concour 1998

EXERCICE N° 1

I/ Soit R un réel strictement positif et O un point d’un plan P.

On désigne par :

* () le cercle du plan P de centre O et de rayon R.
* T un triangle ABC dans le cercle ()
* mA , mB, et mC les médianes du triangle ABC , relatives au cotés , et .
* G le centre de gravité de triangle ABC.

1. Etablir les relations suivantes.
3. On désigne par α, β et les mesures des angles , et du triangle ABC.

Etablir la relation :

II/ Parmi les triangles T on considère ceux désignés par t et ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et

1. Construire le triangle t lorsqu’on donne le sommet A.
2. Soit I le milieu du coté d’un triangle t

Déterminer et construire l’ensemble des points I lorsque le point A décrit le cercle ().

Préciser la position de par rapport à ().

1. Montrer que tous les triangles t ont le même orthocentre H.
2. a - Quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir l’expression :

Pour que le triangle T soit isométrique à un triangle t ?

b – Montrer que le triangle T est isométrique à un tringle t si et seulement si

.

Exercice N° 2

Soient O et A deux points fixes d’une droite fixe ∆

Un triangle MAN rectangle en A, varie de telle manière que son hypoténuse reste parallèle à la droite ∆.

Soit I le milieu de segment .

1. Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N dans chacun des cas suivantes :
2. le points I décrit un cercle ( C ) de centre A privé des points ou ce cercle coupe ∆.
3. le point I décrit l’ensemble P-ou p est la parabole de sommet O et de foyer A.
4. on suppose, dans cette question, que le point I décrit l’ensemble D ou D’est la droite passant par O est perpendiculaire à la droite ∆.
5. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MAN passant par un point fixe A’ autre que A.
6. Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N.

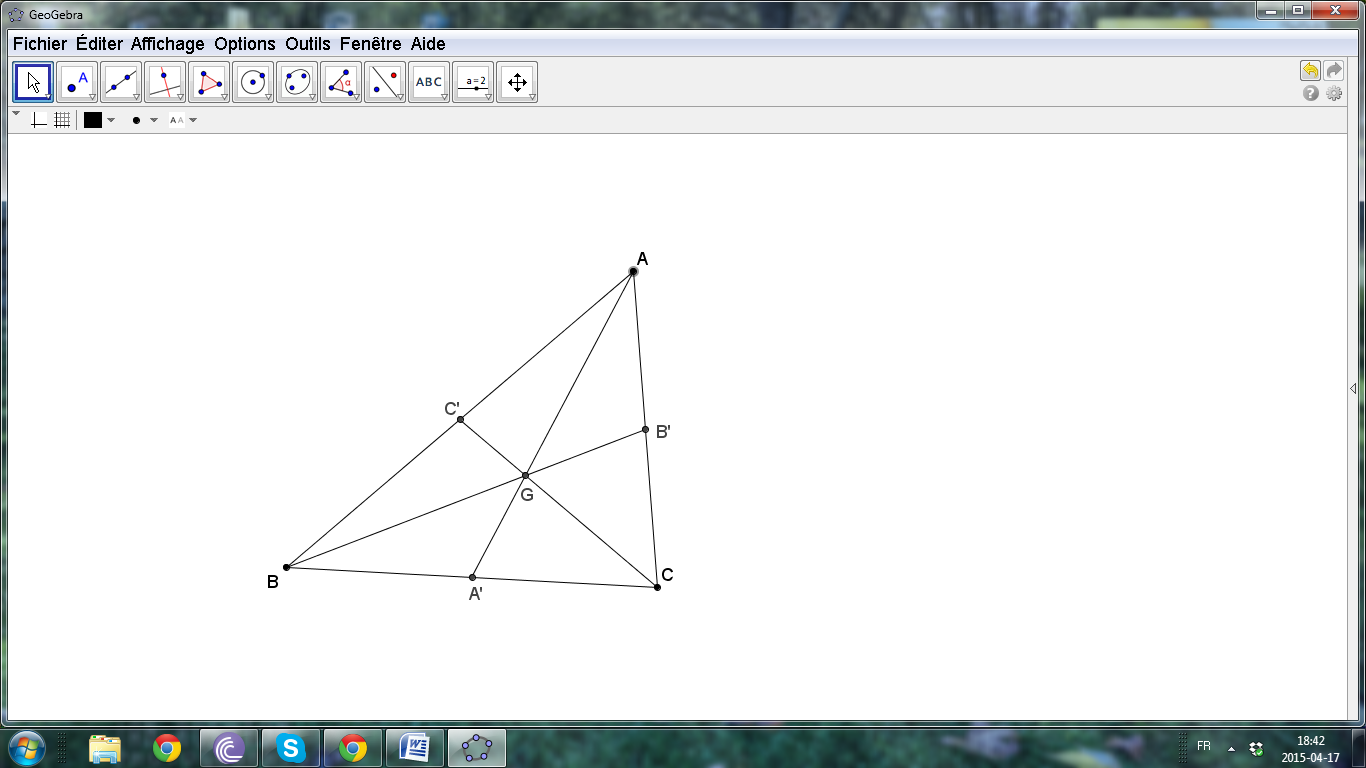
solution concourt 1998

EXERCICE N° 1

I/ Soit R un réel strictement positif et O un point d’un plan P.

On désigne par :

* () le cercle du plan P de centre O et de rayon R.
* T un triangle ABC dans le cercle ()
* mA , mB, et mC les médianes du triangle ABC , relatives au cotés , et .
* G le centre de gravité de triangle ABC.

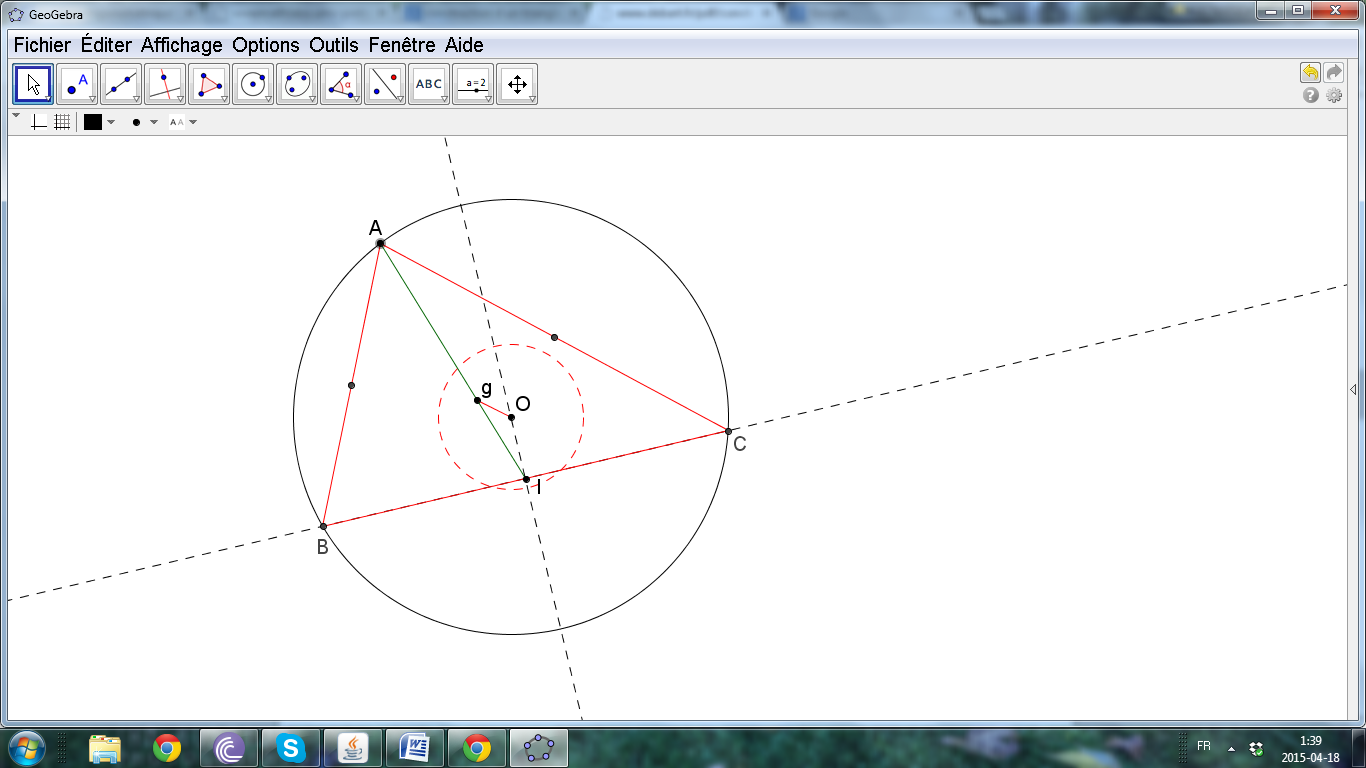
1. Etablir les relations suivantes. 

1. On désigne par α, β et les mesures des angles , et du triangle ABC.

Etablir la relation :

II/ Parmi les triangles T on considère ceux désignés par t et ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et

1. Construire le triangle t lorsqu’on donne le sommet A.



Soit (D’) le disque de centre O et de rayon le poin g verifie Og =kR le point g est donc à l’intétrieur de disdue (D’)

On construis le point I image de A par l’homothétie de centre g et de rapport

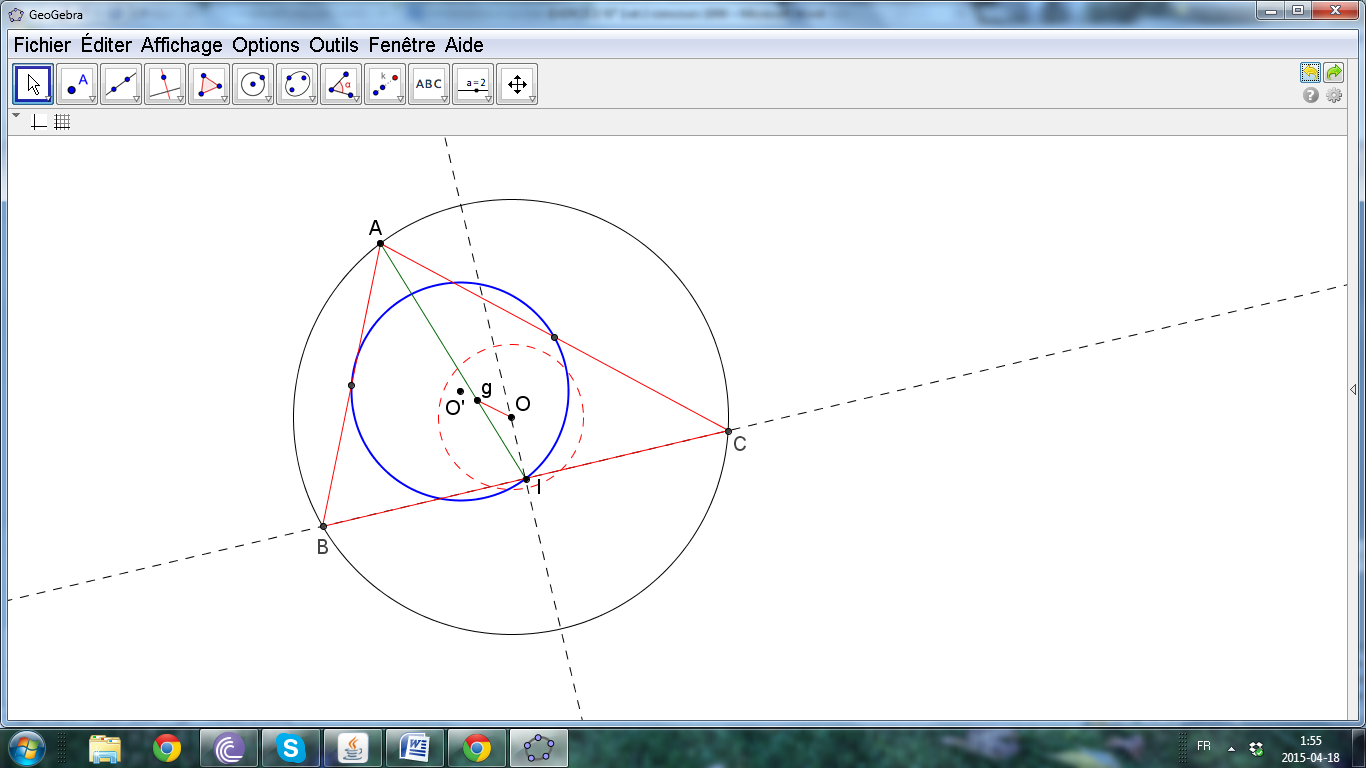
I est le milieu du coté de triangle t comme le triangle t est inscrit dans le cercle () donc (OI) est la médiatrice de segment les points B et C sont donc les points d’intersection de la perpendiculaire à la droite (OI) et le cercle ()

1. Soit I le milieu du coté d’un triangle t

Déterminer et construire l’ensemble des points I lorsque le point A décrit le cercle ().

le point I est l’image de A par l’homothétie de centre g et de rapport

l’orsqoue le points A décrit le cercle () le point I décrit le cercle image de () par l’homothétie de centre g et de rapport



est le cercle de centre O’ =h(g, et de rayon r =

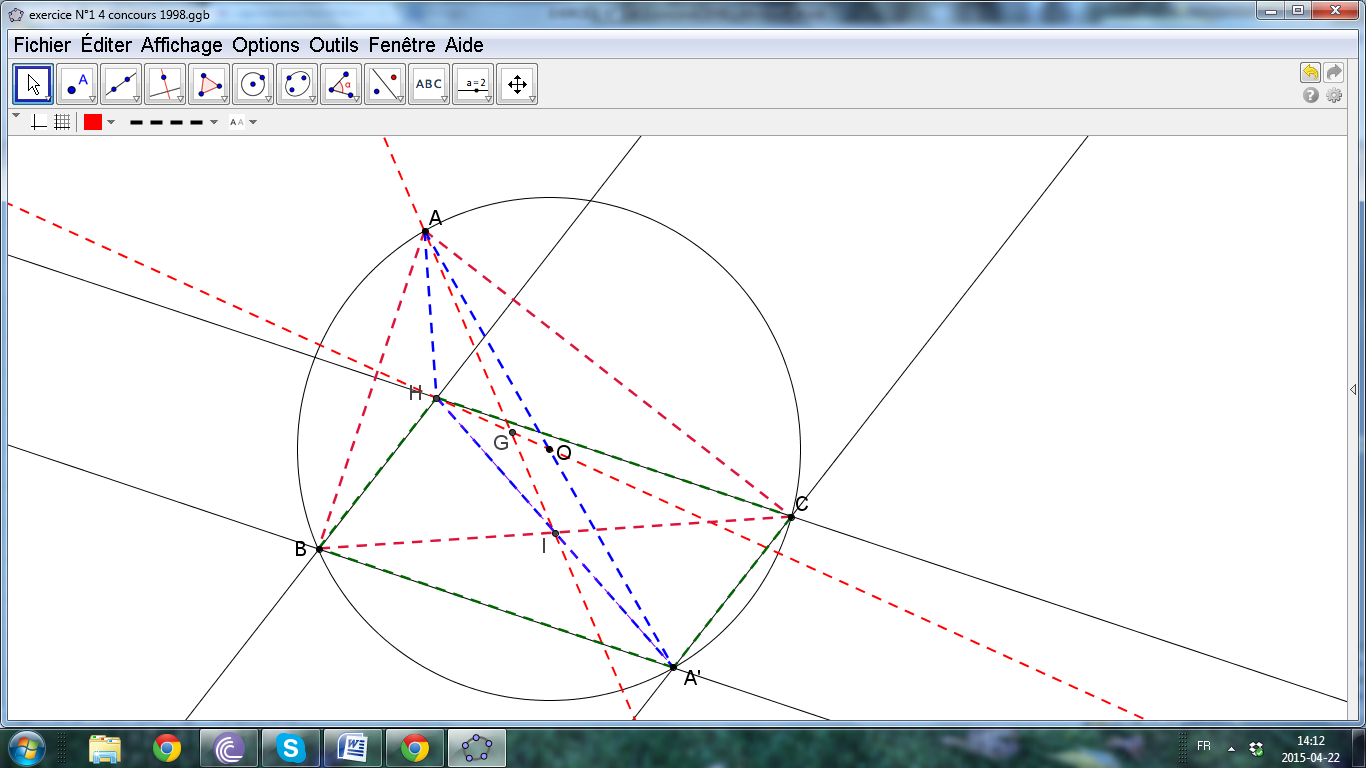
Préciser la position de par rapport à ().

On a O’ =h(g,

Le cercle est à l’intérieur de ().

1. Montrer que tous les triangles t ont le même orthocentre H.

On montre que les points g , H et O sont alignés



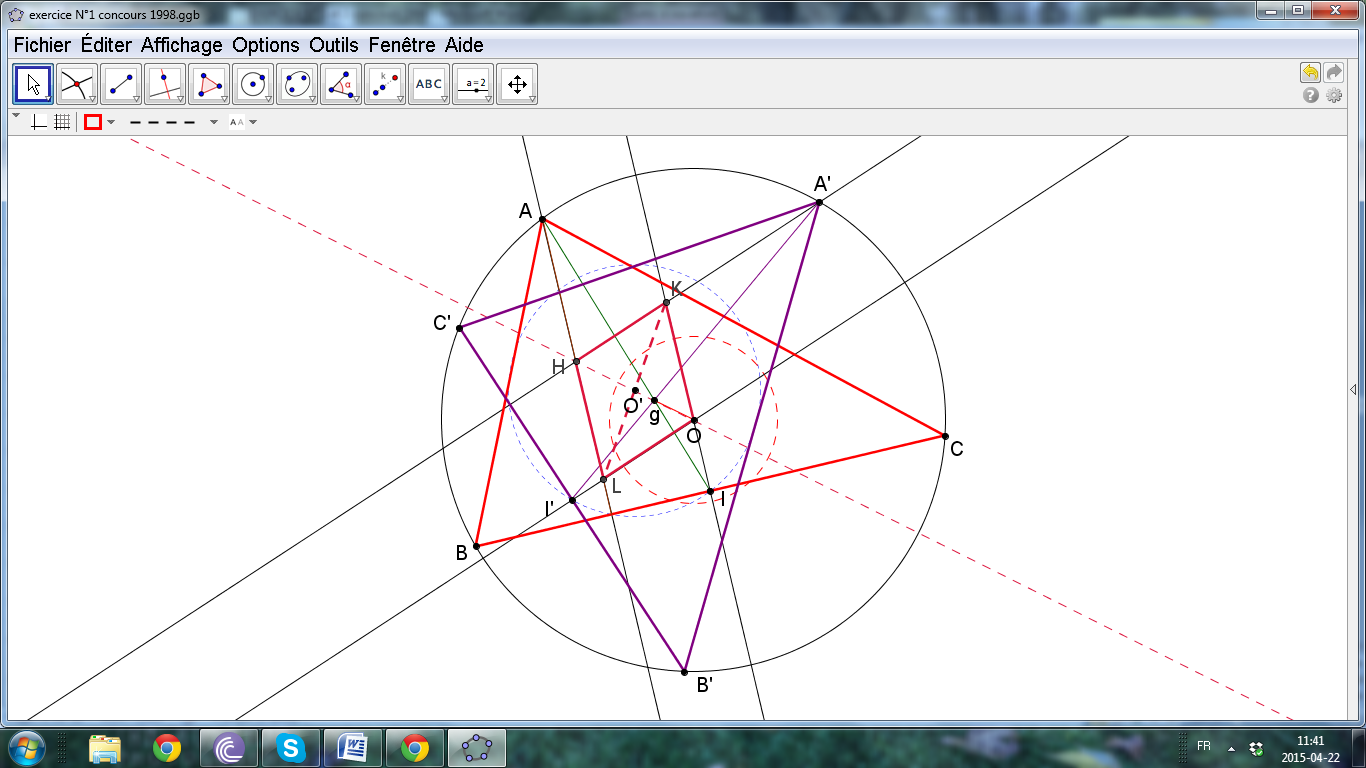
Soit A’ le symétrique de A par rapport au point O.

Le segment est un diamètre du cercle ( C ) et les points B et C sont des points de ( C ) donc les triangles AA’B et AA’C sont rectangle respectivement en B et en C.

Les droites (BA’) et ( BA) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CA’) et ( CA)

et sont les hauteurs du triangle ABC issues respectivement des points C et B. Les droites (CH) et (BA) sont perpendiculaires ainsi les droites (BH) et (AC). On déduit que (BH)//(A’C) et (CH)//(A’B) . le quadrilatère A’BHC et un parallélogramme.

Soient t et t’ deux triangle ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et



Soit H l’orthocentre du triangle ABC de centre de gravité g tel que og =kR.

H’ l’orthocentre du triangle A’B’C’ de centre de gravité g tel que og =kR.

I milieu de et I’ milieu de

(OI) médiatrice de segment et (AH) la hauteur de triangle ABC issue de A donc

(OI)//(AH)

(OI’) médiatrice de segment et (A’H’) la hauteur de triangle A’B’C’ issue de A’ donc

(OI’)//(A’H’)

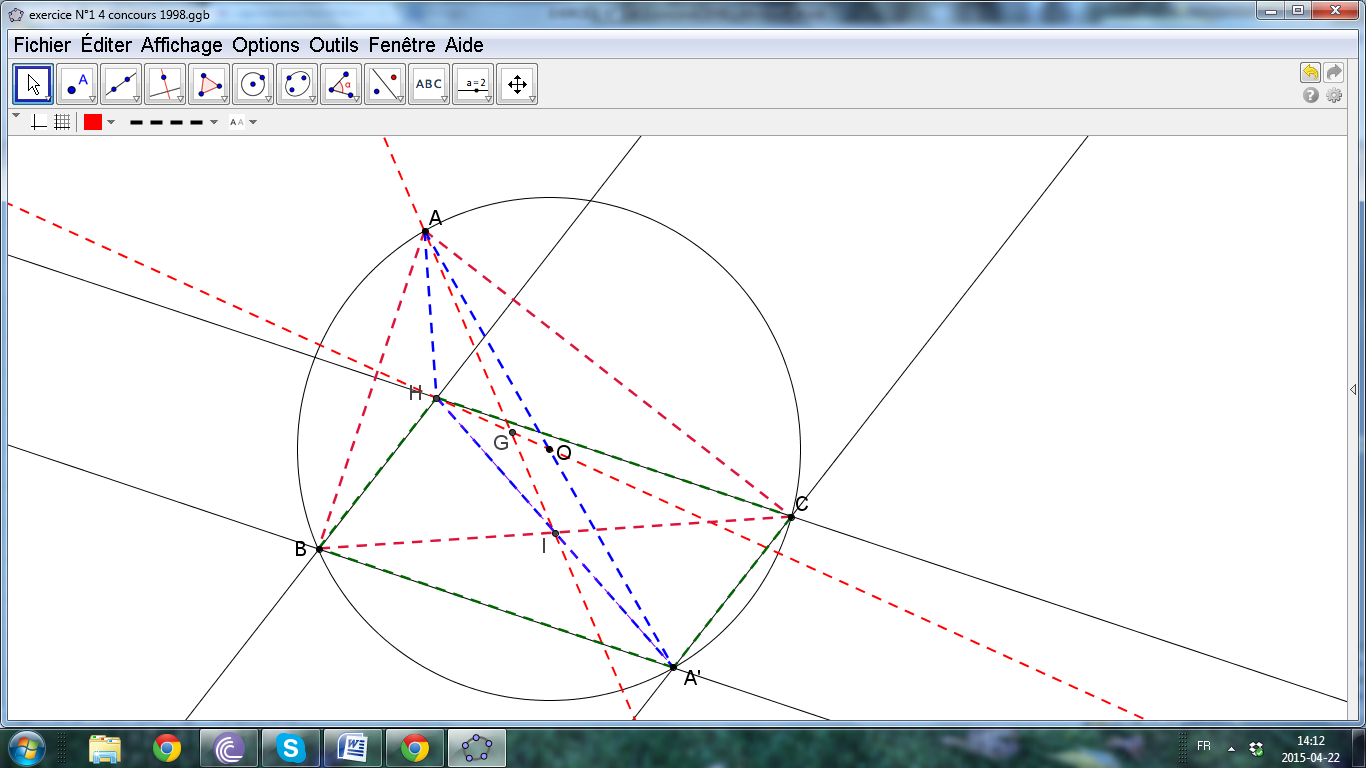
Le triangle ABC de centre de gravité g et il est inscrit dans le cercle de centre O et d’orthocentre H donc H est un point de (Og)

Le triangle A’B’C’ de centre de gravité g et il est inscrit dans le cercle de centre O et d’orthocentre H’ donc H’ est un point de (Og)

Donc les points O ,g, H et H’ sont alignés.

Soit L le point d’intersection de la droite (AH) et la droite (OI’) et k le point d’intersection de la droite (A’H’) et la droite (OI)

Les quadrilatères OKHL et OKH’L sont des parallélogrammes donc les segments et et ont le même milieu or O, H et H’ sont alignes donc le point H est confondue avec le point H’



1. a - Quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir l’expression :

Pour que le triangle T soit isométrique à un triangle t ?

b – Montrer que le triangle T est isométrique à un tringle t si et seulement si

.

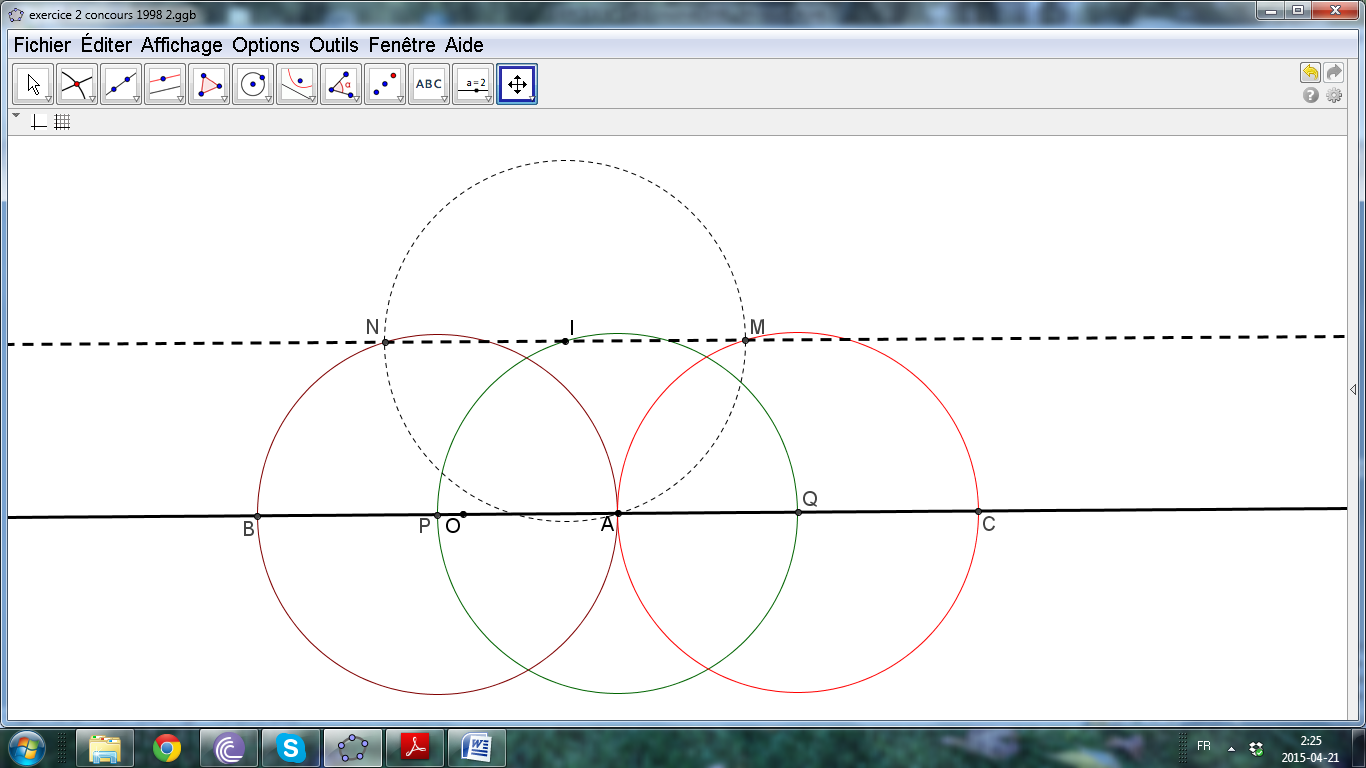
**Exercice N° 2**

Soient O et A deux points fixes d’une droite fixe ∆

Un triangle MAN rectangle en A, varie de telle manière que son hypoténuse reste parallèle à la droite ∆.

Soit I le milieu de segment.

1. Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N dans chacun des cas suivantes :
2. le points I décrit un cercle ( C ) de centre A privé des points ou ce cercle coupe ∆.



Soit ( C ) un cercle de centre A et de rayon r un réel positif fixe, ( C ) coupe ∆ en deux points P et Q.

Soient I un point de ( C ) privé des points P et Q et ∆’ la parallèle à ∆ passant par I.

Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à ∆ donc les point M et N sont deux point de ∆’ et puisque I est le milieu de alors

IA = IM = IN

On a donc PM = IM =IA = r et QM = IN = IA =r Ainsi lorsque I décrit ( C )

* le point M décrit le cercle de centre Q et de rayon r privé des points A et C intersection de ce cercle et la droite ∆.
* Le point N décrit le cercle de centre P et de rayon r privé des points A et B intersection de ce cercle et la droite ∆.

1. le point I décrit l’ensemble P-ou p est la parabole de sommet O et de foyer A.

Soit ( Γ ) la parabole de sommet O et de foyer A.

Soit ) un repère orthonormé direct tel que et un vecteur directeur de la droite ∆’, ∆’ étant la perpendiculaire à ∆ au point O.

L’équation réduite de ( Γ ) dans le repère ) et y² = 4x

I(x, y) un point de (Γ ) privé de O y² =4x

Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à ∆ et I est le milieu de donc les points M(x’ ; y) et N(x’’ ; y) avec 2x =x’ + x’’.

On a MN²= AM² +AN²

D’où

Les réels x’ et x ‘’ s’ils existent sont donc les solutions de l’équation Z² -2xZ -2x-1=0

Soit ∆=4x²+ 8x+4=4(x+1)²

D’où et

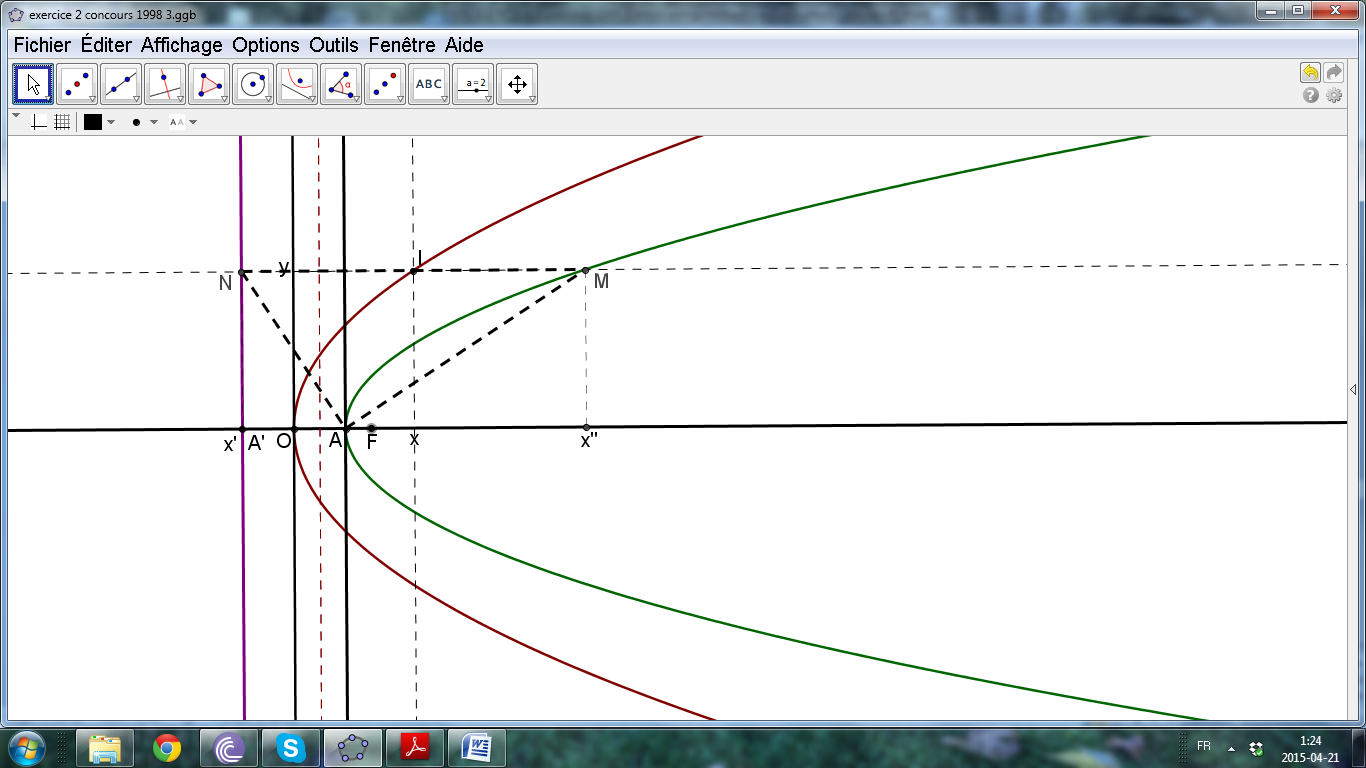
Or y² = 4x d’ou x’’ =

Dans le repère ) l’équation devient

C’est l’équation dune parabole de sommet A et de foyer le point F( ,0) Dans le repère )

Ainsi lorsque le point I décrit la parabole de sommet O et de foyer A.

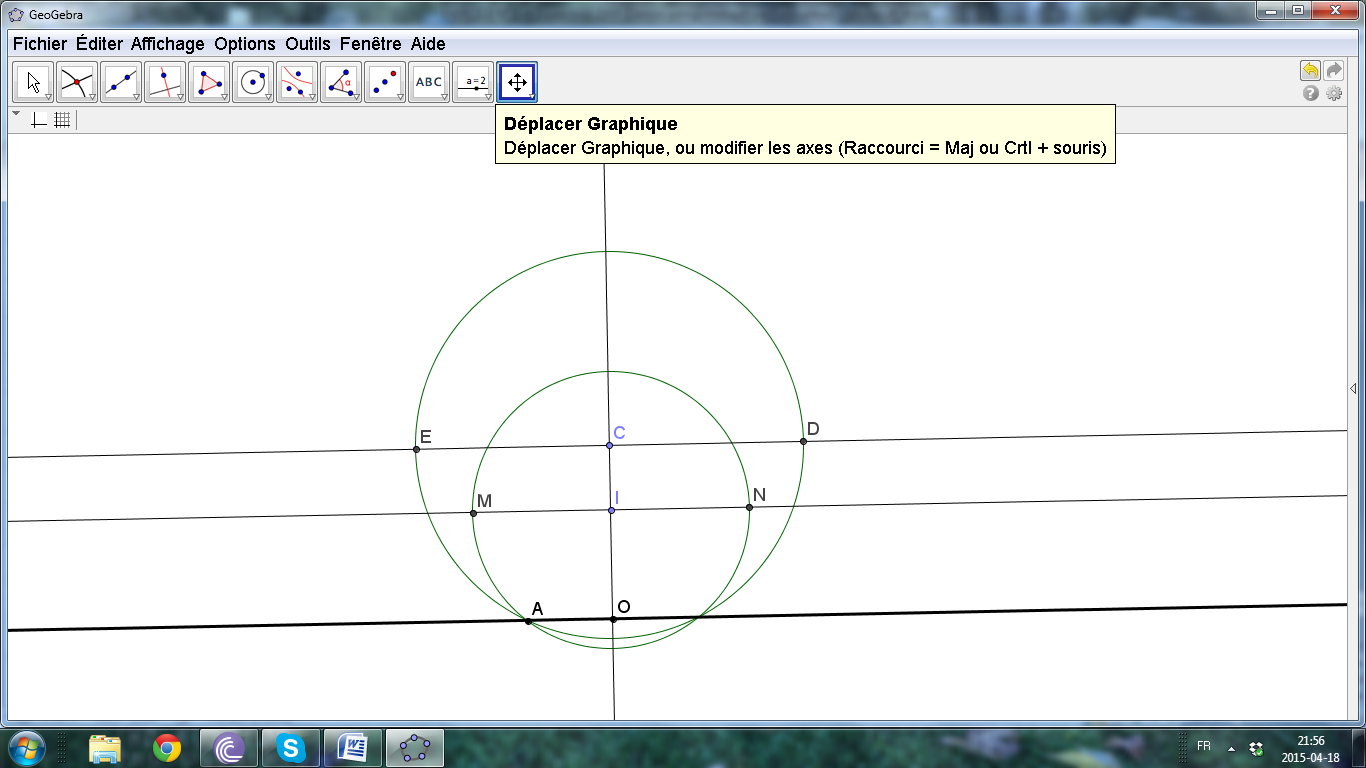
* le point N situé dans le demi plant de frontière ∆’ ne contenant pas le point A décrit la droite ∆’’ d’équation, Dans le repère ), x = -1 privé du point A’(-1 ; 0) c’est la perpendiculaire à ∆ Passant par le point A’ symétrie de A par rapport à O.
* Le point M décrit la parabole d’équation dans le ) l’équation  ; c’est la parabole de sommet A et de foyer le point F( privé du point A .



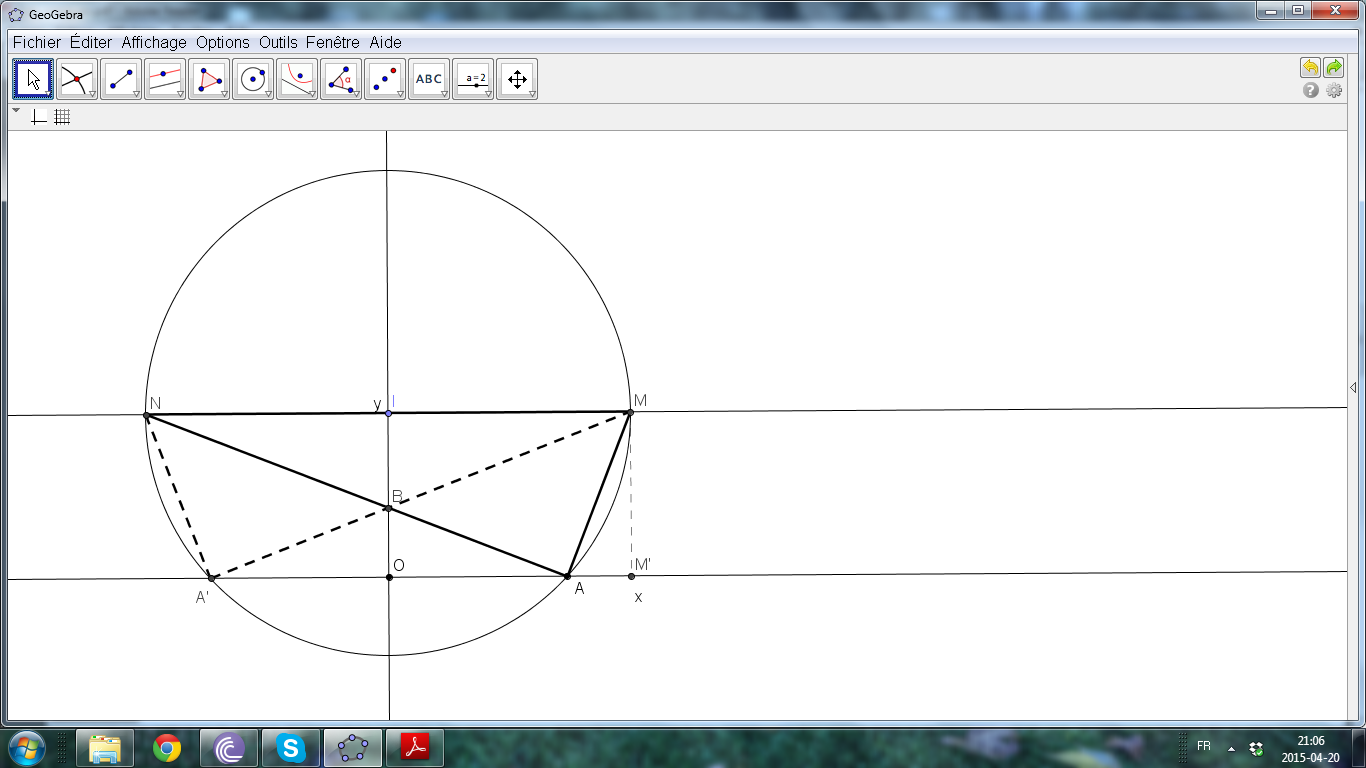
1. on suppose, dans cette question, que le point I décrit l’ensemble D ou D’est la droite passant par O est perpendiculaire à la droite ∆.
2. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MAN passant par un point fixe A’ autre que A.

Soit A’ le symétrique de A par rapport à O.

Le triangle AMN est rectangle en A et A’ le symétrique de A par rapport à O donc le triangle A’ MN est rectangle en A’ les points A, A’, M et N sont situés dans un même cercle de diamètre le segment. Ce qui prouve que tous les cercles circonscrits aux triangles MAN passent par le point A’ symétrique de A par rapport à O. comme A et O sont fixe le point A’ est aussi fixe.



1. Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N.



Soit ) un repère orthonormé direct tel que et un vecteur directeur de la droite D’, D’étant la perpendiculaire à ∆ au point O.

I(x, y) un point de D’ privé de O x = 0 et y un réel

Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à ∆ et I est le milieu de donc les points M(x’ ; y) et N(-x’ ; y)

On a MN²= AM² +AN²

C’est l’équation de l’hyperbole de foyers F et de foyer le point F’ Dans le repère R ) d’axe ∆ de sommet A et A’ le symétrie de A par rapport à O.

Ainsi lorsque le point I décrit la droite D’ privé de O

* le point N situé dans le demi plant de frontière D’ ne contenant pas le point A, décrit le demi- hyperbole d’équation, Dans le repère ), privé du point A’, situé dans le même demi plan.
* Le point M situé dans le demi plant de frontière D’ contenant le point A, décrit le demi -hyperbole d’équation, Dans le repère ), privé du point A, situé dans le même demi plan.

