divisée par $am.b'm'$, on fait à la fois am et $b'm'$ infinis, on voit que $A = 0$.

Lorsque le coefficient k qui figure dans la relation précédente est égal à $+1$, les deux divisions sont dites *égales;* elles sont *égales et de même sens* pour $k = 1$, *égales et de sens contraires* pour $k = -1$.

Pour deux divisions semblables, la relation (3) n'a plus de sens; mais il est évident que la relation (4) subsiste encore.

1103. Deux divisions $abcmn\ldots$, $a_1b_1c_1m_1n_1\ldots$, sont dites *homologiques*, lorsqu'elles sont la perspective l'une de l'autre, c'est-à-dire lorsque les droites bb_1, cc_1, ..., mm_1, ..., qui joignent les points homologues concourent en un même point S (*fig.* 572).

Fig. 572.



Deux divisions homologiques sont homographiques, puisque le rapport anharmonique est une expression projective; le point d'intersection (a, a_1) des deux bases L et L_1 est alors un point homologue commun. Réciproquement, *deux divisions homographiques qui ont un point homologue commun sont homologiques;* c'est le théorème fondamental du n° 324 avec un autre énoncé.

On déduit de là un moyen très simple pour *construire deux divisions homographiques dont on donne trois couples de points homologues.* Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), les trois couples donnés, et m' un point quelconque de la deuxième division; il s'agit de trouver le point m de la première division qui est l'homologue de m'. A cet effet, on portera la division L′, à l'aide d'une bande de papier, sur une droite quelconque L_1 passant par a, de façon que a' vienne en a; b_1, c_1, m_1, étant les positions que prennent alors b', c', m', on joindra m_1 au point de concours S des droites bb_1 et cc_1, et l'intersection des droites Sm_1 et L sera le point demandé m. Il est clair, en effet, que le système $abcm$ est homologique du système $a_1b_1c_1m_1$, et, par suite, homographique de son égal $a'b'c'm'$.

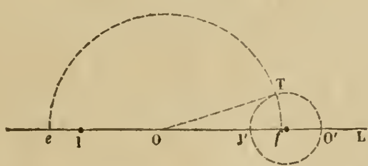
DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES DE MÊME BASE.

1104. Deux divisions homographiques peuvent être situées sur une même droite L; on appelle alors *point double* tout point de cette droite qui, considérée comme appartenant à la première division, coïncide avec son homologue de l'autre division.

Deux divisions homographiques de même base, qui ont trois points doubles, coïncident; car a, b, c, étant les trois points doubles, et (m, m') un couple quelconque de points homologues, l'égalité des rapports anharmoniques $(abcm)$ et $(abcm')$ exigent que m et m' coïncident. Il suit de là que *deux divisions homographiques distinctes et tracées sur une même droite ne peuvent avoir plus de deux points doubles*.

1105. Pour étudier plus complétement la question des points doubles, prenons pour origine commune le milieu O de la droite IJ′ qui unit les points homologues de l'infini (*fig.* 573); on aura alors $OJ' = -OI$, c'est-

Fig. 573.



à-dire (1101) $\lambda = -\mu$, et l'homographie des deux divisions s'exprimera par l'équation

$$Om.Om' - \lambda(Om - Om') + \nu = 0,$$

ou

$$(5)\qquad Om.Om' + \lambda.mm' + \nu = 0.$$

Nous savons d'ailleurs que $\lambda = OJ' = -OI$; et, pour avoir la signification géométrique de ν, il suffit de supposer que m est en O; car alors, m' coïncidant avec l'homologue O′ de O, l'équation (5) donne $\lambda.OO' + \nu = 0$, d'où $\nu = -OJ'.OO' = OI.OO'$.

Cela posé, pour qu'un point m soit double, c'est-à-dire pour qu'il coïncide avec son homologue m', il faut et il suffit qu'on ait, en vertu de l'équation (5),

$$\overline{Om}^2 + \nu = 0 \quad \text{ou} \quad Om = \pm\sqrt{\mathrm{OJ}'.\mathrm{OO}'}.$$

On conclut de là que *deux divisions homographiques de même base ont toujours deux points doubles réels ou imaginaires,* et que *le milieu des points doubles coïncide avec le milieu du segment* IJ' *formé par les points limites.*

Les points doubles sont imaginaires lorsque les segments OJ' et OO' ont des signes contraires, c'est-à-dire lorsque O' et J' sont de part et d'autre de O. Ils sont réels lorsque O' et J' sont d'un même côté du point O ; dans ce cas, en menant par O une tangente au cercle décrit sur O'J' comme diamètre, puis rabattant cette tangente $\mathrm{OT} = \sqrt{\mathrm{OO}'.\mathrm{OJ}'}$ sur la droite L en Oe et en Of, on a les deux points doubles e et f.

1106. *Pour que deux divisions homographiques de même base soient semblables, il faut et il suffit* (1102) *que l'un des points doubles soit à l'infini.*

On voit immédiatement que : 1° *pour que deux divisions soient égales et de même sens, il faut et il suffit que les deux points doubles soient à l'infini ;* 2° *pour que deux divisions soient égales et de sens contraires, il faut et il suffit que l'un des points doubles soit à l'infini et que le second point double soit le milieu de tous les segments mm' formés par deux points homologues quelconques.*

1107. Cette théorie des points doubles nous amène naturellement à dire un mot de la détermination simultanée de deux points et du rôle des imaginaires en Géométrie.

Soient (*fig.* 200) une origine fixe O sur une droite X'X, et A et B deux points quelconques de cette droite. Au lieu de donner les segments OA et OB qui détermineraient individuellement les points A et B (303), on peut donner la demi-somme p et le produit q de ces deux segments, qui sont alors les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

Les nombres p et q sont dits les *éléments du couple* (A, B) ; leur connaissance détermine *simultanément* les deux points A et B.

Les nombres p et q étant supposés réels, les segments OA et OB seront réels ou imaginaires (conjugués), selon que la quantité $p^2 - q$ sera positive ou négative ; dans ce dernier cas, les points A et B cessent d'exister, et l'on dit qu'ils sont *imaginaires.*

Deux points imaginaires A et B, ainsi définis, peuvent avoir des relations réelles avec des points réels; ce sont des relations contenant d'une manière symétrique les segments imaginaires conjugués OA et OB, de telle sorte que, tous calculs effectués, il ne reste plus dans les équations que les éléments réels p et q du couple (A, B) et les autres quantités réelles étrangères à ce couple. Considérons, par exemple, deux couples de points (A, B), (C, D) situés sur la droite X'X (*fig.* 200) et définis respectivement par les équations

$$x^2 - 2px + q = 0, \quad x^2 - 2p'x + q' = 0.$$

Supposons que ces points soient réels et forment une division harmonique; on aura alors la relation

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = -1 \tag{1}$$

qui, après qu'on y a remplacé les segments CA, CB, ... par leurs valeurs OA — OC, OB — OC, ..., revient, tous calculs effectués, à la suivante :

$$q + q' = 2pp', \tag{2}$$

dans laquelle les deux couples de points (A, B), (C, D), ne figurent plus que par leurs éléments (p, q), (p', q').

Cela posé, supposons que, le couple (A, B) restant réel, la quantité $p'^2 - q'$ devienne négative; les points C et D cesseront d'exister, et la relation (1) n'aura plus de sens explicite; mais rien n'empêchera de la conserver comme manière symbolique d'écrire la relation (2) qui subsiste toujours, et à laquelle la relation (1) se réduit lorsqu'on effectue les calculs d'après les règles de l'Algèbre. Ainsi, au lieu de dire que, lorsque $p'^2 - q'$ est négatif, il n'existe plus de couple de points divisant harmoniquement le segment AB, mais qu'il existe seulement entre les éléments p, q, p', q', la relation (2), on pourra dire que le couple (C, D) des points qui divisent harmoniquement le segment AB devient imaginaire, et employer la forme symbolique (1), qui fait bien plus image que la relation (2) à laquelle elle revient au fond. Les avantages de cette nouvelle manière de voir sont connus du lecteur qui est déjà versé dans l'Analyse algébrique. En Géométrie comme en Algèbre, l'introduction des imaginaires permet de généraliser les énoncés, évite les subdivisions, et leur emploi transitoire fournit des démonstrations rapides et élégantes.

Remarquons en terminant que, si (comme nous le supposons toujours) les éléments p, q, p', q', sont réels, la relation (2) exige que l'une des deux quantités $p^2 - q$, $p'^2 - q'$, soit positive; car, si l'on avait à la fois

$$p^2 - q < 0, \quad p'^2 - q' < 0,$$

on aurait

$$p^2 + p'^2 - (q + q') < 0,$$

ou, à cause de (2),

$$p^2 + p'^2 - 2pp' < 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (p - p')^2 < 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi, quand *deux couples de points en ligne droite forment une division harmonique, l'un des couples au moins est réel.*

Rappelons enfin la signification géométrique de l'élément p; cet élément exprime la distance de l'origine O (*fig.* 200) au milieu I du segment AB, puisqu'on a

$$p = \frac{1}{2}(\mathrm{OA} + \mathrm{OB}) = \mathrm{OI} \quad (303).$$

Lorsque le couple (A, B) est imaginaire, les imaginaires disparaissent dans la somme des deux quantités conjuguées OA et OB, de sorte que *le milieu* I *du segment compris entre deux points imaginaires conjugués* A *et* B *est toujours réel.*

FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES.

1108. On dit que deux faisceaux sont *homographiques* lorsqu'on peut trouver deux droites L et L' qui les coupent suivant deux divisions homographiques. Il est clair qu'*alors toute section rectiligne* L_1 *du premier faisceau sera homographique d'une section rectiligne quelconque* L'_1 *du second faisceau;* car les divisions L et L_1, étant en perspective, sont homographiques (1103); il en est de même de L' et de L'_1, et, comme L et L' sont homographiques par hypothèse et que deux divisions homographiques d'une troisième sont homographiques entre elles (1100), les deux divisions L_1 et L'_1 sont homographiques.

Pour que deux faisceaux soient homographiques, il faut et il suffit que quatre droites quelconques du premier aient le même rapport anharmonique que les quatre droites homologues du second (320 et 1101, 2°).

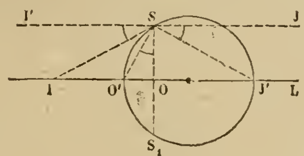
Deux faisceaux homographiques sont déterminés par trois couples de rayons homologues (1100).

Quand deux faisceaux homographiques ont un rayon homologue commun, les autres rayons homologues se coupent deux à deux sur une ligne droite : c'est le théorème fondamental du n° 322 avec un autre énoncé.

1109. *Deux faisceaux homographiques de même centre ont toujours deux rayons doubles* (*réels ou imaginaires*), c'est-à-dire deux rayons tels, que chacun d'eux, considéré comme appartenant au premier faisceau, coïncide avec son homologue dans le second faisceau. On obtient ces rayons en joignant le centre commun des deux faisceaux aux points doubles des deux divisions homographiques, déterminées par les deux faisceaux sur une transversale arbitraire.

Lorsqu'un angle tourne autour de son sommet S (*fig.* 574), *ses deux*

Fig. 574.



côtés engendrent deux faisceaux homographiques concentriques, car, les angles du premier faisceau étant respectivement égaux à ceux du second, quatre droites quelconques du premier faisceau ont (321) le même rapport anharmonique que les quatre homologues du second. *Les rayons doubles de ces deux faisceaux sont* évidemment *imaginaires*, et il importe de remarquer que *la position de ces rayons doubles imaginaires est indépendante de la grandeur de l'angle*. En effet, soit L une transversale quelconque et I'SI, O'SO, J'SJ, trois positions de l'angle donné relatives, la première au cas où le second côté est parallèle à L, la seconde au cas où le premier côté est perpendiculaire à L, et la troisième au cas où le premier côté est parallèle à L. Tout revient à trouver les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques que les côtés de l'angle tracent sur L. Or I et J' sont les points limites de ces deux divisions, et O, qui est évidemment leur milieu, est le milieu des points doubles; ces points sont donc, de part et d'autre de O, à une distance égale (1105) à

$$\sqrt{\overline{OJ'}.\overline{OO'}} = \sqrt{-\overline{OJ'}.\overline{O'O}}.$$

Mais, puisque O'SO = J'SJ, l'angle O'SJ' est droit, et l'on a

$$O'O.OJ' = \overline{SO}^2\,;$$

donc, la distance du point O aux deux points doubles est égale à $SO.\sqrt{-1}$; d'où l'on voit qu'elle dépend de la distance de la transversale L au sommet S de l'angle, mais en aucune manière de la grandeur de cet angle.

Réciproquement, *lorsque deux divisions homographiques de même base ont leurs points doubles imaginaires, on peut considérer ces deux divisions comme tracées par un certain angle de grandeur constante tournant autour de son sommet*. En effet, I et J' étant les homologues de l'infini, O leur milieu et O′ son homologue, décrivons une circonférence sur O′J′ comme diamètre, jusqu'à la rencontre S (ou S_1) de la perpendiculaire élevée par O sur la base L. L'angle OSO′, en tournant autour du point S, tracera sur L deux divisions homographiques dont (O, O′), (I, ∞), (∞, J′) seront trois couples de points homologues ; car, si l'on mène I′SJ parallèle à L, les angles OSJ, O′SJ′, I′SO, étant droits, les angles JSJ′, O′SO, I′SI, seront égaux. Donc ces deux divisions, ayant trois couples de points homologues communs avec les deux divisions proposées, ne diffèrent pas de celles-ci.

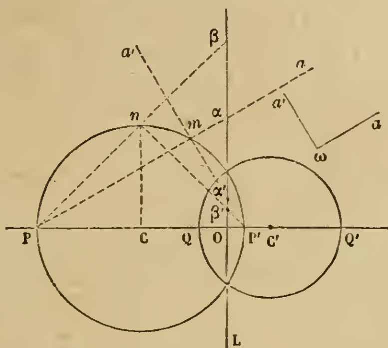
INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE. — POINTS CYCLIQUES D'UN PLAN.

1110. Il résulte du n° 321 que : 1° *lorsqu'un point mobile m décrit un cercle, les droites* P*m*, P′*m*, *qui joignent ce point à deux points fixes,* P *et* P′, *pris à volonté sur la circonférence, forment deux faisceaux homographiques ;* 2° *lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace sur deux tangentes fixes de ce cercle deux divisions homographiques.*

Une droite quelconque L *du plan d'un cercle* C *rencontre toujours la circonférence en deux points* (*réels ou imaginaires*) ; car, les deux divisions homographiques tracées sur L par les rayons P*m*, P′*m*, des deux faisceaux, ont toujours deux points doubles (réels ou imaginaires). *Le milieu des deux points d'intersection est toujours réel : c'est la projection* O *du centre* C *du cercle sur la droite* L ; car, si l'on choisit pour les points P et P′ (*fig.* 575) les extrémités du diamètre perpendiculaire à L, les deux points I et J′, homologues de l'infini dans les deux divisions homographiques $\alpha\beta\ldots$, $\alpha'\beta'\ldots$, tracées sur L, coïncident avec O, de sorte que O est le milieu des deux points doubles. *Le carré de la distance des deux points d'intersection au point* O *est égal à la puissance du point* O *par rapport au cercle, changée de signe.* Car, puisque I et J′ sont confondus avec O, le produit $O\alpha . O\alpha'$ est constant (1105), et le carré de la distance du point O aux deux points doubles est égal à cette constante ; or, si β et β' sont les deux points homologues qui répondent au point *n*, milieu du demi-cercle P*m*P′, Oβ et Oβ' sont en valeur absolue égaux à OP et à OP′, et la constante est égale à $-$ OP′.OP.

1111. Considérons un cercle C (*fig.* 575) et la droite à l'infini située dans son plan. P et P′ étant deux points fixes pris à volonté sur la circonférence C, les rayons P*m* et P′*m* tracent sur la droite de l'infini, quand le point *m* décrit le cercle, deux divisions homographiques dont les points doubles imaginaires appartiennent à la fois à la droite et au cercle. Or, si ω est un point pris à volonté dans le plan du cercle, les parallèles à Pm et $P'm$, menées par ce point, vont couper la droite de l'infini aux mêmes points a et a' que les rayons Pm et $P'm$; d'ailleurs, l'angle $a\omega a'$ de ces

Fig. 579.



parallèles est constant, puisque, en vertu de la propriété de l'angle inscrit, l'inclinaison mutuelle des droites Pm et $P'm$ ne varie pas; donc, les points d'intersection du cercle et de la droite de l'infini sont les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques tracées sur cette droite par un angle de grandeur constante tournant autour du point ω.

En faisant varier la position et la grandeur du cercle ainsi que la position des points P et P' sur le cercle, on ne fait que changer la grandeur de l'angle qui tourne autour du point fixe ω, et, comme la situation des points doubles imaginaires est indépendante (1109) de la grandeur de l'angle, on arrive à cette conclusion : *Tous les cercles situés dans un plan ont les deux mêmes points imaginaires communs avec la droite à l'infini de ce plan.* Nous donnerons à ces deux points, dont la considération est souvent utile, le nom de *points cycliques* du plan.

Deux cercles quelconques, C et C', admettent donc la droite de l'infini pour corde commune. *L'axe radical* L des deux cercles est une seconde corde commune; en effet, les points réels ou imaginaires où cet axe rencontre l'un quelconque des deux cercles sont de part et d'autre du point O, à une distance égale à la racine carrée de la puissance, prise en signe contraire, du point O par rapport au cercle considéré (1110); et comme, si L est l'axe radical, le point O a la même puissance par rapport aux deux cercles, on voit que l'axe radical coupe ces cercles aux deux mêmes points.

Ainsi, *deux cercles quelconques ont toujours quatre points d'intersection situés deux à deux sur deux cordes communes réelles, qui sont l'axe* *radical et la droite de l'infini. Les deux points d'intersection situés sur l'axe radical peuvent être tous deux réels ou tous deux imaginaires. Quand les cercles sont concentriques,* l'axe radical passe à l'infini, les deux cordes communes se confondent, *et les deux cercles ont un double contact imaginaire à l'infini.* Ces dernières idées ont été émises d'abord par Poncelet (*Propriétés projectives,* 1^re Section, Chapitre II); mais, depuis cette époque, l'introduction des imaginaires en Géométrie a donné lieu à de remarquables travaux (SMITH, *Annales de Tortolini,* 1869; LAGUERRE, *Nouvelles Annales,* 1870, etc.).

DIVISIONS ET FAISCEAUX HOMOGRAPHIQUES EN INVOLUTION.

1112. On dit que deux divisions homographiques de même base L forment une *involution,* lorsqu'on peut trouver sur la droite L un point a qui, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre division, a toujours pour homologue le même point a'.

L'homographie de deux divisions de même base s'exprime (1105) par la relation générale

$$(1) \qquad \mathrm{O}m.\mathrm{O}m' + \mathrm{OJ}'.mm' + \nu = 0,$$

O étant le milieu des points I et J' dont les homologues sont à l'infini.

Pour que l'égalité

$$\mathrm{O}a.\mathrm{O}a' + \mathrm{OJ}'.aa' + \nu = 0$$

ne change pas quand on permute a et a', il faut et il suffit que $\mathrm{OJ}' = 0$. Donc, *pour que deux divisions homographiques forment une involution, il faut et il suffit que les points* I *et* J', *homologues de l'infini, coïncident.*

La relation (1) se réduit alors à

$$(2) \qquad \mathrm{O}m.\mathrm{O}m' = \text{const.},$$

et la symétrie de cette équation, par rapport à $\mathrm{O}m$ et à $\mathrm{O}m'$, montre que tous les couples de points homologues jouissent de la même propriété que le couple (m, m'). Ainsi, *dans deux divisions homographiques en involution, tout point considéré successivement comme appartenant à la première et à la seconde division a toujours le même homologue.*

Le point O, où sont réunis les points I et J' et dont le conjugué est à l'infini, reçoit le nom de *point central de l'involution.*

1113. L'équation (2), très-commode à cause de sa simplicité, est trop particulière. Lorsqu'on veut prendre pour origine commune des deux divisions, non plus le point central O, mais un point quelconque a de la base, il suffit d'exprimer dans la relation (1101)

$$am.am' - \lambda.am - \mu.am' + \nu = 0$$

que les points I et J' coïncident, c'est-à-dire, puisque (1101) $\lambda = a\mathrm{J}'$ et $\mu = a\mathrm{I}$, que $\lambda = \mu$. L'équation d'involution est alors

$$(3) \qquad am.am' - \lambda(am + am') + \nu = 0.$$

On voit qu'elle ne renferme que deux coefficients arbitraires λ et ν, de sorte qu'*il suffit de deux couples de points homologues pour déterminer une involution.*

Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points homologues de deux divisions en involution : *quatre quelconques de ces six points ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points homologues ;* ainsi l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b)$, car les deux systèmes $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques. Réciproquement, *pour que trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (c, c'), *en ligne droite, soient en involution,* c'est-à-dire pour que les points c et c' soient deux points homologues des deux divisions homographiques en involution déterminées par les deux couples (a, a') et (b, b'), *il suffit que quatre de ces points aient leur rapport anharmonique égal à celui de leurs homologues ;* car, si l'on a, par exemple, $(abcb') = (a'b'c'b')$, les deux divisions $abcb'$, $a'b'c'b$, sont homographiques, et au point b, considéré tour à tour comme appartenant à la première et à la seconde division, répond toujours le même point b'.

Il résulte de là que *l'involution est une propriété projective.*

1114. On sait que deux divisions homographiques de même base ont deux points doubles réels ou imaginaires, dont le milieu coïncide avec le milieu des points I et J' homologues de l'infini. Donc, *toute involution a deux points doubles e et f, réels ou imaginaires, dont le milieu est le point central* O ; cela résulte d'ailleurs de la relation (2) qui donne, pour les segments Oe et Of relatifs aux *points doubles*,

$$\mathrm{O}e = +\sqrt{\mathrm{O}a.\mathrm{O}a'}, \quad \mathrm{O}f = -\sqrt{\mathrm{O}a.\mathrm{O}a'},$$

(a, a') étant un couple quelconque de points homologues.

Ces expressions montrent encore que *le segment ef, formé par les deux points doubles réels ou imaginaires, est divisé harmoniquement par chaque couple de points homologues* (a, a'), (b, b'), ... [1]. Le point central, ayant même puissance par rapport à tous les couples (a, a'), (b, b'), ... de

[1] Il résulte de là que, lorsque l'un des points doubles e est à l'infini, l'autre point double f est le milieu de tous les segments aa', bb', cc', ...

points homologues, appartient à l'axe radical de deux cercles quelconques ayant respectivement pour cordes deux segments quelconques aa', bb',.... Donc : 1° *si sur les divers segments* aa', bb', cc',... *formés par chaque couple de points homologues, on décrit des circonférences passant toutes par un même point quelconque extérieur à la base, ces circonférences ont un second point commun et leur corde commune coupe la base au point central;* 2° *les circonférences décrites sur les divers segments* aa', bb', cc', ... *comme diamètres, ont pour axe radical commun la perpendiculaire à la base élevée par le point central.*

Nous avons déjà trouvé la plupart de ces résultats au n° 381 où nous avons ébauché en quelque sorte la théorie de l'involution en prenant pour point de départ la relation (2) ci-dessus. Nous renverrons à ce numéro, pour ce qui concerne l'influence de la réalité ou de l'imaginarité des points doubles sur la disposition des points d'une division involutive.

1115. *Les points doubles e et f de deux divisions homographiques quelconques,* abc,..., $a'b'c'$,..., *de même base, forment une involution avec chaque système de deux couples tels que* ab' *et* $a'b$; car on a

$$(abef) = (a'b'ef) = (b'a'fe) \quad (318),$$

de sorte que les deux figures $abef$, $b'a'fe$, sont homographiques, et que le point e, considéré tour à tour comme appartenant à l'une et à l'autre, a toujours le même homologue f.

On conclut de là (1114) que : 1° *les trois circonférences, menées par un même point g quelconque extérieur à la base et par les trois segments* ab', ba', ef, *passent toutes trois par un second point commun;* 2° *les circonférences décrites sur* ab', ba', ef, *comme diamètres, ont même axe radical.*

RELATIONS MÉTRIQUES ENTRE TROIS SEGMENTS EN INVOLUTION.

1116. Soient (a, a'), (b, b'), (c, c'), trois couples de points (réels ou imaginaires) situés en ligne droite, et

$$x^2 - 2p_1x + q_1 = 0, \quad x^2 - 2p_2x + q_2 = 0, \quad x^2 - 2p_3x + q_3 = 0,$$

les équations qui les représentent, en adoptant pour origine commune un point A arbitraire de la base. Pour que les trois couples forment une involution, il faut et il suffit (1113) que chacun d'eux satisfasse à la relation

$$\mathrm{A}m.\mathrm{A}m' - \lambda(\mathrm{A}m + \mathrm{A}m') + \nu = 0;$$

de là, les trois équations

$$q_1 - 2p_1\lambda + \nu = 0, \quad q_2 - 2p_2\lambda + \nu = 0, \quad q_3 - 2p_3\lambda + \nu = 0,$$

qui doivent être satisfaites par les mêmes valeurs de λ et de ν. La condition d'involution résulte donc de l'élimination de λ et de ν entre ces trois équations; on trouve

$$(1) \qquad q_1(p_2 - p_3) + q_2(p_3 - p_1) + q_3(p_1 - p_2) = 0.$$

Cette équation (1) résulterait pareillement de l'élimination du paramètre arbitraire k entre les deux relations

$$p_3 = \frac{p_1 + kp_2}{1 + k}, \quad q_3 = \frac{q_1 + kq_2}{1 + k},$$

qui peuvent dès lors remplacer la condition (1).

En vertu de ces valeurs, l'équation $x^2 - 2p_3x + q_3 = 0$ peut s'écrire

$$x^2 - 2p_1x + q_1 + k(x^2 - 2p_2x + q_2) = 0;$$

telle est l'équation qui détermine le troisième couple (c, c') en fonction des éléments des deux premiers (a, a') et (b, b').

1117. Dans les applications, il est souvent plus commode de substituer aux éléments $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$, les segments $\mathrm{A}a$, $\mathrm{A}a'$, $\mathrm{A}b$, $\mathrm{A}b'$, $\mathrm{A}c$, $\mathrm{A}c'$; or, si α, β, γ, désignent respectivement les milieux des segments aa', bb', cc', on a

$$p_1 = \mathrm{A}\alpha, \quad p_2 = \mathrm{A}\beta, \quad p_3 = \mathrm{A}\gamma,$$

et, par suite, la condition d'involution (1) s'écrit

$$(2) \qquad \mathrm{A}a.\mathrm{A}a'.\beta\gamma + \mathrm{A}b.\mathrm{A}b'.\gamma\alpha + \mathrm{A}c.\mathrm{A}c'.\alpha\beta = 0.$$

Cette équation fondamentale en donne beaucoup d'autres. Par exemple, si l'on fait coïncider successivement l'origine arbitraire A avec chacun des points a, a', b, b', c, c', on obtient le groupe

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{ab.ab'}{ac.ac'} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}, & \dfrac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'} = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}, \\[2ex] \dfrac{bc.bc'}{ba.ba'} = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, & \dfrac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'} = \dfrac{\beta\gamma}{\beta\alpha}, \\[2ex] \dfrac{ca.ca'}{cb.cb'} = \dfrac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}, & \dfrac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'} = \dfrac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}. \end{array}\right.$$

En remarquant que les équations écrites sur la même horizontale ont le même second membre, on a encore

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{ab.ab'}{ac.ac'} = \frac{a'b.a'b'}{a'c.a'c'}, \\ &\frac{bc.bc'}{ba.ba'} = \frac{b'c.b'c'}{b'a.b'a'}, \\ &\frac{ca.ca'}{cb.cb'} = \frac{c'a.c'a'}{c'b.c'b'}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en multipliant entre elles de toutes les manières possibles trois des six équations (3), prises de telle façon que le produit des seconds membres soit égal à 1, on obtient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} ab'.bc'.ca' &= -a'b.b'c.c'a, \\ ab'.bc.c'a' &= -a'b.b'c'.ca, \\ ab.b'c'.ca' &= -a'b'.bc.c'a, \\ ab.b'c.c'a' &= -a'b'.bc'.ca. \end{aligned} \right.$$

FAISCEAUX EN INVOLUTION.

1118. On dit que deux faisceaux homographiques de même centre sont *en involution* ou forment *un faisceau involutif*, lorsqu'on peut trouver une droite qui les coupe suivant deux divisions en involution. Alors toute autre section rectiligne des deux faisceaux donnera deux divisions en involution (1113).

Dans un faisceau involutif, tout rayon considéré tour à tour comme appartenant à l'un et à l'autre faisceau a toujours le même homologue. Inversement, *deux faisceaux homographiques de même centre sont en involution s'il existe un rayon qui, considéré successivement comme appartenant au premier et au second faisceau, ait toujours le même homologue* (1112).

Un faisceau involutif est déterminé par deux couples de rayons homologues.

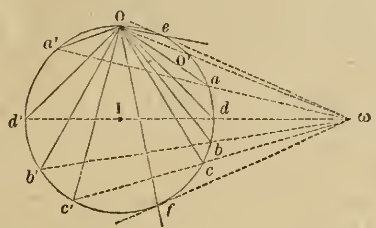
Six rayons issus d'un même point et conjugués deux à deux sont en involution si quatre d'entre eux, convenablement choisis, ont même rapport anharmonique que leurs conjugués ; et alors, quatre quelconques de ces rayons auront même rapport anharmonique que leurs conjugués (1113).

Dans tout faisceau involutif, il y a toujours deux rayons doubles réels ou imaginaires ; les rayons doubles forment un faisceau harmonique avec deux rayons homologues quelconques (1114).

Un angle droit tournant autour de son sommet engendre un faisceau involutif dont les rayons doubles sont imaginaires (381, 2°).

1119. *Quand plusieurs cordes aa', bb', cc', ..., d'un cercle passent par un même point ω, les couples de droites menées d'un point quelconque* O *de la circonférence aux extrémités de chaque corde sont en involution* (*fig.* 576).

Fig. 576.



Il suffit de démontrer l'égalité des rapports anharmoniques $(O.abca')$, $(O.a'b'c'a)$. Or, si l'on désigne par O' le second point d'intersection du cercle et de la droite $O\omega$, on voit que le rapport anharmonique $(O'.a'b'c'a)$ est égal à chacun des deux qui précèdent. Il équivaut au premier, puisque les droites Oa, Ob, Oc, Oa', coupent respectivement les droites $O'a'$, $O'b'$, $O'c'$, $O'a$, sur la polaire du point ω (344) ; et il équivaut au second, d'après l'observation faite au n° 321, 1°.

Réciproquement, *si par le centre commun* O *d'un faisceau involutif on fait passer un cercle quelconque, les cordes interceptées dans ce cercle par les couples de rayons homologues concourent en un même point* ω. Car, si ω est l'intersection des deux cordes aa' et bb', et si l'on désigne pour un instant par c'' le second point où la droite ωc rencontre le cercle, les droites Oa, Oa', Ob, Ob', Oc, Oc'', seront en involution d'après le théorème direct ; or, Oa, Oa', Ob, Ob', Oc, Oc', sont en involution par hypothèse ; donc, Oc' et Oc'' coïncident, et, par suite, les points c'' et c' ; la corde $c'c$ passe donc par ω.

De là résulte immédiatement cette proposition très-importante :

Dans tout faisceau involutif, il existe toujours un couple de rayons homologues rectangulaires. Ce sont les deux rayons Od, Od', qui aboutissent aux extrémités du diamètre qui passe par ω. Toutefois, si le point ω était au centre du cercle, tous les couples de rayons homologues seraient rectangulaires. Ainsi *le couple de rayons homologues rectangulaires est unique, à moins que tous les couples ne soient rectangulaires ;* dans ce cas particulier, les rayons doubles sont imaginaires : cela résulte du n° 381, 2° ; on peut aussi le voir directement, car les rayons doubles correspondent en général aux points de contact des tangentes menées au cercle par le point ω ; or ces tangentes sont imaginaires quand le point ω est au centre du cercle.

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES DU QUADRILATÈRE.

1120. *Toute transversale* L *menée dans le plan d'un quadrilatère* ABCD *rencontre les quatre côtés et les deux diagonales en six points, a et a', b et b', c et c', qui sont en involution* (*fig.* 577) ; car les faisceaux homographiques (AB, AC, AD, Ac'), (CB, CA, CD, Cc'), déterminent sur L deux divisions homographiques, et l'on a

$$(acb'c') = (bca'c') \quad \text{ou (320)} \quad (acb'c') = (a'c'bc),$$

d'où l'on conclut (1113) que les segments aa', bb', cc', sont en involution.

Les six droites menées d'un point quelconque O *du plan d'un quadrilatère* ABCD *aux sommets et aux points de concours* E *et* F *des côtés opposés, sont en involution ;* car le quadrilatère OAFB, dont OF et AB sont les diagonales, détermine, d'après le théorème précédent, six points en involution sur la transversale DC ; donc, les droites OA et OC, OB et OD, OE et OF, qui passent par ces six points, sont en involution.

En plaçant le point O à l'intersection des deux circonférences décrites sur AC et BD comme diamètres, les couples de rayons homologues OA et OC, OB et OD, seront rectangulaires ; donc, le troisième couple OE et OF le sera aussi (1119), et, par suite, la circonférence décrite sur EF comme diamètre passera par les deux points communs aux deux premières ; donc, *les trois circonférences décrites sur les trois diamètres* AC, BD, EF, *d'un quadrilatère complet comme diamètres, se coupent aux deux mêmes points ;* d'où l'on peut conclure immédiatement le théorème du n° 317.

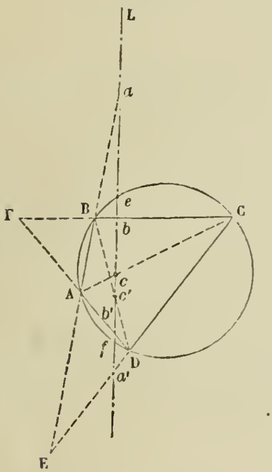
1121. *Quand un quadrilatère* ABCD *est inscrit dans un cercle, une transversale quelconque* L *située dans son plan rencontre les deux couples de côtés opposés et le cercle en trois couples de points* (a, a'), (b, b'), (e, f), *qui sont en involution* (*fig.* 577).

En effet, les droites qui joignent aux points fixes A et C un point mobile qui décrit la circonférence, forment deux faisceaux homogra-

1122. *Quand un quadrilatère* $abcd$ *est circonscrit à un cercle, si d'un point* O *situé dans son plan on mène des droites* Oa, Ob, Oc, Od, *à ses sommets et deux tangentes* OE, OF, *à la courbe, les trois couples de droites* Oa *et* Oc, Ob *et* Od, OE *et* OF, *sont en involution* (*fig.* 578).

En effet, une tangente, en roulant sur le cercle, trace sur les tangentes fixes ab et cd deux divisions homographiques (1110). Les droites phiques (1110); par suite, ces faisceaux tracent sur L deux divisions homographiques dont e et f sont les points doubles. D'ailleurs, comme AB et BC, AD et CD, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux, a et b, b' et a', seront deux couples de points homologues des deux divisions. Donc (1115) les trois couples (a, a'), (b, b'), (e, f), sont en involution.

Fig. 577

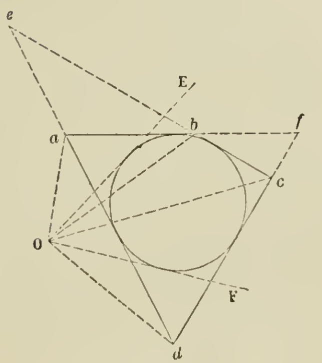


Au lieu de prendre les deux couples de côtés opposés, on pourrait prendre un couple de côtés opposés et les deux diagonales; le théorème subsisterait, car ces quatre droites forment aussi un quadrilatère inscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère inscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses côtés tournent autour de*

menées du point O à ces divers points forment donc deux faisceaux homographiques dont OE et OF sont les rayons doubles. D'ailleurs, comme a et d, b et c, sont deux couples de points homologues des deux divisions, Oa et Od, Ob et Oc, sont deux couples de rayons homologues des deux faisceaux. Donc (1118) les trois couples Oa et Oc, Ob et Od, OE et OF, sont en involution.

Fig. 578.



Au lieu de prendre les deux couples de sommets opposés, on pourrait prendre un couple de sommets opposés et les deux points de concours e et f des côtés opposés; le théorème subsisterait, car ces quatre points sont aussi les sommets d'un quadrilatère circonscrit au même cercle.

Il résulte du théorème précédent que, *si un quadrilatère circonscrit à un cercle se déforme de telle sorte que trois de ses sommets glissent sur* *trois points en ligne droite, le quatrième côté tourne aussi autour d'un point fixe de cette droite.*

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Inscrire dans un cercle un triangle dont les trois côtés passent par trois points en ligne droite.*

trois droites passant par un même point, le quatrième sommet décrit aussi une droite passant par ce point.

On déduirait aisément de là une solution de ce problème : *Circonscrire à un cercle un triangle dont les sommets reposent sur trois droites données et passant par un même point.*

Le théorème du n° 1121 est dû au célèbre géomètre français Desargues (première moitié du XVII^e siècle); toutefois, les anciens (*Collections mathématiques de Pappus*) en ont connu des cas particuliers.

1123. Voici les deux cas particuliers les plus intéressants :

En supposant un ou deux côtés infiniment petits et remplacés par des tangentes, on a ces énoncés :

Quand un triangle est inscrit dans un cercle, les points où une transversale rencontre la courbe, deux côtés du triangle, le troisième côté et la tangente au sommet opposé, sont en involution.

Quand un angle est circonscrit à un cercle, les points où une transversale rencontre la courbe, les deux côtés de l'angle et la corde de contact, forment une involution dont le dernier point est un point double.

En supposant que le quadrilatère circonscrit se réduise à un triangle ou à un angle, on a ces énoncés :

Quand un triangle est circonscrit à un cercle, si d'un point quelconque de son plan on mène les deux tangentes au cercle, les deux droites qui aboutissent à deux sommets, et les deux droites qui aboutissent, l'une au troisième sommet, l'autre au point de contact du côté opposé, on obtient un faisceau involutif.

Quand un angle est circonscrit à un cercle, si d'un point quelconque de son plan on mène les deux tangentes au cercle, les deux droites qui aboutissent aux points de contact des côtés de l'angle et la droite qui passe par le sommet de l'angle, on obtient un faisceau involutif dont la dernière droite est un rayon double.

CONSTRUCTIONS RELATIVES A L'HOMOGRAPHIE ET A L'INVOLUTION.

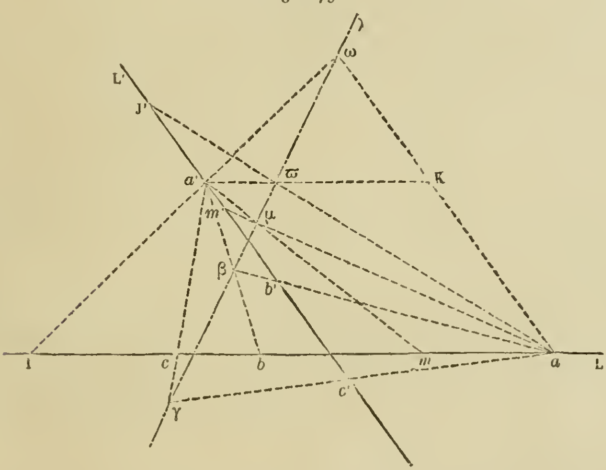
1124. *Construire deux divisions homographiques, connaissant trois couples de points homologues.*

Nous avons déjà donné une première solution de ce problème (1103). En voici deux autres.

Supposons les deux divisions tracées sur deux droites différentes L et L′ et soient (a, a'), (b, b'), (c, c') trois couples de points homologues.

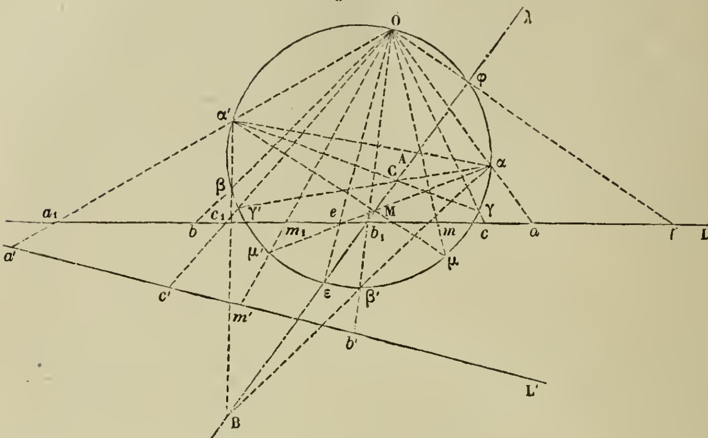
1° Prenons l'intersection β de ab' et de $a'b$, l'intersection γ de ac' et de $a'c$, et tirons la droite $\beta\gamma$ que nous désignerons par λ; m étant un point quelconque de la division L, menons $a'm$ et joignons au point a le point μ, où $a'm$ coupe λ; la droite $a\mu$ rencontrera L′ au point m' homologue de m. En effet, en désignant par α le point où λ coupe aa', on voit que les divisions $abcm$, $a'b'c'm'$ sont homographiques comme étant homologiques de la division $\alpha\beta\gamma\mu$ (*fig.* 579).

Fig. 579.



2° Décrivons un cercle quelconque dans le plan des droites L et L′ (*fig.* 580) et joignons à un point quelconque O de la circonférence les points a, b, c, a', b', c', m; les droites ainsi obtenues couperont la circonférence en des points que nous désignerons respectivement par α, β, γ, α', β', γ', μ. B étant le point commun à $\alpha\beta'$ et $\alpha'\beta$, C le point commun à $\alpha\gamma'$ et $\alpha'\gamma$, tirons la droite BC que nous désignerons par λ. En joignant le point α au point de rencontre M de λ et de $\alpha'\mu$, on obtient une droite αM qui coupe le cercle en μ', et il suffit de mener Oμ' jusqu'à sa rencontre avec L′ pour avoir l'homologue m' de m. En effet, si m' désigne l'homologue de m, les faisceaux (O, $abcm$), et (O, $a'b'c'm'$) ou (O, $\alpha\beta\gamma\mu$), (O, $\alpha'\beta'\gamma'\mu'$), sont homographiques; donc (1108) il en est de même des faisceaux (α, $\alpha'\beta'\gamma'\mu'$) et (α', $\alpha\beta\gamma\mu$); mais, comme ces derniers faisceaux ont un rayon homologue commun $\alpha\alpha'$, les intersections B, C, M, des autres couples de rayons homologues sont en ligne droite; donc, les rayons $\alpha\mu'$ et $\alpha'\mu$

Fig. 580.



se croisent sur la droite BC ou λ; en d'autres termes, la droite qui joint α au point M, où $\alpha'\mu$ rencontre λ, passe par le point μ', où Om' coupe le cercle.

Cette dernière construction s'applique au *cas où les deux divisions* (a, a_1), (b, b_1) (c, c_1) *sont sur la même droite* L, et elle donne aisément les *points doubles e* et *f*; il suffit, en effet de joindre le point O aux points ε et φ où λ coupe le cercle et de prolonger les droites Oε et Oφ jusqu'à leurs rencontres avec L; si la droite λ est extérieure au cercle, les points doubles sont imaginaires.

1125. *Construire un faisceau involutif, connaissant deux couples* (Oa et Oa'), (Ob et Ob'), *de rayons homologues.*

On tracera (*fig.* 576) un cercle quelconque passant par le point O, et l'on déterminera le point ω de concours des cordes aa', bb', interceptées par les deux angles aOa', bOb'. Cela posé, on obtiendra :

1° Le rayon Oc', homologue d'un rayon donné quelconque Oc, en joignant le point ω au point c où Oc rencontre le cercle, puis le point O au second point c' d'intersection du cercle et de la droite ωc (1119);

2° Les rayons doubles, en joignant le point O aux points de contact des tangentes menées par ω;

3° Le système des deux rayons rectangulaires, en joignant le point O aux extrémités du diamètre qui passe par ω.

1126. *Deux faisceaux involutifs de même sommet étant donnés chacun* *par deux couples* (Oa, Oa'), (Ob, Ob') *et* (Oa_1, Oa'_1), (Ob_1, Ob'_1) *de rayons homologues, construire les rayons conjugués communs aux deux faisceaux.*

On déterminera, comme ci-dessus, les points ω et ω_1 relatifs aux deux faisceaux et à un même cercle passant par O, et l'on joindra au point O les points où le cercle rencontre la droite $\omega\omega_1$.

1127. *Construire une involution de points sur une droite* L, *connaissant deux couples* (α, α'), (β, β'), *de points homologues.*

On joindra aux points α, α', β, β', un point quelconque O, et l'on construira le faisceau involutif déterminé par les deux couples $(O\alpha, O\alpha')$, $(O\beta, O\beta')$. Les rayons de ce faisceau détermineront, par leur rencontre avec la droite L, l'involution demandée. Aux rayons doubles Ot, Ot', répondront les points doubles θ et θ'. Quant au point central φ, il répondra au rayon homologue de celui qui est mené par O, parallèlement à la droite L, attendu que le point central est le conjugué de l'infini.

1128. *Étant donnés sur une droite* L, *deux couples de points* (α, α'), (β, β'), *trouver les deux points* θ *et* θ' *qui divisent harmoniquement les deux segments* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$.

Ces deux points sont (1114) les points doubles de l'involution déterminée par les deux couples (α, α'), (β, β').

1129. *Étant données, sur une droite* L, *deux involutions, chacune par deux couples de points homologues* (a, a'), (b, b') *et* (a_1, a'_1), (b_1, b'_1), *trouver le segment commun aux deux involutions.*

On joindra les points donnés à un point arbitraire O; on aura alors deux faisceaux involutifs de même sommet, dont on déterminera (1126) les rayons conjugués communs; ces rayons intercepteront sur la droite L le segment demandé.

II. — COURBES DU SECOND ORDRE.

GÉNÉRATION ET CLASSIFICATION DES CONIQUES; LEUR IDENTITÉ AVEC LES COURBES DU SECOND ORDRE.

1130. Nous donnerons désormais le nom de *conique* à toute section plane d'un cône quelconque à base circulaire.

On sait que :

Lorsqu'un point mobile décrit un cercle, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de la circonférence, forment deux faisceaux homographiques.

Lorsqu'une droite mobile enveloppe un cercle, elle trace, sur deux tangentes fixes de ce cercle, deux divisions homographiques.

Une conique n'étant que la projection d'un cercle, et l'homographie de deux divisions ou de deux faisceaux se conservant en projection, on voit que

Lorsqu'un point mobile décrit une conique, les droites qui joignent ce point à deux points fixes de cette conique, forment deux faisceaux homographiques.

Lorsqu'une droite mobile enveloppe une conique, elle trace, sur deux tangentes fixes de cette conique, deux divisions homographiques.

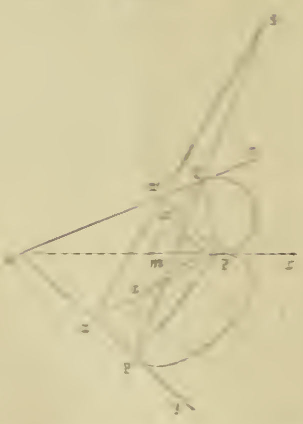
1111. Réciproquement :

La courbe, lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux homographiques (situés dans un même plan), est une section conique.

Soient P et P' les centres des deux faisceaux (*fig.* 581). Observons :

1° Qu'une droite quelconque du

Fig. 581.



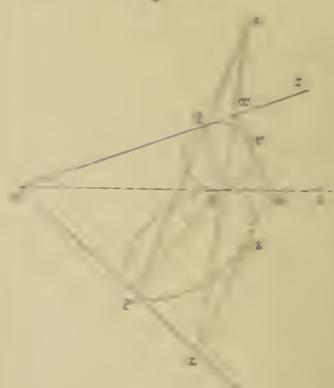
plan rencontre la courbe en deux points (réels ou imaginaires) ; car les deux divisions déterminées sur cette droite par les deux faisceaux sont homographiques ; elles ont donc

La courbe, enveloppe des droites qui joignent des points homologues de deux divisions homographiques (dont les bases sont dans un même plan), est une section conique.

Soient Ox et Ox' les bases des deux divisions (*fig.* 582). Observons :

1° Que, *par un point quelconque*

Fig. 582.



du plan, on peut mener à la courbe deux tangentes (réelles ou imaginaires) ; car les deux faisceaux concentriques qu'on obtient en joignant ce point aux divers points des deux

deux points doubles réels ou imaginaires.

2° Que *la courbe passe par les centres* P *et* P′ *des deux faisceaux;* car la droite PP′, considérée comme un rayon du faisceau P, rencontre en P′ le rayon homologue du faisceau P′. On voit de même que la courbe passe en P.

3° Que *la tangente en* P *est le rayon du faisceau* P, *qui est l'homologue de la droite* P′P *considérée comme rayon du faisceau* P′; car, lorsque le point a de la courbe vient en P, le rayon Pa devient tangent en P et son homologue P′a vient se confondre avec P′P. De même, *la tangente en* P′ *est le rayon du faisceau* P′ *qui est l'homologue de la droite* PP′ *considérée comme rayon du faisceau* P.

Cela posé, « par le point de concours O des tangentes en P et » en P′ à la courbe considérée PaP′, » menons dans l'espace une droite » quelconque Oz; dans l'angle zOP, » inscrivons un cercle tangent à OP » au point P, et désignons par Q le » point où ce cercle touche Oz.

» a étant un point quelconque de » la courbe PaP′, menons P′a qui » coupe OP en m, puis Qm qui rencontre le cercle en a'. Quand le » point a décrit la courbe, les » droites P′a et Qa' engendrent » deux faisceaux homographiques; » mais les faisceaux décrits par Pa' et » Qa' sont homographiques (1130), » et il en est de même par hypo-

divisions sont homographiques; ils ont donc deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

2° Que *la courbe est tangente aux bases* Ox *et* Oy *des deux divisions;* car la droite Ox unit deux points homologues des deux divisions, savoir : le point O considéré comme appartenant à la division Oy et le point homologue de la division Ox. On voit de même que la courbe touche Oy.

3° Que *le point de contact* P *de la tangente* Ox *est le point qui, sur cette droite, répond au point* O *considéré comme appartenant à la division* Oy; car, lorsque la tangente αam se confond avec Ox, le point a devient le point de contact P et son homologue α arrive en O. De même, *le point de contact* P′ *de la tangente* Oy *est l'homologue du point* O *considéré comme appartenant à la division* Ox.

Cela posé, par le point O menons dans l'espace une droite quelconque Oz; inscrivons dans l'angle zOx un cercle tangent à Ox en P, et désignons par Q son contact avec Oz.

a étant un point quelconque de la courbe PaP′, menons la tangente correspondante qui coupe Ox en m et Oy en α; puis, par m, menons la tangente ma' au cercle Qa'P, et désignons par α' le point où cette tangente coupe Oz. Quand le point a décrit la courbe PaP′, les points α et m tracent sur Oy et Ox deux divisions qui, par hypothèse, sont homo-

» thèse des faisceaux engendrés par » Pa et $P'a$. Donc les droites Pa » et Pa' engendrent deux faisceaux » homographiques, et, par suite, les » points α et α', où les rayons mo- » biles Pa et Pa' rencontrent les » droites fixes OP' et OQ, forment » sur ces droites deux divisions ho- » mographiques. Les points P' et Q » sont deux points homologues de » ces deux divisions (m est alors » en O); de plus, le point O est un » point correspondant commun (m » est alors en P). Donc (1103) la » droite $\alpha\alpha'$ coupe la droite fixe QP' » en un point fixe S.

» Par conséquent, l'œil étant placé » en S, la droite $P'm$ sera la pro- » jection de Qm, et $P\alpha$ sera celle » de $P\alpha'$; donc a sera la projection » de a' et, enfin, la courbe propo- » sée PaP' sera la projection du » cercle $Pa'Q$ [1].

graphiques; les divisions tracées sur Ox et Oz par m et α' sont aussi homographiques (1130); donc les points α et α' décrivent sur Oy et Oz deux divisions homographiques. Les points P' et Q sont deux points homologues de ces deux divisions (m est alors en O); de plus, le point O est un point correspondant commun (m est alors en P). Donc, la droite mobile $\alpha\alpha'$ coupe (1103) la droite fixe QP' en un point fixe S.

Par conséquent, l'œil étant placé en S, la droite αm sera la projection de $\alpha' m$, et, comme la première enveloppe la courbe PaP' et que la seconde enveloppe le cercle $Qa'P$, on voit que la courbe PaP' est la projection du cercle $Pa'Q$.

1132. Les principales propriétés des coniques résultent aisément de ce double mode de génération. Ces deux générations, l'une par point, l'autre par enveloppe, étant *corrélatives*, lorsque, en partant de l'une d'elles, on aura démontré un théorème, il suffira, pour démontrer le théorème corrélatif, de partir de l'autre mode de génération et de faire des raisonnements corrélatifs des premiers.

Cinq points déterminent une conique ; car, après avoir pris deux de ces points pour centres des deux faisceaux générateurs, il suffit de joindre chacun d'eux aux trois autres points pour avoir trois couples de rayons homologues.

Cinq tangentes déterminent une conique; car, en considérant deux de ces tangentes comme fixes, les trois autres traceront sur elles trois couples de points homologues des deux divisions homographiques qui déterminent la conique.

Il suit de là que *la projection* C' *d'une conique* C *sur un plan quelconque* P *ne passant pas par le centre de projection est encore une conique*. En effet, la courbe C' est le lieu des intersections des rayons

[1] Eugène Rouché, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1er juillet 1865.

homologues de deux faisceaux homographiques, qui sont les projections des deux faisceaux générateurs de la conique C. La proposition résulte encore de ce que la courbe C′ est l'enveloppe des droites joignant les points correspondants de deux divisions homographiques, qui sont les projections des deux divisions qui définissent la conique C comme enveloppe.

1133. *Les deux faisceaux homographiques qui déterminent la conique ont deux couples de rayons parallèles* (réels ou imaginaires); car, si l'on transporte l'un des faisceaux parallèlement à lui-même, de façon que son centre coïncide avec le centre de l'autre faisceau, on a deux faisceaux homographiques concentriques qui ont (1109) deux rayons doubles (réels ou imaginaires).

Si les deux couples de rayons parallèles sont imaginaires, la courbe n'a aucun point à l'infini; elle est fermée, et nous lui donnerons le nom d'*ellipse*, en nous réservant de démontrer plus tard son identité avec l'ellipse définie au n° 973.

Si les deux couples de rayons parallèles sont réels, la courbe a deux points à l'infini; nous lui donnerons le nom d'*hyperbole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec l'hyperbole définie au n° 999.

Enfin, si les deux couples de rayons parallèles coïncident, la courbe a deux points à l'infini confondus en un seul, et, par suite, elle est *tangente à la droite de l'infini;* nous lui donnerons le nom de *parabole*, et nous démontrerons plus tard son identité avec la parabole définie au n° 1027.

Tels sont les trois *genres* de coniques. Comme *variétés* de ces courbes, on peut avoir :

1° *Deux droites* (réelles, coïncidentes ou imaginaires), lorsque les deux faisceaux sont concentriques (1109), ou lorsque la droite qui unit leurs centres est un rayon homologue commun (1108);

2° *Deux points* (réels, coïncidents ou imaginaires), lorsque les deux divisions ont la même base (1104), ou lorsque le point d'intersection des deux bases est un point homologue commun (1103).

1134. On dit qu'une courbe est *algébrique* ou *transcendante* suivant que son équation en coordonnées rectilignes x et y est algébrique ou transcendante. On appelle *ordre* d'une courbe algébrique le degré en x et y de son équation préalablement rendue rationnelle et entière par rapport à ces variables. Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut montrer que le degré de l'équation est indépendant de la position de la courbe par rapport aux axes de coordonnées. C'est ce que nous allons établir.

Considérons une droite située d'une manière quelconque par rapport aux axes coordonnés ox et oy. Soient M, M′, M″, ..., divers points de cette droite, P, P′ P″, ..., les extrémités de leurs abscisses, et Q, Q′, Q″, ..., les extrémités de leurs ordonnées comptées sur oy. Les deux divisions $PP'P''$,..., $QQ'Q''$,..., sont homographiques et semblables, car chacune d'elles est évidemment semblable (1102) à la division $MM'M''$,...; il y a donc entre $x = oP$ et $y = oQ$ une relation homographique privée de termes en xy, c'est-à-dire que les coordonnées d'un point quelconque M de la droite sont liées constamment par une équation du premier degré.

L'équation d'une ligne droite étant du premier degré, quelle que soit la situation de cette droite par rapport aux axes coordonnés, il faut nécessairement que, si x et y sont les coordonnées d'un point par rapport à certains axes yox, et x' et y' les coordonnées du même point par rapport à d'autres axes $y'ox'$, x et y soient des fonctions du premier degré de x' et y'. Par suite, la substitution de ces valeurs de x et y dans une équation algébrique en x et y n'altérera pas le degré de cette équation. En d'autres termes, l'ordre de la courbe représentée par cette équation sera le même, quels que soient les axes auxquels on la rapporte.

Une courbe algébrique d'ordre n est coupée en n points (*réels ou imaginaires*) *par une droite quelconque.* En effet, en prenant cette droite pour axe des x, l'équation de la courbe sera toujours du degré n d'après ce qui précède; et, si l'on fait $y = o$, l'équation se réduira à une équation du degré n en x, qui donnera les abscisses des points communs à la courbe et à la droite; or, on sait par l'Algèbre qu'une équation algébrique rationnelle et entière du degré n à n racines réelles ou imaginaire. Ainsi, *l'ordre d'une courbe algébrique exprime le nombre des points suivant lesquels cette courbe est rencontrée par une droite quelconque.*

Les coniques sont donc des courbes du second ordre (1131). Inversement, *toute courbe du second ordre est une conique;* car, l'équation générale du second degré à deux variables x et y ne renfermant que cinq coefficients arbitraires, on voit que cinq points déterminent une courbe du second ordre; mais, par ces cinq points, on peut faire passer une conique et une seule (1132); et, comme cette conique est du second ordre, elle ne diffère pas de la courbe proposée.

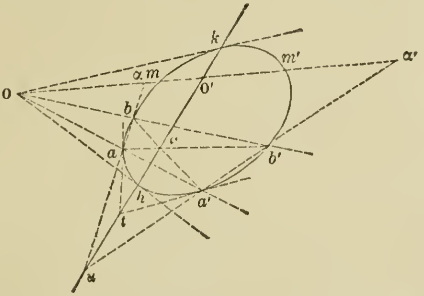
1135. Les théorèmes de Pascal (328) et de Desargues (1121), les propositions corrélatives ainsi que leurs corollaires sont applicables aux coniques; les démonstrations données aux n^os 328, 329, 1121, 1122, subsistent sans modification.

Le théorème de Desargues a été généralisé par Sturm (*Annales de Gergonne*, t. XVII). Considérons une suite de coniques circonscrites à un même quadrilatère : soient aa', bb', cc', ..., les segments que ces coniques interceptent sur une transversale quelconque L, et pp', qq', les segments de cette même droite compris entre les deux couples de côtés opposés du quadrilatère. Les deux couples de points (p, p'), (q, q') déterminent sur la droite L une involution à laquelle appartient, en vertu du théorème de Desargues, chacun des couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), ...; donc ces derniers couples de points forment une involution, et l'on a ce théorème : *Les coniques qui passent par quatre points fixes déterminent sur une transversale quelconque une série de points en involution.* On démontrerait pareillement le théorème corrélatif : *Les tangentes menées d'un même point aux coniques tangentes à quatre droites fixes forment un faisceau en involution.*

PÔLE ET POLAIRE DANS LES CONIQUES.

1136. *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène une sécante qui rencontre la courbe en deux points m et m' (réels ou imaginaires), et si l'on détermine le conjugué harmonique* O' *du point* O *par rapport au segment mm', le lieu du point* O', *lorsque la sécante tourne autour du point* O, *est une ligne droite* (*fig.* 583).

Fig. 583.



En effet, menons deux sécantes fixes Oaa', Obb, et désignons par α et α' les points où la transversale Omm' coupe les côtés opposés ab et $a'b'$ du quadrilatère inscrit $abb'a'$. D'après le théorème de Desargues (1121), le point O est un point double de l'involution déterminée par les deux couples (m, m'), (α, α'); or, par hypothèse, O' est le conjugué harmonique de O par rapport au segment mm'; c'est donc l'autre point double, et, par suite, il est aussi le conjugué harmonique de O par rapport au segment $\alpha\alpha'$; donc, quand la transversale Omm' tourne autour de O, le point O' décrit la polaire du point O par rapport à l'angle bub' formé par les droites fixes ab et $a'b'$.

Le point O et la droite uO' sont dits *pôle* et *polaire* par rapport à la conique.

En observant que la polaire de O par rapport à l'angle bub' renferme (337) le point d'intersection des droites ab' et ba', on voit, par la démonstration même qui précède, que : *Si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène deux sécantes* Oaa', Obb', *et si l'on prend les points de rencontre u et v des droites qui joignent deux à deux les extrémités des cordes aa' et bb', le lieu des points u et v, lorsqu'on fait varier les sécantes* Oaa', Obb', *est la polaire du point* O *par rapport à la conique.*

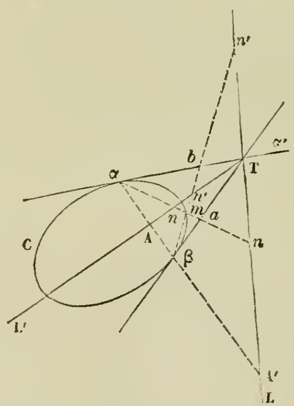
Quand les droites Oaa', Obb', se confondent, les cordes ab, $a'b'$, sont les tangentes en a et a'; donc, *si par un point* O *pris dans le plan d'une conique on mène une sécante* Oaa' *et les tangentes* at, $a't$, *aux points* a *et* a' *où elle rencontre la conique, le lieu du point de concours* t *de ces tangentes, lorsque la transversale tourne autour de* O, *est la polaire de ce point* O.

La polaire est la corde de contact des tangentes issues du pôle; car, au point de contact k d'une tangente issue du pôle, les trois points m, m', O', sont réunis. Par suite, *la polaire d'un point de la conique est la tangente en ce point,* et, inversement, *le pôle d'une tangente est son point de contact.*

1137. *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite,* et, inversement, *les pôles de toutes les droites qui passent par un point sont situés sur la polaire de ce point.*

En effet, soient (*fig.* 584) un point A et une droite L qui sont pôle et

Fig. 584.



polaire par rapport à une conique C. A' étant un point quelconque de L, la droite AA' coupe la conique en deux points α et β (réels ou imaginaires), et A et A' sont conjugués harmoniques par rapport à $\alpha\beta$; donc le point A appartient à la polaire L' de A'. Ainsi la polaire d'un point quelconque A' de L passe par A, et, inversement, le pôle A d'une droite quelconque L passant par A' est sur la polaire L' du point A'.

Il résulte de là que *toute droite a pour pôle l'intersection des polaires de deux de ses points,* et que *tout point a pour polaire la droite qui joint les pôles de deux droites issues de ce point.*

1138. La polaire d'un point O coupe la conique en deux points réels ou imaginaires, qui sont les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires issues du point O.

Lorsque la polaire du point O coupe la courbe en deux points réels, de ce point O on peut mener à la conique deux tangentes réelles, et le point O est dit *extérieur* à la conique.

Lorsque la polaire du point O rencontre la courbe en deux points imaginaires, les deux tangentes issues du point O sont imaginaires, et le point O est dit *intérieur* à la courbe.

La région intérieure et la région extérieure ont pour ligne de démarcation la conique elle-même qui est le lieu des points dont les polaires touchent la courbe, c'est-à-dire ont chacune avec la courbe deux points communs réels et coïncidents.

Considérons une conique C et un point *extérieur* T (*fig.* 584). La polaire de ce point rencontre la courbe en deux points réels α et β, et les droites $T\alpha$, $T\beta$, sont les tangentes réelles issues du point T. Nous donnerons à l'angle $\alpha T\beta$ formé par les directions $T\alpha$ et $T\beta$ le nom d'*angle des tangentes,* et nous appellerons l'angle $\beta T\alpha'$ formé par la direction $T\beta$ et par la direction $T\alpha'$ opposée à $T\alpha$ *l'angle supplémentaire des tangentes.* Cela posé, prenons les points α et β pour centres des deux faisceaux générateurs de la conique, et considérons une droite quelconque TL ou TL′ issue du point T. *Les deux faisceaux traceront sur cette droite deux divisions homographiques en involution;* car le point T, considéré successivement comme appartenant à l'une ou à l'autre de ces divisions, a toujours pour homologue le même point A (ou A′), où la polaire $\alpha\beta$ de T rencontre la transversale TL′ (ou TL). Les points doubles, réels ou imaginaires de cette involution, seront les points réels ou imaginaires communs à la transversale et à la conique. Or il est aisé de voir que ces points sont réels tant que la transversale est, comme TL′, située dans l'angle $\alpha T\beta$ des tangentes, et imaginaires lorsque la tranversale est, comme TL, placée dans l'angle $\beta T\alpha'$ supplémentaire des tangentes. En effet, dans le premier cas, le segment TA et le segment nn' formé par deux points homologues de l'involution correspondant à un point quelconque m de la courbe n'empiètent pas l'un sur l'autre et, par suite, les points doubles de l'involution sont réels; mais, si TL′ tourne autour de T de manière à venir sur TL dans l'angle supplémentaire, les points n et n' glissent sur les droites fixes αa, βb, se croisent en β, et sont ensuite de part et d'autre du point T; les segments nn' et TA′ empiétant l'un sur l'autre, l'involution a ses points doubles imaginaires. Ainsi *la courbe est située tout entière dans l'angle* $\alpha T\beta$ *de tangentes issues d'un point extérieur quelconque* T (et dans son opposé par le sommet).

1139. Les propriétés (352, 353) des quadrilateres inscrits et circonscrits, ainsi que leurs démonstrations, s'appliquent aux coniques.

Il en est de même du théorème démontré au n° 1119. Dans cette proposition et dans les tracés (1125) qui en dérivent, on peut substituer au cercle une conique. Il en résulte un théorème que nous n'avons pas énoncé alors, parce qu'il était évident pour le cercle, mais qui est une propriété importante des coniques : *Si autour d'un point d'une conique, comme sommet, on fait tourner un angle droit, la corde variable que ses côtés interceptent dans la conique passe par un point fixe,* car les deux côtés de l'angle droit décrivent un faisceau involutif. Il est évident que le point fixe est situé sur la normale au point considéré, puisque, quand l'un des côtés de l'angle droit devient tangent, la corde interceptée devient normale. Cette proposition, connue sous le nom de *Théorème de Frégier,* fournit donc un moyen simple *pour construire avec l'équerre la normale en un point donné d'une conique.*

Le théorème (1119) étendu aux coniques donne une solution du problème suivant : *Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent respectivement par des points donnés* A, B, C, ..., M. Si un sommet a était connu, on tracerait immédiatement le polygone; il suffirait de mener la droite Aa, de joindre au point B le second point b d'intersection de Aa et de la conique, de joindre au point C le second point c d'intersection de la droite Bb et de la conique, et ainsi de suite; la dernière droite Mm couperait pour la seconde fois la conique précisément au point a. Cela posé, prenons arbitrairement un premier point de départ a_1 sur la conique, joignons-le au point A, et opérons comme ci-dessus; nous obtiendrons une ligne brisée inscrite $a_1 b_1 c_1 \ldots m_1 \alpha_1$, mais qui ne se fermera pas, c'est-à-dire telle que la dernière droite Mm_1 rencontrera pour la seconde fois la conique en un point α_1 différent de a_1. Construisons deux autres lignes brisées analogues $a_2 b_2 \ldots \alpha_2$, $a_3 b_3 \ldots \alpha_3$, et soit S un point fixe pris à volonté sur la conique. D'après le théorème du n° 1119, le faisceau (S.$aa_1a_2a_3$) est homographique du faisceau (S.$bb_1b_2b_3$), puisque les cordes $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3$, passent par le même point A; de même, le faisceau (S.$bb_1b_2b_3$) est homographique du suivant (S.$cc_1c_2c_3$), et ainsi de suite; donc le premier et le dernier faisceau (S.$aa_1a_2a_3$), (S.$a\alpha_1\alpha_2\alpha_3$), sont homographiques, et Sa est un rayon double de ces deux faisceaux. On voit par là qu'il suffira de construire (1126) les rayons doubles des deux faisceaux homographiques déterminés par les trois couples (Sa_1, Sα_1) (Sa_2, Sα_2) (Sa_3, Sα_3); chacun de ces rayons doubles coupera la conique en un point qui pourra être pris pour le sommet a; il y a donc deux solutions.

Le problème corrélatif : *Circonscrire à une conique un polygone dont les sommets soient situés respectivement sur des droites données,* se résoudrait d'une manière analogue en s'appuyant sur le théorème corrélatif de la proposition (1119).

Quand des angles circonscrits à une conique ont leurs sommets en ligne droite, les segments qu'ils interceptent sur une tangente quelconque à la courbe forment une involution; ce théorème et sa réciproque se démontrent par des raisonnements corrélatifs de ceux faits au n° 1119; le lecteur les rétablira sans peine et pourra en déduire des tracés graphiques corrélatifs de ceux exposés aux nos 1125 et suivants.

1140. Deux points A et A′ (*fig.* 584) sont dits *conjugués* par rapport à une conique lorsque la polaire de l'un passe par l'autre. Ces points sont *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points (réels ou imaginaires) α et β suivant lesquels la droite AA′ qui les joint rencontre la conique. Lorsque les points α et β sont réels, l'un des points A et A′ est intérieur et l'autre extérieur à la courbe.

Plusieurs couples de points conjugués sur une même droite forment une involution dont les points doubles sont les points où la droite coupe la conique (1114). Quand ces points doubles sont imaginaires, il existe de chaque côté de la droite un point d'où l'on voit sous un angle droit chaque couple de points conjugués.

Deux droites L et L′ sont dites *conjuguées* par rapport à une conique lorsque le pôle de l'une est situé sur l'autre. Ces deux droites sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux deux tangentes réelles ou imaginaires issues de leur point d'intersection; l'une au moins des droites conjuguées rencontre toujours la courbe.

Plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point forment un faisceau en involution dont les rayons doubles sont les tangentes (réelles ou imaginaires) issues de ce point. Donc (1119), *par un point quelconque du plan d'une conique passe toujours un couple de droites conjuguées rectangulaires;* et il n'en passe en général qu'un seul, à moins que tous les couples de droites conjuguées passant par ce point ne soient rectangulaires, ce qui a lieu pour certains points remarquables dont nous parlerons plus tard.

Les deux propositions qui précèdent fournissent des solutions simples des deux problèmes suivants :

Trouver les points d'intersection d'une conique et d'une droite de son plan.

On prend deux points a et b sur la droite; on détermine leurs polaires et l'on prend les points a' et b' où ces polaires coupent la droite; les points cherchés sont les

Mener les tangentes à une conique par un point de son plan.

On mène deux droites A et B par le point; on cherche leurs pôles, puis, en les joignant au point donné, on obtient deux nouvelles droites A′ et B′. Les tangentes cherchées points doubles (réels ou imaginaires) de l'involution déterminée par les deux couples (a, a'), (b, b').

sont les rayons doubles (réels ou imaginaires) du faisceau involutif déterminé par les deux couples (A, A'), (B, B').

On dit qu'un triangle est *autopolaire* ou *conjugué* par rapport à une conique lorsque chaque sommet est le pôle du côté opposé.

Il est évident que, dans le plan d'une conique, il existe une infinité de triangles autopolaires : il suffit de prendre pour les deux premiers sommets deux points conjugués quelconques a et b par rapport à la conique et pour troisième sommet c le pôle de ab; en effet, la polaire de a devant passer par b qui est conjugué de a et aussi par c qui est le pôle de ab sera la droite bc, et l'on verrait de même que la polaire de b est ac.

Dans tout triangle autopolaire abc, deux sommets quelconques sont conjugués aussi bien que deux côtés quelconques. *L'un des sommets est intérieur à la conique, et les deux autres sont extérieurs;* car, des deux points conjugués a et b, l'un au moins, a par exemple, est extérieur; sa polaire bc coupe donc la courbe et, par suite, les points conjugués b et c sont l'un intérieur, l'autre extérieur.

1141. *Les polaires* OA, OB, OC, OD, *de quatre points a, b, c, d, situés sur une même droite* L, *forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.*

En effet, soient a', b', c', d', les points où la droite D rencontre le faisceau (O, ABCD). Comme le centre O du faisceau est le pôle de la droite L (1137), les points a et a', b et b', c et c', d et d', sont conjugués; ils forment donc une involution, et, par suite, le rapport anharmonique ($abcd$) est égal au rapport anharmonique ($a'b'c'd'$), qui n'est autre que le rapport anharmonique du faisceau (O, ABCD).

DIAMÈTRES ET CENTRE.

1142. Les deux points de rencontre α et β d'une conique et d'une droite sont réels ou imaginaires, mais le point milieu du segment $\alpha\beta$ est toujours réel; c'est le conjugué harmonique par rapport à $\alpha\beta$ du point situé à l'infini sur la droite considérée (1114). Il résulte de là que *le lieu des milieux des cordes d'une conique parallèles à une direction donnée est une ligne droite;* c'est la polaire du point à l'infini commun à toutes les cordes. Cette droite, qui passe évidemment par les points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée, a reçu le nom de *diamètre*.

A chaque direction des cordes répond un diamètre. Tous les diamètres passent par un point unique, pôle de la droite de l'infini (1137), et qu'on nomme *centre* de la conique.

La polaire du centre étant la droite de l'infini, les tangentes réelles ou imaginaires issues du centre ont leurs points de contact à l'infini; on leur donne le nom d'*asymptotes*.

Quand un angle est circonscrit à une conique, la droite qui joint le sommet au milieu de la corde de contact est un diamètre; car c'est la polaire du point à l'infini situé sur cette corde.

1143. On dit que deux *diamètres* sont *conjugués* lorsque le pôle de l'un est situé sur l'autre. Le pôle d'un diamètre étant à l'infini sur la direction des cordes correspondantes, on voit que, *si deux diamètres sont conjugués, chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

La polaire L *d'un point p est parallèle au diamètre conjugué* Ob *de*

Fig. 585.

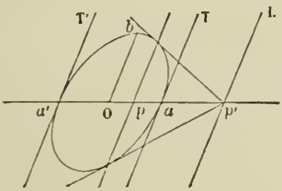
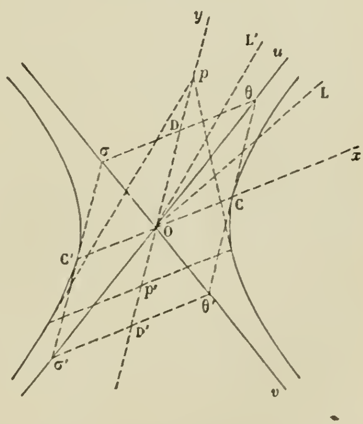


Fig. 586.



celui qui passe par ce point p (*fig.* 585); car ce diamètre doit passer par le pôle du diamètre Oa et ce pôle est à l'infini sur Ob.

En particulier, *si le diamètre aOa' rencontre la courbe, les tangentes* T *et* T' *aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à son conjugué* Ob.

1144. *Plusieurs couples de diamètres conjugués forment un faisceau en involution* (1140); les axes de symétrie de la courbe forment le couple de rayons homologues rectangulaires.

Dans l'ellipse (*fig.* 585), le sommet du faisceau, c'est-à-dire le centre de la courbe étant intérieur, il n'y a pas de rayons doubles; un couple quelconque de diamètres conjugués est alors séparé par tout autre couple. D'ailleurs tout diamètre coupe la courbe en deux points.

Dans l'hyperbole (*fig.* 586), le centre étant extérieur, le faisceau a pour rayons doubles les tangentes issues de ce point, c'est-à-dire les deux asymptotes. De là résultent diverses conséquences :

1° Le diamètre conjugué d'une asymptote est cette asymptote elle-même.

2° Deux diamètres conjugués quelconques OL et OL' divisent harmoniquement l'angle uOv des asymptotes.

3° De deux couples de diamètres conjugués (Ox, Oy) (OL, OL'), l'un est toujours compris dans l'autre.

4° De deux diamètres conjugués Ox et Oy, l'un rencontre la courbe, l'autre ne la rencontre pas.

5° *La portion* $\theta\theta'$ *d'une tangente quelconque comprise entre les asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact* C; car $\theta\theta'$ est parallèle au diamètre conjugué Oy de OC, c'est-à-dire au rayon Oy du faisceau harmonique (Oy, Ou, Ox, Ov) (*fig.* 586).

A cause de la symétrie par rapport au centre, la portion $\sigma\sigma'$ de la tangente en C' comprise entre les asymptotes est égale et parallèle à $\theta\theta'$ et la figure $\theta\sigma\sigma'\theta'$ est un parallélogramme. Par analogie avec ce qui a été dit pour l'axe non transverse (1017), on donne à la partie DD' du diamètre non transverse Oy, qui est comprise dans le parallélogramme $\theta\sigma\sigma'\theta'$, le non de *longueur de ce diamètre;* mais ce n'est là qu'une dénomination introduite pour faciliter le langage, et il faut bien se garder de croire que les points D et D', quoique portant le nom d'*extrémités du diamètre non transverse* Oy, appartiennent à la courbe; il n'y a pas de points de la courbe sur $y'oy$.

1145. La polaire d'un point quelconque p du plan d'une ellipse ou d'une hyperbole rencontre le diamètre passant par le pôle p en un point p' qui est conjugué de p par rapport à la conique (1143). Les couples de points tels que p et p' (*fig.* 585 et 586) forment sur ce diamètre une involution dont le point central est le centre O de la conique, puisque le conjugué de O est à l'infini (1112). Si ce diamètre est transverse (ellipse ou hyperbole), ses extrémités sont les points doubles de l'involution, et l'on a, en appelant a' la demi-longueur de ce diamètre,

$$(1) \qquad Op.Op' = a'^2.$$

Si le diamètre est non transverse (hyperbole), il n'y a pas de points doubles; mais alors les points D et D', que nous sommes convenus d'appeler les extrémités de ce diamètre, sont évidemment conjugués, car le pôle de Dθ est sur la polaire de θ, c'est-à-dire sur la droite CD' qui, étant parallèle à l'asymptote, est la corde de contact des tangentes θu et θC; on a dans ce cas

$$(2) \qquad Op.Op' = -b'^2,$$

b' étant la demi-longueur OD du diamètre non transverse.

1146. On nomme *cordes supplémentaires* deux cordes qui, partant d'un même point m de la conique (*fig.* 587), aboutissent aux extrémités d'un même diamètre AA'. *Deux cordes supplémentaires* Am, A'm, *sont parallèles à un système de diamètres conjugués.* En effet, soient OC et OD deux diamètres respectivement parallèles à A'm et à Am. OC, passant par le milieu O de AA', passe par le milieu h de Am; il divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à OD, et par suite OC et OD sont conjugués. Inversement, *deux droites* Am *et* A'm *menées par les extrémités d'un diamètre* AA', *parallèlement à deux diamètres conjugués quelconques* OD *et* OC, *se coupent sur la conique.* Car désignons par μ le point où la corde Am parallèle à OD coupe la conique, et menons μA'; les cordes supplémentaires Aμ, A'μ, sont parallèles à deux diamètres conjugués, et, comme Aμ est parallèle à OD, A'μ doit être parallèle à OC; elle ne diffère donc pas de A'm et les points m et μ se confondent.

Cela posé, considérons séparément l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

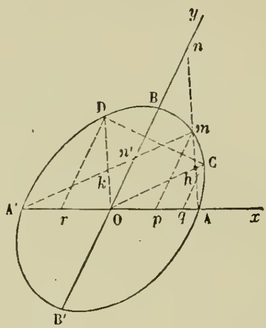
1147. L'*ellipse* n'ayant aucun point à l'infini, la droite de l'infini est extérieure à la courbe, et son pôle O, c'est-à-dire le centre de l'ellipse, est à l'intérieur de la courbe. Tous les diamètres rencontrant la courbe en deux points réels sont limités; et, comme les tangentes issues du centre sont imaginaires, le faisceau en involution formé par les divers couples de diamètres conjugués n'a pas de rayons doubles; donc, un couple quelconque (OA, OB) de deux diamètres conjugués est *séparé* par tout autre couple (OC, OD); en d'autres termes, si OC est situé dans l'angle BOA (*fig.* 587), OD est extérieur à cet angle.

Le diamètre AA' étant la polaire du point à l'infini sur le diamètre conjugué OB, les cordes supplémentaires Am et Am' tracent sur OB, quand m se déplace sur la courbe, une involution dont B est un point double (1133). On a donc, en appelant n et n' les points où OB rencontre Am et Am', la relation

$$(1) \qquad On.On' = \overline{OB}^2.$$

Prenons pour axe des x le demi-diamètre OA, dont nous désignerons la longueur par a', et pour axe des y le demi-diamètre OB, dont nous désignerons la longueur par b' : y et x étant les coordonnées mp et Op d'un point quelconque m de la conique, on a, en considérant d'abord les

Fig. 587.



triangles semblables nOA et mpA, puis les triangles semblables n'OA et mpA',

$$\frac{y}{a'-x} = \frac{On}{a'}, \quad \frac{y}{a'+x} = \frac{On'}{a'};$$

en multipliant membre à membre et en ayant égard à la relation (1), on obtient pour l'équation de l'ellipse

$$(2) \qquad \frac{y^2}{a'^2 - x^2} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Si l'on désigne par x', y', et par x'', y'' les coordonnées des extrémités C et D des diamètres OC et OD parallèles aux cordes A'm et Am, on a, en considérant d'abord les triangles semblables OCq et A'n'O, puis les triangles semblables ODr, AnO,

$$\frac{y'}{x'} = \frac{On'}{a'}, \quad \frac{y''}{-x''} = \frac{On}{a'};$$

en multipliant membre à membre et en ayant égard à la relation (1), on trouve

$$(3) \qquad \frac{y'}{x'}\frac{y''}{x''} = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

Le rapport $\frac{y'}{x'}$ reçoit le nom de *coefficient angulaire* du diamètre OC, de même $\frac{y''}{x''}$ est le coefficient angulaire du diamètre OD.

Lorsqu'on prend pour axes de coordonnées les axes mêmes de la courbe, on a, en désignant par a le demi grand axe dirigé suivant Ox et par b le demi petit axe dirigé suivant Oy,

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(5) \qquad \frac{y'}{x'}\frac{y''}{x''} = -\frac{b^2}{a^2};$$

les coordonnées étant alors rectangulaires, le coefficient angulaire $\frac{y'}{x'}$ est égal à tang COA, et $\frac{y''}{x''}$ est égal à tang DOA.

Il est facile d'exprimer les coordonnées x'', y'' de l'extrémité D d'un diamètre OD en fonction des coordonnées x', y', de l'extrémité C de son conjugué OC. En effet, le point C étant sur la courbe, ses coordonnées x' et y' satisfont à l'équation (4); on peut donc poser

$$(6) \qquad x' = a\cos\varphi', \quad y' = b\sin\varphi',$$

et de même

$$(7) \qquad x'' = a\cos\varphi'', \quad y'' = b\sin\varphi''.$$

La relation (5) devient alors

$$\cos(\varphi'' - \varphi') = 0, \quad \text{d'où} \quad \varphi'' = \frac{\pi}{2} + \varphi'$$

et, par suite,

$$(8) \qquad x'' = -a\sin\varphi' = -\frac{a}{b}y', \quad y'' = b\cos\varphi' = \frac{b}{a}x';$$

pour avoir les coordonnées de l'autre extrémité D' du diamètre OD, il suffirait de changer les signes.

Les relations (6) et (8) donnent

$$x'^2 + x''^2 = a^2, \quad y'^2 + y''^2 = b^2;$$

donc *la somme des carrés des projections orthogonales des deux demi-diamètres conjugués* OC *et* OD *sur chaque axe est constante.*

En ajoutant les deux égalités précédentes, on a

$$(x'^2 + y'^2) + (x''^2 + y''^2) = a^2 + b^2 \quad \text{ou} \quad \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = a^2 + b^2;$$

donc, *la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Le triangle OCD est la moitié du parallélogramme construit sur les deux demi-diamètres conjugués OC et OD. Il est égal au trapèze CDrq, diminué de la somme des deux triangles rectangles OCq, ODr; son aire a donc pour expression

$$\frac{1}{2}(y' + y'')(x' - x'') - \frac{1}{2}(-x''y'') - \frac{1}{2}x'y' = \frac{1}{2}(x'y'' - x''y')$$

ou $\frac{1}{2}ab$, eu égard aux formules (6) et (8). *Donc, l'aire du parallélogramme construit sur deux demi-diamètres conjugués est constante.*

Les deux derniers théorèmes sont dus à Apollonius.

La proposition précédente peut s'écrire, d'après une expression bien connue de l'aire du triangle,

$$OC \,.\, OD \sin COD = ab.$$

L'angle obtus COD de deux diamètres conjugués est maximum quand son sinus est minimum, c'est-à-dire quand le produit OC.OD ou son carré est maximum; ce qui a lieu pour OC = OD, puisque $\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ est constant. Ainsi, *les diamètres conjugués qui font le plus grand angle sont les diamètres conjugués égaux.* Le carré de leur demi-longueur commune est $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, et l'on a

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = x'^2 + y'^2 = a^2\cos^2\varphi' + b^2\sin^2\varphi'.$$

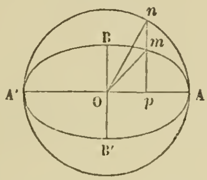
On déduit de là $\sin\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi'$; par suite, les coordonnées x' et y' du point C sont alors proportionnelles à a et b, de sorte que *les diamètres conjugués égaux sont dirigés suivant les diagonales du rectangle construit sur les axes.*

L'angle COD de deux demi-diamètres conjugués est droit lorsque OC coïncide avec le grand axe, puis il augmente jusqu'à ce que OC soit dirigé suivant une diagonale du rectangle des axes; il diminue ensuite et redevient droit lorsque OC reprend la position du petit axe.

Quand les axes a et b de l'ellipse sont égaux entre eux, l'équation (4) se réduit à $x^2 + y^2 = a^2$; tous les points de la courbe sont donc à une distance du centre égale à a; en d'autres termes, l'ellipse dégénère en un cercle.

Pour une même abscisse Op (*fig.* 588), c'est-à-dire pour une même

Fig. 588.



valeur de l'angle φ', l'ordonnée mp de l'ellipse est $b \sin\varphi'$, et celle np du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre est $a \sin\varphi'$; le rapport $\frac{mp}{np}$ est donc constant et égal à $\frac{b}{a}$.

Remarquons enfin que l'angle auxiliaire φ', dont l'emploi est si commode, est précisément l'angle nOp.

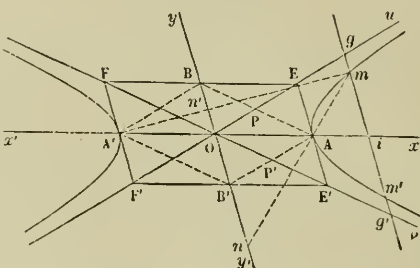
1148. L'*hyperbole* ayant deux points réels sur la droite de l'infini, son centre est extérieur à la courbe (1133); les tangentes Ou, Ov, issues du centre, c'est-à-dire les asymptotes, sont donc réelles; ce sont les rayons doubles du faisceau en involution formé par les deux couples de diamètres conjugués. Il suit de là que *deux diamètres conjugués quelconques divisent harmoniquement l'angle des asymptotes* et qu'aucun couple de diamètres conjugués n'est *séparé* par aucun autre. Enfin, de deux diamètres conjugués, l'un rencontre réellement la courbe et l'autre ne la rencontre pas (1144).

Les portions AE, AE′ (*fig.* 589) *d'une tangente comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales;* car les asymptotes Ou et Ov, le diamètre OAx et son conjugué Oy forment un faisceau harmonique, et la tangente EAE′, étant parallèle au rayon Oy de ce faisceau (1143), est divisée en deux parties égales par les autres rayons. Il suit de là que, si l'on mène AP et AP′ parallèles aux asymptotes, P est le milieu de OE et P′ le milieu de OE′; donc, *lorsqu'on prend les asymptotes pour axes de* *coordonnées, la sous-tangente* OE′ *est double de l'abscisse* OP′ *du point de contact.*

Les portions gm et g′m′ d'une sécante gg′, comprises entre l'hyperbole et ses asymptotes, sont égales. En effet, soit EAE′ la tangente parallèle à gg', et OA le diamètre qui passe au point de contact; ce diamètre divise la corde mm' de l'hyperbole en deux parties im et im' égales entre elles; mais, puisque A est le milieu de EE′, i est évidemment le milieu de la parallèle gg'; donc $ig = ig'$, et, par suite, $ig - im$ ou gm est égal à $ig' - im'$ ou $g'm'$.

Une tangente quelconque EAE′, lorsque son point de contact A se déplace sur la courbe, trace sur les asymptotes (1130) deux divisions ho-

Fig. 589.



mographiques; et, comme le point O correspond évidemment à l'infini dans l'une et l'autre division, le produit OE.OE′ est constant; il en est donc de même de l'aire du triangle OEE′ et, par suite, de l'aire du parallélogramme OPAP′, qui est la moitié de ce triangle. On voit par là que, si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point quelconque A de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, Ou et Ov, on a pour l'équation de cette courbe $xy = \text{const.}$

1149. AOA′ étant un diamètre transverse quelconque de l'hyperbole, menons les tangentes en A et A′ qui coupent les asymptotes, la première en E et E′, l'autre en F et F′. Les triangles OAE, AO′F′, sont égaux, puisqu'ils ont leurs angles respectivement égaux et que OA = OA′; donc AE = A′F′; par suite, les droites EE′, FF′, sont égales, et, comme elles sont parallèles (1143), la figure EFF′E′ est un parallélogramme dont O est le centre. Soient B et B′ les points où le diamètre yOy' conjugué de OA rencontre EF et E′F′; B est le milieu de EF, B′ celui de E′F′, les droites AB′, A′B, sont parallèles à l'asymptote Ou, et les droites AB et A′B′ à l'asymptote Ov.

Cela étant, posons OA $= a'$, OB $= b'$, et prenons les deux demi-diamètres conjugués OAx, OBy, pour axes des coordonnées; m étant un point quelconque de l'hyperbole, les deux cordes supplémentaires Am, $A'm$, déterminent sur le diamètre yOy' deux points n et n' qui engendrent une involution (1147) dont B et B' sont évidemment deux points homologues. On a donc

$$On.On' = OB.OB' = -b'^2.$$

Dès lors, tous les raisonnements faits et les résultats obtenus pour l'ellipse subsistent, en changeant b'^2 en $-b'^2$ ou b' en $b'\sqrt{-1}$. Ainsi :

1° L'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Pour $x = 0$, on a $y = \pm b'\sqrt{-1}$; de là le nom de *longueur du demi-diamètre non transverse* attribué à $OB = b'$.

a et b étant les longueurs des deux axes, on a, en prenant ces droites pour axes de coordonnées rectangulaires,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les triangles semblables giO, EAO, donnent

$$\frac{gi}{Oi} = \frac{EA}{OA} = \frac{b'}{a'} \quad \text{ou} \quad \overline{gi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{Oi}^2 :$$

on a d'ailleurs, par l'équation de l'hyperbole,

$$\overline{mi}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\left(\overline{Oi}^2 - a'^2\right);$$

donc, en retranchant,

$$\overline{gi}^2 - \overline{mi}^2 = b'^2$$

ou

$$b'^2 = (gi + mi)(gi - mi) = gm.gm' = mg.mg' ;$$

ainsi *le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.*

2° La relation entre les coefficients angulaires de deux demi-diamètres conjugués est

$$\frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{b'^2}{a'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y'}{x'}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{b^2}{a^2},$$

suivant qu'on prend pour axes de coordonnées les demi-diamètres conjugués a' et b' ou les demi-axes a et b de la courbe.

3° Les coordonnées de l'extrémité d'un demi-diamètre s'expriment en fonction des coordonnées de l'extrémité du demi-diamètre conjugué par les formules

$$x'' = \pm \frac{a}{b\sqrt{-1}} y', \quad y'' = \mp \frac{b\sqrt{-1}}{a} x',$$

qui sont dues à M. Chasles (*Aperçu historique*, etc.).

4° *La différence des carrés des projections de deux demi-diamètres conjugués sur un axe est constante. La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante, ainsi que l'aire du parallélogramme construit sur ces diamètres.*

La relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ montre que, si a est différent de b, a' est différent de b'; *l'hyperbole n'a* donc *pas de diamètres conjugués égaux.*

Si $a = b$, on a $a' = b'$, c'est-à-dire que *tout diamètre est* alors *égal à son conjugué*, et l'hyperbole est dite *équilatère*. Le parallélogramme EE'F'F construit sur deux diamètres conjugués quelconques est dans ce cas un losange, et les asymptotes qui en sont les diagonales sont alors *rectangulaires*.

Nous avons vu (1148) que l'hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation $xy = K^2$; en supposant que dans la *fig.* 589 les droites OA et OB soient les axes a et b de la courbe, le parallélogramme OAE'B' sera un rectangle, et les coordonnées OP' et P'A du sommet A par rapport aux asymptotes seront l'une et l'autre égales à la moitié de la diagonale $\sqrt{a^2 + b^2}$ de ce rectangle; on a donc

$$K^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

pour une hyperbole quelconque, et, en particulier pour l'hyperbole équilatère, $K^2 = \frac{1}{2}a^2$. On donne souvent à cette constante K^2, que nous venons d'exprimer en fonction des axes, le nom de *puissance de l'hyperbole.*

THÉORÈME.

1150. *Dans l'ellipse et dans l'hyperbole :*

1° *Deux diamètres conjugués quelconques interceptent sur une tangente fixe* ST *deux segments* CT *et* CS *dont le produit est constant.*

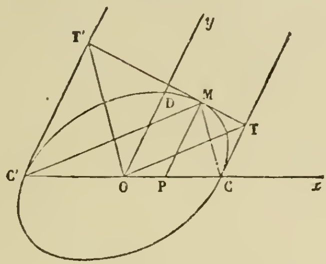
2° *Une tangente* TMT' *détermine sur deux tangentes fixes et parallèles deux segments* CT, C'T' *dont le produit est constant* (*fig.* 590).

En effet :

1° Le faisceau involutif formé par les divers couples de diamètres conjugués détermine, sur la tangente fixe SCT, une involution. Le point de contact C est le point central de cette involution, puisque son homologue est à l'infini, attendu que, lorsque S vient en C, T est sur le diamètre OD conjugué de OC, c'est-à-dire parallèle à CT. Le produit CT.CS est donc constant.

2° Les droites OT et OT′ étant respectivement les diamètres des cordes parallèles à MC et à MC′ sont deux diamètres conjugués, puisque ces cordes sont supplémentaires; d'ailleurs, S désignant le point où T′O

Fig. 590.



prolongée rencontre la tangente CT, les deux segments C′T′ et CS, symétriques par rapport au centre, sont égaux et de signe contraire; on a donc

$$CT.C'T' = -CT.CS = \text{const.}$$

1151. Le faisceau involutif des diamètres conjugués n'a pas de rayons doubles dans l'ellipse, tandis qu'il a pour rayons doubles les asymptotes dans l'hyperbole. Donc *le produit*

$$CT.CS$$

est négatif dans l'ellipse et positif dans l'hyperbole. Quant à sa valeur absolue elle est, pour l'une et l'autre courbe, *égale au carré du demi-diamètre* OD *parallèle à la tangente* SCT. En effet, supposons que CT soit égal à OD; alors, dans l'ellipse (*fig.* 590), DT étant parallèle à OC, C′T′ et son égal SC sont égaux à OD; dans l'hyperbole (*fig.* 586), T est alors en θ sur l'asymptote, en vertu de la définition (1144) de la longueur du demi-diamètre non transverse OD, et comme c'est le point double de l'involution, S est aussi en θ et par suite CT comme CS est égal à OD.

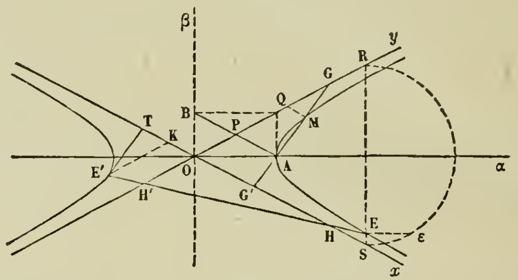
PROBLÈME.

1152. Voici quelques problèmes usuels relatifs à l'ellipse et à l'hyperbole.

1° *Construire une hyperbole connaissant les asymptotes* Ox *et* Oy *et un point* E (*fig.* 591).

En menant par le point donné E une droite quelconque, prenant les points d'intersection H et H' de cette droite avec les asymptotes, puis portant $H'E' = EH$, on aura un nouveau point E' de la courbe (1148). La tangente E'T en ce point s'obtiendra en menant E'K parallèle à Oy, puis en prenant $KT = OK$ (1148). On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de l'hyperbole et les tangentes en ces points.

Fig. 591.



Les axes seront dirigés suivant les bissectrices $O\alpha$ et $O\beta$ des angles des asymptotes. Le point E et par suite la courbe étant ici situés dans l'angle yOx des asymptotes et dans son opposé par le sommet, ce sera sur la bissectrice $O\alpha$ de l'angle yOx que sera l'axe transverse. En menant par E la parallèle à $O\beta$ jusqu'à ses rencontres R et S avec les asymptotes, et construisant la moyenne proportionnelle $E\varepsilon$ entre les segments RE, ES, on aura (1149) la demi-longueur b de l'axe non transverse; on portera cette longueur de O en B, sur $O\beta$; puis, en menant BA parallèle à Ox, on obtiendra sur $O\alpha$ le point A qui donnera la demi-longueur OA de l'axe transverse.

On pourrait, si l'on voulait, commencer par déterminer a en menant par E une parallèle à $O\alpha$.

2° *Construire les axes d'une hyperbole ou d'une ellipse connaissant en grandeur et position un système de diamètres conjugués.*

Pour l'hyperbole, il faut indiquer en outre quel est celui des deux demi-diamètres donnés qui est transverse; l'extrémité de ce demi-diamètre est alors un point donné de la courbe, et, comme les diagonales du parallélogramme construit sur les diamètres conjugués donnés sont les asymptotes, on voit qu'on est ramené au problème précédent.

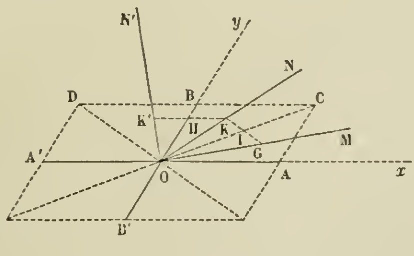
Pour l'ellipse, on déterminera par le procédé du n° 1119 le couple Ox, Oy de rayons homologues rectangulaires dans le faisceau involutif formé d'une part par le couple donné OC et OD de diamètres conjugués et d'autre part par le couple dirigé suivant les diagonales OE et OI du parallélogramme construit sur le premier couple. Puis, pour avoir, par exemple, la longueur de l'axe dirigé suivant Ox, on observera que la projection P de E sur Ox est le pied de la polaire du point T où le côté DE, c'est-à-dire la tangente en E, coupe Ox, en sorte que la longueur cherchée sera la moyenne proportionnelle entre OP et OT.

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer cette construction; nous avons déjà donné (1071) une autre solution du même problème.

3° *Trouver le diamètre conjugué d'un diamètre donné* OM, *connaissant en grandeur et en position un premier couple de diamètres conjugués* AA', BB' (*fig.* 592).

La solution est très-simple pour l'hyperbole. En menant les diago-

Fig. 592.



nales du parallélogramme construit sur les deux diamètres AA' et BB', on a les asymptotes OC et OD. Or, le diamètre cherché ON est le conjugué harmonique du diamètre donné OM par rapport à l'angle COD des asymptotes; on aura donc un point K de ce diamètre ON, en menant une parallèle à OD, et en portant sur cette ligne, à partir du point I où elle coupe OC, un segment IK égal et opposé au segment IG intercepté dans l'angle COM.

Pour l'ellipse, on opère de même. Seulement, après avoir trouvé le point K, on mène par ce point une parallèle à OA, jusqu'à sa rencontre H avec OB, et l'on prolonge KH d'une quantité égale HK'.

OK′ sera le diamètre conjugué de OM. En effet, prenons pour axes coordonnés les droites OA et OB, et soient x et y les coordonnées d'un point quelconque de OM, x_1 et y_1 les coordonnées du point K, x' et y' les coordonnées du point K′. Puisque OK est le conjugué de OM dans l'hyperbole qui a pour diamètres conjugués

$$OA = a'$$

et

$$OB = b',$$

on a la relation

$$\frac{y_1}{x_1}\frac{y}{x} = \frac{b'^2}{a'^2},$$

qui, à cause des égalités évidentes

$$y' = y_1, \quad x' = -x_1,$$

devient

$$\frac{y'}{x'}\frac{y}{x} = -\frac{b'^2}{a'^2};$$

OK′ et OM sont donc conjugués par rapport à l'ellipse ayant OA et OB pour diamètres conjugués.

PROBLÈME.

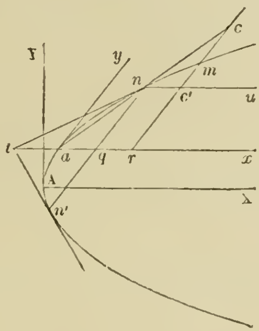
1153. *Construire dans l'ellipse ou dans l'hyperbole un couple de diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné.*

A l'aide d'un cercle C passant par le centre O et conformément aux prescriptions du n° 1119, on construira le point ω relatif au faisceau involutif formé par les divers couples de diamètres conjugués; il suffira pour cela de connaître deux premiers couples, par exemple les deux asymptotes dans l'hyperbole, et dans l'ellipse les axes et les diagonales de leur rectangle. Il restera à mener par ω une sécante détachant dans le cercle une corde pq qui soit vue du point ω sous l'angle donné θ; Op et Oq formeront alors le couple cherché. Or le tracé de la sécante en question revient à inscrire dans C un triangle ayant l'un de ses angles égal à θ, puis à mener par le point ω une tangente à un cercle concentrique au cercle C et tangent au côté du triangle qui est opposé à l'angle θ.

Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer les constructions et de faire la discussion qui est facile et intéressante et qui montre une fois de plus l'utilité de l'involution.

1154. La *parabole* étant tangente à la droite de l'infini, son centre, qui est le pôle ou le point de contact de cette tangente, disparaît à l'infini. Donc, *tous les diamètres* ax, nu, AX, ..., *sont parallèles*, et *cette courbe n'a qu'un axe* AX à distance finie. Le point A, où cet axe rencontre la courbe, est le *sommet* (*fig.* 593) de la parabole.

Fig. 593.



Une tangente mobile détermine sur deux tangentes fixes d'une conique deux divisions homographiques (1130); dans la parabole, ces deux divisions homographiques sont semblables (1102), puisque, la droite de l'infini étant une des positions de la tangente mobile, les points à l'infini dans les deux divisions sont homologues. Donc, *toutes les tangentes à la parabole divisent deux tangentes fixes en parties proportionnelles;* et réciproquement, *si deux droites fixes sont divisées en parties proportionnelles, l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues est une parabole tangente aux deux droites fixes.* Cette propriété est très-utile dans les applications.

Prenons pour axes de coordonnées un diamètre quelconque ax et la tangente ay à son extrémité a; m et n étant deux points quelconques de la parabole, menons les ordonnées mr et nq, la droite an et le diamètre nu qui coupent respectivement mr en c et en c'. On a (1147)

$$\overline{mr}^2 = rc.rc';$$

mais

$$rc' = nq, \quad \text{et} \quad \frac{rc}{ar} = \frac{nq}{aq}.$$

Donc

$$\frac{rc.rc'}{ar} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{mr}^2}{ar} = \frac{\overline{nq}^2}{aq}.$$

En d'autres termes, l'expression $\frac{y^2}{x}$ est constante; en la désignant par $2p$, l'équation de la parabole rapportée aux axes de coordonnées ax et ay est

$$y^2 = 2px.$$

La valeur de p varie avec la position du point a de la courbe, que l'on prend pour origine. Au sommet A, les axes deviennent rectangulaires, et la valeur correspondante de la constante p est ce qu'on appelle le *paramètre* de la parabole.

Soit nt la tangente en n qui coupe ax en t; nq est la polaire du point t (1136); par suite, les quatre points t, a, q, ∞, forment un système harmonique; on a donc $at = -aq$, d'où $tq = 2aq$. Ainsi, *dans la parabole, la sous-tangente* (c'est-à-dire la portion tq du diamètre ax comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la tangente) *est double de l'abscisse du point de contact.*

FOYERS ET DIRECTRICES.

1155. On nomme *foyer* tout point du plan d'une conique autour duquel chaque droite est perpendiculaire à sa conjuguée.

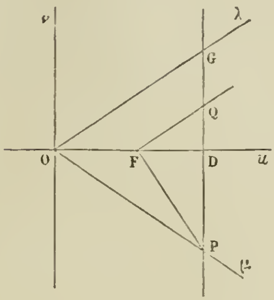
Un foyer ne peut se trouver que sur un axe; car, pour tout autre point du plan, le diamètre qui passe par ce point et la parallèle au conjugué de ce diamètre forment un couple de droites conjuguées non rectangulaires.

Pour prouver qu'un point F d'un axe est un foyer, il suffit de démontrer qu'on peut mener par ce point F un couple de deux droites conjuguées rectangulaires et non parallèles aux axes; car l'axe proposé et la parallèle à l'autre axe menée par le point F formeront un second couple de droites conjuguées rectangulaires, et l'on sait (1119) qu'autour d'un point tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires dès que deux couples le sont.

Cela posé, considérons l'*ellipse*. — Soient O, le centre; Ou et Ov, les directions des deux axes dont nous désignerons les demi-longueurs par α et β; Oλ et Oμ, les directions des diagonales du rectangle construit sur les axes; F, un point quelconque de l'axe Ou, et GDP, la polaire du point F par rapport à l'ellipse (*fig.* 594). Menons FQ parallèle à Oλ. Le pôle de FQ sera sur la polaire GD de F et sur la polaire du point à l'infini de FQ ou de Oλ, c'est-à-dire sur le diamètre Oμ conjugué de Oλ:

ce sera donc le point P commun à GD et à $O\mu$, de sorte que FP sera

Fig. 594.



la conjuguée de FQ. Donc, pour que F soit un foyer, il faut et il suffit que l'angle QFP soit droit, c'est-à-dire qu'on ait

$$\overline{FD}^2 = PD.DQ = DG.DQ.$$

Mais on a

$$\frac{DQ}{FD} = \frac{DG}{OD} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{DG.DQ}{FD.OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

On en déduit, par division,

$$\frac{FD}{OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

d'où

(1) $$\frac{OF}{OD} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}.$$

D'ailleurs, puisque GP est la polaire de F, on a

(2) $$OF.OD = \alpha^2.$$

En multipliant (1) et (2), on obtient

$$\overline{OF}^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad \text{d'où} \quad OF = \pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}.$$

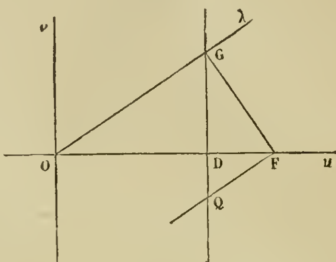
Il y a donc sur Ou deux foyers qui sont réels ou imaginaires, suivant que α est supérieur ou inférieur à β. Ainsi, l'ellipse a deux foyers réels sur le grand axe et deux foyers imaginaires sur le petit axe; et, si l'on désigne par a, b, c, le demi-grand axe, le demi-petit axe et la demi-distance focale OF, on a

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Considérons maintenant l'*hyperbole*. — Soient O le centre; Ou et Ov

les directions des deux axes dont nous désignerons les demi-longueurs (1149) par α et β; $O\lambda$ une asymptote; F un point quelconque de l'axe Ou, et GD la polaire du point F par rapport à l'hyperbole (*fig.* 595). Menons FQ parallèle à $O\lambda$; le pôle de FQ sera sur la polaire GD de F et

Fig. 595.



sur la polaire du point à l'infini de FQ ou de $O\lambda$, c'est-à-dire sur $O\lambda$ puisqu'une asymptote est sa propre conjuguée; ce sera donc le point G commun à $O\lambda$ et à GD, de sorte que FG sera la conjuguée de FQ. Donc, pour que le point F soit un foyer, il faut et il suffit que l'angle GFQ soit droit, c'est-à-dire qu'on ait

$$\overline{DF}^2 = DG.QD.$$

Mais on a

$$\frac{QD}{DF} = \frac{DG}{OD} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$\frac{DF}{OD} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{OF}{OD} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}.$$

D'ailleurs, puisque GD est la polaire de F, on a

$$(2) \qquad OD.OF = \pm \alpha^2,$$

le signe convenable étant + si Ou est l'axe transverse, et − si Ou est l'axe non transverse. En multipliant (1) et (2), on obtient

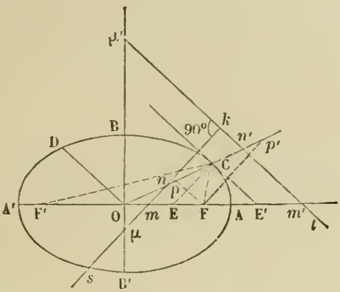
$$\overline{OF}^2 = \pm(\alpha^2 + \beta^2) \quad \text{d'où} \quad OF = \pm\sqrt{\pm(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Ainsi, l'hyperbole a deux foyers réels sur l'axe transverse et deux foyers imaginaires sur l'axe non transverse. En désignant respectivement par a, b, c, le demi-axe transverse, le demi-axe non transverse et la demi-distance focale OF, on a

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

1156. Dans le plan d'une conique à centre, considérons deux droites conjuguées rectangulaires quelconques ks et kt (*fig.* 596).

Fig. 596.



Soient n et n' les points où ces deux droites rencontrent le diamètre OC relatif aux cordes parallèles à kt, m et m' les points où elles coupent l'un des axes de la conique, et enfin F et F′ les foyers situés sur cet axe. En menant par F des parallèles à ks et à kt jusqu'à leurs rencontres p et p' avec le diamètre OC, on a

$$\frac{\mathrm{O}m'}{\mathrm{O}n'} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{O}p}, \quad \frac{\mathrm{O}m}{\mathrm{O}n} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{O}p'},$$

d'où, en multipliant,

$$\frac{\mathrm{O}m \,.\, \mathrm{O}m'}{\mathrm{O}n \,.\, \mathrm{O}n'} = \frac{\overline{\mathrm{OF}}^2}{\mathrm{O}p \,.\, \mathrm{O}p'}.$$

Or les dénominateurs sont égaux l'un et l'autre à $\overline{\mathrm{OC}}^2$, puisque n et n' sont conjugués par rapport à la conique aussi bien que p et p'. Les numérateurs doivent donc être égaux, et l'on a

$$(1) \qquad \mathrm{O}m \,.\, \mathrm{O}m' = c^2.$$

Donc *le segment compris entre les deux foyers situés sur un même axe est divisé harmoniquement par tout couple de droites conjuguées rectangulaires*, ou, en d'autres termes, *les divers couples de droites conjuguées rectangulaires déterminent sur chacun des axes de la conique une involution dont le point central est le centre de la conique, et dont les points doubles sont les foyers réels ou imaginaires appartenant à cet axe.*

1157. Quand nous parlerons désormais des deux foyers d'une conique, il s'agira, à moins d'avertissement contraire, des deux foyers réels.

Les deux droites conjuguées rectangulaires qui passent par un point quelconque du plan d'une conique sont les bissectrices des angles formés par les droites qui unissent ce point aux deux foyers. Car ces quatre droites, divisant harmoniquement l'axe focal, forment un faisceau harmonique, et, comme les deux premières sont rectangulaires, elles sont les bissectrices des angles formés par les deux autres.

En particulier, si le point considéré appartient à la conique, les deux droites conjuguées rectangulaires qui passent par ce point sont la tangente et la normale. Donc, *dans toute conique à centre, la tangente et la normale sont les bissectrices des angles que forment les deux rayons vecteurs menés de ce point aux deux foyers.*

Dans l'ellipse comme dans l'hyperbole, les deux foyers réels sont à l'intérieur de la courbe; cela résulte des formules du n° 1155. Quant au centre, on sait qu'il est intérieur pour l'ellipse et extérieur pour l'hyperbole. — Il suit de là que, si M est un point de la conique, et si F et F′ sont ses foyers, le triangle MFF′ est intérieur à l'ellipse, tandis que pour l'hyperbole il est en partie intérieur et en partie extérieur. Donc, si, partant du point M, on veut, en se déplaçant un peu sur les droites MF et MF′, rester à l'intérieur de la courbe, il faudra se déplacer, pour l'ellipse, dans le sens de MF et de MF′, et, pour l'hyperbole, dans le sens de l'une de ces droites et dans le sens opposé à l'autre.

Comme, dans tous les cas, la tangente en M est extérieure à la courbe, on voit que dans l'ellipse la tangente est en dehors de l'angle FMF′ des deux rayons vecteurs, tandis que dans l'hyperbole la tangente est extérieure à l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre; en d'autres termes, la bissectrice de l'angle FMF′ est dans l'ellipse la normale en M, et dans l'hyperbole la tangente au même point.

1158. La polaire d'un foyer prend le nom de *directrice*.

L'ellipse et l'hyperbole ont donc chacune deux directrices DHD_1, $D'H'D'_1$ (*fig.* 597), qui sont perpendiculaires à l'axe A′OA qui contient les foyers réels; elles sont situées de part et d'autre et à égale distance du centre, extérieurement à la courbe, puisque les foyers réels qui en sont les pôles sont intérieurs (1138). Les points A′, F, A, H, formant un système harmonique, on a

$$\overline{OA}^2 = OF.OH,$$

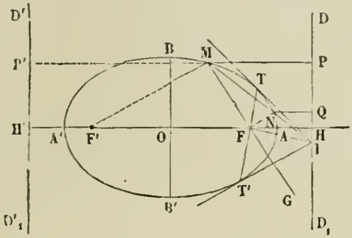
d'où l'on déduit

$$OH = \frac{a^2}{c}$$

pour la distance du centre aux directrices.

De la définition même du foyer et de la directrice, il résulte que *la polaire* TT′ *d'un point quelconque* I *de la directrice* DD_1 *passe par le*

Fig. 597.



foyer F *et est perpendiculaire sur la droite qui joint le point* I *au foyer*. Par suite, *si l'on prolonge une corde quelconque* MN *d'une ellipse ou d'une hyperbole jusqu'à sa rencontre en* I *avec la directrice, la droite* IF *et la polaire* FT *du point* I *sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs* FM *et* FN; car, d'après la définition même de la polaire, le faisceau (FI, FN, FT, FM) est harmonique, et nous venons de voir que les deux rayons FT et FI sont rectangulaires.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le rapport des distances MF *et* MP *d'un point quelconque* M *de la courbe au foyer* F *et à la directrice correspondante* DD_1 *est constant*. Car, si N est un autre point quelconque de la courbe, et I le point où la corde MN rencontre la directrice, la droite FI est bissectrice de l'angle NFG; on a donc

$$\frac{MF}{NF} = \frac{MI}{NI} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{NQ}.$$

Pour trouver la valeur constante du rapport $\frac{MF}{MP}$, il suffit de considérer le point B; sa distance au foyer est égale à a, et sa distance à la directrice est $OH = \frac{a^2}{c}$: le quotient est $\frac{c}{a}$; on le désigne habituellement par e, et on lui donne le nom d'*excentricité*; il est *moindre que un* pour l'ellipse et *plus grand que un* pour l'hyperbole.

1159. *Dans l'ellipse la somme, et dans l'hyperbole la différence des rayons vecteurs* MF *et* MF′, *qui joignent un point quelconque* M *de la courbe aux deux foyers, est constante*.

Car, des relations

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}, \quad \frac{MF'}{MP'} = \frac{c}{a},$$

on déduit

$$(1) \qquad \frac{MF + MF'}{MP + MP'} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \frac{MF - MF'}{MP - MP'} = \frac{c}{a}.$$

Or, dans l'ellipse, $MP + MP' = HH' = 2\frac{a^2}{c}$; donc, en vertu de la première des égalités (1),

$$MF + MF' = 2a.$$

Dans l'hyperbole, $MP - MP' = HH' = 2\frac{a^2}{c}$; donc, en vertu de la seconde des égalités (1),

$$MF - MF' = 2a.$$

On retombe ainsi sur les définitions élémentaires de ces courbes, et l'on peut dès lors regarder comme acquises les propriétés et les constructions établies aux §§ I, II, IV du Livre VIII.

1160. Considérons maintenant la parabole.

Le centre, qui est le point central de l'involution tracée sur l'axe AX (*fig.* 593) par les pieds des divers couples de droites conjuguées rectangulaires, étant à l'infini, l'involution a l'un de ces points doubles à l'infini, et l'autre point double est le *foyer* unique de la parabole. *Il divise en deux parties égales* (1114) *le segment intercepté sur le grand axe* par deux droites conjuguées rectangulaires quelconques, et en particulier *par la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole;* d'où l'on conclut (339) que *la tangente et la normale en un point quelconque de la parabole sont les bissectrices des angles formés par la parallèle à l'axe menée par ce point et le rayon vecteur mené de ce point au foyer.*

La *directrice* ou polaire du foyer est perpendiculaire à l'axe, et extérieure à la courbe, puisque son pôle est intérieur comme doit l'être tout foyer réel (1155). Le foyer et la directrice sont d'ailleurs à égale distance du sommet (1158).

On voit, comme au numéro précédent, que : 1° *la polaire d'un point quelconque de la directrice est perpendiculaire sur la droite qui joint ce point au foyer;* 2° *la droite qui joint le foyer à l'intersection de la directrice et d'une corde quelconque de la parabole est la bissectrice du supplément de l'angle formé par les rayons vecteurs des points où la corde coupe la parabole.*

On en déduit que *le rapport des distances d'un point quelconque de la parabole au foyer et à la directrice est constant;* comme le sommet est équidistant du foyer et de la directrice, la constante est *égale à un;* donc *tout point de la parabole est équidistant du foyer et de la directrice.* On retombe ainsi sur la définition de la parabole donnée au n° 1027, et nous pouvons alors regarder comme acquises toutes les propriétés et toutes les constructions données dans les §§ III et V. En particulier, le *paramètre* p représente la distance du foyer à la directrice; il est aussi égal à la *sous-normale comptée sur l'axe*, c'est-à-dire à la partie de l'axe comprise entre les pieds de l'ordonnée et de la normale. (Il importe de remarquer que, lorsque la parabole est rapportée à un diamètre quelconque et à la tangente correspondante, la sous-tangente est toujours double de l'abscisse, mais la sous-normale n'est plus constante et égale au paramètre; cette dernière propriété n'est vraie que dans le cas où la parabole est rapportée à son axe et à la tangente au sommet.)

1161. Lorsque plusieurs coniques ont les deux mêmes foyers, on dit qu'elles sont *confocales*.

Deux coniques confocales ont le même centre, et leurs axes sont dirigés suivant les mêmes droites; elles ont aussi les mêmes systèmes de droites conjuguées rectangulaires (1155).

Deux ellipses, deux hyperboles, une ellipse et une hyperbole peuvent être confocales; mais une parabole ne peut être confocale que d'une parabole.

Si par un point on mène deux tangentes à une conique et deux tangentes à une conique confocale, les angles des deux premières tangentes et les angles des deux autres ont les deux mêmes bissectrices.

Par un point P *du plan d'une conique, on peut mener deux coniques confocales avec la première;* ce sont une ellipse et une hyperbole si la conique primitive est une ellipse ou une hyperbole; ce sont deux paraboles de sens opposés si la première conique est une parabole. — *Ces deux coniques se coupent orthogonalement*, car leurs tangentes au point P sont les bissectrices des angles que forment les droites menées de ce point P aux deux foyers de la conique primitive.

1162. Les foyers jouissent de propriétés caractéristiques autres que celle qui nous a servi à les définir, et qui méritent d'être rapportées, non-seulement parce qu'elles sont très-utiles dans les recherches géométriques, mais encore parce qu'elles permettent de généraliser l'idée de foyer et d'étendre cette conception aux courbes d'ordre quelconque.

1° Considérons une conique quelconque C, intersection d'un cône de révolution par un plan P et une sphère inscrite dans ce cône. Soient Q le plan du cercle de contact de la sphère et du cône, γ le cercle intersection de la sphère et du plan P, et D la droite commune aux plans P et Q. — D'abord, il est aisé de voir que le cercle γ passe par les points I et I' (réels ou imaginaires) où la droite D rencontre la conique C; en effet, les points I et I' appartiennent d'une part au plan P, et, d'autre part, à la sphère, puisque, faisant partie à la fois du cône et du plan Q, ils sont sur le cercle de contact du cône et de la sphère. — En second lieu, la conique C et le cercle γ se touchent en I et en I'; en effet, la tangente en I à la conique est l'intersection du plan P et du plan tangent au cône; la tangente au cercle γ est l'intersection du plan P et du plan tangent en I à la sphère; or, le point I étant sur le cercle de contact du cône et de la sphère, les deux plans tangents en question coïncident.

En résumé, le cercle γ a un double contact (réel ou imaginaire) avec la conique C, et la droite des contacts est la droite D. — Faisons maintenant varier la sphère inscrite jusqu'à ce qu'elle touche le plan P; le rayon du cercle deviendra nul, ce cercle se réduira à un point qui est (1086) un foyer, et la droite D deviendra la directrice relative à ce foyer. On est ainsi conduit à regarder le *foyer d'une conique comme un cercle de rayon nul doublement tangent à la conique; la corde des contacts est la directrice relative à ce foyer.*

2° On sait (1111) que, si l'on a dans un même plan des angles d'une même grandeur et placés d'une manière quelconque, pourvu qu'ils soient formés dans le même sens de rotation, leurs côtés tracent sur la droite à l'infini deux divisions homographiques dont les points doubles sont, quelle que soit la grandeur commune de ces angles, les points cycliques du plan. Si les angles sont droits, les deux divisions homographiques forment une involution; donc, *les points cycliques d'un plan divisent harmoniquement le segment intercepté sur la droite à l'infini par un angle droit situé d'une manière quelconque dans ce plan.*

Cela posé, considérons plusieurs couples de droites conjuguées issues d'un même point du plan d'une conique; ces divers couples forment (1138) un faisceau involutif dont les rayons doubles sont les tangentes réelles ou imaginaires menées à la conique par le point considéré. Si ce point est un foyer, tous les couples de droites conjuguées sont rectangulaires, et, par suite, d'après l'alinéa précédent, les rayons doubles du faisceau, c'est-à-dire les tangentes imaginaires menées à la conique par le foyer, passent par les points cycliques du plan. Ainsi, on peut considérer *les foyers comme des points tels que les tangentes à la conique menées par ces points passent par les points cycliques du plan.*

Des deux points cycliques on peut mener à la conique deux couples de tangentes, dont l'ensemble forme un quadrilatère imaginaire circonscrit à la courbe; les deux diagonales de ce quadrilatère sont les axes, et ses quatre sommets, dont deux réels et deux imaginaires, sont les foyers. La parabole étant tangente à la droite de l'infini, un foyer réel est à l'infini, les deux foyers imaginaires sont les points cycliques, et il ne reste plus qu'un foyer réel à distance finie.

Il résulte de là : 1° que *deux coniques qui ont* un *foyer commun ont* *deux tangentes communes passant par ce foyer;* ce sont les droites qui vont de ce foyer aux points cycliques du plan; les cordes de contact sont les directrices de l'une et de l'autre conique relatives à ce foyer; 2° que *deux coniques confocales,* c'est-à-dire qui ont deux foyers communs, *sont inscrites dans le même quadrilatère imaginaire.*

Cette notion très-féconde des foyers considérés comme des points tels que les tangentes correspondantes passent par les points cycliques du plan est due au géomètre Plücker (*Journal de Crelle,* t. X), qui a ainsi pu étendre l'idée de foyer aux courbes algébriques d'ordre quelconque : *on appelle foyers d'une courbe plane d'ordre quelconque les points communs aux tangentes menées à la courbe par les points cycliques de son plan.*

1163. Voici quelques formules utiles :

1° Considérons une *ellipse* rapportée à son centre O et à ses axes $OA = a$ et $OB = b$ (*fig.* 598) : M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées OP et MP, ρ et ρ' les deux rayons vecteurs MF et MF', et b' la longueur du demi-diamètre conjugué de OM. Menons la tangente TMT' et la normale MNN', la perpendiculaire MD sur la directrice, et les perpendiculaires OE, FK, F'K', abaissées du centre et des foyers sur la tangente.

On a

$$(1)\qquad \rho = a - ex, \qquad \rho' = a + ex, \qquad b'^2 = a^2 - e^2x^2 = \rho\rho',$$

$$(2)\qquad OT = \frac{a^2}{x}, \qquad OT' = \frac{b^2}{y}, \qquad PM = \frac{a^2 - x^2}{x},$$

$$(3)\qquad ON = \frac{c^2}{a^2}x, \qquad ON' = -\frac{c^2}{b^2}y, \qquad PN = \frac{b^2}{a^2}x,$$

$$(4)\qquad MN = \frac{b}{a}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{bb'}{a}, \qquad MN' = \frac{a}{b}\sqrt{\rho\rho'} = \frac{ab'}{b}, \qquad MN.MN' = b'^2,$$

$$(5)\qquad FK = b\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}} = \frac{bb'}{\rho'}, \qquad F'K' = b\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \frac{bb'}{\rho}, \qquad OE = \frac{ab}{b'}.$$

La première des formules (1) résulte de la relation

$$FM = e.MD = e(OH - OP).$$

La troisième des formules (1) s'obtient en faisant la somme des carrés des valeurs (8) du n° 1147, et en ayant égard à la position du point M sur l'ellipse. — Les formules (2) sont une conséquence de la théorie des pôles et polaires. — La première formule (3) résulte de la théorie des foyers, et la seconde de la similitude des triangles ONN', NPM. — On obtient la première formule (4) en appliquant la formule du n° 238, et la seconde résulte de la similitude des triangles ONN', NPM. — Enfin, les deux premières formules (5) s'obtiennent à l'aide du théorème du n° 995 et de la similitude des triangles FMK, F′MK′, qui donne le rapport de FK à F′K′; la troisième s'en déduit en prenant la demi-somme.

2° En changeant b^2 en $-b^2$, on a des formules analogues pour l'*hyperbole*.

Fig. 598.

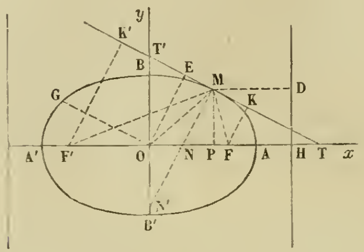
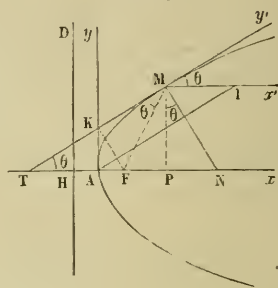


Fig. 599.



3° Considérons une *parabole* rapportée à son axe Ax et à la tangente Ay au sommet (*fig.* 599). M étant un quelconque de ses points, soient x et y ses coordonnées AP et MP, ρ le rayon vecteur MF, p le paramètre $FH = 2AF$, et θ l'inclinaison de la tangente MT sur l'axe. Menons la normale MN, et abaissons la perpendiculaire FK du foyer sur la tangente MT.

On a

$$TP = 2x, \quad PN = p, \quad TN = p + x, \quad \rho = FT = \frac{1}{2}TN = \frac{p}{2} + x.$$

Le triangle rectangle FTK donne ensuite

$$\overline{TK}^2 = TF.TA = \rho x, \quad \overline{KF}^2 = FT.AF = \frac{p}{2}\rho,$$

d'où

$$\overline{MT}^2 = 2\rho x, \quad \overline{MN}^2 = p\rho.$$

Enfin, dans le triangle rectangle TMN, on a

$$\tang\theta = \frac{PN}{PM} = \frac{p}{y}, \quad \sin^2\theta = \frac{\overline{PN}^2}{\overline{MN}^2} = \frac{p^2}{p\rho} = \frac{p}{\rho}.$$

Nous avons vu que la parabole rapportée à un diamètre quelconque Mx' et à la tangente correspondante My' avait pour équation $y'^2 = 2p'x'$. Pour évaluer p', menons AI parallèle à MT, de manière à figurer les coordonnées $x' = MI$, $y' = -AI$ du sommet A par rapport aux axes $y'Mx'$; nous aurons alors

$$p' = \frac{y'^2}{2x'} = \frac{\overline{MT}^2}{2\,AT} = \frac{\overline{MT}^2}{TP} = \frac{2\rho x}{x} = 2\rho,$$

ou encore, d'après ce qui précède,

$$p' = \mathrm{TN}, \quad p' = p + 2x, \quad p' = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

Remarquons que le paramètre p de la parabole, exprimant la distance du foyer à la directrice, est égal à l'ordonnée du foyer. On donne également le nom de *paramètre*, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, à l'ordonnée du foyer; pour avoir sa valeur en fonction des axes a et b, il suffit de multiplier par e ou $\frac{c}{a}$ la distance $\frac{a^2}{c} - c$ du foyer à la directrice, ce qui donne $\frac{b^2}{a}$.

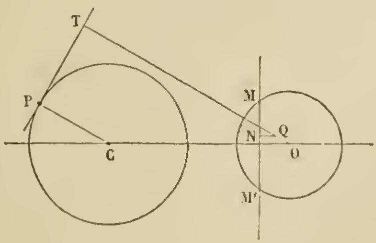
COMPLÉMENT DE LA MÉTHODE DES POLAIRES RÉCIPROQUES.

1164. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de compléter et de généraliser la théorie que nous avons exposée aux n^{os} 348 et suivants.

Nous nommerons *origine* le centre O du cercle auxiliaire par rapport auquel on prend les pôles et les polaires, et nous désignerons par R son rayon.

La polaire réciproque d'un cercle C *situé d'une manière quelconque par rapport au cercle auxiliaire* O *est une conique qui a pour foyer l'origine* O *et pour directrice la polaire* MM' *du centre* C *du cercle proposé par rapport au cercle auxiliaire* (*fig.* 600).

Fig. 600.



En effet, désignons par ρ le rayon du cercle proposé C et par δ la distance OC de son centre à l'origine. TP étant une tangente quelconque du cercle C et Q son pôle par rapport au cercle O, on a (351, 2°), en désignant par QN la distance du point Q à la droite MM',

$$\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{QN}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CP}} = \frac{\delta}{\rho}.$$

Le rapport des distances du point variable Q au point fixe O et à la droite fixe MM' est donc constant.

L'excentricité $\frac{\delta}{\rho}$ de la conique obtenue est inférieure, supérieure ou égale à un, suivant que δ est inférieur, supérieur ou égal à ρ. Donc, *la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'origine* O *est intérieure, extérieure au cercle proposé* C *ou située sur la circonférence de ce cercle.*

Cette proposition, combinée avec le principe du n° 350, permet de déduire de toute propriété du cercle une propriété focale des coniques.

Comme exemple, transformons la propriété de l'angle inscrit : *L'angle* MAB, *formé en joignant un point variable d'une circonférence de cercle à deux points fixes de cette circonférence, est constant et égal à la moitié de l'angle au centre* ACB *correspondant.* Au cercle, répondra une conique ayant pour foyer l'origine O et pour directrice la polaire γ du point C par rapport au cercle auxiliaire O ; aux points A, B, M, répondront deux tangentes fixes α et β, et une tangente variable μ de la conique. Les points d'intersection de μ et α, de μ et β, de γ et α, de γ et β, seront respectivement les pôles des droites MA, MB, CA, CB, et par suite, en vertu du principe du n° 350, on aura ce théorème : *L'angle sous lequel on voit du foyer* O *d'une conique la portion d'une tangente mobile* μ *comprise entre deux tangentes fixes* α *et* β, *est constant et égal à la moitié de l'angle sous lequel on voit du foyer la portion de la directrice* γ *comprise entre les deux tangentes fixes* α *et* β.

Voici d'autres exemples :

Deux tangentes d'un cercle sont également inclinées sur la corde des contacts.

La droite qui joint le foyer d'une conique à l'intersection de deux tangentes divise en deux parties égales l'angle sous lequel on voit du foyer la corde des contacts.

Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à un cercle est un cercle concentrique, et la corde des contacts enveloppe un cercle aussi concentrique.

Si une corde d'une section conique est vue du foyer sous un angle constant, cette corde enveloppe une section conique ayant même foyer et même directrice que la proposée ; le point de concours des tangentes aux extrémités de cette corde décrit une section conique ayant aussi même foyer et même directrice que la proposée.

Si une corde d'un cercle est vue sous un angle constant d'un point

Le lieu du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à la *fixe* A *de la circonférence, cette corde enveloppe un cercle concentrique.*

Les projections d'un point A *d'une circonférence de cercle sur les côtés d'un triangle inscrit quelconque sont en ligne droite.*

parabole est une conique ayant le même foyer et la même directrice.

Si, par les sommets d'un triangle circonscrit à une parabole, on élève des perpendiculaires sur les droites qui joignent ces sommets au foyer F, *les trois perpendiculaires concourent en un même point* I.

Dans les deux derniers exemples, on a pris pour origine le point A ; et, comme ce point est sur la circonférence, la transformée de cette circonférence est une parabole. Observons, en outre, qu'en vertu du dernier théorème obtenu, si l'on décrit un cercle sur FI comme diamètre, ce cercle passera par les sommets du triangle circonscrit ; de là cette proposition : *Le lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites fixes est le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois droites.*

1165. *La polaire réciproque d'une conique* C *par rapport à un cercle auxiliaire* O *est une conique* C'.

En effet, la conique C peut être considérée (1130) comme l'enveloppe des droites mm' qui joignent les points homologues m et m' de deux divisions homographiques tracées sur deux tangentes fixes L et L'. Or, soient λ, λ', μ, les pôles des tangentes fixes L et L' et de la tangente mobile mm' ; les droites $\lambda\mu$, $\lambda'\mu$, décriront deux faisceaux homographiques. Car les droites issues de λ répondant anharmoniquement aux points de la division L, et les droites issues de λ' aux points de la division L' (1108), quatre droites quelconques issues de λ auront même rapport anharmonique que les quatre droites homologues issues de λ', attendu que quatre points quelconques de la division L ont même rapport anharmonique que les quatre points homologues de L'. Donc le lieu des points μ est une conique qui passe par les points λ et λ' (1131, 2°).

A chaque propriété des coniques en répondra dès lors une autre par la méthode des polaires réciproques.

Voici des exemples :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle.

L'enveloppe des cordes d'une conique, qui sont vues sous un angle droit d'un point fixe du plan de la conique, est une autre conique dont ce point fixe est le foyer.

Le lieu des projections d'un foyer

Si par chaque point d'un cercle

sur les tangentes d'une ellipse ou d'une hyperbole est un cercle.

on élève une perpendiculaire sur la droite qui joint ce point à un point fixe, l'enveloppe de ces perpendiculaires est une conique dont ce point fixe est le foyer.

1166. Reportons-nous au théorème du n° 353. Si, sans rien changer au raisonnement, on avait pris pour *origine* de la transformation un point quelconque au lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère, on aurait obtenu pour théorème corrélatif :

Dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, le produit des distances de deux sommets opposés à une tangente quelconque est dans un rapport constant avec le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente.

Cette dernière proposition, transformée à son tour par la méthode des polaires réciproques, donne alors :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la conique à deux côtés opposés est dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux deux autres côtés.

Ce théorème est attribué à Pappus. On doit remarquer la manière dont nous l'avons obtenu et qui consiste dans une double application de la méthode des polaires réciproques.

Les explications données au n° 353 permettront au lecteur de voir lui-même comment ces théorèmes peuvent se généraliser et s'étendre à des polygones. Nous appellerons ici, au contraire, l'attention sur un cas particulier. Lorsque deux côtés opposés du quadrilatère inscrit deviennent tangents à la conique, les deux autres se confondent avec la corde de contact, et le théorème de Pappus devient le suivant : *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux deux côtés d'un angle circonscrit est dans un rapport constant avec le carré de la distance du même point à la corde de contact*. Le théorème corrélatif s'énonce : *Le produit des distances de deux points fixes d'une conique à une tangente variable est dans un rapport constant avec le carré de la distance de l'intersection des tangentes aux deux points fixes à la même tangente variable ;* il résulte immédiatement de la propriété des quadrilatères circonscrits, lorsque l'on suppose que deux côtés adjacents du quadrilatère viennent se confondre avec les deux autres.

1167. On peut généraliser toute cette théorie en substituant au cercle auxiliaire, par rapport auquel on prend les pôles, une conique auxiliaire :

La courbe polaire réciproque d'une conique quelconque par rap-

port à une conique auxiliaire est encore une conique. La démonstration du n° 1165 s'applique sans modifications.

La méthode ainsi généralisée se prête avec la même facilité à la transformation des propriétés descriptives; mais il n'en est plus de même pour les propriétés métriques, et, quand il s'agit de transformer de telles propriétés, il convient de prendre un cercle auxiliaire.

La transformation par polaires réciproques, avons-nous dit au n° 349, laisse ignorer comment on pourrait démontrer directement les propositions que l'on découvre de la sorte. Ce reproche ne s'adresse qu'à la manière dont on applique ordinairement la méthode, en se bornant à transformer les énoncés; mais, en réalité, comme l'a montré M. Mannheim (*Transformation des propriétés métriques*, 1857), la méthode se prête à la transformation des démonstrations. Une démonstration n'est, en effet, qu'une chaîne de propositions qu'il suffit de transformer une à une pour avoir les anneaux successifs de la chaîne qui constitue la démonstration directe. C'est ainsi que nous avons procédé en définitive aux n^{os} 326 et 327, 328 et 329, etc.

1168. Deux courbes polaires réciproques sont telles, que chacune d'elles est coupée par une droite quelconque en autant de points (réels ou imaginaires) qu'on peut mener de tangentes (réelles ou imaginaires) à l'autre par un point donné quelconque. On nomme *classe* d'une courbe algébrique le nombre des tangentes réelles ou imaginaires qu'on peut mener à cette courbe d'un point quelconque. D'après cela, on peut énoncer la propriété précédente de cette manière plus concise : *Quand deux courbes sont polaires réciproques, l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre.*

Les coniques sont des courbes de la seconde classe, et, inversement, *toute courbe de la seconde classe est une conique.*

D'après la définition que nous avons donnée au n° 1162 des foyers des courbes planes d'ordre quelconque, on voit qu'*une courbe de la classe n possède n^2 foyers*, puisque l'on peut mener à cette courbe n tangentes de chacun des deux points cycliques, et que ces deux faisceaux de n droites ont n^2 points communs, *dont n seulement sont réels*; ce sont ceux qui sont fournis par la rencontre de deux tangentes imaginaires conjuguées.

Si la courbe est tangente à la droite de l'infini, le point de contact à l'infini est un foyer réel, et il n'y a plus que $n-1$ foyers réels à distance finie. Quant aux foyers imaginaires, il y en a $(n-1)^2-(n-1)$, outre les deux points cycliques qui, par conséquent, tiennent lieu chacun de $n-1$ foyers.

PROPRIÉTÉS DES POINTS ET DES DROITES IMAGINAIRES.

1169. Nous avons expliqué (1044) comment un système de deux quantités réelles x et y, dites *coordonnées*, détermine la position d'un point du plan; ce point est dit *réel*. Par analogie, on dit que deux quantités imaginaires, x' et y', c'est-à-dire deux quantités de la forme

$$x' = a + bi, \quad y' = a' + b'i, \tag{1}$$

où a, b, a', b', désignent des nombres réels et i le symbole $\sqrt{-1}$, déterminent un *point imaginaire* dont elles sont les coordonnées. Deux points sont appelés *imaginaires conjugués* lorsque leurs coordonnées sont respectivement imaginaires conjuguées; ainsi le point imaginaire conjugué de celui que déterminent les valeurs (1) a pour coordonnées

$$x'_1 = a - bi, \quad y'_1 = a' - b'i. \tag{2}$$

Nous avons vu (1134) qu'une équation du premier degré

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

dont les coefficients A, B, C, sont réels, représente une ligne droite, ce qui veut dire que le lieu des points réels dont les coordonnées satisfont à cette équation est une ligne droite. Par analogie, on nomme *droite imaginaire* l'ensemble des systèmes de valeurs imaginaires de x et de y qui satisfont à une équation du premier degré à coefficients imaginaires

$$(A' + A''i)x + (B' + B''i)y + C' + C''i = 0. \tag{4}$$

Deux droites sont appelées *imaginaires conjuguées* lorsque les coefficients de leurs équations sont respectivement imaginaires conjugués; ainsi, la droite imaginaire conjuguée de celle qui a pour équation (4) est représentée par l'équation

$$(A' - A''i)x + (B' - B''i)y + C' - C''i = 0. \tag{5}$$

De ces définitions, résultent les conséquences suivantes :

1° *Toute droite réelle contient* (*outre une infinité de points réels*) *une infinité de points imaginaires;* car, pour toute valeur imaginaire attribuée à x, l'équation (3) donne une valeur imaginaire correspondante de y.

2° *Une droite réelle qui contient un point imaginaire contient aussi son conjugué;* car, si l'on exprime que les valeurs (1) ou les valeurs (2) satisfont à l'équation (3), on trouve dans les deux cas les deux mêmes conditions

$$Aa + Bb + C = 0, \quad Aa' + Bb' = 0.$$

Réciproquement, *la droite qui contient deux points imaginaires conjugués est réelle;* en effet, l'équation

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}$$

représente la droite qui passe par les points réels ou imaginaires dont les coordonnées sont x' et y', x'' et y'', attendu que cette équation est du premier degré et qu'elle est satisfaite soit par $x = x'$ et $y = y'$, soit par $x = x''$ et $y = y''$. Or, si les deux points sont imaginaires conjugués, c'est-à-dire si x' et y', x'' et y'' ont respectivement les valeurs (1) et (2), la substitution de ces valeurs réduit l'équation à la suivante :

$$b'x - by = ab' - ba',$$

qui a ses coefficients réels.

3° *Toute droite imaginaire contient un point réel et un seul, qui appartient aussi à sa conjuguée;* car, pour qu'un couple de valeurs réelles de x et de y satisfasse à l'équation (4) ou à l'équation (5), il faut et il suffit que ces valeurs vérifient le système

$$(6) \qquad A'x + B'y + C' = 0, \quad A''x + B''y + C'' = 0.$$

Or ces équations, étant du premier degré, donnent pour x et y un couple unique de valeurs réelles; l'une des coordonnées ou les deux peuvent être infinies; on dit alors que le point est à l'infini. Mais le système ne peut être indéterminé, car on voit immédiatement que, si les équations (6) avaient leurs coefficients proportionnels, la droite (4) serait réelle.

4° Les coordonnées du *milieu de la droite qui joint deux points réels* (x', y'), (x'', y''), ont pour expression

$$(7) \qquad \xi = \frac{1}{2}(x' + x''), \quad \eta = \frac{1}{2}(y' + y'').$$

Par analogie, quand les points (x', y'), (x'', y''), sont imaginaires, on dit encore que le point dont les coordonnées ξ et η sont exprimées par ces formules (7) est le milieu de la droite qui joint les deux points. On voit immédiatement, par la substitution des valeurs (1) et (2), que *le point milieu est réel si les deux points considérés sont imaginaires conjugués;* il serait imaginaire si les deux points étaient imaginaires non conjugués.

5° L'intersection de deux droites réelles est le point réel dont les coordonnées sont les valeurs de x et de y fournies par la résolution des équations des deux droites. *L'intersection de deux droites imaginaires conjuguées est* aussi *un point réel;* car le système de leurs équations (4) et (5) peut, par addition et soustraction, être remplacé par le système (6), qui est à coefficients réels. — Mais deux droites peuvent évidemment se couper en un point réel sans être réelles ou imaginaires conjuguées; par exemple, les deux droites imaginaires non conjuguées $y=(\alpha+\beta i)x$, $y=(\gamma+\delta i)x$ passent l'une et l'autre par l'origine.

Telles sont les notions fondamentales sur lesquelles repose l'introduction des imaginaires en Géométrie. Il serait vain de vouloir le déguiser : c'est l'Analyse qui fournit ces principes; puis, la Géométrie s'en empare et en développe les conséquences avec les moyens qui lui sont propres, comme nous allons le voir dans l'étude de la question suivante.

CORDES ET TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES.

1170. *Deux coniques quelconques, situées dans un même plan, ont :*

1° *Quatre points communs réels ou imaginaires conjugués ;*

2° *Trois systèmes de deux cordes communes, dont l'un au moins est réel.*

En effet :

1° En éliminant y^2 entre les équations du second degré qui représentent les deux coniques, on obtient une équation où y ne figure qu'au premier degré et que nous désignerons par (y); puis, en substituant cette valeur de y dans l'une des deux équations primitives, on trouve une équation du quatrième degré en x, que nous désignerons par (x), et dont les racines sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Si l'équation (x) a ses quatre racines réelles, l'équation (y) donne pour chacune de ces valeurs de x une valeur réelle de y; et, par suite, *les deux coniques ont quatre points communs réels.* — Si l'équation (x) a deux racines réelles et deux racines imaginaires (conjuguées), l'équation (y) donne pour y deux valeurs réelles et deux valeurs imaginaires (conjuguées); et, par suite, *les deux coniques ont deux points communs réels et deux points communs imaginaires* (*conjugués*). — Enfin, si l'équation (x) a ses quatre racines imaginaires (conjuguées deux à deux), l'équation (y) donne pour y quatre valeurs imaginaires (conjuguées deux à deux); et, par suite, *les deux coniques ont quatre points communs imaginaires* (*conjugués deux à deux*).

2° *Si les deux coniques ont quatre points communs réels a, b, c, d* (*fig.* 601), *les trois couples ab et cd, ac et bd, ad et bc, de cordes communes sont* évidemment *réels.*

Si les deux coniques ont deux points communs réels a et b, et deux points communs imaginaires conjugués c et d, la corde commune ab est évidemment *réelle; cd l'est aussi,* puisqu'elle unit deux points imaginaires conjugués. *Les autres cordes communes ac et bd, ad et bc sont imaginaires;* car, si la droite *ac*, par exemple, était réelle, le point d'intersection des deux droites réelles *ac* et *cd* serait réel. — Il convient d'observer que les deux droites imaginaires d'un même couple *ac* et *bd* ou *ad* et *bc* ne sont pas conjuguées ; car, si *ac* et *bd* l'étaient, leur point d'intersection p' serait réel, et chacune de ces droites, ayant deux points réels *a* et p' ou *b* et p', serait réelle. La conjuguée de *ac* est évidemment *ad*, et celle de *bd* est *bc*.

Si les deux coniques ont quatre points communs imaginaires conjugués deux à deux a et *b*, *c* et *d*, *les cordes communes ab* et *cd sont réelles*, puisque chacune aura deux points imaginaires conjugués ; *les autres cordes communes ac* et *bd*, *ad* et *bc*, *sont imaginaires ;* car si, par exemple, *ac* était réelle, les points *a* et *c* où elle coupe respectivement les droites réelles *ab* et *cd* seraient réels. Ici, les droites imaginaires d'un même couple, *ac* et *bd* ou *ad* et *bc*, sont conjuguées ; car on passe, par exemple, de *ac* à *bd* en remplaçant *a* par son conjugué *b* et *c* par son conjugué *d*.

En transformant la proposition précédente par la méthode des polaires réciproques et donnant le nom d'*ombilic* à tout point d'intersection de deux tangentes communes, on voit que :

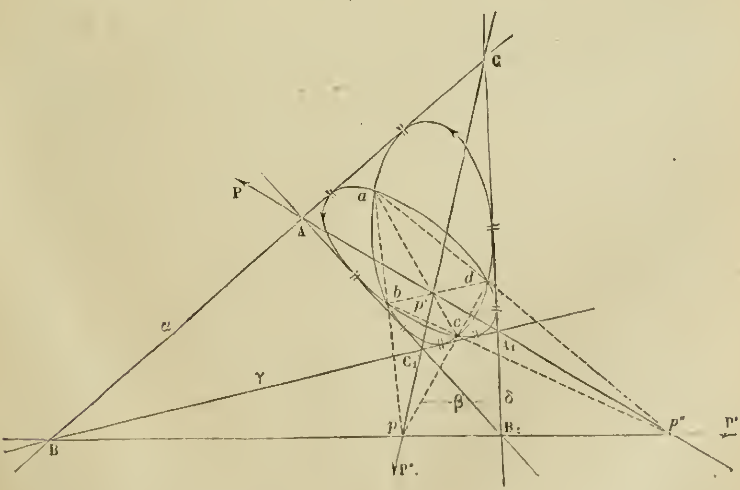
Deux coniques ont :

1° *Quatre tangentes communes réelles ou imaginaires conjuguées ;*

2° *Trois systèmes de deux ombilics, l'un au moins de ces systèmes étant réel.*

Si les quatre tangentes communes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, *sont réelles, les trois couples*

Fig. 601.



d'ombilics sont réels (*fig.* 601). En désignant le point commun à deux droites L et L' par la notation (L, L'), le premier couple est formé par A ou (α, β) et A_1 ou (γ, δ), le second couple par B ou (α, γ) et B_1 ou (β, δ), le troisième par C ou (α, δ) et C_1 ou (β, γ).

Si le quadrilatère circonscrit a deux côtés réels α et β et deux imaginaires conjugués γ et δ, ou encore *si le quadrilatère a ses côtés imaginaires conjugués deux à deux α et β, γ et δ, il n'y a qu'un couple d'ombilics réels;* c'est le couple A ou (α, β) et A_1 ou (γ, δ).

1171. On nomme *pôle double* tout point du plan de deux coniques qui a la même polaire par rapport à ces deux courbes (*fig.* 601).

Soient p le point commun aux cordes ab et cd, p' le point d'intersection de ac et de bd, et p'' le point de rencontre de ad et bc. Chacun des sommets du triangle $pp'p''$ est évidemment le pôle du côté opposé par rapport aux deux coniques. Ainsi, *tout point d'intersection de deux cordes communes est un pôle double* (ou un point commun aux deux coniques). Réciproquement, *tout pôle double est l'intersection de deux cordes communes;* en effet, soit p_1 un pôle double, et α, α' les points où $p_1 a$ rencontre pour la seconde fois chacune des coniques; le point p_1 devant avoir le même conjugué harmonique par rapport aux deux segments $a\alpha$ et $a\alpha'$, il faut que α et α' coïncident, c'est-à-dire se confondent avec l'un des points b, c, d, avec c par exemple; ainsi le point p_1 est sur ac; on verrait de même qu'il est sur bd; il est donc à la rencontre de deux cordes communes.

Les trois seuls pôles doubles sont donc *les sommets du triangle $pp'p''$. Ils sont* évidemment *réels tous les trois, si les quatre points a, b, c, d, communs aux deux coniques sont tous les quatre réels. Ils le sont aussi quand les points a, b, c, d, sont tous imaginaires,* car, alors, les deux cordes d'un même couple sont réelles ou imaginaires conjuguées. Mais, *si les points a et b sont réels, et c et d imaginaires conjugués, le pôle double p est le seul réel;* il est réel parce qu'il appartient aux deux cordes réelles ab et cd; et p' et p'' sont imaginaires, car, si p', par exemple, était réel, la droite ap ou ac serait réelle. Observons enfin que chacun des pôles doubles est le centre d'un faisceau harmonique formé par les deux côtés du triangle et les deux cordes communes qui passent par ce point.

On nomme *polaire double* toute droite qui a le même pôle par rapport aux deux coniques. Toute polaire double est la polaire d'un pôle double, et réciproquement; il n'y a donc que trois polaires doubles, dont une toujours réelle : ce sont les côtés du triangle $pp'p''$, auquel on donne le nom de *triangle autopolaire commun* aux deux coniques.

Les trois diagonales P, P', P'', du quadrilatère complet formé par les quatre tangentes communes α, β, γ, δ, aux deux coniques, sont réelles si les quatre droites α, β, γ, δ, sont toutes réelles ou toutes imaginaires (conjuguées). Si deux de ces tangentes α et β sont réelles, et les deux autres γ et δ imaginaires conjuguées, la diagonale P est seule réelle.

Ces diagonales P, P′, P″, sont évidemment des polaires doubles; elles ne diffèrent donc pas des côtés du triangle $pp'p''$. En outre, il résulte immédiatement de la construction de la polaire d'un point par rapport à deux droites que les deux ombilics et les deux pôles doubles situés sur un même côté du triangle autopolaire $pp'p''$ forment un système harmonique.

En résumé :

Si le triangle autopolaire $pp'p''$ est entièrement réel, les deux coniques ont :

Soit *quatre points communs réels et quatre tangentes communes réelles ;*

Soit *quatre points communs imaginaires et quatre tangentes communes imaginaires ;*

Soit *quatre points communs réels et quatre tangentes communes imaginaires ;*

Soit *quatre points communs imaginaires et quatre tangentes communes réelles ;*

Et *si le triangle autopolaire n'a de réels qu'un sommet p et le côté opposé* P, les deux coniques ont :

Deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et en même temps deux tangentes communes réelles et deux tangentes communes imaginaires.

Dans le troisième cas, l'une des coniques au moins est hyperbolique.

1172. *Si deux points pris sur une corde commune sont conjugués par rapport à l'une des coniques, ils le sont aussi par rapport à l'autre.* Car, puisqu'ils sont conjugués par rapport à la première conique, ils divisent harmoniquement la corde commune, et, par suite, ils sont conjugués par rapport à la seconde conique.

Réciproquement, *si, sur une droite située dans le plan de deux coniques, il existe deux couples de points a et a', b et b', tels que les deux points d'un même couple soient conjugués à la fois par rapport aux deux coniques, cette droite est une corde commune aux deux coniques.* Car les points de chacune des deux coniques situées sur la droite sont les deux points réels ou imaginaires qui divisent harmoniquement le segment aa' et le segment bb'.

Les propositions corrélatives s'énoncent de la manière suivante :

Si deux droites issues d'un ombilic sont conjuguées par rapport à l'une des coniques, elles le sont aussi par rapport à l'autre.

Si par un point du plan de deux coniques passent deux couples de droites A *et* A′, B *et* B′, *situées dans ce plan et telles que les deux droites de chaque couple soient conjuguées par rapport aux deux coniques, ce point est un ombilic*

CONIQUES CIRCONSCRITES OU INSCRITES A UN QUADRILATÈRE.

1173. *Quand plusieurs coniques ont quatre points communs (réels ou imaginaires), il existe sur une droite quelconque de leur plan deux points conjugués par rapport à toutes ces coniques.* Car les segments interceptés sur la droite par les diverses coniques forment une involution (1172); les points doubles (réels ou imaginaires) de cette involution divisent harmoniquement chacun de ces segments et, par suite, sont conjugués par rapport à chacune des coniques.

Dans le cas particulier où la droite est à l'infini, on a ce théorème : *Toutes les coniques passant par quatre points donnés ont un système (réel ou imaginaire) de diamètres conjugués, parallèles entre eux.*

Le théorème corrélatif sur les coniques tangentes à quatre droites s'énonce : *Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un même quadrilatère (réel ou imaginaire), il passe par chaque point de leur plan deux droites (réelles ou imaginaires) qui sont conjuguées par rapport à toutes ces coniques.*

1174. *Quand plusieurs coniques ont quatre points communs (réels ou imaginaires), les polaires d'un point fixe quelconque* P *de leur plan par rapport à ces courbes passent par un même point* (LAMÉ, *Examen des différentes méthodes...*; 1818).

Soit P′ le point commun aux polaires de P par rapport à deux A et B des coniques considérées; les points P et P′ sont conjugués par rapport à A et B et, par suite, d'après le théorème précédent, par rapport à toute conique C du groupe; donc le point P′ est sur la polaire de P par rapport à la conique C.

Dans le cas particulier où le point P est à l'infini, on a cette proposition : *Quand plusieurs coniques passent par quatre points donnés, les diamètres de ces courbes, conjugués à une même direction, passent par un même point.*

Les théorèmes corrélatifs s'énoncent :

Quand plusieurs coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, les pôles d'une droite quelconque de leur plan par rapport à ces courbes sont en ligne droite.

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite passant par les milieux des diagonales (NEWTON).

1175. *Les bissectrices de tout système de deux cordes communes à un cercle et à une conique sont parallèles aux axes de la conique.*

En effet, si par le point commun aux deux cordes C et C′ on mène des parallèles L et L′ aux axes de la conique, les droites L et L′ sont évidemment parallèles au système des diamètres conjugués qui sont communs en direction au cercle et à la conique (1146); ces deux droites rencontrent donc la droite à l'infini en deux points conjugués à la fois par rapport aux deux courbes, et par suite aussi conjugués par rapport aux cordes communes C et C′; donc L et L′ sont conjuguées harmoniques par rapport à C et à C′, et, comme elles sont rectangulaires, elles divisent en deux parties égales les angles formés par ces cordes.

Il résulte de là que, *pour que deux coniques se coupent en quatre points situés sur un même cercle, il faut et il suffit que leurs axes soient parallèles ou perpendiculaires.*

Lorsque trois des quatre points communs à un cercle et à une conique se réunissent en un seul M, on dit que le cercle est *osculateur de la conique au point* M. La tangente en M et la corde MN qui joint le point de contact M au point de section N des deux courbes sont alors, d'après le théorème précédent, également inclinées sur un quelconque des axes de la conique. Cette propriété permet de déterminer le point N et, par suite, le cercle osculateur en un point donné M d'une conique.

On calcule aisément le rayon de ce cercle à l'aide d'un théorème élégant dû à Mac-Cullagh, Dublin, 1836 : *Le rayon* R *du cercle qui passe par trois points* M, N, P, *d'une ellipse est égal au produit des demi-diamètres m, n, p, parallèles aux côtés du triangle formé par ces trois points, divisé par le produit ab des demi-axes.* En effet, en divisant l'égalité (428)

$$R = \frac{NP.PM.MN}{4MNP}$$

par l'égalité analogue

$$a = \frac{N'P'.P'M'.M'N'}{4M'N'P'},$$

relative aux points correspondants M′, N′, P′, du cercle dont l'ellipse est la projection, on a

$$\frac{R}{a} = \frac{M'N'P'}{MNP}\,\frac{NP}{N'P'}\,\frac{PM}{P'M'}\,\frac{MN}{M'N'};$$

mais le premier rapport du second membre est égal à $\frac{a}{b}$ (706, 1056) et les autres sont égaux respectivement à $\frac{m}{a}$, $\frac{n}{a}$, $\frac{p}{a}$, puisque deux droites parallèles sont entre elles comme leurs projections. La relation précédente se réduit donc à

$$R = \frac{mnp}{ab}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si les points N et P se réunissent en M, les quantités m, n, p, deviennent égales au demi-diamètre δ parallèle à la tangente en M, et l'on a pour le rayon du cercle osculateur en M l'expression $\frac{\delta^3}{ab}$ ou encore, en vertu du second théorème d'Apollonius, l'expression $\frac{\delta^2}{p}$, dans laquelle p désigne la distance du centre de l'ellipse à la tangente au point M. Cette expression se réduit à $\frac{b^2}{a}$ ou à $\frac{a^2}{b}$ quand le point considéré est l'extrémité du grand axe ou du petit axe.

CONIQUES TANGENTES, BITANGENTES, OSCULATRICES.

1176. *Coniques tangentes.* — Quand deux coniques se touchent en un point a, ce point est la réunion de deux points communs a et b, et il ne reste plus que deux autres points communs c et d, qui sont réels ou imaginaires conjugués.

La tangente en a et la droite cd forment un couple de cordes communes ; ce couple est réel. Quant aux deux autres couples, ils se confondent en un seul ac et ad, qui est réel si c et d sont réels et imaginaire si c et d sont imaginaires.

Outre la tangente en a, il n'y a plus que deux tangentes communes réelles ou imaginaires ; leur point d'intersection et le point a forment un système d'ombilics réels, et il n'y a plus qu'un autre couple d'ombilics : ce sont les points réels ou imaginaires où la tangente en a rencontre les deux autres tangentes communes.

Coniques bitangentes. — On dit que deux coniques sont *bitangentes* ou ont un *double contact* lorsqu'elles se touchent en deux points ; nous désignerons ces deux points par g et h, et le point d'intersection des tangentes en g et h par k.

Il n'y a plus encore ici que deux systèmes de cordes communes ; le premier est formé par les tangentes kg et kh, et le second par la droite double ou corde de contact gh. Les points g et h forment un couple d'ombilics, et le point k forme à lui seul le second couple.

Quant à la réalité, il faut distinguer deux cas, suivant que le *double contact* des deux coniques est *réel* ou *imaginaire*, c'est-à-dire suivant que les points g et h sont réels ou imaginaires conjugués. Dans le premier cas, les cordes communes et les ombilics que nous venons d'énumérer sont tous réels. Dans le second cas, la corde de contact gh forme le seul couple de cordes communes réelles et son pôle k forme le seul couple d'ombilics réels.

Quand deux coniques ont un double contact :

1° *Les polaires d'un point quelconque* M *de leur plan se coupent sur la corde de contact ;* car elles doivent se couper (1174) sur la polaire de M par rapport aux systèmes des deux cordes communes confondues avec la corde de contact, polaire qui coïncide avec cette dernière corde.

2° *Les pôles d'une droite quelconque* Δ *sont en ligne droite avec le pôle de la corde de contact* qu'on nomme *pôle de contact;* c'est la proposition corrélative de la précédente.

3° *Tout point* k *de la corde de contact est un pôle double,* car, pour chacune des coniques, la polaire de k contient le pôle de contact et le point k' conjugué harmonique de k par rapport aux deux points de contact. Nous trouvons ainsi un cas d'exception à la proposition : deux coniques n'ont, en général, que trois pôles doubles.

Coniques osculatrices. — On dit que deux coniques sont *osculatrices* ou qu'elles ont un contact du *second ordre* lorsque trois de leurs points communs sont réunis en un seul que nous appellerons ω. Elles ont alors un quatrième point d'intersection d qui est toujours réel, et, outre la tangente en ω, une tangente commune réelle δ; soit t le point où la tangente en ω rencontre la tangente d.

Il n'y a qu'un système de cordes communes; il est réel et formé par la tangente ωt et par la corde ωd. Il n'y a aussi qu'un couple d'ombilics : ce sont les points réels ω et t.

On dit que deux coniques ont un *contact du troisième ordre,* lorsque leurs quatre points communs sont réunis en un seul ω. Les quatre tangentes communes sont alors confondues en une seule qui est la tangente ωt au point ω. Cette même droite ωt est la seule corde commune et le point ω le seul ombilic.

CONIQUES HOMOLOGIQUES.

1177. *La figure homologique d'un cercle, lorsqu'on prend le centre du cercle pour centre d'homologie, est une conique qui a ce centre pour foyer;* car si, dans l'avant-dernière formule du n° 730, Om' est constant, il en est de même du rapport $\frac{mO}{mi}$; par suite, le rapport des distances d'un point quelconque m de la figure cherchée au point fixe O et à la droite fixe I est constant.

Par suite, une conique étant donnée, on voit qu'il faut placer le centre d'homologie O à l'un des foyers pour que la figure homologique soit un cercle de centre O.

C'est cette propriété que M. Chasles prend pour définition des foyers dans son *Traité des Sections coniques.* La marche que nous avons suivie (n^{os} 1155 et suivants) est à la fois plus directe et plus simple.

1178. *La figure homologique d'une conique* C *est une conique* C'.

En effet, P et Q étant deux points fixes pris arbitrairement sur la conique donnée C, et m un point variable de cette conique, les droites

Pm, Qm, engendrent deux faisceaux homographiques (1130). Or, si P', Q', m', sont les homologues de P, Q, m, le faisceau engendré par $P'm'$ tournant autour du point fixe P' sera homographique du faisceau engendré par Pm (731); de même, le faisceau décrit par $Q'm'$ sera homographique du faisceau décrit par Qm. Donc les faisceaux engendrés par $P'm'$ et $Q'm'$ sont homographiques, et (1131) le lieu du point m' est une conique. — *A un point p et à sa polaire* L *relatifs à la première conique* C, *répondent dans la seconde conique un point p' et sa polaire* L'. Car aux quatre points harmoniques p, a, q, b, situés sur une transversale issue du point p, et qui coupe la conique C en a et b et la polaire L en q, répondent quatre points p', a', q', b', qui sont aussi harmoniques (731). On voit par là qu'*à deux points ou à deux droites conjuguées relativement à la conique* C *répondent deux points ou deux droites conjuguées relativement à la conique* C'. — *L'axe d'homologie* XX' *est une corde commune aux deux coniques* C *et* C'. En effet, les points communs à la conique C et à l'axe XX' sont les points doubles des deux divisions homographiques tracées sur XX' par les faisceaux générateurs Pm et Qm de cette conique. De même, les points communs à la conique C' et à XX' sont les points doubles des deux divisions tracées sur XX' par les faisceaux $P'm'$ et $Q'm'$; mais les rayons homologues des faisceaux P et P' se coupent sur l'axe XX', aussi bien que les rayons homologues des faisceaux Q et Q'. Donc les points doubles sont les mêmes pour les deux divisions. — Enfin on voit, soit par un raisonnement corrélatif du précédent, soit en appliquant à la propriété précédente la transformation par polaires réciproques, que *le centre d'homologie* S *est un ombilic des deux coniques.*

Réciproquement, *deux coniques quelconques* C *et* C' *sont deux figures homologiques dans lesquelles l'axe d'homologie est une corde commune et le centre d'homologie un ombilic correspondant à cette corde.* Considérons le triangle $pp'p''$, dont chaque sommet est le pôle du côté opposé par rapport aux deux coniques (*fig.* 601); par chaque sommet passent deux cordes communes, et sur chaque côté sont situés deux ombilics; nous appelons *ombilics correspondant à une corde commune* les deux ombilics placés sur le côté du triangle $pp'p''$ opposé au sommet qui est situé sur la corde commune considérée. Cela étant, soient XX' une corde commune aux deux coniques proposées, qui les coupe en e et f, et S l'un des deux ombilics correspondants; a étant un point quelconque de la conique C, la droite Sa rencontre la conique C' en deux points : désignons par a' celui de ces deux points qui, lorsque la sécante Sa tourne autour de S, vient se réunir avec a au point e. Si, en prenant S pour centre d'homologie, XX' pour axe et (a, a') pour un couple de points homologues, on construit la figure homologique de C, on trouve une conique C_1 qui, ayant en commun avec la conique C' les points a', e, f, et les deux tangentes issues de S, ne diffère pas de la conique C'. Donc C et C' sont homologiques.

Il faut cependant, d'après la démonstration même, que les deux coniques soient placées de telle façon, que toute transversale issue de l'ombilic S rencontre les deux courbes en des points qui soient à la fois réels ou à la fois imaginaires pour les deux coniques.

De plus, comme il peut y avoir six cordes communes, et qu'à chacune d'elles répondent deux ombilics, on voit que *deux coniques peuvent être homologiques de douze manières différentes.*

Parmi les nombreux corollaires de cette réciproque, nous citerons les deux suivants :

Lorsque deux coniques se touchent en un point A et se coupent en deux autres points B et C réels ou imaginaires, le point A est un centre d'homologie, et la corde commune BC, qui est toujours réelle, est l'axe d'homologie correspondant.

Lorsque deux coniques ont un foyer commun, le foyer est un centre d'homologie, puisqu'il est le point de concours de deux tangentes communes imaginaires (1162).

1179. Voici quelques applications de la théorie de l'homologie aux coniques :

1° Considérons une conique C et un cercle C' ayant un foyer F de la conique pour centre. Ces deux courbes sont homologiques, et F est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de F comme sommet, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique au premier ; donc la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C''. D'ailleurs, deux cercles concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini ; donc, les coniques C et C'' ont un double contact (imaginaire) sur la directrice correspondant au foyer F, attendu que cette directrice, étant la polaire du foyer, correspond à la droite de l'infini dans le cercle, laquelle est la polaire du centre. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour du foyer d'une conique comme sommet, la corde qu'il intercepte dans la conique enveloppe une nouvelle conique doublement tangente à la proposée sur la directrice relative au foyer considéré.*

2° Soient une conique C et un cercle C' tangent en S à cette conique. Ces deux courbes sont homologiques, et S est le centre d'homologie. Si un angle de grandeur constante tourne autour de S comme sommet, la corde interceptée dans le cercle enveloppe un cercle concentrique. Donc, la corde interceptée dans la conique enveloppe une seconde conique C'' doublement tangente à la première, suivant la parallèle à l'axe d'homologie qui répond à l'infini du cercle. Ainsi, *lorsqu'un angle de grandeur constante tourne autour d'un point d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a un double contact avec la première.*

En particulier, si l'angle est droit, la corde interceptée dans le cercle passe par le centre de ce cercle, c'est-à-dire par un point fixe situé sur la normale commune aux courbes C et C′ au point S. Donc, *quand un angle droit pivote autour d'un point* S *d'une conique comme sommet, la corde interceptée dans la conique passe par un point fixe situé sur la normale en* S *à la conique.* C'est le théorème de Frégier, que nous avons démontré déjà directement au n° 1139.

3° La transformation homologique permet de ramener les *questions graphiques* relatives aux coniques à de simples questions du même genre relatives au cercle. Tout consiste à tracer dans le plan de la conique un cercle et à déterminer, d'après les conditions qui définissent la conique, le centre et l'axe d'homologie de la conique et du cercle. On aura alors tout ce qu'il faut pour résoudre, sans peine et à l'aide de la règle seule, les diverses questions graphiques relatives à la conique.

Supposons, par exemple, qu'on demande de déterminer le centre et les axes d'une conique donnée par quatre points O, a, b, c, et par la tangente Ot au point O.

On tracera un cercle quelconque tangent en O à la droite Ot; ce cercle sera homologique de la conique par rapport au centre d'homologie O. En joignant le point O aux points a, b, c, on aura, par les intersections des droites Oa, Ob, Oc, avec le cercle, les points a', b', c', homologues de a, b, c. On se trouvera alors dans les conditions du n° 729 (1°), et l'on saura trouver le point de la figure F qui répond à un point pris à volonté dans la figure F′, ce qui permettrait de tracer la conique par points. On déterminera (730) la droite limite J′ de la figure F′; cette droite pourra rencontrer le cercle en deux points x', y', ou le toucher en un seul point z', ou être extérieur à ce cercle.

Dans le premier cas, la conique aura deux points à l'infini, placés sur Ox' et Oy'; ce sera donc une hyperbole, dont on aura les asymptotes en cherchant les homologues des droites $p'x'$, $p'y'$, qui touchent le cercle aux points x' et y'.

Dans le deuxième cas, la conique n'aura qu'un point à l'infini situé sur Oz'; ce sera une parabole dont l'axe, d'ailleurs parallèle à Oz', s'obtiendra en prenant la polaire du point situé à l'infini sur la direction perpendiculaire à Oz'.

Dans le troisième cas, la conique n'ayant aucun point à l'infini sera une ellipse, dont on aura le centre en prenant l'homologue p du pôle p' de J′ par rapport au cercle.

Dans le cas de l'hyperbole, les axes sont parallèles aux bissectrices des angles des droites Ox' et Oy' qui sont les directions asymptotiques. Mais on peut obtenir ces parallèles aux axes sans faire intervenir les droites Ox' et Oy', de manière à avoir une construction qui s'applique au cas de l'ellipse, dans lequel Ox' et Oy' sont imaginaires. Il suffit de tracer le diamètre du cercle qui passe par le point p'; les directions demandées seront celles des droites qui joignent le point O aux extrémités de ce diamètre.

CONIQUES HOMOTHÉTIQUES.

1180. On sait que deux figures homothétiques ne sont autre chose que deux figures homologiques dont l'axe d'homologie est à l'infini (732). Il suit de là et des propriétés démontrées au n° 1178 que *la figure homothétique d'une conique est une conique, et que deux coniques homothétiques ont une corde commune à l'infini.* Réciproquement, *lorsque la droite de l'infini est une corde commune à deux coniques* C *et* C', *ces courbes sont homothétiques.* En effet, si deux points de la droite de l'infini sont conjugués par rapport à l'une des coniques, ils sont conjugués par rapport à l'autre; par suite, deux diamètres conjugués quelconques de la courbe C sont parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe C'. Cela posé, soient AB et A'B' deux diamètres parallèles des coniques C et C'; M étant un point quelconque de C, AM et BM sont parallèles à deux diamètres conjugués de C, et, par suite, les parallèles A'M' et B'M' à AM et à BM se coupent en un point M' de la conique C'. Or (360), les points M et M' ainsi déterminés décrivent deux figures homothétiques dont le rapport de similitude est $\frac{AB}{A'B'}$.

Il résulte de là que *toute conique passant par les deux points cycliques de son plan est un cercle,* car, ayant la droite de l'infini pour corde commune avec un cercle quelconque de ce plan, elle est homothétique à ce cercle.

1181. *Deux coniques homothétiques et concentriques ont un double contact sur la droite de l'infini.* En effet, soient ε et φ les points communs aux deux coniques et à la droite de l'infini. Les tangentes en ε et φ à la première conique doivent passer par le pôle de $\varepsilon\varphi$, c'est-à-dire par le centre O de cette conique; de même, les tangentes en ε et φ à la deuxième conique doivent passer par O; donc les deux coniques ont les mêmes tangentes en ε et φ. Réciproquement, *deux coniques qui ont un double contact sur la droite de l'infini sont homothétiques et concentriques;* car d'abord elles sont homothétiques, puisque la droite de l'infini est une corde commune, et, d'autre part, le centre de chacune d'elles doit être le pôle de la droite de l'infini, qui est le même pour les deux coniques, puisque c'est le point de concours des tangentes communes en ε et φ.

1182. Deux figures semblables ne diffèrent en définitive que par l'échelle à laquelle elles sont construites, de sorte qu'un simple changement d'échelle les rendrait égales. Donc, pour trouver les conditions de similitude de deux courbes de même espèce, il suffit de distinguer, d'après la définition des courbes de cette espèce, les données distinctes et indépendantes relatives à la forme des données relatives à la position. Par exemple, si la connaissance d'une seule grandeur suffit pour déterminer la forme d'une courbe d'une certaine espèce, toutes les courbes de cette espèce sont semblables, car un simple changement d'échelle permet de les faire coïncider. Ainsi tous les cercles sont semblables, *toutes les paraboles sont semblables*. Si la forme de la courbe dépend de plusieurs données distinctes et indépendantes, il faut que les données angulaires homologues soient égales et les données linéaires homologues proportionnelles ; car, le changement d'échelle ne permettant de rendre égaux que deux éléments linéaires homologues, l'égalité des autres éléments linéaires homologues doit résulter de celle des deux premiers. C'est ainsi que la similitude de deux ellipses ou de deux hyperboles consiste dans la proportionnalité de leurs axes.

Quand deux paraboles ont leurs axes parallèles, elles sont homothétiques ; elles touchent la droite de l'infini au même point : c'est le point situé sur leurs axes parallèles.

MÉTHODE FONDÉE SUR LA PROJECTION CONIQUE.

1183. Nous avons dit que c'était surtout à propos des coniques qu'apparaîtrait la portée de cette méthode, dont nous avons exposé les premiers principes aux n^{os} 725, 726 et 727.

Voici un premier exemple, important par lui-même et par la facilité avec laquelle la méthode s'y applique :

Un triangle ABC *étant tracé dans le plan d'une conique qui rencontre ses côtés consécutifs* AB, BC, CA, *en trois couples de points* (c, c'), (a, a'), (b, b'), *les segments que ces points forment sur les côtés ont entre eux la relation*

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'}=1.$$

En effet, cette relation est projective ; car, lorsqu'on a chassé le dénominateur, on voit qu'elle satisfait aux conditions prescrites dans le n° 727. D'ailleurs, elle est évidente sur le cercle, à cause de la propriété des sécantes ; donc elle convient à une section conique quelconque, puisqu'une telle courbe peut toujours être projetée suivant un cercle.

Ce théorème, dû à Carnot (*Géométrie de position*, p. 437), est la généralisation de celui de Ménélaüs (310). Il a de nombreuses conséquences. Par exemple, si le sommet B du triangle ABC est à l'infini, la relation précédente devient

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'}.$$

Or, si par un point quelconque D de la droite Caa' on mène une parallèle à AC, qui rencontre la conique en e et e', on aura de même

$$\frac{De.De'}{Da.Da'} = \frac{Cb.Cb'}{Ca.Ca'};$$

d'où, en rapprochant les deux équations précédentes,

$$\frac{Ab.Ab'}{Ac.Ac'} = \frac{De.De'}{Da.Da'}.$$

Donc : *Si dans le plan d'une conique on mène par un point quelconque* A *deux droites parallèles à deux axes fixes, le rapport des produits des segments (réels ou imaginaires) que la courbe détermine sur ces droites à partir de leur point commun* A *est constant*. Ce théorème est dû à Newton (*Énumération des courbes du troisième ordre*).

1184. Pour montrer toute la fécondité de cette méthode relativement à la recherche des propriétés des sections coniques, il faut établir quelques nouveaux principes.

1° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte qu'une droite* L *de son plan passe à l'infini, et qu'un point f de ce même plan se projette au foyer de la nouvelle conique* C'. — Le point F doit, d'après cela, être à l'intérieur de la conique C. Par suite, l'involution déterminée sur la droite L par tous les couples de droites conjuguées issues du point F a ses points doubles imaginaires (1140), de sorte qu'il existe de part et d'autre de L deux points P et P' de chacun desquels on voit sous un angle droit les divers segments de l'involution. Plaçons le sommet S du cône sur la circonférence décrite, dans un plan perpendiculaire à celui de la conique C, sur PP' comme diamètre, et prenons pour plan de projection un plan parallèle à celui du sommet S et de la droite L. De cette façon, la droite L passera à l'infini dans la projection, et chaque couple de droites conjuguées issues du point f deviendra en projection un couple de droites rectangulaires et conjuguées par rapport à la conique C'. La projection du point f sera donc (1155) un foyer de cette nouvelle courbe C'. Ajoutons que cette conique C' sera une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que la droite L coupera la conique primitive C en deux points réels, imaginaires ou coïncidents.

Le pôle o de la droite L, par rapport à la conique C, deviendra en projection le centre de la conique C′ (1142). *On peut donc projeter une conique* C *de manière que deux points f et o de son plan deviennent, en projection, l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique* C′.

En particulier, si f coïncide avec le pôle o de la droite L par rapport à la conique C, le même point sera en projection le centre et le foyer de la nouvelle conique C′, qui dès lors sera un cercle. *On peut donc projeter une conique suivant un cercle de telle sorte qu'un point de son plan se projette au centre du cercle ou qu'une droite de son plan passe à l'infini.*

2° *On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux cercles.* — Il faut évidemment que les deux coniques proposées aient au plus deux points communs réels ; il existe alors une corde commune réelle qui rencontre les deux coniques en deux points imaginaires (1170, 2°). En projetant de telle sorte que l'une des coniques devienne un cercle et que cette corde commune passe à l'infini, l'autre conique donnera aussi un cercle, car les deux courbes ayant en projection une corde commune à l'infini seront homothétiques (1180), et la figure homothétique d'un cercle est un cercle.

Si les deux coniques proposées ont un double contact imaginaire, on peut les projeter suivant deux cercles concentriques. Car, en projetant l'une des coniques suivant un cercle de telle sorte que la corde de contact passe à l'infini, l'autre conique donnera un cercle de même centre, puisque les deux courbes en projection ayant un double contact sur la droite de l'infini devront être homothétiques et concentriques.

Les deux droites qui joignent le foyer d'une conique aux points circulaires à l'infini sont tangentes à la conique (1162), et la corde de contact est la polaire du foyer, c'est-à-dire la directrice. Donc, *deux coniques qui ont même foyer et même directrice peuvent être projetées suivant deux cercles concentriques,* attendu qu'elles ont un double contact imaginaire sur la directrice commune.

3° *On peut projeter une conique* C *de telle sorte que deux points* (*intérieurs*) *de son plan, f et f', deviennent en projection les deux foyers de la nouvelle conique* C′. — En effet, en désignant par a et a' les points où la droite ff' coupe la conique C, et par k et k' les points qui divisent à la fois harmoniquement les segments aa' et ff', il suffit de projeter de telle sorte que f et k deviennent l'un le foyer, l'autre le centre de la nouvelle conique C′. Alors la projection de f' sera évidemment l'autre foyer.

On peut projeter deux coniques situées dans un même plan suivant deux coniques confocales. — Ces deux coniques doivent avoir un seul couple d'ombilics réels, et ces deux ombilics doivent être intérieurs à l'une et à l'autre courbe. Cela étant, il suffit de projeter de manière que ces deux ombilics deviennent en projection les deux foyers de l'une des courbes; ils seront par cela même les deux foyers de l'autre (1161).

Voici des applications :

Dans tout quadrilatère inscrit à une conique, l'intersection des deux diagonales est le pôle de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés; les diagonales de ce quadrilatère et celles du quadrilatère dont les côtés sont les tangentes à la conique menées par les sommets du quadrilatère inscrit se coupent au même point et forment un faisceau harmonique. Car, en projetant la conique suivant un cercle, de telle sorte que la droite qui joint les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit passe à l'infini, le théorème devient évident.

Quand deux coniques ont un double contact, toute corde de l'une qui est tangente à l'autre est divisée harmoniquement par le point de contact et par le point où elle rencontre la corde de contact des deux coniques. Car, en projetant les deux coniques suivant deux cercles concentriques, on transforme cette proposition dans la suivante, qui est évidente : *Toute corde d'un cercle tangente à un cercle concentrique a son milieu au point de contact.*

Si deux côtés d'un triangle inscrit à une conique passent chacun par un point fixe, le troisième côté enveloppe une conique qui a un double contact avec la première sur la droite qui joint les deux points fixes. Car, en projetant la conique suivant un cercle de telle sorte que les deux points fixes passent à l'infini, on retombe sur ce théorème : *Si deux côtés d'un triangle inscrit dans un cercle sont parallèles à deux droites données, le troisième côté enveloppe un cercle concentrique,* ce qui est évident, puisque l'angle au sommet du triangle est constant.

On voit immédiatement que *le lieu des centres des cercles qui passent par un point fixe et qui touchent une droite fixe est une parabole dont le point fixe est le foyer.* En transformant par projection ce théorème, et remarquant que le point fixe ou foyer et les deux points cycliques forment un triangle circonscrit à la parabole, on obtient la proposition suivante : *Étant donnés un triangle et une droite, si l'on conçoit toutes les coniques circonscrites à ce triangle et tangentes à cette droite, le lieu des points de concours des tangentes à deux des sommets du triangle est une conique inscrite dans ce triangle.*

Nous avons démontré (1164) que *le cercle circonscrit à tout triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer :* en remarquant que le foyer et les deux points cycliques forment un second triangle circonscrit à la parabole, et, transformant par projection, on arrive à ce théorème : *Si deux triangles sont circonscrits à une conique, leurs six sommets sont situés sur une conique.*

1183. La solution générale du problème de la *transformation des relations angulaires* est due à M. Laguerre (*Nouvelles Annales,* 1853). Elle repose sur le principe suivant :

Le rapport anharmonique

$$\frac{\sin uog}{\sin vog} : \frac{\sin uoh}{\sin voh} \tag{1}$$

du faisceau formé par les côtés d'un angle $uov = \theta$ *et par les droites qui joignent son sommet aux points cycliques* g *et* h *du plan est égal à* $e^{2\theta\sqrt{-1}}$. En effet, m étant un point d'un cercle ayant o pour centre et R pour rayon, on a, en menant mp parallèle à ov jusqu'à sa rencontre avec ou,

$$\overline{op}^2 + \overline{pm}^2 + 2op.pm\cos\theta = R^2 \quad \text{et} \quad \frac{\sin uom}{\sin vom} = -\frac{pm}{op},$$

d'où, en désignant par z ce rapport de sinus,

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = \frac{R}{op^2}.$$

Or, si m est l'un des points g ou h, op est infini, et l'on voit que le rapport anharmonique a bien la valeur énoncée, puisqu'il est égal au quotient des racines de l'équation

$$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0.$$

Cela posé, soit $uov = \theta$ un angle quelconque, UOV sa projection, G et H les projections des points cycliques g et h du plan uov; en désignant par ρ et nommant *rapport anharmonique relatif à l'angle* UOV le rapport (1), dans lequel on remplace chaque lettre par la lettre majuscule correspondante, on a, en vertu de la projectivité du rapport anharmonique,

$$e^{2\theta\sqrt{-1}} = \rho, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho.$$

Telle est la relation entre un angle et sa projection. Donc enfin, à une relation quelconque

$$f(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_u) = 0$$

entre les angles $\theta_1, \ldots, \theta_u$ d'une figure répond, entre les angles $\theta'_1, \ldots, \theta'_u$ de la figure projection, la relation

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_1, \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_2, \ \ldots, \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\rho_u\right) = 0,$$

où ρ_k désigne le rapport anharmonique relatif à l'angle θ'_k.

Remarquons que, dans le cas particulier de $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\rho = e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$; donc, *à tout angle droit d'une figure répond, dans la figure projection,* *un angle dont les côtés divisent harmoniquement les droites qui joignent le sommet aux projections des points cycliques.*

Voici quelques applications :

Deux coniques confocales se coupent orthogonalement (1161).

Si deux coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, les deux tangentes à l'un des points communs divisent harmoniquement une diagonale quelconque de ce quadrilatère.

Le lieu des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole est un cercle (990, 1021).

Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une ligne droite donnée ab, est une conique passant par les points a et b.

Le lieu des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice (1048).

Le lieu des angles circonscrits à une conique, dont les côtés divisent harmoniquement une tangente ab à cette conique, est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de a et de b.

Si autour du centre d'un cercle comme sommet on fait tourner un angle de grandeur constante, la corde qu'il intercepte dans le cercle enveloppe un cercle concentrique.

Si autour d'un point fixe on fait tourner deux rayons formant deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles soient les tangentes à une conique, la corde interceptée dans la conique enveloppe une autre conique qui a avec la première un double contact sur la polaire du point fixe.

TRACÉS RELATIFS AUX CONIQUES.

1186. *Construire une conique connaissant :*

1° *Cinq points a, b, c, d, e.* — $abcd$ forme un quadrilatère inscrit dans la conique cherchée. Par le point e, on mènera une droite quelconque ef, et l'on cherchera le point f conjugué du point e dans l'involution déterminée sur cette droite par les points où elle rencontre les côtés opposés du quadrilatère. Le point f appartiendra à la conique.

Si l'on veut trouver la tangente bt en b, on regardera $acbt$ comme un quadrilatère inscrit, dont deux sommets sont infiniment voisins en b, et la droite cd comme une transversale de ce quadrilatère. Cette transversale coupe les côtés opposés ba, bc, en α, γ, la courbe en c et d, et les côtés opposés ac, bt, en δ et x. Ces six points formant une involution, on déterminera le point x, et par suite la tangente bt.

2° *Cinq tangentes,* A, B, C, D, E. — Quatre des tangentes données forment un quadrilatère circonscrit. Qu'on prenne sur la cinquième un point quelconque a et qu'on le joigne aux quatre sommets du quadrilatère; le sixième rayon, conjugué à la cinquième tangente dans l'involution que ces quatre droites déterminent, est une tangente issue du point a.

Supposons qu'on veuille trouver le point de contact de la tangente B. On considère le quadrilatère formé par les tangentes A, C, B, dont deux côtés se confondent en un seul suivant B, et dont (A, C), (A, B), (B, C) et t sont les quatre sommets. Le sommet t est inconnu, mais les six rayons qui aboutissent au point de concours I de D et E, savoir : D, E, I (A, B), I (B, C), I (A, C), It, sont en involution, et cinq sont connus. Il sera donc facile de déterminer le sixième et, par suite, le point cherché t.

Dans le cas de la parabole, la cinquième tangente est donnée implicitement : c'est la droite de l'infini. Les quatre qui sont données forment un quadrilatère. Par les sommets de ce quadrilatère, on mènera quatre parallèles dans une direction arbitraire; on les coupera par une transversale quelconque, sur laquelle on cherchera le point central de l'involution qu'elles y déterminent, et la parallèle aux autres droites menée par ce point sera une cinquième tangente.

3° *Quatre points et une tangente.* — Soient $abcd$ le quadrilatère donné et e le point de contact inconnu de la tangente. Soient α, α', et β, β', les points où cette tangente rencontre successivement les côtés opposés du quadrilatère. Ces points déterminent une involution dont e est un point double. Il sera donc facile de le trouver. On voit que la question a deux solutions.

Dans le cas de la parabole, la tangente est à l'infini. Soit S le point de concours des côtés opposés ad et bc du quadrilatère donné. Qu'on mène Sc', Sd', parallèles respectivement aux deux autres côtés opposés; on a quatre rayons Sc', Sd', Sc, Sd, issus du point S, qui, conjugués deux à deux, déterminent une involution. Chacun des deux rayons doubles de cette involution est parallèle à l'axe d'une parabole qui satisfait à la question.

4° *Quatre tangentes et un point.* — On trouve une cinquième tangente en cherchant les rayons doubles de l'involution qui est déterminée par les quatre rayons, conjugués deux à deux, qu'on obtient en joignant le point donné aux sommets du quadrilatère formé par les quatre tangentes données. Chacun des deux rayons doubles est une tangente à la conique; on a donc deux solutions distinctes.

Pour la parabole, on donne un point et trois tangentes; la quatrième est à l'infini. La solution est la même; deux des rayons de l'involution sont parallèles respectivement à deux des tangentes données.

5° *Trois points et deux tangentes.* — Soient a, b, c, les trois points donnés, T et T′ les deux tangentes qui se coupent en O et qui touchent respectivement la courbe aux deux points d et e qu'il s'agit de déterminer. On peut regarder la corde de contact de comme représentant un quadrilatère inscrit dont deux sommets sont en d et les deux autres en e. La corde bc, considérée comme une transversale du quadrilatère et de la courbe, fournit une relation d'involution, en vertu du théorème de Desargues, entre les six points où elle coupe les côtés opposés du quadrilatère et la courbe. Ces points se réduisent ici à cinq, savoir : t, t', sur les tangentes dO, eO, respectivement; ε, sur les deux autres côtés opposés qui se confondent en un seul de; et enfin b, c, sur la courbe. Le point ε est donc un point double de l'involution déterminée par les segments bc, tt'. — Si l'on prend ab comme transversale au lieu de bc, on trouvera de même un point φ appartenant à la corde de contact de, qui sera ainsi déterminée par les deux points ε et φ. Mais comme chacune des deux relations d'involution fournit deux points doubles ε et ε', φ et φ', on obtiendra quatre positions distinctes de la corde de, savoir : $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon\varphi'$, $\varepsilon'\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, c'est-à-dire quatre solutions du problème proposé.

Dans le cas de la parabole où l'on ne donne qu'une tangente et trois points, on obtient de même quatre solutions. La tangente T′ est à l'infini, ainsi que le point t'; donc, le point t qui lui est conjugué dans l'involution est le point central de cette involution, dont on connaît en outre le segment bc et dont il s'agit de trouver les points doubles. Chacune des quatre cordes de contact $\varepsilon\varphi$ est un diamètre d'une parabole satisfaisant aux conditions proposées.

6° *Trois tangentes et deux points.* — Nous allons déterminer deux nouvelles tangentes à la courbe aux points donnés a et b. Soient AB, BC, CD, celles qui sont données. Désignons par O le point de contact inconnu des deux tangentes cherchées; si l'on regarde l'angle bOa comme un quadrilatère circonscrit OaOb dont les côtés adjacents se sont confondus deux à deux en un seul Oa ou Ob, on verra que la droite BO est un rayon double de l'involution formée par les deux couples de rayons conjugués Ba et Bb, BA et BC. Pareillement, CO est un rayon double de l'involution Ca, Cb, CB, CD. Donc, le point O, intersection des rayons BO et CO, est déterminé. Mais, comme chacune des involutions comporte deux tels rayons, on obtient quatre positions distinctes du point O, et, par conséquent, le problème admet, comme le précédent, quatre solutions.

S'il s'agit d'une parabole, l'une des trois tangentes données est à l'infini, BC par exemple. La construction reste la même en principe; mais ici les deux faisceaux de rayons en involution se composent de droites parallèles, puisque leurs rayons respectifs B et C sont à l'infini. Coupons-les par une transversale quelconque. On aura sur cette droite, relativement au premier faisceau : deux points α, β, intersections des rayons conjugués aB, bB ; un point ω, intersection du rayon AB dont le conjugué CB est à l'infini, ce qui est cause que ω est le point central de l'involution ; enfin un point double x, intersection du rayon BX, et qu'il s'agit de déterminer. Relativement au second faisceau, on aura de même deux points conjugués d'une involution α', β', un point central ω', et l'on déterminera un point double y. Les droites xO, yO, parallèles respectivement aux deux tangentes données AB, DC, se couperont au sommet O de l'angle circonscrit à l'arc ab de la parabole, et l'on aura encore quatre solutions, parce que l'on obtiendra deux positions du point x et deux positions du point y.

1187. Les solutions précédentes, qui sont extraites d'un excellent article de M. de Jonquières, publié dans le tome XVI des *Nouvelles Annales* (1re série), sont fondées sur le théorème de Desargues et le théorème corrélatif.

Les autres théorèmes généraux (proposition fondamentale du n° 1131, théorème de Pascal, théorème de Carnot, etc.) fourniraient de nouvelles solutions.

Reprenons, par exemple, le premier cas, c'est-à-dire celui où l'on donne cinq points a, b, c, d, e, et appliquons la proposition fondamentale du n° 1131. On prendra deux des points donnés d et e comme sommets des deux faisceaux homographiques dont on aura alors trois couples (da, ea), (db, eb), (dc, ec) de rayons homologues. L'intersection d'une droite dm menée à volonté par d et de son homologue em sera un nouveau point de la conique. — La tangente au point d sera l'homologue du rayon ed considéré comme appartenant au faisceau (e), et cette construction donnera la tangente en un point quelconque de la conique, car il suffira de considérer ce point comme le sommet de l'un des faisceaux générateurs. — Les points où une droite donnée L rencontre la conique seront les points doubles des deux divisions tracées sur cette droite par les deux faisceaux. — Les directions des asymptotes s'obtiendront en transportant le faisceau (e) parallèlement à lui-même au sommet d, et prenant les rayons doubles du faisceau (d) et du faisceau (e) ainsi transporté ; car ces rayons doubles sont les rayons du faisceau (d) dont les homologues dans (e) sont parallèles. — Enfin, une fois les deux points à l'infini ω et ω' ainsi déterminés, on aura les asymptotes elles-mêmes en menant les tangentes en ces deux points, ce qui se fait en considérant la conique comme engendrée par deux faisceaux ayant ω et ω' pour centres et prenant dans chaque faisceau l'homologue de la droite à l'infini $\omega\omega'$. Voici le détail de ces opérations : par a, b, c, on mène des parallèles $a\alpha$,

$b\beta$, $c\gamma$, et $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, aux droites déjà trouvées $d\omega$, $d\omega'$; soient α, β, γ, α', β', γ', les points où ces droites rencontrent une transversale quelconque L; la droite $\omega\omega'$ rencontre L à l'infini; on déterminera les points I et J' conjugués de l'infini dans les deux divisions déterminées par les trois couples (α, α'), (β, β'), (γ, γ'); les droites menées par I parallèlement à $d\omega$ et par J' parallèlement à $d\omega'$ seront les asymptotes.

Indiquons maintenant la solution fondée sur le théorème de Pascal. — Pour avoir le point f où une droite quelconque menée par a rencontre la courbe, on considérera l'hexagone inscrit dont les sommets seraient a, b, c, d, e, f (*fig.* 212). On prendra le point n commun aux côtés opposés af et cd, le point l commun à ab et de; la droite nl contiendra le point de concours du côté bc et du côté inconnu ef; on aura donc ce point de concours m par la rencontre de bc et de ln. Dès lors, les droites af et me donneront le point demandé f. — On obtient la tangente en a en considérant le pentagone $abcde$ comme un hexagone $abcdef$ dont deux sommets voisins a et f seraient confondus; le côté af est alors remplacé par la tangente en a, qu'il s'agit de déterminer. A cet effet, on prendra l'intersection l de baf et de de, l'intersection m de bc et de ea; la droite ml sera la droite qui joint les points de concours des couples de côtés opposés; elle contiendra donc le point de concours de cd et de la tangente en a; ce point sera donc à la rencontre n de cd et de ml, et an sera la tangente cherchée. Ces constructions sont, au fond, d'une grande simplicité.

La tangente en a une fois connue, on peut trouver les éléments de la courbe par la théorie des figures homologiques, comme nous l'avons expliqué au n° 1179, 3°.

Nous devons faire connaître ici une généralisation remarquable du théorème de Pascal, qui est due à M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3e série, tome VIII) et qui donne neuf points en ligne droite.

La proposition de M. Aubert peut s'énoncer ainsi :

Si deux triangles ABC, A'B'C' *inscrits dans une conique sont homologiques, et si l'on prend un point* I *sur la conique, les points de concours* α, β, γ *des droites* BC *et* IA', CA *et* IB', AB *et* IC' *sont situés sur une même droite* L *passant par le centre d'homologie* D.

En effet, considérons les trois hexagones IA'ABCC', IB'BCAA', IC'CABB'; ils ont un sommet commun I et chacun des autres sommets se déduit de ceux de l'hexagone précédent par une permutation circulaire effectuée sur les lettres. Les trois droites de Pascal correspondantes

$$\left|\begin{matrix} IA' & A'A & AB \\ BC & CC' & IC' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} IB' & B'B & BC \\ CA & AA' & IA' \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} IC' & C'C & CA \\ AB & BB' & IB' \end{matrix}\right|$$

sont

$$\alpha D\gamma, \quad \beta D\alpha, \quad \gamma D\beta.$$

Chacune d'elles ayant deux points communs avec chacune des deux autres, ces trois droites coïncident et, par suite, les points α, β, γ, D sont en ligne droite.

Ce théorème a de nombreuses conséquences; nous signalerons seulement son application à la construction d'une conique donnée par cinq points I, A, B, A', B'.

Par le point de concours D de AA' et BB', menons une droite quelconque L et soient α, β, γ les points où L rencontre IA', IB' et AB. Les droites αB et βA donnent un point C de la conique, et les droites CD et Iγ en donnent un autre C'.

En conservant le même point I, on peut échanger soit simultanément, soit séparément, les lettres A et A' d'une part, B et B' de l'autre. Avec chacune de ces nouvelles combinaisons de points, la même droite L fournit deux nouveaux points de la conique; on obtient donc huit points de la conique à l'aide de cette droite L.

1188. On a souvent à déterminer une conique par des conditions autres que celles de passer par des points ou de toucher certaines droites.

On dit qu'une condition est *simple* lorsque la recherche d'une conique assujettie à remplir cette condition et à passer en outre par quatre points est un problème déterminé.

Il est évident, d'après cela, que *donner un point* ou *une tangente* équivaut à une condition simple (1186), et qu'il faut cinq conditions simples pour déterminer une conique.

Une tangente et son point de contact valent deux conditions; par suite, il en est de même d'une asymptote; une parallèle à une asymptote ne vaut qu'une condition, puisque cela revient à donner un point situé à l'infini sur cette parallèle.

Un point p du plan et sa polaire P valent deux conditions; car, si l'on donne en outre trois points a, b, c, de la conique, on aura trois nouveaux points a', b', c', de la courbe en prenant les conjugués harmoniques de a, b, c, par rapport aux segments interceptés sur les droites pa, pb, pc, entre le point p et sa polaire P. — *Un point du plan et un point de sa polaire* équivalent à une seule condition.

Le *centre* vaut deux conditions, puisque c'est le pôle de la droite de l'infini.

Un *foyer* vaut aussi deux conditions, puisque les droites qui joignent ce point aux deux points cycliques du plan sont tangentes à la conique. On peut aussi remarquer qu'un foyer f et trois points a, b, c, déterminent la conique : la directrice coupe en effet la droite ab sur la bissectrice du supplément de l'angle afb (1158), etc.

Un *axe* vaut deux conditions, puisque, si l'on donne en outre trois points de la conique, on a trois nouveaux points de cette courbe en prenant les symétriques des premiers par rapport à l'axe. Il résulte de là qu'un *sommet* équivaut à deux conditions, car, si l'on donne en outre la tangente en ce point, on aura par là même un axe et un point, c'est-à-dire trois conditions.

Dire qu'une conique est une parabole équivaut à une condition, puisque c'est donner une tangente (la droite de l'infini). — *Dire que la conique est un cercle* équivaut à deux conditions, puisque c'est donner deux points de la courbe (les deux points cycliques du plan). — *Savoir qu'une conique est une hyperbole équilatère* équivaut à une condition; cela résulte de ce que deux points A et B et une asymptote L (c'est-à-dire quatre conditions) déterminent une hyperbole équilatère. En effet, le théorème des sécantes donne le point où la corde AB coupe l'autre asymptote qui est dès lors déterminée puisqu'elle est perpendiculaire à la première.

1189. A tout système de *quatre* conditions simples répondent une infinité de coniques formant un groupe. Soient μ et ν les nombres des coniques du groupe qui remplissent, outre les quatre conditions données, celle de passer par un point donné ou de toucher une droite donnée. Les nombres μ et ν ont reçu le nom de *caractéristiques* du groupe considéré.

Il résulte des solutions données aux nos 1186 et suivants que les groupes de coniques passant par quatre points, passant par trois points et touchant une droite, passant par deux points et touchant deux droites, passant par un point et touchant trois droites, touchant quatre droites, ont respectivement pour caractéristiques

$$(\mu = 1,\ \nu = 2),\quad (2,\ 4),\quad (4,\ 4),\quad (4,\ 2),\quad (2,\ 1).$$

Les propriétés d'un groupe de coniques dépendent essentiellement des caractéristiques de ce groupe, et l'étude de cette dépendance constitue une belle théorie créée tout récemment par M. Chasles et par ses continuateurs, de Jonquières, Zeuthen, etc. Nous ne saurions exposer même les principes de cette théorie sans sortir de notre cadre; nous nous bornerons à offrir au lecteur un exemple très-simple.

Le lieu des pôles d'une droite fixe L, *par rapport aux coniques du* *groupe qui a pour caractéristiques* μ *et* ν, *est une ligne de l'ordre* ν. En effet, la droite L ne peut rencontrer le lieu qu'autant qu'elle contient son pôle, c'est-à-dire que lorsqu'elle touche l'une des coniques du système ; or le nombre des coniques du groupe qui touchent une droite quelconque, et par suite la droite donnée, est par hypothèse égal à ν.

On conclut de là, en supposant la droite L à l'infini, que *le lieu des centres des coniques passant par quatre points donnés* est de l'ordre 2, c'est-à-dire *est une conique*, et que le *lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites* est de l'ordre 1, c'est-à-dire est *une ligne droite*; nous avons déjà trouvé ces deux théorèmes par une autre voie.

1190. *Construire les points communs à deux coniques* Σ *et* Σ'.

On commencera par chercher les pôles doubles (1171). Pour cela, on construira une conique auxiliaire G, lieu des points de rencontre des polaires par rapport à Σ et à Σ' des divers points d'une droite L choisie à volonté. On construira de même une seconde conique auxiliaire G', définie de la même manière relativement à une seconde droite L' prise aussi arbitrairement. Ces deux coniques G et G' auront évidemment en commun le point ω d'intersection des polaires par rapport à Σ et à Σ' du point de rencontre des droites L et L' ; elles auront donc trois autres points communs ; ces points seront les pôles doubles p, p', p''. En effet, soit m l'un de ces points communs ; puisqu'il appartient à la conique G, il sera à la rencontre des polaires d'un certain point n de L et, par suite, inversement, les polaires de m passeront par n ; de même, puisque m appartient à la conique G', ses polaires passeront par un certain point n' de la droite L' ; donc les polaires du point m coïncideront l'une et l'autre avec la droite nn', ce qui démontre que m est un pôle double.

Cela posé, deux cas peuvent se présenter :

Si les coniques auxiliaires G et G' n'ont que deux points communs réels ω et p, il n'y aura qu'un pôle double réel. On déterminera alors les deux cordes communes qui passent par ce point ; leurs intersections avec l'une des coniques seront les points demandés ; deux d'entre eux seulement seront réels (1171). Pour avoir les deux cordes communes, on prendra deux points à volonté u et v ; on cherchera le point commun u' aux deux polaires de u et le point commun v' aux deux polaires de v ; les cordes communes demandées diviseront harmoniquement les deux angles upu', vpv' ; en effet, la polaire de u par rapport au système des deux cordes communes passe (1174) par u' ; cette polaire est donc pu', et, par suite, pu et pu' sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux cordes communes.

Si les coniques auxiliaires G et G' ont quatre points communs réels ω, p, p', p'', il y a trois pôles doubles réels p, p', p'' ; par chacun d'eux passe un couple de cordes communes, et l'un de ces couples au moins est réel ;

on le déterminera comme ci-dessus, et l'on prendra les intersections des droites du couple avec l'une des coniques; les quatre points seront tous réels ou tous imaginaires.

On voit que la solution consiste à réduire la question à la recherche analogue pour deux autres coniques qui passent par un point connu. On remplace ainsi un problème du quatrième degré par un problème du troisième; au fond, on ne fait pas autre chose en Géométrie analytique, puisqu'on y ramène la question à la résolution d'une équation du troisième degré connue sous le nom d'*équation en* λ.

La *recherche des tangentes communes* s'effectue par des tracés corrélatifs des précédents et qu'il suffit, dès lors, d'indiquer d'une manière rapide.

Autour d'un point pris à volonté, on fait tourner une droite dont on prend les pôles par rapport à Σ et à Σ'; la droite qui joint ces pôles enveloppe une conique auxiliaire. Un second point, choisi aussi d'une manière arbitraire, donne d'une manière analogue une seconde conique. Ces deux coniques auxiliaires touchent l'une et l'autre la droite ϖ passant par les pôles de la ligne qui unit les deux points choisis; elles ont donc trois autres tangentes communes, dont l'une au moins est réelle : ce sont les polaires doubles P, P', P''.

On pourrait d'ailleurs obtenir ces polaires doubles en déterminant d'abord les pôles doubles p, p', p'', comme au problème précédent, puis prenant leurs polaires par rapport à l'une des coniques données Σ et Σ'.

Cela posé, il peut se présenter deux cas :

Si une seule P des polaires doubles est réelle, on déterminera les deux ombilics placés sur cette droite, et par ces ombilics on mènera à l'une des coniques données des tangentes, dont deux seulement seront réelles. Pour trouver ces ombilics, on prend deux droites arbitraires U et V, on cherche la droite U' qui joint les pôles de U et la droite V' qui joint les pôles de V; les deux ombilics devront diviser harmoniquement chacun des deux segments interceptés sur P par U et U' et par V et V'.

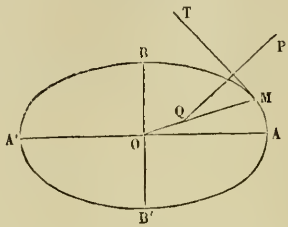
Si les trois polaires doubles P, P', P'', sont réelles, chacune d'elles contiendra un couple d'ombilics; l'un au moins de ces couples sera réel, et on le déterminera comme ci-dessus; puis, de ces points, on mènera à l'une des coniques données des tangentes qui seront toutes les quatre réelles ou toutes les quatre imaginaires.

1191. *Mener une normale à une conique* C *par un point* P *donné dans son plan* (*fig.* 602).

MT étant une tangente à la conique et OM le diamètre qui aboutit au point de contact M, abaissons du point P la perpendiculaire sur MT, et prenons le point Q où cette perpendiculaire rencontre OM. Quand le point

M décrit la conique, la perpendiculaire qui tourne autour de P et le diamètre OM qui tourne autour du centre O de la conique décrivent deux faisceaux qui sont homographiques, puisque chacun d'eux est homographique du faisceau formé par la rotation du diamètre conjugué de OM. Le lieu du point Q est donc une conique H (1131) qui passe par les points O et P, qui touche au point P le rayon homologue de OP, c'est-à-dire la

Fig. 602.



perpendiculaire abaissée de P sur la tangente à la conique C au point où OP rencontre cette conique, et qui touche au point O le rayon homologue de PO, c'est-à-dire le diamètre qui aboutit au point de contact de la tangente perpendiculaire à PO. Enfin, cette conique H est une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique C; on voit en effet que, quand OM coïncide avec l'un des axes, le point Q passe à l'infini sur cet axe. Cela posé, si M_1 est le pied d'une normale menée du point P sur la conique C, PM_1 est perpendiculaire à la tangente au point M_1; ce pied M_1 appartient donc au lieu H. On aura donc les pieds des normales en cherchant les points communs à la conique proposée C et à l'hyperbole H, qui est bien déterminée, puisqu'on en connaît deux points, les tangentes en ces points et les directions des asymptotes. Le problème a quatre solutions qui peuvent se réduire à deux. En particulier, quand le point P est sur l'un des axes, l'hyperbole se décompose en deux droites rectangulaires dont l'une est cet axe même. Dans le cas où la conique proposée C est une parabole, l'axe de cette parabole est une asymptote de l'hyperbole équilatère H, qui est ainsi bien déterminée, puisqu'on connaît en outre un de ses points P et la tangente en ce point; les deux courbes C et H ont alors, en commun, outre un point à l'infini, trois points dont l'un au moins est réel; d'où il suit que le problème a trois solutions ou une seule. Enfin, quand le point P est sur l'axe de la parabole C, l'hyperbole H se réduit à deux droites dont l'une est cet axe lui-même et l'autre, la perpendiculaire à cet axe située à une distance du point P égale au paramètre (1045).

L'emploi de cette hyperbole équilatère pour résoudre le problème des normales remonte à Apollonius. En transformant la solution précédente par polaires réciproques, la conique donnée étant prise pour directrice, on tomberait sur une nouvelle solution, dans laquelle les pieds des normales seraient les points où la conique C est touchée par les tangentes communes à cette conique et à une parabole aisée à déterminer. Ajoutons enfin qu'en prenant pour inconnues, non les pieds des normales, mais les points où la conique C est rencontrée par les perpendiculaires menées de l'un de ses sommets sur les quatre normales, on trouverait ces points par la rencontre de la conique donnée et d'un cercle (*voir* JOACHIMSTHAL, *Journal de Crelle*, t. XLVIII; et SMITH, *Annales de Tortolini*, 2e série, t. III).

Nous devons encore signaler sur ce sujet une proposition remarquable due à Joachimsthal.

Si d'un point on mène des normales à une ellipse, trois des points d'incidence N, P, Q, *et le point* M_1 *diamétralement opposé au quatrième* M *sont sur un même cercle.*

En effet, d'après le théorème de Desargues, l'ellipse, l'hyperbole d'Apollonius et le système des cordes communes MN et PQ déterminent sur chacun des axes de l'ellipse une involution; et, comme dans chacune de ces involutions le point conjugué de l'infini est évidemment le centre O de l'ellipse, on a, en désignant par A_1 et B_1 les points où les axes coupent MN et par A_2 et B_2 les points où les axes coupent PQ,

$$OB.OB' = OB_1.OB_2, \quad OA.OA' = OA_1.OA_2;$$

d'où, par division,

$$\frac{OB_1}{OA_1}\cdot\frac{OB_2}{OA_2} = \frac{b^2}{a^2},$$

ce qui exprime que le produit des coefficients angulaires des deux cordes MN et PQ est égal à $\frac{b^2}{a^2}$; mais le produit des coefficients angulaires des deux cordes supplémentaires NM et NM_1 est (1146, 1147) égal à $-\frac{b^2}{a^2}$. Donc les cordes PQ et NM_1 ont des coefficients angulaires égaux et de signes contraires; en d'autres termes, ces cordes sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. Par suite (1175), les points P, Q, N et M_1 sont sur un même cercle.

Le théorème et la démonstration subsistent pour l'hyperbole.

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A LA PARABOLE ET A L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE.

1192. *Construire une parabole connaissant deux tangentes* $A\beta$, $A\gamma$ *et la corde de contact* $\beta\gamma$ (*fig.* 603).

Ce problème se présente souvent en Mathématiques appliquées et notamment en Statique graphique.

La théorie des diamètres fournit un premier tracé par points et tangentes : on joint le point A au milieu O de la corde $\beta\gamma$; le milieu I de AO est un point de la courbe et la tangente en ce point I est parallèle à $\beta\gamma$. On continuera en opérant de même sur les angles circonscrits formés par la nouvelle tangente et les deux tangentes primitives.

Un autre tracé fort simple résulte du théorème suivant : *Si, par un point quelconque* M *de la corde de contact* $\beta\gamma$ *d'un angle* $\beta A \gamma$ *circonscrit à une parabole, on mène des parallèles* MB, MC *aux côtés de cet angle, la diagonale* BC *du quadrilatère* ABMC *ainsi formé est tangente à la parabole.* En outre, *on obtient le point de contact* α *de cette tangente* BC *en prenant* $C\alpha = O_1B$, O_1 *désignant le point où* BC *rencontre la médiane* AO *du triangle* $\beta A \gamma$. En effet, on sait (1154) que, pour qu'une droite mobile BC soit tangente à une parabole, il faut et il suffit qu'elle détermine sur deux tangentes fixes, $A\gamma$ et $A\beta$, des segments homologues proportionnels, c'est-à-dire que l'on ait

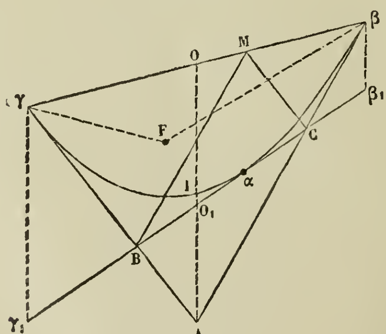
$$\frac{\gamma B}{BA} = \frac{AC}{C\beta}.$$

Or cette condition est ici remplie, car les deux rapports précédents sont respectivement égaux à

$$\frac{\gamma B}{MC}, \frac{BM}{C\beta},$$

dont l'égalité résulte de la similitude des triangles $MB\gamma$, βCM.

Fig. 603.



La première partie de l'énoncé se trouve ainsi établie. Pour démontrer la seconde, il suffit d'appliquer le théorème que nous venons de rappeler aux deux tangentes $B\alpha$, $B\gamma$ coupées par la tangente AC et aux deux tangentes $C\beta$ et $C\alpha$ coupées par la tangente AB. On obtient ainsi les deux proportions

$$\frac{\gamma A}{AB} = \frac{BC}{C\alpha},$$

$$\frac{\beta A}{AC} = \frac{CB}{B\alpha}$$

qui, si l'on désigne par O_1, γ_1 et β_1 les points où BC rencontre AO et les parallèles à AO menées par γ et β, peuvent être remplacées par

$$\frac{\gamma_1 O_1}{O_1 B} = \frac{BC}{C\alpha},$$

$$\frac{\beta_1 O_1}{O_1 C} = \frac{CB}{B\alpha};$$

on en conclut, en observant que $\gamma_1 O_1 = O_1 \beta_1$, la relation

$$\frac{O_1 B}{C\alpha} = \frac{CO_1}{\alpha B};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{O_1 B}{C\alpha} = \frac{CO_1 + O_1 B}{C\alpha + \alpha B} = \frac{CB}{CB} = 1$$

ou

$$C\alpha = O_1 B. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut aisément déterminer les éléments fondamentaux de la parabole, c'est-à-dire le foyer F et la directrice Δ.

Le tracé que l'on donne habituellement pour déterminer le foyer F consiste à prendre l'intersection de la droite γF symétrique de $\gamma\gamma_1$ par rapport à γA et de la droite βF symétrique de $\beta\beta_1$ par rapport à βA; c'est une conséquence immédiate de l'égale inclinaison de la tangente à la parabole sur le rayon vecteur et la parallèle à l'axe. M. Maurice d'Ocagne a fait observer (*Génie civil*, tome IX, page 91) que ce tracé devenait illusoire lorsque l'angle $\gamma A \beta$ formée par les tangentes données est droit, et il a proposé la solution suivante qui convient à tous les cas : *Élevez en* A *et* β *des perpendiculaires sur* Aβ, *en* A *et* γ *des perpendiculaires sur* Aγ ; *le foyer* F *sera la projection du point* A *sur celle des diagonales du parallélogramme ainsi formé qui ne passe pas par* A. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce tracé, attendu qu'il nous semble préférable, pour la détermination du foyer et de la directrice, de recourir au théorème suivant :

Si un triangle ABC *a ses côtés tangents à une parabole, le cercle circonscrit passe par le foyer* F *et le point de concours* H *des hauteurs est sur la directrice* Δ. En effet, la tangente au sommet de la parabole, contenant les projections du foyer F sur les tangentes, est la droite de Simson (169, 11°) relativement au triangle ABC et au point F; ce point F appartient donc au cercle circonscrit au triangle ABC. La seconde partie de l'énoncé résulte de ce que la droite de Simson est équidistante des points F et H (¹).

Si l'on applique successivement ce théorème au cas où la tangente variable BαC se confond avec l'une et l'autre des tangentes fixes données ABγ, ACβ, on voit que :

Le foyer F *est le second point d'intersection de deux cercles dont*

(¹) Le théorème énoncé en tête de cet alinéa permet de trouver une solution élégante du problème déjà résolu au n° 1186 et qui a pour objet la construction d'une *parabole dont on donne quatre tangentes* A, B, C, D. En effet, d'après le théorème en question, l'intersection des deux cercles circonscrits aux deux triangles (A, B, C), (B, C, D), donnera le foyer F de la parabole. On aura ensuite la directrice en joignant les symétriques de F par rapport à deux des tangentes.

On pourrait d'ailleurs ramener la construction de la parabole dont A, B, C, D sont quatre tangentes données, à la construction de la parabole dont on a deux tangentes A et B et leurs points de contact, c'est-à-dire au problème qui fait l'objet du n° 1192. Il suffit de montrer comment on trouve le point de contact α de l'une quelconque A des quatre tangentes données. Voici deux manières de procéder :

1° Après avoir obtenu, comme nous l'avons dit ci-dessus, le foyer et la directrice, par le symétrique du foyer par rapport à A, on mènera la parallèle à l'axe; cette droite coupera A au point cherché α.

2° Désignons par a, b, c les points d'intersection de A et de B, de B et de C, de C et de D, et appelons d et e les points où D et E rencontrent la droite de l'infini qui est, comme on sait, tangente à la parabole, on appliquera le théorème de Brianchon à l'hexagone ayant pour sommets les cinq points connus a, b, c, d, e et le point inconnu α. Le point ω étant l'intersection de $a\alpha$ et de bc qui sont respectivement parallèles à D et A, la droite ωc coupera A au point α.

l'un passe par β *et touche en* A *la droite* $A\gamma$ *et dont l'autre passe par* γ *et touche en* A *la droite* $A\beta$.

La directrice Δ *est la diagonale ne passant pas par* A, *du parallélogramme formé en menant par* A *et* β *des perpendiculaires à* $A\gamma$ *et par* A *et* γ *des perpendiculaires à* $A\beta$. D'ailleurs, dès qu'on a le foyer F, la directrice Δ s'ensuit, puisqu'elle doit contenir les symétriques de F par rapport aux deux tangentes données.

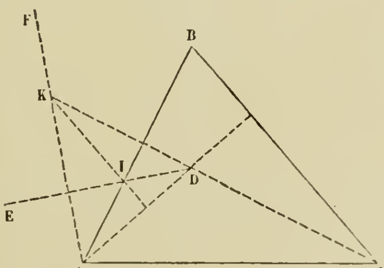
1193. *Construire une hyperbole équilatère dont on donne quatre points.*

La solution est fondée sur la proposition suivante (*fig.* 605) :

Quand un triangle ABC *est inscrit dans une hyperbole équilatère, le point de concours* H *des hauteurs est situé sur l'hyperbole et le cercle des neuf points passe par le centre* ω *de la courbe.*

En effet, soit D le second point d'intersection de l'hyperbole et de la hauteur issue du point C; la première partie de l'énoncé revient à dire que le point D n'est autre que H. Or, menons AF parallèle à l'une des asymptotes et DE parallèle à l'autre; désignons d'ailleurs par K le point

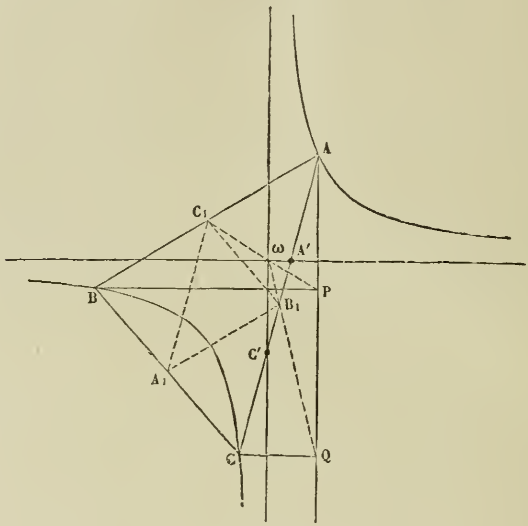
Fig. 605.



commun à AF et à CD et par I le point commun à DE et à AB. Le théorème de Pascal, appliqué à l'hexagone ABCDEF dont les derniers sommets sont à l'infini, montre que IK est parallèle à BC; mais AD est perpendiculaire à IK, puisque I est le point de concours des hauteurs du triangle ADK; donc AD est perpendiculaire à BC, et le point D ne diffère pas du point de concours H des hauteurs du triangle ABC.

Considérons la deuxième partie de l'énoncé (*fig.* 606); soient A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC; désignons par P et Q les projections de B et C sur la parallèle menée par A à l'une des asymptotes de l'hyperbole, de sorte que les projetantes BP, CQ sont parallèles à l'autre asymptote; enfin soient A′ et C′ les points où AC coupe les asymptotes. Le point B_1 sera, d'après la propriété des sécantes de l'hyperbole, à la fois le milieu de AC et celui de $A'C'$; ce sera donc le centre d'homothétie des deux triangles à côtés parallèles ACQ, $A'\omega C'$; donc ωB_1 passe par Q et, de même, ωC_1 passe par P. Cela posé, il

Fig. 606.



est aisé de voir que les angles sous lesquels on voit du point A et du point ω la droite B_1C_1 sont égaux ou supplémentaires (ils sont supplémentaires sur notre figure où ω et A sont placés du même côté de B_1C_1); donc les angles sous lesquels on voit B_1C_1 du point A_1 et du point ω sont aussi égaux ou supplémentaires et, par suite, le point ω appartient à la circonférence de cercle passant par A_1, B_1, C_1.

Chacune des deux parties du théorème précédent fournit un mode de solution du problème qui consiste à construire une hyperbole passant par quatre points donnés A, B, C, D.

D'après la première partie, on construira le point de concours H des hauteurs de l'un quelconque des quatre triangles ayant pour sommets trois des points donnés, et l'on sera ainsi ramené à la construction d'une conique dont on connaît cinq points A, B, C, D, H. Le problème a une infinité de solutions, si l'un des quatre points donnés est le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois autres.

D'après la seconde partie, on déterminera le point commun aux cercles des neuf points relatifs aux quatre triangles que l'on peut former avec les points donnés. Ce point ω sera le centre de l'hyperbole dont on obtiendra un cinquième point, en prenant le symétrique par rapport au centre de l'un des points donnés. Il y a indétermination dans le cas déjà cité, les quatre cercles des neuf points coïncidant.

Il est d'ailleurs facile de trouver les asymptotes de l'hyperbole; du milieu B_1 de AC comme centre, avec un rayon égal à $B_1\omega$, on décrira un cercle qui coupera AC aux points A' et C' où les asymptotes rencontrent ce côté.

III. — THÉORIE DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

PÔLE ET PLAN POLAIRE.

1194. On nomme *surfaces du second ordre* les surfaces dont toute section plane est une conique réelle ou imaginaire; d'où il suit qu'une droite quelconque a, avec une telle surface, deux points communs réels ou imaginaires, à moins qu'elle n'appartienne tout entière à la surface.

Si, par un point quelconque p de l'espace, on mène une droite quelconque L, *et si l'on prend sur cette droite le conjugué harmonique p' de p par rapport aux deux points m et m' communs à la droite* L *et à une surface du second ordre* Σ, *le lieu des points p', quand* L *se déplace autour de p, est un plan fixe* ϖ.

Observons d'abord que, si l'on mène deux plans quelconques par p, et si l'on prend les polaires de p par rapport aux deux coniques que ces plans déterminent sur la surface Σ, ces deux polaires ont un point commun : c'est le conjugué harmonique de p qui est situé sur l'intersection des deux plans. Cela posé, concevons par le point p deux plans fixes α et β arbitraires et un plan quelconque γ contenant la droite L; soient A, B, C les polaires de p par rapport aux coniques que les plans α, β, γ, déterminent sur la surface Σ. Le point p' est situé sur C; d'ailleurs, d'après l'observation ci-dessus, la droite C rencontre les droites fixes A et B qui se rencontrent elles-mêmes. Donc le point p' est constamment situé dans le plan fixe ϖ des deux droites A et B.

Le plan ϖ est dit le *plan polaire* du point p, et le point p est dit le *pôle* du plan ϖ, par rapport à la surface Σ.

Le plan polaire d'un point de la surface Σ *est le plan tangent en ce point,* puisque ce plan tangent contient toutes les tangentes en p aux sections faites par ce point, c'est-à-dire toutes les polaires de p par rapport à ces sections; inversement, *tout plan tangent a pour pôle son point de contact.*

La courbe de contact de tout cône circonscrit à la surface Σ *est la conique suivant laquelle le plan polaire* ϖ *du sommet* p *coupe la surface;* si cette conique est réelle, le point p est dit *extérieur* à la surface; si elle est imaginaire, le cône cesse d'exister, et le point p est dit *intérieur.* — *Par une droite donnée, on ne peut* donc *mener que deux plans tangents à une surface du second ordre* Σ ; car les plans tangents qu'on peut mener à une surface par une droite donnée sont les plans tangents menés par cette droite au cône qui a pour sommet un point quelconque de cette droite, et qui est circonscrit à la surface. — Il résulte de là que les surfaces du second ordre sont de la deuxième *classe,* en entendant par classe d'une surface le nombre des plans tangents qu'on peut mener à cette surface par une droite.

1195. *Le plan polaire de tout point d'un plan passe par le pôle de ce plan,* et, réciproquement, *le pôle de tout plan passant par un point est sur le plan polaire de ce point.* Par suite, *les plans polaires de tous les points d'une droite* L *passent par une droite* L′, et, inversement, *les pôles de tous les plans passant par une droite* L′ *sont sur une droite* L. Deux droites L et L′, telles que l'une contient les pôles des plans passant par l'autre, sont dites *conjuguées.* A toute droite L répond une droite conjuguée L′, et une seule; on l'obtient en joignant les pôles de deux plans menés à volonté par L, et en particulier en joignant les points de contact des plans tangents conduits par L.

Le pôle d'une droite L par rapport à la section faite dans la surface par un plan α contenant la droite L coïncide avec le pôle par rapport à la surface du plan que déterminent la droite L et le pôle a du plan α; il appartient donc à la conjuguée L′ de L. Donc, *si l'on coupe une surface du second ordre* Σ *par une série de plans contenant une même droite* L, *les pôles de cette droite* L *par rapport aux diverses sections sont sur une droite* L′ *qui contient encore les pôles de tous ces plans sécants par rapport à la surface et, en particulier, les points de contact des deux plans tangents conduits par la droite primitive* L.

Lorsque quatre points sont en ligne droite, leurs plans polaires forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.

Lorsque quatre droites concourantes sont situées dans un même plan, leurs conjuguées forment un faisceau plan qui a même rapport anharmonique que le faisceau primitif.

1196. Deux *points* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre, lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre. *Plusieurs* *couples de points conjugués sur une même droite forment une involution,* dont les points doubles sont les points communs à la droite et à la surface.

Deux *plans* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre lorsque le pôle de l'un est situé sur l'autre. *Plusieurs couples de plans conjugués passant par une même droite forment un faisceau de plans en involution* (c'est-à-dire un faisceau que toute transversale coupe suivant une suite de points en involution) : les plans doubles sont les deux plans tangents menés par la droite; il suit de là que, par *une droite quelconque, on peut toujours mener deux plans conjugués rectangulaires.*

Une *droite* et un *plan* sont dits *conjugués* par rapport à une surface du second ordre lorsque la droite passe par le pôle du plan. Quand un plan et une droite sont conjugués, le plan contient évidemment la conjuguée de la droite.

Tout point p de l'espace est le sommet d'une infinité d'angles trièdres dont chaque arête est conjuguée à la face opposée; car il suffit, pour avoir un tel trièdre, de joindre le point p à trois points a, b, c, choisis dans le plan polaire ϖ de p, de façon que chaque sommet du triangle abc soit le pôle du côté opposé par rapport à la conique que le plan ϖ détermine sur la surface. Un tel trièdre prend le nom de trièdre *polaire.*

PLANS DIAMÉTRAUX, DIAMÈTRES, CENTRE; SECTIONS PARALLÈLES.

1197. *Dans toute surface du second ordre, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est un plan :* c'est le plan polaire des points à l'infini communs à toutes ces parallèles. On donne à ce plan le nom de *plan diamétral conjugué à la direction des cordes.*

Le pôle du plan à l'infini est évidemment *commun à tous les plans diamétraux;* on le nomme *centre* de la surface.

Toute corde passant par le centre a son milieu en ce point et prend le nom de *diamètre.*

Un *diamètre* et un *plan diamétral* sont dits *conjugués* lorsque le diamètre passe par le pôle du plan diamétral (1196). A chaque diamètre répond un seul plan diamétral conjugué, et réciproquement.

1198. Le centre est le sommet d'une infinité d'angles trièdres polaires (1196), c'est-à-dire de trièdres dont chaque arête est le diamètre conjugué du plan diamétral déterminé par les deux autres. Les trois arêtes forment un système de trois diamètres conjugués deux à deux, et les trois faces un système de trois plans diamétraux conjugués deux à deux.

1199. *Si l'on coupe une surface du second ordre Σ par une série de plans parallèles* α_1, α_2, ..., c'est-à-dire par une série de plans ayant une droite commune L à l'infini, *les centres des sections seront* les pôles de cette droite L par rapport à ces sections : ils seront donc (1195) *tous situés sur une même droite* L' qui contient aussi les pôles des plans α_1, α_2, ..., par rapport à la surface ; cette droite est le *diamètre conjugué du plan diamétral* α *parallèle aux plans considérés,* puisqu'elle renferme à la fois le centre de la section faite par ce plan α et le pôle de ce plan. Les deux plans tangents parallèles aux plans considérés auront leurs pôles, c'est-à-dire leurs points de contact, sur cette droite L', d'où l'on voit que *tout plan tangent à une surface du second ordre est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui passe par le point de contact.* Enfin, si l'on mène deux plans conjugués quelconques par le diamètre L', le premier coupera les plans α_1, α_2, ..., suivant des droites A_1, A_2, ..., parallèles entre elles; le second coupera les mêmes plans suivant des droites A'_1, A'_2, ..., parallèles entre elles; d'ailleurs les couples (A_1, A'_1), (A_2, A'_2), ..., seront des diamètres conjugués des sections C_1, C_2, ..., faites par les plans α_1, α_2, ... Ainsi, à chaque système de diamètres conjugués dans la conique C_1 répondra, dans chacune des coniques C_2, ..., un système de diamètres conjugués respectivement parallèles à ceux de C_1. Donc *les sections* C_1, C_2, ..., *faites par des plans parallèles dans une surface du second ordre, sont semblables et semblablement placées.*

PLANS PRINCIPAUX ET SECTIONS CIRCULAIRES.

1200. Un plan diamétral est dit *principal* lorsqu'il est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales; le diamètre parallèle à ces cordes, c'est-à-dire le diamètre conjugué du plan principal, prend le nom d'*axe*.

La recherche des plans principaux et celle des sections circulaires dépendent des mêmes principes. Mais, avant d'aborder ce double problème, nous devons généraliser quelques idées émises en Géométrie plane.

On sait qu'un plan coupe une sphère suivant un cercle dont le rayon r est égal à

$$\sqrt{R^2 - d^2},$$

R désignant le rayon de la sphère et d la distance du centre au plan sécant. Si d est plus grand que R, le cercle cesse d'exister; mais, pour généraliser et en vertu de considérations que nous avons déjà indiquées plusieurs fois, on dit dans ce cas que la section est un *cercle imaginaire* dont le rayon a encore pour carré la quantité $R^2 - d^2$, qui est alors négative. Il est clair que les formules où entre le carré du rayon d'un cercle et les propositions géométriques qui en sont la traduction subsistent dans le cas où le carré du rayon devient négatif; mais, les points ou les droites que l'on considère dans ces théorèmes n'ayant plus dans le second cas les mêmes positions que dans le premier, il faudrait, si l'on excluait la considération du cercle imaginaire, employer dans les deux cas des énoncés différents, qu'aucun lien apparent ne rattacherait l'un à l'autre, tandis que l'emploi du cercle imaginaire permet de n'avoir qu'un théorème et d'exprimer la propriété dont il s'agit d'une manière plus saisissante et qui fait image.

Voici un exemple très-simple qui fera bien comprendre notre idée :

On sait que la polaire P d'un point p par rapport à un cercle de centre o est la droite menée perpendiculairement au diamètre op par le point p' de ce diamètre que détermine la relation

$$op.op' = r^2, \tag{1}$$

et l'on a démontré que les polaires des divers points d'une droite L passent par un même point. Dans cette définition de la polaire, aussi bien que dans la démonstration du théorème cité, le cercle n'a aucune part, et l'on ne fait intervenir en somme que les points o et p et la quantité r^2. La proposition subsiste donc dans le cas où r^2 est négatif; seulement, alors, il n'y a en réalité plus de cercle; la droite P, toujours définie par la relation (1), n'est plus, par rapport au point o, du même côté que le point p, et le théorème prend la forme suivante : *Si, par les divers points p d'une droite* L, *on mène à un point fixe o des rayons po sur lesquels on marque des points p' déterminés par la relation* (1), *les perpendiculaires élevées par ces points p' sur les rayons correspondants passeront par un point fixe*. On voit combien cet énoncé est lourd, et combien il est à la fois plus simple et plus clair d'exprimer le même fait en conservant l'énoncé primitif, à la condition de dire que le cercle est alors imaginaire et de donner à la droite P le nom de *polaire du point p par rapport à ce cercle imaginaire*. Bien que se rapportant à un cercle imaginaire, la proposition n'en aura pas moins une signification parfaitement précise et portant en définitive sur des choses réelles.

La formule (1) est susceptible d'une interprétation géométrique fort utile.

Supposons r^2 négatif, et soit r'^2 sa valeur absolue. Menons par o une droite perpendiculaire au plan et égale à r'; s étant l'extrémité de cette perpendiculaire, on aura

$$op.op' = os^2,$$

ce qui prouve que l'angle psp' est droit. On a donc ce théorème :

Si, par le centre o d'un cercle imaginaire, on mène une droite os perpendiculaire au plan du cercle et égale à son rayon supposé réel, la droite qui joint le point s à un point quelconque p du plan du cercle est perpendiculaire au plan qui passe par le point s et par la polaire P *du point p par rapport au cercle imaginaire.*

1201. Nous avons vu (1111) que tous les cercles d'un plan coupent la droite à l'infini de ce plan aux deux mêmes points imaginaires. On conclut de là que toutes les sphères coupent le plan à l'infini suivant un même cercle imaginaire qu'on nomme le *cercle imaginaire à l'infini*. Soient, en effet, C et C' les cercles déterminés par le plan à l'infini dans deux sphères quelconques Σ et Σ'; pour prouver que ces cercles coïncident, il suffit de montrer que tout plan π les coupe aux deux mêmes points. Or, le plan π donne dans les deux sphères deux cercles A et A', qui coupent la droite de l'infini du plan π aux deux points cycliques de ce plan ; ces deux points, appartenant au cercle A et au plan de l'infini, appartiennent au cercle C, et l'on voit de même qu'ils sont sur le cercle C'.

Lorsqu'une droite P *et un point p sont pôle et polaire par rapport au cercle imaginaire à l'infini, la droite qui joint un point quelconque q de l'espace au point p est perpendiculaire au plan mené par ce point q et par la droite* P. En effet, soient o le centre d'un cercle imaginaire, intersection d'une sphère fixe et d'un plan ϖ, p_1 le point où la droite qp perce le plan ϖ, P_1 la polaire de p_1 par rapport au cercle imaginaire, s l'extrémité d'une droite menée par o perpendiculairement au plan ϖ et égale au rayon du cercle imaginaire supposé réel. La droite sp_1 sera (1200) perpendiculaire au plan déterminé par s et P_1, et cette perpendicularité subsistera lorsque le plan ϖ se déplacera en s'éloignant indéfiniment du centre de la sphère ; mais, à la limite, les droites qp_1 et sp_1 sont parallèles, et il en est de même des plans déterminés par la droite P_1 et par chacun des points s et p_1. Donc la droite qp est perpendiculaire au plan de la droite P et du point q.

1202. Nous pouvons maintenant aborder la recherche des plans principaux et des sections circulaires dans les surfaces du second ordre.

Considérons une surface du second ordre Σ et la conique C réelle ou imaginaire suivant laquelle le plan à l'infini coupe cette surface. Le cercle imaginaire à l'infini C' rencontre cette conique en quatre points imaginaires conjugués deux à deux, a et b, c et d. Les deux lignes C et C' ont donc trois couples de cordes communes

$$(ab, cd),\quad (ac, bd),\quad (ad, bc),$$

dont le premier est seul réel, et un triangle autopolaire commun $pp'p''$ dont les trois sommets sont réels (1171).

Désignons par I le centre de la surface Σ. La droite Ip est le diamètre conjugué du plan diamétral $Ip'p''$ (1197); d'ailleurs cette droite et ce plan sont rectangulaires (1201); donc Ip est un axe et $Ip'p''$ est le plan principal correspondant à cet axe. On prouverait de même que Ip' et Ipp'', Ip'' et Ipp' jouissent de la même propriété, d'où résulte, pour les surfaces du second ordre, l'existence de trois plans principaux réels.

Désignons par m un point quelconque de l'espace situé à distance finie, et considérons l'un des six plans déterminés par le point m et chacune des cordes communes, le plan mab par exemple. Ce plan détermine dans la surface Σ une conique qui rencontre la conique C aux deux points a et b; par suite, cette conique est un cercle, attendu que les points a et b sont les points cycliques du plan mab. Donc, par un point quelconque m de l'espace passent six plans mab, mcd, mac, mbd, mad, mbc, donnant des sections circulaires, mais dont les deux premiers sont seuls réels. Les deux plans d'un même système mab et mcd, mac et mbd, mad et mbc, se coupent respectivement suivant les droites mp, mp', mp'', qui sont parallèles aux axes; ils sont donc respectivement perpendiculaires aux plans principaux $\mathrm{I}p'p''$, $\mathrm{I}p''p$, $\mathrm{I}pp'$.

On donne en particulier le nom de *plans cycliques* aux trois couples de plans $\mathrm{I}ab$ et $\mathrm{I}cd$, $\mathrm{I}ac$ et $\mathrm{I}bd$, $\mathrm{I}ad$ et $\mathrm{I}bc$, qui donnent des sections circulaires et qui passent respectivement par les axes $\mathrm{I}p$, $\mathrm{I}p'$, $\mathrm{I}p''$. On obtient toutes les sections circulaires de la surface en coupant cette surface par des plans parallèles aux six plans cycliques. Il y a donc six séries de sections circulaires; le lieu des centres de chaque série est le diamètre conjugué du plan cyclique auquel sont parallèles les plans de la série considérée, et l'on donne le nom d'*ombilics* aux points où chacun de ces diamètres rencontre la surface.

Les deux plans cycliques qui passent par un même axe ont pour plans bissecteurs les deux plans principaux qui contiennent cet axe. Ainsi, les plans cycliques $\mathrm{I}ab$, $\mathrm{I}cd$, ont pour plans bissecteurs les plans principaux $\mathrm{I}pp'$, $\mathrm{I}pp''$; cela résulte de ce que les cordes ab et cd divisent harmoniquement l'angle $p'pp''$, de sorte que l'angle dièdre droit ($\mathrm{I}ab$, $\mathrm{I}cd$) est divisé harmoniquement par les plans $\mathrm{I}pp'$, $\mathrm{I}pp''$.

Des trois couples de plans cycliques, un seul ($\mathrm{I}ab$, $\mathrm{I}cd$) est réel; il n'y a donc que deux séries réelles de sections circulaires et, par suite, que quatre ombilics réels.

CÔNES DU SECOND ORDRE ET CONIQUES SPHÉRIQUES.

1203. Dans le cône, le plan polaire ϖ de tout point p de l'espace contient le sommet s, et si le point p se déplace sur ps, le plan polaire ϖ ne change pas; aussi convient-il de donner à ce plan ϖ le nom de *plan polaire de la droite ps* et, à cette droite, le nom de *polaire du plan* ϖ. *Si la droite ps tourne autour du sommet s dans un plan, son plan polaire* ϖ *tourne autour de la polaire de ce plan;* cela résulte de ce que les traces de ps et de ϖ sur un plan quelconque sont constamment pôle et polaire par rapport à la conique que ce plan détermine dans le cône.

Tout plan qui ne passe pas par le sommet a ce sommet pour pôle; *le sommet* est donc le pôle du plan de l'infini, c'est-à-dire *le centre de la* *surface.* Désormais, quand nous parlerons de droites et de plans conjugués par rapport à un cône du second ordre, nous entendrons toujours qu'il s'agit de plans et de droites passant par le sommet. Ainsi nous dirons que : 1° une droite et un plan sont conjugués par rapport au cône lorsqu'ils passent par le sommet et que la droite est la polaire du plan ; 2° deux plans sont conjugués par rapport au cône quand ils passent par le sommet et que chacun d'eux contient la polaire de l'autre ; 3° deux droites sont conjuguées par rapport au cône quand elles passent par le sommet et que chacune d'elles est située dans le plan polaire de l'autre.

Quand deux plans ou deux droites sont conjuguées, leurs traces sur un plan quelconque sont conjuguées par rapport à la conique que ce plan détermine dans le cône.

Quand un cône est circonscrit à une surface du second ordre, les droites et les plans conjugués par rapport au cône sont aussi conjugués par rapport à la surface; car, d'abord, leurs traces sur le plan de la conique de contact sont conjuguées par rapport à cette conique, et, de plus, ce plan est le plan polaire du sommet du cône par rapport à la surface.

Les sections d'un cône du second ordre par des plans parallèles sont semblables (1199), et le lieu des centres est la polaire du plan α mené par le sommet du cône parallèlement aux plans sécants. Ces sections sont des ellipses, des paraboles ou des hyperboles, suivant que le plan α ne contient pas de génératrices, en renferme une seule ou en contient deux.

Une droite passant par le sommet d'un cône du second ordre est dite *intérieure* ou *extérieure* au cône, suivant que sa trace sur un plan quelconque qui ne passe pas par le sommet est intérieure ou extérieure à la conique que ce plan détermine dans le cône. Un point de l'espace est dit *intérieur* ou *extérieur* au cône, suivant que la droite qui unit ce point au sommet est elle-même intérieure ou extérieure.

1204. Le sommet d'un cône du second ordre est le sommet d'une infinité de trièdres polaires (1196), c'est-à-dire de trièdres tels que chaque arête est la polaire de la face opposée. Les trois arêtes forment un système de trois diamètres conjugués ; l'un de ces diamètres est intérieur au cône et les deux autres sont extérieurs; cela résulte de ce que la trace du trièdre sur un plan quelconque est un triangle polaire par rapport à la conique section du cône par ce plan, et un tel triangle a toujours un sommet intérieur et deux sommets extérieurs à la conique.

L'un de ces trièdres polaires est trirectangle ; ses arêtes sont les trois *axes du cône;* l'un est intérieur et les deux autres sont extérieurs.

Tout plan perpendiculaire à l'un des axes détermine dans le cône une conique qui a son centre sur cet axe et ses axes parallèles aux deux autres axes du cône. Tout plan perpendiculaire à l'axe intérieur du cône donne une ellipse, et tout plan perpendiculaire à l'un des deux autres axes donne une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux génératrices du cône parallèles au plan sécant. On nomme *axe principal* du cône l'axe intérieur; *grand axe* celui qui est parallèle au grand axe de l'ellipse suivant laquelle le cône est coupé par un plan normal à l'axe principal; *petit axe* celui qui est parallèle au petit axe de la même ellipse; on appelle *plan de la grande section* le plan de l'axe principal et du grand axe; *plan de la petite section* le plan de l'axe principal et du petit axe; *plan principal* le plan du grand et du petit axe. Le plan principal ne coupe le cône suivant aucune arête; de tous les plans conduits par l'axe principal, le plan de la grande section et le plan de la petite section sont ceux qui coupent le cône suivant les deux arêtes qui font entre elles respectivement l'angle maximum et l'angle minimum. Les plans tangents au cône menés par le grand axe le touchent suivant les deux arêtes contenues dans le plan de la petite section; les plans tangents conduits par le petit axe touchent le cône suivant les deux arêtes contenues dans le plan de la grande section; enfin, par l'axe principal, on ne peut mener aucun plan tangent au cône.

Le cône est de révolution quand la section par un plan perpendiculaire à l'axe intérieur est un cercle.

1205. Il résulte de ce qui a été dit au n° 1202, sur les sections circulaires des surfaces du second ordre, que tout cône du second ordre admet deux plans cycliques réels passant par l'un des axes et également inclinés sur les plans principaux qui contiennent cet axe. Tout cône du second ordre, admettant, d'après cela, deux séries de sections circulaires, peut être considéré de deux manières comme un cône à base circulaire. Les propriétés des sections circulaires des cônes du second ordre ont déjà été étudiées aux n^{os} 875, ..., 880. Ajoutons seulement ici que les deux plans cycliques passent, comme on le reconnaît immédiatement, par le grand axe et, par suite, sont perpendiculaires au plan de la petite section.

1206. Si par le sommet d'un cône du second ordre on mène des droites perpendiculaires à tous les plans tangents, on obtient un second cône de même sommet et qui est dit *supplémentaire* du premier. Le cône supplémentaire d'un cône du second ordre est aussi du second ordre; en d'autres termes, tout plan mené par le sommet ne peut le couper que suivant deux arêtes; car, si un tel plan le coupait suivant trois arêtes, ces arêtes seraient normales à trois plans tangents au cône proposé, lesquels plans passeraient par une même droite perpendiculaire au plan des trois arêtes, ce qui est absurde, puisque par une droite on ne peut mener que deux plans tangents à un cône du second ordre. *Si un cône Σ' est supplémentaire d'un cône Σ du second ordre, inversement Σ est supplémentaire de Σ'.* En effet, deux arêtes infiniment voisines du cône Σ' sont perpendiculaires à deux plans tangents au cône Σ infiniment voisins ; le plan de ces deux arêtes est donc perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans tangents ; en d'autres termes, les plans tangents à Σ' sont perpendiculaires aux arêtes de Σ.

On aperçoit immédiatement que : 1° *à une arête de* Σ *et au plan tangent conduit par cette arête, répondent dans* Σ' *un plan tangent et son arête de contact ;* 2° *à une droite et à son plan polaire par rapport à* Σ, *répondent un plan et sa polaire par rapport à* Σ' ; 3° *à deux droites conjuguées de* Σ, *répondent deux plans conjugués de* Σ' ; 4° *à deux droites menées arbitrairement par le sommet de* Σ, *répondent dans* Σ' *deux plans faisant entre eux un angle supplémentaire de celui des deux droites ;* 5° *aux trois axes de* Σ, *répondent les trois plans diamétraux conjugués rectangulaires de* Σ' ; à l'axe principal de Σ, répond le plan principal de Σ', et les deux cônes ont même axe principal et même plan principal ; mais le plan de la grande section de l'un est le plan de la petite section de l'autre, de sorte que le grand axe de l'un est le petit axe de l'autre.

Il résulte de là que *les propriétés des cônes du second degré sont doubles,* comme celles des trièdres et des triangles sphériques.

1207. Dans tout cône du second ordre, on nomme *focales* les deux droites menées par le sommet perpendiculairement aux plans cycliques du cône supplémentaire ; ces deux droites sont donc situées dans le plan de la petite section du cône supplémentaire, et par conséquent dans le plan de la grande section du cône considéré.

Tout plan ϖ *perpendiculaire à une focale* F *coupe le cône suivant une conique qui a pour foyer le pied* f *de cette droite.* Il suffit, pour établir ce théorème, de prouver que tout couple de droites conjuguées par rapport à la conique et passant par f est rectangulaire. Or, deux droites conjuguées du cône supplémentaire, comprises dans un plan cyclique de ce cône, sont rectangulaires, puisqu'elles sont parallèles à deux diamètres conjugués de la section circulaire faite par un plan parallèle à ce plan cyclique ; donc deux plans conjugués du cône primitif, menés par la focale F qui est perpendiculaire à ce plan cyclique, sont aussi rectangulaires. Le plan π coupe donc le cône suivant une conique, et les deux plans conjugués suivant deux droites rectangulaires telles, que le pôle de l'une par rapport à cette conique soit sur l'autre.

Puisque *dans deux cônes supplémentaires les droites focales de l'un répondent aux plans cycliques de l'autre,* à chaque propriété des focales répondra, par la considération du cône supplémentaire, une propriété des plans cycliques, et inversement. Indiquons les plus importantes de ces propriétés.

1208. Nous savons que la polaire d'un plan cyclique est le diamètre, lieu des centres des sections circulaires parallèles à ce plan cyclique. D'ailleurs, à un plan cyclique et à sa polaire répondent, dans le cône supplémentaire, une ligne focale et son plan polaire. De même que dans les coniques on donne le nom de *directrice* à la polaire du foyer, on donne dans les cônes le nom de *plan directeur* au plan polaire d'une focale. Ainsi, un cône du second ordre a deux focales et, par suite, deux plans directeurs. Cela posé, voici les propriétés fondamentales des plans cycliques et des focales; les théorèmes sont disposés sur deux colonnes; de cette manière, on trouve à côté l'une de l'autre les *propositions corrélatives,* c'est-à-dire les propositions qui résultent l'une de l'autre par la considération du cône supplémentaire, et il suffit chaque fois de démontrer l'une de ces deux propositions.

Dans tout cône du second ordre, les sinus des angles que chaque plan tangent fait avec un plan cyclique et avec la polaire de ce plan cyclique ont un rapport constant.	*Dans tout cône du second ordre, les sinus des angles que chaque arête forme avec une ligne focale et avec le plan directeur correspondant ont un rapport constant.*

En effet, coupons le cône par un plan parallèle à un plan cyclique et, du centre de cette section circulaire, qui est un point de la polaire du plan cyclique, abaissons une perpendiculaire sur un plan tangent au cône. Le sinus de l'angle du plan tangent et du plan du cercle est égal à cette perpendiculaire divisée par le rayon du cercle; le sinus de l'angle du plan tangent et de l'axe polaire du plan cyclique est égal à la même perpendiculaire divisée par la distance du sommet du cône au centre de la section circulaire. Le rapport des sinus ne dépend donc que du rayon du cercle et de la distance de son centre au sommet, et nullement du plan tangent considéré.

Tout plan tangent à un cône du second ordre coupe les deux plans cycliques suivant deux droites également inclinées sur l'arête de contact.	*Les plans menés par les deux focales d'un cône du second ordre et par une arête quelconque sont également inclinés sur le plan tangent suivant cette arête.*

En effet, coupons le cône par deux plans parallèles à ses deux plans cycliques; les sections seront deux cercles situés sur une même sphère. Une arête quelconque du cône coupe ces cercles, et les tangentes à ces cercles aux points de rencontre obtenus sont situées dans le plan tangent au cône suivant l'arête considérée; ces deux droites étant tangentes à une même sphère et comprises dans un même plan sont également inclinées sur la corde qui unit les points de contact, c'est-à-dire sur l'arête du cône, et, comme ces droites sont parallèles à celles suivant lesquelles le plan tangent coupe les plans cycliques, le théorème est démontré.

La somme (ou *la différence*) *des angles dièdres que chaque plan tangent à un cône du second ordre forme avec les deux plans cycliques est constante.*

La somme (ou *la différence*) *des angles que chaque arête d'un cône du second ordre forme avec les deux focales est constante.*

Dans les deux cas précédents, nous avons démontré le théorème de gauche; ici, nous démontrerons le théorème de droite. Il suffit à cet effet de considérer ce qui se passe sur une sphère ayant pour centre le sommet du cône. Une nappe du cône coupe la sphère suivant une courbe qu'on nomme *ellipse sphérique*, et les deux points déterminés sur cette portion de sphère par les focales du cône sont dits les *foyers* de cette conique. Cela posé, si M est un point de cette conique sphérique et si F et F′ sont ses foyers, il suffit de prouver que la somme des arcs de grand cercle FM + F′M est constante, sachant, d'après le théorème précédent, que l'arc de grand cercle tangent à la conique au point M est également incliné sur les deux *arcs vecteurs* MF et MF′. Le raisonnement est analogue à celui du n° 1007.

De là résulte un nouveau point de vue sous lequel on peut considérer les propositions qui précèdent et, en général, les propriétés des cônes du second ordre (Chasles, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, année 1829).

1209. Une *conique sphérique* est l'ensemble des deux courbes fermées dites *ellipses sphériques*, suivant lesquelles un cône du second ordre coupe une sphère ayant le sommet pour centre. Ces deux courbes sont symétriques par rapport à chacun des trois grands cercles suivant lesquels les plans diamétraux principaux du cône coupent la sphère.

Considérons le plan principal du cône, et ne prenons que l'hémisphère et la nappe du cône situés au-dessus de ce plan. Cette nappe déterminera sur la sphère une ellipse sphérique dont *le centre et les sommets* seront les points où la sphère est percée par l'axe principal et par les génératrices situées dans les plans de la grande et de la petite section; les foyers répondront aux lignes focales; les plans cycliques du cône couperont l'hémisphère considéré suivant deux demi-grands cercles ayant le grand axe du cône pour diamètre commun : ce grand axe est compris dans le plan du *plus grand arc diamètre* de l'ellipse sphérique, et ces deux demi-grands cercles, dits *arcs cycliques* de l'ellipse sphérique, sont perpendiculaires au *plus petit arc diamètre* de l'ellipse et ne rencontrent jamais cette courbe.

Considérons en second lieu le plan de la petite section du cône, et la partie de la conique sphérique située d'un seul côté de ce plan; elle est composée de deux branches, moitiés des deux ellipses sphériques et symétriques par rapport au plan diamétral perpendiculaire à l'axe principal du cône; on lui donne le nom d'*hyperbole sphérique*. Son centre est le point où le grand axe du cône perce l'hémisphère qui contient la courbe, et ses foyers, intersections de cet hémisphère et des lignes focales, se trouvent sur l'arc de grand cercle qui unit les deux seuls sommets de la courbe. Pour tout point M de l'hyperbole sphérique, c'est la différence (et non la somme) des arcs vecteurs MF et MF′ qui est constante. Quant aux plans cycliques du cône, ils coupent l'hémisphère suivant deux demi-grands cercles passant par le centre de l'hyperbole et également inclinés sur l'arc qui joint les foyers ; ce sont les *arcs cycliques* de l'hyperbole.

Enfin, si l'on considérait l'hémisphère situé d'un côté du plan de la grande section du cône, lequel plan contient les lignes focales, on aurait deux moitiés de demi-ellipses sphériques se présentant leurs concavités et dont l'ensemble forme une troisième espèce de courbe sphérique. Cette courbe a un *centre*, intersection de la sphère et du petit axe du cône, *quatre foyers* situés dans le plan de la grande section du cône, et *deux arcs cycliques* situés entre les deux branches de la courbe et perpendiculaires à l'arc de grand cercle qui joint les deux sommets.

Les trois courbes que nous venons de considérer sont des portions de la courbe unique, dite *conique sphérique*, qui est l'intersection complète de la sphère et du cône.

A une conique sphérique répond une conique sphérique supplémentaire : c'est l'intersection de la sphère par le cône supplémentaire de celui qui produit la première conique. On peut aussi parvenir directement à cette conique supplémentaire en la considérant comme l'enveloppe des arcs de grands cercles dont les plans sont normaux aux rayons de la sphère menés par les différents points de la conique primitive.

Les arcs cycliques de l'une des coniques sont dans les plans diamétraux perpendiculaires aux diamètres de la sphère qui passent par les foyers de l'autre conique.

Les deux théorèmes relatifs à l'invariabilité de la somme ou de la différence des arcs vecteurs d'une conique sphérique, et à l'égale inclinaison de l'arc de grand cercle tangent sur les arcs vecteurs, sont dus à M. Magnus, de Berlin (*Annales de Gergonne*, 1825).

1210. *Par deux sections planes quelconques d'une surface du second ordre, on peut toujours faire passer deux cônes.* En effet, considérons la droite L′ conjuguée de l'intersection L des deux plans, c'est-à-dire de la sécante commune aux deux courbes ; par cette droite L′ et par un point m quelconque de l'une des courbes, menons un plan, et soient p et q les points communs à ce plan et à la seconde courbe ; du point s, où mp rencontre L′, projetons la première courbe sur le plan de la seconde, cette seconde courbe et la projection de la première se confondront, car ce sont des coniques ayant trois points communs, dont deux, situés sur la sécante commune L, sont des points de contact. Le point s est donc le sommet d'un cône passant par les deux courbes, et l'intersection de L' et de mq serait le sommet s' d'un second cône jouissant de la même propriété.

Les deux cônes se touchent aux deux points qui sont communs aux deux courbes planes. On peut montrer que, réciproquement, deux cônes du second ordre, qui ont deux plans tangents communs, se coupent suivant deux courbes planes. Plus généralement, *deux surfaces du second ordre qui se touchent en deux points a et b se coupent suivant deux courbes planes*. En effet, c étant un troisième point commun, le plan abc coupe les deux surfaces suivant deux coniques qui se confondent, puisqu'elles ont trois points communs a, b, c, et les mêmes tangentes aux points a et b. Voilà donc une conique commune aux deux surfaces. Mais l'intersection complète de deux surfaces du second ordre est du quatrième ordre, car tout plan transversal, donnant une conique dans chaque surface, coupe l'intersection des deux surfaces en quatre points (réels ou imaginaires). Donc, dans le cas qui nous occupe, l'intersection se compose de la conique que nous avons déjà déterminée et d'une seconde conique.

La seconde conique passe, comme la première, par les points a et b; car on verrait, comme ci-dessus, que, si d est un point de l'intersection non situé sur la première conique, le plan abd coupe les deux surfaces suivant une conique commune qui, par conséquent, n'est autre que la seconde conique considérée.

Toutefois, lorsque l'intersection des plans tangents en a et b se confond avec la droite ab, cette droite appartient aux deux surfaces qui, alors, ont de plus en commun une ligne du troisième degré. Ce cas d'exception au théorème de Monge a été signalé par M. de la Gournerie, dans une lettre à Poncelet (*Traité des propriétés projectives,* annotations de la seconde édition).

Il résulte du théorème précédent que, *si deux surfaces du second degré se touchent en trois points a, b, c, elles se raccordent le long d'une ligne plane*. L'intersection des deux surfaces doit, en effet, se composer de deux coniques dont les plans passent à la fois par a, b, c; ces deux coniques coïncident donc et forment une conique double suivant laquelle les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre.

SURFACES RÉGLÉES DU SECOND ORDRE.

1211. On dit que deux *faisceaux de plans* (584) sont *homographiques* lorsqu'on peut trouver deux droites sur lesquelles ils tracent deux divisions homographiques; une droite quelconque est alors coupée par le premier faisceau suivant une division homographique de celle que le second faisceau détermine sur une seconde droite quelconque. Le rapport anharmonique de quatre plans quelconques du premier faisceau est égal au rapport anharmonique des quatre plans homologues de l'autre faisceau, etc.

La surface réglée, lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux homographiques, est du second ordre ; car, si on la coupe par un plan quelconque ϖ, les deux faisceaux de plans coupent ce plan ϖ suivant deux faisceaux de droites qui sont homographiques, et la section de la surface par ce plan ϖ est le lieu des intersections des rayons homologues de ces deux faisceaux de droites, c'est-à-dire (1131) une conique. Il existe donc des surfaces réglées du second ordre.

1212. Réciproquement, *toute surface réglée du second ordre peut être considérée comme le lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux de plans homographiques.* Nous décomposerons la démonstration en plusieurs parties, et elle nous permettra de mettre en évidence les principales propriétés de ces surfaces réglées.

1° *Trois droites* A, B, C, *appartenant à la surface, ne peuvent passer par un même point o, à moins que toutes les droites de la surface ne passent par ce point.* Car, toute autre droite D de la surface, ne passant pas par le sommet o du trièdre formé par A, B, C, aurait au moins avec l'une des faces de ce trièdre un point commun non situé sur les arêtes; par suite, le plan de cette face aurait en commun avec la surface deux arêtes du trièdre et de plus un point extérieur à ces arêtes, de sorte que le degré de la section serait supérieur au second. Les surfaces réglées du second ordre se partagent donc en deux groupes : l'un relatif aux surfaces dont toutes les génératrices passent par un même point, l'autre relatif aux surfaces dont trois droites ne passent jamais par un même point. Les surfaces du premier groupe sont les *cônes* et, en particulier, les *cylindres,* lorsque le point de concours de toutes les génératrices est à l'infini. Les cônes du second degré jouissent évidemment de la propriété énoncée, car toute section faite par un plan ne contenant pas le sommet est une conique qui peut être considérée comme le lieu des intersections des rayons homologues de deux faisceaux homographiques; les plans déterminés par les génératrices fixes qui aboutissent aux centres de ces deux faisceaux et par la génératrice variable qui aboutit à un point quelconque de la conique sont donc homographiques. Nous n'avons par conséquent à considérer que les *surfaces réglées proprement dites,* c'est-à-dire celles dont trois droites ne passent jamais par un même point.

2° Soit G l'une des génératrices de la surface. Tout plan passant par G donne dans la surface une conique qui se compose nécessairement de la droite G et d'une autre droite. Si l'on coupe la surface par une série de plans $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, passant par G, on obtiendra donc une série de droites L, L', L'', ..., qui formeront un système de génératrices rectilignes. Toutes ces droites rencontrent G en des points différents, sans quoi, par un même point, passeraient trois droites de la surface; par suite, deux quelconques des génératrices L, L', L'', ..., ne sont jamais dans un même plan. Actuellement, par l'une L de ces droites, menons une série de plans λ, λ', λ'', ...; nous obtiendrons une nouvelle série de droites G, G', G'', ..., dont G fera évidemment partie et qui formeront un second système de génératrices rectilignes; on verra, comme ci-dessus, que deux quelconques de ces génératrices ne sauraient être dans un même plan. Donc, en résumé, *la surface admet deux systèmes* (G) *et* (L) *de génératrices rectilignes; par un point quelconque m de la surface passe une génératrice de chaque système* (ces deux génératrices sont fournies par les plans menés par m et chacune des deux droites fixes G et L); *le plan de ces deux génératrices est le plan tangent en m à la surface. Deux génératrices d'un même système ne sont jamais dans un même plan; une génératrice quelconque de l'un des systèmes rencontre toutes celles de l'autre système.*

3° Puisque trois droites suffisent pour régler le mouvement d'une droite mobile assujettie à s'appuyer sur elles, et qu'une génératrice de l'un des systèmes doit rencontrer toutes celles de l'autre système, on voit que *la surface peut être considérée comme engendrée par une droite qui rencontre sans cesse trois droites fixes* L, L', L''.

4° Sur l'une L de ces trois droites fixes, prenons une série de points a, b, c, d, ...; par chacun de ces points et par les deux autres droites fixes L' et L'' menons deux plans; nous obtiendrons ainsi deux faisceaux de plans homographiques dont L' et L'' seront les axes et tels, que les intersections des plans homologues rencontrent les trois directrices L, L', L'', c'est-à-dire soient des génératrices de la surface. *La surface est* donc *le lieu des intersections des plans homologues de deux faisceaux de plans homographiques,* comme nous l'avons annoncé.

Nous avons vu (1°) que les cônes rentrent dans cette définition; ils répondent aux cas où les axes des deux faisceaux se rencontrent; quand les axes sont parallèles, les cônes deviennent des cylindres.

1213. Voici encore d'autres propriétés importantes des surfaces réglées proprement dites du second ordre.

Le faisceau de plans passant par L'' rencontre les deux autres directrices L et L' et détermine sur elles deux divisions homographiques; les droites qui joignent les points homologues de ces deux divisions s'appuient à la fois sur L, L', L''; ce sont des génératrices de la surface. Donc *toute surface réglée du second ordre est le lieu des droites qui divisent homographiquement deux droites fixes.*

Tout plan passant par un point quelconque m de la surface, et qui ne contient aucune des deux génératrices G et L passant par ce point, coupe la surface suivant une conique qui passe par m et qui ne se réduit pas à deux droites, sans quoi la section serait d'un degré supérieur au second.

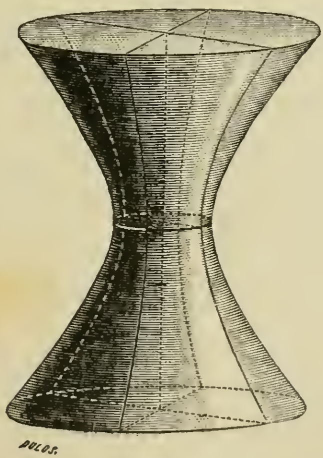
Chaque point d'une section plane résulte de l'intersection du plan sécant et d'une génératrice de la surface; toute section plane d'une surface *réglée* du second ordre est donc réelle. Par suite, en appliquant cette remarque au plan polaire ϖ d'un point quelconque p de l'espace, on voit que *tout point de l'espace est le sommet d'un cône réel circonscrit à la surface.*

Le plan de l'infini détermine une section réelle qui est : ou une conique ordinaire, ou un système de deux droites; la surface prend dans le premier cas le nom d'*hyperboloïde à une nappe* et, dans le second, le nom de *paraboloïde hyperbolique.*

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

1214. Nous avons nommé *hyperboloïde à une nappe* (*fig.* 607) celle des deux surfaces réglées proprement dites du second ordre que le plan

Fig. 607.



de l'infini coupe suivant une conique C qui ne se réduit pas à deux droites.

Le plan de l'infini n'étant pas tangent à la surface ne contient pas son propre pôle; ce pôle, c'est-à-dire *le centre de la surface, est donc à distance finie.* Si l'on transporte à ce centre o et parallèlement à elles-mêmes toutes les génératrices de la surface, les droites ainsi transportées conservent leurs mêmes points à l'infini; on obtient donc un cône ayant pour sommet o et pour base la conique C, et, comme le point o est le pôle du plan de la conique C, on voit que ce cône est tangent à la surface tout le long de la conique C située à l'infini; ce cône, enveloppe des plans tangents à l'infini de la surface, ou, comme on dit plus rapidement, des *plans asymptotiques* à la surface, prend le nom de *cône asymptote* de l'hyperboloïde. La surface est tout entière à l'extérieur de ce cône, sans quoi il y aurait des génératrices qui le couperaient à distance finie.

Par chaque point de la conique C passent deux génératrices, une de chaque système; donc, *à chaque génératrice d'un système, répond dans l'autre système une génératrice parallèle,* et, par suite, *chaque génératrice du cône asymptote est parallèle à deux génératrices de la surface.*

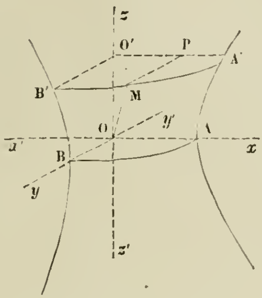
Trois génératrices d'un même système ne sauraient être parallèles à un même plan, sans quoi les trois génératrices correspondantes du cône asymptote seraient dans un même plan, ce qui est absurde, puisque le cône est du second ordre.

1215. Les sections planes de la surface peuvent être des hyperboles, des paraboles ou des ellipses suivant les positions du plan sécant; car, suivant que ce plan coupe la conique C en deux points, la touche ou ne la rencontre pas, le nombre des points à l'infini dans la section est 2, 1 ou 0. D'ailleurs, *les sections* P *et* P_1 *de la surface et du cône asymptote par un même plan quelconque* ϖ *sont semblables, semblablement placées et concentriques.* En effet, soient D et D' deux diamètres conjugués de la section P faite par le plan ϖ dans la surface; les plans déterminés par le centre o de l'hyperboloïde et par chacune des droites D et D' seront diamétraux conjugués par rapport à cet hyperboloïde; donc ils le seront aussi par rapport au cône, puisque (1203) le cône et la surface ont les mêmes systèmes de droites et de plans conjugués; par suite, les intersections de ces deux plans par le plan ϖ, c'est-à-dire les droites D et D' elles-mêmes, seront deux diamètres conjugués de la section P_1 faite par le plan ϖ dans le cône asymptote. En particulier, *les plans cycliques du cône asymptote coupent donc l'hyperboloïde suivant des cercles;* on les nomme *plans cycliques* de l'hyperboloïde; tout plan parallèle à un plan cyclique donne une section circulaire (1199).

1216. Puisqu'à tout diamètre de l'hyperboloïde répond le même plan diamétral, soit dans cet hyperboloïde, soit dans le cône asymptote, l'hyperboloïde et le cône ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués, et, par suite, les mêmes axes et les mêmes plans principaux. Des trois axes, l'un oz est donc intérieur (1204), et les deux autres ox et oy sont extérieurs et coupent seuls la surface; il y a donc deux sommets imaginaires et quatre sommets réels; le plan principal xoy coupe la surface suivant une ellipse qu'on nomme *ellipse de gorge,* et les plans principaux xoz et yoz la coupent suivant des hyperboles. Toute section par un plan parallèle au plan xoy est une ellipse semblable à l'ellipse de gorge et dont les sommets sont situés sur les hyperboles principales; de là, découle un mode de génération fort simple de la surface.

Dans l'espace, on nomme coordonnées d'un point M par rapport à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, les nombres qui mesurent les projections

Fig. 608.



du segment OM sur les trois axes, chacun de ces nombres étant précédé du signe + ou du signe —, suivant que les projections du point M tombent sur les parties positives ox, oy, oz, des axes ou sur les parties opposées ox', oy', oz'. En désignant par x, y, z, les trois coordonnées d'un point quelconque M de l'hyperboloïde (*fig.* 608), on a $x = \mathrm{O'P}$, $y = \mathrm{PM}$, $z = \mathrm{OO'}$. Soit A'B' l'ellipse obtenue en coupant la surface par le plan mené par M parallèlement au plan xoy de l'ellipse de gorge AB; désignons par a et b les demi-axes de l'ellipse de gorge et par c la valeur absolue du demi-axe imaginaire commun aux deux hyperboles principales AA' et BB'. Nous aurons, puisque le point M appartient à l'ellipse A'B',

$$\frac{x^2}{\overline{\mathrm{O'A'}}^2} + \frac{y^2}{\overline{\mathrm{O'B'}}^2} = 1,$$

et, puisque le point A' appartient à l'hyperbole AA' et le point B' à l'hyperbole BB',

$$\frac{\overline{\mathrm{O'A'}}^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\overline{\mathrm{O'B'}}^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'élimination de O'A' et de O'B' entre ces trois équations donne la relation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

entre les coordonnées d'un point quelconque de la surface; c'est l'*équation* de l'hyperboloïde.

1217. *Si l'on projette toutes les génératrices d'un hyperboloïde sur un plan diamétral quelconque ϖ à l'aide de projetantes parallèles au diamètre* D *conjugué du plan ϖ, les projections des génératrices sont tangentes à la section* P *faite dans la surface par le plan ϖ.* En effet, soient G une génératrice quelconque et m le point où elle rencontre la courbe P. Le plan tangent au point m est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui aboutit en m, lequel plan diamétral contient D; donc le plan tangent en m, passant par la génératrice G et étant parallèle à D, est précisément le plan projetant de cette génératrice; par suite, la projection de cette génératrice est l'intersection du plan ϖ et du plan tangent à la surface, c'est-à-dire est la tangente en m à la courbe P.

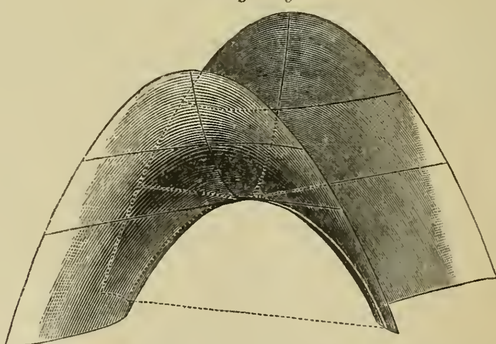
En particulier, *les projections orthogonales des génératrices sur les plans principaux enveloppent l'ellipse de gorge et les hyperboles principales.*

1218. Quand les deux axes réels ont la même longueur, l'ellipse de gorge devient un cercle, et la surface, lieu des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe oz et dont les centres sont sur cet axe, est de révolution ; cet hyperboloïde de révolution résulte de la rotation de l'hyperbole principale autour de son axe non transverse.

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

1219. Nous avons appelé *paraboloïde hyperbolique* (*fig.* 609) celle des deux surfaces réglées proprement dites du second ordre qui a une géné-

Fig. 609.



ratrice de chaque système G_1 et L_1 dans le plan de l'infini. Cette surface est donc tangente à ce plan de l'infini et, par suite, le pôle de ce plan, c'est-à-dire le centre de la surface, est à l'infini. L'un des plans principaux passe alors à l'infini ainsi que les deux axes qu'il contient, et il ne reste à distance finie qu'un seul axe et les deux plans principaux qui passent par cet axe, auquel tous les diamètres deviennent d'ailleurs parallèles.

Tout plan passant par l'axe donne dans la surface une conique symétrique par rapport à cet axe et dont le second axe disparaît à l'infini : cette conique est donc *une parabole.* Toutes ces paraboles ont leur sommet en un même point commun à l'axe et à la surface, qu'on nomme *sommet* de la surface.

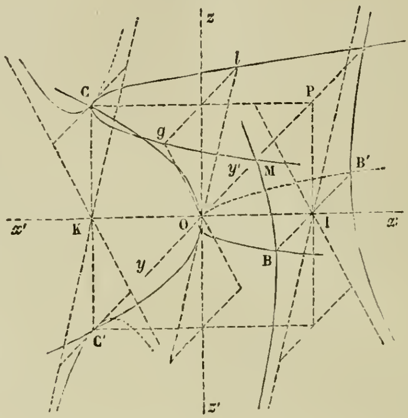
Toute section par un plan ϖ parallèle à l'axe est une parabole égale à celle que détermine le plan ϖ' mené par l'axe parallèlement au plan proposé. En effet, d'abord la section par le plan ϖ est une parabole, puisqu'elle est semblable à la section faite par le plan ϖ'; puis ces deux paraboles sont égales, attendu que l'un des cônes qu'on peut mener par ces deux courbes (1210) dégénère en un cylindre dont ces courbes sont deux sections parallèles.

1220. Les sections par des plans non parallèles à l'axe sont des hyperboles, puisque ces plans coupent les génératrices G_1 et L_1 situées à l'infini en deux points. Étudions spécialement les sections hyperboliques dont les plans sont normaux à l'axe. Désignons par o le sommet, par ox la partie de l'axe située à droite de o et par ox' la partie de l'axe située à gauche. Le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet o est tangent à la surface, puisqu'il est conjugué à la direction ox; il contient donc deux génératrices que nous nommerons og et ol, et c'est à ces deux droites que se réduit ici la section hyperbolique. L'hyperbole obtenue en coupant par tout autre plan normal à l'axe doit donc avoir ses asymptotes parallèles à og et à ol; ces asymptotes sont donc les intersections du plan considéré et des deux plans fixes gox, lox; par suite, si l'on désigne par oy et oz la bissectrice de l'angle gol et celle de son supplément, les plans uox, vox, devront contenir les axes de toutes ces hyperboles, de sorte que ces plans sont les plans principaux; ils coupent la surface suivant deux paraboles ayant même sommet o, et pour axe l'une ox, l'autre ox'; car, si ces paraboles principales étaient tournées du même côté, par exemple toutes les deux à droite de o, les sections hyperboliques faites par des plans normaux à l'axe et à droite de o auraient quatre sommets réels, ce qui est absurde. Ainsi, en résumé, les hyperboles obtenues en coupant par des plans perpendiculaires à l'axe sont situées : à droite du sommet, dans l'un des angles formés par les plans gox, lox (et dans son opposé); et, à gauche du sommet, dans le supplément de cet angle (et dans son opposé).

1221. Tout plan parallèle à l'un des plans principaux coupant la surface suivant une parabole égale à celle que détermine ce plan principal, on voit que *la surface peut être engendrée par l'une des paraboles principales glissant parallèlement à elle-même de façon que son sommet décrive l'autre parabole principale;* ce mode de génération est celui qui révèle le plus nettement la forme de la surface. Ajoutons qu'*en projection orthogonale sur un plan principal, les génératrices enveloppent la parabole principale correspondante.*

Soient p et p' les paramètres des paraboles principales BOB′, COC′; cherchons l'équation du paraboloïde, c'est-à-dire la relation entre les

Fig. 610.



constantes données p et p' et les coordonnées variables $x = \mathrm{OI}$, $y = \mathrm{PM}$, $z = \mathrm{IP}$, d'un point quelconque M de cette surface (*fig.* 610). La section faite par le plan mené par M parallèlement au plan xoy étant une parabole $l\mathrm{C}g$ égale à la parabole BOB′, on a, puisque M appartient à cette parabole $l\mathrm{C}g$,

$$y^2 = 2p.\mathrm{CP} = 2p.\mathrm{KI}$$

et, puisque le point C appartient à la parabole COC′,

$$z^2 = 2p'.\mathrm{KO};$$

on en déduit

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2(\mathrm{KI} - \mathrm{KO}) = 2\mathrm{OI},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

1222. Le plan gox, coupant la surface suivant une première génératrice og, doit la couper encore suivant une génératrice du système opposé; et cette seconde génératrice doit être à l'infini, sans quoi l'axe ox rencontrerait la surface en deux points à distance finie; c'est donc la génératrice L_1. Or toute autre génératrice G du même système que og est dans un même plan ϖ avec L_1; les deux plans ϖ et gox ayant leur intersection L_1 à l'infini sont parallèles; donc G est parallèle au plan gox. Ainsi, toutes *les génératrices d'un système sont parallèles au plan* gox, et l'on verrait de même que *toutes les génératrices de l'autre système sont parallèles au plan* lox. Les deux plans fixes gox, lox, prennent le nom de *plans directeurs* de la surface. Il résulte du n° 1220 que *les plans principaux divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les plans directeurs.*

Toutes les génératrices d'un système étant parallèles à un même plan, ces droites divisent deux génératrices quelconques de l'autre système en parties proportionnelles, et la *surface peut être* considérée comme *engendrée par une droite mobile formant sur deux droites fixes deux divisions homographiques semblables.* Cette propriété est très-utile dans les applications; on l'utilise aussi pour construire des modèles en fil de la surface.

SURFACES DU SECOND ORDRE NON RÉGLÉES.

1223. Il nous reste à étudier les surfaces non réglées du second ordre.

Tout plan tangent α à l'une quelconque de ces surfaces en un point a n'a en commun avec cette surface que le point a; car, s'il en avait un autre b, la droite ab serait commune au plan α et au plan polaire β de b; elle serait donc sa propre polaire, et chacun de ses points étant à lui-même son conjugué serait sur la surface. Il y aurait donc sur la surface une droite ab, et, par suite, il y en aurait une infinité.

Il suit de là que, si l'on mène de part et d'autre d'un plan tangent α deux plans parallèles et infiniment voisins, un seul de ces deux plans rencontrera la surface. Il y a donc dans l'espace des plans qui ne rencontrent pas la surface, des plans qui la coupent, et des plans qui n'ont qu'un point commun avec elle; les pôles de ces plans sont pour les premiers *intérieurs* à la surface, pour les seconds *extérieurs*, et pour les derniers *situés sur la surface.*

On classe les surfaces non réglées du second ordre par la considération du plan tangent à l'infini. Ce plan peut être extérieur à la surface, la toucher ou la couper suivant une conique qui diffère de deux droites. De là, trois surfaces distinctes auxquelles on donne les noms suivants :

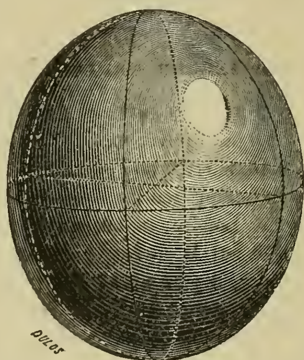
Surfaces du second ordre sur lesquelles on ne peut placer aucune droite.	n'ayant aucun point à l'infini...............	*Ellipsoïde.*
	tangente au plan de l'infini..................	*Paraboloïde elliptique.*
	coupée par le plan de l'infini suivant une conique ordinaire.................	*Hyperboloïde à deux nappes.*

Nous allons décrire successivement ces trois surfaces.

ELLIPSOÏDE.

1224. L'ellipsoïde (*fig.* 611) n'ayant aucun point à l'infini n'admet que des sections planes elliptiques. Le centre est *intérieur* à la surface, et, par suite, les trois axes rencontrent la surface chacun en deux points réels; ces trois axes ont généralement des longueurs différentes; combinés deux à deux, ils forment les axes des trois ellipses principales. Les sections par des plans parallèles à un plan principal sont des ellipses semblables à l'ellipse principale correspondante, et dont les sommets sont situés sur les deux autres ellipses principales : de là un mode de génération très-expressif de la surface.

Fig. 611.



Les deux plans cycliques passent évidemment par l'axe moyen; leurs traces sur le plan des deux autres axes sont les diamètres communs à l'ellipse principale située dans ce plan et au cercle concentrique décrit avec un rayon égal à l'axe moyen. Tout plan parallèle à un plan cyclique coupe l'ellipsoïde suivant un cercle; le lieu des centres des sections circulaires est formé de deux diamètres de l'ellipse principale, qui a pour axes l'axe maximum et l'axe minimum; ces diamètres, qui sont respectivement conjugués aux traces des deux plans cycliques, rencontrent l'ellipse en quatre points réels : ce sont les *ombilics*.

En désignant par a, b, c les longueurs des trois axes, et prenant respectivement ces axes pour axes des x, des y et des z, on trouve, en raisonnant comme au nº 1216, pour l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Il suffit, dans les formules du nº 1216, de changer c^2 en $-c^2$.

1225. Soient oa', ob', oc', un système de trois demi-diamètres conjugués, et oa, ob, oc, les trois demi-axes. Conservons le diamètre oc' et substituons à oa' et ob' deux autres diamètres oa'' et ob'' conjugués entre eux dans le plan $a'ob'$, et dont l'un oa'' soit l'intersection de ce plan avec le plan aob; on aura

$$\overline{oa'}^2 + \overline{ob'}^2 = \overline{oa''}^2 + \overline{ob''}^2.$$

Les trois droites oa'', ob', oc', formeront encore un système de diamètres conjugués, et le plan $b''oc'$ contiendra l'axe oc, puisque oa'' est dans le plan principal aob. Conservons maintenant oa'', et remplaçons ob'' et oc' par deux nouveaux diamètres conjugués situés dans le plan $c'ob''$, dont l'un, ob_1, soit l'intersection de ce plan avec le plan aob; alors, oa'' et ob_1 se trouvant l'un et l'autre dans le plan principal aob, le conjugué de ob_1 ne sera autre que l'axe oc, et l'on aura

$$\overline{ob''}^2 + \overline{oc'}^2 = \overline{ob_1}^2 + \overline{oc}^2.$$

Enfin, la comparaison du système actuel oa'', ob_1, oc, avec le système oa, ob, oc, donne

$$\overline{oa''}^2 + \overline{ob_1}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{ob}^2,$$

et, en ajoutant les trois relations précédentes, on obtient

$$\overline{oa'}^2 + \overline{ob'}^2 + \overline{oc'}^2 = \overline{oa}^2 + \overline{ob}^2 + \overline{oc}^2;$$

ce qui donne la généralisation du premier des théorèmes d'Apollonius (1147) :

La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques est constante.

Le second théorème d'Apollonius se généralise de même :

Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués quelconques est constant.

En effet, on a évidemment

$$\text{vol.}(oa', ob', oc') = \text{vol.}(oa'', ob'', oc'),$$

puisque ces deux corps ont la même hauteur et des bases équivalentes comme parallélogrammes construits sur les deux systèmes de diamètres conjugués oc' et ob', oa'' et ob'', de la section faite par le plan $a'ob'$. On a de même

$$\text{vol.}(oa'', ob'', oc') = \text{vol.}(oa'', ob_1, oc) = \text{vol.}(oa, ob, oc),$$

d'où résulte

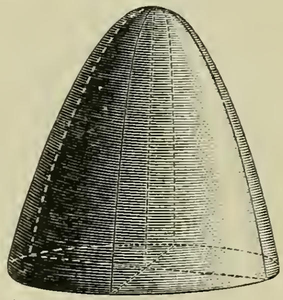
$$\text{vol.}(oa', ob', oc') = \text{vol.}(oa, ob, oc).$$

1226. Si deux des axes sont égaux, l'ellipsoïde devient de révolution autour du troisième axe. Enfin, si les trois axes sont égaux, l'ellipsoïde se réduit à une sphère.

PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

1227. Le paraboloïde elliptique (*fig.* 612) est tangent au plan de l'infini. Son centre est donc à l'infini, ainsi que l'un des plans principaux et les deux axes qu'il contient. Il ne reste à distance finie qu'un seul axe et les deux plans principaux qui passent par cet axe, auquel tous les diamètres sont d'ailleurs parallèles.

Fig. 612.



Toute section passant par l'axe est tangente à la droite de l'infini; c'est une *parabole* ayant pour axe l'axe même de la surface et pour sommet le point où cet axe rencontre le paraboloïde, c'est-à-dire le *sommet* de cette surface. *Toute section par un plan parallèle à l'axe est une parabole égale à celle que déterminerait un plan parallèle passant par l'axe.*

Les sections par les plans non parallèles à l'axe sont des ellipses, puisque ces sections n'ont aucun point commun à l'infini. Les ellipses dont les plans sont normaux à l'axe ont leurs sommets sur les deux paraboles principales qui, par suite, *sont situées l'une et l'autre d'un même côté du plan tangent au sommet*. Enfin, *la surface peut être engendrée par l'une des paraboles principales glissant parallèlement à elle-même de façon que son sommet décrive l'autre parabole principale.*

Tous ces résultats s'aperçoivent aisément après ce qui a été dit (1219 et suiv.) sur le paraboloïde hyperbolique.

En prenant pour axe des x l'axe commun des deux paraboles principales et pour axes des y et des z les tangentes au sommet de ces paraboles, puis raisonnant comme au n° 1221, on obtient, pour l'équation du paraboloïde elliptique,

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x.$$

Il suffit de changer dans l'équation du paraboloïde hyperbolique, p' en $-p'$.

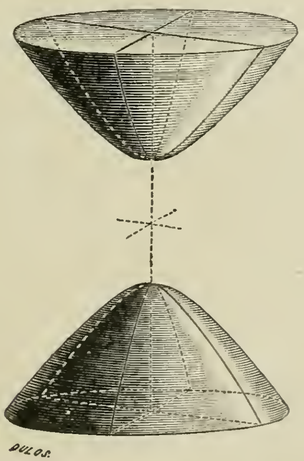
Ajoutons que la surface admet deux séries de sections circulaires dont les plans sont perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre et également inclinés sur l'autre section principale.

Si les deux paraboles principales ont même paramètre, le paraboloïde devient de révolution.

HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

1228. L'hyperboloïde à deux nappes (*fig.* 613), étant coupé par le plan de l'infini suivant une conique ordinaire C, a un centre o placé à distance

Fig. 613.



finie et *extérieur* à la surface. Le cône qui a le point o pour sommet et la conique C pour directrice est tangent à la surface tout le long de cette conique à l'infini ; on le nomme *cône asymptote*, et la surface étant intérieure à ce cône se compose de deux parties ou *nappes* séparées, situées chacune dans l'une des nappes du cône. Les diamètres et plans diamétraux conjugués de la surface sont les mêmes que ceux du cône ; elle a donc les mêmes axes que ce cône ; l'axe intérieur au cône rencontre donc seul la surface qui n'a que deux sommets réels. Tout plan passant par l'axe transverse coupe la conique C de l'infini en deux points et, par suite, la surface suivant une hyperbole symétrique par rapport à cet axe et ayant pour sommets réels les deux sommets réels de la surface; ce fait met mieux encore en évidence la division de la surface en deux nappes.

Les sections par des plans perpendiculaires à l'axe transverse sont des ellipses semblables dont les sommets sont situés sur les deux hyperboles principales dont les plans passent par l'axe. Ces ellipses se réduisent à un point lorsque le plan sécant passe par l'un ou l'autre sommet; quand le plan sécant est entre les deux sommets, la section devient imaginaire.

Les plans cycliques de la surface sont les mêmes que ceux du cône asymptote.

L'équation de la surface se déduit de celle de l'hyperboloïde à une nappe en changeant b^2 en $-b^2$; elle est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'axe des x étant dirigé suivant l'axe réel.

Cette surface n'a aucune importance au point de vue des applications. Nous avons hâte d'ailleurs de terminer cette esquisse déjà bien longue de la théorie des surfaces du second ordre. Le lecteur qui voudra la lire, la plume à la main, en restituant les figures une à une, n'éprouvera aucun embarras pour démontrer les points secondaires que nous n'avons fait qu'énoncer. Il pourra ensuite, s'il veut pousser plus avant cette étude, consulter avec le plus grand fruit le *Supplément sur les propriétés projectives des figures dans l'espace*, de Poncelet; les *Mémoires* de M. Chasles *sur les cônes, sur les coniques sphériques* et *sur les surfaces réglées*, et enfin l'*Aperçu historique*.

IV. — ÉTUDE DE QUELQUES SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

SURFACES POLAIRES RÉCIPROQUES.

1229. La méthode des polaires réciproques s'étend aisément aux figures de l'espace; nous nous bornerons à quelques indications sur ce sujet (*voir* PONCELET, *Traité des Propriétés projectives*, t. II).

Deux surfaces sont dites *polaires réciproques* par rapport à une surface du second degré σ, lorsque chacune d'elles est le lieu des pôles des plans tangents à l'autre, les pôles étant pris relativement à la surface auxiliaire σ.

Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut prouver que, si une surface ψ est le lieu des pôles des plans tangents d'une surface φ, réciproquement la surface φ sera le lieu des pôles des plans tangents à la surface ψ. Or, soient μ, μ', μ'', trois plans tangents à la surface φ; m, m', m'', leurs points de contact, et n, n', n'', leurs pôles par rapport à σ. Le point commun aux trois plans μ, μ', μ'', a pour polaire le plan $nn'n''$; mais, quand m' et m'' tendent vers m, il en est de même du point commun aux plans μ, μ', μ'', et alors, les points n' et n'' tendant vers n, le plan $nn'n''$ tend vers le plan tangent en n à la surface ψ. Donc le point m de la surface φ est le pôle du plan tangent en n à la surface ψ.

1230. *Quand deux surfaces sont polaires réciproques, la classe de l'une est égale au degré de l'autre.* Car, si une droite quelconque A rencontre la surface φ en k points, à ces k points répondent k plans polaires passant par la droite B conjuguée (1196) de la droite A et tangents à la surface ψ; et inversement, aux k plans menés par B tangentiellement à la surface ψ, répondent k points communs à la surface φ et à la droite A.

Il résulte de là que *la surface polaire réciproque d'une surface du second degré est une surface du second degré,* puisqu'une surface du second ordre est de seconde classe (1194).

1231. Le plus souvent, surtout lorsqu'il s'agit de transformer des propriétés métriques, on prend une sphère pour surface auxiliaire. Alors le point n' de la surface ψ correspondant au point n de la surface φ (*fig.* 617) s'obtient en abaissant du centre o de la sphère une perpendiculaire op sur le plan tangent en n à la surface φ et en portant sur cette perpendiculaire une longueur on' telle qu'on ait

$$op.on' = r^2,$$

r étant le rayon de la sphère. D'ailleurs, comme la polarité est réciproque, le plan tangent en n' à la surface ψ est à son tour perpendiculaire sur on et coupe cette droite en un point p_1 tel que

$$on.op_1 = r^2.$$

Il est évident, d'après cela, que, si l'on considère un ellipsoïde ε ayant pour axes a, b, c, sa polaire réciproque par rapport à une sphère concentrique de rayon r est un autre ellipsoïde dont les axes sont dirigés suivant les même droites que ceux du premier et ont respectivement pour longueurs $\frac{r^2}{a}$, $\frac{r^2}{b}$, $\frac{r^2}{c}$.

1232. Nous terminerons ce paragraphe par une remarque qui nous sera bientôt utile et qui se rattache à la théorie des pôles et des polaires.

Si, d'un point quelconque n d'un ellipsoïde, on abaisse un plan nsr perpendiculaire sur l'un des axes ox de cette surface, et si l'on désigne par

s le point où ce plan coupe la perpendiculaire op menée du centre o sur le plan pnt tangent en n, on a la relation

$$os.op = \alpha^2,$$

α étant la longueur de l'axe dirigé suivant ox (*fig.* 614).

En effet, le plan nsr a pour pôle, par rapport à l'ellipsoïde, le point t

Fig. 614.

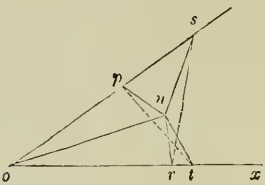
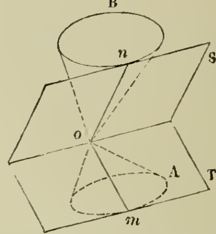


Fig. 615.



où le plan tangent en n coupe l'axe ox; mais ce plan a le même pôle par rapport à l'ellipsoïde et par rapport à la sphère concentrique de rayon α. Donc le plan pnt passant par t doit avoir son pôle par rapport à la sphère dans le plan nsr, et, comme ce pôle doit être sur op, il n'est autre que le point s, ce qui entraîne la relation ci-dessus.

SURFACES APSIDALES.

1233. Soient m (*fig.* 615) un point quelconque d'une surface quelconque φ et o un point fixe pris arbitrairement dans l'espace. La sphère ayant o pour centre et om pour rayon coupe la surface φ suivant une ligne A; α étant le cône qui a pour sommet o et pour directrice A, on élève par le point o la perpendiculaire au plan qui touche le cône α suivant la génératrice om. Les points n et n', où cette perpendiculaire rencontre la sphère, décrivent une surface ψ, lorsque m se déplace sur la surface φ. La surface ψ est, par définition, la surface *apsidale* de φ par rapport au point o.

Les deux points n et n' de ψ qui correspondent à un même point m quelconque de φ, sont symétriques par rapport au point o; toute surface apsidale ψ est donc une surface à centre.

Les points qui correspondent aux divers points de la ligne A appartiennent à une ligne sphérique B située sur ψ; le cône β ayant pour sommet o et pour directrice B est supplémentaire du cône α. On peut donc revenir de n ou n' au point m en effectuant en ordre inverse la construction qui a fourni ces deux points. Mais il ne faudrait pas conclure de là que φ est l'apsidale de ψ, puisque toute surface apsidale est une surface à centre.

Voici d'ailleurs un exemple fort simple :

On voit immédiatement que l'apsidale d'un plan P par rapport à un point o est le cylindre de révolution qui a pour rayon la distance $o\omega$ du point o au plan P et pour axe la droite indéfinie $o\omega$. Si l'on cherche maintenant la surface apsidale de ce cylindre par rapport au même point o, on trouve le plan P, son symétrique par rapport à o, et la sphère qui, ayant le point o pour centre, est inscrite dans le cylindre. (MANNHEIM.)

THÉORÈME.

1234. *Les plans tangents μ et ν aux points correspondants m et n de deux surfaces apsidales φ et ψ sont perpendiculaires au plan mon et perpendiculaires entre eux.*

En effet, la tangente mT à la courbe sphérique A (*fig.* 615) est à angle droit sur le rayon om de la sphère; elle est aussi à angle droit sur la droite on, puisque on est perpendiculaire au plan omT; donc cette tangente est perpendiculaire au plan mon, et, par suite, il en est de même du plan μ qui contient mT.

On voit de même que le plan ν est perpendiculaire au plan mon.

Il reste à montrer que les plans μ et ν sont perpendiculaires entre eux, ou bien, puisqu'ils sont l'un et l'autre perpendiculaires au plan mon, que leurs traces sur ce dernier plan sont rectangulaires. Or, soit m_1 (*fig.* 616)

Fig. 616.

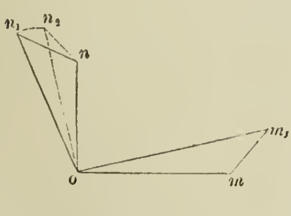
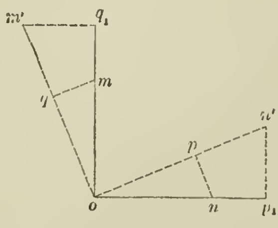


Fig. 617.



un point voisin de m sur la section de la surface φ par le plan mon qui est pris ici pour plan de la figure; la droite mm_1 sera à la limite la trace du plan μ. Soit n_1 le point de la surface ψ qui répond à m_1; rabattons le triangle onn_1 en onn_2 sur le plan de la figure, par une rotation autour de on. Le plan nn_1n_2 est à la limite tangent suivant nn_2 au cône de révolution que décrit nn_1 en tournant autour de no; il est donc perpendiculaire au plan de la figure, et, par suite, nn_2 est à la limite la trace du plan ν. Pour un motif analogue, la droite on_2 peut être considérée comme la projection orthogonale de on_1; donc l'angle m_1on_2 est droit comme étant la projection d'un angle droit $m_1 o n_1$ dont un côté om_1 est dans le plan de projection. Il suit de là que le triangle non_2 n'est autre que le triangle mom_1 qui aurait tourné de 90 degrés autour du point o dans son plan; les droites mm_1, nn_2, sont donc à la limite perpendiculaires l'une à l'autre.

COROLLAIRES.

1235. 1° Les normales en m et n aux surfaces φ et ψ sont contenues dans le plan mon et sont perpendiculaires entre elles.

2° Les perpendiculaires abaissées du point o sur les plans tangents μ et ν sont contenues dans le plan mon, et leurs longueurs, c'est-à-dire les distances du point o aux plans μ et ν, sont égales.

3° La section de la surface φ par le plan moT (*fig.* 615) a pour tangente en m l'intersection du plan omT et du plan μ; cette intersection est donc, comme chacun de ces deux plans, perpendiculaire au plan mon et par suite à la droite om. Donc la droite om est une normale à cette section, et l'on peut donner des surfaces apsidales cette définition, que Mac-Cullag prend pour point de départ dans le tome XVII des *Transactions of the Royal Irish Academie : La surface apsidale ψ d'une surface donnée φ par rapport à un point o est le lieu des points obtenus en portant, à partir de o, perpendiculairement à chaque plan passant par ce point, des longueurs égales aux normales abaissées du point o sur la section faite dans la surface φ par le plan considéré.*

THÉORÈME.

1236. *Si deux surfaces ε et ε' sont polaires réciproques par rapport à une sphère de centre o, leurs apsidales φ et φ', relatives au point o, sont polaires réciproques par rapport à la même sphère* (*fig.* 617).

En effet, soient n et n' deux points homologues de ε et de ε', et m et m' les points correspondants de φ et de φ'. Prenons pour plan de la figure le plan non', et désignons par ν, ν', μ, μ', les plans tangents aux surfaces ε, ε', φ, φ', aux points n, n', m, m'. D'après le corollaire (2°), puisque on' est perpendiculaire au plan ν, la droite om est située dans le plan de la figure, et il en est de même de om', puisque le plan ν' est perpendiculaire à on. D'ailleurs, si l'on abaisse np et mq perpendiculaires à on' et à om', ces lignes seront les traces des plans ν et μ, et l'on aura non-seulement $on' = om'$, mais encore (même corollaire) $op = oq$. Donc la relation

$$op.on' = r^2,$$

où r est le rayon de la sphère auxiliaire, équivaut à

$$oq.om' = r^2,$$

ce qui prouve que les surfaces φ et φ' sont polaires réciproques par rapport à la sphère de centre o et de rayon r.

SURFACE DES ONDES.

1237. Supposons qu'une suite d'ébranlements périodiques ait lieu en un point d'un milieu biréfringent : le mouvement vibratoire se propagera dans toutes les directions autour de ce point, et, au bout de l'unité de temps, le premier ébranlement sera parvenu sur une certaine surface que Fresnel a considérée le premier et à laquelle on donne le nom de *surface des ondes*.

Laissant complétement de côté le point de vue physique, nous allons ici étudier géométriquement cette surface intéressante et signaler les particularités curieuses qu'offre sa forme.

Nous partirons de la définition suivante :

La surface des ondes est la surface apsidale φ d'un ellipsoïde ε, par rapport au centre de cette dernière surface.

Le théorème du n° 1236 montre que *la polaire réciproque de la surface des ondes φ par rapport à une sphère concentrique à l'ellipsoïde ε est encore une surface des ondes;* c'est la surface apsidale φ' de l'ellipsoïde ε', polaire réciproque de l'ellipsoïde primitif ε.

Le théorème du n° 1234 permet de construire le plan tangent et la normale en un point quelconque de la surface des ondes.

Enfin, en combinant le théorème du n° 1236 et les corollaires du théorème du n° 1234, on voit que la surface des ondes φ peut être déduite des ellipsoïdes ε et ε' de la manière suivante :

1° *Si, par le centre de l'ellipsoïde ε, on élève une perpendiculaire à chaque plan diamétral, et qu'on porte sur cette perpendiculaire, à partir du centre, des longueurs égales aux demi-axes de la section diamétrale considérée, le lieu des extrémités de ces longueurs est la surface φ.*

2° *Si, à chaque plan diamétral de l'ellipsoïde ε', on mène des plans parallèles à des distances de ce plan égales aux longueurs des demi-axes de la section diamétrale considérée, la surface φ est la surface tangente à tous ces plans.*

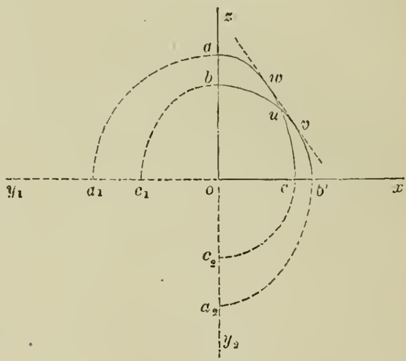
1238. Étudions maintenant la forme de la surface en partant de la première de ces deux définitions.

On voit d'abord immédiatement que la surface φ admet le même centre o et les mêmes plans principaux xoy, yoz, zox, c'est-à-dire les mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde ε. Désignons par a, b, c, les longueurs des trois axes de cet ellipsoïde qui sont dirigés respectivement suivant ox, oy, oz; supposons $a > b > c$, et cherchons les sections principales de la surface des ondes, c'est-à-dire les sections de cette surface par les plans principaux xoy, yoz, zox.

Pour qu'un point de la surface φ soit dans le plan xoy, il faut et il suffit que le plan diamétral correspondant soit perpendiculaire au plan xoy, c'est-à-dire passe par l'axe oz; mais chacune des sections diamétrales passant par oz a pour demi-axes le demi-axe mineur c de l'ellipsoïde et l'un des demi-diamètres de l'ellipse (ab). La section de la surface φ se compose donc du cercle qui a pour centre o et pour rayon c, et de l'ellipse (ab) qu'on aurait fait tourner de 90 degrés autour de son centre; d'ailleurs, le cercle est intérieur à l'ellipse, puisque son rayon c est inférieur à la fois aux deux demi-axes b et a de l'ellipse; nous désignerons le cercle par C et l'ellipse par C'.

On voit d'une manière analogue que la section faite par le plan yoz se compose du cercle qui a pour centre o et pour rayon a, et de l'ellipse (bc)

Fig. 618.



qui aurait tourné de 90 degrés autour du point o; ici, c'est l'ellipse qui est intérieure au cercle, puisque le rayon de ce cercle est plus grand que chacun des demi-axes de l'ellipse; nous désignerons ce cercle et cette ellipse respectivement par A et A'.

Enfin, le plan zox coupe la surface φ suivant le cercle ayant o pour centre et b pour rayon, et suivant l'ellipse (ca) qu'on aurait fait tourner de 90 degrés autour du point o. Ce cercle, que nous désignerons par B, et cette ellipse, que nous désignerons par B', se coupent en quatre points réels, puisque le rayon b du cercle a une valeur comprise entre les valeurs a et c des demi-axes de l'ellipse. Ces points reçoivent le nom d'*ombilics* de la surface des ondes.

D'après cela, pour se rendre compte de la forme de la surface, en se bornant, bien entendu, à la partie comprise dans le trièdre des coordonnées positives, on imaginera que ce trièdre soit fendu suivant l'axe des y, et que l'on ait rabattu la face zoy en zoy_1 sur le plan des zx, et la face xoy en xoy_2 sur le même plan des zx. Les trois faces étant ainsi appliquées sur le même plan, on pourra dessiner avec exactitude les trois couples de sections principales en se bornant au quart de chacune d'elles, comme on le voit sur la *fig.* 618. Il suffit dès lors de ramener par la pensée les trois plans dans leur position primitive, de manière à reformer le trièdre, pour acquérir une idée nette de la forme de la surface telle qu'on la voit en perspective dans la *fig.* 619; on a ménagé dans cette figure une ouverture qui permet de voir la nappe intérieure. Quant à la *fig.* 620, elle représente le corps solide ou noyau qui serait recouvert par la nappe intérieure seule.

Fig. 619.

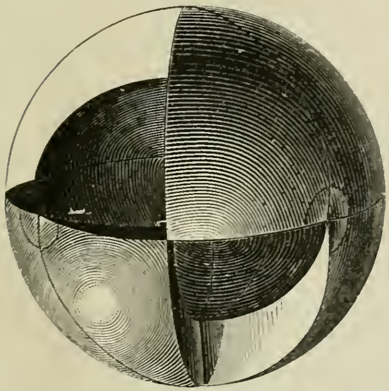
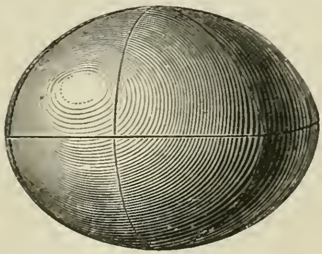


Fig. 620.



THÉORÈME.

1239. *La sphère qui passe par un point quelconque m de la surface et par la projection q du centre sur le plan tangent en ce point, et qui a son centre sur l'un des axes, coupe le plan principal perpendiculaire à cet axe suivant le cercle principal correspondant.*

Par exemple, la sphère qui passe par m et q et qui a son centre sur l'axe ox coupe le plan yoz suivant le cercle A.

En effet, soient (*fig.* 621) n un point quelconque de l'ellipsoïde ε, p la projection du centre o sur le plan tangent en n, et ns la trace sur le plan nop (qui est ici pris pour plan de la figure) du plan mené par n perpendiculairement à l'axe ox. Faisons tourner la figure de 90 degrés dans son plan autour du point o, de manière à l'amener en $omqg$; m sera un point quelconque de la surface des ondes et q la projection du centre o sur le plan tangent en ce point. Quant à la droite mg, nouvelle position de ns, elle sera perpendiculaire à ns et, par suite, parallèle à la projection de l'axe ox sur le plan de la figure; on aura d'ailleurs (1232) $og.oq = a^2$.

Cela posé, imaginons le point c où l'axe ox coupe le plan mené perpendiculairement à la droite qm par son milieu i; c sera le centre de la sphère considérée; soient d sa projection sur le plan de la figure et h sa distance à ce plan. En désignant par ρ le rayon du cercle suivant lequel la sphère coupe le plan principal zoy, on aura

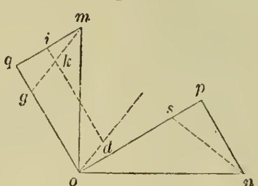
$$\rho^2 = \overline{cm}^2 - \overline{co}^2 = (h^2 + dm^2) - (h^2 + do^2) = \overline{dm}^2 - \overline{do}^2,$$

ou, en appelant k le point de rencontre de mg et de la droite id qui est parallèle à oq,

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \overline{dm}^2 - \overline{mk}^2 = \left(\overline{di}^2 + \overline{im}^2\right) - \left(\overline{ik}^2 + \overline{im}^2\right) = \overline{di}^2 - \overline{ik}^2 \\ &= (di + ik)(di - ik) = (dk + 2ik)\,dk = og\,(og + gq) = og.oq,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après la relation ci-dessus, $\rho = a$, ce qui prouve que le cercle d'intersection n'est autre que le cercle principal A.

Fig. 621.



1240. Ce théorème, qu'un géomètre anglais, M. Niven, a trouvé par l'analyse, et dont nous venons de donner une démonstration géométrique, fournit une nouvelle solution du problème du plan tangent et une explication simple des particularités de la surface.

Veut-on le plan tangent en un point m? On considérera les trois sphères passant par le point m et par chacun des cercles principaux A, B, C; le second point commun à ces trois sphères sera le point q, projection du centre o sur le plan tangent cherché, qui, par suite, n'est autre que le plan mené par q à angle droit sur oq.

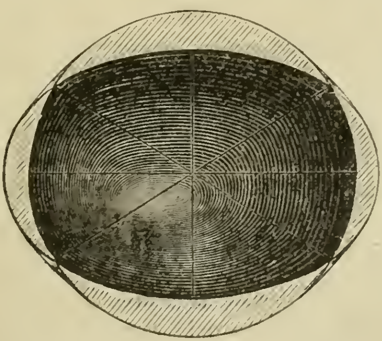
Inversement, un plan tangent étant donné, veut-on le point de contact? Par la projection q du centre o sur le plan donné, et par chacun des cercles principaux A, B, C, on mènera trois sphères, et le second point commun m de ces sphères sera le point de contact du plan tangent considéré.

1241. Revenons à la section de la surface par le plan zox, laquelle se compose du cercle B et de l'ellipse B' qui ont quatre points communs réels tels que u, et quatre tangentes communes réelles, telles que uv

(*fig.* 618). Cherchons le plan tangent en u à la surface des ondes. La projection du centre o sur ce plan tangent doit être le second point commun aux trois sphères passant par u et par chacun des cercles principaux A, B, C; mais, comme le point u est sur le cercle B, la sphère correspondant à ce cercle est indéterminée, et l'on trouve pour la projection du centre sur le plan tangent, non pas un point, mais un lieu qui est le cercle d'intersection des sphères passant par u et par chacun des cercles A et C, et dont le plan est perpendiculaire au plan zox. Il en résulte que *la surface admet au point u une infinité de plans tangents ayant pour enveloppe un cône* dont le sommet est au point u et dont les tangentes au cercle B et à l'ellipse B′ sont deux génératrices opposées.

Considérons en second lieu la tangente commune vv'. Le plan π élevé par cette ligne perpendiculairement au plan zox est évidemment tangent à la surface des ondes aux points v et v'. Il est facile de voir que *le plan π touche la surface tout le long du cercle décrit dans ce plan sur vv' comme diamètre*. En effet, le point de contact du plan π doit être le second point commun aux trois sphères passant par la projection v du centre o sur ce plan et par chacun des trois cercles principaux A, B, C; mais, le point v étant sur le cercle B, la sphère relative à ce cercle est indéterminée, et l'on trouve pour le point de contact, non pas un point unique, mais un lieu qui est le cercle commun aux deux sphères déterminées par le point v et par chacun des cercles A et C; ce cercle, dont le plan est évidemment

Fig. 622.



perpendiculaire au plan zox, n'est autre que le cercle décrit dans le plan π sur vv' comme diamètre.

Ainsi, la surface des ondes a quatre *points coniques* et quatre *cercles de contact*. La *fig.* 622 représente la section de la surface par un plan passant par les quatre points coniques (¹).

(¹) M. Mannheim a démontré les propriétés principales de cette surface et

1242. M. Darboux, qui a étudié (*Comptes rendus*, t. XCII) la surface qu'on obtient quand les cercles A, B, C ont des positions quelconques dans l'espace, a déduit du théorème de M. Niven le moyen de construire les points (et par suite les plans tangents) de la surface des ondes sans passer par la considération de l'ellipsoïde.

O étant le centre de la surface des ondes et q le second point d'intersection des trois sphères passant respectivement par les cercles A, B, C et par un point quelconque m de la surface, l'angle Oqm est droit; et il est clair que cette propriété constitue une définition de la surface; car, si m est un point quelconque de l'espace et q le second point commun aux sphères déterminées par m et par les cercles A, B, C, l'angle Oqm n'est plus droit.

Cela posé, prenons deux sphères quelconques passant l'une par le cercle A, l'autre par le cercle B, et cherchons les points de la surface qui sont situés sur le cercle γ commun à ces deux sphères. Il résulte immédiatement des propriétés des axes radicaux que toute sphère passant par le troisième cercle C coupera γ en deux points μ et μ', tels que la droite $\mu\mu'$ aille passer par un point fixe a situé sur la droite commune aux plans des cercles C et γ. Si le point μ appartient à la surface, il faudra que l'angle $O\mu\mu'$, c'est-à-dire l'angle $O\mu a$, soit droit. Donc le point μ sera sur la sphère admettant Oa pour diamètre. Cette construction donne deux points sur le cercle γ.

TORE.

1243. *Le tore* (895) *est la surface apsidale d'une sphère* par rapport à un point quelconque de l'espace. En effet, cette surface apsidale est évidemment de révolution autour de la droite oz qui joint le point considéré o au centre de la sphère; d'ailleurs, comme le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au plan méridien du point de contact, il résulte du mode de correspondance (1233) entre les points de deux surfaces apsidales que la méridienne de cette surface de révolution n'est autre qu'un grand cercle de la sphère qui aurait tourné de 90 degrés dans son plan autour du point o.

La méridienne complète se compose de deux cercles ω et ω' symétriques par rapport à l'axe oz; le point o, qui est sur l'axe et qui est le milieu de $\omega\omega'$, est le *centre* du tore; nous désignerons par d le *rayon moyen* $o\omega$ du tore et par r le rayon ωf du cercle méridien ω.

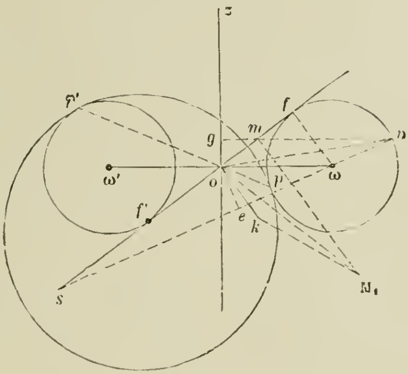
---

obtenu plusieurs propriétés nouvelles par d'élégantes considérations de Géométrie cinématique (*Comptes rendus*, 1867 et 1874; *Congrès de Lille*, 1874, *de Nantes*, 1875, et *du Havre*, 1877; *Cours de Géométrie descriptive*, 1880).

1244. *Tout plan bitangent* P *coupe le tore suivant le système de deux cercles.* (YVON VILLARCEAU, *Comptes rendus*, 1848.)

En effet, prenons pour plan de la figure (*fig.* 623) le plan méridien perpendiculaire au plan P; les deux points de contact f et f' seront (887) situés dans ce plan méridien, de sorte que la trace du plan P sera la tangente commune intérieure fof' aux cercles ω et ω'. Désignons par M un point quelconque de la section, et soit gn la trace du parallèle qui passe par ce point; le point M se projettera en m sur gn et ff', et l'on aura

Fig. 623.



$o\mathrm{M} = on$, puisque $o\mathrm{M}$ et on sont deux génératrices du cône qui a pour sommet le point o et pour base le parallèle gn. Si l'on rabat le plan P, autour de ff', sur le plan de la figure, le point M viendra donc sur la perpendiculaire élevée au point m sur ff' en un point M_1 tel, que $o\mathrm{M}_1 = on$. Cela posé, prolongeons $n\omega$ jusqu'à sa rencontre s avec ff' et menons oe perpendiculaire sur $n\omega$; le rapport de oe à ωf est égal à celui de so à $s\omega$ ou encore à celui de om à ωn et, comme $\omega f = \omega n$, on a $om = oe$; l'égalité des triangles rectangles oen, $om\mathrm{M}_1$, montre alors que l'angle $on\omega$ est égal à $o\mathrm{M}_1 m$ et, par suite, à $\mathrm{M}_1 ok$, ok étant la perpendiculaire élevée par o sur ff'. Si l'on prend $ok = r$, les triangles $ok\mathrm{M}_1$, $o\omega n$, seront donc égaux, et l'on aura $\mathrm{M}_1 k = o\omega = d$. On voit ainsi, en redressant le plan, que *la section se compose de deux cercles dont le rayon est égal au rayon moyen d du tore et dont les centres sont situés de part et d'autre de o, à une distance égale à r, sur la perpendiculaire menée par o au plan de la figure.*

Par tout point du tore passent donc *quatre cercles* de la surface; ce sont le parallèle, le méridien, et deux des quatre cercles suivant lesquels le tore est coupé par les plans tangents menés par ce point au cône Σ qu'engendre la droite ff' en tournant autour de l'axe oz.

1245. *Toute sphère bitangente coupe le tore suivant un système de deux cercles.* (MANNHEIM, *Nouvelles Annales*, 1856.)

En effet, prenons pour plan de la figure le plan du centre c de la sphère et de l'axe oz du tore. Ce plan méridien renferme les deux points de contact p et p', puisque les normales $p\omega$, $p'\omega'$, en ces points passent par c et rencontrent oz. Les points p et p' étant d'ailleurs deux points antihomologues des cercles ω et ω', la droite pp' passe par le centre de similitude o. Soient P et Q les plans tangents au cône Σ menés par la droite pp', et T le plan tangent commun à la sphère et au tore au point p; l'un θ des deux cercles suivant lesquels le plan p coupe le tore passe par p et p' et a pour tangente en p l'intersection L des plans P et T; mais le cercle σ que le plan P détermine dans la sphère passe aussi par les points p et p' et a pour tangente en p la droite L. Donc les cercles θ et σ coïncident, et l'on verrait de même que le cercle que le plan Q détermine dans la sphère coïncide avec l'un de ceux que ce plan détermine dans le tore.

1246. Nous terminerons ces notions sur le tore par la solution d'un problème qui se présente dans les applications (MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, 1880) :

Étant donné un tore et un point quelconque S *de l'espace, mener par le point* S *des droites bitangentes au tore.*

Soit SL l'un de ces rayons bitangents; en tournant autour de l'axe de révolution du tore, il engendre un hyperboloïde de révolution qui touche le tore suivant les deux parallèles engendrés par la rotation des points de contact de la droite SL.

Considérons le plan méridien qui passe par le point donné S. Ce plan coupe le tore suivant deux cercles C_1 et C_2 et l'hyperboloïde suivant une hyperbole passant par S et bitangente à chacun des cercles C_1 et C_2. Soient Sp, Sq les tangentes menées de S aux cercles C_1 et C_2; prenons sur Sp, $Sr = Sq$, en sorte que $pr = Sp - Sq$. L'hyperbole est le lieu des points pour lesquels la différence des tangentes menées de ces points aux cercles C_1 et C_2 est constante et égale à pr. Si donc on décrit, dans le plan méridien considéré, un cercle concentrique à C_1 et passant par r, ce cercle coupera C_2 en deux points a et b qui seront les points où l'hyperbole touche le cercle C_2. Ces points appartiennent aux parallèles de contact du tore et de l'hyperboloïde. Les rayons bitangents demandés seront donc les droites qui, passant par S, s'appuient sur ces deux parallèles, c'est-à-dire les génératrices communes aux deux cônes qui ont le point donné S pour sommet commun et, pour bases respectives, les parallèles engendrés par a et b.

Nous laissons au lecteur le soin de voir ce que devient la construction lorsque le point S s'éloigne à l'infini dans une direction donnée, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de *mener au tore des rayons bitangents et parallèles à une droite donnée.*

QUESTIONS PROPOSÉES
SUR LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

LIVRE V.
LE PLAN.

§§ I, II. — Premières notions sur le plan. — Droites et plans parallèles.

531. Mener par un point donné une droite qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan.

532. Mener à une droite donnée une parallèle qui s'appuie sur deux droites données non situées dans un même plan.

533. Mener par un point donné une droite qui rencontre une droite et un cercle non situés dans un même plan.

534. Dans tout quadrilatère gauche, c'est-à-dire dont les côtés ne sont pas situés dans un plan unique, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

535. Plusieurs droites étant données en grandeur, direction et sens, si on les transporte parallèlement à elles-mêmes, de telle sorte que l'extrémité de chacune d'elles se confonde avec l'origine de la suivante, la droite qui part de l'origine de la première et aboutit à l'extrémité de la dernière prend le nom de *résultante* des droites proposées; celles-ci sont dites à leur tour les *composantes* de la résultante. *Composer* des droites, c'est trouver leur résultante; *décomposer* une droite, c'est trouver des droites qui aient pour résultante la droite donnée. Ces définitions posées, démontrer les propositions suivantes :

1° La résultante de plusieurs droites reste la même, quel que soit l'ordre dans lequel on compose ces droites.

2° La résultante de plusieurs droites n'est pas changée quand on remplace un certain nombre d'entre elles par leur résultante.

3° Si, sans changer la direction ni le sens des composantes, on altère leur grandeur dans un certain rapport, la résultante conserve sa direction et son sens, mais sa grandeur est altérée dans le même rapport.

4° Si, sans altérer la grandeur ni la direction des composantes, on change leur sens, la résultante conserve sa grandeur et sa direction, et change de sens.

5° Pour décomposer une droite D en deux autres dont l'une soit une droite donnée d, il suffit de composer D avec d prise en sens contraire.

536. Une droite se déplace en restant parallèle à un plan donné et en s'appuyant sur deux droites non situées dans un même plan : quel est le lieu des points qui divisent la droite mobile dans un rapport donné?

§§ III, IV. — Droite et plan perpendiculaires. — Projection d'une droite sur un plan. — Angle d'une droite et d'un plan. — Plus courte distance de deux droites.

537. Mener, dans un plan donné et par un point de ce plan, une droite perpendiculaire à une droite donnée d'une manière quelconque dans l'espace.

538. Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il suffit qu'elle soit également inclinée sur trois droites passant par son pied dans ce plan.

539. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés d'un même côté de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la somme de ses distances aux points A et B soit minimum.

540. Étant donnés un plan P et deux points A et B situés de part et d'autre de ce plan, trouver sur le plan P un point tel, que la différence de ses distances aux points A et B soit maximum.

541. Étant donnée une droite D et deux points A et B situés comme on voudra dans l'espace, trouver le point de la droite D qui est équidistant des points A et B.

542. Étant donnés un triangle ABC et un plan quelconque P, trouver le point du plan P qui est équidistant des trois sommets du triangle ABC.

543. Trouver le lieu des points d'un plan dont la différence des carrés des distances à deux points donnés hors de ce plan est constante.

544. Trouver le lieu des points d'un plan d'où l'on voit sous un angle droit une droite située hors de ce plan.

545. La projection d'un angle droit sur un plan qui n'est parallèle à aucun de ses côtés, est un angle obtus si le plan de projection coupe les deux côtés de l'angle droit ou leurs deux prolongements; sinon, cette projection est un angle aigu.

546. Si par l'une des diagonales d'un parallélogramme on mène un

plan quelconque, les perpendiculaires abaissées sur ce plan des extrémités de l'autre diagonale sont égales.

547. Deux droites égales AB, A'B', étant situées d'une manière quelconque dans l'espace, trouver une droite D telle qu'une rotation autour de D amène simultanément A en A' et B en B'.

548. Étant donné un angle AOB, trouver le lieu des points M de l'espace tels que, si on les joint au sommet O de l'angle, la somme des projections de la droite OM sur les deux côtés de l'angle soit constante.

549. Le plan mené parallèlement à deux droites non situées dans un même plan, par le milieu de leur plus courte distance, passe par les milieux de toutes les droites qui joignent un point de la première droite à un point de la seconde.

550. Lorsqu'une droite est parallèle à un plan, la plus courte distance de cette droite à toutes les droites du plan qui ne lui sont pas parallèles est constante.

551. Entre deux droites données d'une manière quelconque dans l'espace, mener une droite parallèle à un plan donné et ayant une longueur donnée.

552. Trouver le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires et non situées dans un même plan.

553. Un angle AOB tourne dans l'espace autour d'une droite ZZ' parallèle à sa bissectrice; démontrer que, si A'O'B' est une seconde position d'ailleurs quelconque de cet angle : 1° les droites OA et O'A' ne sont pas dans un même plan, non plus que les droites OB et O'B'; 2° OA et O'B' sont dans un même plan, et il en est de même de O'A' et de OB; 3° trois quelconques des droites OA, OB, O'A', O'B', ne sont pas parallèles à un même plan.

554. Soient n plans tels que deux quelconques ne soient pas parallèles, que trois quelconques ne soient pas parallèles à une même droite, et enfin que quatre quelconques ne passent pas par un même point. Prouver que le nombre des droites d'intersection de ces plans est égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$, que le nombre des points d'intersection de ces droites est égal à $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

555. Si la somme des perpendiculaires abaissées d'un point A sur deux plans donnés est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un autre point B sur les mêmes plans, cette somme reste la même pour tout

autre point C de la droite AB. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

556. Soient trois points A, B, C, et deux plans P et Q. Si la somme des deux perpendiculaires abaissées de chacun de ces points sur les deux plans est la même pour les trois points, cette somme restera encore la même pour tout autre point du plan ABC. — Étendre ce théorème au cas d'un nombre quelconque de plans.

§§ V, VI, VII. — Angles dièdres. — Plans perpendiculaires. Angles polyèdres.

557. Si, par un point O de l'espace, on mène deux parallèles OA et OB à un plan donné P, puis par le même point O deux plans respectivement perpendiculaires à OA et à OB, l'intersection de ces plans est perpendiculaire au plan P. (Cette proposition est utile dans les applications.)

558. Si l'on projette un même point de l'espace sur deux plans qui se coupent, les perpendiculaires abaissées des deux projections sur l'intersection des deux plans la rencontrent au même point. — Réciproquement, si cette condition est remplie pour deux points des deux plans, ces points sont les projections d'un même point de l'espace.

559. Deux droites égales, parallèles et de même sens, ont leurs projections sur un même plan égales, parallèles et de même sens. — Réciproque de cette proposition.

560. Toute ligne qui se projette, sur deux plans qui se coupent, suivant une ligne droite, est elle-même une ligne droite.

561. La projection, sur un plan ou sur un axe, de la résultante de plusieurs droites est la résultante des projections de ces droites. (*Voir* la Question 535.)

562. Si une droite est également inclinée sur les deux faces d'un angle dièdre, ses traces sur les deux faces sont également distantes de l'arête de l'angle dièdre. — Réciproque.

563. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans qui se coupent?

564. Quel est le lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent?

565. Les perpendiculaires abaissées d'un même point sur des plans dont les intersections sont parallèles sont dans un même plan.

566. Deux angles dièdres qui ont leurs arêtes parallèles et leurs faces perpendiculaires chacune à chacune sont égaux ou supplémentaires.

567. Quel est le lieu des points équidistants de deux plans donnés et de deux points ou de deux droites données situées dans un même plan?

568. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à deux plans donnés soit égale à une droite donnée?

569. Quel est le lieu des points tels, que la somme de leurs distances à trois plans donnés soit égale à une droite donnée? — Étendre ce problème au cas d'un nombre quelconque de plans.

570. Trouver sur une droite donnée un point tel, que la somme de ses distances à deux plans qui se coupent soient un minimum.

571. Montrer que, si par un même point de l'arête d'un angle dièdre on mène dans chaque face une droite faisant un angle donné α avec cette arête, l'angle rectiligne ainsi obtenu ne varie pas proportionnellement à l'angle dièdre, à moins que l'angle α ne soit droit.

572. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu des points équidistants des trois faces d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

573. Dans tout angle trièdre, les plans menés perpendiculairement aux faces, par les bissectrices de ces faces, se coupent suivant une même droite. — Quel est le lieu géométrique des points équidistants des trois arêtes d'un angle trièdre indéfiniment prolongées?

574. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes perpendiculairement aux faces opposées se coupent suivant une même droite.

575. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

Remarque. — Les quatre théorèmes précédents sont vrais lorsque le sommet de l'angle trièdre se transporte à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de trois plans dont les trois intersections deux à deux sont parallèles.

576. Couper un angle polyèdre à quatre faces, de manière que la section soit un parallélogramme.

577. Si, dans le plan de chaque face d'un angle trièdre et par son sommet, on mène une perpendiculaire à l'arête opposée, les trois perpendiculaires obtenues sont dans un même plan.

578. Tout plan perpendiculaire à l'une des arêtes d'un angle trièdre rectangle coupe cet angle trièdre suivant un triangle rectangle.

579. La somme des angles formés par les arêtes d'un angle trièdre avec les faces opposées est comprise entre la somme des faces et la moitié de cette somme.

580. Si, par un point pris dans l'intérieur d'un angle polyèdre, on

abaisse des perpendiculaires sur toutes ses faces, le nouvel angle polyèdre ainsi formé est *supplémentaire* du premier. (*Voir* les nos 572, 573.)

581. Dans tout angle polyèdre convexe de n faces, la somme des angles dièdres est comprise entre $2n$ et $2n - 4$ angles droits.

582. La somme des angles aigus formés avec les arêtes d'un trièdre trirectangle par une droite située dans l'intérieur du trièdre et passant par son sommet est moindre que 180°. — Peut-on assigner une limite inférieure de la même somme?

583. A, B, C, étant trois points pris à volonté sur les arêtes d'un angle trièdre trirectangle et O la projection du sommet S de cet angle trièdre sur le plan ABC, démontrer que le triangle ASB est moyen proportionnel entre les triangles ABC et OAB.

584. Étant donné le triangle suivant lequel la feuille de dessin est rencontrée par un angle trièdre trirectangle, trouver, par des constructions graphiques exécutées sur le plan de cette feuille, les inclinaisons des trois arêtes de l'angle trièdre sur ce plan.

585. Couper un angle trièdre trirectangle par un plan tel, que la section soit un triangle égal à un triangle donné.

APPENDICE DU CINQUIÈME LIVRE.

586. Étant donnés un quadrilatère gauche et une droite qui divise deux de ses côtés opposés en parties proportionnelles, trouver une droite perpendiculaire à la première et qui divise proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère.

587. Dans un quadrilatère gauche, les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales se coupent mutuellement en parties égales.

588. Quand un plan transversal coupent les côtés consécutifs d'un polygone gauche ABCD..., en des points a, b, c, ..., on a, en grandeur et en signe, la relation

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \cdots = +1.$$

589. Si une droite ac glisse sur deux côtés opposés AB et CD d'un quadrilatère gauche, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{aA}{aB} = \lambda \frac{cD}{cC},$$

λ étant une constante, cette droite rencontre toujours trois droites fixes.

590. Si l'on fait tourner deux plans rectangulaires autour de deux droites fixes dans l'espace, leur intersection rencontre toujours trois droites fixes. — Dans le cas où les deux droites fixes se coupent, quel est le lieu des points où l'intersection des deux plans rectangulaires rencontre un plan perpendiculaire à l'une de ces droites fixes?

591. Quand on a mis en perspective une figure plane sur un tableau plan, si l'on fait tourner le tableau autour de son intersection LT avec le plan de la figure donnée, les deux figures restent toujours en perspective, et le lieu de l'œil, qui change de position dans l'espace, décrit un cercle situé dans un plan perpendiculaire à LT.

592. Si A, B, C et A', B', C', sont les points où deux droites L et L' rencontrent les plans des faces d'un trièdre trirectangle et si les angles sous lesquels on voit du sommet du trièdre les segments AB, BC, CA, sont respectivement égaux aux angles sous lesquels on voit les segments A'B', B'C', C'A', les deux droites L et L' sont dans un même plan passant par le sommet du trièdre.

LIVRE VI.

LES POLYÈDRES.

§§ I, II. — Du prisme.

593. 1° Le volume d'un prisme triangulaire a pour mesure la moitié du produit de l'aire d'une face latérale par la distance de cette face à l'arête opposée.

2° Si, sur trois droites parallèles et non situées dans un même plan, on prend d'une manière quelconque des longueurs égales à une droite donnée, le volume et la surface latérale du prisme triangulaire ainsi formé sont constants.

594. Couper un cube par un plan de manière que la section soit un hexagone régulier.

595. Deux prismes sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre une base et une face égales chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une base et deux faces adjacentes égales chacune à chacune et semblablement disposées.

596. Deux prismes triangulaires sont égaux lorsqu'ils ont leurs faces latérales égales chacune à chacune et semblablement disposées.

597. Vérifier par la Géométrie la formule qui donne le cube d'une somme ou d'une différence de deux parties.

598. On donne trois droites deux à deux non situées dans un même plan, et l'on demande de construire un parallélipipède dont trois arêtes soient sur ces trois droites.

599. Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de huit fois le carré de la droite qui joint les milieux communs de ces diagonales considérées deux à deux. — Application au parallélipipède quelconque.

600. Dans un hexaèdre quelconque, la somme des carrés des arêtes surpasse la somme des carrés des diagonales de quatre fois la somme des carrés des quatre droites qui joignent les milieux des diagonales du polyèdre et les milieux des diagonales de deux faces opposées. — Application au parallélipipède.

601. Mener par une droite donnée un plan qui partage un parallélipipède en deux parties équivalentes.

602. Dans tout prisme triangulaire, l'aire de la plus grande face est plus petite que la somme des deux autres.

603. De tous les prismes de n faces, c'est le prisme régulier qui a :

1° La plus petite aire latérale, les bases étant équivalentes et les hauteurs égales ;

2° La plus grande base et le plus grand volume, les aires latérales étant équivalentes et les hauteurs égales ;

3° La plus grande hauteur et le plus grand volume, les bases et les aires latérales étant respectivement équivalentes ;

4° La plus petite base et la plus grande hauteur, les aires latérales et les volumes étant respectivement équivalents.

604. De deux prismes réguliers, celui dont le nombre de faces est le plus grand possède les quatre propriétés énoncées dans le numéro précédent.

605. De tous les prismes quadrangulaires, c'est le cube qui, à égalité d'aire, possède le plus grand volume et qui, à égalité de volume, possède la plus petite aire.

§§ III, IV. — De la pyramide.

606. Démontrer que deux tétraèdres sont égaux : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; 2° lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés ; 3° lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune et semblablement disposées ; 4° lorsqu'ils ont une arête égale et cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

607. Les plans menés perpendiculairement sur les milieux des arêtes d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

608. Les plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre se rencontrent en un même point.

609. Les perpendiculaires élevées sur chaque face d'un tétraèdre par le centre du cercle circonscrit à la face considérée se rencontrent en un même point.

610. Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux points d'intersection des médianes des faces opposées se rencontrent en un même point, situé au quart de chacune de ces droites à partir de la face correspondante. (*Voir* le n° 718.)

611. Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en parties égales.

612. Trouver dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel, qu'en le joignant aux quatre sommets on décompose ce tétraèdre en quatre tétraèdres équivalents.

613. Si l'on prend un point O dans l'intérieur d'un tétraèdre SABC, et si l'on prolonge les droites SO, AO, BO, CO, jusqu'à la rencontre des faces opposées en s, a, b, c, on a la relation

$$\frac{Os}{Ss} + \frac{Oa}{Aa} + \frac{Ob}{Bb} + \frac{Oc}{Cc} = 1.$$

614. Si l'on coupe un prisme ou une pyramide par un plan non parallèle à la base, et si l'on prolonge les côtés de la section jusqu'à la rencontre des côtés correspondants de la base, les points d'intersection obtenus sont en ligne droite.

615. Étant données les faces d'un tétraèdre, trouver, en ne se servant que du compas, la longueur de la hauteur du tétraèdre et le pied de cette hauteur sur le plan de la base.

616. Deux tétraèdres qui ont un angle trièdre égal sont entre eux comme les produits respectifs des arêtes qui comprennent cet angle. — En déduire la première partie du thécrème du n° 684.

617. Deux tétraèdres qui ont une arête égale et les angles dièdres correspondant à cette arête égaux chacun à chacun sont entre eux comme les produits des faces qui comprennent le dièdre égal.

618. Le plan bissecteur de l'angle dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux faces qui comprennent l'angle dièdre. — Considérer le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur.

619. Soient le tétraèdre SABC et le point O où la droite SO également inclinée sur les trois faces latérales (*voir* la question 572) rencontre la base ABC : démontrer que les triangles OAB, OBC, OAC, sont proportionnels aux faces latérales correspondantes.

620. Le plan déterminé par une arête d'un tétraèdre et le milieu de l'arête opposée partage ce tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

621. Si par la droite DE, qui joint les milieux de deux arêtes opposées SA, BC, d'un tétraèdre SABC, on mène un plan quelconque qui coupe l'arête SB en F et l'arête AC en G, la droite FG est divisée par la droite DE en deux parties égales.

622. Tout plan conduit par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le partage en deux volumes équivalents.

623. On donne une droite sur l'une des faces d'un tétraèdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui détermine avec les faces de ce tétraèdre un autre tétraèdre qui soit au premier dans un rapport donné.

624. On donne une droite sur l'une des faces d'un angle trièdre, et l'on demande de mener par cette droite un plan qui ferme l'angle trièdre en déterminant un tétraèdre de volume déterminé.

625. Quelle est la différence des volumes d'un tronc de pyramide à bases parallèles et d'un prisme de même hauteur ayant pour base la demi-somme des bases du tronc de pyramide? — Quelle erreur commet-on en remplaçant l'un des volumes par l'autre, pour une hauteur de 6 mètres et pour des bases du tronc de pyramide égales à $3^{mq},75$ et à $2^{mq},85$?

626. Mener, parallèlement à une droite donnée ou par un point donné, un plan qui partage un tétraèdre donné en deux parties équivalentes.

627. Trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide quelconque à bases parallèles, en le décomposant en troncs de pyramide triangulaires.

628. Les arêtes latérales d'une pyramide triangulaire SABC ont pour longueurs L, M, N; on coupe cette pyramide par un plan *abc* non parallèle à la base, qui rencontre les arêtes latérales à des distances du sommet égales à l, m, n : trouver le volume du tronc de pyramide ainsi déterminé.

629. On donne deux tétraèdres SABC, S'A'B'C', tels, que les droites qui unissent les sommets correspondants concourent en un même point; démontrer que, si les faces correspondantes des deux tétraèdres se coupent, les quatre droites d'intersection sont dans un même plan.

630. Soit un tétraèdre SABC; par un point O pris dans la face SBC, on mène aux arêtes SA, AB, AC, jusqu'aux faces ABC, SAC, SAB, les parallèles OD, OE, OF : démontrer la relation

$$\frac{OD}{SA}+\frac{OE}{AB}+\frac{OF}{AC}=1.$$

631. Soit un tétraèdre SABC coupé par un plan quelconque DEF; menons les diagonales des quadrilatères ABDE, BCFE, ACFD; ces diagonales se rencontrent deux à deux aux points G, H, K, et les droites SG, SH, SK, coupent elles-mêmes les côtés de la base ABC aux points L, M, N. Démontrer : 1° que les transversales AM, BN, CL, se coupent en un même point O de la base ABC; 2° que les transversales SO, AH, BK, CG, se coupent en un même point P de l'espace. — Examiner le cas où la section DEF est parallèle à la base ABC.

632. Dans un tronc de pyramide triangulaire à bases non parallèles, les points d'intersection des diagonales des trois faces latérales et les points d'intersection des côtés des bases prolongés deux à deux sont dans un même plan.

·633. La hauteur d'un tétraèdre régulier est égale à la somme des perpendiculaires abaissées d'un point pris dans l'intérieur du polyèdre sur ses quatre faces. — Examiner le cas où le point est choisi extérieurement.

634. Si, par un point quelconque pris dans l'espace, on fait passer plusieurs droites parallèles et égales aux différents côtés d'un polygone ou plusieurs polygones parallèles et égaux aux différentes faces d'un polyèdre quelconque, la somme *algébrique* des produits obtenus en multipliant la longueur ou l'aire de chacun des éléments ainsi transportés par la perpendiculaire abaissée sur lui d'un autre point constant de l'espace est égale à zéro. — Les produits considérés sont *positifs* ou *négatifs*, suivant que les faces transportées laissent ou non d'un même côté le centre commun des perpendiculaires.

635. Soit le tétraèdre SABC; menons une section quelconque DEF parallèle à la base ABC, et joignons les milieux des côtés de cette section aux sommets opposés de la base : les trois droites obtenues se croisent en un même point dont on demande le lieu.

636. Par un point quelconque pris dans l'intérieur de la base d'une pyramide régulière, on mène à cette base une perpendiculaire qui rencontre toutes les faces de la pyramide ou leurs prolongements : démontrer que la somme des distances des points de rencontre obtenus à la base de la pyramide est constante. — Considérer le cas où le pied de la perpendiculaire élevée à la base est extérieur à cette base.

637. Étant données les quatre hauteurs d'un tétraèdre et les distances d'un point à trois des faces, déterminer la distance de ce point à la quatrième face.

638. La somme des distances des sommets d'un tétraèdre à un plan est égale à quatre fois la distance du centre de gravité du tétraèdre à ce plan.

639. Quand, dans un tétraèdre, sur les trois couples d'arêtes opposées, deux sont formés d'arêtes perpendiculaires, la même condition est remplie par le troisième couple. — Conclure de là qu'il existe une infinité de tétraèdres à arêtes opposées orthogonales.

640. Dans tout tétraèdre à arêtes opposées orthogonales :

1° Les quatre hauteurs et les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent en un même point.

2° Les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont équidistants du point de concours des droites qui joignent les sommets au centre de gravité des faces opposées.

641. Dans tout tétraèdre à arêtes opposées orthogonales :

1° Les produits des arêtes opposées sont en raison inverse des plus courtes distances de ces arêtes;

2° Les sommes des carrés des arêtes opposées sont égales entre elles, et la somme des carrés des produits des arêtes opposées est égale à quatre fois la somme des carrés des quatre faces;

3° La somme des six dièdres et des douze angles formés par chaque arête avec les deux faces auxquelles cette arête aboutit est égale à douze angles droits.

642. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SAC, trois prismes triangulaires quelconques dont les bases supérieures se rencontrent en O; sur la base ABC du tétraèdre, on construit alors un quatrième prisme triangulaire en prenant ses arêtes latérales égales et parallèles à la droite SO : démontrer que le volume de ce dernier prisme est équivalent à la somme des volumes des trois premiers prismes.

643. Mener un plan parallèle à la base d'un tétraèdre donné, de manière que ce plan détermine un autre tétraèdre dont l'aire totale soit la moitié de celle du tétraèdre donné.

644. Construire un tétraèdre, connaissant :

1° Les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées et les angles que font entre elles ces trois droites;

2° Un point de chaque arête;

3° La base et les longueurs des trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées;

4° La base et les droites qui joignent les sommets de la base aux points d'intersection des médianes des faces opposées.

645. Trouver le volume d'une pyramide triangulaire, en regardant cette pyramide comme la limite de la somme des prismes inscrits dans cette pyramide, l'inscription étant effectuée comme au n° 642.

646. Soit une pyramide triangulaire SABC. Par le milieu E de l'arête SB, on mène le plan DEF parallèle à la base ABC, le plan EGH parallèle à la face ASC, et le plan EDH; la pyramide SABC se trouve ainsi décomposée en deux prismes triangulaires équivalents et en deux pyramides triangulaires équivalentes. On peut faire subir la même décomposition à la pyramide SDEF, et continuer ainsi indéfiniment : en déduire le volume de la pyramide SABC.

647. Étant donnée une pyramide triangulaire SABC, à quelle distance de la base ABC doit-on mener un plan parallèle abc, pour que le rapport des volumes de la pyramide Sabc et du tronc de pyramide ABCabc soit égal à m?

648. Étant données trois droites parallèles non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur AB donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde droite, un point D sur la troisième; démontrer :

1° Que le volume de la pyramide triangulaire ABCD est constant, quelles que soient les positions des points C et D et la parallèle sur laquelle on porte la longueur AB; 2° que ce volume est proportionnel à AB.

649. On donne l'arête A d'un prisme triangulaire quelconque; sur l'une des arêtes, on prend à partir de la base une longueur x; sur la seconde arête, on prend de même une longueur a, et sur la troisième une longueur b. Par les trois points ainsi déterminés, on fait passer un plan qui divise le prisme en deux parties. Pour quelle valeur de x ces parties sont-elles équivalentes?

650. Trouver le volume du corps limité par quatre plans parallèles deux à deux, une face parallélogramme et un quadrilatère gauche ayant pour plan directeur cette face parallélogramme.

651. Étant donnés quatre polygones plans disposés d'une manière quelconque dans l'espace, trouver un point tel, qu'en le donnant pour sommet commun aux pyramides ayant pour bases ces polygones, les volumes de ces pyramides soient entre eux comme quatre droites ou quatre nombres donnés.

652. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit maximum.

653. Par la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on peut faire passer une infinité de plans : quel est celui qui détermine la section minimum?

654. Dans une pyramide SABCD dont la base ABCD est un trapèze, on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur la base ABCD, la direction des arêtes parallèles AB et CD, les angles de la base SBC, et l'on demande de construire la pyramide. — Même problème, en supposant qu'on donne la face SAD en grandeur et en position, son inclinaison sur le plan donné de la face SBC et les angles de cette dernière face.

655. Étant donné un prisme triangulaire, le couper par un plan tel, que la section soit semblable à un triangle donné.

656. Partager une pyramide quadrangulaire régulière en deux parties équivalentes, par un plan mené par l'un des côtés de la base.

657. Construire le parallélipipède circonscrit à une pyramide triangulaire.

658. Le volume d'un tétraèdre est le tiers du volume du parallélipipède circonscrit.

659. Trouver le volume du tétraèdre régulier par la considération du parallélipipède circonscrit.

660. Tout tétraèdre n'a qu'un seul parallélipipède circonscrit; mais tout parallélipipède correspond à deux tétraèdres inscrits, qu'on peut appeler conjugués et qui sont équivalents; l'un de ces tétraèdres étant donné, construire le second.

661. Calculer le volume du noyau octaèdre commun aux deux tétraèdres conjugués d'un même parallélipipède.

662. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes de l'un des tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère quatre de ces arêtes opposées deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en quatre points situés sur une même circonférence. Dans quelle position du plan sécant le diamètre variable de cette circonférence est-il minimum?

663. Si l'on prolonge indéfiniment les arêtes des deux tétraèdres conjugués d'un parallélipipède, et si l'on considère huit de ces arêtes situées dans quatre faces du parallélipipède et parallèles entre elles deux à deux, il existe toujours un plan, susceptible de deux inclinaisons différentes, qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, coupe ces arêtes en huit points situés sur une circonférence.

664. Par un point S pris sur le prolongement de l'axe d'un prisme hexagonal régulier et par les côtés du triangle équilatéral obtenu en joignant de deux en deux les sommets de sa base supérieure, on fait passer des plans qui détachent du prisme trois tétraèdres et les remplacent par un tétraèdre unique reposant sur sa base supérieure : déterminer la position du point S qui rend minimum l'aire du décaèdre ainsi construit (alvéole des abeilles).

665. Sur une première droite AA', on donne deux points fixes a et b; sur une seconde droite quelconque BB', deux points mobiles c et d restent à une distance constante : chercher pour quelle position du segment cd l'aire de la pyramide $abcd$ est minimum.

§§ V, VI. — Figures symétriques. — Polyèdres semblables.

666. Déterminer les arêtes d'un parallélipipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres a, b, c, et que le volume du parallélipipède est V.

667. Chercher le rapport des volumes de deux tétraèdres, dont l'un a été formé en menant par les sommets de l'autre des plans parallèles aux faces opposées.

668. Deux tétraèdres sont semblables : 1° lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 2° lorsqu'ils ont une face semblable adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés; 3° lorsqu'ils ont trois faces semblables chacune à chacune et semblablement disposées; 4° lorsqu'ils ont cinq angles dièdres égaux chacun à chacun et semblablement disposés.

669. Les carrés des volumes de deux polyèdres semblables sont proportionnels aux cubes de deux faces homologues.

670. Une droite comprise entre deux faces d'un polyèdre donné est divisée en plusieurs segments; sur chaque segment, considéré comme l'homologue de la droite donnée, on construit un polyèdre semblable au polyèdre donné : démontrer que l'aire de ce polyèdre est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des polyèdres segmentaires, et que son volume est égal au cube de la somme des racines cubiques des volumes de ces mêmes polyèdres.

671. Construire deux droites qui soient dans le même rapport que deux cubes donnés.

672. Démontrer que le tétraèdre formé en joignant les points de rencontre des médianes des faces d'un tétraèdre donné est semblable au symétrique de ce tétraèdre; chercher le rapport des volumes de ces deux tétraèdres.

673. On nomme *centre de symétrie* d'un système de points un point O tel, qu'en le joignant à un point quelconque A du système et en prolongeant la droite AO d'une quantité égale à elle-même, le point A′ ainsi obtenu soit aussi un point du système proposé. — Démontrer d'après cela que, dans tout système de points limité, il ne peut exister qu'un centre de symétrie.

674. On nomme *axe de symétrie* d'un système de points une droite telle, qu'en faisant tourner le système d'un certain angle autour de cette droite, la nouvelle position de chaque point du système soit l'ancienne

position d'un certain point du même système. — Démontrer que le plus petit des angles capables de restituer ainsi le lieu des points du système, dans la rotation de ce système autour d'un axe de symétrie, est une partie aliquote $\frac{1}{q}$ de 360 degrés. Suivant que q est égal à 2, 3, 4, ..., l'axe de symétrie est *binaire, ternaire, quaternaire*, ...; q est *l'ordre de symétrie*.

675. On nomme *plan de symétrie* d'un système de points un plan tel, qu'en abaissant d'un point quelconque du système une perpendiculaire sur ce plan et en prolongeant cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité ainsi obtenue soit encore un point du système. — Démontrer que, si un système possède divers axes et divers plans de symétrie, tous ces axes et tous ces plans doivent se couper en un même point.

676. Dans tout système possédant un plan et un centre de symétrie, la droite menée par le centre normalement au plan est un axe de symétrie d'ordre pair.

677. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie, l'intersection de ces plans est un axe de symétrie.

678. Un système dépourvu d'axe de symétrie ne peut posséder à la fois un centre et un plan de symétrie.

679. Lorsqu'un système possède deux plans de symétrie non rectangulaires, il en possède un troisième.

680. Lorsqu'un système possède un plan P de symétrie et un axe L de symétrie oblique à ce plan, la droite L' homologue de L par rapport au plan P est un nouvel axe de symétrie.

681. Lorsqu'il existe dans un système deux axes de symétrie binaires, la perpendiculaire menée au plan de ces axes par leur point d'intersection est un axe de symétrie.

682. Lorsqu'un système possède trois axes quaternaires rectangulaires entre eux, il possède en même temps quatre axes ternaires.

APPENDICE DU SIXIÈME LIVRE.

683. Étudier les polyèdres considérés dans le VI[e] Livre, sous le rapport de leurs centres, de leurs axes et de leurs plans de symétrie.

684. Soit un polyèdre divisé en P autres polyèdres quelconques; soient S le nombre des sommets de ces différents polyèdres y compris le premier,

F le nombre de leurs faces, A le nombre de leurs arêtes; on aura la formule

$$A + P + 1 = F + S.$$

685. En se reportant à l'exercice précédent, quelle est la relation entre les nombres d'arêtes, de faces et de sommets appartenant à la surface extérieure du polyèdre proposé, et les nombres d'éléments analogues situés à l'intérieur de ce polyèdre?

686. Étant données autant de droites qu'on voudra passant par un même point O, trouver le lieu des points tels, qu'en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les droites données, la somme des produits des distances du point O à ces perpendiculaires par des droites données soit égale à un carré donné m^2.

687. Étant donnés autant de plans qu'on voudra passant par un même point, trouver le lieu des points tels, que la somme des produits de leurs distances aux plans donnés par des droites données soit constante.

688. La somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite ou un plan forme avec trois axes ou trois plans perpendiculaires entre eux est égale à l'unité.

689. Le carré d'une droite ou d'une aire plane quelconque est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes ou sur trois plans perpendiculaires entre eux.

690. Si A et A' sont les aires de deux figures situées dans un même plan, P et P', Q et Q', R et R', les projections de ces deux figures sur trois plans perpendiculaires entre eux, on a

$$AA' = PP' + QQ' + RR'.$$

691. Étant donnés les angles que deux droites ou deux plans forment respectivement avec trois axes ou trois plans rectangulaires, trouver l'angle de ces deux droites ou de ces deux plans.

692. Étant données les projections d'une droite ou d'une aire plane sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires, trouver sa projection sur un quatrième axe ou un quatrième plan qui fait des angles connus avec les trois premiers.

693. La somme des carrés des projections d'autant de droites ou d'autant d'aires planes qu'on voudra sur trois axes ou sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

694. Trouver l'axe ou le plan sur lequel la somme des projections de droites ou d'aires planes données est un maximum. — Cette même somme est constante lorsqu'on projette sur des axes ou des plans faisant le même angle avec l'axe ou le plan sur lequel la projection est un maximum.

695. Dans un polygone quelconque, la somme des projections de tous les côtés sur un axe quelconque est égale à zéro. — Dans tout polygone convexe, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés de tous les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes côtés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.

696. Dans un polyèdre convexe quelconque : 1° la somme des projections de toutes les faces sur un plan quelconque est égale à zéro; 2° le carré de l'une des faces est égal à la somme des carrés de toutes les autres, moins deux fois la somme des produits obtenus en multipliant ces mêmes faces deux à deux et par le cosinus du dièdre qu'elles comprennent.

697. Lorsque le volume d'un tronc de prisme et l'une des bases A restent fixes, le plan de l'autre base B passe par un point fixe, et l'aire de cette base B est minimum lorsque son plan est perpendiculaire aux arêtes du tronc.

698. De toutes les pyramides de n faces latérales, qui ont même hauteur et des bases équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a la plus petite aire latérale. — De toutes les pyramides dont la base a n côtés et dont les aires latérales sont équivalentes, c'est la pyramide régulière qui a le plus grand volume.

699. De tous les tétraèdres dont les aires sont équivalentes, le tétraèdre régulier a le plus grand volume.

700. La base d'un tétraèdre est semblable à un triangle donné; la somme de cette base et d'une face latérale est constante; enfin les deux autres faces sont perpendiculaires à la base : de tous les tétraèdres qui remplissent ces conditions, celui dont la base équivaut au quart de la somme donnée a le plus grand volume.

701. La base β d'une pyramide a n côtés et est semblable à un polygone donné; la somme $\beta + \alpha$ de cette base et d'une face latérale α est constante : le volume de la pyramide est maximum lorsque, α étant égal à 2β, la face latérale α est perpendiculaire à la base β.

702. Trouver : 1° le centre de gravité d'un arc de cercle; 2° le centre de gravité d'un secteur circulaire (on nomme *centre de gravité d'une ligne courbe* ou *d'une aire terminée par une ligne courbe* la limite des positions du centre de gravité du contour ou de l'aire d'une ligne polygonale inscrite ou d'un secteur polygonal inscrit).

703. Trouver le centre de gravité d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

704. La somme de trois faces latérales d'un tétraèdre étant donnée, son

volume est maximum lorsque ces faces latérales sont des triangles rectangles isocèles, perpendiculaires entre eux.

705. Parmi toutes les pyramides limitées latéralement par les faces d'un angle polyèdre S et dont la base est déterminée par un plan qui passe par un point fixe P situé dans l'intérieur de l'angle S, celle dont le volume est maximum a le point P pour centre de gravité de sa base.

706. 1° Parmi toutes les pyramides équivalentes limitées latéralement par les faces d'un même angle polyèdre, celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base a la base minimum;

2° De toutes les pyramides limitées latéralement par le même angle polyèdre et qui ont des bases équivalentes, la pyramide de volume maximum est celle dont le sommet se projette orthogonalement au centre de gravité de la base;

3° Enfin, de toutes les pyramides de même hauteur, limitées latéralement par le même angle polyèdre, la pyramide de volume minimum est celle dont la hauteur passe par le centre de gravité de la base.

707. Dans deux figures homologiques, le rapport des distances de deux points homologues quelconques m et m' au centre d'homologie est au rapport des distances de ces deux points m et m' à deux droites homologues D et D′ quelconques dans une raison constante. — Que devient ce théorème : 1° lorsque l'une des droites D et D′ est l'axe d'homologie? 2° lorsque la droite D est à l'infini? 3° lorsque, la droite D étant à l'infini, la droite D′ se confond avec la droite de la première figure qui correspond aux points de la seconde situés à l'infini?

708. Étant données deux droites parallèles dans le plan d'une figure, si d'un point fixe on mène un rayon à chaque point m de cette figure, et que sur ce rayon on prenne un point m' tel, que le produit des distances des points m et m' aux deux parallèles soit constant, le point m' décrit une figure homologique à la proposée.

709. Quand deux figures sont homologiques, si l'on fait tourner l'une d'elles autour de l'axe d'homologie, de manière à faire coïncider de nouveau son plan avec celui de l'autre figure, les deux figures, dans leur nouvelle position relative, sont encore homologiques, mais leur centre d'homologie est différent.

710. Quand deux figures sont homologiques, si l'on fait tourner l'une d'elles dans son plan autour du centre d'homologie, après une rotation de 180 degrés, les deux figures sont encore homologiques, mais avec un axe d'homologie différent.

LIVRE VII.

LES CORPS RONDS.

§§ I, II. — Cylindre et cône de révolution.

711. 1° Quel est le rapport des volumes de deux cylindres dont les aires convexes sont équivalentes? 2° quel est le rapport des aires convexes de deux cylindres qui ont le même volume?

712. Les volumes engendrés par un rectangle tournant successivement autour de ses côtés adjacents sont de a mètres cubes et de b mètres cubes : trouver la longueur de la diagonale de ce rectangle.

713. Calculer l'aire convexe, l'aire totale et le volume d'un cône équilatéral en fonction de son côté. — Pour quelle valeur de ce côté l'aire totale du cône est-elle 1 mètre carré ou son volume 1 mètre cube?

714. Partager l'aire latérale d'un cône de révolution en n parties équivalentes par des plans parallèles à sa base.

715. La hauteur d'un tronc de cône de révolution étant 3 mètres et ses bases ayant pour rayons 2 mètres et 1 mètre, partager son volume en trois parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 7, par deux plans parallèles aux bases.

716. Le volume d'un tronc de cône de révolution étant $41^{mc},328$, sa hauteur $1^{m},817$, le rayon d'une de ses bases $2^{m},698$, on demande de calculer à $0^{m},001$ près le rayon de sa seconde base.

717. Calculer à 0,001 près le rapport que doivent présenter les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution pour que son volume soit la moitié de celui du cylindre de même hauteur élevé sur la base inférieure du tronc.

718. Quel est le rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de ses deux côtés adjacents?

719. Soit ABCDEF un hexagone régulier circonscrit à un cercle de centre O et de rayon R. On mène la diagonale FC et les droites AC et BF qui se coupent en I sur le rayon OH perpendiculaire à FC, et l'on demande

de calculer, en fonction de R, les volumes et les aires des cônes engendrés par les triangles IHA, IOF, en tournant autour de OH pris pour axe.

720. Soit B'C' la projection du diamètre BC d'un cercle OA sur la tangente TT' au point A : chercher pour quelle position de BC le rapport du cercle OA à l'aire totale du tronc de cône engendré par la rotation du trapèze BCB'C' autour de TT' est égal à m; discussion.

721. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône de révolution, connaissant sa hauteur, son côté et son aire ou son volume.

722. Un tronc de cône de révolution d'une substance dont le poids spécifique est d est plongé verticalement dans un liquide dont le poids spécifique est d'; les rayons de ses bases sont R et r, sa hauteur est h. On demande de calculer la hauteur de la partie immergée et le rayon de la section déterminée dans le tronc de cône par la surface de niveau du liquide.

723. Quel est le volume maximum d'un cône de révolution dont le côté est donné?

724. Parmi tous les cylindres ou tous les cônes qui ont même aire totale, quel est le cylindre ou le cône de volume maximum? — Parmi tous les cylindres ou tous les cônes équivalents, quel est le cylindre ou le cône d'aire totale minimum?

725. Inscrire dans un cône donné un cylindre de volume donné; discussion. — Circonscrire à un cylindre donné un cône de volume donné: discussion.

§§ III, IV, V, VI. — Premières notions sur la sphère. — Propriétés des triangles sphériques. — Aire et volume de la sphère.

726. Trouver le lieu des points qui sont à la distance a d'un point A et à la distance b d'un point B.

727. Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère donnée.

728. Par une droite donnée, mener à une sphère donnée un plan sécant qui détermine une section de rayon donné.

729. Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan déterminé par les centres des trois sphères.

730. Trouver le lieu des centres des sections faites dans une sphère donnée par tous les plans sécants qui passent par une droite donnée ou par un point donné.

731. Connaissant les rayons de deux sections parallèles faites dans une sphère et la distance de ces sections, trouver le rayon de la sphère.

732. Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point donné à une surface sphérique. — Trouver le lieu des points qui sont à une distance donnée d'une sphère donnée.

733. Trouver la plus courte distance d'une droite donnée ou d'un plan donné à une surface sphérique.

734. Si d'un point de la surface sphérique comme pôle on trace un cercle avec un rayon sphérique égal au cinquième ou au tiers d'un quadrant, le rayon du cercle obtenu est la moitié du rayon de la sphère ou le plus grand segment de ce rayon divisé en moyenne et extrême raison.

735. La somme des carrés des cordes interceptées par une sphère donnée sur trois droites rectangulaires partant d'un point donné est constante, ainsi que la somme des carrés des six segments déterminés sur ces trois cordes par le point donné.

736. Trouver le diamètre de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire dont trois faces sont perpendiculaires entre elles.

737. Si, d'un point de l'espace, on mène des sécantes à une sphère donnée, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la sphère est constant.

738. Mener dans une sphère donnée trois cordes perpendiculaires entre elles, qui passent par un point donné et qui soient proportionnelles à des nombres donnés. — Mener dans une sphère donnée trois plans perpendiculaires entre eux, qui passent par un point donné et qui déterminent trois cercles dont les aires soient proportionnelles à des nombres donnés.

739. Si deux cercles de l'espace sont tels, que leurs centres soient les projections d'un même point et que les tangentes menées à ces cercles par un point de l'intersection de leurs plans soient égales, ces deux cercles sont situés sur une même sphère.

740. La somme des carrés des projections de trois rayons d'une sphère perpendiculaires entre eux sur un plan quelconque est égale au double du carré du rayon de la sphère.

741. Étant données deux sphères solides, trouver la distance de leurs centres par une construction plane.

742. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. — Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux lumières données.

743. Trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances

à deux points donnés est constante. — Trois points étant donnés, trouver le lieu des points dont la somme des carrés des distances est à la fois constante par rapport au premier et au second point, par rapport au premier et au troisième.

744. Trouver le lieu des points d'où l'on voit une sphère donnée, deux sphères données ou trois sphères données, sous un angle donné.

745. Indiquer le lieu des points d'où l'on voit une droite donnée sous un angle donné, ou deux droites données issues d'un même point, sous des angles respectivement donnés.

746. Trouver le lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données ou trois sphères données suivant des grands cercles.

747. Quelle est la condition pour que quatre points de la surface sphérique appartiennent à un même plan?

748. Construire une sphère :

1° De rayon donné, qui passe par trois points donnés;

2° De rayon donné, passant par deux points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° De rayon donné, tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° De rayon donné, passant par un point donné et tangente à un plan et à une sphère donnés;

6° De rayon donné, tangente à deux plans et à une sphère donnés;

7° De rayon donné, tangente à un plan et à deux sphères donnés.

749. Connaissant les latitudes et les longitudes de deux lieux de la surface terrestre supposée parfaitement sphérique, trouver, à l'aide d'opérations exécutées sur un globe, la distance de ces deux lieux en degrés.

750. Construire un triangle sphérique, connaissant :

1° Un angle, un côté adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés;

2° Un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres angles;

3° Deux côtés et la hauteur correspondant à l'un d'eux;

4° Un angle, un côté et la hauteur qui lui correspond;

5° Son aire, un angle et l'un des côtés adjacents.

751. Inscrire un cercle dans un triangle sphérique.

752. Transformer un polygone sphérique en un triangle sphérique équivalent.

753. Trouver une aire plane équivalente à celle d'un triangle sphérique donné.

754. Les côtés opposés d'un quadrilatère sphérique étant égaux : 1° les quatre angles du quadrilatère sont égaux, ses diagonales sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, ses sommets sont dans un même plan et les cordes correspondantes forment un rectangle; 2° l'aire de ce quadrilatère a pour mesure quatre fois l'excès de son angle sur un droit.

755. Dans un losange sphérique, les diagonales se coupent à angle droit.

756. Un cône à base circulaire étant inscrit dans une sphère, toute section faite dans ce cône par un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par son sommet, est un cercle.

757. L'enveloppe sur une même sphère des bases de tous les triangles sphériques qui ont un angle commun et même périmètre est un cercle de la sphère. — Même problème sur le plan.

758. Dans tout polyèdre convexe, le nombre d'angles dièdres droits contenus dans la somme des angles dièdres, moins la moitié du nombre d'angles trièdres trirectangles contenus dans la somme des angles polyèdres, est égal à deux fois le nombre des faces du polyèdre diminué de deux.

759. Dans tout polyèdre convexe, la somme des angles polyèdres supplémentaires de ceux du polyèdre proposé est égale à huit angles trièdres trirectangles.

760. Si de chaque sommet d'un parallélipipède comme centre on décrit des sphères égales, toutes ces sphères réunies interceptent une portion du volume du parallélipipède égale à l'une d'elles.

761. Si P est le pôle d'un arc de grand cercle DE passant par les milieux D et E des côtés AB et AC d'un triangle sphérique BAC, l'angle BPC est le double de l'angle DPE.

762. Si trois petits cercles sont inscrits dans un triangle sphérique dont chaque angle est égal à 120 degrés, de manière que chacun de ces cercles touche à la fois les deux autres et deux côtés du triangle, leur rayon sphérique est égal à 30 degrés et leurs centres sont les sommets du triangle polaire du triangle donné.

763. Calculer en myriamètres carrés l'aire de l'une des deux zones glaciales, sachant que le petit cercle qui lui sert de base est à 23°30′ du pôle.

764. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel,

que le rapport de la calotte sphérique qu'il détermine à l'aire latérale du cône qui a pour base le cercle AIB et pour sommet le centre de la sphère, soit égal à m : discussion.

765. Inscrire dans une sphère un cône dont l'aire latérale soit équivalente à celle de la calotte sphérique terminée au même cercle.

766. Si l'on divise une demi-circonférence en trois parties égales et si on la fait tourner autour de son diamètre, la zone engendrée par l'arc du milieu est équivalente à la somme des zones engendrées par les deux arcs extrêmes.

767. Diviser une zone en moyenne et extrême raison par un plan parallèle à ses bases.

768. La calotte interceptée par une sphère fixe sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par son centre a une aire constante. — La zone interceptée par deux sphères fixes concentriques sur une sphère sécante de rayon variable et qui passe toujours par leur centre commun a une aire constante.

769. Placer sur le cercle générateur d'une sphère l'arc générateur d'une zone dont on connaît l'arc et la hauteur.

770. Placer sur une sphère donnée une calotte sphérique dont l'aire soit double de celle engendrée par la corde de l'arc générateur de la calotte.

771. Couper une sphère par un plan tel, que l'aire de la section soit égale à la différence des deux zones que ce plan détermine.

772. Un cylindre inscrit dans une sphère de 1 mètre de rayon a pour aire latérale la moitié de l'aire d'un grand cercle de la sphère : calculer son volume.

773. L'aire totale d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères est de a^2 mètres carrés, toute section passant par l'axe a un périmètre de b mètres : calculer la hauteur et le rayon de la partie cylindrique de la chaudière ; discussion.

774. Le poids de 1 décimètre cube de fonte étant $7^{kg},2$, calculer avec la plus grande approximation possible le diamètre d'un boulet en fonte du poids de 24^{kg}. — En déduire celui d'un boulet de 8^{kg}.

775. Ayant mené la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, on le fait tourner autour de son troisième côté pris pour axe : quel est le rapport des volumes engendrés par les deux parties du triangle?

776. Dans une sphère de rayon donné, mener un plan sécant AIB tel, que le rapport du segment à une base qu'il détermine, au secteur sphé-

rique ayant pour base la même calotte sphérique, soit égal à m: discussion.

777. On prolonge l'un des côtés a d'un triangle équilatéral d'une longueur égale à a et, par l'extrémité obtenue, on élève une perpendiculaire à ce côté : calculer le volume engendré par le triangle équilatéral en tournant autour de cette perpendiculaire.

778. Inscrire dans une sphère donnée un cône de révolution tel, que les sections faites par un plan donné parallèle à sa base, dans le cône et dans la sphère, soient dans un rapport donné.

779. Étant donnée une série de cercles concentriques, on mène dans ces cercles des cordes toutes égales entre elles et parallèles à un diamètre commun : les volumes engendrés par les segments correspondants en tournant autour de ce diamètre sont équivalents.

780. Étant donné sur une sphère de rayon R un cercle de rayon r, mener un second cercle parallèle au premier tel, que le rapport du segment compris entre ces deux cercles au cône qui a pour base le second cercle et qui a pour sommet le centre du premier soit égal à m; discussion.

781. Les volumes d'un cône de révolution, d'une sphère et d'un cylindre de révolution, de même hauteur, sont proportionnels aux nombres 1, 2, 3, lorsque le cône et le cylindre ont pour bases un grand cercle de la sphère.

782. L'aire totale ou le volume du cylindre équilatéral inscrit ou circonscrit à une sphère est moyenne proportionnelle entre l'aire ou le volume de cette sphère et l'aire totale ou le volume du cône équilatéral inscrit ou circonscrit.

783. Calculer en fonction de leurs côtés les aires et les volumes engendrés par les polygones réguliers les plus simples, depuis le triangle jusqu'au dodécagone, lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés pris pour axe. — Même question, en prenant pour axe de rotation une perpendiculaire menée à l'extrémité d'un des diamètres du cercle circonscrit qui aboutit à un sommet du polygone considéré.

784. On prend un point B sur le prolongement du rayon OA d'un cercle donné, et l'on mène par ce point au cercle la tangente BT : chercher pour quelle position du point B les aires décrites par la droite BT et l'arc AT, lorsqu'on fait tourner la figure autour de l'axe OAB, sont dans un rapport donné; discussion.

785. Étant donné un triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, trouver le rapport du volume ou de l'aire qu'il engendre, lorsque la

figure tourne autour du diamètre du demi-cercle, au volume ou à l'aire de la sphère engendrée par ce demi-cercle. — Cas où le triangle rectangle donné est isocèle.

786. Inscrire ou circonscrire à une sphère donnée un cône ou un cylindre dont l'aire totale ou le volume soit à l'aire ou au volume de la sphère dans un rapport donné; discussion.

787. La longueur de l'axe d'une chaudière cylindrique terminée par deux hémisphères étant donnée, calculer les dimensions de la partie cylindrique de manière que la capacité de la chaudière ait une valeur donnée; discussion.

788. Étant donné le volume d'un secteur sphérique appartenant à une sphère de rayon R, chercher le maximum de son aire totale.

789. On donne les volumes engendrés par un triangle en tournant successivement autour de chacun de ses côtés : calculer les trois côtés du triangle.

790. Construire un triangle, connaissant deux côtés et sachant que le volume engendré par ce triangle en tournant autour du troisième côté est égal à la somme des volumes qu'il engendre en tournant successivement autour des deux côtés donnés.

791. D'un point B extérieur à une circonférence O, on lui mène deux tangentes BA, BC, et l'on projette le point de contact C sur le rayon OA en D : démontrer que, si l'on fait tourner la figure autour de l'axe AOD, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est équivalent au cône engendré par le triangle rectangle BAD, et le segment sphérique engendré par le triangle mixtiligne DAC équivalent au volume engendré par le triangle BCD.

792. On donne un cône de révolution et deux sphères inscrites dans ce cône et tangentes extérieurement l'une à l'autre; le volume compris entre le cône et les deux sphères proposées est la moitié du volume compris entre ce même cône et la sphère qui passe par ses deux cercles de contact avec les sphères données.

§ VII. — Généralités sur les surfaces.

793. Indiquer le lieu des points qui sont : 1° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'une droite B ; 2° à la distance a d'une droite A et à la distance p d'un plan P ; 3° à la distance a d'une droite A et à la distance b d'un point B.

794. Étant donnés dans l'espace un point et une surface conique ou

cylindrique de révolution, trouver la plus courte distance du point à la surface.

795. Trouver le lieu des points dont les distances à un point donné et à une droite donnée passant par ce point sont dans un rapport donné.

796. Un point et deux droites passant par ce point étant donnés, trouver le lieu des points dont les distances respectives au point donné et aux droites données sont proportionnelles à trois longueurs données.

797. Mener un plan tangent à une surface cylindrique ou à une surface conique de révolution : 1° par un point donné de la surface ; 2° par un point extérieur donné; 3° parallèlement à une droite donnée.

798. Étant donnés un nombre quelconque de plans et deux points A et B pris sur deux d'entre eux, trouver le plus court chemin qui conduit du point A au point B, sans sortir des plans proposés. — Application à la recherche du plus court chemin entre deux points sur une surface cylindrique ou conique.

799. Trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à un cylindre ou à un cône donné se coupent sous un angle donné.

800. Deux cylindres de révolution dont les axes sont parallèles ou deux cônes ayant même sommet étant donnés, trouver le lieu des points tels, que les plans tangents menés de chacun d'eux à l'une des surfaces fassent le même angle que les plans tangents menés du même point à l'autre surface.

801. Construire un cône ou un cylindre de révolution, connaissant trois génératrices.

802. Construire un cône de révolution, connaissant : 1° l'axe, le sommet et le rapport des distances d'un point de la surface au sommet et à l'axe; 2° l'axe, le sommet et un plan tangent à la surface; 3° le sommet, un plan dans lequel se trouve l'axe et deux plans tangents à la surface; 4° trois plans tangents à la surface.

803. La Lune et le Soleil étant supposés parfaitement sphériques et le volume du Soleil étant environ 63000000 de fois celui de la Lune, calculer le rapport des distances des centres de ces deux astres à la Terre, lorsqu'ils ont le même diamètre apparent, c'est-à-dire lorsqu'ils sont vus sous le même angle.

804. Les rayons de la Lune, de la Terre et du Soleil étant proportionnels aux nombres $\frac{3}{11}$, 1 et 108,5, trouver le rapport des distances du centre de la Terre aux centres des deux autres astres, lorsqu'on suppose

les centres de ces trois globes sur l'axe d'un cône de révolution qui leur est tangent; considérer le cas où les trois astres sont tangents à une même nappe, et celui où, la Terre étant située dans une nappe, les deux autres astres sont dans la nappe opposée.

APPENDICE DU SEPTIÈME LIVRE.

805. Partager la surface sphérique en parties égales par des polygones égaux et réguliers.

806. Le volume d'un cube est égal à six fois le volume de l'octaèdre régulier qui a ses sommets aux centres des faces du cube.

807. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.

808. Trouver l'aire et le volume d'un polyèdre régulier.

809. Connaissant le rayon d'une sphère, trouver l'aire et le volume des polyèdres réguliers inscrits.

810. Mener par un point donné un plan tangent à deux sphères données.

811. Mener un plan tangent à trois sphères données.

812. Si l'on donne une sphère et deux points quelconques dans l'espace, les distances de ces points au centre de la sphère sont proportionnelles aux distances respectives de chacun d'eux au plan polaire de l'autre.

813. Soient AA_1A_2 un triangle sphérique et O un point de la sphère correspondante. Si l'on élève sur l'arc de grand cercle OA un arc de grand cercle perpendiculaire qui vient rencontrer le côté opposé A_1A_2 en B, et si l'on détermine de la même manière B_1 sur AA_2 et B_2 sur AA_1, les trois points B, B_1, B_2, sont sur une même circonférence de grand cercle.

814. Construire une sphère :

1° Respectivement tangente à trois droites données en un point donné de chacune d'elles;

2° Passant par trois points donnés et tangente à un plan ou à une sphère donnée;

3° Passant par deux points donnés et tangente à deux plans ou à deux sphères données;

4° Passant par un point donné et tangente à trois plans ou à trois sphères données;

5° Tangente à trois plans donnés et à une sphère donnée;

6° Tangente à un plan donné et à trois sphères données;

7° Tangente à deux plans donnés et à deux sphères données.

815. Mener par une droite donnée un plan qui coupe deux sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

816. Mener par un point donné un plan qui coupe trois sphères données suivant des cercles de rayons proportionnels à ceux des sphères.

817. De tous les triangles sphériques formés avec deux côtés donnés, le triangle d'aire maximum est celui dans lequel l'angle compris entre ces côtés est égal à la somme des deux autres angles.

818. De tous les triangles sphériques isopérimètres et de même base, le triangle isocèle est un maximum.

819. Deux triangles et un point étant donnés dans un plan, mener par le point une droite telle, que les volumes engendrés par les triangles tournant autour de cette droite soient dans un rapport donné. — Même problème pour deux cercles donnés. — Même problème pour trois triangles ou trois cercles donnés.

820. Étant donnés un cercle et un point intérieur, est-il possible de le projeter centralement suivant un cercle qui ait pour centre la projection du point donné?

821. Les trois arcs de grand cercle qui, passant par chaque sommet d'un triangle sphérique, le divisent en deux parties équivalentes, se coupent aux deux mêmes points.

822. On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères de rayons égaux: quel est le lieu des pôles de transformation?

823. Trouver le lieu des points dont les puissances par rapport à trois sphères données sont entre elles comme les rayons de ces sphères.

824. Peut-on, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, ramener le problème de la sphère tangente à quatre sphères données au problème de la sphère tangente à une sphère et à trois plans? Quel point faut-il choisir pour pôle de transformation?

825. Étant données quatre sphères de rayons $r_1+\rho$, $r_2+\rho$, $r_3+\rho$, $r_4+\rho$, trouver le lieu que décrit leur centre radical quand on fait varier ρ. — Quel est le problème analogue de Géométrie plane?

826. Par deux points A et B donnés sur la surface de la sphère, on fait passer des cercles auxquels on mène ensuite des grands cercles tangents par un point C pris sur l'arc de grand cercle AB prolongé: quel est le lieu des points de contact?

827. Étant donnés un cercle et deux points de la sphère, mener par ces deux points un second cercle qui coupe le premier en deux points distants d'une longueur donnée.

828. Étant donnés sur une sphère deux grands cercles et un petit cercle A, mener aux deux grands cercles un cercle tangent B tel, que, si l'on mène ensuite aux deux cercles A et B deux tangentes communes sphériques, leur angle soit égal à un angle donné.

829. Étant donnés sur une sphère deux points et un grand cercle, trouver sur ce cercle un point tel, que la somme de ses distances sphériques aux deux points donnés soit égale à un arc donné.

830. Étant donnés sur une sphère un point et deux grands cercles, mener par le point un cercle qui coupe les deux autres sous des angles dont la somme soit donnée.

831. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un angle et un point par lequel doit passer le côté opposé à cet angle.

832. Construire un triangle sphérique, connaissant un angle, le côté opposé et le cercle inscrit au triangle.

833. Étant donnés sur un cercle de la sphère deux points A et B, trouver sur ce cercle un troisième point C tel, que les deux grands cercles CA et CB se coupent sous un angle donné.

834. Les arcs qui, menés par les sommets d'un triangle sphérique, partagent respectivement son aire en deux parties équivalentes, se coupent au même point.

835. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui soit tangent à deux cercles donnés et qui coupe en deux parties égales la circonférence d'un troisième cercle donné.

836. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe trois cercles donnés A, B, C, chacun en deux points diamétralement opposés.

837. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés et qui rencontre un troisième cercle donné en deux points diamétralement opposés.

838. Si plusieurs triangles sphériques ont un côté commun, les circonférences de grand cercle passant par les milieux des deux autres côtés de chacun de ces triangles concourent en un même point.

839. Par un point donné sur une sphère, mener un cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles égaux.

840. Décrire sur une sphère donnée un cercle qui coupe quatre cercles donnés sous des angles égaux.

841. Une sphère variable, mais assujettie à passer par deux points fixes,

touche une sphère fixe en une suite de points formant une circonférence de cercle.

842. Une sphère variable, mais assujettie à passer par trois points fixes, coupe une sphère fixe suivant une série de cercles dont les plans passent par une même droite.

843. Quels sont sur la sphère les théorèmes analogues à ceux de Pascal et de Brianchon (*voir* les nos 328 et 329)?

LIVRE VIII.

LES COURBES USUELLES.

§§ I, II. — Propriétés fondamentales de l'ellipse et de l'hyperbole.

844. Quelle est la plus courte et la plus grande distance du centre de l'ellipse à un point de la courbe ?

845. Quel est le lieu du centre d'une ellipse qui glisse entre deux axes rectangulaires ?

846. Deux ellipses dont les grands axes sont égaux et qui ont un foyer commun ne peuvent se couper qu'en deux points.

847. Quel est le lieu des points également distants de deux circonférences intérieures ou extérieures l'une à l'autre ?

848. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés ? — On examinera les différents cas possibles.

849. Sur les deux tangentes PM, PM', à une ellipse ou à une hyperbole dont les foyers sont F et F', on prend des longueurs PQ, PQ', respectivement égales à PF et à PF' : démontrer que la droite QQ' est égale au grand axe de l'ellipse ou à l'axe transverse de l'hyperbole.

850. Le grand axe de l'ellipse ou l'axe transverse de l'hyperbole et une tangente quelconque interceptent, sur les deux tangentes menées aux extrémités de l'axe de la courbe, des longueurs dont le produit est constant.

851. Des cercles touchent une droite AB en un point fixe C, et des points fixes A et B on mène des tangentes à ces cercles : trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes. — Le point C peut être entre A et B ou sur AB prolongée.

852. Soient les deux tangentes menées à l'ellipse ou à l'hyperbole par un point extérieur et une troisième tangente quelconque : démontrer que la longueur interceptée sur cette troisième tangente par les deux premières est vue de chaque foyer sous un angle constant.

853. Démontrer directement que, si l'on mène à une hyperbole deux

tangentes PM, PM', par un même point extérieur P, les angles PFM. PFM' sont égaux ou supplémentaires, suivant que les points de contact M et M' appartiennent ou non à la même moitié de la courbe.

854. Trouver le lieu des centres des ellipses dont le grand axe a la même longueur, qui ont un foyer commun et qui touchent une droite donnée.

855. Quels sont les lieux géométriques : 1° des sommets ; 2° des points de rencontre des côtés non parallèles ; 3° des points d'intersection des diagonales, des trapèzes construits sur une base fixe, et dans lesquels la longueur de l'autre base est donnée, ainsi que la somme ou la différence des côtés non parallèles ?

856. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses foyers et un point ; 2° ses foyers et une tangente ; 3° un foyer, deux points et une tangente ; 4° un foyer, un sommet et une tangente ; 5° un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles ; 6° un foyer et trois tangentes ; 7° le centre, deux tangentes et la longueur du grand axe ou de l'axe transverse.

857. On donne les positions d'un foyer et d'un point d'une ellipse, ainsi que les longueurs des axes : déterminer son centre.

858. Le cercle qui a pour diamètre la portion d'une tangente quelconque à l'hyperbole interceptée par les tangentes menées aux extrémités de l'axe transverse passe par les foyers de la courbe.

§ III. — Propriétés fondamentales de la parabole.

859. La perpendiculaire abaissée du foyer de la parabole sur une tangente à la courbe est moyenne proportionnelle entre le rayon vecteur du point de contact et la moitié du paramètre p.

860. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, les triangles FPM, FPM', sont semblables, et FP est la moyenne proportionnelle des rayons vecteurs FM, FM', des deux points de contact.

861. Si PM et PM' sont les deux tangentes menées à la parabole par un point extérieur P, démontrer que la parallèle menée à l'axe par le point P passe par le milieu de la corde MM', et que la tangente au point où cette parallèle rencontre la courbe est elle-même parallèle à la corde MM'.

862. Si l'on rapporte la parabole à une tangente et au diamètre mené par son point de contact pris comme axes coordonnés, le carré de l'or-

donnée d'un point de la courbe est égal à quatre fois le produit du rayon vecteur de l'extrémité du diamètre par l'abscisse du point considéré.

863. Si deux cordes de la parabole se coupent, les produits de leurs segments sont dans le rapport des rayons vecteurs des extrémités des diamètres qui leur sont conjugués.

864. MN étant une tangente commune à la parabole et au cercle décrit sur la corde menée perpendiculairement à l'axe par le foyer comme diamètre, démontrer que les droites FM et FN sont également inclinées sur cette corde.

865. La tangente en un point de la parabole rencontre la directrice et la corde menée par le foyer, perpendiculairement à l'axe, en des points équidistants du foyer.

866. Si l'ordonnée d'un point M de la parabole passe par le milieu de la sous-normale qui correspond à un point M', l'ordonnée du point M est égale à la normale qui correspond au point M'.

867. Si d'un point pris sur une tangente à la parabole on mène une autre tangente à la courbe, l'angle compris entre cette tangente et la droite menée du même point au foyer est constant.

868. Construire une parabole qui touche un cercle donné en un point donné, et dont l'axe soit tangent au même cercle en un autre point donné.

869. Si par le point de contact d'une tangente à la parabole on tire une corde, puis qu'on trace une autre droite parallèle à l'axe, la portion de cette droite comprise entre la tangente et la corde sera divisée par son point de rencontre avec la courbe dans le même rapport que cette droite elle-même divise la corde.

870. Si le diamètre de la parabole menée par le point M rencontre la directrice en K et la corde menée par le foyer parallèlement à la tangente MT en H, on a

$$MK = MH.$$

871. Quel est le lieu du point d'intersection du diamètre mené en un point de la parabole avec la corde tracée par le foyer parallèlement à la tangente au même point?

872. AB et AC étant deux droites rectangulaires, on mène la droite quelconque AR et la parallèle fixe CR à AB, puis, on prend sur AR un point M tel que son ordonnée MQ par rapport à AB soit égale à CR : quel est le lieu du point M ?

873. On considère dans un cercle un diamètre fixe AOB et un rayon quelconque OC; D étant le milieu de la corde CE menée parallèlement

au diamètre fixe, on demande le lieu du point d'intersection des droites OC et AD.

874. Si deux tangentes égales à la parabole sont coupées par une troisième, les segments déterminés sur ces tangentes sont égaux, mais les segments égaux ne sont pas placés de même sur les deux tangentes.

875. Le cercle déterminé par les points d'intersection de trois tangentes à la parabole passe par le foyer.

876. MFN étant une corde quelconque menée par le foyer de la parabole, si l'on trace du sommet S les droites SM et SN, elles rencontrent la corde focale perpendiculaire à l'axe en deux points P et Q dont les distances au foyer sont égales aux ordonnées des points N et M.

877. Si d'un point O pris sur l'axe de la parabole on mène une corde, la distance SO du sommet S au point O est la moyenne proportionnelle des abscisses des extrémités de la corde.

878. Du sommet S, on mène deux droites rectangulaires qui viennent rencontrer la parabole aux points M et M'; le paramètre $2p$ est la moyenne proportionnelle des abscisses des points M et M'.

879. Quel est le lieu du centre du cercle inscrit dans le secteur circulaire AOB, dont l'un des rayons OA est fixe et dont l'autre OB est mobile ?

880. Sur une corde de la parabole comme diamètre, on décrit un cercle qui coupe la parabole en deux autres points; si l'on joint ces points, les deux cordes considérées interceptent sur l'axe de la courbe une longueur égale au paramètre $2p$.

881. Deux paraboles égales qui ont un même foyer et leurs axes dirigés en sens contraires se coupent à angle droit.

882. Si un triangle est inscrit dans une parabole, les points où ses côtés prolongés viennent rencontrer les tangentes menées à la courbe par les sommets opposés sont en ligne droite.

883 Si les tangentes PM, PM', à la parabole sont coupées en Q et en Q' par une troisième tangente, on a

$$\frac{PQ}{QM} = \frac{Q'M'}{PQ'}.$$

884. Si l'on tire par le sommet de la parabole des cordes à angle droit l'une sur l'autre, et qu'on construise sur ces cordes un rectangle, quel est le lieu de son quatrième sommet ?

885. Si une parabole roule sur une autre parabole égale, les sommets

étant d'abord confondus, le foyer de chaque courbe trace la directrice de l'autre.

886. Quel est le lieu des points également distants d'une droite et d'une circonférence données ?

887. Quel est le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à un point fixe et à une droite fixe est constante?

888. Des extrémités d'une corde focale de la parabole on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque de son plan; la somme des rapports de chaque ordonnée au rayon vecteur correspondant est constante.

889. Les carrés des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur deux tangentes sont proportionnels aux rayons vecteurs des points de contact.

890. Construire une parabole, connaissant : 1° le foyer ou la directrice et deux points ; 2° le foyer ou la directrice, un point et une tangente ; 3° le foyer ou la directrice, une tangente et son point de contact ; 4° le foyer ou la directrice et deux tangentes ; 5° trois tangentes, parmi lesquelles la tangente au sommet ; 6° quatre tangentes.

§§ IV, V, VI. — Ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. — Parabole considérée comme limite de l'ellipse. — Ellipse, Hyperbole et Parabole, considérées comme sections planes du cône de révolution.

891. La demi-corde focale de l'ellipse ou de l'hyperbole, perpendiculaire au grand axe ou à l'axe transverse de la courbe, est égale à $\dfrac{b^2}{a}$.

892. Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice correspondante.

893. Si la tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole de centre C rencontre en T le grand axe ou l'axe transverse de la courbe, MP étant l'ordonnée du point M par rapport à cet axe, on a

$$\mathrm{CT}.\mathrm{CP} = a^2.$$

894. Les tangentes fixes aux sommets A et A′ d'une ellipse de centre C étant rencontrées par une tangente mobile en M et en M′, on projette M′ sur CM en P; démontrer que le lieu du point P est un cercle passant par C.

895. Dans l'ellipse ou l'hyperbole, la distance d'un foyer au pied d'une normale sur le grand axe ou sur l'axe transverse de la courbe est au rayon vecteur correspondant du point de contact dans un rapport égal à l'excentricité de la courbe.

896. On mène l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole et la normale au même point; le rapport des distances du pied de l'ordonnée au pied de la normale sur le grand axe, ou sur l'axe transverse et au centre, est égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

897. MP étant l'ordonnée d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole dont le grand axe ou l'axe transverse est AA', on a

$$\frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{\mathrm{AP}.\mathrm{A'P}}=\frac{b^2}{a^2}.$$

898. Si une tangente en M à l'ellipse ou à l'hyperbole rencontre le petit axe ou l'axe non transverse en U, et si Q est la projection de M sur le même axe, C étant le centre de la courbe, on a

$$\mathrm{CU}.\mathrm{CQ}=b^2.$$

899. Si deux tangentes PM, PM', à l'ellipse partent d'un même point P, le centre de la courbe étant C, et la droite CP coupant la courbe en R et la corde de contact MM' en H, on a

$$\overline{\mathrm{CR}}^2=\mathrm{CH}.\mathrm{CP}.$$

900. Les normales en deux points M et M' d'une ellipse rencontrant l'un des axes en P et P', la perpendiculaire élevée au milieu de MM' passe par le milieu de PP'.

901. Une tangente mobile rencontrant en M et en M' les tangentes fixes aux sommets A et A' d'une ellipse, le point d'intersection P des droites AM' et A'M décrit une ellipse concentrique à la première.

902. Si l'on rapporte une ellipse ou une hyperbole à deux diamètres conjugués DD' et EE', de longueurs $2a'$ et $2b'$, pris comme axes coordonnés, MP étant l'ordonnée d'un point M de la courbe, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{\mathrm{DP}.\mathrm{D'P}}=\frac{b'^2}{a'^2}.$$

903. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, et que la perpendiculaire EK à CD rencontre le grand axe ou l'axe transverse de la courbe en G, on a

$$\mathrm{EK}.\mathrm{EG}=b^2.$$

904. Si CD et CE sont deux diamètres conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, on a

$$FE.F'E = \overline{CD}^2.$$

905. Si deux cordes se coupent dans l'ellipse ou l'hyperbole, les produits de leurs segments sont proportionnels aux carrés des diamètres parallèles à ces cordes.

906. La distance du centre de l'hyperbole au point où une asymptote coupe une directrice est égale au demi-axe transverse. — La perpendiculaire abaissée d'un foyer sur une asymptote est égale au demi-axe non transverse. — Si une asymptote rencontre la tangente au sommet A en H et la directrice correspondante en I, AI est parallèle à FH.

907. Soit un point K de l'asymptote d'une hyperbole, dont l'ordonnée et l'abscisse par rapport aux axes de la courbe sont KP et KR; si KP coupe l'hyperbole en M et si KR coupe l'hyperbole conjuguée en N, on a

$$KP^2 - MP^2 = b^2 \quad \text{et} \quad KR^2 - NR^2 = a^2.$$

De plus, la droite MN est parallèle à la seconde asymptote de l'hyperbole.

908. La directrice d'une hyperbole joint les projections du foyer correspondant sur les asymptotes.

909. Si par le point M d'une hyperbole on tire une sécante quelconque qui coupe les deux asymptotes en P et P', la tangente parallèle à cette sécante et limitée aux deux asymptotes étant LQL', on a

$$MP.MP' = \overline{QL}^2.$$

910. Deux hyperboles conjuguées interceptent sur une sécante quelconque des longueurs égales.

911. Tout point de l'hyperbole est également distant d'un foyer et de la directrice correspondante, cette dernière distance étant comptée parallèlement à une asymptote.

912. Si une tangente LQL' coupe les asymptotes en L et en L', l'aire du triangle CLL' est égale à ab.

913. Si M et N sont les points de rencontre de deux hyperboles conjuguées avec l'ordonnée et l'abscisse d'un point d'une de leurs asymptotes, les tangentes menées aux deux courbes en M et en N sont respectivement parallèles à CN et à CM.

914. Soit un point M de l'hyperbole; si MP est l'ordonnée de ce point par rapport au diamètre CD (c'est-à-dire la parallèle menée par M à la tangente en D) et si la tangente en M coupe CD en T, on a

$$CP.CT = \overline{CD}^2.$$

915. Si MT est une tangente à l'ellipse au point M, rencontrant le grand axe AA' au point T, et si la perpendiculaire élevée en T au grand axe rencontre en Q et en Q' les droites MA et MA', on a

$$QT = Q'T.$$

916. Soit MFM' une corde focale de l'ellipse dont le grand axe est AA'; si l'on prolonge MA et M'A jusqu'à leurs points de rencontre Q et Q' avec la directrice qui correspond au foyer F, l'angle QFQ' est droit.

917. Dans l'ellipse, la somme des carrés des deux normales menées aux extrémités de deux demi-diamètres conjugués est constante (on prend pour longueur d'une normale la distance du point de contact au pied de la normale sur le grand axe).

918. Soient dans l'ellipse deux demi-diamètres conjugués CD et CE; sur la normale en D, on prend DP égale à CE : quel est le lieu du point P?

919. M et M' sont deux points de l'ellipse dont le grand axe est AA'; AM' et A'M' coupant l'ordonnée MP du point M en deux points Q et Q', on a

$$\overline{MP}^2 = PQ.PQ'.$$

920. Soient dans l'ellipse la normale MG et la perpendiculaire GL abaissée du point G sur le rayon vecteur FM; le rapport de GL à l'ordonnée MP du point M est égal à l'excentricité de la courbe.

921. Si l'ordonnée MP d'un point M de l'ellipse rencontre en Q la tangente menée à l'extrémité de la corde focale principale, on a

$$QP = FM.$$

922. M étant un point fixe d'une ellipse et QQ' une corde quelconque conjuguée au diamètre CM, le cercle QMQ' rencontre l'ellipse proposée en un point fixe.

923. M étant un point de l'ellipse, on tire la corde MM' parallèle au grand axe, et, par le point M', on mène les cordes M'Q, M'Q', faisant des angles égaux avec le grand axe : démontrer que la droite QQ' est parallèle à la tangente en M.

924. Quel est le parallélogramme d'aire minimum circonscrit à l'ellipse ?

925. Quand la somme de deux diamètres conjugués de l'ellipse est-elle minimum ?

926. Si du point M de l'ellipse on tire des droites aux extrémités d'un diamètre DD', lesquelles coupent son conjugué EE' aux points P et P', on a

$$CP.CP' = \overline{CD}^2.$$

927. Si CD et CE sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, on a

$$(FD - a)^2 + (FE - a)^2 = c^2.$$

928. Soient CD et CE deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse dont les axes sont AA' et BB'; traçons les droites BD et BE, ainsi que les droites A'D et AE qui se coupent en O : démontrer que le quadrilatère BDOE est un parallélogramme, et chercher dans quel cas son aire est maximum.

929. Si MFM', NCN', sont deux cordes parallèles menées par le foyer et par le centre d'une ellipse, démontrer qu'on a

$$\frac{FM.FM'}{CN.CN'} = \frac{b^2}{a^2}.$$

930. Si la tangente au sommet A de l'ellipse est coupée par deux diamètres conjugués en T et en U, on a

$$AT.AU = b^2.$$

931. Si les tangentes en trois points P, Q, R, de l'ellipse se coupent deux à deux aux points R', Q' et P', on a

$$PR'.QP'.RQ' = PQ'.QR'.RP'.$$

932. Si des extrémités des axes d'une ellipse on tire dans une direction quelconque quatre droites parallèles, les points où elles rencontrent la courbe sont les extrémités de deux diamètres conjugués.

933. Si MFM' est une corde focale de l'ellipse et X le pied de la directrice correspondante, les droites XM et XM' sont également inclinées sur les axes de la courbe.

934. PM et PM' étant deux tangentes menées à l'ellipse par un même point P, et la corde MM' coupant les directrices en R et en R', on a

$$\frac{RM.R'M}{RM'.R'M'} = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PM'}^2}$$

935. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, et CE rencontrant les rayons vecteurs FD et F'D en H et en H', on a

$$FH = F'H'.$$

936. Quel est le lieu des milieux des cordes focales d'une ellipse?

937. M étant un point quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole, quels sont les lieux décrits par les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle FMF'?

938. Si du foyer F de l'ellipse on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres conjugués DD' et EE', ces perpendiculaires prolongées coupent EE' et DD' sur la directrice correspondant au foyer F.

939. M étant un point de l'ellipse de grand axe AA', quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires élevées en A et en A' aux droites AM et A'M?

940. Si MP et CP sont l'ordonnée et l'abscisse du point M d'un cercle de centre C rapporté à deux diamètres rectangulaires comme axes coordonnés, et si la droite PQ prise égale à MP est inclinée sur elle d'un angle constant, quel est le lieu du point Q?

941. Soient un triangle PQR et une ellipse enveloppante ayant son centre C au point de rencontre des médianes du triangle; CP, CQ, CR, prolongées, rencontrent l'ellipse aux points P', Q', R' : démontrer que les tangentes en ces points forment un triangle semblable au triangle PQR et d'une aire quatre fois plus grande.

942. Une tangente mobile rencontre en M et N les tangentes fixes aux sommets A et B d'une ellipse; le lieu du point d'intersection des parallèles menées par M et N aux axes de l'ellipse est une hyperbole équilatère.

943. Quel est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires abaissées des foyers d'une ellipse sur deux diamètres conjugués?

944. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant : 1° ses directrices et un point; 2° ses directrices et une tangente; 3° une directrice, deux points et une tangente; 4° une directrice, un sommet et une tangente; 5° une directrice, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles; 6° une directrice et trois tangentes; 7° un foyer, la directrice correspondante et une tangente; 8° un foyer ou une directrice et trois points.

945. Soient MP l'ordonnée d'un point de l'hyperbole dont le centre est C et PQ une tangente au cercle principal; si l'on trace jusqu'à l'axe transverse MN parallèle à CQ, on a

$$PN = b.$$

946. Soient MP l'ordonnée d'un point M de l'ellipse ou de l'hyperbole, C le centre de la courbe, A l'un des sommets situés sur le grand axe ou l'axe transverse; menons PQ parallèle à AM jusqu'à la rencontre de CM : démontrer que AQ est parallèle à la tangente en M.

947. Si l'on mène deux tangentes quelconques à l'hyperbole, les droites déterminées par leurs points d'intersection avec les asymptotes sont parallèles.

948. Dans l'hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont égaux entre eux, et la portion de normale comprise entre le point de contact et l'axe transverse est égale à la distance du centre au point de contact.

949. Si l'on tire une droite par un sommet de l'hyperbole, son second point de rencontre avec la courbe divise en deux parties égales la portion de cette droite interceptée par les parallèles menées de l'autre sommet de l'hyperbole à ses asymptotes.

950. Les asymptotes de l'hyperbole divisent en parties égales les droites qui unissent les extrémités de deux diamètres conjugués.

951. CD et CE étant deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$\mathrm{F'E} - \mathrm{ED} = a - b.$$

952. Dans l'hyperbole équilatère, les cordes focales parallèles à deux diamètres conjugués sont égales.

953. Le rayon du cercle qui touche une hyperbole et ses asymptotes est égal à la portion de la corde focale principale prolongée comprise entre la courbe et ses asymptotes.

954. MM' étant une corde de l'hyperbole et CP le demi-diamètre correspondant, si l'on tire par les points M, P, M', des parallèles MH, PK, M'H', à l'une des asymptotes jusqu'à la rencontre de l'autre en H, K, H', on a

$$\mathrm{CH}.\mathrm{CH'} = \overline{\mathrm{CK}}^2.$$

955. Soient un cercle de diamètre AA' et une corde PQ perpendiculaire à AA' : trouver le lieu des points d'intersection des droites AP et A'Q.

956. Si deux hyperboles équilatères égales sont décrites de manière que les axes de l'une soit les asymptotes de l'autre, elles se coupent à angle droit.

957. Quel est le lieu des points qui sont au tiers des arcs de tous les segments de cercle qu'on peut décrire sur une droite donnée?

958. Si deux tangentes partant d'un même point P coupent l'une des

asymptotes de l'hyperbole en R et en S, l'autre asymptote en r et en s, on a

$$PR.PS = Pr.Ps.$$

959. MM' étant la double ordonnée d'une ellipse de grand axe AA', quel est le lieu des points de rencontre des droites AM et A'M'?

960. Si la tangente au point M d'une hyperbole équilatère coupe ses asymptotes en L et en L', et si MG est la normale en M, l'angle LGL' est droit.

961. Soit la corde MM' d'une hyperbole rencontrant ses asymptotes en R et en R', et la tangente RN à la courbe; si les parallèles MH, NK, M'H', à l'une des asymptotes, rencontrent l'autre asymptote aux points H, K, H', on a

$$MH + M'H' = 2NK.$$

962. Si par les points M et M' d'une hyperbole on mène des droites parallèles aux asymptotes, on forme un parallélogramme dont MM' est une diagonale : démontrer que l'autre diagonale passe par le centre de la courbe.

963. Quel est le lieu décrit par le milieu d'une droite qui se meut en formant avec deux axes rectangulaires un triangle d'aire constante?

964. Si par le point M d'une hyperbole de centre C on mène des parallèles MD et ME à chaque asymptote, jusqu'à la rencontre de l'autre, et si l'on construit une ellipse ayant CD et CE pour demi-diamètres conjugués, CM coupant l'ellipse en N, les tangentes aux deux courbes en M et en N sont parallèles.

965. On fait passer un cercle par un point quelconque M d'une hyperbole et les extrémités A et A' de son axe transverse : trouver le lieu du point Q où l'ordonnée MP prolongée rencontre ce cercle.

966. On donne une série d'ellipses tangentes à une hyperbole équilatère et ayant leurs axes dirigés suivant ses asymptotes : démontrer que le produit des axes de ces ellipses est constant.

967. Sur deux diamètres conjugués d'une ellipse comme asymptotes, on construit deux hyperboles conjuguées l'une à l'autre : démontrer que, si l'une de ces hyperboles touche l'ellipse, il en est de même de l'autre, et que les diamètres tirés aux points de contact sont conjugués aussi bien dans l'ellipse que dans l'hyperbole.

968. Trouver l'angle des asymptotes de l'hyperbole obtenue en coupant un cône de révolution par un plan. — Cas où le plan sécant est parallèle à l'axe du cône.

969. Deux cônes de révolution qui ont même sommet, même génératrice et leurs axes rectangulaires sont coupés par deux plans menés parallèlement à leurs axes d'un même point de la génératrice commune, suivant des hyperboles conjuguées.

970. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections paraboliques d'un cône de révolution donné?

971. Quel est le lieu des foyers de toutes les sections elliptiques de même excentricité dans un cône de révolution donné?

972. Quel est le lieu des extrémités des petits axes de toutes les sections elliptiques parallèles d'un cône de révolution donné?

973. Dans quel cas un plan peut-il couper un cône de révolution donné suivant une hyperbole équilatère?

974. Construire une hyperbole, connaissant : 1° un foyer ou une directrice, la longueur de l'axe transverse et une asymptote; 2° un foyer ou une directrice, une tangente et une asymptote; 3° trois points et une asymptote.

975. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par une ellipse ou une hyperbole donnée de position et de grandeur.

§ VII. — Propriétés fondamentales de l'hélice.

976. Par deux points d'une surface cylindrique, on peut faire passer une infinité d'hélices.

977. Quel est le plus court chemin entre deux points d'une surface cylindrique, mesuré sur cette surface elle-même?

978. Deux hélices tracées sur un cylindre de révolution se coupent orthogonalement; on donne le rayon du cylindre et le pas de l'une des hélices, trouver le pas de l'autre.

979. Des extrémités A et A′ d'un diamètre de la section droite d'un cylindre de révolution partent deux hélices orthogonales dont le premier point d'intersection est en M: trouver, en fonction du pas h de la première hélice et du rayon R du cylindre, l'aire mixtiligne AMA′. — Quel doit être le pas h pour que l'aire AMA′ soit maximum? Le rayon du cylindre étant un décimètre, évaluer à un millimètre carré près cette aire maximum.

980. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en restant normale à cet axe; quelle est la section de la surface ainsi engendrée : 1° par

un cylindre concentrique au premier ? 2° par un cylindre de révolution dont une arête est l'axe même du premier cylindre ?

981. Étant donnée une hélice tracée sur un cylindre de révolution, une droite glisse sur cette hélice et sur l'axe du cylindre en faisant un angle constant avec cet axe : démontrer que la normale à la courbe tracée par cette droite sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, intercepte une longueur constante sur la perpendiculaire élevée par le pied de l'axe dans le plan considéré au rayon vecteur issu du même point.

APPENDICE DU HUITIÈME LIVRE.

982. Démontrer que l'homographie de deux divisions peut s'exprimer par l'une quelconque des formules

$$\frac{am}{bm} = \lambda \frac{a'm'}{b'm'}, \qquad \lambda \frac{am}{bm} + \mu \frac{a'm'}{b'm'} = 1.$$

983. Deux divisions homographiques étant données, on peut toujours prendre à partir d'un point donné de la première deux segments qui soient respectivement égaux à leurs homologues de la seconde, mais l'un avec le même signe, l'autre avec un signe contraire.

984. Deux droites divisées homographiquement peuvent toujours être placées l'une sur l'autre de manière que les deux divisions soient en involution.

985. Dans deux divisions homographiques de même base, le rapport des distances d'un point quelconque de la première division aux deux points doubles est proportionnel au rapport des distances du point homologue de la seconde division aux deux mêmes points doubles.

986. Quand deux faisceaux homographiques concentriques ont leurs rayons doubles imaginaires, on peut les projeter suivant deux faisceaux dont les rayons homologues fassent entre eux des angles égaux et de même sens.

987. Étant donnés dans une involution deux points conjugués, le point central et le milieu de deux autres points conjugués, on demande de déterminer ces derniers points.

988. Dans deux faisceaux en involution, il existe toujours deux rayons homologues également inclinés sur un rayon donné, et il n'y en a que deux.

989. Étant donnés deux faisceaux homographiques non concentriques, on peut les couper par une droite suivant deux divisions en involution.

Toutes les transversales qui remplissent cette condition passent par un même point.

990. Dans toute proportion harmonique $a\,b\,a'\,b'$, le conjugué harmonique du milieu de bb' par rapport à a et a' coïncide avec le conjugué harmonique de aa' par rapport à b et b', et ce point est le point central de l'involution déterminée par les deux couples (a, a') et (b, b').

991. Lorsqu'un point décrit une hyperbole, les droites qui joignent ce point à deux points fixes interceptent sur une asymptote un segment de longueur constante.

992. Quel est le lieu des points dont le produit des distances à deux droites fixes est constant?

993. Dans tout triangle circonscrit à une conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés concourent en un même point.

994. Le sommet d'un angle de grandeur constante décrit une droite fixe, tandis que l'un des côtés passe par un point fixe. Quelle est l'enveloppe de l'autre côté?

995. Démontrer que, lorsque deux triangles sont inscrits à une conique, les six côtés touchent une autre conique.

996. Deux angles de grandeur constante tournent autour de leurs sommets; deux de leurs côtés se coupent sur une droite fixe : quel est le lieu décrit par l'intersection des deux autres côtés? — Quel est le théorème corrélatif?

997. Un polygone plan se déforme de telle sorte, que ses côtés pivotent autour de points fixes et que ses sommets moins un glissent sur des droites fixes; quel est le lieu décrit par le dernier sommet? — Quel est le lieu décrit par l'intersection de deux côtés non contigus quelconques? — Quel est enfin le théorème corrélatif?

998. Si deux cordes d'une conique se divisent mutuellement en deux parties égales, ces cordes passent par le centre.

999. Dans l'hyperbole équilatère, les droites menées d'un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre sont également inclinées sur une asymptote.

1000. Étant données une conique et deux tangentes parallèles, les droites menées du centre aux points où une troisième tangente rencontre les deux premières sont deux diamètres conjugués.

1001. Une hyperbole qui a pour asymptotes deux diamètres conjugués d'une conique la coupe sur deux autres diamètres conjugués.

1002. Trouver dans le plan d'une conique le lieu du point M tel, que les rayons vecteurs FP et F'P', menés des foyers aux points de contact des tangentes issues de ce point, soient parallèles et de même sens.

1003. La figure restant la même qu'au numéro précédent, trouver le lieu du point de rencontre des diagonales du trapèze FPP'F'.

1004. Si une droite fixe rencontre une série de coniques ayant même foyer et même directrice, les tangentes à ces coniques aux points où elles rencontrent la droite fixe enveloppent une conique qui a même foyer que les proposées, et qui touche à la fois leur directrice commune et la droite fixe.

1005. Si l'abscisse d'un point d'une parabole est égale au rayon vecteur mené du foyer à un autre point, l'ordonnée du premier point est égale à la normale relative au second.

1006. Transformer par la méthode de projection les théorèmes suivants :

1° Dans le cercle, la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon du point de contact ;

2° Les tangentes menées par un point extérieur à un système de coniques confocales font des angles égaux avec les droites qui joignent ce point aux deux foyers ;

3° Le lieu des centres d'un cercle qui touche de la même manière deux cercles donnés est une hyperbole qui a pour foyers les centres des deux cercles donnés.

1007. Étant donnés cinq points d'une hyperbole, construire ses asymptotes.

1008. Étant données cinq tangentes à une conique, construire les deux tangentes qui passent par un point donné.

1009. Construire une conique, connaissant le centre et trois points.

1010. Construire une conique, connaissant un point et les directions de deux couples de diamètres conjugués.

1011. Étant données deux coniques et une droite, construire une troisième conique tangente à la droite et passant par les quatre points communs aux deux premières.

1012. Construire une conique homothétique à une conique donnée, et passant par trois points donnés ou tangente à trois droites données.

1013. Tout plan mené par deux arêtes d'un cône du second ordre coupe les plans cycliques suivant deux droites qui font respectivement avec ces deux arêtes deux angles égaux. — Quel est le théorème corrélatif ?

1014. Deux plans tangents à un cône du second ordre suivant deux arêtes quelconques coupent les deux plans cycliques suivant quatre droites qui sont les génératrices d'un même cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan des deux arêtes de contact. — Théorème corrélatif.

1015. Dans tout cône du second ordre, chaque plan tangent coupe les deux plans cycliques suivant deux droites telles, que le produit des tangentes des demi-angles qu'elles font avec l'intersection des deux plans cycliques est constant. — Théorème corrélatif.

1016. Dans tout cône du second ordre, le produit des sinus des angles que chaque arête fait avec les deux plans cycliques est constant. — Théorème corrélatif.

1017. Les projections orthogonales des deux focales d'un cône du second ordre sur les plans tangents au cône forment un nouveau cône du second ordre ayant un double contact avec le premier et dont les plans cycliques sont normaux aux focales du premier. — Théorème corrélatif.

1018. Quand deux cônes du second ordre ont même sommet et mêmes plans cycliques, si on leur mène un plan tangent commun, les deux arêtes de contact sont rectangulaires. — Théorème corrélatif.

1019. Autour de deux points fixes pris sur une sphère, on fait tourner les côtés d'un angle sphérique de grandeur variable et tel, que le segment intercepté entre ses côtés sur un arc de grand cercle donné ait une longueur constante : quel est le lieu du sommet de cet angle ?

1020. On donne sur une sphère deux arcs fixes, et l'on demande le lieu des points de cette sphère dont le produit des distances à ces deux arcs est constant.

1021. Quelle est la courbe sphérique dont chaque point est équidistant d'un point de la sphère et d'un arc de grand cercle de cette sphère ?

QUESTIONS DIVERSES
DE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

1022. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, un côté et le cercle circonscrit.

1023. Construire un triangle sphérique, connaissant son aire, sa base et sa hauteur.

1024. La sphère variable assujettie à couper deux sphères fixes suivant leurs grands cercles passe par deux points fixes.

1025. Les milieux des arêtes d'un tétraèdre ne sont sur une même sphère que si les hauteurs du tétraèdre passent par un même point, et alors la sphère qui les contient passe par les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées.

1026. Si une sphère variable coupe trois sphères fixes sous des angles égaux, mais indéterminés, son centre ne sort pas d'un certain plan.

1027. Si une sphère variable coupe quatre sphères données sous des angles égaux, mais variables simultanément, son centre décrit une droite.

1028. Mener une sphère qui coupe quatre sphères données suivant leurs grands cercles.

1029. Dans un tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent en un même point, les centres de gravité des faces, les pieds des quatre hauteurs et les points situés aux deux tiers des droites qui joignent chaque sommet au point de rencontre des hauteurs sont sur une même sphère, dont le rayon est égal au tiers du rayon de la sphère circonscrite et dont le centre est au milieu de la droite qui joint le point de concours des hauteurs au point de concours des perpendiculaires élevées sur chaque face par son centre de gravité.

1030. Mener une sphère qui en coupe cinq autres sous des angles égaux.

1031. En joignant un point de l'espace aux sommets d'un tétraèdre, on obtient une figure dont les plans des faces opposées se coupent deux à deux suivant trois droites comprises dans un même plan; la diagonale issue d'un sommet, divisée par la longueur de son prolongement jusqu'à ce plan, est égale à la somme des trois côtés adjacents à ce sommet, divisés respectivement par les longueurs de leurs prolongements jusqu'au même plan.

1032. Une série d'ellipses ont leurs diamètres conjugués égaux de même longueur; l'un de ces diamètres est fixe et commun à toutes les ellipses, l'autre varie de position quand on passe d'une ellipse à la suivante. Si l'on prend un point fixe sur le diamètre fixe prolongé et si l'on mène de ce point des tangentes aux ellipses considérées, quel est le lieu des points de contact de toutes ces tangentes?

1033. Si l'on décrit une ellipse sur le grand côté d'un rectangle comme grand axe, de manière qu'elle passe par le point d'intersection des diagonales, et si l'on joint un point de l'ellipse extérieur à ce rectangle aux extrémités du côté opposé au grand axe, les droites ainsi déterminées divisent le grand axe en segments qui sont en progression géométrique.

1034. Le produit des segments déterminés par son point de contact sur une tangente à l'ellipse, limitée à ses points de rencontre avec les axes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

1035. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et deux tangentes communes?

1036. Quel est le lieu des milieux de toutes les cordes d'une conique qui vont converger en un point fixe?

1037. Si deux diamètres conjugués d'une ellipse sont en même temps les asymptotes d'une hyperbole, les points de contact des tangentes communes à l'ellipse et à l'hyperbole sont sur une ellipse semblable à la proposée.

1038. La base AB du triangle ABC reste fixe, tandis que le sommet C décrit une hyperbole équilatère passant par les points A et B : P et Q étant les points où AC et BC rencontrent le cercle décrit sur AB comme diamètre, trouver le lieu des points d'intersection de AQ et de BP.

1039. Quel est le lieu du second foyer des ellipses qui ont un foyer commun et qui passent par deux points donnés?

1040. Quel est le lieu des centres des hyperboles équilatères qui passent par trois points donnés?

1041. Si l'on joint aux deux foyers de l'hyperbole les points de rencontre d'une tangente à la courbe avec les asymptotes, on obtient un quadrilatère inscriptible.

1042. Si l'on prend sur la corde focale principale d'une parabole deux points également distants du foyer, le trapèze formé en abaissant de ces points des perpendiculaires sur une tangente quelconque à la courbe a une aire constante.

1043. Les produits des distances du foyer d'une parabole aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à la courbe sont égaux.

1044. En un point P de la parabole, la corde du cercle de courbure, qui est menée parallèlement à l'axe de la courbe, est égale à quatre fois le rayon vecteur du point P.

1045. La corde PH du cercle de courbure au point P de l'ellipse ou de l'hyperbole, qui est menée par le centre C de la courbe, satisfait à la relation $PH.CP = 2\overline{CD}^2$, CD étant le conjugué du diamètre CP.

1046. Étant donnés deux triangles, projeter le premier sur un plan de telle sorte que sa projection soit semblable au second triangle.

1047. Couper un cône de révolution donné suivant une ellipse d'excentricité donnée.

1048. Deux cônes de révolution qui se coupent ont même axe, et l'angle au sommet du cône intérieur est de 60 degrés : démontrer que le sommet de ce cône est un foyer commun de toutes les sections déterminées sur le cône extérieur par les plans tangents au cône intérieur.

1049. Construire une sphère admettant avec quatre sphères données des tangentes communes de longueurs données.

1050. On appelle *homocycliques* deux cônes qui ont même sommet et mêmes plans cycliques. Démontrer que, lorsqu'un plan mené par le sommet commun de deux cônes homocycliques coupe ces cônes suivant quatre arêtes, les deux arêtes de l'un font respectivement deux angles égaux avec les deux arêtes de l'autre. — Qu'arrive-t-il en particulier lorsque le plan considéré coupe l'un des cônes et touche l'autre ?

1051. Quand un plan touche deux cônes homocycliques, les deux arêtes de contact sont rectangulaires.

1052. SA et SB étant deux arêtes rectangulaires prises sur deux cônes homocycliques, le plan ASB coupe les deux cônes suivant deux autres arêtes SA′ et SB′ qui sont encore perpendiculaires l'une à l'autre ; les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents au premier cône suivant SA et SA′, et les plans tangents au second cône suivant SB et SB′, appartiennent à un troisième cône homocyclique avec les deux premiers ; ce troisième cône reste le même, quelles que soient les deux arêtes rectangulaires primitives SA et SB.

1053. Quand deux cônes sont homocycliques, deux plans tangents au premier cône coupent l'autre cône suivant quatre arêtes appartenant à un cône de révolution dont l'axe est normal aux arêtes de contact des deux plans tangents.

1054. Étant donnés un cône à base circulaire et deux plans fixes tangents à ce cône, si un autre plan tangent roule sur le cône, ses intersections avec les deux plans fixes sont telles, que les plans menés par chacune d'elles et une ligne focale font un angle constant.

1055. Pour qu'un quadrilatère gauche ait ses quatre côtés sur un hyperboloïde de révolution, il faut et il suffit que la somme de deux quelconques de ses côtés soit égale à celle des deux autres.

1056. Toute section plane du tore est le lieu d'un point tel que le produit des longueurs des tangentes menées de ce point à deux cercles soit proportionnel à la distance de ce point à une droite. — Que devient ce théorème, lorsque le plan de la section est parallèle à l'axe du tore?

1057. Un polygone plan se déforme de telle sorte que ses sommets, moins un, glissent sur des droites fixes, tous ses côtés étant vus d'autant de points fixes sous des angles donnés: trouver le lieu du dernier sommet. — Quel est le théorème corrélatif ?

1058. Sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on prend trois couples de points qui divisent harmoniquement ces trois droites: démontrer que les six points considérés sont sur une conique. — Quel est le théorème corrélatif ?

1059. On donne une conique et un triangle situé dans son plan ; démontrer : 1° que les droites qui joignent les sommets du triangle aux pôles des côtés opposés par rapport à la conique concourent en un même point; 2° que les côtés rencontrent les polaires des sommets opposés en trois points en ligne droite.

1060. Si autour d'un point fixe on fait tourner une sécante qui rencontre une conique aux points a et a', la somme algébrique des inverses des distances des points a et a' à la polaire du point fixe est constante.

1061. Construire la conique déterminée par cinq points, dont quatre sont imaginaires.

1062. Construire la conique déterminée par cinq tangentes, dont quatre sont imaginaires.

1063. Projeter une conique suivant une hyperbole équilatère.

1064. La polaire réciproque d'une parabole par rapport à un point de la directrice est une hyperbole équilatère.

1065. Inscrire dans une conique un polygone dont les côtés passent par autant de points fixes.

1066. Construire une conique tangente à trois droites et ayant un double contact avec une conique donnée.

1067. ABC étant un triangle circonscrit à une conique, et α, β, γ, les points de contact de BC, CA, AB, on joint un point quelconque P du plan aux sommets B et C; si l'on désigne par I et K les points où la corde $\beta\gamma$ rencontre respectivement CP et BP, les trois droites $P\alpha$, BI et CK concourent en un même point. Déduire de là le moyen de trouver le point de contact d'une tangente à une conique qui touche en des points donnés les côtés d'un angle donné.

1068. Si, sur les rayons menés d'une origine fixe O aux divers points d'un plan P on porte des longueurs proportionnelles aux valeurs inverses de ces rayons, les plans conduits perpendiculairement à ces droites par leurs extrémités passent tous par un même point p. Lorsque, l'origine O restant fixe, le plan P se déplace en passant sans cesse par un même point, le point p ne sort pas d'un certain plan.

1069. Une droite glisse sur trois droites fixes prises à volonté dans l'espace. — Quel est le lieu décrit par la trace de cette droite sur un plan fixe quelconque?

1070. La somme des angles d'un quadrilatère gauche est moindre que quatre angles droits.

1071. On peut couper un tétraèdre régulier suivant un carré. — Démontrer que le contour apparent du tétraèdre régulier projeté sur un plan parallèle à une section carrée, est à la fois un carré et le contour apparent maximum du tétraèdre projeté sur un plan.

1072. Lorsqu'on projette orthogonalement un cube sur un plan perpendiculaire à une de ses diagonales, le contour apparent obtenu est à la fois un hexagone régulier partagé en trois losanges et le contour apparent maximum du cube projeté sur un plan.

1073. On peut projeter l'octaèdre régulier de manière à obtenir un contour apparent hexagonal régulier.

1074. Le centre de gravité du périmètre ou de l'aire d'un polygone régulier convexe d'un nombre impair de côtés, est le centre du polygone.

1075. Trouver l'aire latérale et le volume d'un tronc de cylindre.

1076. Si un cône de révolution est inscrit dans un angle trièdre formé par trois plans tangents, les plans menés par chaque génératrice de contact et l'arête opposée de l'angle trièdre se coupe suivant une même droite.

1077. Toute section d'un cône oblique à base circulaire, perpendiculaire au plan principal, appartient à un cône droit.

1078. Étant donnés trois points ou trois arcs tangents et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le pôle de cet arc.

1079. Étant donnés trois points et un arc cyclique d'une conique sphérique, déterminer le second arc cyclique de cette courbe.

1080. Étant donnés trois arcs tangents et un foyer d'une conique sphérique, déterminer le second foyer de cette courbe.

1081. Quelle est la surface polaire d'une conique par rapport à une sphère? — Examiner le cas particulier où la conique est un cercle. — (On nomme surface polaire d'une ligne l'enveloppe des plans polaires de ses divers points.)

1082. Si deux cônes du second ordre ont une ligne focale commune, ils se coupent suivant deux courbes planes.

1083. Quelle est la surface polaire d'une sphère par rapport à une sphère?

1084. Une conique tourne autour de son axe focal. Quelle est la section de la surface de révolution ainsi engendrée par un plan passant par un foyer de la conique donnée?

1085. Quelle est la projection d'une section plane d'une surface de révolution du second ordre, sur un plan perpendiculaire au rayon vecteur mené d'un foyer de la surface à l'extrémité du diamètre qui passe par le centre de la section?

1086. Circonscrire un tétraèdre a une surface de révolution du second ordre, dont un foyer est donné.

1087. Deux surfaces de révolution du second ordre, qui ont un foyer commun, se coupent suivant deux courbes planes; les plans de ces courbes et les deux plans directeurs forment un faisceau harmonique.

1088. D'un point de l'espace, on peut généralement mener six normales à une surface du second ordre; ces six droites sont sur un cône du second degré, qui passe par le centre de la surface et contient les trois axes principaux du cône circonscrit à la surface, qui a pour sommet le point donné.

1089. Le volume du parallélipipède construit sur trois génératrices quelconques de même système d'une hyperboloïde est constant.

1090. Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné.

NOTES.

NOTES.

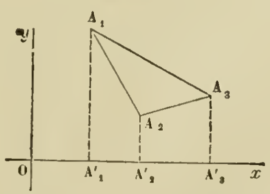
NOTE I.

SUR L'APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE.

1. *Aire du triangle en fonction :* 1° *des coordonnées des sommets;* 2° *des longueurs des côtés.*

Soient Ox et Oy deux axes de coordonnées rectangulaires situés dans le plan du triangle $A_1A_2A_3$; x_1 et y_1, x_2 et y_2, x_3 et y_3, les coordonnées respectives des sommets A_1, A_2, A_3 ; et d_{12}, d_{23}, d_{31}, les carrés des longueurs des côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1. L'aire S du triangle est l'excès

Fig. 624.



(*fig.* 624) du trapèze $A_1A_3A'_3A'_1$ sur la somme des trapèzes $A_1A_2A'_2A'_1$ et $A_2A_3A'_3A'_2$. On a donc

$$
\begin{aligned}
2S &= (x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1),
\end{aligned}
$$

ou

$$
(1) \qquad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
$$

On peut mettre ce déterminant sous les deux formes suivantes :

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

en multipliant membre à membre, on trouve alors, d'après la règle de multiplication des déterminants,

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_2x_1+y_2y_1 & x_3x_1+y_3y_1 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_3x_2+y_3y_2 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions les trois dernières horizontales par -2, puis divisons la première verticale par -2 ; le déterminant sera multiplié par 4. Cela fait, aux trois dernières horizontales, ajoutons la première successivement multipliée par $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, $x_3^2+y_3^2$, et de même, aux trois dernières verticales, ajoutons la première successivement multipliée par les mêmes facteurs ; la valeur du déterminant ne sera pas altérée par ces dernières transformations, et si l'on se rappelle la formule bien connue

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$

on aura finalement

$$(2) \qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Volume de la pyramide triangulaire en fonction : 1° des coordonnées des sommets ; 2° des longueurs des arêtes.*

Soient : ox, oy, oz, trois axes de coordonnées rectangulaires ; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), les coordonnées des sommets A_1, A_2, A_3, A_4 : d_{12}, d_{13}, d_{14}, d_{23}, d_{24}, d_{34}, les carrés des longueurs des six arêtes.

La marche est absolument pareille à celle que nous avons suivie pour le triangle. En projetant les sommets sur le plan xoy, on verra que le volume du tétraèdre est la somme algébrique de troncs de prismes triangulaires dont les bases ou sections droites s'évalueront à l'aide de la formule (1), et l'on obtiendra pour le volume V du tétraèdre

$$(3) \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

puis, en opérant sur ce déterminant comme nous l'avons fait sur le déterminant (1), et observant que

$$d_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2,$$

on trouvera

$$(4) \qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

En égalant à zéro les déterminants (2) et (4), on obtient évidemment les *conditions pour que trois points soient en ligne droite ou pour que quatre points soient dans un même plan*. Les formules (2) et (4), abstraction faite de la notation des déterminants, ont été données par Euler, dans les *Mémoires de Pétersbourg*.

3. *Relation entre les distances mutuelles :* 1° *de quatre points situés sur un même cercle;* 2° *de cinq points situés sur une même sphère.*

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), les coordonnées rectangulaires des quatre points A_1, A_2, A_3, A_4; et $d_{12}, d_{13}, \ldots, d_{23}, \ldots$, les carrés de leurs distances mutuelles. Ces points étant sur un même cercle, on a, d'après la Géométrie analytique,

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + a + bx_1 + cy_1 &= 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + a + bx_2 + cy_2 &= 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + a + bx_3 + cy_3 &= 0, \\ x_4^2 + y_4^2 + a + bx_4 + cy_4 &= 0. \end{aligned}$$

On a, par suite, en éliminant a, b, c,

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 + y_4^2 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 + y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2 + y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 & -2x_4 & -2y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, il suffit de multiplier ces deux derniers déterminants par la règle connue et d'égaler le résultat à zéro pour avoir la relation cherchée

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Un calcul tout à fait analogue donne

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

pour cinq points situés sur une même sphère.

La relation (5) revient au fond au théorème de Ptolémée (240); la relation (6) a été donnée sous une autre forme par Feuerbach. — Nous avons suivi la marche indiquée par M. Cayley dans le tome II du *Journal de Cambridge*.

En développant par rapport aux éléments de la première verticale le premier des déterminants considérés dans ce numéro, et désignant par O_1 l'origine des coordonnées, qui est d'ailleurs un point quelconque du plan du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, on a, eu égard à la formule (2), la relation

$$\overline{O_1A_1}^2(A_2A_3A_4) - \overline{O_1A_2}^2(A_3A_4A_1) + \overline{O_1A_3}^2(A_4A_1A_2) - \overline{O_1A_4}^2(A_1A_2A_3) = 0$$

qu'on énonce de la manière suivante : *Dans tout quadrilatère inscriptible, si on multiplie l'aire du triangle formé par trois des sommets par le carré de la distance du quatrième sommet à un point quelconque du plan, la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par une diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles séparés par l'autre diagonale.* Cette proposition, due à M. Luchterhandt (*Journal de Crelle*, t. XXIII), comprend comme cas particuliers les théorèmes (240, 242) relatifs au produit et au rapport des diagonales du quadrilatère inscriptible. Pour les en déduire, il suffit de remplacer l'aire de chaque triangle par le produit des trois côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle circonscrit et de placer le point O_1, dans le premier cas à l'un des sommets du quadrilatère, dans le second cas au centre du cercle.

En éliminant les parenthèses $(A_2A_3A_4)$, ... entre l'équation précédente et les trois analogues que fourniraient trois autres points O_2, O_3, O_4 pris à volonté dans le plan, on obtient une relation

$$\begin{vmatrix} \overline{O_1A_1}^2 & \overline{O_1A_2}^2 & \overline{O_1A_3}^2 & \overline{O_1A_4}^2 \\ \overline{O_2A_1}^2 & \overline{O_2A_2}^2 & \overline{O_2A_3}^2 & \overline{O_2A_4}^2 \\ \overline{O_3A_1}^2 & \overline{O_3A_2}^2 & \overline{O_3A_3}^2 & \overline{O_3A_4}^2 \\ \overline{O_4A_1}^2 & \overline{O_4A_2}^2 & \overline{O_4A_3}^2 & \overline{O_4A_4}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

entre les distances respectives de quatre points d'un cercle à quatre points quelconques de son plan. Cette relation comprend comme cas particulier la relation (5) qui, en outre, se trouve ainsi démontrée sans le secours de la règle de multiplication des déterminants (ANTOMARI, *Nouv. Ann.*, 1882).

4. *Relation entre les distances mutuelles de cinq points situés d'une manière quelconque dans l'espace.*

Il suffit d'égaler à zéro le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & 0 \end{vmatrix},$$

pour obtenir la relation demandée, due à Lagrange,

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant, avant de les multiplier, dans chacun des deux déterminants, l'expression $x_i^2+y_i^2+z_i^2$, où i a les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, par $x_i^2+y_i^2+z_i^2-r_i^2$, on obtient la relation

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} \\ 1 & \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} \\ 1 & \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} \\ 1 & \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} \\ 1 & \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle δ_{ik} désigne la quantité $r_i^2 + r_k^2 - d_{ik}$, et qui est une généralisation de la formule précédente, puisqu'elle renferme, outre les distances mutuelles d_{ik} des cinq points, cinq nouvelles quantités r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, arbitraires.

5. *Rayons des sphères qui coupent quatre sphères données sous des angles donnés.*

Supposons que, des cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, que nous venons de considérer, les quatre premiers soient les centres de quatre sphères dont les rayons r_1, r_2, r_3, r_4, sont donnés; désignons par ρ le rayon et par A_5 le centre d'une sphère qui coupe les quatre premières respectivement sous les angles φ_1, φ_2, φ_3, φ_4.

En faisant, dans la relation (8), les substitutions

$$r_5 = \rho,$$

$$\begin{aligned}\delta_{i5} &= r_i^2 + \rho^2 - d_{i5}\\ &= r_i^2 + \rho^2 - (r_i^2 + \rho^2 - 2\rho r_i \cos\varphi_i) = 2\rho r_i \cos\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),\end{aligned}$$

puis amenant au premier rang la dernière horizontale et la dernière verticale, préalablement divisées par ρ, et enfin divisant par 2 chaque horizontale, sauf la seconde, et multipliant par 2 la seconde verticale, on obtient, pour déterminer ρ, l'équation du second degré

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\rho} & r_1\cos\varphi_1 & r_2\cos\varphi_2 & r_3\cos\varphi_3 & r_4\cos\varphi_4 \\ \dfrac{1}{\rho} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1\cos\varphi_1 & 1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ r_2\cos\varphi_2 & 1 & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ r_3\cos\varphi_3 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ r_4\cos\varphi_4 & 1 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

où c_{ik} désigne la quantité $\frac{1}{2}(r_i^2 + r_k^2 - d_{ik})$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Cette équation ne change pas quand on y change simultanément les signes de r_1, r_2, r_3, r_4. D'après cela, à chaque combinaison de signes pour r_1, r_2, r_3, r_4, et à la combinaison opposée, répondent les deux racines de la même équation du second degré. En faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, r_4, on trouve les seize solutions du problème.

En procédant d'une manière analogue, on obtiendrait une équation donnant *les rayons des cercles coupant trois cercles* situés dans un même plan, *sous des angles respectivement donnés*. Cette équation est d'ailleurs celle qu'on obtient en supprimant dans le déterminant (9) la dernière horizontale et la dernière verticale; en faisant varier les signes, on aurait les huit solutions du problème groupées deux à deux.

L'équation (9), dans laquelle on remplace les cosinus par l'unité, donne les *rayons des sphères tangentes à quatre sphères données*, et celle qui en résulterait en supprimant la dernière horizontale et la dernière verticale donnerait pareillement les *rayons des cercles tangents à trois cercles donnés*.

Enfin, comme dernière application de cette relation (9), nous allons en déduire le *rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre*. Il faut, dans ce cas, supposer $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$, et par suite $c_{ik} = -\frac{1}{2}d_{ik}$; l'équation devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 0 & 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit, en ajoutant à la deuxième horizontale la première multipliée par $\frac{1}{\rho}$ et ayant égard à la relation (6),

$$(10)\quad 576 V^2 \rho^2 = -\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{14}d_{23} & d_{13}d_{24} \\ 1 & d_{14}d_{23} & 0 & d_{12}d_{34} \\ 1 & d_{13}d_{24} & d_{12}d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

En comparant le dernier déterminant au déterminant (2) et désignant par T l'aire du triangle dont les côtés seraient égaux aux produits des couples d'arêtes opposées du tétraèdre, on voit qu'on a définitivement pour le rayon de la sphère circonscrite.

$$\rho = \frac{T}{6V}.$$

Cette expression remarquable est due à Crelle (*Sammlung mathematischer Aufsätze*).

Ces notions doivent suffire pour inspirer au lecteur le désir de lire les Mémoires originaux sur l'application des déterminants à la Géométrie. Les travaux faits sur ce sujet sont fort nombreux : nous citerons les Mémoires de MM. Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XL), Cayley (*Journal de Cambridge*, t. II), Brioschi (*Journal de Crelle*, t. L), Kronecker (*Journal de Crelle*, t. LXXII), Darboux (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. I), Bauer (*Journal de Schlömilch*, t. V, et *Mémoires de l'Académie de Munich* pour 1873), Fröbenius (*Journal de Crelle*, t. LXXIX).

NOTE II.

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

La théorie des parallèles n'a fait aucun progrès depuis Euclide jusqu'au commencement de notre siècle. Tous les efforts pour démontrer le *postulatum* d'Euclide ou une proposition équivalente étaient restés infructueux, lorsque Lobattcheffsky en 1829 et Bolyai en 1832, changeant résolument de voie, conçurent et exécutèrent séparément le projet hardi de supposer que la proposition à démontrer n'était pas vraie et de constituer un nouveau système de géométrie non contradictoire, en poussant jusqu'à ses dernières limites le développement de leur hypothèse. Gauss qui, par ses propres méditations, avait obtenu les mêmes résultats dès 1792, sans toutefois avoir rien publié sur ce sujet, assura par son patronage le succès de l'œuvre de Lobattcheffsky qui, écrivait-il à Schumacher, « avait traité la matière de main de maître ». Depuis lors un grand nombre de géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer Riemann et Beltrami, ont considérablement agrandi le champ de ces spéculations qui, on ne saurait le méconnaître, ont jeté une vive lumière sur la véritable origine des vérités géométriques.

L'analyse de ces nombreux travaux (¹) serait fort longue; nous nous proposons ici uniquement d'en faciliter la lecture en exposant les principes fondamentaux de cette partie de la Science qui, après avoir été appelée successivement *Géométrie astrale, Géométrie imaginaire, Pangéométrie*, a reçu définitivement le nom de *Géométrie non euclidienne*.

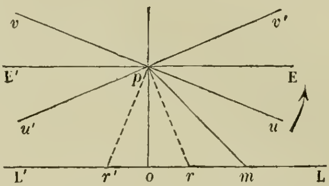
(¹) LOBATTCHEFFSKY, *Nouveaux principes de Géométrie* (*Mémoires de l'Université de Kasan et Courrier de Kasan*, 1826, 1829, 1836-1838); *Géométrie imaginaire* (J. de Crelle, 1837); *Études géométriques sur la théorie des parallèles* (Berlin, 1840); *Pangéométrie* (Kasan, 1855). — BOLYAI, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* (Maros-Vasazhély, 1832). — RIEMANN, *Sur les hypothèses de la Géométrie* (Académie de Göttingue, 1867). — HELMHOLTZ, *Sur les faits fondamentaux de la Géométrie* (Heidelberg, 1868). — BATTAGLINI, *Sur la Géométrie de Lobattcheffsky* (*Giornale*; Naples, 1868). — BELTRAMI, *Interprétation de la Géométrie non euclidienne* (Naples, 1868); *Sur les espaces de courbure constante* (Milan, 1868). — KLEIN, *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Math. Annalen*, 1871). — DE TILLY, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (*Mémoires de l'Académie de Bordeaux*, 1879).

Plusieurs de ces Mémoires ont été traduits en français par M. Houël.

I.

1° Considérons dans un plan un point p et une droite LL′; soient po la perpendiculaire abaissée de p sur LL′ et EpE′ la perpendiculaire élevée par p sur po (*fig.* 625). On sait (57) que cette perpendiculaire ne rencontre pas LL′. Mais cette droite est-elle, parmi celles qui passent par p, la seule qui jouisse de cette propriété? C'est ce que l'on admettait depuis Euclide. Cependant tout ce qu'on peut affirmer, et c'est là le point de départ de Lobattcheffsky, c'est que, si une droite illimitée tourne autour du point p dans le sens de la flèche, depuis la position po jusqu'à la position E′pE, elle passera nécessairement par une position vpu, telle que toutes les droites contenant le point p et situées dans l'angle upE (et dans son opposé) ne coupent pas LL′, tandis que toutes les droites situées dans l'angle opu (et dans son opposé) coupent oL.

Fig. 625.



D'après cela, en désignant par $v'pu'$ la symétrique de vpu par rapport à po, on voit que toutes les droites menées par le point p dans le plan peuvent être rangées par rapport à LL′ en deux catégories suivant qu'elles coupent LL′ ou qu'elles ne la rencontrent pas; les *sécantes* sont comprises dans les angles upu' et vpv'; les *non-sécantes* dans les angles upv' et vpu'. Les deux lignes de démarcation uv et $u'v'$ sont dites parallèles à LL′ relativement au point p. Ainsi, par chaque point p d'un plan, on peut mener à toute droite LL′ de ce plan deux parallèles, l'une vu pour le côté oL de la droite, l'autre $v'u'$ pour l'autre côté oL′. On désigne par *angle de parallélisme* relatif au point p l'angle opu ou son égal opu'.

2° Ce qui distingue une parallèle vu ou $v'u'$ d'une non-sécante quelconque, c'est que la parallèle devient sécante dès qu'on la dévie en diminuant d'aussi peu qu'on veut son inclinaison opu ou opu' sur la perpendiculaire po.

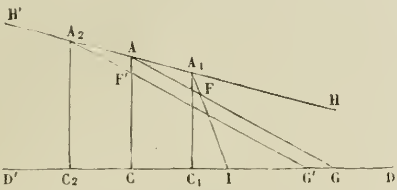
Dans le cas où l'angle de parallélisme est droit, la classe des droites non-sécantes disparaît et les deux parallèles se réduisent à une seule EpE′.

3° Voici maintenant deux propositions qui sont les compléments indispensables de la définition des parallèles.

Une droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points. — En d'autres termes, si H'H est parallèle à D'D relativement au point A, elle est encore parallèle à D'D relativement à tout autre A_1 ou A_2 de ses points (*fig.* 626).

En effet, supposons d'abord un point A_1 situé sur la partie AH de H'H qui fait avec la perpendiculaire AC un angle CAH égal à l'angle de parallélisme. Abaissons A_1C_1 perpendiculaire sur DD', menons A_1F dans l'intérieur de l'angle C_1A_1H, et prenons sur cette droite un point F aussi voisin qu'on pourra de A_1; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et l'on aura un triangle ACG dont le contour étant rencontré

Fig. 626.



une première fois en F par la droite A_1F devra être rencontré une deuxième fois par la même droite; or A_1F, d'après sa construction, ne peut couper le côté AC, elle ne peut pas non plus avoir un second point commun avec le côté AG; donc elle coupe le côté CG, et, par suite, A_1H est parallèle à D'D relativement au point A_1, puisque toute droite A_1F, située dans l'angle C_1A_1H, rencontre D'D, si petit que soit l'angle HA_1F.

Considérons, en second lieu, un point A_2 situé sur AH', et soit A_2C_2 la perpendiculaire abaissée de A_2 sur D'D; prenons sur AC un point F' aussi voisin de A qu'on voudra, et menons AF faisant avec AH un angle HAF égal à HA_2F'; la droite AF ira couper CD en un certain point G, et la droite A_2F' coupant une première fois, en F', le contour du triangle ACG, devra couper ce contour une seconde fois. Or elle ne peut couper une seconde fois le côté AC; d'autre part, puisque les angles correspondants HAF, HA_2F' sont égaux, A_2F' ne peut rencontrer AF [1]; donc A_2F' coupe le côté CD; etc.

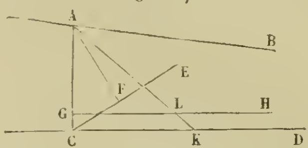
---

[1] Nous admettons ici que, si deux droites AB, CD (*fig.* 43), forment avec une troisième FE des angles correspondants FGB, FHD, égaux, ces deux droites ne peuvent se rencontrer. La démonstration de ce théorème, donnée au n° 64, dépend du postulatum d'Euclide; mais on peut démontrer le fait indépendamment de tout postulatum. En effet, on peut, par une rotation autour du milieu O de GH, amener la figure BGHD sur la figure CHGA, de façon que GB

Le parallélisme de deux droites est réciproque. — En d'autres termes, si AB est parallèle à CD (*fig.* 627), CD est parallèle à AB.

En effet, soit AC une perpendiculaire sur CD; menons dans l'angle ACD une droite CE faisant avec CD un angle DCE aussi petit qu'on voudra; enfin abaissons AF perpendiculaire sur CE; AF sera moindre que AC; prenons sur AC une longueur AG = AF et faisons tourner la figure BAFE autour de A, de façon que AF vienne sur AG; soient GH et AK les positions que prennent FE et AB; AK coupera CD quelque part en K, et l'on aura un triangle ACK dont le contour étant rencontré une première fois, en G, par GH, devra être rencontré une deuxième fois par cette même droite; mais GH étant comme CD perpendiculaire à AC ne peut rencontrer CD: donc GH coupe AK en un certain point L. Donc, en ramenant le triangle LAG en sa position primitive, c'est-à-dire en le faisant tourner autour de A de façon que AG vienne sur AF, AK sur AB et GH sur

Fig. 627.



FE, on voit que CF doit couper AB, quelque petit que soit l'angle DCE; donc (2°) CD est parallèle à AB.

II.

1° *Dans tout triangle rectiligne* ABC, *la somme des angles ne peut surpasser deux angles droits.*

En effet, soit A le plus petit angle du triangle; en prolongeant la médiane AI d'une quantité IE égale à elle-même et joignant EC, on forme un triangle ACE dans lequel (on le voit sans peine) la somme des angles est la même que dans le triangle primitif et la somme des deux plus petits angles est égale à A. Le plus petit angle du nouveau triangle est donc au plus égal à $\frac{1}{2}$ A. En opérant de même sur ce second triangle, puis sur le suivant, etc., on obtient une suite de triangles, dont la somme des angles reste la même et dont le plus petit angle est successivement moindre que $\frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \frac{A}{8}, \cdots$ et, par suite, peut devenir aussi petit qu'on

---

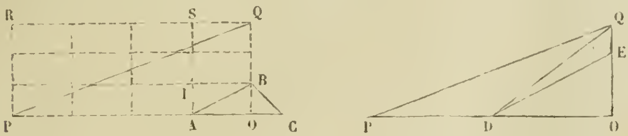
recouvre HC et que DH recouvre GA; si donc GB et HD se rencontraient, HC et GA se rencontreraient aussi, et les deux droites AB, CD auraient deux points communs sans coïncider.

veut. Or, si la somme des angles du triangle primitif surpassait deux droits d'une certaine quantité α, en opérant sur ce triangle comme nous venons de le dire, on obtiendrait, après un nombre suffisant d'opérations, un triangle ayant son plus petit angle inférieur à α; le triangle suivant aurait à la fois la somme de ses trois angles égale à $2R + \alpha$, R désignant un angle droit, et la somme des deux plus petits angles moindre que α; le troisième angle de ce triangle surpasserait donc $2R$, ce qui est absurde.

2° *Si dans un triangle rectiligne* ABC *la somme des angles est égale à deux angles droits, il en est de même pour tout autre triangle* (*fig.* 628).

En effet, deux au moins des angles du triangle ABC sont alors aigus; soient, par exemple, A et C, ces deux angles; la perpendiculaire BO abaissée du sommet B sur AC partage le triangle ABC en deux triangles rectangles ABO, CBO dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2R$, sans quoi la somme totale des angles de ces deux triangles serait

Fig. 628.



(1°) inférieure à $4R$ et, par suite, en retranchant les deux angles en O, qui sont droits, la somme des angles du triangle proposé ABC serait inférieure à $2R$. Il suit de là que, si l'on construit sur AB un triangle BAI, égal à ABO, on aura un quadrilatère AOBI, dont les côtés opposés sont égaux deux à deux et dont les angles sont droits. En superposant q quadrilatères égaux à celui-là et juxtaposant p figures égales à la figure AOQS, ainsi obtenue, on obtient un quadrilatère POQR, dont tous les angles sont droits et dont les côtés opposés, égaux deux à deux, peuvent devenir aussi grands qu'on veut, en prenant les nombres p et q assez grands. Ce quadrilatère sera partagé par la diagonale PQ en deux triangles rectangles égaux et l'on verra, comme ci-dessus, que la somme des angles de chacun de ces triangles est égale à $2R$. Donc on peut construire un triangle rectangle POQ, dans lequel la somme des angles est égale à $2R$ et assez grand pour contenir dans son intérieur tout triangle rectangle donné DOE, lorsqu'on aura fait coïncider les angles droits de ces triangles. Or la droite QD décompose POQ en deux triangles QDP, QDO, dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2R$, sans quoi la somme des angles du triangle total POQ serait moindre que $2R$; de même, la droite DE partage QDO en deux triangles DEO, DEQ, dans chacun desquels la somme des angles est égale à $2R$, sans quoi la somme des angles du triangle total QDO serait inférieure à $2R$. Il est donc démontré que, par suite de l'hypothèse, la somme des angles serait égale à $2R$ dans un triangle rectangle quelconque DOE; il en serait de même, par suite, pour tout triangle rectiligne, puisqu'un tel triangle peut toujours être décomposé en deux triangles rectangles.

3° *Par un point donné* A, *extérieur à une droite* BC, *on peut toujours mener une droite faisant avec la première un angle aussi petit qu'on veut* (*fig.* 629).

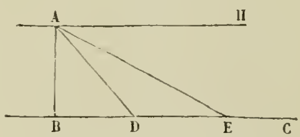
En effet, soit AB perpendiculaire sur BC, D un point pris à volonté sur BC, et DE une longueur égale à AD et portée sur BC à la suite de BD. La somme des angles du triangle ADE ne pouvant surpasser $2R$, on a, puisque ce triangle est isocèle,

$$2\,\mathrm{AEB} + (2R - \mathrm{ADB}) \leqq 2R, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{AEB} \leqq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ADB}.$$

Ainsi, étant donnée une droite AD, coupant BC sous un certain angle, on peut toujours en trouver une autre AE, faisant avec BC un angle au plus égal à la moitié du précédent; en opérant sur cette nouvelle droite comme sur la première et continuant ainsi, on parviendra à une droite faisant avec BC un angle aussi petit qu'on voudra.

4° *Si deux perpendiculaires* AH, BC *à une même droite* AB *sont parallèles, la somme des angles est égale à deux angles droits dans tout triangle rectiligne* (*fig.* 629).

Fig. 629.



En effet, menons dans l'angle BAH une droite AE, faisant avec AH un angle HAE aussi petit qu'on voudra; cette droite AE coupera BC, et l'on peut supposer, d'après le numéro précédent, que l'angle AEB, sous lequel AE coupe BC, soit aussi petit qu'on veut. Cela posé, D étant pris à volonté entre B et E, menons AD et désignons respectivement par $2R - \alpha$, $2R - \beta$ les sommes des angles dans les triangles ABD, ADE. La somme des angles du triangle ABE sera $2R - \alpha - \beta$; on aura donc

$$2R - \alpha - \beta = R + \mathrm{AEB} + (R - \mathrm{HAE}),$$

d'où

$$\alpha + \beta = \mathrm{HAE} - \mathrm{AEB};$$

mais, chacune des parties du second membre pouvant devenir moindre que toute quantité donnée, on a $\alpha + \beta = 0$, et, par suite, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, puisque α et β ne peuvent être négatifs. C. Q. F. D.

5° Il résulte des propositions précédentes que deux hypothèses sont seules possibles :

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est égale à deux angles droits; alors l'angle de parallélisme est toujours droit, et par un point quelconque on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Ou bien, dans tous les triangles rectilignes, la somme des angles est inférieure à deux angles droits; alors, par un point quelconque, on peut mener deux parallèles à une droite, et l'angle de parallélisme, toujours aigu, varie avec la distance du point à la droite.

La première hypothèse sert de fondement à la Géométrie ordinaire ou euclidienne. La seconde peut être également admise sans conduire à aucune contradiction; elle est la base de la Géométrie non euclidienne que Lobatcheffsky a établie, jusqu'au développement complet des équations entre les côtés et les angles d'un triangle, soit rectiligne, soit sphérique [1].

III.

Toutefois il y a encore lieu de se demander si, en poussant plus loin les déductions, Lobatcheffsky n'aurait pas fini par se heurter à une contradiction. En d'autres termes, y a-t-il contradiction d'une part entre les axiomes admis par les géomètres (en mettant de côté le postulatum d'Euclide), et d'autre part le postulatum de Lobatcheffsky? Pour nous en rendre compte, nous allons énoncer ces axiomes sous la forme suivante, en mettant en évidence ceux que les géomètres ne formulent pas d'ordinaire et qu'ils se contentent d'admettre implicitement.

Axiome 1. — Par deux points, on peut faire passer une droite et une seule; par trois points, un plan et un seul.

Axiome 2. — Toute droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan, ou bien, ce qui revient au même, l'intersection de deux plans est une droite.

Axiome 3. — Si deux figures sont égales, les lignes et les surfaces de la seconde qui sont homologues aux droites et aux plans de la première, sont aussi des droites et des plans.

---

[1] Tout ce qui va suivre, dans cette Note, est dû à M. Poincaré.

Axiome 4. — Dans deux figures égales, les angles homologues sont égaux, ainsi que les distances des couples de points homologues.

Axiome 5. — Une figure peut se déplacer en restant égale à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une droite restent fixes (mouvement de rotation).

Axiome 6. — Une figure peut se déplacer en restant égale à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une droite se déplacent, mais en restant sur cette droite (mouvement de glissement).

Axiome 7. — Si un point B est sur la droite AC, la distance AC est égale à la somme des distances AB et AC; dans le cas contraire elle est plus petite.

Y a-t-il contradiction entre ces sept axiomes et le *postulatum de Lobatcheffsky*, d'après lequel : On peut par un point mener une infinité de plans qui ne rencontrent pas un plan donné.

Afin de lever les derniers doutes à ce sujet, il faut employer un détour. Considérons une sphère qu'on appelle la *sphère absolue;* appelons *domaine intérieur* l'ensemble des points intérieurs à la sphère absolue.

Considérons une sphère qui coupe orthogonalement la sphère absolue; la partie de cette sphère qui est dans le domaine intérieur s'appellera *faux plan.*

Soit de même un cercle qui coupe orthogonalement la sphère absolue; la partie de ce cercle qui est dans le domaine intérieur s'appellera *fausse droite.*

Nous pouvons alors énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 1. — Par deux points du domaine intérieur on peut faire passer une fausse droite et une seule; par trois points du domaine intérieur on peut faire passer un faux plan et un seul.

Proposition 2. — L'intersection de deux faux plans est une fausse droite.

Supposons maintenant que l'on fasse une transformation par rayons vecteurs réciproques (n° 952), en prenant pour sphère d'inversion un faux plan, c'est-à-dire une sphère coupant orthogonalement la sphère absolue.

Les sphères se transformeront en sphères et les cercles en cercles; de plus, les angles seront conservés; la sphère absolue, coupant orthogonalement la sphère d'inversion, se transformera en elle-même; et à cause de la conservation des angles, les faux plans se transformeront en faux plans et les fausses droites en fausses droites.

Le rapport anharmonique de quatre points sur un cercle, tel qu'il a été défini au n° 321, n'est pas non plus altéré par l'inversion.

Soient A et B deux points quelconques du domaine intérieur; joignons ces deux points par une fausse droite qui viendra couper la sphère absolue en C et en D.

Appelons *fausse distance* des points A et B le logarithme du rapport anharmonique (ABCD), multiplié par le rayon R de la sphère absolue.

L'inversion transformera A et B en deux points A′ et B′ et la fausse droite qui les joint en une fausse droite qui coupera la sphère absolue en deux points C′ et D′ transformés de C et D. On aura donc

$$\log(ABCD) = \log(A'B'C'D').$$

La fausse distance n'est pas altérée par l'inversion.

Soit une figure F quelconque; faisons-lui subir un certain nombre de transformations telles que celle dont je viens de parler, c'est-à-dire un certain nombre d'inversions, la sphère d'inversion étant un faux plan. Je dirai que la figure transformée est *congruente* à F; la congruence sera *directe* si elle résulte d'un nombre pair d'inversions et *inverse* dans le cas contraire.

Nous pouvons alors énoncer les propositions suivantes :

Proposition 3. — Si deux figures sont congruentes, les lignes et les surfaces de la seconde qui sont homologues aux fausses droites et aux faux plans de la première sont aussi des fausses droites et des faux plans.

Proposition 4. — Dans deux figures congruentes, les angles homologues sont égaux; les fausses distances de deux couples de points homologues sont égales.

Les angles étant conservés, deux figures congruentes infiniment petites sont semblables. Le rapport de similitude est $\frac{R^2-\rho_1^2}{R^2-\rho_2^2}$, R étant le rayon de la sphère absolue, ρ_1 et ρ_2 les distances des deux figures à l'*origine,* c'est-à-dire au centre de la sphère absolue. Dans le cas où la sphère absolue se réduit à un plan, ce rapport se réduit à $\frac{y_1}{y_2}$, y_1 et y_2 étant les distances des deux figures au plan absolu.

Soient D une fausse droite, S et S′ deux faux plans passant par D. Soient F une figure quelconque, F_1 la figure inverse de F par rapport à S, F_2 la figure inverse de F_1 par rapport à S′. Les points de D n'ont pas été altérés par ces deux inversions.

Supposons que, D et S restant fixes, S′ varie d'une manière continue, mais en passant toujours par D. La figure F_2 variera d'une manière continue, mais en restant congruente à elle-même. Ce déplacement continu (accompagné d'ailleurs de déformation) s'appellera une *fausse rotation;* les points de D resteront fixes.

Soient encore D une fausse droite, S et S′ deux faux plans orthogonaux à D.

Soient encore F une figure quelconque, F_1 la figure inverse de F par rapport à S, F_2 la figure inverse de F_1 par rapport à S′. La droite D n'est pas altérée par ces deux inversions; les points de D sont déplacés, mais ils restent sur D.

Supposons que, D et S restant fixes, S′ varie d'une manière continue, mais en restant orthogonal à D. La figure F_2 variera d'une manière continue en restant congruente à elle-même. Ce déplacement continu s'appellera un *faux glissement;* dans ce mouvement, les points de D se mouvront, mais en restant sur D.

Nous pouvons donc énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 5. — Une figure peut se déplacer en restant congruente à elle-même, et de telle sorte que tous les points d'une fausse droite restent fixes (fausse rotation).

Proposition 6. — Une figure peut se déplacer en restant congruente à elle-même et de telle sorte que tous les points d'une fausse droite se déplacent, mais en restant sur cette fausse droite (faux glissement).

Le lieu des points dont la fausse distance au point A est constante ne doit pas être altéré par les inversions qui ont lieu par rapport à un faux plan passant par A; ce lieu doit donc couper normalement tous les faux plans qui passent par A.

Considérons la sphère S, lieu des points dont la fausse distance à A est constante; et d'autre part la sphère S′, lieu des points dont la fausse distance à B est constante. Si ces deux sphères sont tangentes, le point de contact ne doit pas être altéré par les inversions qui ont lieu par rapport à un faux plan passant par A et B, puisque ces inversions n'altèrent aucune des deux sphères. Ce point de contact doit donc être sur la fausse droite AB. D'où cette conséquence : de tous les points C qui sont à une fausse distance donnée de A, celui dont la fausse distance à B est la plus petite est sur la fausse droite AB.

Mais si C est sur la fausse droite AB, il résulte des définitions que la fausse distance AB est la somme des fausses distances AC et BC. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 7. — Si un point B est sur une fausse droite AC, la fausse distance AC est la somme des fausses distances AB et BC. Dans le cas contraire, elle est plus petite.

Il est aisé de vérifier d'autre part que :

Proposition 8. — On peut par un point du domaine intérieur mener une infinité de faux plans qui ne rencontrent pas un faux plan donné.

On remarquera immédiatement que ces huit propositions sont, pour ainsi dire, la traduction des sept axiomes de la Géométrie et du postulatum de Lobatcheffsky. Il suffit pour passer des uns aux autres de remplacer partout les mots

(1) *espace, plan, droite, distance, égal, angle,*

par les mots

(2) *domaine intérieur, faux plan, fausse droite, fausse distance, directement congruent, angle.*

(La congruence inverse correspondrait à la symétrie.)

Supposons donc que Lobatcheffsky, en tirant les conséquences logiques des axiomes et de son postulatum, soit arrivé à deux propositions contradictoires. Alors, en traduisant son raisonnement de la façon que je viens de dire, c'est-à-dire en remplaçant les mots (1) par les mots (2) correspondants, on arriverait également à deux propositions contradictoires qui seraient des conséquences logiques des propositions 1 à 8 que nous venons d'énoncer.

Il y aurait donc contradiction entre ces huit propositions; mais cela est impossible, puisque ces huit propositions sont vraies et appartiennent à la Géométrie ordinaire.

Il est donc certain que Lobatcheffsky ne pouvait arriver à une contradiction et que l'on n'y arrivera jamais, quelque loin que l'on pousse les déductions.

Ajoutons qu'un faux plan divise le domaine intérieur (de même qu'un plan divise l'espace) en deux régions entièrement séparées l'une de l'autre.

IV.

La puissance de l'origine par rapport à un faux plan (n° 193) est égale à R^2, R étant le rayon de la sphère absolue; elle est donc constante.

Convenons d'appeler *faux plan* toute sphère telle que la puissance de l'origine par rapport à cette sphère soit égale à une constante donnée K, mais en *supposant cette constante négative*. En d'autres termes, supposons que le rayon de la sphère absolue soit imaginaire.

Nous désignerons toujours par *fausse droite* l'intersection de deux faux plans.

Ici, il n'y a plus lieu de distinguer un domaine intérieur : un faux plan n'est plus une portion de sphère, mais une sphère entière.

Un faux plan et une fausse droite se coupent alors en deux points que j'appellerai *points antipodes*. Ces deux points sont en ligne droite avec l'origine et le produit des rayons vecteurs sera égal à K.

Dans le cas du § III (c'est-à-dire quand K était positif et la sphère absolue réelle), une sphère et un cercle orthogonaux à cette sphère absolue se coupaient encore en deux points antipodes; mais un seul de ces deux points appartenait au domaine intérieur et par conséquent au faux plan et à la fausse droite envisagés.

Si K était positif, les deux points antipodes seraient d'un même côté de l'origine.

Si K est négatif, ils sont de part et d'autre de l'origine.

Quand un point se rapproche de l'origine, son antipode s'éloigne indéfiniment; nous sommes ainsi amenés à regarder tous les points à l'infini comme un point unique, antipode de l'origine.

Dans ces conditions, un faux plan et une fausse droite se rencontrent toujours, et il en résulte qu'un triangle curviligne dont les côtés sont des fausses droites, a la somme de ses angles plus grande que deux droits (cette somme était au contraire plus petite que deux droits dans le cas du § III).

Nous conserverons la définition de la fausse distance AB; seulement les points C et D qui figurent dans cette définition sont maintenant imaginaires, puisque la sphère absolue est devenue imaginaire. On peut éviter la considération de ces points imaginaires en remarquant que si A′ et B′ sont les antipodes de A et B, la fausse distance AB est égale à

$$\sqrt{\mathrm{K}} \log \frac{1 + i\sqrt{(\mathrm{A'AB'B})}}{1 - i\sqrt{(\mathrm{A'AB'B})}},$$

(A′AB′B) représentant le rapport anharmonique des quatre points.

Nos sept premières propositions subsistent avec un seul changement : la proposition 1 comporte une exception; si deux points sont antipodes; on peut faire passer par ces deux points une infinité de fausses droites, de même par trois points, dont deux sont antipodes, on peut faire passer une infinité de plans.

Quant à la huitième proposition, elle doit être remplacée par la suivante :

Proposition 8 *bis*. — Par un point donné, non seulement on ne peut pas mener une infinité de faux plans qui ne rencontrent pas un faux plan donné, mais on n'en peut mener aucun

On peut conclure de là que l'on pourrait, sans contradiction logique, construire une Géométrie où l'on conserverait les sept axiomes ordinaires, mais en admettant que l'axiome 1 cesse d'être vrai dans certains cas d'exception; nous voulons dire qu'il y aurait certains couples de points exceptionnels par lesquels on pourrait faire passer, non pas une droite, mais une infinité de droites. De même, par un de ces couples de points exceptionnels et par un troisième point de l'espace, on pourrait faire passer une infinité de plans.

Quant au postulatum d'Euclide ou à celui de Lobatcheffsky, ils devraient être remplacés par le suivant : par un point, on ne peut mener aucun plan parallèle à un plan donné.

« Traduisons » en effet ces axiomes en remplaçant les mots (1) par les mots (2) nous retrouverons nos huit nouvelles propositions qui étant vraies ne sauraient être contradictoires.

Dans cette nouvelle Géométrie non euclidienne, qui est connue sous le nom de *Géométrie de Riemann*, la somme des angles d'un triangle est supérieure à deux droits. Nous avons vu plus haut que Lobatcheffsky avait démontré que cette somme ne peut-être qu'égale ou inférieure à deux droits; c'est que le géomètre russe admettait que l'axiome 1 est vrai *sans aucune exception*.

Ainsi en « traduisant » une proposition quelconque de la Géométrie de Lobatcheffsky ou de celle de Riemann, on retrouvera une proposition euclidienne.

Démontrons maintenant que les formules de la Trigonométrie sphérique sont les mêmes dans les trois Géométries. En effet, considérons dans la Géométrie de Lobatcheffsky (ou celle de Riemann) une proposition de Trigonométrie sphérique; ce sera une relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, ou, ce qui revient au même, une relation entre les angles plans et les dièdres d'un trièdre non euclidien T. Traduisons cette proposition en remplaçant les mots (1) par les mots (2) : nous obtiendrons une relation entre les angles sous lesquels se coupent trois faux plans, et les angles sous lesquels se coupent les trois fausses droites intersections mutuelles de ces trois faux plans; c'est-à-dire entre les angles plans et les dièdres du trièdre T′ formé par les plans tangents à nos trois faux plans en leur point d'intersection.

La relation n'aura d'ailleurs pas été altérée par la traduction, puisque le mot *angle* se traduit par *angle*. La relation est donc la même entre les éléments du trièdre non euclidien T et ceux du trièdre euclidien T′.

V.

Introduisons maintenant une transformation nouvelle que j'appellerai la transformation T. Soit O l'origine, A un point quelconque, A′ son antipode; B le conjugué harmonique de O par rapport au segment AA′; le point B sera regardé comme le transformé du point A.

Dans cette transformation T :

1° La sphère absolue n'est pas altérée;

2° Un faux plan est transformé en un plan proprement dit qui n'est autre que le plan polaire de l'origine par rapport à la sphère dont fait partie ce faux plan;

3° Une fausse droite se transforme en une droite proprement dite;

4° La fausse distance de deux points A, B est par définition le logarithme du rapport anharmonique (ABCD), les points C et D étant les intersections de la sphère absolue et de la fausse droite AB. Par notre transformation T, les points C et D ne changeront pas, les points A et B seront transformés en A′ et B′. Les quatre points A′B′CD seront en ligne droite et le rapport anharmonique (A′B′CD) sera le carré de (ABCD).

Nous pourrons alors appeler *fausse distance de deuxième sorte* des points A′ et B′ le demi-logarithme de (A′B′CD), ce sera la même chose que la fausse distance des points A et B.

5° Les angles seront altérés par la transformation T conformément aux règles du n° 1183. Soient deux plans quelconques, et les deux plans tangents (imaginaires) menés par leur intersection à la sphère absolue, soit ρ le rapport anharmonique de ces quatre plans; l'expression $\frac{\log \rho}{2\sqrt{-1}}$ s'appellera le *faux angle* de ces deux plans. L'angle de deux faux plans est égal au faux angle des deux plans qui sont leurs transformés

6° Soient deux points A et B inverses l'un de l'autre par rapport au faux plan P; soient A′ et B′ leurs transformés, P′ le transformé de P (ce sera un plan). Soit Q le pôle du plan P′ par rapport à la sphère absolue. Les points Q, A′, B′ sont sur une même droite qui coupe le plan P′ en un point R conjugué harmonique de Q par rapport au segment A′B′. Les points A′ et B′ sont donc transformés l'un de l'autre par homologie; mais cette homologie satisfait à des conditions particulières, puisque (*voir* n° 938) le centre d'homologie est le pôle du plan d'homologie par rapport à la sphère absolue et que le rapport d'homologie est égal à -1.

Considérons une figure, et ses transformées successives par une série d'homologies satisfaisant à ces conditions. On dira que ces diverses figures sont *congruentes de la seconde manière*. Il est clair que si deux figures sont congruentes de la première manière, leurs transformées par la transformation T seront congruentes de la seconde manière.

Ces considérations nous font connaître une autre manière de déduire une proposition de la Géométrie ordinaire de toute proposition de la Géométrie non euclidienne.

Il suffit pour cela de la traduire en remplaçant les mots :

(1) *espace, plan, droite, distance, égal, angle.*

par les mots :

(3) *domaine intérieur, plan, droite, fausse distance de la deuxième sorte, directement congruent de la deuxième manière, faux angle.*

Voila donc une nouvelle interprétation qui, en ce qui concerne la Géométrie de Riemann, soulève l'observation suivante :

Deux points antipodes ont le même transformé par la transformation T; par conséquent, dans la nouvelle manière d'interpréter la Géométrie de Riemann, un plan et une droite ne peuvent avoir qu'un point commun; l'axiome 1 est vrai sans comporter aucune exception. Comment se fait-il alors que, contrairement à la démonstration de Lobatcheffsky, la somme des angles d'un triangle soit supérieure à deux droits? C'est que nous avons abandonné une autre des hypothèses fondamentales de la Géométrie : il n'est plus vrai de dire qu'un plan partage l'espace en deux régions de telle façon qu'on ne puisse passer d'une de ces régions à l'autre sans traverser ce plan.

Il est inutile d'ajouter que toutes ces propriétés peuvent être transformées d'une manière quelconque par homologie. La sphère absolue sera alors remplacée par un ellipsoïde ou un hyperboloïde absolu. A part ce changement, les définitions de la fausse distance de la seconde sorte, de la congruence de la seconde manière, du faux angle ne seront pas changées; le caractère projectif de ces définitions est en effet manifeste.

VI.

La Géométrie non euclidienne à trois dimensions, étant ainsi constituée, contient, comme cas particulier, la Géométrie plane non euclidienne. Aux figures situées dans un plan non euclidien, correspondront dans l'espace euclidien, les figures situées dans un faux plan quelconque que nous pourrons d'ailleurs choisir arbitrairement. Nous choisirons un faux plan P passant par l'origine et qui sera par conséquent à la fois un faux plan et un plan au sens ordinaire du mot.

Ce faux plan P coupera la sphère absolue suivant un cercle qu'on appellera le *cercle absolu*. Les fausses droites de P couperont orthogonalement ce cercle absolu; la puissance de l'origine par rapport à ces fausses droites sera égale à K.

Nous allons voir d'abord que la Géométrie de Riemann à deux dimensions ne diffère pas essentiellement de la Géométrie sphérique. Supposons donc K négatif; construisons une sphère S de rayon $\sqrt{-K}$ ayant pour centre l'origine. Soit F une figure de la sphère, projetons-la stéréographiquement sur le plan P (n° 958). Cette projection conservera les angles, les grands cercles de la sphère se projetteront suivant des fausses droites; la longueur d'un arc de grand cercle n'est autre chose que la fausse distance des projections de ses extrémités.

Les projections de deux points antipodes de la sphère seront deux points antipodes au sens du paragraphe IV; c'est ce qui justifie cette dénomination.

A chaque théorème de la Géométrie de Riemann correspondra donc un théorème de la Géométrie sphérique; il suffit, pour la traduire, de remplacer les mots :

(1) *droite, égal, longueur, angle,*

par les mots :

(4) *grand cercle, égal, longueur, angle,*

En particulier, les formules de la Trigonométrie plane de Riemann seront les mêmes que celles de la Trigonométrie sphérique ordinaire. On a, par exemple, en Trigonométrie sphérique,

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{\sqrt{-K}}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{\sqrt{-K}}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{\sqrt{-K}}}, \tag{5}$$

A, B, C étant les angles d'un triangle sphérique, et a, b, c les longueurs de ses côtés (le rayon de la sphère étant supposé égal à $\sqrt{-K}$), de telle façon que $\frac{a}{\sqrt{-K}}$, $\frac{b}{\sqrt{-K}}$, $\frac{c}{\sqrt{-K}}$ soient les longueurs des côtés correspondants du triangle semblable construit sur la sphère de rayon 1.

La formule (5) sera encore vraie d'un triangle plan dans la Géométrie de Riemann.

Elle sera encore vraie (par continuité) d'un triangle plan dans la

Géométrie de Lobatcheffsky. Seulement, K étant positif, la formule se présente sous une forme imaginaire. Pour lui rendre la forme réelle servons-nous d'une formule d'Analyse

$$2 \sin ix = e^{-x} - e^{x};$$

notre formule (5) deviendra :

$$(5\ bis) \qquad \frac{\sin A}{e^{\frac{a}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{a}{\sqrt{K}}}} = \frac{\sin B}{e^{\frac{b}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{b}{\sqrt{K}}}} = \frac{\sin C}{e^{\frac{c}{\sqrt{K}}} - e^{-\frac{c}{\sqrt{K}}}}.$$

Soient F une figure sphérique quelconque, F′ sa projection stéréographique sur le plan P. Comment pourrait-on obtenir la transformée F″ de F′ par la transformation T du paragraphe V? Pour cela menons à la sphère S un plan tangent parallèle à P; faisons la perspective de F sur ce plan, en prenant pour point de vue le centre de la sphère; et enfin projetons orthogonalement sur le plan P la perspective obtenue; il est aisé de montrer que la figure ainsi construite n'est autre chose que F″. On vérifie immédiatement qu'aux grands cercles de F correspondent les droites de F″.

Lorsque K est positif, la sphère S est imaginaire; on peut donc dire que la Géométrie plane de Lobatcheffsky est la Géométrie d'une sphère imaginaire; mais il y a bien des moyens d'éviter cette sphère imaginaire et d'arriver à la formule (5 *bis*) et aux formules analogues sans passer par la considération des imaginaires. Nous nous bornerons à indiquer sommairement le suivant :

Considérons un hyperboloïde de révolution à deux nappes. Soit P le plan de symétrie qui ne rencontre pas la surface; soient N l'une des nappes et V le point où l'axe de symétrie perpendiculaire à P vient rencontrer l'autre nappe. Soit F une figure quelconque tracée sur la nappe N : faisons-en la perspective sur le plan P, en prenant V pour point de vue. Toutes les sections planes de l'hyperboloïde se projetteront suivant des cercles.

Menons par V des parallèles aux génératrices du cône asymptote. Nous obtiendrons un certain cône de révolution qui viendra couper le plan P suivant un certain cercle C. Ce cercle est la projection des points à l'infini de l'hyperboloïde.

Si nous prenons C pour cercle absolu, les sections diamétrales de l'hyperboloïde se projetteront suivant des fausses droites.

A chaque point de la nappe N correspond ainsi un point du domaine intérieur et par conséquent un point du plan non euclidien. Cette construction joue, pour la Géométrie de Lobatcheffsky, le rôle que jouait tout à l'heure la projection stéréographique pour la Géométrie de Riemann.

Soient, dans le plan P, deux figures congruentes, F_1 et F'_1, qui soient les projections de deux figures F et F' de la nappe N; les coordonnées d'un point de F' sont alors des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées du point homologue de F; il suffit de montrer qu'il en est ainsi quand on suppose que F_1 et F'_1 sont transformées l'une de l'autre par une seule inversion, le cercle d'inversion étant une fausse droite; or cela se vérifie immédiatement.

Soient

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde, et

$$(x, y, z), \quad (x', y', z')$$

les coordonnées de deux points de N. Soit δ la fausse distance des projections de ces deux points; on vérifie aisément que

$$2(zz' - xx' - yy') = e^{\delta} + e^{-\delta}.$$

Cette formule, d'où l'on peut déduire toutes celles de la Trigonométrie plane non euclidienne, est l'équivalent de la formule de Géométrie analytique qui donne le cosinus de l'angle de deux directions en fonction de leurs cosinus directeurs.

VII.

Dans les pages qui précèdent nous n'avons fait usage que des principes de la Géométrie élémentaire; tout au plus dans le paragraphe précédent avons-nous invoqué une formule d'Analyse, et quelques formules de Géométrie analytique, ce que nous aurions d'ailleurs pu éviter au prix de quelques longueurs. Nous ne saurions cependant clore cette Note sans dire quelques mots des liens qui rattachent la Géométrie plane non euclidienne à la Géométrie infinitésimale des surfaces. Nous renverrons d'ailleurs pour les théorèmes dont nous aurons à nous servir, à l'Ouvrage classique de M. Darboux.

Deux surfaces sont dites *applicables l'une sur l'autre,* si l'on peut déformer l'une d'elles (sans altérer les longueurs des lignes tracées sur cette surface et les angles sous lesquels ces lignes se coupent) de manière à l'appliquer sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

Une géodésique d'une surface est, par définition, le plus court chemin d'un point à un autre sur cette surface. Il est clair que si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, les géodésiques de l'une correspondront aux géodésiques de l'autre, puisque la déformation, n'altérant pas les longueurs, conserve les géodésiques.

La courbure totale d'une surface est l'inverse du produit des deux rayons de courbure principaux. On démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit applicable sur une sphère de rayon R, c'est que cette surface ait sa courbure totale constante et égale à $\frac{1}{R^2}$.

Une sphère est applicable d'une infinité de manières sur elle-même; une surface à courbure totale constante sera donc aussi applicable sur elle-même d'une infinité de manières.

Il est clair que la Géométrie des lignes tracées sur une surface sera la même que la Géométrie des lignes tracées sur une surface applicable sur la première.

Or nous avons vu que la Géométrie plane de Riemann ne diffère pas de la Géométrie de la sphère; elle ne différera donc pas non plus de la Géométrie des surfaces à courbure totale constante positive.

Les triangles dont les côtés sont trois géodésiques tracées sur une pareille surface auront la somme de leurs angles supérieure à deux droits et leurs éléments seront liés par les formules de la Trigonométrie sphérique.

Mais il y a également des surfaces réelles à courbure totale négative, connues sous le nom de *surfaces de Beltrami*. La Géométrie de ces surfaces ne différera pas de celle de Lobatcheffsky.

Les triangles dont les côtés sont trois géodésiques tracées sur une surface de Beltrami auront la somme de leurs angles inférieure à deux droits et leurs éléments seront liés par les formules de la Trigonométrie plane non euclidienne.

NOTE III (¹).

SUR LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET QUADRATIQUES, LES CONIQUES ASSOCIÉES A UN TRIANGLE, ET LES SYSTÈMES DE TROIS FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES.

FORMES PERSPECTIVES (²).

1. En *Géométrie projective* (géométrie de position), on considère comme *éléments simples* des figures :

Le *point*, la *droite* (indéfinie) et le *plan* (indéfini).

Les points sont ordinairement désignés par les lettres majuscules A, B, ... ; les droites, par les lettres minuscules a, b, ... ; les plans, par les lettres grecques α, β, ...

2. Ces éléments simples donnent naissance à sept *formes fondamentales :*

1° La *division* ou *ponctuelle rectiligne*, ayant pour *élements* tous les points d'une même droite indéfinie qu'on appelle la *base*, ou le *support* de la ponctuelle (1101).

2° Le *faisceau de rayons* ou la *radiée*, ayant pour *éléments* toutes les droites menées par un même point (*centre* ou *sommet* du faisceau) dans un même plan (319).

3° Le *faisceau de plans* ou la *feuillée*, dont les *éléments* sont tous les plans menés par une même droite (*axe* de la feuillée).

4° Le *système plan*, qui a pour *éléments* tous les points et toutes les droites situés dans un même plan, appelé *support* du système; quand on ne considère que des points ou que des droites, on emploie aussi les expressions de *champ ponctuel*, *champ réglé*.

(¹) Les *renvois* se rapportent au texte du *Traité*, à la Note III de la première Partie et à la Note actuelle; ceux qui visent les numéros de ces Notes seront précédés respectivement des lettres N et N'.

(²) Ces notions préliminaires ont pour but de familiariser le lecteur avec les terminologies les plus récentes, et de coordonner, en les complétant, certains développements disséminés dans le *Traité de Géométrie*.

5° La *gerbe,* comprenant toutes les droites et tous les plans menés par un même point, qu'on nomme *centre* ou *sommet* de la gerbe; les termes de *gerbe de rayons, gerbe de plans* n'ont pas besoin d'explication.

6° L'*espace,* qui a pour éléments tous les points et tous les plans; les expressions de *espace ponctuel, espace planaire* désignent respectivement la totalité des points et la totalité des plans.

7° L'*espace réglé,* qui a pour éléments toutes les droites.

La ponctuelle, la radiée et la feuillée sont des *formes du premier ordre* ou *à une dimension;* le système plan et la gerbe sont des formes *du deuxième ordre* ou *à deux dimensions;* l'espace est *du troisième ordre* ou *à trois dimensions;* enfin l'espace réglé est *du quatrième ordre* ou *à quatre dimensions.* Ces qualifications proviennent de ce que chaque élément simple de l'une de ces formes est déterminé respectivement par un, deux, trois ou quatre paramètres (ou coordonnées); le nombre des éléments simples de ces formes peut être représenté respectivement par le symbole ∞, ∞^2, ∞^3, ∞^4.

3. Deux formes de même ordre sont dites *rapportées* l'une à l'autre lorsque à chaque élément de l'une on fait correspondre, *en vertu d'une certaine loi,* un élément de l'autre. On dit aussi que cette loi *transforme* la première figure en la seconde.

Ainsi, on rapporte une gerbe de rayons à une gerbe de plans si l'on considère comme éléments *homologues* ou *correspondants* un rayon de la première et un plan de la seconde qui sont perpendiculaires.

Deux formes qui sont rapportées à une même troisième sont, par cela même, rapportées l'une à l'autre; car on peut considérer comme éléments homologues des deux premières formes deux éléments qui correspondent à un même élément de la troisième.

4. Si deux formes du premier ordre sont rapportées l'une à l'autre, de manière qu'à chaque élément de la première il corresponde n éléments de la seconde, et à chaque élément de la seconde m éléments de la première, on dit qu'il existe entre ces formes une *correspondance* (m, n).

Par exemple, si l'on joint chaque point M d'une circonférence Γ à un point fixe A de cette courbe et à un point fixe B non situé sur cette ligne, on aura établi entre les faisceaux [A] et [B] une correspondance (2, 1). En effet, un rayon du second faisceau rencontre Γ en deux points qui, étant joints à A, donnent deux rayons correspondants du faisceau [A]; un rayon du faisceau [A] coupe Γ au point fixe A dont on peut faire abstraction, et en un point variable M, et l'on associe au rayon AM du premier faisceau le seul rayon BM du second faisceau.

5. Lorsqu'il existe entre deux formes du premier ordre une correspondance (1, 1), ces formes sont dites *projectives* ou *homographiques*.

On voit facilement que *deux formes projectives à une troisième sont projectives entre elles*.

Les cas le plus simples de deux formes homographiques sont ceux de deux *formes perspectives*. Nous allons les définir successivement.

Une ponctuelle est dite *perspective* à un faisceau de rayons ou de plans si chaque élément de la ponctuelle est situé sur l'élément correspondant du faisceau. On dit alors que la ponctuelle est une *section* (rectiligne) du faisceau, et que le faisceau *projette* la ponctuelle à partir de son sommet ou de son axe.

Deux ponctuelles sont perspectives si elles sont des sections d'une même radiée (1103). Le point d'intersection de leurs supports est appelé *élément uni*, parce qu'il est son propre homologue dans les deux formes.

Deux radiées sont perspectives : 1° lorsqu'elles projettent une même ponctuelle à partir de deux centres différents; 2° lorsque, ayant le même sommet, elles sont des sections d'une même feuillée. Dans le premier cas, si elles sont dans un même plan, la droite qui joint les centres est un *élément uni;* dans le second cas, la ligne d'intersection des plans des deux radiées est un *élément uni*.

Enfin, deux feuillées sont perspectives si les plans homologues se coupent suivant les rayons d'une même radiée. Le plan de leurs axes est un *élément uni*.

Nous appelons *quaterne* l'ensemble de quatre éléments d'une ponctuelle, d'une radiée ou d'une feuillée. On a vu que *dans deux formes perspectives, les quaternes homologues ont le même rapport anharmonique* (320, 321, 584, 585).

6. Plus généralement, *dans deux formes projectives, les quaternes homologues ont le même rapport anharmonique*. En effet, cette propriété a déjà été démontrée pour deux ponctuelles projectives (1101), et on l'étend facilement à deux formes projectives quelconques; par exemple, si une radiée et une feuillée sont homographiques, leurs sections rectilignes le sont également, etc.

Deux formes projectives peuvent toujours, par un déplacement convenable de l'une d'elles, être rendues perspectives. Le lecteur établira facilement cette proposition; les solutions des cas principaux sont renfermées dans les théorèmes suivants :

Deux ponctuelles projectives qui ont un élément uni sont perspectives (324).

Deux radiées projectives sont perspectives : 1° lorsqu'elles sont situées *dans un même plan et que la droite joignant leurs centres* (supposés distincts) *est un élément uni;* 2° *lorsqu'elles ont même sommet et que l'intersection de leurs plans* (supposés distincts) *est un élément uni.*

Deux feuillées projectives sont perspectives, lorsque leurs axes sont situés dans un même plan qui est un élément uni des deux formes.

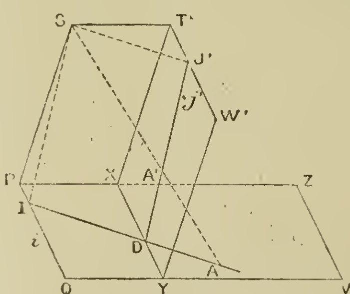
7. Un système plan et une gerbe sont perspectifs si, à chaque rayon de la gerbe, on fait correspondre son point d'intersection, et à chaque plan de la gerbe sa ligne d'intersection avec le support du système. On dit alors que le système est une *section* de la gerbe, et que la gerbe *projette* le système.

Deux gerbes sont perspectives si elles projettent le même système plan.

Deux systèmes plans sont perspectifs s'ils sont des sections d'une même gerbe; autrement dit, ces deux systèmes sont une projection centrale l'un de l'autre (586). A cause de leur importance, il convient d'insister plus longuement sur ces figures.

8. Considérons à cet effet deux plans XYVZ, XYW'T' et un point fixe S (*fig.* 1). A un point quelconque A du premier plan nous faisons

Fig. 1



correspondre le point A' où la droite SA rencontre le second plan. Quand A décrit une droite AD, A' parcourra également une droite A'D; ces droites homologues AD, A'D sont dans un même plan passant par S et se coupent sur la droite XY (ou sont parallèles à XY). Les deux systèmes plans XYVZ, XYW'T', ainsi rapportés l'un à l'autre, sont dits *perspectifs;* S est le *centre perspectif,* XY est l'*axe perspectif.* Cet axe est un lieu de *points unis.*

Menons par S un plan ST'W' parallèle à XYV et rencontrant le plan T'XY suivant la droite T'W'; menons encore le plan SPQ parallèle à T′XY et rencontrant le plan XYV suivant la droite PQ. Ces lignes T′W′, PQ, qui sont parallèles à l'axe XY, s'appellent *lignes de fuite* (588) des plans XYV, T′XY; par exemple, le point à l'infini sur la droite DA a pour homologue le point J′ où le rayon SJ′ parallèle à DA rencontre T′W′, et le point I où AD coupe PQ a pour correspondant le point à l'infin de A′D.

Remarquons encore qu'à une ponctuelle et à une radiée du plan XYV correspondent, dans le plan T′XY, respectivement une ponctuelle ou une radiée, et que deux formes homologues du premier ordre sont elles-mêmes perspectives (N′., 6).

9. Voici les cas particuliers remarquables de deux systèmes plans perspectifs.

1° Si le centre perspectif S se transporte à l'infini sur une droite déterminée u, et si l'axe perspectif XY est à distance finie, les deux systèmes plans sont *perspectivement affins;* l'un est une projection cylindrique de l'autre, les rayons projetants étant parallèles à u. Les lignes de fuite sont maintenant à l'infini; autrement dit, *les lignes de l'infini des deux systèmes se correspondent*. Cette propriété entraîne les suivantes : *a. A tout faisceau de parallèles correspond un faisceau de parallèles. b. Deux ponctuelles homologues sont toujours semblables. c. Si l'on rapporte deux systèmes affins à deux triangles homologues, deux points correspondants ont toujours les mêmes coordonnées barycentriques; en prenant pour axes coordonnés deux droites quelconques du premier système et leurs homologues du second système, on a entre les coordonnées de deux points homologues des relations de la forme* $x' = \lambda x$, $y' = \mu y$ (Clairaut, *Mém. Ac. Sc. Paris*, 1731).

2° Si le centre perspectif S est à distance finie, et l'axe perspectif à distance infinie, les deux systèmes sont *perspectivement semblables* ou *homothétiques*.

3° Si le centre perspectif se transporte à l'infini sur une droite donnée u, et si les supports des deux systèmes sont parallèles, les deux systèmes sont *perspectivement congruents*. Une translation parallèle à u fait coïncider les deux systèmes.

10. *Étant donnés deux systèmes plans perspectifs* XYV, T′XY, *si l'on fait tourner l'un d'eux autour de l'axe* XY *en conservant la correspondance des éléments, les deux systèmes restent toujours perspectifs, mais le centre perspectif décrit une circonférence.*

En effet, si l'on considère deux triangles homologues ABC, A′B′C′, les côtés correspondants continuent à se couper sur l'axe lorsqu'on fait tourner $A'B'C'$ autour de XY; par conséquent, les côtés homologues BC et $B'C'$, CA et $C'A'$, AB et $A'B'$ continuent à déterminer trois plans formant un trièdre S, et les droites AA', BB', CC' ne cessent de concourir en un même point S. En remplaçant le couple CC' par d'autres, on voit que deux points homologues sont toujours alignés sur un point fixe.

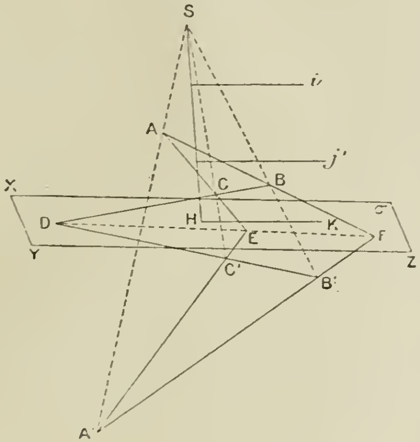
Revenons aux deux systèmes dans leur position primitive, et menons par le centre S un plan perpendiculaire à l'axe XY; soient PX, XT, ses intersections avec les plans proposés et achevons le parallélogramme $PXT'S$. T' sera l'homologue d'un point T situé à l'infini sur PX, et P sera le correspondant d'un point P' situé à l'infini sur XT'. Mais si l'on fait tourner le plan $T'XY$ autour de XY, les points T et T', P et P' seront toujours des éléments homologues des deux systèmes, et il suffira de construire un parallélogramme sur XP et XT' pour obtenir le nouveau centre de perspective. On en conclut que ce point décrit une circonférence qui est située dans le plan perpendiculaire à XY en X, et qui a pour centre le point P, pour rayon XT'.

11. Lorsque le plan $T'XY$, en tournant autour de XY, vient se rabattre sur le plan XYV, les deux systèmes plans, réunis sur le même support, jouissent encore des propriétés suivantes : deux droites homologues se coupent sur l'axe et deux points homologues sont alignés sur un point fixe. On les appelle maintenant *systèmes perspectifs superposés* ou *systèmes homologiques;* pour les propriétés et les cas particuliers de ces figures, nous renvoyons aux §§ 728-733.

12. On peut rapporter deux espaces l'un à l'autre en s'imposant les conditions que deux points homologues soient toujours alignés sur un point fixe S, et que deux droites homologues se coupent sur un plan fixe σ. Nous allons démontrer que ces conditions ne sont pas contradictoires.

La correspondance entre les deux espaces est établie si l'on se donne S, σ et un premier couple de points correspondants A, A' (*fig.* 2). Alors, pour trouver l'homologue d'un point quelconque B du premier espace, nous menons la droite AB qui coupe σ en F, et nous joignons F à A'; les droites FA', SB, qui sont situées dans un même plan, se rencontreront au point cherché B'. Soit CC' un autre couple de points correspondants obtenu par le même procédé; il importe de démontrer que es droites BC, $B'C'$ se coupent sur le plan σ. D'abord, ces droites sont situées dans un même plan CSB; ensuite, les côtés homologues des deux triangles ABC, $A'B'C'$ se coupent en trois points situés sur la ligne d'intersection des plans de ces triangles, et comme deux de ces points, F et E, appartiennent déjà au plan σ, il en est de même du troisième D. Observons aussi que, lorsqu'un point M parcourt une droite BC, son homologue M′ décrira la droite B′C′. Par suite, lorsque la droite AM engendre le plan ABC, son homologue A′M′ engendrera le

Fig. 2.



plan A′B′C′. Il résulte de là que tout plan du premier espace a pour homologue un plan du second espace, et ces deux plans se coupent sur σ.

Les deux espaces que nous venons de considérer sont dits *perspectifs* ou *homologiques;* S est le *centre d'homologie*, et σ le *plan d'homologie.*

Un plan quelconque SHK mené par S coupe les deux espaces suivant deux systèmes plans homologiques, ayant pour axe l'intersection HK des plans HSK, σ; soient i et j' les lignes de fuite de ces systèmes. Si ce plan est mené par une perpendiculaire SH au plan σ, et qu'on le fasse tourner autour de SH, les éléments correspondants des deux espaces qu'il renferme continueront à se correspondre dans ces espaces; on conclut de là que les plans engendrés par les droites i et j' sont les lieux des points de l'un des espaces qui ont leurs homologues à l'infini. Ces plans sont appelés *plans de fuite* des deux espaces homologiques.

Pour une étude plus détaillée et pour les cas particuliers, nous renvoyons aux §§ 938-943.

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES.

13. Deux formes fondamentales du deuxième ordre sont dites *homographiques, collinéaires* ou *projectives* dans les conditions suivantes :

1° Deux systèmes plans π, π', si à tout point A de π on fait correspondre un point A′ de π' et à toute droite a de π, passant par A, une droite a' de π', passant par A′;

2° Un système plan π et une gerbe S, si à tout point A de π correspond un rayon a' de S, et à toute droite a de π, passant par A, un plan α de S, passant par a';

3° Deux gerbes S, S′, si à tout rayon a de S correspond un rayon a de S′, et à tout plan α de S, passant par a, un plan α' de S′, passant par a'.

On voit immédiatement que deux formes du second ordre perspectives sont projectives; ces formes sont encore projectives quand on déplace l'une d'elles, mais elles cessent alors, en général, d'être perspectives. De même, si dans une suite de formes fondamentales du second rang, chaque forme est perspective à la suivante, la première et la dernière sont projectives. Remarquons encore que deux formes du second rang qui sont homographiques à une même troisième, sont homographiques entre elles.

Nous n'étudierons ici que les systèmes plans collinéaires.

14. Soient π, π' deux systèmes plans collinéaires; désignons par (A, A′), (B, B′), ... des couples de points correspondants, par (a, a'), (b, b'), ... des couples de droites correspondantes. De la définition on tire les conclusions suivantes :

1° La droite AB a pour homologue la droite A′B′; car à la droite passant par les points A et B doit correspondre une droite passant par les points homologues A′ et B′.

2° Le point d'intersection de deux droites a, b de π a pour homologue le point d'intersection des droites correspondantes a', b' de π.

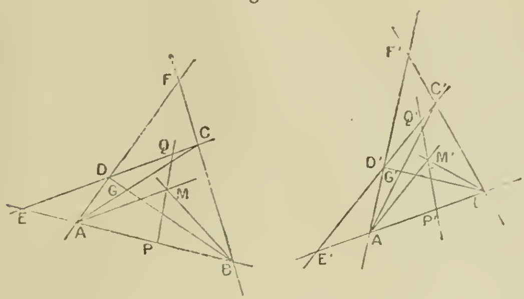
3° Une ponctuelle de π a pour homologue une ponctuelle de π', homographique à la première.

4° Une radiée de π a pour homologue une radiée de π', homographique à la première.

15. Pour construire deux systèmes collinéaires π, π' on peut se donner arbitrairement quatre couples de points homologues (A, A′), (B, B′), (C, C′), (D, D′), pourvu que les points A, B, C, D et les points A′, B′, C′, D′ soient les sommets de deux quadrangles propre-

ment dits. Ces quadrangles se correspondront dans toutes leurs parties : les droites AB, BC, CD, DA, AC, BD auront pour homologues les droites A'B', B'C', C'D', D'A', A'C', B'D'; les points d'intersection E, F, G des couples de droites (AB, CD), (AD, BC), (AC, BD) auront pour

Fig. 3.



correspondants les points d'intersection E', F', G' des couples de droites (A'B', C'D'), (A'D', B'C'), (A'C', B'D'). Cela posé, les points A et A' sont les centres de deux radiées projectives [A], [A'], dont nous connaissons trois couples de rayons correspondants (AB, A'B'), (AC, A'C'), (AD, A'D'); nous pourrons donc en tracer autant de couples d'éléments homologues que nous voulons. Construisons de même les radiées projectives [B], [B'] qui se correspondent dans les systèmes π, π'. Un point quelconque M du système π est à l'intersection de deux rayons des faisceaux [A], [B]; les rayons homologues des faisceaux [A'], [B'] se coupent au point M'. Si l'on répète cette construction pour les différents points d'une droite PQ, il est facile de voir que leurs homologues se trouveront sur une droite P'Q'. En effet, lorsque M parcourt PQ, les rayons AM, BM engendrent deux faisceaux perspectifs ayant le rayon uni AB; par suite, les droites A'M', B'M' engendreront deux faisceaux projectifs, qui sont même perspectifs à cause du rayon uni A'B'.

Pour déterminer l'homologue P'Q' d'une droite donnée PQ, on cherche les homologues de deux de ses points, de préférence ceux des points P, Q où la droite donnée rencontre deux côtés du quadrangle ABCD. On est ainsi amené à construire les deux ponctuelles projectives [AB], [A'B'] dont on connaît deux ternes homologues ABE, A'B'E', et les deux ponctuelles projectives [CD], [C'D'] dont on connaît les ternes homologues CDE, C'D'E'. Il est facile de voir que cette construction de deux droites homologues PQ et P'Q' fait correspondre à une radiée de π une radiée de π'.

Soient I, J' les points de fuite des ponctuelles projectives [AB], [A'B'], et I_1, J'_1 ceux des ponctuelles projectives [CD], [C'D']; la droite II_1 de π correspond à la droite de l'infini de π', et $J'J'_1$ est la ligne de π' qui correspond à la droite de l'infini de π. II_1 et $J'J'_1$ sont donc les *lignes de fuite* des deux systèmes π, π'.

16. Si les ponctuelles [AB], [A'B'] sont semblables, de même que les ponctuelles [CD], [C'D'], les points de fuite I et J', I_1 et J'_1 sont à l'infini (1102), et les lignes à l'infini des deux systèmes se correspondent. On a alors deux systèmes dits *affins*. Tout point à l'infini de π ayant son homologue à l'infini dans π', un faisceau de droites parallèles correspond à un faisceau de parallèles, et deux ponctuelles homologues sont toujours semblables. Cette dernière propriété conduit à une construction facile des deux figures quand on connaît deux triangles homologues ABC, A'B'C' : si l'on prend pour axes coordonnés du système π les droites AB, AC, pour axes du système π' les droites A'B', A'C', les coordonnées de deux points homologues sont liées par les relations

$$x' = \frac{A'B'}{AB}x, \qquad y' = \frac{A'C'}{AC}y.$$

Remarquons aussi que deux points homologues ont les mêmes coordonnées barycentriques respectivement par rapport aux deux triangles ABC, A'B'C'.

Si les quadrilatères ABCD, A'B'C'D' sont semblables, les systèmes π, π' sont *semblables;* si ces quadrilatères sont égaux, les deux systèmes sont *égaux*.

17. Deux systèmes collinéaires π, π', qui ont le même support, sont dits *superposés*. Dans de tels systèmes, un point qui coïncide avec son homologue est appelé *point double;* toute droite qui coïncide avec son homologue prend le nom de *droite double*.

La droite qui joint deux points doubles A, B est une droite double. Elle est le support de deux ponctuelles projectives des deux systèmes; tout point de la droite AB autre que les points A et B est distinct de son homologue, à moins que les deux ponctuelles ne soient identiques. Dans le dernier cas, les deux systèmes sont dits avoir une *ponctuelle double*.

Semblablement, l'intersection de deux droites doubles a, b est un point double des deux systèmes π et π'; par ce point, il ne passe pas d'autre droite double, à moins qu'il ne soit le centre d'une *radiée double*.

Lorsque deux systèmes collinéaires superposés ont quatre points doubles qui sont les sommets d'un quadrangle proprement dit, ces systèmes sont identiques; cela résulte de la construction de deux systèmes collinéaires donnés par deux quadrilatères homologues ABCD, A′B′C′D′ (N′., 15), si l'on suppose ces quadrilatères confondus.

Cherchons les éléments doubles de deux systèmes distincts, définis par les quadrangles homologues ABCD, A′B′C′D′. Si K est un point double, les droites AK et A′K se correspondent dans les faisceaux projectifs [A], [A′]; K appartient donc à la conique Σ lieu de l'intersection des rayons homologues de ces faisceaux. Il appartient aussi à la conique Σ' lieu de l'intersection des rayons homologues des faisceaux [B], [B′]. Ces courbes se coupent généralement en quatre points, dont l'un est le point de rencontre des rayons AB, A′B′. Ce point doit être écarté, car il change avec le choix des points A, A′, B, B′; il reste encore trois autres points d'intersection de Σ avec Σ', que nous désignons par K, K′, K″. Donc, en général, deux systèmes collinéaires superposés ont trois points doubles K, K′, K″ et trois droites doubles K′K″, K″K, KK′. L'un de ces points est toujours réel; les deux autres sont à la fois réels ou à la fois imaginaires.

Supposons que AA′ soit un rayon uni des deux faisceaux [A], [A′]; ces faisceaux sont alors perspectifs et les rayons homologues se coupent sur une droite m passant par le point d'intersection R des droites AB, A′B′; la conique Σ est composée des droites AA′ et m. De même, si BB′ est un rayon uni des faisceaux [B], [B′], la conique Σ' est composée de la droite BB′ et d'une droite n menée par R. Les points doubles des systèmes π et π' sont alors le point d'intersection des droites AA′, BB′ que nous désignons par S, et les points de rencontre de AA′ avec n et de BB′ avec m.

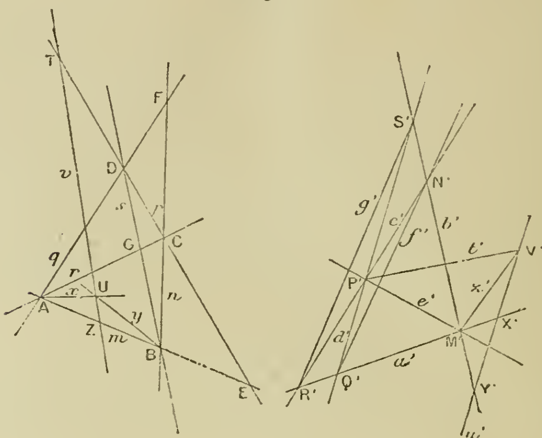
Il peut arriver que les droites m et n se confondent; alors m est le support d'une ponctuelle double, car tout point de m appartient aux deux coniques Σ, Σ'. Toute droite menée par S est une droite double, puisqu'elle passe par un second point double, situé sur m. Il résulte de là que tout point M a son homologue M′ situé sur la droite (double) SM, et que deux droites correspondantes rencontrent m au même point (double). Nous retrouvons donc ainsi les systèmes perspectifs superposés.

18. Deux systèmes plans π, π' sont dits *corrélatifs* ou *réciproques*, lorsque à chaque point A de π correspond une droite a' de π', et qu'à toute droite a de π passant par A correspond un point A′ de π', situé sur a'.

On remarque immédiatement que deux systèmes plans qui sont polaires réciproques par rapport à une conique (1167) sont corrélatifs.

Il résulte de la définition que la droite joignant deux points A, B de π a pour homologue le point de rencontre des droites correspondantes a', b' de π'; que le point d'intersection de deux droites a, b de π a pour homologue la droite joignant les points correspondants A′, B′ de π' (*fig.* 4)

Fig. 4.



On déduit de là qu'une ponctuelle de π se transforme en une radiée de π', projective à la ponctuelle, et qu'une radiée de π se transforme en une ponctuelle de π', projective à cette radiée.

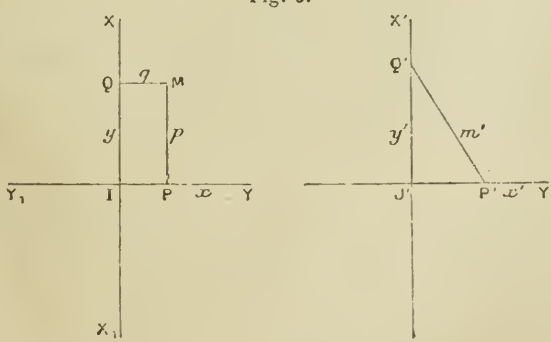
Pour construire deux systèmes corrélatifs π, π', on peut prendre arbitrairement quatre couples d'éléments homologues (A, a'), (B, b'), (C, c'), (D, d'), pourvu que A, B, C, D soient les sommets d'un quadrangle proprement dit, et a', b', c' d' les côtés d'un quadrilatère proprement dit. Les autres éléments de ABCD et $a'b'c'd'$ se correspondront corrélativement, à savoir : les côtés AB, BC, CD, DA, AC, BD, désignés par les lettres m, n, p, q, r, s, aux sommets $a'b'$, $b'c'$, $c'd'$, $d'a'$, $a'c'$, $b'd'$, désignés par les lettres M′, N′, P′, Q′, R′, S′; les points d'intersection E, F, G des couples de côtés opposés m et p, n et q, r et s du quadrangle ABCD aux diagonales e', f', g' joignant les couples de sommets opposés M′ et P′, N′ et Q′, R′ et S′ du quadrilatère a', b', c', d'. Construisons un faisceau [A], de centre A, projectif avec une ponctuelle [a'] située sur a', deux ternes homologues étant mqr, M′ Q′ R′; un rayon x du faisceau et le point correspondant X′ de la ponctuelle seront des éléments correspondants des systèmes π, π'. Si nous construisons encore un faisceau [B] projectif avec une ponctuelle [b'] en prenant pour ternes homologues mns et $M'N'S'$, nous pourrons considérer un point quelconque U de π comme l'intersection de deux rayons x, y des faisceaux [A], [B]; la droite homologue u' de π' sera déterminée par les points correspondants X', Y' des ponctuelles $[a'], [b']$. De cette construction des éléments homologues (U, u'), on peut déduire que si U décrit une droite v, u' tourne autour d'un point fixe V'.

Ces explications suffisent pour montrer comment on peut obtenir le point correspondant à une droite de π, la droite homologue d'un point donné de π', ou le point homologue d'une droite donnée de π'.

19. Appelons j la droite de l'infini de π, i' celle de π', J' et I les points correspondants de l'autre système; ces points sont nommés les *centres* des deux systèmes. Si I est situé sur j, i' doit passer par J'; donc les deux centres sont à distance finie, ou tous deux à l'infini. Nous laissons au lecteur le soin de continuer l'examen du second cas.

Considérons l'involution engendrée par les côtés des angles droits de sommet I; elle se transforme en une ponctuelle involutive ayant pour support i'. Si l'on projette cette ponctuelle à partir de J', on obtient un faisceau involutif, qui possède deux rayons conjugués rectangulaires x', y' (1109); appelons Y', X' (*fig.* 5) les points à l'infini sur ces

Fig. 5.



rayons, et y, x les droites homologues de π, lesquelles passent nécessairement par I et sont rectangulaires. Nous désignons encore par Y, X les points à l'infini sur x, y. Les triangles IXY, J'X'Y' se correspondent dans les deux systèmes π, π' : aux sommets et aux côtés du premier correspondent respectivement les côtés et les sommets du second. Les droites x et y, x' et y' sont appelées les *axes* des deux systèmes π, π'.

Si un point P' parcourt la droite x', la ponctuelle qu'il engendre est projective avec le faisceau de centre X, engendré par la droite correspondante p, et par suite avec la ponctuelle déterminée par le point P où p rencontre x; ces ponctuelles [P], [P'] ayant pour points de fuite les points I, J', on a

$$(1) \qquad \mathrm{IP}.\mathrm{J'P'} = a^2,$$

a étant une constante. Semblablement, la ponctuelle engendrée par un point Q' mobile sur y' est projective avec le faisceau, de centre Y, engendré par la droite correspondante q, et par suite avec la ponctuelle déterminée par le point de rencontre Q de q avec y; ces points Q, Q' satisfont à une relation de la forme

$$(2) \qquad \mathrm{IQ}.\mathrm{J'Q'} = b^2,$$

b étant une constante. Cela posé, un point quelconque M de π est déterminé par un rayon p du faisceau [X], et un rayon q du faisceau [Y]; ces rayons sont perpendiculaires respectivement à x et à y. La droite correspondante m' est déterminée par les points P', Q' où elle rencontre x', y'; les relations (1) et (2) donnent une construction facile pour déduire M de m' ou m' de M.

Il y a plus : si l'on superpose le système π' au système π en faisant coïncider J'X' avec IX et J'Y' avec IY, on obtient deux figures polaires réciproques par rapport à l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Si l'on plaçait l'angle Y'J'X' sur l'angle $\mathrm{YIX_1}$, les deux systèmes deviendraient polaires réciproques par rapport à l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. On pourrait aussi placer l'angle Y'J'X' sur l'angle $\mathrm{Y_1IX_1}$; alors π et π' seraient polaires réciproques par rapport à l'ellipse imaginaire

$$a^2y^2 + b^2x^2 + a^2b^2 = 0.$$

Deux systèmes polaires réciproques sont dits *réciproques en involution*, parce que deux éléments (M, m') continuent à se correspondre si l'on attribue M au second système et m' au premier.

20. Étant donnés deux systèmes réciproques π, π', qui sont situés dans un même plan, on appelle *points incidents* les points d'un système qui appartiennent aux droites correspondantes de l'autre; ces droites elles-mêmes sont appelées *droites incidentes*.

Observons d'abord que ces éléments restent incidents quand on les range dans l'autre système. En effet, désignons un même point du plan par M ou par N' suivant qu'il est considéré dans le premier système ou dans le second, et soient m' et n les droites correspondantes du second ou du premier système. Si M est situé sur m', la droite n', qui correspond au point N′ de m' dans le système π', doit passer par le point homologue de m', c'est-à-dire par M; donc le point M(N′) est situé sur ses deux droites homologues m' et n. On démontre de même qu'une droite incidente contient ses deux points homologues.

Les points incidents appartiennent à une conique E, *et les droites incidentes enveloppent une seconde conique* E′. — Pour démontrer ce théorème, soient M un point mobile sur une droite u, m' la droite correspondante de π', M_1 le point où m' rencontre u, U′ le point correspondant à u; le point variable M engendre une ponctuelle $[u]$ qui est projective à la radiée [U′] engendrée par m', et par suite à la ponctuelle $[u_1]$ décrite par M_1. Les ponctuelles $[u]$, $[u_1]$ ont deux points doubles P, Q (1104); ces points sont évidemment des points incidents, et les droites U′P, U′Q sont des droites incidentes. Il en résulte que le lieu géométrique des points incidents est rencontré par une droite quelconque u en deux points, et que l'enveloppe des droites incidentes admet deux tangentes passant par un point quelconque U′. Ces courbes sont donc des coniques.

Lorsque les courbes E, E′ coïncident, les systèmes π, π' sont en involution.

21. La transformation qui fait correspondre à un point et à une droite du système plan π un point et une droite d'un système π' (N′., III, 13) est appelée *homographie* ou *collinéation;* celle qui fait correspondre à un point une droite et à une droite un point, a reçu le nom de *corrélation, réciprocité* ou *dualité*. Ces deux transformations sont dites *linéaires*. Elles comprennent la *translation parallèle* (171), le *retournement* (172), la *rotation*, l'*homothétie*, la *similitude*, la *transformation par polaires réciproques*, la *projection cylindrique* ou l'*affinité*, la *projection centrale* ou la *perspective*.

Désignons par T′, T″, T‴, ..., $T^{(n)}$ des transformations qui changent un système plan en un autre système plan. Si T′ change un système π en un système π', et que T″ change π' en π'', on désigne par le *produit* T′T″ la transformation qui sert à passer de π à π''. En général, les opérations T′T″ et T″T′ sont différentes. Par exemple, si l'on retourne un plan successivement autour de deux droites a, b de ce plan, un point du plan vient occuper deux positions différentes suivant que l'on commence par l'un ou par l'autre retournement; cependant si les deux axes a, b sont rectangulaires, l'ordre des opérations est indifférent.

Plus généralement, le produit T′T″... $T^{(n)}$ désigne la transformation unique qui donne le même résultat final que l'opération T′ changeant en π', l'opération T″ changeant π' en π'', etc.

Nous avons déjà dit que *le produit de plusieurs collinéations est éga-*

lement une collinéation. On voit facilement que *le produit de deux réciprocités est une collinéation.* Enfin, *le produit de plusieurs transformations qui sont des collinéations et des réciprocités dans un ordre quelconque, est une collinéation ou une réciprocité suivant que le nombre des réciprocités est pair ou impair.*

TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES (1).

22. Lorsque deux systèmes plans sont rapportés l'un à l'autre de manière qu'à tout point de l'un corresponde un point de l'autre (un seul, sauf des exceptions en nombre limité), et à toute ponctuelle de l'un des systèmes une conique de l'autre, on dit qu'il existe entre ces systèmes une *correspondance quadratique ponctuelle.*

Pour établir une *correspondance univoque* entre les points de deux systèmes plans π, π' (*fig.* 6), nous considérons dans le premier système deux radiées de centres différents A, B et, dans le second, deux radiées de centres différents A', B', et nous supposons que les faisceaux [A] et [A'] soient gradués projectivement, ainsi que les faisceaux [B] et [B']. Alors à chaque point M de π on peut faire correspondre, dans π', le point M' situé à l'intersection des rayons des faisceaux [A'], [B'] qui correspondent aux rayons AM, BM des faisceaux [A], [B].

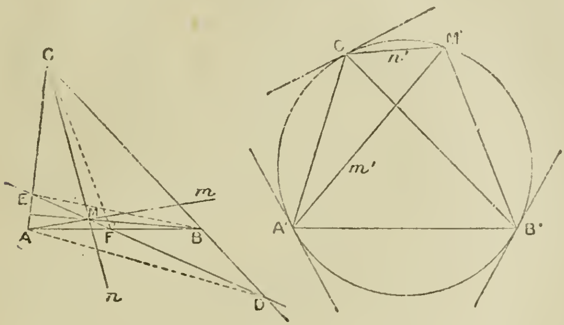
Si les droites AB, A'B' sont des rayons homologues tant des faisceaux [A], [A'] que des faisceaux [B], [B'], les points M, M' se correspondent dans deux systèmes collinéaires.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et menons les rayons A'C', B'C' des faisceaux [A'], [B'] qui correspondent à la droite AB considérée comme rayon des faisceaux [A], [B], ainsi que les rayons AC, BC des faisceaux [A], [B] qui sont les homologues du rayon A'B' des faisceaux [A'], [B']. Les points A, B, C, A', B', C' sont appelés les *points principaux* de la transformation, et les droites AB, BC, CA, A'B', B'C', C'A' (*fig.* 6) en sont les *droites principales;* ABC et A'B'C' sont les *triangles principaux.*

(1) Magnus, *Journal de Crelle*, t. 8. — Steiner, *Systematische Entwickelungen* (Exercices). — Abel Transon, *Nouv. Ann.*, 1864 et 1865. — Hirst, *Proceedings of the Royal Society*, 1865 et 1866; *Nouv. Ann.*, 1866. — De Longchamps, *Nouv. Ann.*, 1866; *Ann. de l'École Normale supérieure*, t. III; *Journal de Math. spéc.*, 1882. — Mathieu, *Nouv. Ann.*, 1865. — Saltel, *Mém. de l'Acad. de Belg.*, 1871. — Dewulf, *Bull. des Sc. math.*, t. V, 1873. — Schoute, *Ibid.*, 2e série, t. VI et VII. — Ch. Servais, *Mathesis*, 1887 et 1888. — Neuberg, *Mathesis*, 1888. — Ripert, *Ibid.*, 1899. — Salmon, *Traité de Géom. anal.* (Courbes planes), Chap. VIII. — Reye, *Geometrie der Lage*, t. II.

Un sommet d'un triangle principal a un nombre infini de points correspondants, situés sur le côté opposé de l'autre triangle principal. — En effet, A étant l'intersection d'un rayon quelconque du faisceau [A] avec le rayon BA de [B], son homologue est à l'intersection d'un rayon indéterminé de [A'] avec le rayon B'C' de [B'], qui est l'homologue de BA; A a donc pour homologue un point quelconque de la droite B'C'. De même C, intersection des rayons AC, BC de [A], [B] a pour homologue un point quelconque de la droite A'B', l'homologue de AC, BC dans les deux faisceaux [A'], [B']. Même raisonnement pour les points B, A', B', C'.

Fig. 6.



Lorsque le point M parcourt un rayon m du faisceau [A], son homologue M' décrit le rayon homologue m' du faisceau [A'], de sorte qu'une droite m menée par A a pour homologue une droite m' menée par A'; toutefois, comme le point A de m a pour homologue un point quelconque de B'C', on peut dire que m se transforme en un système de deux droites (m', B'C'). Conclusion analogue pour les droites menées par B, A' ou B'. Supposons ensuite que M décrive une droite n menée par C. Les faisceaux engendrés par A'M', B'M' seront projectifs aux faisceaux perspectifs engendrés par AM, BM; ils sont donc projectifs entre eux, et même perspectifs à cause du rayon uni A'B', qui correspond aux deux rayons AC, BC menés au point C de n. Il résulte de là que la droite n se transforme en une droite n' passant par C, ou mieux en un système de deux droites (n', B'C').

Observons aussi que si n tourne autour de C, les droites n, n' se correspondent dans deux faisceaux projectifs [C], [C'], de sorte que les trois couples (A, A'), (B, B'), (C, C') jouent le même rôle.

Faisons parcourir au point M une droite quelconque u, qui rencontre BA, CA, AB en D, E, F. Les droites A'M', B'M' se correspondront dans deux faisceaux qui sont projectifs respectivement aux faisceaux perspectifs engendrés par AM et BM, et par suite projectifs entre eux; le point M′ décrit donc une conique 𝔘′ (1131). Cette courbe passe par les points A′, B′, C′ qui sont les homologues des points D, E, F de u, et y touche les rayons des faisceaux [A′], [B′], [C′], qui correspondent aux rayons AD, BE, CF des faisceaux [A], [B], [C].

Les droites de l'infini des systèmes π, π', que nous désignons par les lettres j, i', se transforment en deux coniques 𝔍′, 𝔍 circonscrites aux triangles A′B′C′, ABC. Suivant que la droite u rencontre la conique 𝔍 en deux points réels distincts, confondus ou imaginaires, la transformée 𝔘′ est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Les diverses droites du plan π se transforment donc en des coniques passant par trois points fixes A′, B′, C′; on dit que ces courbes constituent un réseau *homaloïde*. Les rayons d'un faisceau de centre M se transforment en un *faisceau de coniques*, passant par quatre points fixes A′, B′, C′, M′. Une conique passant par les trois points fondamentaux A, B, C se transforme en une droite; si elle passe par deux points fondamentaux A, B, sa transformée est une conique passant par A′, B′; une conique quelconque de π a pour transformée une quartique passant par A′, B′, C′.

La transformation que nous venons d'étudier est une *transformation quadratique* (ou du second degré) *ponctuelle*. Elle est déterminée quand on connaît les triangles fondamentaux ABC, A′B′C′ et un couple de points correspondants (M, M′). Si l'on rapporte les plans π, π' respectivement aux triangles ABC, A′B′C′, les coordonnées normales ou barycentriques de deux points homologues quelconques sont liées par des équations de la forme

$$\frac{xx'}{\lambda} = \frac{yy'}{\mu} = \frac{zz'}{\nu}, \qquad \text{ou} \qquad x:y:z = \frac{\lambda}{x'}:\frac{\mu}{y'}:\frac{\nu}{z'},$$

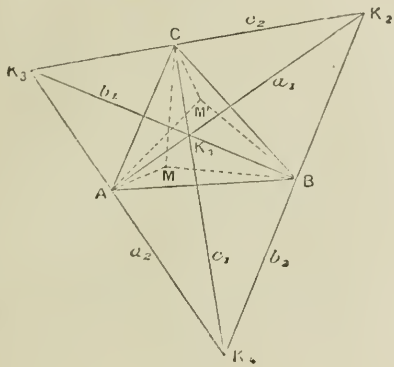
λ, μ, ν étant des constantes.

Si les systèmes π, π' se trouvent dans un même plan, ils ont, en général, quatre *points doubles*. En effet, si K est un tel point, les rayons AK, A′K se correspondent dans les radiées projectives [A], [A′], et aussi dans les radiées [B], [B′]; on en conclut que K appartient à la fois aux deux coniques qui sont engendrées l'une par l'intersection des rayons homologues des radiées [A] et [A′], l'autre par les radiées [B] et [B′]. Ces deux courbes se coupent en quatre points K_1, K_2, K_3, K_4, qui sont les points doubles cherchés.

23. Nous allons examiner quelques cas particuliers.

Supposons d'abord que les points principaux A′, B′, C′ coïncident respectivement avec A, B, C. Les radiées projectives [A], [A′], qui ont maintenant deux rayons homologues échangeables AB, AC, forment une involution qui a deux rayons doubles a_1, a_2 : de même les radiées [B], [B′] forment une involution dont nous désignons les rayons doubles par b_1, b_2; enfin, soient c_1, c_2 les rayons doubles de l'involution constituée par les radiées [C], [C′]. Les points $a_1 b_1$, $a_1 b_2$, $a_2 b_1$, $a_2 b_2$ (*fig.* 7) sont évidemment les points doubles K_1, K_2, K_3, K_4 des systèmes π, π'; comme ils se trouvent aussi sur les droites c_1 ou c_2, les points principaux A, B, C sont les points d'intersection des côtés opposés du quadrangle complet qui a pour sommets les points doubles K_1, K_2, K_3, K_4.

Fig. 7.

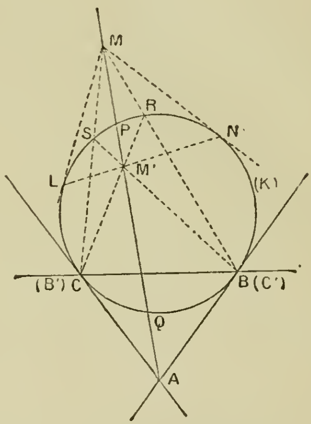


Les rayons AM et AM′, BM et BM′, CM et CM′, qui aboutissent à deux points homologues M, M′ des systèmes π, π', séparent harmoniquement les droites a_1 et a_2, b_1 et b_2, c_1 et c_2; on en déduit que les points M et M′ sont conjugués par rapport aux coniques (dégénérées) $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, et aussi par rapport à une conique quelconque passant par les points K_1, K_2, K_3, K_4 (1174).

Le cas spécial que nous venons d'étudier est appelé une *transformation quadratique involutive* ou *harmonique,* pour rappeler que deux points correspondants M, M′ sont échangeables. On peut définir ce cas comme il suit : Étant données dans un même plan deux coniques quelconques E, E′, les polaires d'un point M par rapport à ces courbes se coupent en un point M′; les points M, M′ se correspondent dans une transformation quadratique involutive qui a pour points doubles les points d'intersection de E et E′, pour points principaux les sommets du triangle autopolaire commun.

24. Considérons ensuite une transformation quadratique dans laquelle le triangle principal A′B′C′ coïncide avec ACB, et supposons en B et C deux radiées projectives [B], [C], qui représentent en même temps les radiées [B], [B′] et les radiées [C′], [C] du cas général, les rayons BA, BC ayant pour homologues les rayons CB, CA. L'homologue d'un point M de π est à l'intersection des rayons CM′, BM′, qui correspondent aux rayons BM, CM des radiées [B], [C]. On voit immédiatement que tout point de la conique engendrée par l'intersection des rayons homologues des radiées [B], [C] est un *point double* des systèmes π, π'; nous avons donc ici une conique des points doubles, que nous désignons par (K). Cette courbe touche en B et C les droites AB, AC.

Fig. 8.



Les droites CM′, BM, qui sont des rayons homologues des faisceaux [C], [B], se rencontrent en un point R de (K), BM′ et CM en un point S de (K). En appliquant au quadrilatère BSCR des propriétés connues (1139), on trouve que les points M, M′ sont alignés sur A et conjugués par rapport à (K); les faisceaux [A], [A′] sont donc identiques. La transformation précédente, étudiée d'abord par M. Hirst, est appelée *inversion quadrique;* elle est involutive. On peut la définir comme il suit : Étant donnés dans un même plan une conique (K) et un point A, deux points correspondants M, M′ sont toujours en ligne droite avec A et conjugués par rapport à (K). (*Fig*. 8.)

Elle comprend comme cas particulier l'inversion ordinaire (584) : il suffit de prendre pour (K) une circonférence de centre A. Les points principaux sont A et les points cycliques.

Voici un autre cas particulier de l'inversion quadrique, qui a été étudié par M. G. de Longchamps : Deux points correspondants M, M′ sont alignés sur un point fixe A, et la distance MM′ est vue d'un point fixe B sous un angle droit. Les faisceaux [A], [A′] du cas général sont réunis en A et coïncident; les faisceaux [B], [B′], réunis en B, ont leurs rayons homologues perpendiculaires et coïncident avec les faisceaux [C], [C′]; au point principal A correspond comme ligne principale la perpendiculaire élevée en B sur BA, et au point B la ligne principale BA; enfin la conique des points doubles est le système des droites isotropes issues de B. A la droite de l'infini correspond la circonférence de diamètre AB; une perpendiculaire à AB se transforme en une hyperbole ou en une ellipse de sommets A, B suivant qu'elle passe ou non entre A et B.

25. Il existe encore deux autres transformations du second degré, que l'on pourrait appeler respectivement *transformation quadratique corrélative* et *transformation quadratique réglée*. Nous allons d'abord les déduire de la transformation quadratique ponctuelle.

Soient donc π, π' deux systèmes plans entre lesquels il existe une correspondance quadratique ponctuelle, et soit π_1 un système plan corrélatif au système π'; si nous considérons comme homologues deux éléments de π et π_1 qui correspondent à un même élément de π', nous aurons établi entre π et π_1 une correspondance quadratique corrélative. Les sommets du triangle principal A′B′C′ se transforment en trois droites a_1, b_1, c_1 de π_1, et les côtés de A′B′C′ ont pour homologues les sommets A_1, B_1, C_1 du triangle formé par les lignes a_1, b_1, c_1. Nous pouvons maintenant dire que tout point M de π a pour homologue une droite m_1 de π_1, à l'exception des *points principaux* A, B, C, qui ont pour homologues une droite quelconque passant respectivement par A_1, B_1 ou C_1. Inversement, toute droite m_1 de π_1 a pour homologue un point M de π, à l'exception des droites a_1, b_1, c_1 qui ont pour homologue une quelconque des droites BC, CA, AB. Une droite (ponctuelle) de π se transforme en une conique $\mathfrak{U}_1$ de π_1, inscrite au triangle $A_1B_1C_1$; un faisceau de rayons de π_1 se transforme en une suite de points situés sur une conique passant par A′, B′, C′.

26. Transformons maintenant par réciprocité deux systèmes plans π, π' entre lesquels il existe une correspondance quadratique ponctuelle; soient σ, σ' les nouveaux systèmes ainsi obtenus. Si M, M′ sont deux points homologues de π, π', et m, m' les droites correspondantes des systèmes σ, σ', nous considérerons les droites m, m' comme des éléments homologues des derniers systèmes. La correspondance ainsi

établie sera une correspondance quadratique réglée. A toute droite m de σ correspondra une seule droite m' de σ'; il y a exception pour les côtés a, b, c, et a', b', c' de deux *triangles principaux*, qui ont pour homologues une droite quelconque menée par le sommet opposé de l'autre de ces triangles. A un point de σ considéré comme centre d'une radiée correspond une conique tangente aux lignes principales a_1, b_1, c_1.

27. Pour établir *directement* une correspondance quadratique corrélative entre deux systèmes plans π, π_1, nous considérons un point quelconque M de π comme l'intersection de deux rayons p, q des deux radiées données [A], [B], et une droite quelconque m_1 de π_1 comme la jonction de deux points P_1, Q_1 de deux ponctuelles données [a_1], [b_1]; de plus, nous supposons la radiée [A] projective à la ponctuelle [a_1], et la radiée [B] projective à la ponctuelle [b_1]. Alors si p et P_1, q et Q_1 sont des éléments homologues de ces formes, nous regarderons M et m_1 comme des éléments correspondants des systèmes π, π_1.

La correspondance ainsi établie sera une réciprocité si le rayon AB des deux faisceaux [A] et [B] a pour homologue, dans les deux ponctuelles [a_1], [b_1], le point d'intersection C_1 de leurs supports.

S'il n'en est pas ainsi, nous aurons une correspondance quadratique corrélative. Soient alors B_1 le point de a_1, et A_1 le point de b_1 qui correspondent respectivement au rayon AB de [A] et au rayon BA de [B]. Soient encore AC le rayon du faisceau [A] et BC celui du faisceau [B] qui correspondent au point C_1 considéré comme appartenant à la ponctuelle [a_1] ou à la ponctuelle [b_1]. Il est facile de voir que les points A, B, C ont pour droite homologue de π_1 une droite quelconque menée respectivement par A_1, B_1, C_1, et qu'un point quelconque de l'une des droites AB, BC, CA a pour droite homologue de π_1 respectivement A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

Nous laissons au lecteur le soin de continuer l'étude de cette correspondance, et de voir comment on peut établir directement une correspondance quadratique réglée.

INVERSION TRIANGULAIRE.

HYPERBOLES ÉQUILATÈRES CIRCONSCRITES A UN TRIANGLE.

28. Soient M, M' deux points inverses par rapport au triangle ABC (N., 9-11) Lorsque M décrit une ligne Δ, M' décrit une ligne Δ' qu'on appelle l'*inverse triangulaire* ou même simplement l'*inverse* de Δ.

L'inversion triangulaire est une transformation quadratique involutive, qui a pour points principaux les sommets du triangle fondamental, pour points doubles les centres des cercles inscrit et exinscrits.

L'inverse de la droite de l'infini est la circonférence ABC (N., 11).

Une droite qui coupe BC, CA, AB *aux points* D, E, F *a pour inverse une conique passant par* A, B, C *et touchant en ces points les isogonales des droites* AD, BE, CF.

Une droite qui rencontre la circonférence ABC en deux points réels T, T', se transforme en une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux isogonales des droites AT, AT'. L'hyperbole devient équilatère lorsque l'angle TAT' est droit, ou que la droite TT' passe par le centre O du cercle ABC; elle passe alors par l'orthocentre H, inverse du point O (1193). Les droites de Simson des points T, T' sont les asymptotes de la courbe; car elles sont perpendiculaires aux isogonales des droites AT, AT' et rencontrent BC, CA, AB en des couples de points isotomiques, de sorte qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et admettant ces droites pour asymptotes (1148).

Une tangente à la circonférence ABC a pour inverse une parabole dont les diamètres sont parallèles à l'isogonale de la droite joignant A au point de contact. Enfin une droite extérieure au cercle O se transforme en une ellipse.

Des droites équidistantes du centre O se transforment en des coniques semblables circonscrites au triangle ABC. Ce théorème se démontre immédiatement pour les paraboles et pour les hyperboles qui ont même angle des asymptotes; le principe de continuité permet de l'étendre aux ellipses semblables.

29. Parmi les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC, on a surtout étudié celle qui passe par le barycentre G ([1]); elle est l'inverse du diamètre OK qui passe par le point de Lemoine K. Cette courbe, que nous désignerons par la lettre Γ, est souvent appelé *hyperbole de Kiepert,* du nom du géomètre qui l'a rencontrée pour la première fois en traitant la question suivante (*Nouvelles Annales,* 1869, p. 41) :

Sur les côtés d'un triangle A, B, C *comme bases, on construit trois triangles isoscèles semblables* P_aBC, P_bCA, P_cAB, *dirigés à la fois vers l'intérieur ou vers l'extérieur du triangle* ABC. *Les droites* AP_a, BP_b, CP_c *concourent en un même point; lorsque l'angle* P_aBC *varie, ce point*

([1]) LEMOINE, *Congrès de Lyon* (*Association française des Sciences*), 1873. — BROCARD, *J. de Math. spéc.*, 1884 et 1885. — Mc CAY, *Mathesis*, 1887. — KIEHL, *Programme de Bromberg*, 1888. — NEUBERG et GOB, *Congrès de Paris*, 1889. — E. CESARO, *Nouv. Ann.*, 1888. — NEUBERG, *Mathesis*, 1892.

décrit une conique ayant pour équation en coordonnées normales

$$\sin(B - C).yz + \sin(C - A).zx + \sin(A - B).xy = 0.$$

Pour démontrer l'identité de Γ avec ce lieu, appelons φ l'angle CBP_a, considéré comme positif lorsqu'il est mesuré de BC vers BA, et désignons par A', B', C' les milieux de BC, CB, AB. Comme les points P_b, P_c déterminent deux ponctuelles semblables, les droites BP_b, CP_c se correspondent dans deux radiées projectives, et leur point de concours P décrit une conique. Lorsque φ prend les valeurs A, B, C, o°, 90°, P coïncide avec un sommet du triangle fondamental, le barycentre G ou l'orthocentre H, cinq points qui appartiennent à Γ. Il en résulte que P parcourt l'hyperbole de Kiepert, et que les droites AP_a, BP_b, CP_c concourent en un même point.

Les coordonnées normales de P sont $\operatorname{coséc}(A - \varphi)$, $\operatorname{coséc}(B - \varphi)$, $\operatorname{coséc}(C - \varphi)$.

30. Soient α, β, γ les projections de K sur les côtés du triangle ABC, et soient q', q'', q''' les points où ces côtés sont rencontrés par les droites KP_a, KP_b, KP_c. On a

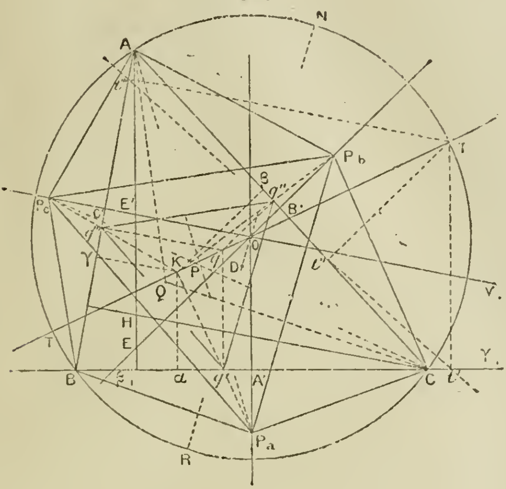
$$K\alpha : K\beta : K\gamma = BC : CA : AP = A'P_a : B'P_b : C'P_c;$$

d'où l'on déduit que les triangles $q'q''q'''$, $P_aP_bP_c$ sont homothétiques par rapport à K et que les perpendiculaires élevées en q', q'', q''' sur BC, CA, AB concourent en un point q de la droite OK. Or l'inverse de q appartient à Γ et s'obtient en abaissant de A, B, C des perpendiculaires sur les côtés du triangle podaire de q; on a donc le théorème suivant : *Les perpendiculaires abaissées de* A, B, C *sur les côtés correspondants du triangle* $P_aP_bP_c$ *concourent en un point* Q *de l'hyperbole* Γ.

Nous allons démontrer ce théorème par un autre procédé, qui établit une relation remarquable entre les points P et Q. Considérons deux triples de triangles isoscèles semblables (P_aBC, P_bCA, P_cAB) et (Q_aBC, Q_bCA, Q_cAB), tels que les angles CBP_a, CBQ_a soient complémentaires et situés du même côté de BC. Les lignes brisées $P_cC'B'P_b$, $AC'A'Q_a$ ont les composantes P_cC' et AC', $C'B'$ et $A'Q_a$, $B'P_b$ et $C'A'$ perpendiculaires et proportionnelles; par conséquent les résultantes P_cP_b, AQ_a sont perpendiculaires et dans le même rapport $P_cC' : AC' = \operatorname{tang}\varphi$. On en conclut que les droites AQ_a, BQ_b, CQ_c sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle $P_aP_bP_c$.

Les couples de points P_aQ_a, P_bQ_b, P_cQ_c marquent trois involutions dont les points doubles sont les centres des carrés construits extérieurement et intérieurement sur BC, CA, AB. Il en résulte que les couples de rayons (AP_a, AQ_a), (BP_b, BQ_b), (CP_c, CQ_c) engendrent trois faisceaux involutifs; donc *la corde* PQ *de* Γ *passe par un point fixe.* Ce

Fig. 9.



point est le centre O du cercle ABC; car, lorsqu'on prend O successivement pour P_a, P_b, P_c, P passe respectivement sur les rayons OA, OB, OC, et Q se confond avec A, B, C.

31. Citons quelques cas particuliers remarquables du dernier théorème :

a. Si P_a, P_b, P_c *sont les sommets des carrés construits soit extérieurement, soit intérieurement sur* BC, CA, AB, *les droites* AP_a, BP_b, CP_c *sont égales et perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle* $P_aP_bP_c$; *leur point de concours est situé sur* Γ *et la tangente en ce point passe par* O.

b. Soient P_a, P_b, P_c *les sommets des triangles équilatéraux construits soit extérieurement, soit intérieurement sur* BC, CA, AB, *et soient* Q_a, Q_b, Q_c, *les centres de ces triangles. Les droites* AP_a, BP_b, CP_c *sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle* $Q_aQ_bQ_c$ *et concourent respectivement au premier ou au second centre isogone* Z, Z′ *de* ABC; *les droites* AQ_a, BQ_b, CQ_c *sont perpendiculaires aux côtés correspondants du triangle* $P_aP_bP_c$ *et concourent respectivement en deux points* U, U′. *Les points* Z, Z′, U, U′ *appartiennent à l'hyperbole* Γ *et les droites* ZU, Z′U′ *passent par* O.

La droite ZZ′ est un diamètre de Γ. En effet, les faisceaux Z(ABC), Z′(ABC) étant inversement égaux, leurs rayons homologues se coupent sur une hyperbole équilatère ayant pour diamètre ZZ′.

c. Les projections A_1, B_1, C_1 de K sur les médiatrices OA′, OB′, OC sont les sommets de trois triangles isoscèles dont les angles à la base sont égaux à l'angle V de Brocard; les droites AA_1, BB_1, CC_1 concourent donc en un point D de Γ. Les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur les côtés opposés du triangle $A_1B_1C_1$ concourent également en un point N de Γ; la droite ND passe par U. Le point N appartenant aussi à la circonférence ABC est l'inverse du point à l'infini de la droite OK. (N., 37, 40, 43.)

Le centre de Γ *est au milieu de la droite* HN. Car H est le centre de similitude directe de la circonférence des neuf points du triangle ABC et de la circonférence circonscrite, et la première de ces lignes contient le centre de Γ (1193); par suite, le point diamétralement opposé à H sur Γ est situé sur la circonférence ABC et ne peut être que N.

d. Soient t', t'', t''' les projections sur BC, CA, AB d'une extrémité T de diamètre OK du cercle ABC; elles sont sur une asymptote de Γ. Les droites Kt', Kt'', Kt''' rencontrent les médiatrices OA′, OB′, OC′ en trois points A_3, B_3, C_3, qui sont en ligne droite et qui sont les sommets de trois triangles isoscèles semblables A_3BC, B_3CA, C_3AB, ayant pour angle à la base un *angle de Steiner* (N., 39); la seconde extrémité T′ du diamètre OK conduit à un triple analogue de points $A_4B_4C_4$. Ces droites $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$ sont rectangulaires et passent par le barycentre G; nous les avons appelées les *axes de Steiner*. On voit maintenant qu'elles sont parallèles aux asymptotes de Γ.

32. Les côtés du triangle $P_aP_bP_c$, qui joignent les éléments homologues de ponctuelles semblables, enveloppent trois paraboles γ_a, γ_b, γ_c, qui ont d'abord été étudiées par M. Artzt. (*Programme de Recklinghausen,* 1884.)

Trois positions particulières de ces droites étant B′C′, C′A′, A′B′, les paraboles sont inscrites respectivement aux triangles OB′C, OC′A′, OA′B′. Les directrices passent respectivement par les orthocentres A′, B′, C′ des mêmes triangles; elles passent aussi par le barycentre G où se croisent les axes de Steiner, qui sont deux tangentes rectangulaires communes aux trois paraboles. Par suite, *les directrices de* γ_a, γ_b, γ_c *sont les médianes* AA′, BB′, CC′.

Les droites AP_b, AP_c étant isogonales par rapport à l'angle BAC peuvent coïncider avec la bissectrice intérieure ou extérieure de cet angle; ces bissectrices sont donc tangentes à γ_a. Lorsque AP_b ou AP_c coïncide avec AO, l'autre de ces droites devient la hauteur AH; on en conclut que AH rencontre les médiatrices OB′, OC′ en leurs points de contact E, E′ avec γ_a.

Le foyer de γ_a est sur la circonférence C′OB′A circonscrite au triangle de trois tangentes; il se trouve aussi sur la symétrique de la directrice par rapport à la tangente AI. C'est donc la projection de O sur la symédiane AK. Ainsi, *les foyers des paraboles* γ_a, γ_b, γ_c *sont les sommets du second triangle de Brocard* (N., 36).

33. *L'axe d'homologie des triangles* $P_aP_bP_c$, A′B′C′ *enveloppe une parabole inscrite au triangle* A′B′C′. Car la tangente variable P_bP_c marque sur les tangentes B′C′, O′B′, OC′ de γ_a des ponctuelles semblables, etc.

Deux triangles $P_aP_bP_c$, $Q_aQ_bQ_c$ *qui correspondent à des valeurs complémentaires de l'angle* φ (N′., 30) *ont, avec* ABC, *un même axe d'homologie*. En effet, si β_1, γ_1 désignent les points de rencontre de BC avec OB′, OC′, un calcul de Trigonométrie facile montre que les rapports anharmoniques $(\beta_1 OP_bQ_b)$, $(\gamma_1 OP_cQ_c)$ sont égaux; donc à cause de l'élément uni O les droites $\beta_1\gamma_1$, P_bP_c, Q_bQ_c concourent en un même point.

L'axe d'homologie des triangles ABC, $P_aP_bP_c$ *enveloppe une parabole inscrite au triangle* ABC *et ayant pour directrice la droite* HO. Car, soient U, U′, U″ les points de rencontre des côtés homologues; les côtés du triangle $Q_aQ_bQ_c$ passent par les mêmes points. Si l'on donne le point U de BC, les deux tangentes menées de ce point à la parabole γ_a déterminent les points P_b, P_c, Q_b, Q_c; ceux-ci font connaître d'abord les points P_a, Q_a, et ensuite les points U′, U″. Il existe donc entre les points U, U′ une correspondance (1,1), et comme l'axe d'homologie des triangles ABC, A′B′C′ est à l'infini, les points U, U′ se correspondent dans deux ponctuelles semblables, et la droite UU′ enveloppe une parabole. Deux positions particulières de cette droite étant les axes de Steiner, qui sont rectangulaires, la directrice passe par G.

TRANSFORMATION PAR POINTS RÉCIPROQUES. ELLIPSES DE STEINER.

34. La transformation par points réciproques (N., 8) est quadratique et involutive; elle a pour points principaux les sommets du triangle fondamental ABC, pour points doubles le barycentre G et ses associés (N., 7).

Une droite quelconque qui coupe BC, CA, AB *aux points* D, E, F *se transforme en une conique tangente en* A, B, C *aux droites qui joignent ces points aux isotomiques des points* D, E, F.

En particulier, la droite de l'infini se transforme en une ellipse qui touche en A, B, C les côtés du triangle anticomplémentaire. Cette courbe, qui a pour centre le barycentre G, est appelée *ellipse de Steiner*.

On désigne quelquefois sous le nom de *seconde ellipse de Steiner* l'ellipse qui touche les côtés du triangle de référence en leurs milieux. Nous représenterons ces deux ellipses par les lettres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$.

La propriété de la parabole démontrée au n° 1192 conduit immédiatement au théorème suivant : *Si une parabole variable touche les côtés d'un triangle* ABC *aux points* α, β, γ, *les cordes* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *tournent autour des associés du barycentre, et les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *concourent sur la première ellipse de Steiner.*

35. Le quatrième point de rencontre de la circonférence ABC avec l'ellipse $\mathcal{E}$ est appelé *point de Steiner* (¹); c'est le point déjà désigné par la lettre R.

Les droites AR, BC ont des directions antiparallèles par rapport à un axe de $\mathcal{E}$. Or, si A_1, B_1, C_1 sont les symétriques de A, B, C par rapport à G, les droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 seront encore des cordes de $\mathcal{E}$ qui sont respectivement antiparallèles aux cordes AR, BR, CR par rapport à un axe de $\mathcal{E}$. On en conclut que les circonférences ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 se coupent en R.

L'ellipse $\mathcal{E}$, le cercle ABC et les cercles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 ont pour figures complémentaires l'ellipse $\mathcal{E}'$ et les cercles des neuf points des triangles ABC, GBC, GCA, GAB; ces dernières lignes se coupent donc en un même point R', qui est le complémentaire de R. Or, le centre de l'hyperbole de Kiepert, qui est équilatère et passe par A, B, C, G, doit se trouver sur les cercles des neuf points déterminés par trois de ces quatre points; *le centre de* Γ *est donc le complémentaire de* R.

Les axes de $\mathcal{E}$ sont parallèles aux bissectrices des angles des droites AR, BC; ceux de Γ sont antiparallèles aux bissectrices des angles des droites AN, BC. L'angle RAN étant droit, *les axes de $\mathcal{E}$ sont parallèles aux asymptotes de* Γ; ce sont donc les droites GX, GY, appelées ci-dessus *axes de Steiner* du triangle ABC.

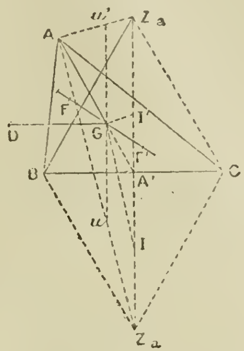
Les cercles osculateurs aux points A, B, C *de $\mathcal{E}$ passent par* R; car la tangente en A, par exemple, et la corde AR sont antiparallèles à un axe de $\mathcal{E}$ (1175).

36. Pour trouver les axes $2\mathcal{A}$, $2\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$, nous cherchons d'abord la

(¹) NEUBERG, *Sur le point de Steiner* (*Congrès de Grenoble*, 1885, et *J. de Math. spéc.*, 1886).

longueur du demi-diamètre GD conjugué à GA. Or, il existe entre BC et la parallèle GD le même rapport qu'entre le côté et le rayon d'un triangle équilatéral; car, si l'on projette $\mathcal{C}$ suivant une circonférence, le triangle ABC se projette suivant un triangle équilatéral, puisque la

Fig. 10.



projection de G sera à la fois le barycentre de la projection du triangle ABC et le centre du cercle circonscrit. Cherchons donc les centres I, I' des triangles équilatéraux BCZ_a, BCZ'_a construits sur BC; nous aurons $GD = Z_a I = Z'_a I'$. Si nous menons par G une perpendiculaire à BC qui rencontre AZ_a, AZ'_a en u, u', nous aurons aussi $GD = Gu = Gu'$. Alors la solution de Chasles devient immédiatement applicable : les axes de $\mathcal{C}$ sont parallèles aux bissectrices de l'angle uAu' (ou de l'angle IGI'), et

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = Au = \frac{2}{3}AZ_a, \qquad \mathcal{A} - \mathcal{B} = Au' = \frac{2}{3}AZ'_a.$$

Si l'on tient compte des calculs de N., 34 et 39, on peut écrire

$$\mathcal{A} = \frac{2}{3}\sqrt{S\cot V_1}, \qquad \mathcal{B} = \frac{2}{3}\sqrt{S\cot V_2}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = \frac{4}{9}S\sqrt{3}.$$

Soient $\mathcal{A}' = \frac{1}{2}\mathcal{A}$, $\mathcal{B}' = \frac{1}{2}\mathcal{B}$ les demi-axes de $\mathcal{C}$; on a

$$\mathcal{A}' + \mathcal{B}' = \frac{1}{3}AZ_a = GI, \qquad \mathcal{A}' - \mathcal{B}' = GI',$$

et, par suite,

$$\mathcal{A}'^2 - \mathcal{B}'^2 = GI.GI'.$$

On obtient donc les foyers F, F′ de $\mathcal{C}'$ en portant sur la bissectrice de l'angle IGI′ (*fig.* 10) les longueurs GF et GF′ égales à la moyenne géométrique entre GI et GI′ (Laisant, *Congrès de Toulouse,* 1887).

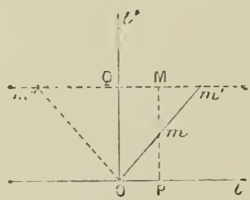
FIGURES ORTHOGONALEMENT AFFINES ([1]).

37. Soient π, π' deux plans qui se coupent suivant la droite t et font entre eux l'angle θ. On donne, dans le plan π, les points A′, B′, ... qui se projettent orthogonalement en A′, B′, ... sur le plan π'; pour abréger, on peut appeler le système AB... une *contreprojection* du système A′B′.... Si l'on rabat π sur π' autour de t, deux points homologues se placent sur une même perpendiculaire à t, et leurs distances à t sont dans le rapport constant $1 : \cos\theta$. Les deux systèmes AB..., A′B′... sont devenus *orthogonalement affins; t* est l'*axe d'affinité,* et $\cos\theta$ est le *module d'affinité* (732).

Réciproquement, si d'un premier système de points AB... on déduit un second système A′B′... en multipliant par une constante μ (positive ou négative) les ordonnées abaissées des points A, B, ... sur un axe fixe t, le second système est égal à une projection ou à une contreprojection du premier sur un plan mené par t et faisant avec le plan AB... un angle θ dont le cosinus est égal à la valeur (absolue) de μ ou de $\frac{1}{\mu}$, suivant que $\mu^2 < 1$ ou > 1.

Si l'on transforme une figure plane par affinité orthogonale en pre-

Fig. 11.



nant pour axes d'affinité deux droites rectangulaires t, t′ et pour modules deux nombres réciproques μ, $\frac{1}{\mu}$, *on obtient deux figures semblables.*

([1]) Neuberg, *Sur les projections et contreprojections, etc.* (*Mém. de l'Ac. de Belgique,* 1890).

Soient m, m' les deux points qui correspondent à un même point M (*fig.* 11), de sorte que

$$\frac{mP}{MP} = \mu, \qquad \frac{m'Q}{MQ} = \frac{1}{\mu}.$$

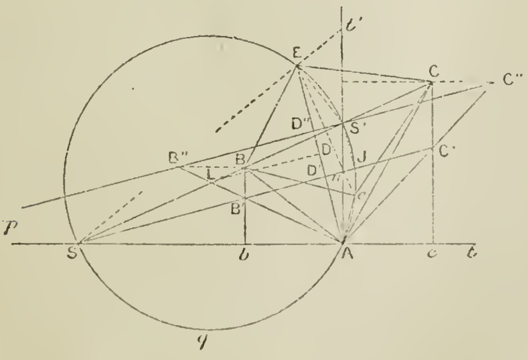
On voit facilement que les triangles OmP, $Om'Q$ sont semblables; donc les points O, m, m' sont en ligne droite et $Om : Om' = \mu$.

Si les modules étaient μ et $-\frac{1}{\mu}$, les points m, m'' qui correspondent à un point M seraient des points homologues de deux figures inversement semblables.

38. Problèmes. — *Transformer par affinité orthogonale le triangle donné* ABC *en un triangle semblable à un triangle donné* $A_1B_1C_1$.

On peut, sans nuire à la généralité, faire passer l'axe d'affinité t par le sommet A; soit alors $AB'C'$ le triangle cherché. Les droites homologues BC, $B'C'$ se coupent en un point S de t, et les droites BB', CC' sont perpendiculaires à t. Si donc on élève en A une perpendiculaire t' à t, les côtés BC, $B'C'$ sont divisés en parties proportionnelles par le point S et par la droite t' aux points S', n. Construisons le triangle EBC semblable à $AB'C'$; les systèmes $SBS'CE$, $SBnC'A$ étant semblables,

Fig. 12.



l'angle ESB sera égal à ASB', et l'angle SES' égal à SAn ou à un angle droit. La circonférence de diamètre SS' passera donc par A et par E. D'où la solution suivante :

Construisez le triangle EBC *semblable à* $A_1B_1C_1$, *et élevez au milieu* D *de la droite* AE *une perpendiculaire qui coupera* BC *en* L; *du* *centre* L *et avec le rayon* LA, *décrivez une circonférence, qui coupera* BC *en deux points* S, S′ : *on peut prendre pour axe d'affinité chacune des droites* AS, AS′. *Construisez encore l'angle* $ASn = ESS'$ *et l'angle* $AS'p = ES'S$, *et soient* B′, C′ *les points de rencontre de* An *avec les perpendiculaires abaissées de* B, C *sur* SA, *et de même* B″, C″ *ceux de* Ap *avec les perpendiculaires abaissées de* B, C *sur* S′A : *les triangles* AB′C′, AB″C″ *résolvent le problème.*

Remarques. — I. Les deux axes d'affinité sont rectangulaires. Les droites Sn, $S'p$ sont parallèles; car les angles nSA, $pS'A$ sont égaux aux angles complémentaires ESS′, ES′S. Enfin les deux modules ont des valeurs réciproques $nA : S'A$, $pA : SA$.

II. Si l'on construit un second triangle eBC semblable à $A_1B_1C_1$, les axes t, t' sont les bissectrices extérieure et intérieure de l'angle EAe.

III. Les arcs ES′, AJ étant égaux, la droite AE est parallèle à S′J et, par suite, perpendiculaire à B′C′ et B″C″. Si les modules étaient négatifs, B′C′ et B″C″ seraient perpendiculaires à la droite Ae.

IV. D étant à la fois le milieu de AE et D′D″ (à cause de SL = LS′), la droite AE est égale à la somme des hauteurs AD′, AD″ des triangles AB′C′, AB″C″. La droite Ae est égale à la différence de ces hauteurs, car $Ae = S'J = D'D''$.

39. Ces remarques conduisent à un théorème fort élégant :

Pour transformer par affinité orthogonale un triangle donné ABC *en un triangle semblable à un triangle donné* $A_1B_1C_1$, *on construit, vers l'extérieur de* ABC, *les triangles* EBC, AFC, ABG, *et, vers l'intérieur, les triangles* eBC, AfC, ABg *semblables à* $A_1B_1C_1$: *l'axe d'affinité est parallèle à la bissectrice extérieure ou intérieure de chacun des angles* EAe, FBf, GCg. *Les côtés des deux triangles cherchés sont perpendiculaires soit aux droites* AE, BE, CG, *soit aux droites* Ae, Bf, Cg; *les hauteurs de l'un de ces triangles sont égales aux moitiés des sommes* $AE + Ae$, $BF + Bf$, $CG + Cg$, *et celles de l'autre aux moitiés des différences* $AE - Ae$, $BF - Bf$, $CG - Cg$.

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de là la solution de Lionnet (*Nouvelles Annales*, p. 528; 1869) :

Soient E′, F′, G′, e', f', g' *les centres des cercles circonscrits aux triangles* EBC, ... *Les côtés des triangles cherchés sont parallèles soit à ceux du triangle* E′F′G′, *soit à ceux du triangle* $e'f'g'$; *ils ont pour longueurs, dans l'un des triangles cherchés, les sommes des côtés homologues des triangles* E′F′G′, $e'f'g'$, *et dans l'autre les différences des mêmes côtés.*

40. Soient a, b, c, S, a', b', c', S′ les côtés et les aires de deux

triangles ABC, A′B′C′ dont le second est une projection orthogonale du premier. On trouve facilement

$$a^2 = a'^2 + (BB' - CC')^2,$$
$$b^2 = b'^2 + (CC' - AA')^2,$$
$$c^2 = c'^2 + (AA' - BB')^2;$$

d'où l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{a^2 - a'^2} \pm \sqrt{b^2 - b'^2} \pm \sqrt{c^2 - c'^2} = 0.$$

Or, l'égalité

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} \pm \sqrt{z} = 0,$$

rendue rationnelle, devient

$$\Sigma x^2 - 2\Sigma xy = 0;$$

en appliquant ce résultat à la relation (1), on obtient

$$(2) \quad (\Sigma a^4 - 2\Sigma a^2 b^2) + (\Sigma a'^4 - 2\Sigma a'^2 b'^2) + 2\Sigma a^2(b'^2 + c'^2 - a'^2) = 0.$$

h étant la hauteur de ABC issue de A, on a

$$16 S^2 = 2\Sigma a^2 b^2 - \Sigma a^4, \qquad 16 S'^2 = 2\Sigma a'^2 b'^2 - \Sigma a'^4,$$
$$b'^2 + c'^2 - a'^2 = 2 b' c' \cos A' = 4 S' \cot A',$$
$$a = h(\cot B + \cot C) = \frac{2S}{a}(\cot B + \cot C).$$

Au moyen de ces formules on ramène l'égalité (2) à

$$S^2 + S'^2 - 2SS'\Sigma(\cot B \cot C' + \cot C \cot B') = 0;$$

d'où, en divisant par SS′ et désignant par θ l'angle des plans ABC, A′B′C′,

$$(3) \qquad \cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = 2\Sigma(\cot B \cot C' + \cot C \cot B').$$

41. Supposons le triangle A′B′C′ équilatéral et appelons V l'angle de Brocard du triangle ABC; la formule (3) devient

$$\cos\theta + \frac{1}{\cos\theta} = 2 \cot V \cot 60^\circ.$$

On en conclut que *les triangles équilatéraux situés dans un même plan se projettent et se contreprojettent sur un second plan suivant des triangles de même angle de Brocard.*

Les conséquences de cette proposition sont nombreuses. Par exemple, si l'on prend sur les côtés AB, BC, CA d'un triangle équilatéral trois longueurs égales $A\gamma$, $B\alpha$, $C\beta$, le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral, de même que celui dont les côtés sont dirigés suivant les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; une projection orthogonale de cette figure donne le théorème suivant :

Si les points α, β, γ *divisent les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle quelconque dans un même rapport, le triangle* $\alpha\beta\gamma$ *et celui dont les côtés sont dirigés suivant les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *ont le même angle de Brocard que le triangle primitif* ABC.

Si l'on fait la projection de la figure formée par les triangles équilatéraux inscrits à une même circonférence, on trouve cette proposition :

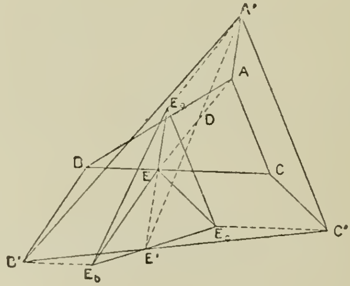
A une ellipse donnée, on peut inscrire une infinité de triangles ayant pour barycentre le centre de l'ellipse; tous ces triangles sont circonscrits à une même seconde ellipse, ont même surface et même somme des carrés des côtés.

FIGURES AFFINES SUPERPOSÉES.

42. Lemme. — *Étant donnés deux triangles* ABC, A'B'C', *il existe toujours trois masses* α, β, γ *qui ont le même barycentre* D, *quand on les applique soit aux points* A, B, C, *soit aux points* A', B', C'.

Si ces masses existent, les droites AD, A'D' (*fig.* 13) rencontrent

Fig. 13.



respectivement BC, B'C' en des points E, E' tels que

$$\frac{BE}{EC} = \frac{B'E'}{E'C'} = \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{ED}{DA} = \frac{E'D}{DA'} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}.$$

Les dernières proportions montrent que les lignes EE', A'A sont parallèles et dans le rapport $\alpha : \beta + \gamma$. Construisons les parallélogrammes $A'AEE_a$, $EBB'E_b$, $ECC'E_c$; les points E′, E, E_a sont en ligne droite, et de la similitude des triangles $E'B'E_b$, $E'C'E_c$ (200, 2°), on conclut que les points E_b, E′, E_c sont en ligne droite. On a donc les égalités

$$\frac{E'E}{EE_a} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \qquad \frac{E_bE'}{E'E_a} = \frac{\gamma}{\beta};$$

il en résulte que E est le centre de gravité des masses α, β, γ appliquées aux points E_a, E_b, E_c.

Ainsi, si l'on mène par un même point E (qui peut être quelconque) trois droites EE_a, EE_b, EE_c égales et parallèles aux droites AA′, BB′, CC′, les masses cherchées sont proportionnelles aux aires des triangles EE_bE_c, EE_cE_a, EE_aE_b.

Ce résultat, qui comprend le lemme de la Note III, § 58, admet de nombreuses conséquences. Par exemple, étant données trois ponctuelles semblables définies par les termes homologues ABC, A′B′C′, les masses α, β, γ, appliquées à trois points correspondants quelconques P_a, P_b, P_c ont pour barycentre le point D. Les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ enveloppent trois paraboles qui ont deux tangentes communes (réelles ou imaginaires) passant par le point D.

43. Deux systèmes plans sont des systèmes collinéaires dans lesquels les droites de l'infini se correspondent. A tout point à l'infini de l'un des systèmes correspond un point à l'infini dans l'autre; par suite, l'affinité transforme une ponctuelle en une ponctuelle semblable, et un faisceau de parallèles en un faisceau de parallèles.

Considérons deux figures affines situées dans un même plan et définies par deux triangles homologues ABC, A′B′C′; nous allons en déterminer les éléments doubles. La droite de l'infini est évidemment une droite double. Elle est le support de deux ponctuelles projectives dont les points doubles X, Y sont des points doubles des deux figures affines. Projetons ces deux ponctuelles à partir d'un point O situé à distance finie; nous aurons deux faisceaux projectifs dont trois couples de rayons homologues sont parallèles aux droites (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′). Il est facile de construire les rayons doubles OX, OY des deux faisceaux (1103, 1124).

Il existe un troisième point double D, qui a les mêmes coordonnées barycentriques dans les deux triangles ABC, A′B′C′; on peut donc le déduire du lemme (42).

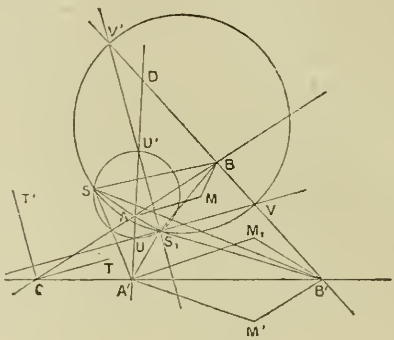
Nous indiquons, sans démonstration, la construction suivante du point D : Si A_1 est le point d'intersection des droites BC, B′C′ et A_2

celui d'une parallèle à BC par A avec une parallèle à B′C′ par A′, la droite $A_1 A_2$ et les droites analogues $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ passent par D.

SYSTÈME DE DEUX FIGURES SEMBLABLES SUPERPOSÉES.

44. Considérons deux figures directement semblables, situées dans un même plan et définies par deux segments homologues AB, A′B′ (*fig.* 14). Deux points correspondants quelconques M, M′ forment avec ces segments des triangles directement semblables.

Fig. 14.



Appelons C, D les points d'intersection des droites (AB, A′B′), (AA′, BB′). Les angles MAB, M′A′B′ étant égaux, les droites homologues AM, A′M′ se coupent sous un angle constant, égal à l'angle ACA′; par conséquent, elles se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle ACA′. Semblablement, les droites homologues BM, B′M′ se coupent sur la circonférence BCB′. Les deux circonférences ACA′, BCB′, qui passent par le point C, se rencontrent, en outre, en un point S à distance finie et aux deux points cycliques ω, ω'. Les points S, ω, ω' sont les points doubles des deux systèmes semblables.

On appelle S le *centre de similitude* ou le *pôle double* (368). Comme la similitude des triangles SAB, SA′B′ entraîne celle des triangles SAA′, SBB′, S est aussi le centre de similitude de deux figures directement semblables définies par les segments homologues AA′, BB′; on en conclut que les circonférences circonscrites aux triangles ABD, A′B′D′ passent également par S (*voir* exercice 93).

La génération la plus simple de deux systèmes directement semblables est la suivante : Les rayons vecteurs SM, SM′, qui aboutissent à deux points homologues, font entre eux un angle constant et ont un rapport constant.

45. Soient M, M_1 deux points correspondants des deux figures inversement semblables construites sur les segments homologues AB, $A'B'$ (*fig.* 14).

Les triangles MAB, $M_1A'B'$ étant symétriquement semblables, les droites homologues AM, $A'M_1$ tournent autour de A, A' avec des vitesses égales et de sens contraires; leur point d'intersection décrit donc une hyperbole passant par les points A, A', C et ayant des asymptotes parallèles aux bissectrices CT, CT' de l'angle ACA'. De même les droites homologues BM, $B'M_1$ se coupent sur une hyperbole passant par B, B', C et ayant des asymptotes parallèles à CT, CT'. Ces deux hyperboles ont, outre le point C, trois autres points communs, à savoir les points à l'infini sur CT, CT' et un point S_1 à distance finie; ces points sont les points doubles des deux figures semblables. S_1 est appelé *centre de similitude* ou *pôle double;* les parallèles S_1V, S_1V' à CT, CT' sont les droites doubles ou les *axes*. Les points cycliques ω, ω' s'échangent mutuellement dans la transformation.

La génération la plus simple de deux systèmes inversement semblables est la suivante : Les rayons vecteurs S_1M, S_1M_1 ont des directions symétriques par rapport à S_1V et leur rapport est constant.

46. Voici une autre méthode pour déterminer les points S, S_1.

On doit avoir

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{AB}{A'B'}, \qquad \frac{S_1A}{S_1A'} = \frac{S_1B}{S_1B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Par suite, si l'on divise AA' aux points A, A', et BB' aux points V, V', additivement et soustractivement dans le rapport $AB : A'B'$, les circonférences décrites sur UU' ou VV' comme diamètre (187) se coupent aux points S, S_1. Mais les droites UV, $U'V'$ sont parallèles à CT, CT'; car si l'on construit les parallélogrammes $UABN$, $UA'B'N'$ (non marqués sur la figure), les triangles VBN, $VB'N'$ seront semblables (200, 2°), d'où l'on conclut que les points N, V, N' sont en ligne droite et que

$$\frac{NV}{VN'} = \frac{BV}{VB'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{UN}{UN'},$$

de sorte que UV est la bissectrice de l'angle NUN', etc. Les droites UV, $U'V'$ sont donc rectangulaires, et leur point d'intersection coïncide avec S_1.

SYSTÈME DE TROIS FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES [1].

47. Soient φ_a, φ_b, φ_c trois figures directement semblables, situées dans un même plan. Menons par un même point E trois droites EE_a, EE_b, EE_c équipollentes à trois segments homologues, et traçons par E_a, E_b, E_c des perpendiculaires à ces droites; ces perpendiculaires forment un triangle $F_aF_bF_c$. Les triangles $E_aE_bE_c$, $F_aF_bF_c$, qui ont des formes invariables, sont appelés respectivement *premier* et *second triangle modulaire* de φ_a, φ_b, φ_c. Nous désignerons par a, b, c les longueurs EE_a, EE_b, EE_c ou mieux les coordonnées normales de E dans le triangle $F_aF_bF_c$; par α, β, γ les coordonnées barycentriques de E dans le triangle $E_aE_bE_c$.

Si l'on applique le lemme (Note III, 42) à deux triples de points homologues ABC, A'B'C', on trouve le théorème suivant: *Le barycentre de trois points homologues quelconques de φ_a, φ_b, φ_c, chargés des masses α, β, γ, est un point fixe* D. Ce point a reçu le nom de *point directeur.*

48. Nous désignons par S_a le point double des figures φ_b, φ_c, et par S'_a le point correspondant de φ_a. Les lettres S_b, S'_b, S_c, S'_c ayant des significations analogues, le triangle $S_aS_bS_c$ et le cercle circonscrit sont appelés respectivement *triangle de similitude* et *cercle de similitude;* S'_a, S'_b, S'_c sont les *points adjoints* (*fig.* 15).

Les droites S_a, S'_a; S_b, S'_b, S_c, S'_c *concourent au point directeur* D *et sont divisées en ce point dans le rapport* $\beta+\gamma:\alpha$. Car D est le barycentre des masses α, β, γ appliquées soit en S'_a, S_a, S_a, soit en S_b, S'_b, S_b, soit en S_c, S_c, S'_c, qui sont des triples de points homologues.

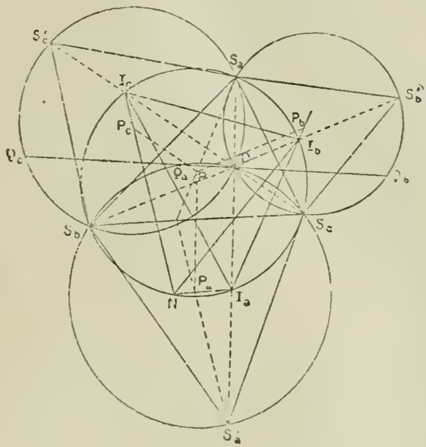
Les triangles $S'_aS_bS_c$, $S_aS'_bS_c$, $S_aS_bS'_c$ *sont directement semblables au premier triangle modulaire* $E_aE_bE_c$. En effet, ils sont semblables parce que les points S'_a, S_b, S_c de φ_a ont pour homologues les points S_a, S'_b, S_c de φ_b et les points S_a, S_b, S'_c de φ_c. Ensuite, $S_cS'_a$ et S_cS_a étant des segments correspondants de φ_a et φ_b, le triangle $S_cS'_aS_a$ est semblable à EE_aE_b, et l'angle $S_cS'_aS_a$ est égal à EE_aE_b; de même l'angle $S_bS'_aS_a = EE_aE_c$, d'où l'on conclut l'égalité des angles $S_bS'_aS_c$, $E_bE_aE_c$. On démontrerait que les angles $S_cS'_bS_a$, $S_aS'_cS_b$ sont égaux à $E_cE_bE_a$, $E_bE_cE_a$.

---

[1] Groüard, *Sur les figures planes semblables* (*L'Institut*, 1870). — G. Tarry et Neuberg, *Propriétés générales de trois figures semblables* (*Mathesis*, 1882). — Neuberg, *Sur les projections et contreprojections*, etc. (*Mémoires de l'Académie de Belgique*, 1889).

Les triangles $S'_a S_b S_c$, $S_a S'_b S_c$, $S_a S_b S'_c$ sont appelés les *triangles annexes*. On démontre facilement que *les circonférences circonscrites passent par* D (Note III, 15).

Fig. 15.



49. *Le triangle formé par trois droites homologues quelconques est perspectif avec le triangle de similitude; le lieu du centre de perspective est la circonférence de similitude.*

Désignons par n_a, n_b, n_c trois droites homologues de φ_a, φ_b, φ_c; elles forment un triangle $N_a N_b N_c$ (non marqué sur la figure), qui est directement semblable au second triangle modulaire $F_a F_b F_c$. Si l'on représente par (X, z) la distance du point X à la droite x, on a

$$\frac{(S_a, n_b)}{(S_a, n_c)} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{(S_b, n_c)}{(S_b, n_a)} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{(S_c, n_a)}{(S_c, n_b)} = \frac{a}{b}.$$

De ces égalités on conclut que les droites $N_a S_a$, $N_b S_b$, $N_c S_c$ concourent en un point N dont les distances à n_a, n_b, n_c sont proportionnelles à a, b, c. Les quadrangles $NN_a N_b N_c$, $FF_a F_b F_c$ sont donc semblables; par suite les faisceaux $N(S_a S_b S_c)$, $E(F_a F_b F_c)$ sont égaux. Il résulte de là que le point N a pour lieu une circonférence passant par S_a, S_b, S_c.

50. *Il existe une infinité de triples de droites homologues concourantes; le lieu du point de concours est la circonférence de similitude,*

et ces droites pivotent autour de trois points fixes de cette circonférence.

En effet, tous les triples de droites homologues parallèles à n_a, n_b, n_c forment des triangles homothétiques ayant pour point double commun le point N. Les parallèles NI_a, NI_b, NI_c à n_a, n_b, n_c sont l'un de ces triples et sont les seules droites homologues concourantes parallèles à n_a, n_b, n_c. L'angle $S_a NI_b = NN_a N_c = EE_a E_c$; comme il est constant, le point I_b est fixe sur la circonférence $S_a S_b S_c$. De même, les points I_a, I_c sont indépendants de la direction de n_a.

Les points I_a, I_b, I_c sont appelés les *points invariables. Ce sont des points homologues de* φ_a, φ_b, φ_c, puisqu'ils appartiennent à une infinité de triples de droites homologues. *Le triangle* $I_a I_b I_c$ *est symétriquement semblable au triangle modulaire,* car le faisceau de trois parallèles aux côtés de ce triangle est symétriquement égal aux faisceaux $N(I_a I_b I_c)$, $E(E_a E_b E_c)$.

51. *Le triangle ayant pour sommets trois points homologues quelconques* P_a, P_b, P_c *est perspectif avec le triangle invariable; le centre de perspective appartient à la circonférence de similitude.* En effet, les droites homologues $I_a P_a$, $I_b P_b$, $I_c P_c$ forment nécessairement un faisceau égal au faisceau $N(I_a I_b I_c)$.

En appliquant cette proposition aux triples de points homologues $S'_a S_a S_a$, $S_b S'_b S_b$, $S_c S_c S'_c$, on voit que $I_a I_b I_c$ sont situés sur les droites $S_a S'_a$, $S_b S'_b$, $S_c S'_c$.

52. *Il existe une infinité de triples de points homologues* Q_a, Q_b, Q_c *situés en ligne droite; ces points se meuvent sur les circonférences circonscrites aux annexes, et la droite* $Q_a Q_b$ *tourne autour de* D.

D'abord, puisque D est le barycentre des masses α, β, γ, appliquées en Q_a, Q_b, Q_c, la droite $Q_a Q_b$ passe par D. Ensuite, les triangles $S_c Q_a Q_b$, $S_b Q_a Q_c$ étant semblables aux triangles $EE_a E_c$, $EE_a E_c$, on voit que Q_a se meut sur une circonférence passant par les points S_c, S_b, D, etc.

Réciproquement, toute droite menée par D rencontre les circonférences annexes des trois points homologues de φ_a, φ_b, φ_c.

53. *Les parallèles menées par trois points homologues quelconques* P_a, P_b, P_c *aux droites* $S_a S'_a$, $S_b S'_b$, $S_c S'_c$ *concourent en un même point* P.

En effet, appelons φ la transformée par affinité de φ_a lorsqu'on prend pour axe d'affinité la droite $S_b S_c$ et les points S'_a, S_a comme points homologues. Si P est le transformé de P_a, la droite $P_a P$ est parallèle à $S'_a S_a$, et les droites $S'_a P_a$, $S_a P$ se coupent sur $S_b S_c$. Mais il est facile de voir que φ se transforme en φ_b quand $S_a S_c$ est l'axe d'affinité, et S_b, S'_b un couple de points homologues; alors P se transforme en P_b, et PP_b est parallèle à $S_bS'_b$, etc.

54. On arrive à des propositions très curieuses lorsqu'on choisit d'une manière particulière les éléments qui déterminent trois figures semblables.

Par exemple, φ_a, φ_b, φ_c peuvent être les figures semblables construites sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle comme lignes homologues. Un premier triple de droites homologues concourantes est formé par les médiatrices A'O, B'O, C'O des côtés du triangle; un second triple, par les parallèles à BC, CA, AB, menées par le point de Lemoine. Les droites homologues de ces deux triples se coupent aux sommets du premier triangle de Brocard. Ces sommets sont donc les points invariables, et le cercle de similitude se confond avec le cercle de Brocard. Les points S_a, S_b, S_c sont les sommets du second triangle de Brocard; le point directeur est le centre de gravité de ABC, etc.

On peut encore choisir pour les points S_a, S_b, S_c les pieds H_a, H_b, H_c des hauteurs d'un triangle ABC; pour les points adjoints S'_a, S'_b, S'_c, les points A, B, C, etc.

De même on peut prendre pour S_a, S_b, S_c les sommets du triangle ABC, et pour S'_a, S'_b, S'_c les symétriques de ces sommets par rapport aux côtés opposés. Dans ce cas, les figures φ_a, φ_b, φ_c sont égales entre elles.

EXERCICES

1. On projette le foyer F d'une conique sur les tangentes au moyen de droites faisant avec les tangentes un angle donné α, toujours dans le même sens. Le lieu des projections est une circonférence qui a un double contact (réel ou imaginaire) avec la conique donnée. La même circonférence est aussi le lieu des projections du second foyer F' sur les tangentes au moyen de droites faisant avec les tangentes l'angle α dans l'autre sens.

Énoncer la réciproque de ce théorème (986) et la proposition analogue sur la parabole.

2. Deux points inverses par rapport à un triangle sont les foyers d'une conique inscrite. Les points de contact des côtés sont situés sur les droites joignant l'un des points donnés aux symétriques de l'autre par rapport aux côtés correspondants.

3. Les points de Brocard d'un triangle sont les foyers d'une ellipse qui touche les côtés aux pieds des symédianes (*ellipse de Brocard*).

4. Le barycentre G et le point de Lemoine K d'un triangle ABC sont les foyers d'une ellipse qui touche les côtés BC, CA, AB aux pieds des symédianes des triangles BCG, CAG, ABG.

5. Le premier centre isogone Z et le premier centre isodynamique d'un triangle ABC sont les foyers d'une conique qui touche les côtés BC, CA, AB aux pieds des droites AZ, BZ, CZ.

6. L'orthocentre H d'un triangle ABC et le centre O du cercle circonscrit sont les foyers d'une conique inscrite.

Réciproquement, à une conique on peut circonscrire une infinité de triangles qui sont en même temps inscrits au cercle directeur de centre F. Tous ces triangles ont pour orthocentre le second foyer F′.

7. La conique qui touche les côtés d'un triangle aux pieds des hauteurs a pour centre le point de Lemoine.

8. Si les points variables α, β, γ partagent les côtés BC, CA, AB d'un triangle dans un même rapport, les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ enveloppent trois paraboles. Ces courbes sont tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième, et elles ont pour foyers les sommets du second triangle de Brocard; les directrices sont les perpendiculaires abaissées des milieux des segments AH, BH, CH des hauteurs sur les médianes AA′, BB′, CC′ (Arztz, *Progr. de Recklinghausen*, 1884).

9. On porte sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC une même longueur variable $B\alpha = C\beta = A\gamma$. Les droites $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ roulent sur trois paraboles qui touchent respectivement BC en B, CA en C, AB en A et ont pour axes les bissectrices des angles C, A, B. Ces courbes ont deux tangentes communes (réelles ou imaginaires), passant par le point qui a pour coordonnées barycentriques c, a, b. Le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ parcourt une droite parallèle à l'axe antiorthique de ABC (M. d'Ocagne, *Mathesis*, 1887).

10. On porte sur les côtés BA, CA d'un triangle ABC une même longueur variable $B\gamma = C\beta = \lambda$ vers le point A, et aussi $B\gamma' = C\beta' = \lambda$ dans les sens opposés. Les droites $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ roulent sur une parabole inscrite au triangle ABC et ayant pour axe la bissectrice extérieure de l'angle BAC; les droites $\beta\gamma'$, $\beta'\gamma$ enveloppent une seconde parabole qui a pour axe la bissectrice intérieure de l'angle BAC (Mandart, *Mathesis*, p. 30; 1890).

11. On projette un point quelconque du côté BC d'un triangle sur les deux autres côtés AB, AC. La droite qui joint ces projections enveloppe une parabole qui est tangente aux côtés AB, AC et aux hauteurs BB′, CC′. Le foyer est le pied de la hauteur AA′, et la directrice est la droite B′C′ (NEUBERG, *Mathesis*, p. 60 ; 1895 ; DROZ-FARNY, *Ibid.*, p. 226).

12. Sur les côtés d'un triangle ABC comme bases on construit des triangles isoscèles variables P_aBC, P_bCA, P_cAB. Désignons par B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c les points de rencontre des couples de droites (BP_a, CA), (CP_a, AB), (CP_b, AB), (AP_b, BC), (AP_c, BC), (BP_c, AC). Les trois droites B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c enveloppent trois hyperboles, qui touchent deux côtés du triangle ABC et sont asymptotiques au troisième ; les centres sont situés sur l'axe orthique, et les polaires des points A, B, C respectivement par rapport aux trois courbes sont les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés opposés. La droite de Lemoine est une quatrième tangente commune aux trois hyperboles (NEUBERG, *Mathesis*, p. 11 ; 1900).

13. Si les triangles isoscèles P_aBC, P_bCA, P_cAB de l'exercice 12 sont semblables, les points de concours R_a, R_b, R_c des couples de droites (BP_c, CP_b), (CP_a, AP_c), (AP_b, BP_a) décrivent trois hyperboles circonscrites au triangle ABC et ayant respectivement pour asymptotes les parallèles menées par le milieu d'un côté de ABC aux bissectrices de l'angle opposé. Les droites AR_a, BR_b, CR_c concourent sur la droite OK.

14. Deux triangles orthogonalement affins sont orthologiques.

15 (¹). $A_1B_1C_1$ étant le triangle qui a pour côtés les tangentes menées aux sommets d'un triangle ABC au cercle circonscrit, on construit un triangle quelconque $\alpha\beta\gamma$ homothétique à $A_1B_1C_1$ par rapport au centre O du cercle ABC. Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un point, qui décrit l'hyperbole équilatère circonscrite à ABC et passant par O et par le point de Lemoine de ABC ; cette courbe est l'inverse triangulaire de la droite d'Euler OH. L'axe d'homologie des triangles ABC, $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une parabole qui touche BC, CA, AB et la droite de Lemoine.

La même hyperbole est le lieu du centre d'orthologie du triangle ABC et d'un triangle variable $P_aP_bP_c$, ayant pour sommets les sommets de trois triangles isoscèles équivalents P_aBC, P_bCA, P_cAB.

(¹) Pour les exercices 15 et 13, *voir* JERABEK et NEUBERG, *Mathesis*, p. 81 ; 1888. — FUHRMANN, *Ibid.*, p. 115. — BROCARD, *Mémoires de l'Acad. de Montpellier*, 1886. — NEUBERG, *Mathesis*, p. 166 ; 1890. — Mme PRIME, *Ibid.*, p. 33 ; 1893.

16 [1]. Soient D, E, F les points de contact des côtés du triangle ABC avec le cercle inscrit. On porte sur les rayons ID, IE, IF une même longueur variable $I\alpha = I\beta = I\gamma$; les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un même point, qui décrit une hyperbole équilatère passant par A, B, C, I.

Cette courbe, qui est l'inverse triangulaire de la droite OI, est aussi le lieu du centre d'orthologie du triangle ABC et d'un triangle variable $P_a P_b P_c$, ayant pour sommets les sommets de trois triangles isoscèles de même hauteur $P_a BC$, $P_b CA$, $P_c AB$.

17. Deux transversales réciproques par rapport à un triangle ABC sont les asymptotes d'une hyperbole circonscrite à ce triangle.

Si l'une de ces droites tourne autour d'un point fixe P, l'autre enveloppe une conique qui touche les côtés du triangle ABC aux isotomiques des points où ces côtés sont rencontrés par les droites AP, BP, CP. Des droites parallèles ont pour réciproques les tangentes à une même parabole.

La transformation par transversales réciproques est une transformation quadratique réglée involutive, ayant pour points principaux les sommets du triangle fondamental, pour lignes principales les côtés opposés : chacun de ces côtés est la transversale réciproque d'une droite quelconque menée par le sommet opposé.

18. Soient P un point quelconque du plan d'un triangle ABC, p sa polaire trilinéaire. Lorsque P parcourt une droite u qui rencontre BC, CA, AB en D, E, F, p enveloppe une conique qui touche les côtés BC, CA, AB aux conjugués harmoniques des points D, E, F par rapport aux extrémités de ces côtés. Lorsque p tourne autour d'un point fixe U, le point P décrit une conique passant par les points A, B, C; les tangentes en ces points sont les conjuguées harmoniques des droites AU, BU, CU par rapport aux angles BAC, CBA. ACB.

Examiner le cas particulier où la droite u est à l'infini, et celui où le point U est à l'infini.

La transformation par pôle et polaire trilinéaires est une transformation quadratique corrélative, dans laquelle tout point d'un côté du triangle de référence a pour droite correspondante ce côté lui-même, et toute droite menée par un sommet de ce triangle a pour point correspondant ce sommet lui-même.

---

[1] Pour les exercices 16 et 24, *voir* MANDART et NEUBERG, *Mathesis*, p. 81; 1893. — LEMOINE, *Congrès de Paris*, p. 203; 1889. — BOUTIN, *Journ. de Math. spéc.*, p. 104 et 124; 1890. — FUHRMANN, *Mathesis*, p. 105; 1890.

19. A tout point M d'un plan on fait correspondre un autre point M, par la condition que la distance MM′ soit vue de deux points donnés A, B sous des angles donnés α, β. Démontrer que la transformation (M, M′) est quadratique et se ramène à une inversion triangulaire si l'on remplace M′ par son symétrique par rapport à la droite AB.

20. A un point M du plan d'un triangle ABC on fait correspondre le centre de gravité M′ de son triangle podaire par rapport à ABC. Démontrer que les points M, M′ se correspondent dans deux figures affines. — Si M″ est le barycentre du triangle des symétriques de M par rapport à BC, CA, AB (*triangle réflexe* de M), les points M, M″ se correspondent dans deux figures symétriquement semblables. Le point M et le centre du cercle circonscrit au triangle réflexe sont inverses par rapport au triangle ABC.

21. L'hyperbole de Kiepert est le lieu du pôle trilinéaire, par rapport au triangle ABC, d'une droite qui se déplace en restant perpendiculaire à la droite OH; c'est aussi la transformée par points réciproques de la droite GK. Les polaires trilinéaires des points de la droite GK enveloppent une parabole inscrite à ABC, ayant pour directrice HG et touchant les axes de Steiner.

22. On projette les points d'un plan π' sur un second plan π au moyen de droites s'appuyant sur deux droites données. La correspondance ainsi établie entre les champs ponctuels π, π' porte le nom de *projection gauche;* démontrer que c'est une transformation quadratique.

23. Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC; H_a, H_b, H_c les pieds des hauteurs; h_a, h_b, h_c les intersections des côtés homologues des triangles ABC, $H_aH_bH_c$; les lettres O, H, G, K, I, I_a, I_b, I_c ont la signification habituelle.

Une droite qui se meut en partageant les droites BC, H_b, H_c en parties proportionnelles, enveloppe une parabole φ_a (parabole de Brocard), qui touche les hauteurs BH_b, CH_c et les bissectrices AI, AI_b. La polaire de h_a est l'isogonale de Ah_a; celle de H est AO.

Il existe deux autres paraboles analogues φ_b, φ_c. Ces trois paraboles sont aussi les enveloppes des côtés d'un triangle $P_aP_bP_c$ dont les sommets partagent les hauteurs AH_a, BH_b, CH_c dans un même rapport. K est toujours le centre de gravité des points P_a, P_b, P_c pour les masses a^2, b^2, c^2. Les directrices sont les symédianes AK, BK, CK. Les trois courbes ont deux tangentes communes rectangulaires, issues de K et parallèles aux droites de Simson des extrémités du diamètre OH de la circonférence ABC. Les foyers F_a, F_b, F_c sont les points de rencontre des médianes AG, BG, CG avec le cercle de diamètre AG (*cercle orthocentroïdal*); F_a est aussi situé sur le cercle d'Apollonius passant par A et sur les deux cercles adjoints qui touchent BC.

L'axe d'homologie des triangles ABC, $P_aP_bP_c$ enveloppe une parabole inscrite au triangle ABC et touchant la droite $h_ah_bh_c$; la directrice est HK.

Les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ de l'exercice 15 enveloppent les anticomplémentaires des paraboles φ_a, φ_b, φ_c.

24. Les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ de l'exercice 16 enveloppent trois paraboles μ_a, μ_b, μ_c inscrites respectivement aux triangles OB'C', OC'A', OA'B' (comparer exercice 10). Les foyers de ces courbes sont les intersections des bissectrices AI, BI, CI avec la circonférence de diamètre OI; les directrices sont les bissectrices intérieures A'I', B'I', C'I' du triangle A'B'C', I' est le centre de gravité des points P_a, P_b, P_c pour les masses a, b, c. Par ce point passent deux tangentes rectangulaires, t et t', communes aux paraboles μ_a, μ_b, μ_c; elles sont parallèles aux droites de Simson des extrémités W, W' du diamètre OI du cercle ABC, et interceptent sur les médiatrices O'A', O'B', O'C', à partir des points A', B', C', des segments égaux à $\frac{1}{2}$IW ou à $\frac{1}{2}$IW'.

L'axe d'homologie des triangles A'B'C', $P_aP_bP_c$ enveloppe une parabole qui touche les droites t, t' et les côtés du triangle A'B'C'; la directrice est OI'.

25. Une transversale m, qui pivote autour d'un point fixe M, rencontre les côtés du triangle ABC aux points A_1, B_1, C_1; les droites AA_1, BB_1, CC_1 forment un nouveau triangle $A_2B_2C_2$. Démontrer que les points A_2, B_2, C_2 engendrent trois coniques circonscrites au triangle ABC. Comment faut-il choisir le point M pour obtenir la circonférence ABC, l'ellipse de Steiner ou l'hyperbole de Kiepert? Étudier le cas ou le point M est à l'infini.

26 (1). La transformation dans laquelle on considère comme homologues deux points M, M' dont les coordonnées normales du premier sont proportionnelles aux coordonnées barycentriques du second par rapport au même triangle de référence ABC, est une transformation linéaire (*transformation instantanée*), qui a pour points doubles les points A, B, C. Trouver les lignes de fuite et la transformée de la circonférence circonscrite ou inscrite.

---

(1) Pour les exercices 26 et 27, *voir* G. de Longchamps, *Congrès de Nancy*, p. 69; 1886. — Neuberg, *Congrès néerlandais d'Amsterdam*, p. 225; 1895.

27. Soit S un point quelconque du plan d'un triangle ABC; menons les droites AS, BS, CS qui rencontrent les côtés en A_1, B_1, C_1 et appelons s l'axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$. Les systèmes homologiques dans lesquels ces triangles se correspondent ont pour module -2; ils se projettent suivant deux systèmes semblables, si l'on prend pour centre de projection un point quelconque E extérieur au plan ABC et pour plan de projection un plan parallèle au plan ES.

Si I est le centre du cercle inscrit, on obtient la *transformation par points supplémentaires*. La circonférence ABC se transforme alors en une ellipse (*ellipse de Longchamps*) de centre I, passant par les pieds des bissectrices et touchant le cercle inscrit aux extrémités du petit axe, qui est perpendiculaire à l'axe antiorthique; le grand axe est égal à $\sqrt{2Rr}$.

Si l'on prend pour S le point de Lemoine, la circonférence ABC se transforme en l'ellipse de Brocard. Cette circonférence se transforme en une conique de foyer O et ayant pour directrice une ligne de fuite, lorsque O est pris pour centre d'homologie. Elle se transforme en la circonférence des neuf points lorsque S est l'orthocentre de ABC.

28. Les sommets d'un triangle ABC et deux points jumeaux J, J' sont cinq points d'une hyperbole équilatère, qui a pour centre le milieu de la distance JJ'.

29. Si l'on transforme un triangle ABC par polaires réciproques, en prenant pour centre du cercle directeur le point de Lemoine K, la circonférence circonscrite se change en l'ellipse qui touche en leurs milieux les côtés du triangle A'B'C' transformé de ABC; K est un foyer de cette ellipse et est appelé un *foyer de Steiner* du triangle A'B'C' (Hadamard, *Journ. de Math. spéc.*, p. 41; 1885). K est le point de Lemoine de son triangle podaire par rapport au triangle A'B'C'.

NOTE IV (¹).

SUR LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE DU TÉTRAÈDRE.

DÉFINITION DES COORDONNÉES.

1. Soit $A_1A_2A_3A_4$ le tétraèdre fondamental.

Désignons par s_1, s_2, s_3, s_4 les aires des faces; par a_1, a_2, a_3 les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; par a_4, a_5, a_6 les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3; par α_k le dièdre compris entre les deux faces qui ont l'arête commune a_k.

Les *coordonnées normales* d'un point M sont des équimultiples quelconques de ses coordonnées tétraédriques x_1, x_2, x_3 x_4 (962); celles-ci portent aussi le nom de *coordonnées normales absolues*.

Les *coordonnées barycentriques* de M sont des nombres ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 proportionnels aux volumes des tétraèdres $MA_2A_3A_4$, $MA_3A_4A_1$, $MA_4A_1A_2$, $MA_1A_2A_3$, ces volumes étant affectés des mêmes signes que les coordonnées normales correspondantes. Appelons M_k le point de rencontre du plan s_k avec la droite A_kM, et m_k le point d'intersection de l'arête a_k avec le plan mené par M et par l'arête opposée à a_k. On démontre facilement les relations

$$\frac{A_2m_1}{A_3m_1} = -\frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad \frac{Mm_1}{Mm_4} = -\frac{\xi_1+\xi_4}{\xi_2+\xi_3}, \quad \frac{MM_4}{A_4M_4} = \frac{\xi_4}{\xi_1+\xi_2+\xi_3}, \quad \cdots$$

Il résulte de là que M est le centre des distances proportionnelles des points A_1, A_2, A_3, A_4 pour les coefficients ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 (710).

Les coordonnées d'un plan λ sont des nombres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 proportionnels aux distances des sommets de tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ à ce plan, ces distances étant précédées du signe $+$ ou $-$ d'après une règle connue (709). Soient l_1, l_2, ... les points où λ coupe les arêtes a_1, a_2, ...; on a

$$\frac{A_1l_3}{A_2l_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \frac{A_4l_4}{A_1l_4} = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}, \quad \cdots$$

(¹) Dans cette Note, qui est le complément naturel de la Note III de la première Partie, les *renvois* se rapportent au texte du *Traité* et à celui de la Note elle-même; pour éviter toute ambiguïté, nous ferons précéder ceux qui visent les Numéros de cette dernière de la lettre N.

POINTS ET PLANS HARMONIQUEMENT ASSOCIÉS.

THÉORÈME.

2. *Si deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ *sont tels que les droites joignant les sommets homologues concourent en un même point* S, *les droites* d_1, d_2, d_3, d_4 *suivant lesquelles se coupent les faces homologues sont situées dans un même plan* σ.

En effet, deux arêtes homologues étant situées dans un même plan ont un point d'intersection. Soient $B_1, B_2, \ldots, B_6$ les points où les arêtes du premier tétraèdre sont rencontrées par les arêtes homologues du second. La droite d_4 contient les points B_1, B_2, B_3; la droite d_1 passe par les points B_1, B_5, B_6. Ces lignes ont un point commun B_1; donc elles sont situées dans un même plan σ avec les droites d_2, d_3, qui joignent les points B_2 et B_6, B_3 et B_5.

La démonstration de la réciproque ne présente pas de difficultés.

Les deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ sont dits *homologiques,* S est le *centre d'homologie,* σ est le *plan d'homologie* (938).

3. Étant donnés un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et un point M, appelons μ_k le plan mené par M et l'arête a_k, et ν_k le plan conjugué harmonique de μ_k par rapport au dièdre α_k du tétraèdre; ces plans coupent l'arête opposée en deux points que nous désignons par les lettres m, n affectées de l'indice propre à cette arête. La droite A_kM rencontre le plan s_k en un point M_k.

Les trois plans μ_4, μ_5, μ_6 se coupent suivant la droite A_4M, et les plans ν_1, ν_2, ν_3 rencontrent cette droite au conjugué harmonique N_4 de M par rapport à A_4M_4. Si ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont les coordonnées normales ou barycentriques de M, celles de N_4 sont ξ_1, ξ_2, ξ_3, $-\xi_4$.

Les plans μ_1, μ_4 se rencontrent suivant la droite B_4B_1, qui passe par M. Les plans s_4, s_2, μ_2, ν_2 formant un faisceau harmonique, déterminent sur m_1m_4 une division harmonique $m_1m_4MN'_1$. Les plans ν_3, ν_5, ν_6 passent également par N'_1. Les coordonnées de ce point sont $-\xi_1$, ξ_2, ξ_3, $-\xi_4$.

Nous désignons par N_1, N_2, N_3, N_4 les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4; par N'_1, N'_2, N'_3 les conjugués harmoniques de M par rapport aux segments m_1m_4, m_2m_5, m_3m_6. Le Tableau suivant indique les coordonnées de ces points, les plans menés par ces points et les arêtes du tétraèdre, et les droites qui passent par ces points en s'appuyant sur deux arêtes opposées du tétraèdre :

M....	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6$;	$m_1 m_4, m_2 m_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
N_1...	$\nu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 n_4, m_5 n_2, m_6 n_3$;	$-\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
N_2...	$\mu_1, \nu_2, \mu_3, \nu_4, \mu_5, \nu_6$;	$m_4 n_1, m_2 n_5, m_6 n_3$;	$\xi_1, -\xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$.
N_3...	$\mu_1, \mu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \mu_6$;	$m_4 n_1, m_5 n_2, m_3 n_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, -\xi_3, \quad \xi_4$.
N_4...	$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 n_4, m_2 n_5, m_3 n_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
N'_1...	$\mu_1, \nu_2, \nu_3, \mu_4, \nu_5, \nu_6$;	$m_1 m_4, n_2 n_5, n_3 n_6$;	$-\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
N'_2...	$\nu_1, \mu_2, \nu_3, \nu_4, \mu_5, \nu_6$;	$n_1 n_4, m_2 m_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, -\xi_2, \quad \xi_3, -\xi_4$.
N'_3...	$\nu_1, \nu_2, \mu_3, \nu_4, \nu_5, \mu_6$;	$n_1 n_4, n_2 n_5, m_3 m_6$;	$\xi_1, \quad \xi_2, -\xi_3, -\xi_4$.

4. Les droites $A_1 m_1$, $A_2 m_2$, $A_3 m_3$ concourent en M_4; par conséquent, les points n_1, n_2, n_3, conjugués harmoniques de m_1, m_2, m_3 par rapport à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, sont situés sur la polaire de M_4 par rapport au triangle $A_1A_2A_3$. Pareillement, les triples de points (n_1, n_5, n_6), (n_2, n_4, n_6), (n_1, n_4, n_5) sont situés sur les polaires des points M_1, M_2, M_3 par rapport aux triangles $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$. Ces quatre polaires ayant deux à deux un point commun sont situées dans un même plan λ, qu'on appelle *plan polaire* de M par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Les six points n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 sont les sommets d'un quadrilatère complet, dont les diagonales se coupent aux points N'_1, N'_2, N'_3. Les coordonnées du plan λ sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques du point M.

Les deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $N'_1N'_2N'_3M$ présentent cette particularité que deux arêtes opposées quelconques de l'un, par exemple, A_1A_2 et A_3A_4, sont partagées harmoniquement par les deux arêtes correspondantes $N'_1N'_2$, N'_3M de l'autre tétraèdre. On en déduit que chacun de ces tétraèdres est *autopolaire* par rapport à l'autre, c'est-à-dire que chaque sommet de l'un des tétraèdres est le pôle de la face opposée par rapport à l'autre tétraèdre. Ces tétraèdres sont homologiques; N_1 est leur centre d'homologie, $N_2N_3N_4$ est leur plan d'homologie.

Le tétraèdre $N_1N_2N_3N_4$ est également autopolaire par rapport à $A_1A_2A_3A_4$; ces deux polyèdres ont M pour centre d'homologie, et leur plan d'homologie est $N'_1N'_2N'_3$.

Pour d'autres propriétés intéressantes de la figure, nous renvoyons à un article de M. Stephanos Cyparinos (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* 1879, p. 434).

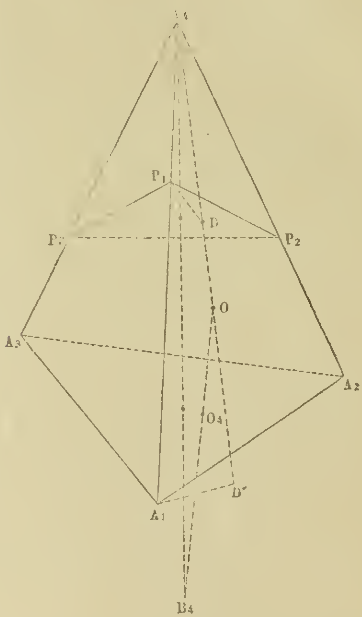
Les tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $M_1M_2M_3M_4$ ont également pour centre d'homologie le point M, et pour plan d'homologie le plan $N'_1N'_2N'_3$.

SECTIONS ANTIPARALLÈLES D'UN TÉTRAÈDRE. RAYON DE LA SPHÈRE CIRCONSCRITE.

5. Désignons par O et R le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et par $B_1B_2B_3B_4$ le tétraèdre formé par les plans tangents menés en A_1, A_2, A_3, A_4 à la sphère O (*fig.* 1).

Si un plan parallèle au plan $B_1B_2B_3$ coupe les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 aux points P_1, P_2, P_3, nous dirons que le triangle $P_1P_2P_3$ est une *section antiparallèle* du tétraèdre. Les côtés de ce triangle sont parallèles aux tangentes menées en A_4 aux circonférences $A_4A_2A_3$, $A_4A_3A_1$, $A_4A_1A_2$;

Fig. 1.



par conséquent, les six points A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3 sont situés sur une même sphère, et l'on a

$$(1) \qquad A_4P_1 . a_4 = A_4P_2 . a_5 = A_4P_3 . a_6 = p,$$

p étant la puissance de cette sphère par rapport à A_4. On démontre facilement les relations

$$(2)\qquad \frac{P_2P_3}{a_1a_4} = \frac{P_3P_1}{a_2a_5} = \frac{P_1P_2}{a_3a_6} = \frac{p}{a_4a_5a_6}.$$

Donc *les côtés d'une section antiparallèle menée dans l'un quelconque des quatre trièdres d'un tétraèdre sont proportionnels aux produits des arêtes opposées du tétraèdre.*

Remarquons aussi que *la forme des sections antiparallèles d'un tétraèdre ne change pas quand on applique aux sommets du tétraèdre une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Les circonférences circonscrites aux triangles $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ appartiennent à un même cône C_4, ayant son sommet en A_4 (878); les plans tangents menés par les arêtes A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 de ce cône forment un trièdre circonscrit tel, que les plans menés par les arêtes de ce trièdre, et respectivement par A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, se coupent suivant la même droite. Il résulte de là que *les centres des symédianes des triangles* $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ *sont sur une même droite passant par* A_4.

Enfin, rappelons que le centre du cercle circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ est sur la droite A_4B_4 (880).

6. La considération d'une section antiparallèle conduit aisément à l'expression du rayon de la sphère O. En effet, si D, D′ sont les points où le rayon A_4O coupe le plan $P_1P_2P_3$ et la sphère O, on a

$$p = A_4D.A_4D' = 2R.A_4D.$$

Soient V, V′ les volumes des tétraèdres $A_4P_1P_2P_3$, $A_4A_1A_2A_3$; l'on a (*Exercice* 616)

$$\frac{V'}{V} = \frac{A_4P_1.A_4P_2.A_4P_3}{a_4a_5a_6};$$

d'où, en remplaçant A_4P_1, A_4P_2, A_4P_3 par leurs valeurs tirées de (1),

$$V' = \frac{p^3}{a_4^2a_5^2a_6^2}\,V.$$

Désignons par T l'aire du triangle dont les côtés ont pour valeurs numériques a_1a_4, a_2a_5, a_3a_6; à cause des égalités (2),

$$\text{aire } P_1P_2P_3 = \frac{p^2}{a_4^2a_5^2a_6^2}\,T,$$

par suite.

$$V' = \frac{1}{3}P_1P_2P_3.A_4D = \frac{p^2T}{3a_4^2a_5^2a_6^2}\,A_4D.$$

Égalons les deux valeurs de V' et remplaçons p par $2R.A_4D$; il vient

$$6RV = T.$$

Cette démonstration est due à von Standt (*Journal de Crelle*, t. 57, p. 88).

POINTS INVERSES.

THÉORÈME.

7. *Soit* μ_k *le plan mené par un point donné* M *et par l'arête* a_k *de tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$, *et soit* ν_k *le plan symétrique de* μ_k *par rapport au plan bissecteur du dièdre* α_k *du tétraèdre :* 1° *les plans* ν_1, ν_2, ... *passent par un même point* N; 2° *les coordonnées normales de* N *sont inversement proportionnelles à celles de* M; 3° *les projections* (M_1, M_2, M_3, M_4), (N_1, N_2, N_3, N_4) *des points* M et N *sur les faces du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$, *sont huit points d'une même sphère*; 4° *les deux pentagones complets* $MA_1A_2A_3A_4$, $NN_1N_2N_3N_4$ *sont tels, que la droite joignant deux sommets de l'un est perpendiculaire au plan passant par les sommets non homologues de l'autre polygone.*

Appelons Q le centre de la sphère $M_1M_2M_3M_4$, N le symétrique de M par rapport à Q, et N_1, N_2, N_3, N_4 les projections de N sur les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Comme Q se projette au centre du petit cercle suivant lequel le plan s_k coupe la sphère Q, M_kN_k est un diamètre de ce cercle. Donc les points N_1, N_2, ... appartiennent à la sphère Q.

La droite MM_k coupe cette sphère en un point N'_k symétrique de N_k par rapport au centre Q; par conséquent, $NN_k = N'_kM$. Or

$$MM_1.MN'_1 = MM_2.MN'_2 = MM_3.MN'_3 = MM_4.MN'_4;$$

donc les coordonnées normales de M sont inversement proportionnelles à celles de N. Il résulte de là que les plans Ma_k, Na_k sont symétriques par rapport au dièdre α_k.

Les droites NN_1, NN_2, NN_3, NN_4 sont déjà perpendiculaires aux plans $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Le plan NN_1N_2 est coupé, par la droite A_3A_4 en un point L, et par le plan MA_3A_4 suivant la droite L'L, isogonale de L'N par rapport à l'angle N_1LN_2; donc la droite N_1N_2 est perpendiculaire à la droite LL' et, par suite, au plan MA_3A_4 qui est mené par LL' perpendiculairement au plan NN_1N_2. Les droites N_1N_2, N_1N_3 étant perpendiculaires aux plans MA_3A_4, MA_1A_4, le plan $N_1N_2N_3$ est perpendiculaire à la droite MA_4.

SCOLIE.

8. 1° Les points M, N sont des *points inverses* par rapport au tétraèdre

$A_1A_2A_3A_4$. Ce sont les foyers d'une surface de révolution du second ordre, touchant les faces du tétraèdre. En effet, construisons, dans un plan quelconque mené par MN, la conique ayant pour foyers les points M, N et pour axe principal le diamètre de la sphère Q qui est dirigé suivant MN ; cette courbe, en tournant autour de la droite MN, engendre une surface de révolution S. La sphère Q est le lieu des projections des foyers M, N sur les plans tangents à S. Réciproquement, le plan s_k, perpendiculaire à la droite MM_k, aboutissant à un point M_k de la sphère, touche la surface S.

2° Lorsque le point M est à l'infini, on a le théorème suivant :

Par les arêtes d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, *on mène des plans parallèles à une même droite d*; *les symétriques de ces plans par rapport aux plans bissecteurs des dièdres correspondants du tétraèdre passent par un même point* N, *dont les projections sur les faces du tétraèdre sont situées dans un même plan* δ *perpendiculaire à d. Ce point est le foyer d'un paraboloïde de révolution touchant les quatre faces du tétraèdre et le plan* δ; *les diamètres de cette surface sont parallèles à d.*

Le plan δ offre quelque analogie avec la droite de Simson d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle. Mais nous faisons remarquer que le lieu de N n'est pas la sphère circonscrite au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; ce lieu est une surface du troisième ordre.

TÉTRAÈDRES ET PENTAGONES ORTHOLOGIQUES.

THÉORÈME.

9. *Si deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $C_1C_2C_3C_4$ *sont tels, que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les faces opposées du second concourent en un même point* A, *les perpendiculaires abaissées des sommets du second tétraèdre sur les faces opposées du premier concourent également en un même point* C.

Voici trois figures où ce théorème s'aperçoit immédiatement :

1° Soit D le point inverse de A par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et soient D_1, D_2, D_3, D_4 les projections de D sur les faces de ce tétraèdre.

2° Appelons O, O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $AA_2A_3A_4$, $AA_1A_3A_4$, $AA_1A_2A_4$, $AA_1A_2A_3$.

3° Transformons le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ par polaires réciproques en prenant une sphère directrice, de centre A ; soit $E_1E_2E_3E_4$ le tétraèdre ainsi obtenu. Les tétraèdres $D_1D_2D_3D_4$, $O_1O_2O_3O_4$, $E_1E_2E_3E_4$ ont leurs faces perpendiculaires aux droites AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 et, par suite, sont homothétiques à $C_1C_2C_3C_4$; il résulte de leur construction que les perpendiculaires menées par leurs sommets sur les faces correspondantes du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ concourent en un même point D, O ou A.

SCOLIE.

10. 1° Les tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $C_1C_2C_3C_4$ sont dits *orthologiques;* les points A, C en sont les *métapôles.*

Les *pentagones complets* $AA_1A_2A_3A_4$, $CC_1C_3C_3C_4$ jouissent de la propriété qu'*un côté quelconque de l'un d'eux est perpendiculaire à la face opposée de l'autre;* par exemple, le côté A_3A_4 est perpendiculaire au plan CC_1C_2; les pentagones peuvent, également, être appelés *orthologiques.*

2° *Les distances d'un sommet du premier pentagone aux autres sommets sont inversement proportionnelles aux distances du sommet homologue du second pentagone aux faces non adjacentes de ce polygone.* Cette propriété se voit immédiatement si l'on prend pour $C_1C_2C_3C_4$ le tétraèdre désigné ci-dessus par $D_1D_2D_3D_4$ ou $E_1E_2E_3E_4$.

3° *Deux côtés correspondants* A_1A_2, C_1C_2 *de deux pentagones orthologiques sont divisés dans le même rapport par les faces opposées* AA_3A_4, CC_3C_4.

En effet, appelons a le point de rencontre de A_1A_2 avec le plan AA_3A_4, c celui de C_1C_2 avec le plan CC_3C_4, et soient a', c' les points situés à l'infini sur A_1A_2, C_1C_2. La droite Aa, intersection des plans AA_1A_2, AA_3A_4 qui sont perpendiculaires aux droites C_3C_4, C_1C_2, est perpendiculaire au plan C_3C_4b'. Par conséquent, le faisceau des plans $C_3C_4C_1$, $C_3C_4C_2$, C_3C_4c, C_3C_4c' a même rapport anharmonique que le faisceau des droites AA_2, AA_1, Aa', Aa qui sont perpendiculaires à ces plans. Si l'on coupe ces faisceaux par les transversales C_1C_2, A_1A_2, on obtient

$$(C_1C_2cc') = (A_2A_1a'a) \quad \text{ou} \quad \frac{cC_1}{cC_2} = \frac{aA_1}{aA_2}.$$

Il résulte de là que *deux sommets correspondants de deux pentagones orthologiques ont, respectivement, mêmes coordonnées barycentriques dans les tétraèdres formés par les autres sommets.*

POINT INVERSE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TÉTRAÈDRE.

11. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées normales absolues d'un point L par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. On a l'identité

$$\begin{aligned}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2)-(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3+s_4x_4)^2\\ =(s_1x_2-s_2x_1)^2-(s_1x_3-s_3x_1)^2+\ldots+(s_3x_4-s_4x_3)^2.\end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité se réduit à zéro, lorsque

$$\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_2}{s_2} = \frac{x_3}{s_3} = \frac{x_4}{s_4},$$

et la quantité $s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 + s_4 x_4$ a la valeur constante $3V$; par conséquent, *le minimum de la somme $\sigma = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ correspond au point L dont les coordonnées normales sont proportionnelles aux aires des faces du tétraèdre.* Les coordonnées du centre de gravité G étant égales aux quarts des hauteurs h_1, h_2, h_3, h_4, *L est l'inverse de G par rapport au tétraèdre; il est le centre de gravité du tétraèdre qui a pour sommets les projections de L sur les faces de* $A_1 A_2 A_3 A_4$ (N., 10, 3°).

Pour le minimum cherché,

$$\sigma = \frac{9V^2}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2}, \quad \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}.$$

Le point L rappelle, par quelques-unes de ses propriétés, le centre des symédianes d'un triangle; mais l'analogie entre les deux points est loin d'être complète.

QUADRUPLES HYPERBOLOÏDIQUES.

LEMME.

12. *Étant données quatre droites g_1, g_2, g_3, g_4, non situées deux à deux dans un même plan, il existe, en général, deux droites s'appuyant sur ces lignes; mais, si l'on peut assigner trois droites s'appuyant sur g_1, g_2, g_3, g_4, il en existe une infinité.*

Cette proposition résulte du n° 1212; en voici une démonstration directe. Soit A un point quelconque de g_1; les plans $g_2 A$, $g_3 A$ se coupent suivant une droite H s'appuyant sur g_1, g_2, g_3, et ils rencontrent g_4 en deux points B, C, qui sont généralement distincts. Lorsque A parcourt g_1, les plans $g_2 A$, $g_3 A$ engendrent deux faisceaux homographiques; par conséquent, les points B, C marquent sur g_4 deux divisions homographiques. Soient E, F les points doubles de ces divisions; les plans $g_2 E$, $g_3 E$ se coupent suivant une droite rencontrant g_1, g_2, g_3, g_4, et il en est de même des plans $g_2 F$, $g_3 F$.

Si, dans trois positions de A, les points B, C se confondent, ils coïncident constamment (1104), et toute droite s'appuyant sur g_1, g_2, g_3 rencontre également g_4.

13. Dans la dernière hypothèse, la droite H engendre un hyperboloïde ou un paraboloïde, dont g_1, g_2, g_3, g_4 sont des génératrices du second mode. On dit alors que g_1, g_2, g_3, g_4 constituent un *quadruple hyperboloïdique* ou, plus simplement, que ces *droites sont hyperboloïdiques.*

De tels systèmes de quatre droites se présentent fréquemment dans la Géométrie du tétraèdre ; il y remplacent les triples de droites concourantes de la Géométrie plane.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points pris dans les plans des faces s_1, s_2, s_3, s_4 d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Pour que les quatre lignes A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 soient hyperboloïdiques, il suffit de trouver trois droites qui les rencontrent. Par exemple, par le point A_4 de l'une de ces lignes, il doit passer une droite s'appuyant sur les trois autres, ce qui exige que les plans $A_4A_1P_1$, $A_4A_2P_2$, $A_4A_3P_3$ se coupent suivant une même droite ; ou que les droites A_4P_1, A_4P_2, A_4P_3 rencontrent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en des points p_1, p_2, p_3 tels, que les droites A_1p_1, A_2p_2, A_3p_3 concourent en un même point. De même, les plans $A_1A_4P_4$, $A_1A_2P_2$, $A_1A_3P_3$ doivent se couper suivant la même droite, etc.

Désignons maintenant par p_1, p_2, p_3, p_4 quatre lignes hyperboloïdiques, situées dans les faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Le plan $A_1A_2A_3$, mené par p_4, coupe p_1, p_2, p_3 en trois points d'une même droite ; autrement dit, les droites p_1, p_2, p_3 rencontrent A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 en trois points qui sont en ligne droite. Une semblable condition doit être remplie par trois faces du tétraèdre.

Applications.

14. 1° *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres des cercles inscrits aux faces opposées sont hyperboloïdiques.* (*Exercice* 575, p. 513.)

2° Soit $B_1B_2B_3B_4$ le tétraèdre formé par les plans tangents menés par les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ à la sphère circonscrite, et soient K_1, K_2, K_3, K_4 les centres des symédianes des faces de $A_1A_2A_3A_4$.

Si le plan $A_1A_2A_3$ coupe les droites B_4B_1, B_4B_2, B_4B_3 aux points C_1, C_2, C_3, les côtés du triangle $C_1C_2C_3$ touchent en A_1, A_2, A_3 la circonférence circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$; donc les plans $B_4B_1A_1$, $B_4B_2A_2$, $B_4B_3A_3$ se coupent suivant la droite joignant B_4 au centre des symédianes de $A_1A_2A_3$. Par conséquent, *les droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 *sont des génératrices d'un même mode,* et *les droites* B_1K_1, B_2K_2, B_3K_3, B_4K_4 *sont des génératrices de l'autre mode d'un hyperboloïde.*

3° Le plan $B_1B_2B_3$ rencontre les côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en trois points D_1, D_2, D_3 qui sont les conjugués harmoniques, par rapport à ces côtés, des points où aboutissent les symédianes A_4K_1, A_4K_2, A_4K_3 ; on conclut de là que les plans $A_4A_1K_1$, $A_4A_2K_2$, $A_4A_3K_3$ se coupent suivant une même droite. Par suite, *les droites* A_1K_1, A_2K_2, A_3K_3, A_4K_4 *sont hyperboloïdiques.*

4° Appelons d_1, d_2, d_3, d_4 les intersections des faces homologues des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$. Le plan $B_4B_2B_3$ rencontre le plan $A_1A_2A_3$ suivant une droite C_2C_3 qui touche en C_1 le cercle $A_1A_2A_3$. Le point d'intersection E_1 de C_2C_3, A_2A_3 appartient à la ligne d_1; mais les trois points analogues, situés sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$, sont sur la polaire de K_4 par rapport à $A_1A_2A_3$. Donc *les plans homologues des tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ *se coupent suivant quatre lignes hyperboloïdiques*.

THÉORÈME.

15. *Si les droites joignant les sommets homologues de deux tétraèdres* $A_1A_2A_3A_4$, $E_1E_2E_3E_4$ *sont hyperboloïdiques, les lignes d'intersection des faces correspondantes jouissent de la même propriété.*

Soient F_1, F_2, F_3 les points de rencontre du plan $A_1A_2A_3$ avec les droites E_4E_1, E_4E_2, E_4E_3. Par hypothèse, les plans $E_4E_1A_1$, $E_4E_2A_2$, $E_4E_3A_3$ passent par une même droite; donc les droites E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3 concourent en un même point. Les côtés homologues des triangles $E_1E_2E_3$, $A_1A_2A_3$ se coupent donc en trois points G_1, G_2, G_3 d'une même droite. Or, ces points appartiennent, respectivement, aux droites d'intersection des plans $B_4B_2B_3$ et $A_4A_2A_3$, $B_4B_3B_1$ et $A_4A_3A_1$, $B_4B_1B_2$ et $A_4A_1A_2$; donc la droite $G_1G_2G_3$ s'appuie sur les quatre lignes suivant lesquelles se coupent les faces homologues des deux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$.

La réciproque de ce théorème est également vraie.

THÉORÈME.

16. *Soient* (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3), (P_4, Q_4) *quatre couples de points inverses par rapport aux triangles des faces du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$. *Si les droites* A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 *sont hyperboloïdiques, les droites* A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4 *le sont également.*

En effet, prenons sur A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 trois longueurs égales $A_4N_1 = A_4N_2 = A_4N_3$; les droites A_4P_1 et A_4Q_1, A_4P_2 et A_4Q_2, A_4P_3 et A_4Q_3 coupent, respectivement, les côtés du triangle $N_1N_2N_3$ en des couples de points isotomiques. Par hypothèse, les plans $A_4A_1P_1$, $A_4A_2P_2$, $A_4A_3P_3$ se coupent suivant une même droite, ou leurs traces sur le plan $N_1N_2N_3$ concourent en un même point; on déduit de là que les traces des plans $A_4A_1Q_1$, $A_4A_2Q_2$, $A_4A_3Q_3$ sont également concourantes, ou que ces plans se coupent suivant une même droite.

SPHÈRES TANGENTES AUX QUATRE FACES D'UN TÉTRAÈDRE.

17. M. Hermary a fait connaître dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 138, une solution remarquable du problème de construire une sphère touchant les quatre faces (indéfinies) d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Cette solution va nous donner un complément

de la discussion établie au n° 963 et quelques propriétés des points de contact des faces du tétraèdre avec les différentes sphères résolvant le problème.

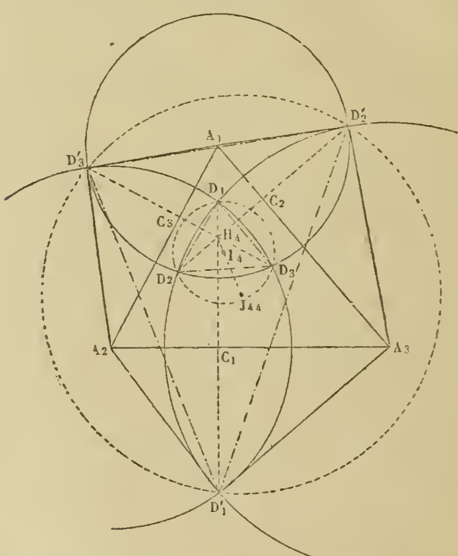
Désignons par μ_1, μ_2, μ_3 les plans bissecteurs *intérieurs* des dièdres (s_4, s_1), (s_4, s_2), (s_4, s_3), et par ν_1, ν_2, ν_3 leurs plans bissecteurs *extérieurs*. Il *peut* y avoir huit sphères touchant les faces du tétraèdre; leurs centres, indiqués par les lettres I, J, J′ sont les intersections des plans suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I} \ldots \mu_1, \mu_2, \mu_3; & \mathrm{J}_4 \ldots \nu_1, \nu_2, \nu_3; & \\ \mathrm{J}_1 \ldots \nu_1, \mu_2, \mu_3; & \mathrm{J}_2 \ldots \mu_1, \nu_2, \mu_3; & \mathrm{J}_3 \ldots \mu_1, \mu_2, \nu_3; \\ \mathrm{J}'_1 \ldots \mu_1, \nu_2, \nu_3; & \mathrm{J}'_2 \ldots \nu_1, \mu_2, \nu_3; & \mathrm{J}'_3 \ldots \nu_1, \nu_2, \mu_3; \end{array}$$

leurs points de contact avec le plan $A_1A_2A_3$ seront dénotés par I_4, J_{44}, J_{14}, ..., J'_{14}, ...

Considérons (*fig.* 2) l'une quelconque de ces sphères. Rabattons les

Fig. 2.



plans s_1, s_2, s_3 autour des arêtes a_1, a_2, a_3 sur le plan s_4 dans des sens tels, qu'ils *écrasent* la sphère; leurs points de contact viennent coïncider avec le point de contact du plan s_4 et, comme ils étaient à égale distance de A_4, le point de contact de s_4 sera le centre de la circonférence passant par les trois rabattements de A_4 sur le plan $A_1A_2A_3$.

D'après cela, nous décrivons dans le plan $A_1A_2A_3$ trois circonférences ayant pour centres les points A_1, A_2, A_3 et pour rayons les distances A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4. Soient D_1 et D'_1, D_2 et D'_2, D_3 et D'_3 les intersections de ces courbes deux à deux; ce sont les différents rabattements possibles du sommet A_4 autour des arêtes a_1, a_2, a_3. Si D_1, D_2, D_3 sont situés du même côté de ces arêtes que les sommets opposés A_1, A_2, A_3, les points de contact du plan $A_1A_2A_3$ avec les sphères cherchées sont les centres des circonférences passant par les points suivants :

$$\begin{array}{lll} I_4 \ldots\ldots D_1,\ D_2,\ D_3; & J_{44} \ldots\ldots D'_1,\ D'_2,\ D'_3; & \\ J_{14} \ldots\ldots D'_1,\ D_2,\ D_3; & J_{24} \ldots\ldots D_1,\ D'_2,\ D_3; & J_{34} \ldots\ D_1,\ D_2,\ D'_3; \\ J'_{14} \ldots\ D_1,\ D'_2,\ D_3; & J'_{24} \ldots\ D'_1,\ D_2,\ D'_3; & J'_{34} \ldots\ D'_1,\ D'_2,\ D_3. \end{array}$$

Les droites $D_1D'_1$, $D_2D'_2$, $D_3D'_3$ concourent en un même point H_4, qui est la projection de A_4 sur le plan $A_1A_2A_3$. Comme

$$H_4D_1.H_4D'_1 = H_4D_2.H_4D'_2 = H_4D_3.H_4D'_3,$$

les circonférences $D_1D_2D_3$, $D'_1D'_2D'_3$ sont des lignes inverses par rapport au point H_4, et leurs centres I_4, J_{44} sont en ligne droite avec H_4; cette dernière propriété résulte aussi de ce que les plans bissecteurs des dièdres A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3 du tétraèdre se coupent suivant une même droite passant par A_4, I, J_4. Les points I_4, J_{44} sont des points inverses par rapport au triangle $A_1A_2A_3$; car les lignes A_1I_4, A_1J_{44}, par exemple, sont perpendiculaires aux lignes D_2D_3, $D'_2D'_3$ qui, étant antiparallèles par rapport aux droites $D_2D'_2$, $D_3D'_3$, le sont aussi par rapport à A_1A_3, A_1A_2. Cette proposition peut se démontrer directement; en effet, si X, Y, Z, X', Y', Z' sont les projections de I_4, J_{44} sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, les triangles II_4X et $X'J_{44}J_4$, ... sont semblables, d'où les égalités

$$I_4X.J_{44}X' = I_4Y.J_{44}Y' = I_4Z.J_{44}Z' = II_4.J_4J_{44},$$

de sorte que les coordonnées normales de J_{44} sont inversement proportionnelles à celles de I_4.

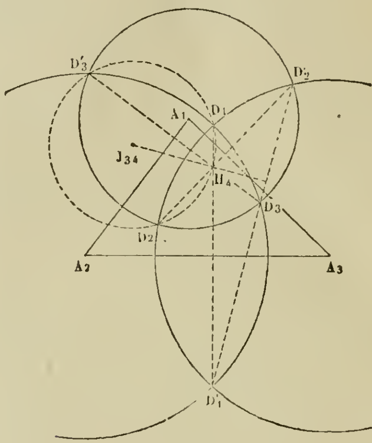
Ainsi, *les points* I_4 *et* J_{44}, J_{14} *et* J'_{14}, J_{24} *et* J'_{24}, J_{34} *et* J'_{34} *sont des points inverses par rapport au triangle* $A_1A_2A_3$; *ils sont situés sur quatre droites passant par* H_4.

18. Les triples de points $D_1D_2D_3$, $D'_1D'_2D'_3$, $D'_1D_2D_3$, $D_1D'_2D_3$, $D_1D_2D'_3$ sont toujours les sommets de triangles proprement dits; par conséquent,

les points I_4, J_{44}, J_{14}, J_{24}, J_{34} sont à distance finie; la sphère inscrite et les sphères exinscrites existent toujours.

Si les points D'_1, D'_2, D_3 sont situés en ligne droite (*fig.* 3), le point J'_{34} se transporte à l'infini dans la direction perpendiculaire à $D'_1 D'_2$; et nous dirons que la sphère J'_3 disparaît à l'infini. La circonférence $D_1 D_2 D'_3$ passe maintenant par H_4 et son centre J_3 est situé sur la circonférence circonscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$, à l'intersection avec la perpendiculaire

Fig. 3.



abaissée de H_4 sur $D'_1 D'_2$. Le triangle $D_1 D_2 D'_3$ est symétriquement semblable à $A_1 A_2 A_3$. Le quadrilatère inscrit $D_1 D_2 D'_3 H_4$ donne

$$D_1 D_2 . H_4 D'_3 = D_1 D'_3 . H_4 D_2 + D_2 D'_3 . H_4 D_1$$

ou, en remplaçant les côtés de $D_1 D_2 D'_3$ par ceux de $A_1 A_2 A_3$,

$$A_1 A_2 (C_3 D_3 + C_3 H_4) = A_1 A_3 (C_2 D_2 - C_2 H_4) + A_2 A_3 (C_1 D_1 - C_1 H_4),$$

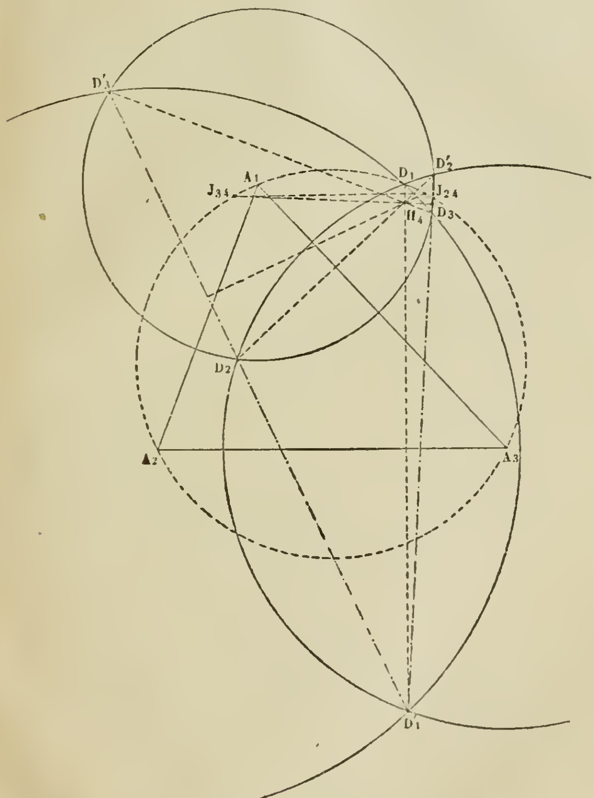
d'où l'on tire aisément

$$s_3 + s_4 = s_1 + s_2.$$

Telle est la condition pour que la sphère J'_3 disparaisse. On peut lui donner d'autres formes. En effet, les angles $D'_3 D_3 D'_2$, $D'_3 D_3 D'_1$ doivent être supplémentaires; mais, dans les deux circonférences ayant pour centres A_1, A_2, ces angles inscrits et les angles aux centres $D'_2 A_1 D'_3$, $D'_3 A_2 D'_1$ sous-tendent des arcs ayant les mêmes extrémités. On conclut de là que *la somme des angles plans composant les trièdres* A_1, A_2 *du tétraèdre égale quatre droits*, ou que, dans *le quadrilatère gauche* $A_1 A_3 A_2 A_4$, *la somme de deux angles opposés égale celle des autres angles opposés*. Observons également que *le triangle* $D'_2 D'_1 D'_3$ *est semblable à* $A_1 A_2 A_4$; l'angle $D'_3 D'_2 D'_1$, par exemple, étant égal à la moitié de l'angle au centre $D'_3 A_1 D_3$ qui, dans la circonférence $D'_3 D'_2 D_3$, sous-tend le même arc.

La combinaison $D'_1 D'_2 D_3$ conduit à une sphère inscrite dans le comble $A_1 A_2$ ou dans le comble $A_3 A_4$, suivant que la droite $D'_1 D'_2$ passe ou non

Fig. 4.



entre les points D_3, D'_3. La somme des angles $D'_3 D_3 D'_2$, $D'_3 D_3 D'_1$ est, respectivement, supérieure ou inférieure à deux angles droits et, dans le quadrilatère gauche $A_1 A_3 A_2 A_4$, la somme des angles opposés à la diagonale A_1A_2 est, respectivement, inférieure ou supérieure à celle des angles opposés à la diagonale A_3A_4.

19. Les deux sphères J'_2, J'_3 disparaissent à l'infini, lorsque les points D'_1, D_2, D'_3 sont en ligne droite, ainsi que D'_1, D'_2, D_3. Les deux circonférences $D_1D'_2D_3$, $D_1D_2D'_3$ (*fig.* 4) passent maintenant par H_4; les points J_{24}, J_{34} sont situés à l'intersection de la circonférence $A_1A_2A_3$ avec les perpendiculaires abaissées de H_4 sur les droites $D'_1D'_3$, $D'_1D'_2$, et la droite qui les joint est perpendiculaire au milieu de H_4D_1 et, par suite, parallèle à A_2A_3.

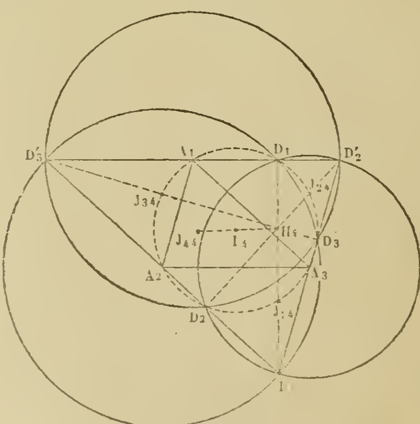
Les deux triangles $D_1D_2D'_3$, $D_1D'_2D_3$ sont symétriquement semblables à $A_1A_2A_3$. Le triangle $D'_1D'_2D'_3$ est équiangle à chacune des faces $A_2A_1A_4$, $A_3A_4A_1$; donc celles-ci sont égales entre elles, et

$$A_1A_2 = A_3A_4, \qquad A_1A_3 = A_2A_4.$$

Ainsi, *deux sphères inscrites dans les combles disparaissent, lorsque le tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées égales.*

Le parallélipipède circonscrit au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ est droit et a pour base un parallélogramme obliquangle (p. 523, *exercice* 660). Parmi les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées du tétraèdre (ces droites sont appelées *médianes* du tétraèdre), l'une est perpendiculaire sur les deux autres.

Fig. 5.



20. Les trois sphères J'_1, J'_2, J'_3 disparaissent si les trois triples $D'_1D'_2D_3$, $D_1D'_2D'_3$, $D'_1D_2D'_3$ sont sur trois droites (*fig.* 5). Alors les arêtes opposées A_2A_3 et A_1A_4, A_3A_1 et A_2A_4, A_1A_2 et A_3A_4 sont égales, et les quatre faces du tétraèdre sont égales entre elles. Les points A_1, A_2, A_3

sont les milieux des côtés du triangle $D'_1 D'_2 D'_3$; les points D_1, D_2, D_3 sont les pieds des hauteurs du même triangle. Les points J_{14}, J_{24}, J_{34} sont les milieux des segments $D'_1 H_4$, $D'_2 H_4$, $D'_3 H_4$ compris entre les sommets du triangle $D'_1 D'_2 D'_3$ et son orthocentre H_4; I_4 est le centre du cercle $A_1 A_2 A_3$, J_{44} est l'orthocentre du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Le tétraèdre particulier que nous venons de considérer a reçu le nom de *tétraèdre équifacial*. Le parallélipipède circonscrit est rectangle; les trois médianes sont perpendiculaires deux à deux et leur point de concours est à la fois le centre de gravité du tétraèdre, le centre de la sphère circonscrite et celui de la sphère inscrite. D'après ce que l'on a vu plus haut, *les points de contact de la sphère inscrite avec les faces sont les centres des cercles circonscrits à ces faces; les points de contact* intérieurs *des sphères exinscrites sont les orthocentres des faces;* enfin, *les points de contact* extérieurs *des sphères exinscrites sont situés sur la sphère circonscrite au tétraèdre. Les centres des sphères exinscrites sont les symétriques des sommets du tétraèdre par rapport au centre de la sphère inscrite;* ce sont donc des sommets du parallélépipède circonscrit au tétraèdre.

21. La proposition (N., 14, 2°) peut être énoncée ainsi :

Si une sphère touche les faces d'un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ *aux points* P_1, P_2, P_3, P_4, *les droites* $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$, $A_4 P_4$ *sont des génératrices d'un même mode, d'un hyperboloïde; les droites qui joignent les points* P_1, P_2, P_3, P_4 *aux centres des symédianes des triangles* $P_2 P_3 P_4$, $P_3 P_4 P_1$, $P_4 P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$ *sont des génératrices du second mode de la même surface.*

De ce théorème et des n^{os} (N., 16 et 17), on déduit que *les droites* $A_1 J_{11}$, $A_2 J_{22}$, $A_3 J_{33}$, $A_4 J_{44}$, *joignant les sommets d'un tétraèdre* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *aux points de contact des faces opposées avec les sphères exinscrites correspondantes, forment un quadruple hyperboloïdique. Les droites* $A_1 J_{11}$, $A_2 J'_{32}$, $A_3 J'_{23}$, $A_4 J'_{14}$ *jouissent de la même propriété.*

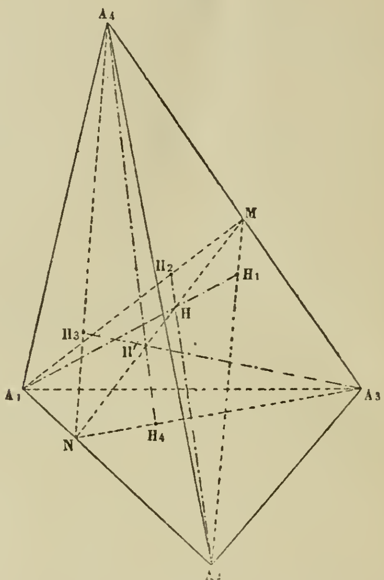
SUR LES HAUTEURS D'UN TÉTRAÈDRE.

22. Nous désignons (*fig.* 6) par H_1, H_2, H_3, H_4 les projections des sommets du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ sur les faces opposées.

Si deux hauteurs $A_1 H_1$, $A_2 H_2$ *se coupent en un point* H, *les arêtes* $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ *sont perpendiculaires, et les hauteurs* $A_3 H_3$, $A_4 H_4$ *se coupent également en un point* H'; *les points* H, H' *sont situés sur la plus courte distance* MN *des arêtes* $A_1 A_2$, $A_3 A_4$.

En effet, le plan $A_1 A_2 H$ est perpendiculaire aux plans $A_2 A_3 A_4$, $A_1 A_3 A_4$ et, par suite, à leur intersection $A_3 A_4$ (558, 561); donc $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ sont rectangulaires. Réciproquement, si ces arêtes font un angle droit, on peut mener par $A_1 A_2$ un plan α perpendiculaire à $A_3 A_4$, et ce plan contient nécessairement les hauteurs A_1H_1, A_2H_2 (521); de même, le plan α' mené par A_3A_4 perpendiculairement à A_1A_2 contient les droites A_3H_3, A_4H_4. Les plans α, α' se coupent suivant une droite MN, qui est la per-

Fig. 6.



pendiculaire commune à A_1A_2, A_3A_4; cette droite est une hauteur de chacun des triangles A_1A_2M, A_3A_4N.

On trouve facilement les égalités

$$\overline{A_4M}^2 - \overline{A_3M}^2 = \overline{A_4A_2}^2 - \overline{A_3A_2}^2 = \overline{A_4A_1}^2 - \overline{A_3A_1}^2,$$

d'où

$$a_1^2 + a_4^2 = a_2^2 + a_5^2.$$

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées normales d'un point quelconque P de la hauteur A_4H_4; on a

$$x_1 = A_4P\cos\alpha_1, \quad x_2 = A_4P\cos\alpha_2, \quad x_3 = A_4P\cos\alpha_3,$$

d'où

$$\frac{x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{x_3}{\cos\alpha_3}.$$

De même, pour les coordonnées de tout point de A_3H_3,

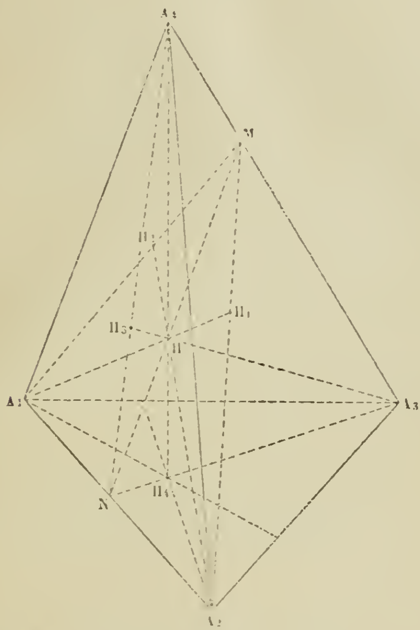
$$\frac{x_1}{\cos\alpha_5} = \frac{x_2}{\cos\alpha_6} = \frac{x_4}{\cos\alpha_3}.$$

Si les hauteurs A_4H_4, A_3H_3 ont un point commun H', on a, nécessairement,

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_4 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_5.$$

23. Supposons maintenant (*fig.* 7) que les trois hauteurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 concourent en un même point H. Alors, d'après ce qui pré-

Fig. 7.



cède, les arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4, A_2A_3 et A_4A_1, A_3A_1 et A_4A_2 sont perpendiculaires, et

$$a_1^2 + a_4^2 = a_2^2 + a_5^2 = a_3^2 + a_6^2,$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_4 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_5 = \cos\alpha_3 \cos\alpha_6;$$

de plus, la hauteur A_4H_4 passe également par H. Les plus courtes distances des arêtes opposées se coupent également en H; les pieds de ces droites sont les pieds des hauteurs des faces du tétraèdre, et les points H_1, H_2, H_3, H_4 sont les orthocentres des faces.

Le tétraèdre particulier que nous venons de rencontrer a été appelé *tétraèdre orthocentrique*.

24. *Dans tout tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$, *les milieux des*

arêtes et les pieds des plus courtes distances des arêtes opposées sont douze points d'une même sphère, ayant pour centre le centre de gravité G *du tétraèdre* (première sphère de douze points).

Car, les milieux de deux couples d'arêtes opposées étant les sommets d'un rectangle, les trois médianes du tétraèdre sont égales, et G est le centre d'une sphère passant par les milieux des six arêtes. Cette sphère passe, évidemment, par les circonférences des neuf points des faces du tétraèdre; donc elle contient les pieds des hauteurs de ces faces, et son centre est au milieu de la distance comprise entre l'orthocentre H du tétraèdre et le centre O de la sphère circonscrite ([1]).

25. *Dans tout tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$, *les centres de gravité des faces, leurs orthocentres et les points qui divisent dans le rapport* 2 : 1 *les segments des hauteurs du tétraèdre compris entre les sommets et leur point de concours* H, *sont douze points d'une même sphère, dont le centre* O′ *divise la distance* HO *dans le rapport* 1 : 2 (seconde sphère de douze points).

En effet, les centres de gravité G_1, G_2, G_3, G_4 des faces du tétraèdre sont les sommets d'un tétraèdre homothétique à $A_1A_2A_3A_4$ par rapport à G; les hauteurs de ce nouveau tétraèdre concourent donc en un même point H′ de la droite HG, et l'on a $HG = 3GH'$; le centre O′ de la sphère $G_1G_2G_3G_4$ divise la distance HO dans le rapport 3 : 1. Comme on a $H_1G_1 = 3G_1O_1$ et, par suite, $HH' = 3H'O$, on voit aisément que

$$HO' = O'H' = H'O.$$

Donc O′ est à la rencontre des perpendiculaires élevées sur les faces du tétraèdre par les milieux des segments H_1G_1, H_2G_2, ...; par conséquent, la sphère O′ passe également par les points H_1, H_2, ... Enfin, la droite G_kO' coupe A_kH en un point L_k appartenant à la sphère O′ et tel, que $L_kH = H'G_k = \frac{1}{3}A_kH$.

Remarque. — Les points H, H′ sont des points inverses par rapport au tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Les droites A_1H', A_2H', A_3H', A_4H' sont perpendiculaires aux faces de tétraèdre $H_1H_2H_3H_4$.

26. *Un tétraèdre orthocentrique* $A_1A_2A_3A_4$ *est autopolaire par rapport à une sphère ayant pour centre l'orthocentre du tétraèdre.*

Car, H étant l'orthocentre des triangles A_1A_2M, ..., on a

$$HA_1 . HH_1 = HA_2 . HH_2 = HA_3 . HH_3 = HA_4 . HH_4;$$

donc chaque sommet est le pôle de la face opposée par rapport à la sphère décrite du centre H avec le rayon $\sqrt{HA_1 . HH_1}$. Toutefois, pour que cette sphère soit réelle, H doit tomber à l'extérieur du tétraèdre,

([1]) Comparer ce qui précède avec les Exercices 639, 640, 641, 1029, 1025 (p. 520, 521, 559).

ce qui exige que l'un des angles solides du tétraèdre soit composé de trois angles plans obtus.

REMARQUE.

Les sphères circonscrites aux tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$ et $H_1H_2H_3H_4$, la première sphère de douze points de $A_1A_2A_3A_4$ et la sphère conjuguée ont pour plan radical commun le plan d'homologie des tétraèdres $A_1A_2A_3A_4$, $H_1H_2H_3H_4$.

27. Les points A_1, A_2, A_3, A_4, H sont les sommets d'un *pentagone orthocentrique :* la droite qui joint deux quelconques de ces points est perpendiculaire au plan passant par les trois autres points ; chacun de ces points est l'orthocentre du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres points.

Pour construire un tétraèdre orthocentrique, on peut prendre arbitrairement les sommets A_1, A_2, A_3 ; le quatrième sommet A_4 est un point quelconque de la perpendiculaire menée sur le plan du triangle $A_1A_2A_3$ par son orthocentre. On peut également se donner à volonté un trièdre $A_4A_1A_2A_3$; les plans menés par les arêtes du trièdre perpendiculairement sur les faces opposées (*plans-hauteurs*), se coupent suivant une même droite A_4X, et un plan perpendiculaire à A_4X forme avec le trièdre donné un tétraèdre orthocentrique.

Les arêtes d'un trièdre et l'intersection de ses plans-hauteurs constituent un *quadrarête orthique :* chacune de ces droites est l'intersection des plans-hauteurs du trièdre ayant pour arêtes les trois autres. Un plan perpendiculaire à l'une des droites coupe les quatre lignes aux sommets d'un *quadrangle orthique,* c'est-à-dire en quatre points dont chacun est l'orthocentre du triangle des trois autres sommets.

Les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique forment un quadrarête orthique.

28. On sait que toute conique passant par les sommets d'un triangle et par son orthocentre est une hyperbole équilatère. (*Exercice* 1067, p. 563.)

Un cône du second ordre, circonscrit à un quadrarête orthique $SAA_1A_2A_3$ jouit également de propriétés particulières : *il est capable d'une infinité de trièdres trirectangles, et d'une infinité de quadrarêtes orthiques.*

En effet, un plan α perpendiculaire à la droite SA coupe le cône suivant une conique K, et les droites SA, SA_1, SA_2, SA_3 en des points que nous indiquons par A, A_1, A_2, A_3. Comme A est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$, K est une hyperbole équilatère.

Prenons sur K un point quelconque B_1, et menons par S un plan perpendiculaire à la droite SB_1 ; si B_2, B_3 sont les points de rencontre de ce plan avec K, A est l'orthocentre du triangle $B_1B_2B_3$, car ce triangle est inscrit à l'hyperbole équilatère et la droite B_1A est perpendiculaire à B_2B_3. Soient C_1, C_2, C_3 les points où les droites B_1A, B_2A, B_3A

coupent B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2. On a $AB_1 . AC_1 = AB_2 . AC_2 = AB_3 . AC_3$ et, comme $\overline{SA}^2 = - AB_1 . AC_1$, on a aussi $\overline{SA}^2 = - AB_2 . AC_2 = - AB_3 . AC_3$, d'où l'on conclut que les angles B_2SC_2, B_3SC_3 sont droits et que le trièdre $SB_1B_2B_3$ est trirectangle.

Réciproquement, tout cône du second ordre circonscrit à un trièdre trirectangle $SB_1B_2B_3$ jouit de la propriété que les plans-hauteurs de tout trièdre inscrit SAA_1A_2 se coupent sur le cône. Car, si un plan α perpendiculaire à SA coupe les arêtes des deux trièdres en B_1, B_2, B_3, A, A_1, A_2 et le cône suivant la conique K, le point A est, d'après un théorème connu, l'orthocentre du triangle $B_1B_2B_3$; il en résulte que K est une hyperbole équilatère. Soit A_3 le point où la perpendiculaire menée de A sur A_1A_2 coupe l'hyperbole; A est l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$ et, par suite, SA est l'intersection des plans-hauteurs du trièdre $SA_1A_2A_3$, et SA_3 celle des plans-hauteurs du trièdre SAA_1A_2.

Le cône que nous venons de rencontrer est dit *cône équilatère;* comme une génératrice quelconque SB_1 est une arête d'un trièdre trirectangle inscrit $SB_1B_2B_3$, un plan perpendiculaire à SB_1 coupe le cône suivant une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à SB_2, SB_3.

29. *Les hauteurs d'un tétraèdre quelconque* $A_1A_2A_3A_4$ *sont des génératrices d'un hyperboloïde équilatère, dont le centre* ω *est symétrique du centre* O *de la sphère circonscrite par rapport au centre de gravité* G.

Soient A_1H_1, ..., les hauteurs du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et h_1, ..., les orthocentres des faces. Les plans $H_1A_1h_4$, $H_2A_2h_4$, $H_3A_3h_4$ sont perpendiculaires au plan $A_1A_2A_3$, car ils contiennent, chacun, deux perpendiculaires à un même côté de triangle $A_1A_2A_3$. Il résulte de là que la perpendiculaire h_4x menée par h_4 sur le plan $A_1A_2A_3$ rencontre les quatre hauteurs du tétraèdre. On peut de même trouver trois autres droites s'appuyant sur A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4. Les hauteurs sont donc des génératrices d'un même hyperboloïde.

Cette surface est coupée par le plan $A_1A_2A_3$ suivant une hyperbole équilatère K, car les points A_1, A_2, A_3, h_4 appartiennent à la courbe d'intersection. Or, trois génératrices du cône asymptote sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole K et à A_1H_1; ce cône est donc équilatère.

Le centre ω de l'hyperboloïde est équidistant des génératrices parallèles A_4H_4, h_4x. Celles-ci étant contenues dans les plans menés par les points A_4, A_1 perpendiculairement à A_2A_3, ω est situé dans le plan mené par le milieu de A_4A_1 perpendiculairement à A_2A_3, plan qui est symétrique, par rapport à G, du plan perpendiculaire au milieu de A_2A_3. On en conclut que ω et O sont symétriques par rapport à G.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

66524 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.