concour 1998

EXERCICE N° 1

I/ Soit R un réel strictement positif et O un point d'un plan P.

On désigne par :

- (τ) le cercle du plan P de centre O et de rayon R.
- T un triangle ABC dans le cercle (τ)
- m_A , m_B, et m_C les médianes du triangle ABC , relatives au cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
- G le centre de gravité de triangle ABC.

1) Etablir les relations suivantes.
   a- $m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$
   b- $3GO^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3R^2$
   c- $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - OG^2)$
2) On désigne par α, β et γ les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.
   Etablir la relation :
   $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 + \sin^2\alpha - \cos\alpha\cos(2\beta + \alpha)$

II/ Parmi les triangles T on considère ceux désignés par t et ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et $0 < k < \frac{1}{3}$

1) Construire le triangle t lorsqu'on donne le sommet A.
2) Soit I le milieu du coté $[BC]$ d'un triangle t
   Déterminer et construire l'ensemble (ε) des points I lorsque le point A décrit le cercle (τ).
   Préciser la position de (ε) par rapport à (τ).
3) Montrer que tous les triangles t ont le même orthocentre H.
4) a - Quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir l'expression :
   $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ Pour que le triangle T soit isométrique à un triangle t ?
   b – Montrer que le triangle T est isométrique à un tringle t si et seulement si
   $1 + \sin^2\alpha - \cos\alpha\cos(2\beta + \alpha) = \frac{9}{4}(1 - k^2)$.

Exercice N° 2

Soient O et A deux points fixes d'une droite fixe Δ

Un triangle MAN rectangle en A, varie de telle manière que son hypoténuse $[MN]$ reste parallèle à la droite Δ.

Soit I le milieu de segment $[MN]$.

1) Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N dans chacun des cas suivantes :
   a- le points I décrit un cercle (C) de centre A privé des points ou ce cercle coupe Δ.
   b- le point I décrit l'ensemble P-$\{O\}$ou p est la parabole de sommet O et de foyer A.
2) on suppose, dans cette question, que le point I décrit l'ensemble $D' - \{O\}$ ou D'est la droite passant par O est perpendiculaire à la droite Δ.
   a- Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MAN passant par un point fixe A' autre que A.
   b- Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N.

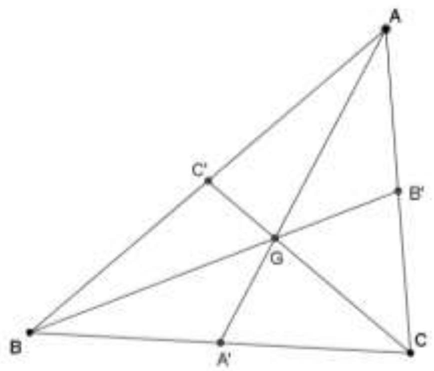
solution concourt 1998

EXERCICE N° 1

I/ Soit R un réel strictement positif et O un point d'un plan P.

On désigne par :

- (τ) le cercle du plan P de centre O et de rayon R.
- T un triangle ABC dans le cercle (τ)
- m_A , m_B, et m_C les médianes du triangle ABC , relatives au cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
- G le centre de gravité de triangle ABC.



1) Etablir les relations suivantes.

a- $m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$

$D'après\ la\ formule\ de\ la\ médiane\ on\ a$

$$AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2m_A{}^2$$

$$BC^2 + AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = 2m_C{}^2$$

$$AB^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2 = 2m_B{}^2$$

$$D'où\ \ 2\,(m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2)$$

$$= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + BC^2 + AC^2 - \frac{1}{2}AB^2 + AB^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2$$

$$= \frac{3}{2}AB^2 + \frac{3}{2}AC^2 + \frac{3}{2}BC^2$$

$$donc \qquad \boxed{m_A{}^2 + m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)}$$

b- $3GO^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3R^2$

$$On\ a \quad GA^2 + GB^2 + GC^2 = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$$

$$= \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$= GO^2 + OA^2 + GO^2 + OB^2 + GO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}\right)$$

$$= 3GO^2 + 3R^2 + 2\overrightarrow{GO}\left(3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)$$

$$= 3GO^2 + 3R^2 - 6\overrightarrow{GO}\left(\overrightarrow{Go}\right) = 3GO^2 + 3R^2 - 6GO^2 = -3GO^2 + 3R^2$$

$$d'ou \quad GA^2 + GB^2 + GC^2 = -3GO^2 + 3R^2 \Leftrightarrow \boxed{3GO^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3R^2}$$

c- $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - OG^2)$

$$On\ a \begin{cases} GA^2 = \frac{4}{9} {m_A}^2 \\ GB^2 = \frac{4}{9} {m_B}^2 \\ GC^2 = \frac{4}{9} {m_C}^2 \\ 3GO^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3R^2 \end{cases} \Rightarrow 3GO^2 + \frac{4}{9}({m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2) = 3R^2$$

$$\Rightarrow \quad {m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2 = \frac{27}{4}(R^2 - GO^2)$$

$$\Rightarrow \quad {m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$

$$donc \quad BC^2 + CA^2 + AB^2 = \frac{4}{3}({m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2)$$

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = \frac{4}{3}({m_A}^2 + {m_B}^2 + {m_C}^2) = \frac{4}{3} \times \frac{27}{4}(R^2 - GO^2) = 9(R^2 - GO^2)$$

$$donc \quad \boxed{BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - GO^2)}$$

2) On désigne par α, β et γ les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ du triangle ABC.
Etablir la relation : $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 + \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cos(2\beta + \alpha)$

$$1 + \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cos(2\beta + \alpha) = 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\ (cos2(\alpha + \beta) + cos2\beta)$$

$$= 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\ (\cos(2\pi - 2\gamma) - cos2\beta)$$

$$= 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\ (\cos(2\gamma) + cos2\beta)$$

$$= 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\ cos^2\gamma + \frac{1}{2}\sin^2 \gamma - \frac{1}{2}cos^2\beta + \frac{1}{2}\sin^2 \beta$$

$$= 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\ (1 - \sin^2 \gamma) + \frac{1}{2}\sin^2 \gamma - \frac{1}{2}(1 - \sin^2 \beta) + \frac{1}{2}\sin^2 \beta$$

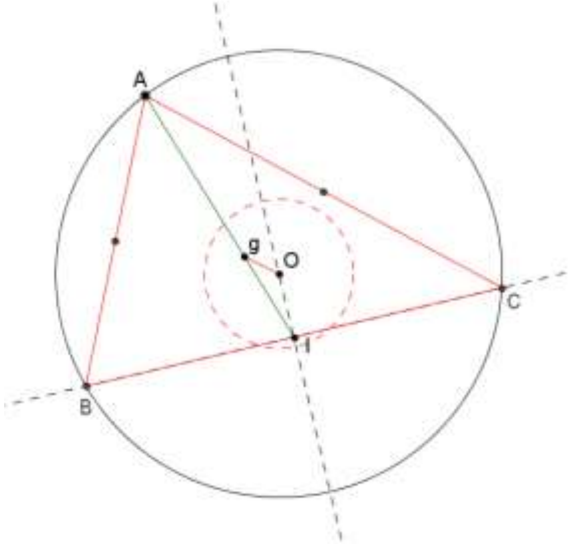
$$= 1 + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 \gamma + \frac{1}{2}\sin^2 \gamma - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 \beta + \frac{1}{2}\sin^2 \beta$$

$$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \gamma + \sin^2 \beta$$

$$donc \quad \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 + \sin^2\alpha - \cos\alpha\cos(2\beta+\alpha)$$

II/ Parmi les triangles T on considère ceux désignés par t et ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et $0 < k < \frac{1}{3}$

1) Construire le triangle t lorsqu'on donne le sommet A.



Soit (D') le disque de centre O et de rayon $\frac{1}{3}$R le poin g verifie Og =kR le point g est donc à l'intétrieur de disdue (D')

On construis le point I image de A par l'homothétie de centre g et de rapport $-\frac{1}{2}$

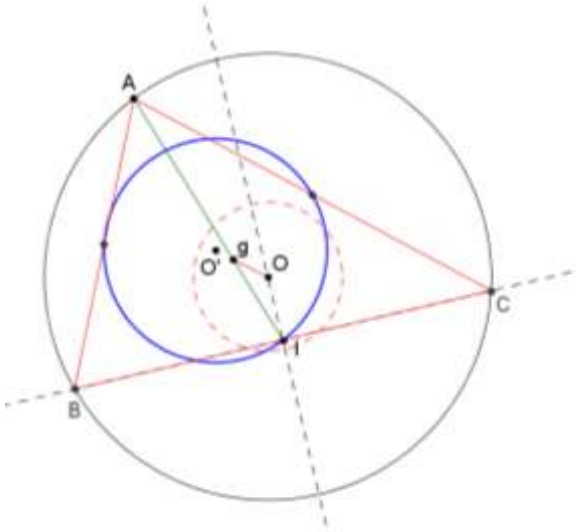
I est le milieu du coté $[BC]$ de triangle t comme le triangle t est inscrit dans le cercle (τ) donc (OI) est la médiatrice de segment$[BC]$ les points B et C sont donc les points d'intersection de la perpendiculaire à la droite (OI) et le cercle (τ)

2) Soit I le milieu du coté $[BC]$ d'un triangle t

Déterminer et construire l'ensemble (ε) des points I lorsque le point A décrit le cercle (τ).

le point I est l'image de A par l'homothétie de centre g et de rapport $-\frac{1}{2}$

l'orsqoue le points A décrit le cercle (τ) le point I décrit le cercle (ε) image de (τ) par l'homothétie de centre g et de rapport $-\frac{1}{2}$



(ε) est le cercle de centre O' =h(g, $-\frac{1}{2})(O)$ et de rayon r = $\frac{1}{2}Og$

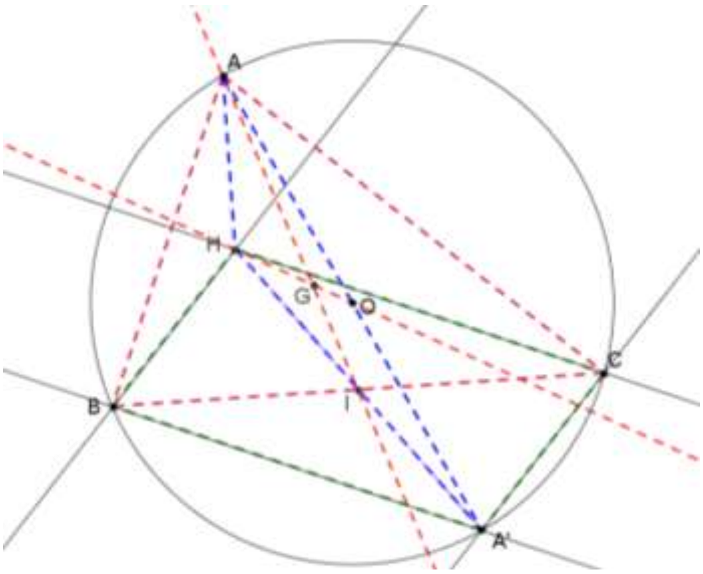
Préciser la position de (ε) par rapport à (τ).

On a O' =h(g, $-\frac{1}{2})(O) \Rightarrow gO' = \frac{1}{2}gO \;\Rightarrow\; OO' = Og + gO' = \frac{3}{2}Og = \frac{3}{2}kR < \frac{1}{2}R$

Le cercle (ε) est à l'intérieur de (τ).

3) Montrer que tous les triangles t ont le même orthocentre H.

On montre que les points g , H et O sont alignés



Soit A' le symétrique de A par rapport au point O.

Le segment $[AA']$ est un diamètre du cercle (C) et les points B et C sont des points de (C) donc les triangles AA'B et AA'C sont rectangle respectivement en B et en C.

Les droites (BA') et (BA) sont perpendiculaires ainsi que les droites (CA') et (CA)

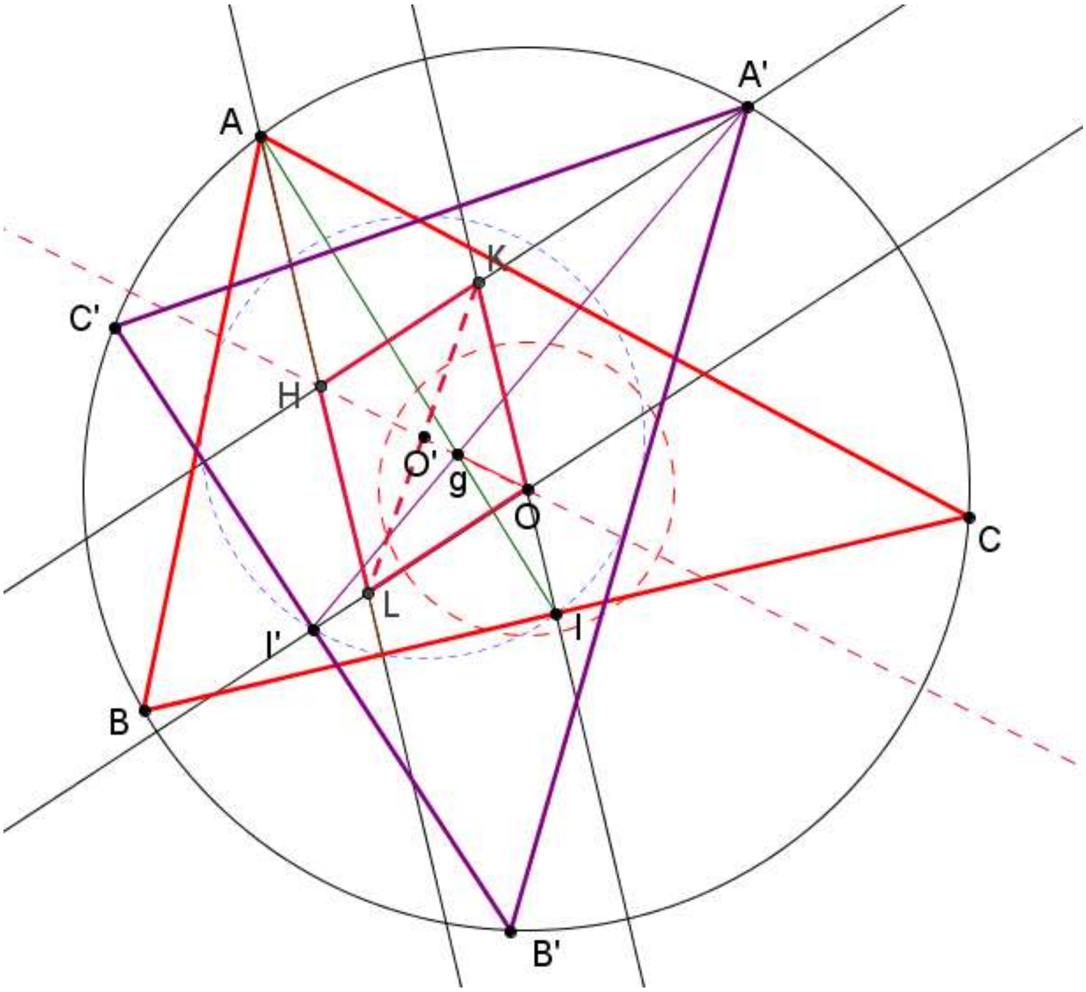
$[CH]$ et $[BH]$ sont les hauteurs du triangle ABC issues respectivement des points C et B. Les droites (CH) et (BA) sont perpendiculaires ainsi les droites (BH) et (AC). On déduit que (BH)//(A'C) et (CH)//(A'B) . le quadrilatère A'BHC et un parallélogramme.

$les\ segments\ [A'H]\ et\ [BC]\ ont\ le\ meme\ milieu\ I\ .la\ droite\ (AI) est\ alors$
$une\ mediane\ du\ triangle\ AA'H. le\ point\ O\ est\ le\ milieu\ de\ [AA']\ la\ (OH)$
$est\ alors\ une\ mediane\ du\ triangle\ AA'H\ .soit\ g'\ le\ centre\ de\ gravité\ de\ trianlgle$

$$AA'H \text{ donc } \overrightarrow{g'I} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} \text{ et on a } g \text{ est le centre de gravité du triangle } ABC$$

$$\text{donc } \overrightarrow{gI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} \text{ donc } \overrightarrow{g'I} = \overrightarrow{gI} \text{ et par suite } g = g'$$

Soient t et t' deux triangle ayant pour centre de gravité un point g tel que Og = kR, k réel donné et $0 < k < \frac{1}{3}$



Soit H l'orthocentre du triangle ABC de centre de gravité g tel que og =kR.

H' l'orthocentre du triangle A'B'C' de centre de gravité g tel que og =kR.

I milieu de $[BC]$ et I' milieu de $[B'C']$

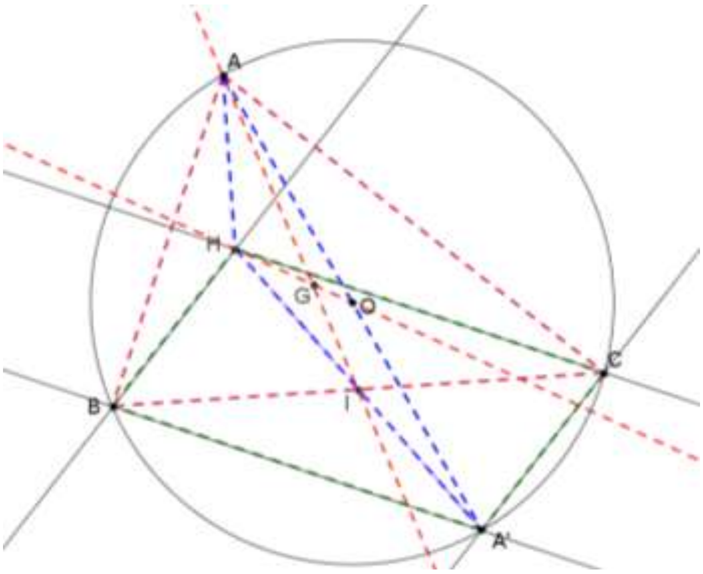
(OI) médiatrice de segment $[BC]$ et (AH) la hauteur de triangle ABC issue de A donc (OI)//(AH)

(OI') médiatrice de segment $[B'C']$ et (A'H') la hauteur de triangle A'B'C' issue de A' donc (OI')//(A'H')

Le triangle ABC de centre de gravité g et il est inscrit dans le cercle de centre O et d'orthocentre H donc H est un point de (Og)

Le triangle A'B'C' de centre de gravité g et il est inscrit dans le cercle de centre O et d'orthocentre H' donc H' est un point de (Og)

Donc les points O ,g, H et H' sont alignés.
Soit L le point d'intersection de la droite (AH) et la droite (OI') et k le point d'intersection de la droite (A'H') et la droite (OI)
Les quadrilatères OKHL et OKH'L sont des parallélogrammes donc les segments $[OH]$ et $[OH']$ et $[KL]$ ont le même milieu or O, H et H' sont alignes donc le point H est confondue avec le point H'



4) a - Quelle condition nécessaire et suffisante doit remplir l'expression :
$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ Pour que le triangle T soit isométrique à un triangle t ?
b – Montrer que le triangle T est isométrique à un tringle t si et seulement si
$$1 + \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cos(2\beta + \alpha) = \frac{9}{4}(1 - k^2).$$

Exercice N° 2

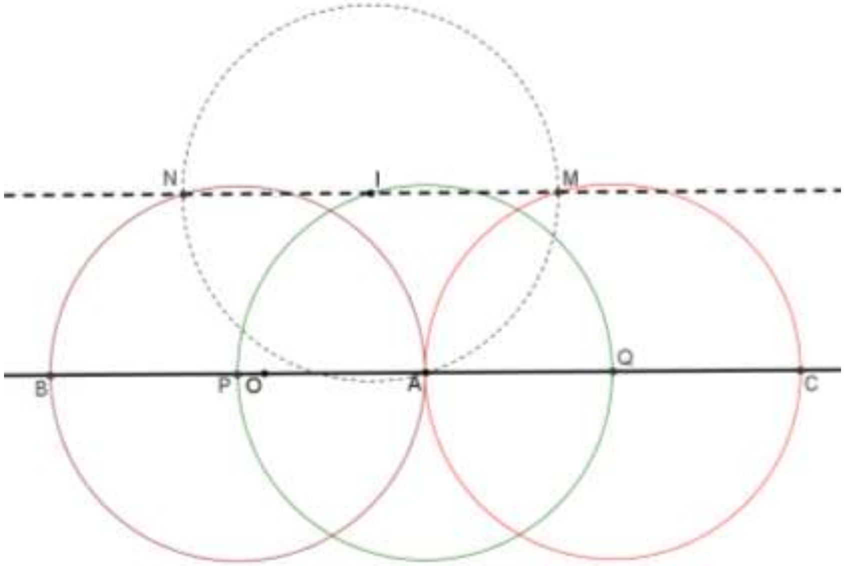
Soient O et A deux points fixes d'une droite fixe Δ

Un triangle MAN rectangle en A, varie de telle manière que son hypoténuse $[MN]$ reste parallèle à la droite Δ.

Soit I le milieu de segment$[MN]$.

1) Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N dans chacun des cas suivantes :

   a- le points I décrit un cercle (C) de centre A privé des points ou ce cercle coupe Δ.



Soit (C) un cercle de centre A et de rayon r un réel positif fixe, (C) coupe Δ en deux points P et Q.
Soient I un point de (C) privé des points P et Q et Δ' la parallèle à Δ passant par I.
Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à Δ donc les point M et N sont deux point de Δ' et puisque I est le milieu de $[MN]$ alors
IA = IM = IN
On a donc PM = IM =IA = r et QM = IN = IA =r Ainsi lorsque I décrit (C)

- le point M décrit le cercle de centre Q et de rayon r privé des points A et C intersection de ce cercle et la droite Δ.
- Le point N décrit le cercle de centre P et de rayon r privé des points A et B intersection de ce cercle et la droite Δ.

   b- le point I décrit l'ensemble P-$\{O\}$ou p est la parabole de sommet O et de foyer A.

Soit (Γ) la parabole de sommet O et de foyer A.

Soit $R(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct tel que $\vec{\imath}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{\jmath}$ un vecteur directeur de la droite Δ', Δ' étant la perpendiculaire à Δ au point O.

L'équation réduite de (Γ) dans le repère $R(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et $y^2 = 4x$

I(x, y) un point de (Γ) privé de O ⇔ y² =4x

Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à Δ et I est le milieu de $[MN]$ donc les points M(x' ; y) et N(x'' ; y) avec 2x =x' + x''.

On a MN²= AM² +AN² ⇔ $(x' - x'')^2 = (x' - 1)^2 + (y)^2 + (x'' - 1)^2 + (y)^2$

$\Leftrightarrow -2x'x'' = -2x' - 2x + 2y^2 + 2 \Leftrightarrow -2x'x'' = -4x + 8x + 2 \Leftrightarrow x'x'' = -2x - 1$

D'où $\begin{cases} x'x'' = -2x - 1 \\ x' + x'' = 2x \end{cases}$

Les réels x' et x '' s'ils existent sont donc les solutions de l'équation Z² -2xZ -2x-1=0

Soit Δ=4x²+ 8x+4=4(x+1)²

D'où $x' = \frac{2x-2(x+1)}{2} = -1$ et $x'' = \frac{2x+2x+2}{2} = 2x + 1$

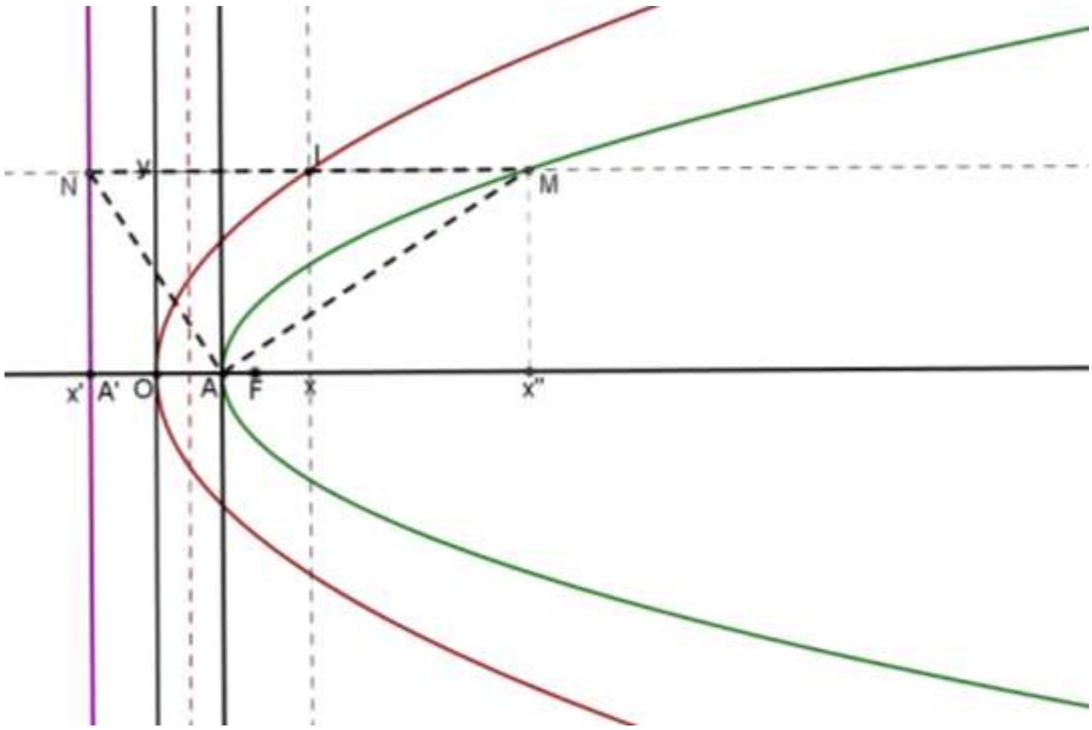
Or y² = 4x d'ou x'' = $2x + 1 = \frac{1}{2}y^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2x'' - 2$

Dans le repère $R'(A; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation $y^2 = 2(x'' - 1)$ devient $Y^2 = 2X$

C'est l'équation dune parabole de sommet A et de foyer le point F($\frac{1}{2}$,0) Dans le repère $R'(A; \vec{i}; \vec{j})$

Ainsi lorsque le point I décrit la parabole de sommet O et de foyer A.

- le point N situé dans le demi plant de frontière Δ' ne contenant pas le point A décrit la droite Δ'' d'équation, Dans le repère $R(O; \vec{i}; \vec{j})$, x = -1 privé du point A'(-1 ; 0) $_{R(O;\vec{i};\vec{j})}$ c'est la perpendiculaire à Δ Passant par le point A' symétrie de A par rapport à O.
- Le point M décrit la parabole d'équation dans le $(A; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation $y^2 = 2x\ ;\ x \neq 1$ c'est la parabole de sommet A et de foyer le point F($\frac{3}{2}$: 0) $_{R(O;\vec{i};\vec{j})}$ privé du point A .

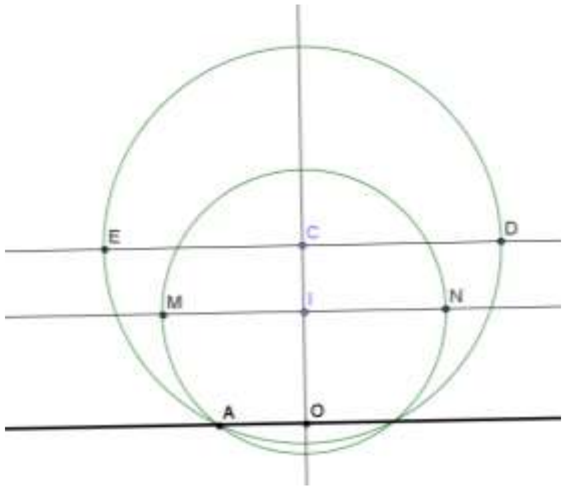


2) on suppose, dans cette question, que le point I décrit l'ensemble $D' - \{O\}$ ou D'est la droite passant par O est perpendiculaire à la droite Δ.

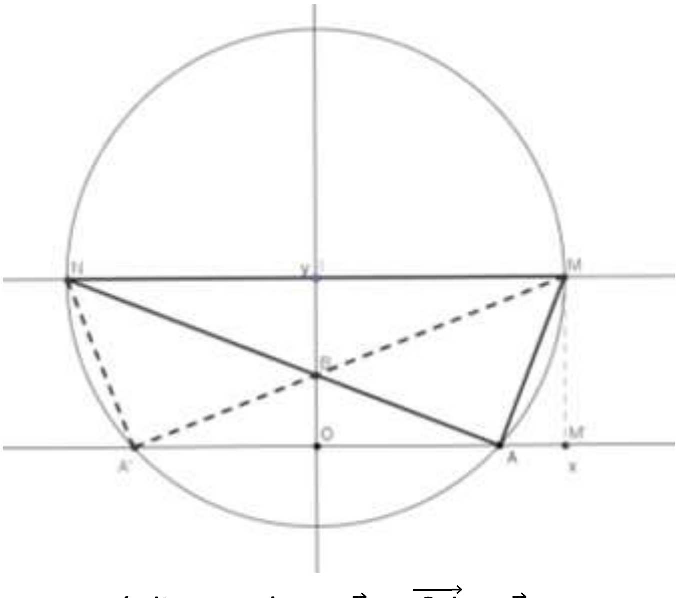
a- Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MAN passant par un point fixe A' autre que A.

Soit A' le symétrique de A par rapport à O.

Le triangle AMN est rectangle en A et A' le symétrique de A par rapport à O donc le triangle A' MN est rectangle en A' les points A, A', M et N sont situés dans un même cercle de diamètre le segment$[MN]$. Ce qui prouve que tous les cercles circonscrits aux triangles MAN passent par le point A' symétrique de A par rapport à O. comme A et O sont fixe le point A' est aussi fixe.



b- Trouver les ensembles décrits respectivement par les points M et N.



Soit $R(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère orthonormé direct tel que $\vec{\imath}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{\jmath}$ un vecteur directeur de la droite D', D'étant la perpendiculaire à Δ au point O.
I(x, y) un point de D' privé de O ⇔ x = 0 et y un réel $\neq 0$

Le triangle AMN est rectangle en A tel que son hypoténuse soit parallèle à Δ et I est le milieu de $[MN]$ donc les points M(x' ; y) et N(-x' ; y)

On a MN²= AM² +AN² $\Leftrightarrow$ $(2x^{'})^2 = (x' - 1)^2 + (y)^2 + (-x^{'} - 1)^2 + (y)^2$

$\Leftrightarrow 4x^{'2} = 2x'^2 - 2x^{'} + 2x^{'} + 2y^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^{'2} - 2y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^{'2} - y^2 = 1$

C'est l'équation de l'hyperbole de foyers F$(\sqrt{2}; 0)$ et de foyer le point F'$(-\sqrt{2}; 0)$ Dans le repère R$(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$ d'axe Δ de sommet A et A' le symétrie de A par rapport à O.

Ainsi lorsque le point I décrit la droite D' privé de O

- le point N situé dans le demi plant de frontière D' ne contenant pas le point A, décrit le demi- hyperbole d'équation, Dans le repère $R'(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$, $x^2 - y^2 = 1$, $x < 0$ privé du point A', situé dans le même demi plan.
- Le point M situé dans le demi plant de frontière D' contenant le point A, décrit le demi -hyperbole d'équation, Dans le repère $R'(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\,)$, $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ privé du point A, situé dans le même demi plan.