الجمهورية التونسية وزارة التربية **** **امتحان شهادة ختم التعليم الأساسي العام** **دورة 2018**	الاختبار : **الرياضيات**	
	الحصّة : **ساعتان**	ضارب الاختبار: **2**

التمرين الأوّل (3 نقاط)

يلي كلّ سؤال ثلاث إجابات، واحدة منها فقط صحيحة .

أكتب على ورقة تحريرك رقم السّؤال والإجابة الصّحيحة الموافقة له.

1) ليكن (O, I, J) معيّنا في المستوي والنقاط $A(1, -1)$ و $B(3, 2)$ و $C(1, 1)$.

إذا كان ABCD متوازي أضلاع، فإنّ إحداثيات النقطة D هي :

أ) $(-2, -1)$ ب) $(-1, -2)$ ج) $(-2, -3)$

2) يمثّل الجدول التّالي التّكرارات التّراكميّة الصّاعدة لسلسلة إحصائيّة.

القيمة	-2	-1	0	1	2
التّكرار التّراكمي الصّاعد	5	9	13	18	20

التّكرار الموافق للقيمة صفر هو:

أ) 13 ب) 0 ج) 4

3) العدد $27^{2018} - 2 \times 27^{2017}$ يقبل القسمة على :

أ) 6 ب) 12 ج) 15

التمرين الثاني (4 نقاط)

نعتبر العددين الحقيقيّين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11 + 6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$.

1) أ) قارن العددين a^2 و b^2 .

ب) بيّن أنّ $(a - b)$ عدد موجب.

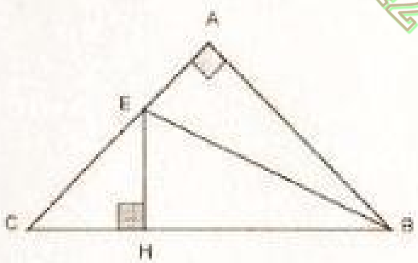
2) أحسب $a^2 b^2$ ثمّ إستنتج أنّ $ab = 7$.

3) أحسب $(a - b)^2$ ثمّ إستنتج أنّ $a - b = 2\sqrt{2}$.

(وحدة قيس الطول الصنتمتر)

في الرّسم المقابل لدينا :

- ABC مثلّث متقايس الضلعين وقائم في A، حيث $AB = a$
- E النقطة من $[AC]$ حيث $AE = b$
- H المسقط العمودي للنقطة E على (BC).



4) أ) بيّن أنّ المثلّث HEC متقايس الضلعين.

ب) بيّن أنّ $EH = 2$.

5) لتكن S مساحة المثلّث BEC.

أ) بيّن أنّ $S = a\sqrt{2}$.

ب) بيّن أيضا أنّ $S = 2 + 3\sqrt{2}$، ثمّ إستنتج أنّ $a = 3 + \sqrt{2}$.

التمرين الثالث (4 نقاط) **(وحدة قيس الطول الصنتمتر)**

ABC مثلّث متقايس الضّلعين وقمّته الرئيسيّة A حيث $BC = 2$ و $AB \geq 3$.

لتكن النّقطة D مناظرة النّقطة C بالنسبة إلى A ، و H المسقط العمودي للنّقطة A على المستقيم (BC).

المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النّقطة G .

1) أ) بيّن أنّ المثلّث BCD قائم في B.

ب) بيّن أنّ G مركز ثقل المثلّث BCD.

في الأسئلة الموالية، نفترض أن $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

2) أ) بيّن أن $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$.

ب) بيّن أن $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$.

3) أ) بيّن أن $x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36$.

ب) استنتج أن $x^2 + 6x - 27 = (x-3)(x+9)$.

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$، ثم إستنتج البعد BG.

التمرين الرابع (5 نقاط) (وحدة قيس الطول الصنتمتر)

A و B نقطتان من المستوي، حيث $AB = 6$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AB]$. لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي قطرها $[AB]$ و C نقطة من $\mathscr{C}$ ، حيث $AC = 5$.

1) أحسب BC.

2) المماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بيّن أن $CD = \frac{11}{5}$.

ب) أحسب BD.

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في نقطة E. لتكن $\mathscr{C}'$ الدائرة التي قطرها $[DE]$ و مركزها O. المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع $\mathscr{C}'$ في نقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بيّن أن الرباعي BDFE مستطيل.

ب) الدائرتان $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B.

أثبت أن النقاط A و H و F على استقامة واحدة.

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K.

أ) بيّن أن K منتصف $[AF]$.

ب) أثبت أن G مركز ثقل المثلث AED.

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بيّن أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة.

التمرين الخامس (4 نقاط) (وحدة قيس الطول الصنتمتر)

ليكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB = 6$ و $AE = 4$ و $AD = 3$.

1) أ) بيّن أن ADG مثلث قائم في D.

ب) أحسب DG و AG.

2) لتكن M النقطة من $[AE]$ حيث $AM = 3$ و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

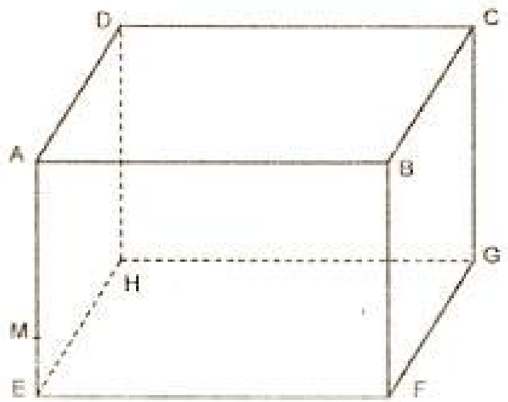
أ) بيّن أن Δ محتو في المستوي (AEF).

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N.

بيّن أن $\frac{AM}{AE} = \frac{MN}{EF}$.

ج) أحسب MN ثم DN.

3) أحسب حجم الهرم NMAD.



إصلاح دورة 2018

❖ التمرين 1

الجواب السليم	المبرر
ب) $(-1,2)$	ABCD متوازي الاضلاع اذن القطران لهما نفس المنتصف $\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{x_A+x_C}{2}$ و ... فنجد $x_D=-1$
ج) 4	$13-9=4$
ج) 15	$27^{2018}-2\times27^{2017}=27\times27^{2017}-2\times27^{2017}=27^{2017}\times(27-2)$ $=\left(\underbrace{27^{2017}}_{\in M_3}\times\underbrace{25}_{\in M_5}\right)\in M_{15}$

❖ التمرين 2

نعتبر العددين الحقيقيين **الموجبين** a و b بحيث : $a^2=11+6\sqrt{2}$ و $b^2=11-6\sqrt{2}$

1) أ) لنقارن العددين a^2 و b^2 : $a^2-b^2=11+6\sqrt{2}-11+6\sqrt{2}=12\sqrt{2}\in\mathbb{R}_+^*$ **ومنه** $a^2\succ b^2$

ب) نعلم ان a و b موجبان ومنه $a+b$ موجب ونعلم ان $a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)$

$(a+b)\times(a-b)$ موجب والعامل $(a+b)$ موجب فحتما العامل $(a-b)$ موجب

2) $a^2\times b^2=\left(11+6\sqrt{2}\right)\left(11-6\sqrt{2}\right)=11^2-\left(6\sqrt{2}\right)^2=121-72=49$ او $(a\times b)^2=49$ ومنه $a\times b=\sqrt{49}=7$

3) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=\left(11+6\sqrt{2}\right)+\left(11-6\sqrt{2}\right)-2\times7=22-14=8$ ومنه $a-b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

4) أ) في المثلث ABC نجد $\hat{C}=\hat{B}=90°/2=45°$ من ناحية اخرى في المثلث CEH لدينا : $\hat{E}=90°-\hat{C}=90°-45°=45°=\hat{C}$

ومنه المثلث ECH متقايس الضلعين في H.

ب) المثلث ECH قائم في H فحسب بيتاغور $CE^2=EH^2+CH^2=2.EH^2$ اي $EH^2=\frac{CE^2}{2}=\frac{(a-b)^2}{2}=\frac{8}{2}=4$ ومنه

$EH=\sqrt{4}=2$ (بالامكان اعتبار $[CE]$ قطرا في مربع والحصول على نفس النتيجة)

5) **S** هي مساحة المثلث BEC .

أ) ليكن $\mathcal{A}$ مساحة المثلث ABC و$\mathcal{A}'$ مساحة المثلث AEC ومنه $\mathbf{S}=\mathcal{A}-\mathcal{A}'$ اي

$$\mathbf{S}=\frac{AB\times AC}{2}-\frac{AB\times AE}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}a(a-b)=\frac{1}{2}a\times2\sqrt{2}=a\sqrt{2}$$

ب) * نكتب **S** بطريقة ثانية : $\mathbf{S}=\frac{a^2}{2}-\frac{ab}{2}=\frac{11+6\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4+6\sqrt{2}}{2}=2+3\sqrt{2}$

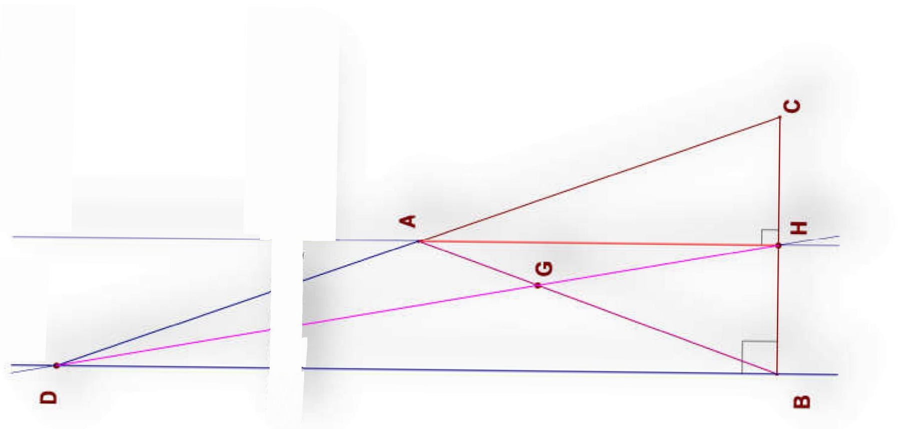
**لنستنتج ان $a=3+\sqrt{2}$: المساواة $a\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}$ تؤدي الى

$$a=\frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+3$$

❖ التمرين 3

1) أ)في المثلث BCD نجد A منتصف الضلع $[CD]$ يحقق : $AC=AD=AB$ فهو قائم وونره الضلع المذكور اي $[CD]$

ومنه المثلث BCD قائم في B



ب) في المثلث ABC المتقايس الضلعين لدينا $[AH]$ هو الارتفاع الصادر من القمة الرئيسية A فحتما يطابق الموسط الموافق للضلع $[BC]$ اذن H تمثل منتصف $[BC]$ ومنه :

في المثلث BCD القطعة $[DH]$ هي الموسط الصادر من D ونعلم ان $[BA]$ هو الموسط الصادر من B ؛ هذان الموسطان يتقاطعان في G فحتما G تمثل مركز ثقل المثلث BCD.

2) نفترض ان $AB=x+3$ حيث $x\in\mathbb{R}+$.

أ) بما ان $AB=x+3$ و $AB=AC$ فان $AC=x+3$.

ونعلم من ناحية اخرى ان A منتصف $[DC]$ ومنه $DC=2\times AC=2(x+3)$.

بما ان المثلث قائم في فانه حسب بيتاغور :

$CD^2=BC^2+BD^2$ اي $BD^2=CD^2-BC^2$ او

$$BD^2=2^2(x+3)^2-2^2=4(x^2+6x+9)-4=4x^2+24x+36-4$$
$$=4x^2+24x+32=4(x^2+6x+8)$$

ب) $BD=2\sqrt{35}$ يعني $BD^2=(2\sqrt{35})^2=4\times35=140$ (البعد هو قيمة موجبة)

يعني $4(x^2+6x+8)=140$ يعني $x^2+6x+8=140:4=35$ يعني $x^2+6x+8-35=0$ او $x^2+6x-27=0$

3) أ) لدينا
$$x^2+6x-27=x^2+2\times x\times3+3^2-3^2-27=\underbrace{x^2+2\times x\times3+3^2}_{(x+3)^2}-3^2-27$$
$$=(x+3)^2-36$$

ب) لدينا $x^2+6x-27=(x+3)^2-36=(x+3+6)(x+3-6)=(x+9)(x-3)$

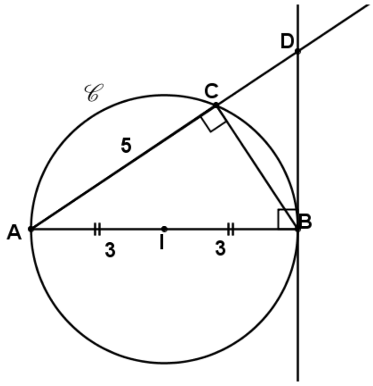
ج) $BD=2\sqrt{35}$ يعني $(x+9)(x-3)=0$ ومنه $x=3$ (مقبولة) او $x=-9$ (ملغاة) لان $x\in\mathbb{R}+$

* نعلم $AB=x+3$ اذن $AB=x+3=3+3=6$

وبما ان G تمثل مركز ثقل المثلث BCD فان $BG=\frac{2}{3}BA=\frac{2}{3}\times6=4$

❖ التمرين 4

1) A و B و C نقاط من نفس الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها [AB] إذن ABC مثلث قائم في C وبالتالي حسب نظرية بيتاغور



$$\begin{cases} BC^2 = AB^2 - AC^2 \\ BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11 \end{cases}$$ إذن $BC = \sqrt{11}$

2) المثلث ABD قائم في B و [BC] هو الإرتفاع الموافق للوتر [AD]

إذن $$\begin{cases} BC^2 = CD \times CA \\ 11 = CD \times 5 \end{cases}$$ وبالتالي $CD = \dfrac{11}{5}$

بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث BCD فإن

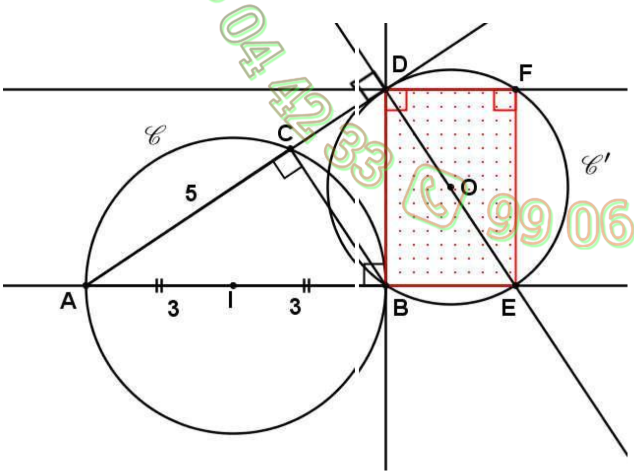
$$\begin{cases} BD^2 = CD^2 + BC^2 = \left(\dfrac{11}{5}\right)^2 + \sqrt{11}^2 \\ BD^2 = \dfrac{121}{25} + 11 = \dfrac{121 + 275}{25} = \dfrac{396}{25} \end{cases}$$

وبالتالي $BD = \sqrt{\dfrac{396}{25}} = \dfrac{6\sqrt{11}}{5}$

3) أ) لدينا E و F و D نقاط من نفس الدائرة $\mathscr{C}'$ التي قطرها [DE] إذن المثلث DFE قائم في F

ولدينا : $(DF) // (BE)$ و $(BD) \perp (BE)$ إذن $(BD) \perp (DF)$

الرباعي BDFE مستطيل لأن $\widehat{BDF} = \widehat{DFE} = \widehat{DBE} = 90°$



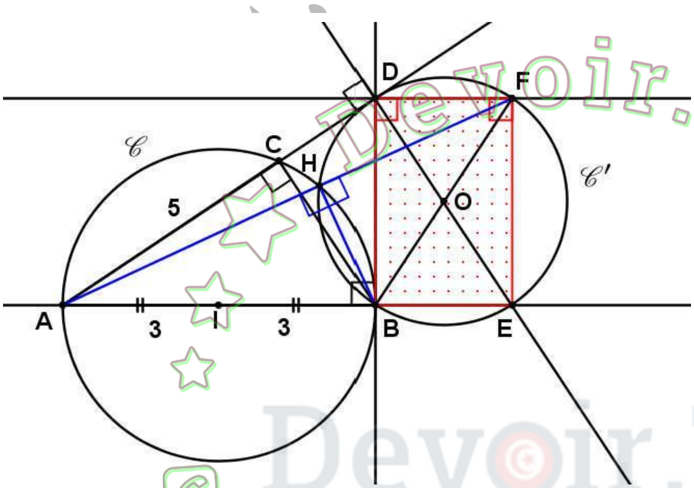
-

ب-لدينا B وF و Hنقاط من نفس الدائرة $\mathscr{C}'$ التي قطرها [BF]

إذن المثلث BHFقائم في H وبالتالي $(BH) \perp (FH)$ (1) و لدينا B وA وHنقاط من نفس الدائرة C التي قطرها [AB]

إذن المثلث BHAقائم في H وبالتالي $(BH) \perp (AH)$ (2)

من (1)و (2) نستنتج أن $(AH) \mathbin{//} (FH)$ وبالتالي النقاط A وF و H على استقامة واحدة



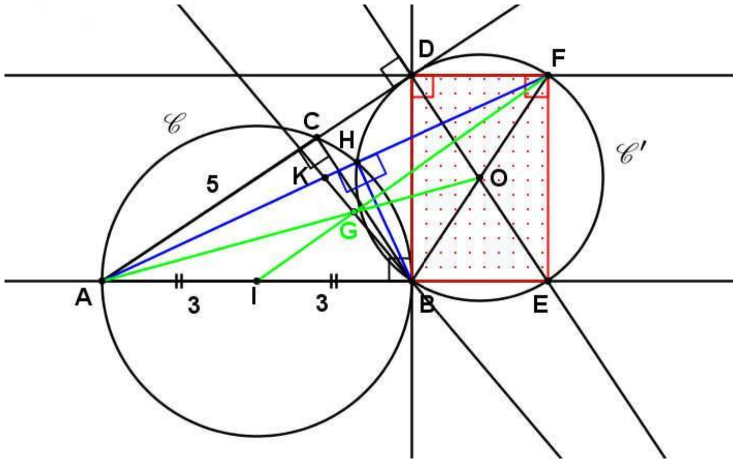
4) أ في المثلث ABF I منتصف [AB] و O منتصف [BF]

الموسطين [AO] و [BI] يتقاطعان في النقطة G التي هي مركز ثقله وبالتالي (BG) يحمل الموسط الموافق للضلع [AF] وينتج عن ذلك

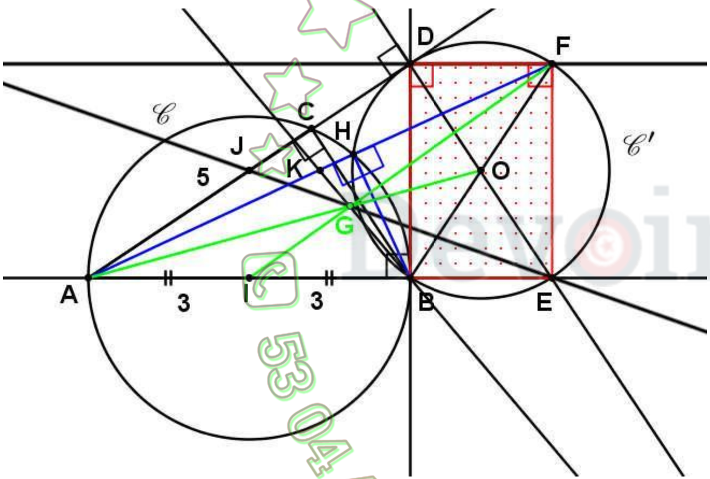
أن K هي منتصف [AF] لأن $(BG) \cap (AF) = \{K\}$.

-

ب-



في المثلث AED : G نقطة من الموسط [AO] الموافق للضلع [ED] حيث $\frac{AG}{AO}=\frac{2}{3}$ وبالتالي **G هي مركز ثقله**



ج-بما أن G مركز ثقل المثلث ADE فإن (EG) يحمل الموسط الموافق للضلع [AD] وينتج عن ذلك أن J هي منتصف [AD]

في المثلث ADE لدينا Oمنتصف [DE] و J منتصف [AD] إذن (OJ)//(AE)

في المثلث ABF لدينا Oمنتصف [BF] و K منتصف [AF]إذن (OK)//(AB)

استنتاج : (OK)//(OJ) و يشتركان في O وبالتالي **النقاط O وJ وK على استقامة واحدة**

❖ التمرين 5

1) أ-لدينا $(AD)\perp(DC)$ و $(AD)\perp(DH)$ و(DH) و (DC) محتويان في (DCH) بحيث $(AD)\cap(DC)=\{C\}$

فإن $(AD)\perp(DCH)$ وبما أن $(DG)\subset(DCH)$ فإن $(AD)\perp(DG)$ وبالتالي المثلث ADG قائم في D

ب- بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث CDG القائم في C:

$$DG^2=DC^2+CG^2=6^2+4^2=36+16=52$$

وبالتالي $DG=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

بتطبيق نظرية بيتاغور في المثلث ADG القائم في D:

$AG^2=AD^2+DG^2=3^2+\left(2\sqrt{13}\right)^2=9+52=61$ وبالتالي $AG=\sqrt{61}$

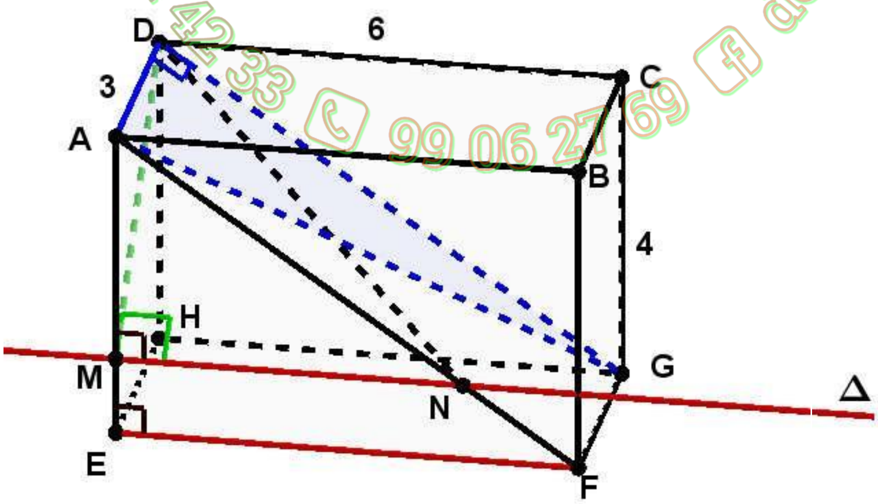
2) أ لدينا $\Delta\perp(ADE)$ في M و $(EF)\perp(ADE)$ في E إذن $\Delta//(EF)$ فهما من نفس المستوي (MEF)

الا ان $M\in(AE)$ و $(AE)\subset(AEF)$ و منه $(MEF)=(AEF)$

الخلاصة : Δ محتواة في المستوي (AEF)

ب)في المثلث AEF لدينا: $M\in(AE)$ و $N\in(AF)$ و $(MN)//(EF)$

فحسب نظرية طالس: $\frac{MN}{EF}=\frac{AN}{AF}=\frac{AM}{AE}$ إذن $\frac{MN}{6}=\frac{3}{4}$ وباتالي $MN=\frac{3\times6}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$



ADMمثلث قائم في Aحسب نظرية بيتاغور فإن :

$$MD^2 = AD^2 + AM^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$$ وبالتالي $= 3\sqrt{2}$

MDNمثلث قائم في Mحسب نظرية بيتاغور فإن :

$$D^2 + MN^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 18 + \frac{81}{4} = \frac{72}{4} + \frac{81}{4} = \frac{153}{4}$$

$$DN = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$

حجم الهرم NMAD: (نعتبر $[MN]$ ارتفاع الهرم)

$$\frac{AD \times AM}{2} \times \frac{MN}{3} = \frac{3 \times 3 \times \frac{9}{2}}{6} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$