# الباب 5

# التـــرتيب والمقارنة والحصر في $\mathbb{R}$

1)الترتيب والجمع 2) الترتيب والضرب 3) مقارنة المقلوب ومقارنة المربعين

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
الاصلاح على الموقع : l'apothème

## I – مقارنة عددين حقيقيين :

### 1) خاصية :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان .

$a \le b$ يعني $a-b \in \mathbb{R}^-$

$a \ge b$ يعني $a-b \in \mathbb{R}^+$

### 2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5) &= 2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5\\ &= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4\\ &= \sqrt{3}+1\end{aligned}$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1 \ge 0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5) \ge 0$ و منه فإن :

$$\underline{2\sqrt{3}-4 \ge \sqrt{3}-5}$$

2) -- لنقارن العددين : $x$ و $y$ بحيث : $x = y-3$ .

لدينا : $x-y = -3$

و بما أن : $-3 \le 0$ فإن : $x-y \le 0$ وبالتالي : $\underline{x \le y}$

## II – الترتيب و العمليات :

### 1) – الترتيب و الجمع :

#### أ) - خاصية ① :

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

إذا كان $a \le b$ فإن $a+c \le b+c$

إذا كان $a+c \le b+c$ فإن $a \le b$

* مثال : نعتبر $x$ عددا حقيقيا بحيث : $x<3$ .

لنقارن العددين $-2$ و $x-5$ .

لدينا : $x<3$ يعني أن :

$$x+(-5)<3+(-5)$$
$$x-5<3-5$$

و بالتالي فإن : $\underline{x-5<-2}$

#### ب) - خاصية ② :

$a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد حقيقية .

إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فإن $a+c \le b+d$

* مثال :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $x<3$ و $2>y$ .

لنبين أن : $x+y<5$ .

لدينا : $\left.\begin{matrix} x<3 \\ 2>y \end{matrix}\right\}$ يعني أن : $\left.\begin{matrix} x<3 \\ y<2 \end{matrix}\right\}$ إذن : $x+y<2+3$

و باتالي فإن : $\underline{x+y<5}$

### 2) – الترتيب و الضرب :

#### أ) - خاصية ① :

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

$a \le b$ و $c \prec 0$ يعني $a \times c \le b \times c$

$a \le b$ و $c \succ 0$ يعني $a \times c \ge b \times c$

* مثال :

◊ نفترض : $a \leq \sqrt{5}+1$ برهن أن $\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq 4$ .

لدينا $\sqrt{5}-1 \in \mathbb{R}^+$ و $a \leq \sqrt{5}+1$ اذن

$\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq \underbrace{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}_{4}$ . ومنه $\underline{\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq 4}$

◊ نفترض : $a \prec 2\sqrt{3}$ برهن أن $-\sqrt{3}a \succ -6$

لدينا $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ و $a \prec 2\sqrt{3}$ اذن $-\sqrt{3}a \succ \underbrace{-\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}_{-6}$ ومنه

$$\underline{-\sqrt{3}a \succ -6}$$

**<u>ب) - خاصية ② :</u>**

$a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد حقيقية موجبة.

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \text{و} \\ c \leq d \end{array}\right\}$ فإن $a \times c \leq b \times d$

* مثال :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$ .

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$ .

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ اذن :

$$x \times y < \sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$$
$$xy < 2\sqrt{3\times 6}$$
$$xy < 2\sqrt{18}$$
$$xy < 2\sqrt{9\times 2}$$
$$xy < 2\sqrt{3^2\times 2}$$
$$xy < 2\times 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

## 3) – الترتيب و المقلوب :

أ) - خاصية :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ فإن $a \leq b$

ب) - مثال : لدينا : $5 \leq 20$ لكن

$\frac{1}{5} = 0,2$ ; $\frac{1}{20} = 0,05$ ; $0,2 \geq 0,05$

$5 \leq 20$ لكن $\frac{1}{5} \geq \frac{1}{20}$

## 4) – الترتيب و المربع :

أ) - خاصية ① :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$

إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$5 \leq 11$ ولدينا $11^2 = 121$ ; $5^2 = 25$ ونلاحظ ان $25 \leq 121$

$50 \geq 49$ ولدينا اي $\left(5\sqrt{2}\right)^2 \geq 7^2$ ومنه $5\sqrt{2} \geq 7$

ب) - خاصية ② :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان سالبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$

إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$ .

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{6}^2=6\\ \left(3\sqrt{2}\right)^2=18\end{array}\right\}$ إذن $\sqrt{6}^2\leq\left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6}\leq 3\sqrt{2}$ . و بالتالي

فإن : $-\sqrt{6}\geq -3\sqrt{2}$

## 5) – الترتيب و الجذر التربيعي :

### أ) - خاصية :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a\leq b$ فإن $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

إذا كان $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$ فإن $a\leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$ .

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{10}=\sqrt{10}\\ 3\sqrt{3}=\sqrt{9}\sqrt{3}=\sqrt{27}\end{array}\right\}$ لدينا $10\prec 27$ و منه فإن $\sqrt{10}\prec\sqrt{27}$ اي $\sqrt{10}\prec 3\sqrt{3}$

## III – الحصر :

### 1) – حصر مجموع عددين :

$a$ و $b$ و $x$ و $y$ و $z$ و $t$ أعداد حقيقية بحيث :

$x\leq a\leq y$ و $z\leq b\leq t$

$x+z\leq a+b\leq y+t$

* مثال :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $3\leq x\leq 8$ و $-4\leq y\leq 2$

لنحصر $x+y$ .

لدينا : $3+(-4)\leq x+y\leq 8+2$

إذن : $-1\leq x+y\leq 10$

## 2) – حصر مقابل عدد حقيقي :

$a$ عدد حقيقي بحيث : $x \le a \le y$

سيكون لدينا : $-y \le -a \le -x$

## 3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

**ملاحظة هامة** : لحصر $a-b$ ، نكتب $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$ ؛ لنحصر $x-y$ .

لدينا : $-2 \le -y \le 4$ و $3 \le x \le 8$ إذن : $3-2 \le x+(-y) \le 8+4$

و منه فإن : $\underline{1 \le x-y \le 12}$

## 4) – حصر جذاء عددين حقيقيين :

$a$ و $b$ و $x$ و $y$ و $z$ و $t$ أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$x \times z \le a \times b \le y \times t$

* مثال 1 :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $1 \le y \le 3$ ؛ لنحصر $x \times y$ .

لدينا : $3 \times 1 \le x \times y \le 7 \times 3$ إذن : $\underline{3 \le x \times y \le 21}$

* مثال 2 :

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $-5 \le x \le -2$ و $3 \le y \le 6$ ؛ لنحصر $x \times y$ .

لدينا : $2 \le -x \le 5$ إذن : $2 \times 3 \le (-x) \times y \le 5 \times 6$ أي
$6 \le -xy \le 30$

و منه فإن : $\underline{-30 \le xy \le -6}$ .

## 5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

$a$ و $x$ و $y$ أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة

و حيث : $x \le a \le y$

لدينا : $\frac{1}{y} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{x}$

## 6) – حصر خارج عددين :

**ملاحظة هامة** : لحصر $\frac{a}{b}$ ، نكتب $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

*مثال : $x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $5 \le y \le 9$ ؛ لنحصر $\frac{x}{y}$ .

لدينا : $\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\underline{\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}}$

*** تمرين تطبيقي محوصل :**

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية بحيث : $6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أحصر : $a^2$ و $b^2$ و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – حصر $a^2$ .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $\underline{36 \le a^2 \le 64}$

2) – حصر $b^2$ .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $\underline{4 \le b^2 \le 16}$

3) – حصر $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$ و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12 \le a+2b-4c \le 8+(-4)+20$

و منه فإن : $\underline{10 \le a+2b-4c \le 24}$

4) – حصر $\dfrac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \le a+b \le 8+(-2)$ أي $2 \le a+b \le 6$ و $\dfrac{1}{16} \le \dfrac{1}{b^2} \le \dfrac{1}{4}$

إذن : $2 \times \dfrac{1}{16} \le (a+b) \times \dfrac{1}{b^2} \le 6 \times \dfrac{1}{4}$ أي $\dfrac{2}{16} \le \dfrac{a+b}{b^2} \le \dfrac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\underline{\dfrac{1}{8} \le \dfrac{a+b}{b^2} \le \dfrac{3}{2}}$

**خطأ شائع**

1) $-4x \le 12 \Rightarrow \cancel{x \le \dfrac{12}{-4}} \Rightarrow x \le -3$ اصلح الخطأ

2) $x \le y \Rightarrow \cancel{x^2 \le y^2}$ مثال : $-5<2$ لكن $25>4$ اصلح الخطأ

3) $\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{a-a' \le x-x' \le b-b'}$ اصلح الخطأ .

4) الاعداد $a$ و $b$ و $a'$ و $b'$ موجبة قطعا : $\left.\begin{array}{l} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\dfrac{a}{a'} \le \dfrac{x}{x'} \le \dfrac{b}{b'}}$

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
الاصلاح على الموقع : l'apothème

# تمارين

◊ **تمرين1:**

قارن العددين $a$ و $b$ في كل حالة من الحالات الآتية :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | $5+2\sqrt{2}$ | $\frac{21}{3}$ | $\frac{12}{17}$ | $\frac{6}{5}$ | $-\frac{16}{11}$ | $2\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}+1$ | $2\sqrt{2}+1$ | $-4\sqrt{5}$ |
| **b** | $5+\sqrt{10}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{15}{14}$ | $\frac{7}{8}$ | $-\frac{11}{6}$ | $3\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}+2$ | $7+\sqrt{2}$ | $-3\sqrt{2}$ |
| **المقارنة** | ... | $a \succ b$ | ..... | ....... | ........ | ......... | ......... | ........... | ........ |
| **a** | $5-2\sqrt{2}$ | $\frac{21}{33}$ | $0{,}1$ | $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ | $2\sqrt{7}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ |
| **b** | $5-\sqrt{13}$ | $\frac{20}{33}$ | $\frac{1}{11}$ | $-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ | $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ | $-4\sqrt{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $2{,}12$ | $\frac{\sqrt{7}}{5}$ |
| **المقارنة** | ... | ........ | ..... | ....... | ........ | ......... | $a \prec b$ | ........... | ........ |

◊ **تمرين2:**

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعا $a$ و $b$ حيث $a \prec b$ . قارن بين :

1. $\frac{5}{4}b+2$ ; $\frac{2}{3}a-1$ .
2. $2a+6b$ ; $5a+3b$ .
3. $b^2-a$ ; $a^2-b$ .
4. $4a^2+b^2$ ; $4ab-1$ .

◊ **تمرين3:**

1. $x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $x \le y$ . أثبت أن :

$$x\sqrt{7} \le 3y\sqrt{2} \quad ; \quad x-\sqrt{11} \le y+\sqrt{2} \quad ; \quad x+\sqrt{5} \le y+\sqrt{7}$$

$$2x+\frac{1}{\sqrt{7}}\leq 3y+\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \frac{x}{2\sqrt{5}}\leq \frac{y}{3\sqrt{2}}$$

2. $a$ و $b$ عددان حقيقيان بحيث : $a>b$ . بين أن :

$5a>4a+b$ ؛ $5a>3a+2b$ ؛ $a>b-\frac{\sqrt{7}}{2}$ ؛ $-7a+4b<-3b$ ؛

$a\sqrt{2}+b>b\left(\sqrt{2}+1\right)$

◊ **<u>تمرين4:</u>**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان بحيث : $a\geq -12$ و $b\leq 5$ . بين أن :

$$a+\frac{1}{2}\geq \frac{-23}{2} \quad ; \quad b-7\leq -2 \quad ; \quad a-1{,}5\geq -13{,}5 \quad ; \quad b+\frac{3}{4}\leq \frac{23}{4}$$

$$\frac{1}{2}a\geq -6 \quad ; \quad \frac{7}{5}b\leq 7 \quad ; \quad -3a\leq 36 \quad ; \quad -\frac{4}{3}b\geq -\frac{20}{3}$$

$$a-b\geq -17 \quad ; \quad b-a\leq 17$$

◊ **<u>تمرين5:</u>**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $\frac{2}{5}\leq x\leq 1$ و $-5\leq y\leq \frac{3}{2}$

أحصر ما يلي : $x+\frac{7}{5}$ ; $y-\frac{1}{2}$ ; $x-\frac{6}{11}$ ; $y+\frac{3}{5}$

$$5x \quad ; \quad -\frac{7}{5}x \quad ; \quad 2y \quad ; \quad \frac{-3}{2}y$$

$$2x-3y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad 3x+5y \quad ; \quad x+y$$

$$-3x+y+\frac{1}{2} \quad ; \quad -x-2y-22 \quad ; \quad 3x+5y+11$$

$$\frac{3x-5y+4}{-2} \quad ; \quad \frac{-2x+y}{-3}+1 \quad ; \quad \frac{x+y}{2}$$

◊ **تمرين6:**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $x < y$ ؛ أثبت أن : $x < \frac{x+y}{2} < y$ و أن : $x < \frac{2x+3y}{5} < y$.

◊ **تمرين7:**

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية بحيث : $a+c \leq b$ .

بين أن : $a \leq b-c$ و $a+c-b \leq 0$ و $a+2c \leq b+c$ و $2a \leq a+b-c$

◊ **تمرين8:**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $x \leq 5$ و $y \geq 2$ ؛ أثبت أن :

$2x-4y \leq 2$ ; $11-2y \leq 7$ ; $7-x \geq 2$ ; $3x+5 \geq -1$ ; $2x-1 \leq 9$

$\frac{-5x+y}{6} \geq \frac{-9}{2}$ ; $\frac{6y-2}{7} \geq -2$ ; $\frac{5x+1}{4} \leq 4$

◊ **تمرين9:**

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعا $a$ و $b$ حيث $a \prec b$ . قارن بين :

1 - $\frac{ab}{a+b}$ ; $\frac{a+b}{4}$.

2 - $\frac{2}{2a+6b}$ ; $\frac{\pi}{5a+3b}$.

3 - $\sqrt{\frac{23}{b}}$ ; $\frac{5}{\sqrt{a}}$.

4 - $b\left(\sqrt{13}-a\right)$ ; $a\left(\sqrt{13}-b\right)$ .

◊ **تمرين10:**

نعتبر العددين الحقيقيين $a$ و $b$ التاليين :

$a=\frac{12\sqrt{2}-18}{\sqrt{18}}$ و $b=\sqrt{14}+\sqrt{45}-\sqrt{20}-3\sqrt{5}$ .

ا- بين ان $a=2-1,5\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{14}-2\sqrt{5}$ .

ب- ماهي علامة كل من $a$ و $b$ ؟ علل جوابك.

ت- احسب $a^2$ و $b^2$ .

ج- قارن بين $a^2$ و $b^2$ ثم استنتج مقارنة بين $a$ و $b$ .

◊ **تمرين11:**

$a$ و $b$ و $x$ أعداد حقيقية موجبة قطعا.

1) – بين أن : $x+\frac{1}{x}\geq 2$ .

2) – استنتج أن : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ و أن $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

◊ **تمرين12:**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان موجبان قطعا بحيث : $x+\frac{1}{y}\geq 2$ و $y+\frac{1}{x}\geq 2$ و $x+y=1$.

1) – بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 3$ .

2) – استنتج أن : $xy\leq\frac{1}{3}$ .

◊ **تمرين13:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان .

1) – بين أن : $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ .

2) – استنتج مقارنة العددين : $\sqrt{ab}$ و $\frac{a+b}{2}$ .

◊ **تمرين14:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان حيث $a \prec b$ . اختصر العبارات التالية :

| العبارة | الاختصار |
|---|---|
| $H = \|2(a-b)-3\| + b + a - 1$ | |
| $K = \|-a+b+7\| + \|b-a\|$ | |
| $L = \sqrt{(a+b+1)^2} + \|-a-6\|$ | |

◊ **تمرين15:**

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية موجبة .

1) – بين أن : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ .

2) – استنتج أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ .

◊ **تمرين16:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان حيث $a \prec b$ .

أ) بين ان $a^2 \prec ab \prec b^2$ .

ب) استنتج ان $a \prec \sqrt{ab} \prec b$ .

ت) بين اذن ان $\frac{113}{27} \prec \sqrt{35} \prec \frac{945}{113}$

◊ **تمرين17:**

$x$ عدد حقيقي ؛ اكمل الجدول التالي بـــ $\prec$ او $\succ$ :

| | | |
|---|---|---|
| $x + 2{,}3 \quad \ldots \quad x + \sqrt{7}$ | $\frac{3}{5}x + \frac{3}{2} \quad \ldots \quad \frac{3}{5}x + \frac{7}{6}$ | $\frac{2}{3}x - \frac{8}{7} \quad \ldots \quad -\frac{7}{2} + \frac{2}{3}x$ |

◊ **تمرين18:**

نعتبر $x$ و $y$ عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 5$ و $y \geq -1$ ؛ أثبت أن :

$2x + 7y \geq 3$ ؛ $-5x - 3y \leq -22$ ؛ $\frac{x+y}{2} \geq 2$ ؛ $-3x - \frac{1}{2}y + 5 \leq \frac{-19}{2}$

◊ **تمرين19:**

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq -1$ و $-2 \leq c \leq 3$

| العبارة | $a^2 + b - c$ | $-2a + \frac{3}{4}$ | $5a - 2b + 5c$ | $-4c - 1$ | $\frac{3a + 2b}{3}$ | $\frac{-a + b(c+3)}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الحصر | | | | | | |

◊ **تمرين20:**

نعتبر $x$ و $y$ عددين حقيقيين بحيث : $-9 \leq 2x + 3 \leq 7$ و $\frac{-7}{2} \leq \frac{3y-1}{2} \leq -2$ .

أثبت أن : $-6 \leq x \leq 2$ و $-2 \leq y \leq -1$

◊ **تمرين21:**

نعتبر $x$ و $y$ عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 1$ و $y \geq 1$ .

1) – بين أن : $xy \geq y$ و $xy \geq x$ .

2) – استنتج أن : $x + y \leq 2xy$ .

3) – قارن اذن بين : $\sqrt{8} + \sqrt{12}$ و $8\sqrt{6}$ .

◊ **تمرين22:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان بحيث : $a \leq b$ .

1) – أثبت أن : $2a \leq a + b \leq 2b$ .

2) – استنتج أن : $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ .

◊ **تمرين23:**

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $a \leq b$ .

1) – برهن أن : $\dfrac{a+c}{b+c} \leq 1$ .

2) – قارن اذن بين : $1$ و $\dfrac{\pi+4\sqrt{2}}{5+\sqrt{32}}$

◊ **تمرين24:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان.

1) – قارن العددين : $4ab$ و $(a+b)^2$ ، ثم استنتج أنه إذا كان $a+b=1$ فإن : $ab \leq \dfrac{1}{4}$.

2) – قارن العددين : $-4ab$ و $(a-b)^2$ ، ثم استنتج أنه إذا كان $a-b=1$ فإن : $ab \geq -\dfrac{1}{4}$.

◊ **تمرين25:**

نعتبر العددين الحقيقيين $a$ و $b$ التاليين : $\mathrm{q}=\sqrt{98}-\sqrt{18}$ و $\mathrm{p}= 3-\sqrt{5}\;^{2} -2.\ 2,5-\sqrt{45}$

أ- بين ان $\mathrm{p}=9$ و $\mathrm{q}=4\sqrt{2}$ .

ب- ليكن العدد الحقيقي $\mathrm{t}=9+4\sqrt{2}$ ؛ بين أن $\mathrm{t}-13=4\left(\sqrt{2}-1\right)$ ثم استنتج أن $\mathrm{t}\succ 13$ .

ج- بين ان $\mathrm{t}= 1+2\sqrt{2}\;^{2}$ ثم استنتج مقارنة بين $1+2\sqrt{2}$ و $\sqrt{13}$.

د- بين ان $\dfrac{\sqrt{13}}{\pi} \prec \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$ .

◊ **تمرين26:**

$x$ و $y$ و $z$ أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq x \leq 7$ و $-7 \leq y \leq -1$ و $-5 \leq z \leq 3$

اجب بـــــــــ" خطأ " او " صواب "

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-5\le x+y\le 6$ | $9\le x-y\le 8$ | $-35\le -2x+3y\le -7$ | $-49\le xy\le -2$ | $0,4\le \frac{x(z+6)}{5}\le 12,6$ |
| | | | | |

◊ **تمرين27:**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان بحيث : $6\le x\le 8$ و $-5\le y\le -2$

| العبارة | الحصر |
|---|---|
| $x+y$ | $1\le x+y\le 6$ |
| $x-y$ | |
| $xy$ | |
| $\frac{x}{y}$ | |
| $x^2$ | |
| $y^2$ | |
| $(x+y)^2$ | $1^2\le (x+y)^2\le 6^2$ أي ............................................ |
| $(x-y)^2$ | |
| $(x-y)(x+y)$ | |

◊ **تمرين28:**

$x$ عدد حقيقي ؛ أوجد حصرا للعدد $x$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$$-11\le 5-2x\le -2 \quad ; \quad -4\le 2x+3\le 5$$

$$-1\le \frac{4x-1}{2}\le 7 \quad ; \quad 5\le 7x-1\le 12$$

◊ **تمرين29:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان بحيث : $3\le a\le 6$ و $-5\le b\le -3$ .

1) – اوجد حصرا لـ $a+b$ و $a^2$ .

2) – بين أن : $-60\le 2ab\le -18$ وان $9\le b^2\le 25$ .

3) – لماذا لا يمكن حصر $(a+b)^2$ ؟

4) – بين أن : $-51 \leq a^2 + 2ab \leq 18$ .

5) – استنتج من خلال 2) و 4) أن : $0 \leq (a+b)^2 \leq 43$ .

6) – أحصر : $a^2 - b^2$ .

◊ **تمرين30:**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان . برهن أن : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

◊ **تمرين31:**

نعتبر العددين الحقيقيين التاليين : $a = \sqrt{45} - \left(\sqrt{20} - 1\right)$ و $b = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{24}}{\sqrt{6}}$.

أ- بين ان : $a = \sqrt{5} + 1$ و $b = \sqrt{3} + 2$ .

ب- احسب $a^2$ و $b^2$ .

ج- قارن بين $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{3}$ ثم استنتج مقارنة بين $a^2$ و $b^2$ .

د- بين أن : $a \prec b$ ثم استنتج مقارنة بين $\dfrac{\sqrt{5}}{a+1}$ و $\dfrac{2}{b+\pi}$ .

هـ- بين ان : $|a-4| - |a-b| + |b-3| = 1$.

◊ **تمرين32:**

نعتبر العدد الحقيقي a حيث : $-1 \leq a \leq 3$ .

1. بين ان : $|-a+4| - |a-5| = -1$ .
2. انشر العبارة $(-a+4)(a-5)$ ثم استنتج حصرا لـ $a^2 - 9a + 20$ .
3. فكك العبارة $a^2 + 4a + 4$ ثم استنتج ان: $-3 \leq a^2 + 4a \leq 21$ .
4. لتكن العبارة $A = \dfrac{2a-1}{a+2}$ .

أ- بين أن $(a+2) \neq 0$ .

ب- اثبت أن $A = 2 - \dfrac{5}{a+2}$ واستخلص حصرا للعبارة $A$ .

◊ **تمرين33:**

ليكن a و b عددين حقيقيّين موجبين .

أ) أنشر العبارة : $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ .

ب) قارن $\dfrac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$ .

ج) تحقق من مقارنتك في حالة أنّ : $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ و $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

د) متى يكون : $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ؟

◊ **تمرين34:**

x عدد حقيقي موجب قطعا .

أ - قارن بين $\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{x+2}$ ثمّ بين $\dfrac{1}{3}$ و $\dfrac{1}{x+3}$

ب - إستنتج أنّ $\dfrac{6}{(x+2)(x+3)} \prec 1$

◊ **تمرين35:**

نعتبر العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث $a \succ 1$ و $b \succ 1$ و $a \succ b$ .

رتب تنازليا الاعداد : $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{a+1}{b+1}$ و $\dfrac{a-1}{b-1}$

◊ **تمرين36:**

حقل مستطيل الشكـل طوله محصور بين 12 m و 14 m و عرضه محصور بين 7 m و 10 m .

1) – أعط حصرا لمحيط هذا المستطيل.
2) – أعط حصرا لمساحة هذا المستطيل.

◊ **تمرين37:**

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين : $a=3\sqrt{20}-\sqrt{54}+2\sqrt{24}-\sqrt{125}$ و $b=3\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\right)^{-1}$

1.بين ان : $a=\sqrt{5}+\sqrt{6}$ و $b=2+\sqrt{7}$ .
2.احسب $a^2$ و $b^2$ ثم قارنهما .
3.استنتج مقارنة لـ $a$ و $b$ ثم لـ $\frac{3}{a}$ و $\frac{\pi}{b}$ .
4.قارن بين: $\frac{4}{a+b}$ و $\frac{a+b}{ab}$ .

◊ **تمرين38:**

ABC مثلث متقايس الاضلاع طول ضلعه $5t\sqrt{6}$ cm ؛ ما هو الشرط على t حتى لا يتجاوز الارتفاع القيمة $15\sqrt{2}\ cm$ ؟

◊ **تمرين39:**

دائرة شعاعها $r$ بحيث $5\leq r\leq 7$ بالصم .
1) اوجد حصرا لـــــــ $\mathscr{L}$ محيط الدائرة اذا افترضنا ان $3{,}14\leq\pi\leq 3{,}15$ .
2) اوجد حصرا لـــــــ $\mathscr{A}$ مساحة الدائرة اذا افترضنا ان $3\leq\pi\leq 4$ .

◊ **تمرين40:**

$a$ و $b$ و $c$ أعدد حقيقيان موجبان قطعا.

1) – برهن أن : $\frac{ab}{a+b}\leq\frac{a+b}{4}$ .

2) – استنتج أن : $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\leq\frac{a+b+c}{2}$

**مرجع هذه السلسلة** : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
**تأليف** : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
**الاصلاح على الموقع** : l'apothème