Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr ABIDI Farid	**Devoir de contrôle n°1** Mathématiques 27 Oct 2008	Classes : 4M-1&2 Durée : 2h

<u>Exercice 1 : (4 points)</u>

Dans le tableau suivant, à chaque question, une seule des réponses proposées est correcte.

Ecrire le numéro de la question et donner, **sans justification**, la réponse qui lui correspond.

Nº	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z, alors un argument de $\frac{i}{\bar{z}^2}$ est:	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
2	Si $z=-\sqrt{3}+e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est:	$e^{\frac{5\pi}{6}i}$	$e^{\frac{7\pi}{6}i}$	$\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$	$e^{-\frac{5\pi}{6}i}$
3	Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $\lvert z\rvert=2$ et $z'=z-\frac{1}{\bar{z}}$, alors $\lvert z'\rvert=$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
4	Si z est un nombre complexe tel que $\lvert z\rvert=\sqrt{2}$, alors $\lvert \bar{z}+i\bar{z}\rvert=$	$2\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Exercice2 : (6 points)</u>

Dans le plan complexe muni d'un un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne le point A d'affixe i . A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}$.

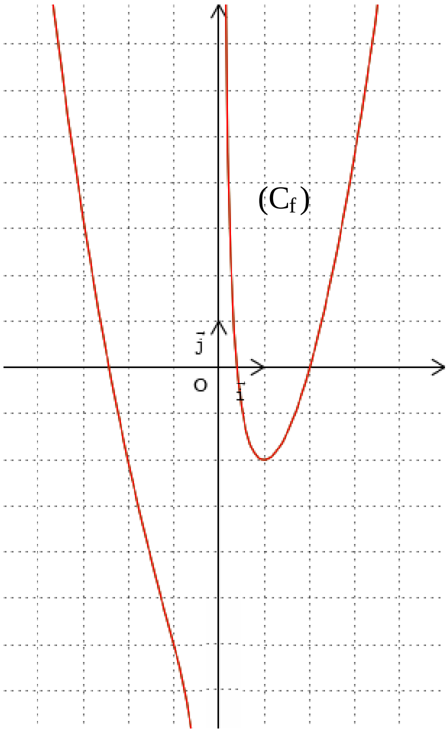
1. Montrer que, lorsque M décrit l'axe réel, le point M' décrit le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) de centre O.
2. On pose $z=1+i+e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$ et on considère le point B d'affixe 1 + i.
   a) Quelle est la courbe (Γ) décrite par le point M, d'affixe z, lorsque θ décrit $\left]-\pi,\pi\right[$?
   b) Montrer que pour tout θ de $\left]-\pi,\pi\right[$, $z'-i=1+i\tan\frac{\theta}{2}$.
   c) En déduire que $\overrightarrow{BM'}=\tan\frac{\theta}{2}\vec{v}$. A quelle courbe appartient le point M' ?

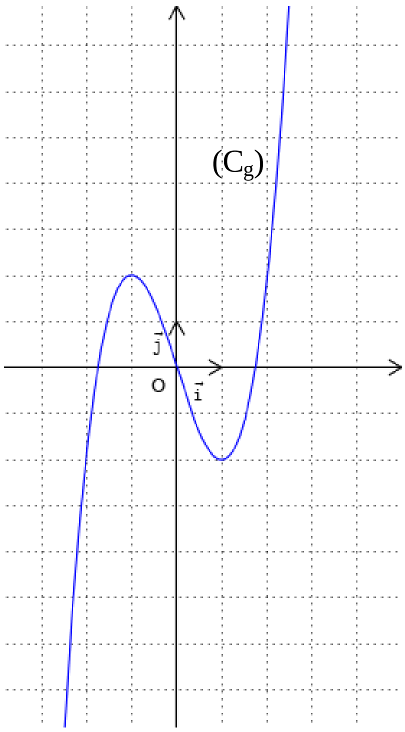
Exercice 3 : (5 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ sont tracées chacune à part les courbes (C_f) et (C_g) représentatives des fonctions f et g . L'axe des abscisses est une asymptote à (C_f).

Déterminer à l'aide des graphiques et en justifiant :

1. $g\circ f\left([1,2]\right)$ et $f\circ g\left(]-\infty,-2]\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} f\circ g(x)$





Exercice 4: (5 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x)=x^3-2nx+1$.

1. Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur [0, 1].
2. Prouver que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution a_n dans]0, 1[.
3. a) Vérifier que, pour tout entier $n\geq 2$, $f_{n+1}(a_n)=-2a_n$.

   b) Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (a_n) est convergente.
4. a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $a_n\leq\dfrac{1}{n}$.

   b) Préciser la limite de la suite (a_n).

Exercice 1 :

Question	Corrigé	
1	$\arg\left(\dfrac{i}{\bar{z}^2}\right) \equiv \arg(i) - 2\arg(\bar{z}) \quad [2\pi]$ $\equiv \dfrac{\pi}{2} - 2\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \quad [2\pi]$ $\equiv \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ $\equiv \dfrac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$	**d**
2	$z = -\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$	**a**
3	$z' = \dfrac{z\bar{z}-1}{z} = \dfrac{\lvert z\rvert^2 - 1}{z} = \dfrac{3}{z}$ donc $\lvert z'\rvert = \dfrac{3}{\lvert z\rvert} = \dfrac{3}{2}$	**c**
4	$\lvert \bar{z} + i\bar{z}\rvert = \lvert \bar{z}(1+i)\rvert = \lvert\bar{z}\rvert \times \lvert 1+i\rvert = \sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$	**b**

Exercice 2 :

1. M décrit l'axe réel $\Leftrightarrow$ z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ainsi $\lvert z'\rvert = \left\lvert \dfrac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}\right\rvert = \left\lvert \dfrac{iz+1}{z+i}\right\rvert = \dfrac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{z^2+1}} = 1$

Il en résulte que , lorsque M décrit l'axe réel, OM' = 1 donc M' décrit le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$) de centre O.

2. On pose $z = 1 + i + e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

a) $z = 1 + i + e^{i\theta} \Leftrightarrow z - (1+i) = e^{i\theta}$.

D'où : $\lvert z - (1+i)\rvert = 1 \Leftrightarrow BM = 1$ donc M appartient au cercle de centre B et de rayon 1.

D'autre part, $-\pi < \theta < \pi$, il en résulte que, lorsque θ décrit $\left]-\pi, \pi\right[$, l'ensemble des points est le cercle ($\mathscr{C}'$) de centre B et de rayon 1 privé du point A.

b) Pour tout θ de $]-\pi,\pi[$,

$$z'-i=\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i}-i=\frac{2}{\bar{z}+i}=\frac{2}{1+e^{-i\theta}}=\frac{2}{e^{-i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}+\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)^2}=\frac{2}{e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\theta}{2}}}.$$

$$=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=1+i\tan\frac{\theta}{2}$$

c) $-\pi<\theta<\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Considérons la fonction f définie sur $]-\pi,\pi[$ par $f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}$;

F est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et pour tout θ de $]-\pi,\pi[$, $f'(\theta)=\frac{1}{2}\left[1+\tan\frac{\theta}{2}\right]>0$.

Il en résulte que f est continue et strictement croissante sur $]-\pi,\pi[$

d'où $f(]-\pi,\pi[)=\left]\lim\limits_{\theta\to-\pi^+}f(\theta),\lim\limits_{\theta\to\pi^-}f(\theta)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ donc $\tan\frac{\theta}{2}$ décrit $\mathbb{R}$.

D'autre part z' – i = 1 + i $\tan\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow z'-(1+i)=i\tan\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM'}=\tan\frac{\theta}{2}\vec{v}$.

On en déduit que M' appartient à la droite $(B,\vec{v})$

Exercice 3 :

1. On a : $f([1,2])=[-2,0]$ et $g([-2,0])=[-2,2]$ donc $g\circ f([1,2])=[-2,2]$.

   $g(]-\infty,-2])=]-\infty,-2]$ et $f(]-\infty,-2])=[-2,+\infty[$ donc $f\circ g(]-\infty,-2])=[-2,+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}g\circ f(x)=+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}g\circ f(x)=+\infty$.

   $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^-}f\circ g(x)=+\infty$.

Exercice 4:

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $f_n(x)=x^3-2nx+1$.

1. La fonction f_n étant une fonction polynôme donc f_n est dérivable sur [0, 1].

   Pour tout x de [0, 1], $f_n'(x)=3x^2-2n$.

Or $0 \le x \le 1 \Rightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow 3x^2 \le 3 \Leftrightarrow f_n'(x) \le 3-2n$;

d'autre part , $n \ge 2 \Leftrightarrow -2n \le -4 \Leftrightarrow 3-2n \le -1$ d'où $3-2n < 0$.

Par suite, pour tout x de [0, 1], $f_n'(x) < 0$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur [0, 1].

2. f_n est continue et strictement décroissante sur [0, 1].

   $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2-2n$ et comme $n \ge 2$ alors $-2n \le -4$ d'où $2-2n \le -2$, on en déduit que $f_n(1) < 0$.

   Il en résulte que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans]0, 1[.

3. a) Pour tout entier $n \ge 2$,

   $f_{n+1}(a_n) = a_n{}^3 - 2(n+1)a_n + 1 = a_n{}^3 - 2n\,a_n + 1 - 2a_n = f_n(a_n) - 2a_n = -2a_n$.

   b) Pour tout entier $n \ge 2$, $f_{n+1}(a_n) = -2a_n < 0$;

   or $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$.

   Comme f_{n+1} est strictement décroissante sur [0, 1] , nécessairement $a_n > a_{n+1}$.

   (Sinon $a_n \le a_{n+1} \Rightarrow f_{n+1}(a_n) \ge f_{n+1}(a_{n+1})$ ce qui est absurde !)

   Par conséquent, la suite (a_n) est décroissante.

   c) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc (a_n) est convergente.

4. a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

   $f_n(a_n) = 0$ et $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} - 2n\frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{n^3} - 1 < 0$ donc $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(a_n)$.

   Or f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ donc $a_n \le \frac{1}{n}$

   c) Pour tout $n \ge 2$, $0 < a_n \le \frac{1}{n}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.