EXERCICE N°1 CONCOUR 2005

Soit a, b, c, et d des réels tels que ad –bc 0 pour x

**Partie A/ On suppose que (a-d)² +4bc > 0**

1. Montrons que

1. Montrons qu’il existe deux réels α et β tels que

On cherche à trouver les solutions de l’équation

Soit donc l’équation ( E ) admet deux racines distinct

et

On a et

pour d’ou

1. Soit la suite définie par son premier terme et

a/ La suite est stationnaire

( E )

Soit donc l’équation ( E ) admet deux racines distinct

et

Pour ou La suite est stationnaire.

b/ Montrons que si et alors et

Soit la propriété P(n) : pour tout n et

La propriété P(n) est vrai pour n =0 supposons qu’elle est vrai pour n c-a-d et et montrons qu’elle est vrai pour n + 1

On a

et

car , et

c/ pour et Etudions la convergence de la suite

On a

On considère la suite définie par et

La suite est une suite géométrique de premier terme et de raison

r = en effet

on a

* Si Donc et par suite
* Si Donc et par suite
* Si Impossible car
* Si

la suiten’admet pas de limite et on a et et par suite et si non

= ou ce qui est absurde car et

Donc n’admet pas de limite.

1. et

**a/** Soit P(n) :

On a supposons que montrons que

Donc pour

D’où la suite ( est une suite minoré est décroissante donc converge vers une limite l

Vérifiant ou or donc

et

l’équation ( E ) donc ou sont les solutions

De ( E )

On a

d’après la 3°) c/ question la suite ( est une suite convergente et elle converge vers

**b/** Montrons que si alors

Avec

**c/** Montrons que

**d/** On a

Et

Donc

**e/** La suite définie par et

l’équation ( E ) donc ou sont les solutions de l’équation ( E )

D’après la 3°) question c/la suite ( converge vers

**f)** Donnons des approximations successives de

**Partie B/** **dans cette partie on suppose que**

1. Montrons qu’il existe un réel tel que

* Soit l’équation

Comme c Soit donc

Donc admet une solution double

* On a est une solution de On a aussi

1. Soit la suite définie par son premier terme et

* Si alors la suite est stationnaire donc convergente et elle converge vers
* Si montrons que pour tout

Soit la propriété P(n) : pour tout

La propriété P(n) est vrai pour n =0 supposons qu’elle est vrai pour un entier n et montrons qu’elle est vrai pour n + 1

On a

On considère maintenant la suite définie par et

On a

La suite est donc une suite arithmétique de premier terme et de raison D’où

Comme c 0 alors la est donc converge et elle converge vers .

Exercice N° 2

Soit continue sur IR et vérifiant f(x+y) = f(x) +f(y) pour tout (x,y)

* Montrons que pour tout entier n et pour tout réel x

On a donc

La propriété ( 1 ) est donc vraie pour n = 0 supposons qu’elle est vraie pour un entier n et montrons qu’elle est vraie pour n+1

* Montrons que pour tout entier n

Pour

* Montrons que pour tout nombre rationnel (3)

Soit p et q deux entier tel que q et x = qx=p

De (1) et (2) en tire

(3)

* Pour finaliser Montrons que pour tout réel

Soit x un réel, on pose et considère la suite des nombres rationnels définie par : pour tout entier naturel n  .

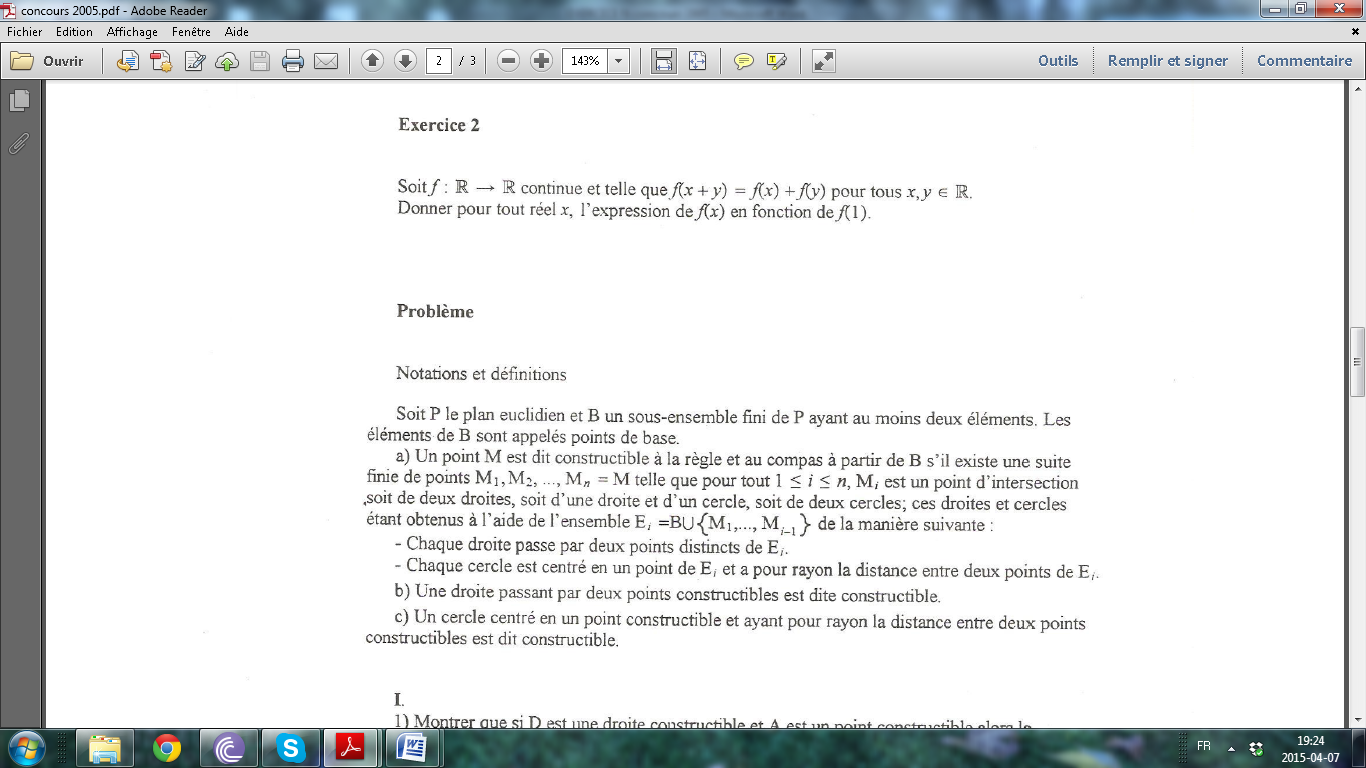
* On a
* La suite est donc encadrée par deux suite qui converge vers la même limite x La suite converge et on a (4)
* = (5)

Or f est continue sur IR (6)

De (4) , (5) et (6) et par passage à la limite en déduit que pour tout réel x

Ce qui montre que pour tout réel x on a =

Problème



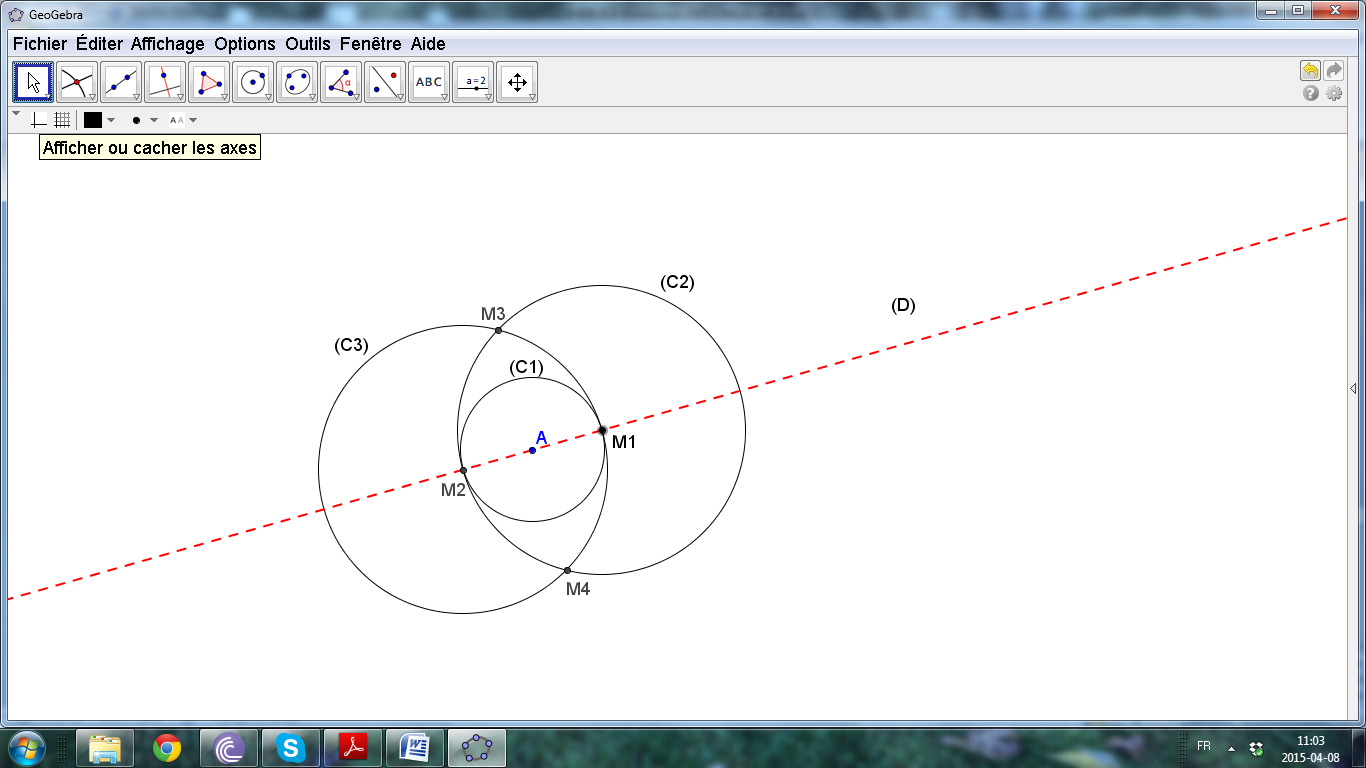
1. Montrons que si D est une droite constructible et A un point constructible alors la perpendiculaire à D passant par A ainsi que la parallèle à D sont des droites constructibles.

Soit D une droite constructible et A un point constructible

* **Si A est un point de la droite D**

D est une droite constructible il existe un point M1 constructible distinct du point A tel que D passe les point M1 et A

Les points A et M1 sont constructible donc Le cercle C1de centre A et de rayon A M1 est constructible. C1 recoupe la droite D en un autre point M2 autre que M1



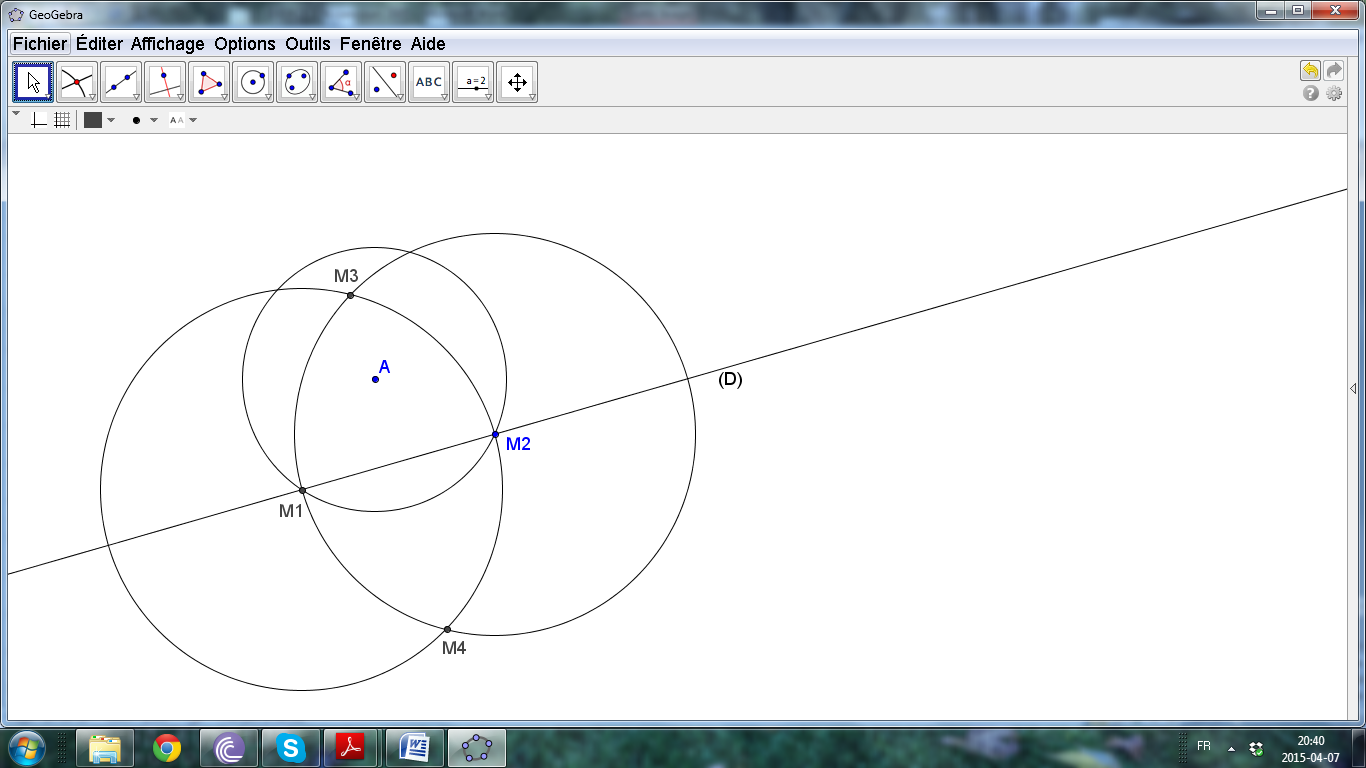
Les points M1 et M2 sont constructible, donc les cercle C2 et C3 de centre respectifs M1 et M2 et de rayon M1M2 sont constructibles.

C2 et C3 se coupent en deux points M3 et M4

Les points M3 et M4 sont constructible donc la droite (M3M4) est constructible.

La droite (M3M4) passe par A et perpendiculaire à D.

* **Si A est un point n’appartenant pas à la droite D**

****

D est une droite constructible elle passe donc par un point M2 constructibles

Les points A et M2 sont constructible donc Le cercle C0 de centre A et de rayon A M2 est constructible. C0 coupe la droite D en un autre point M1 autre que M2

Les points M1 et M2 sont constructible donc le cercle C1 de centre M2 et de rayon M2M1 est constructible.

Les points M1 et M2 sont constructible donc le cercle C2 de centre M1 et de rayon M1M2 est constructible.

C1 et C2 se coupent en deux points M3 et M4

Les points M3 et M4 sont constructibles donc la droite (M3M4) est constructible.

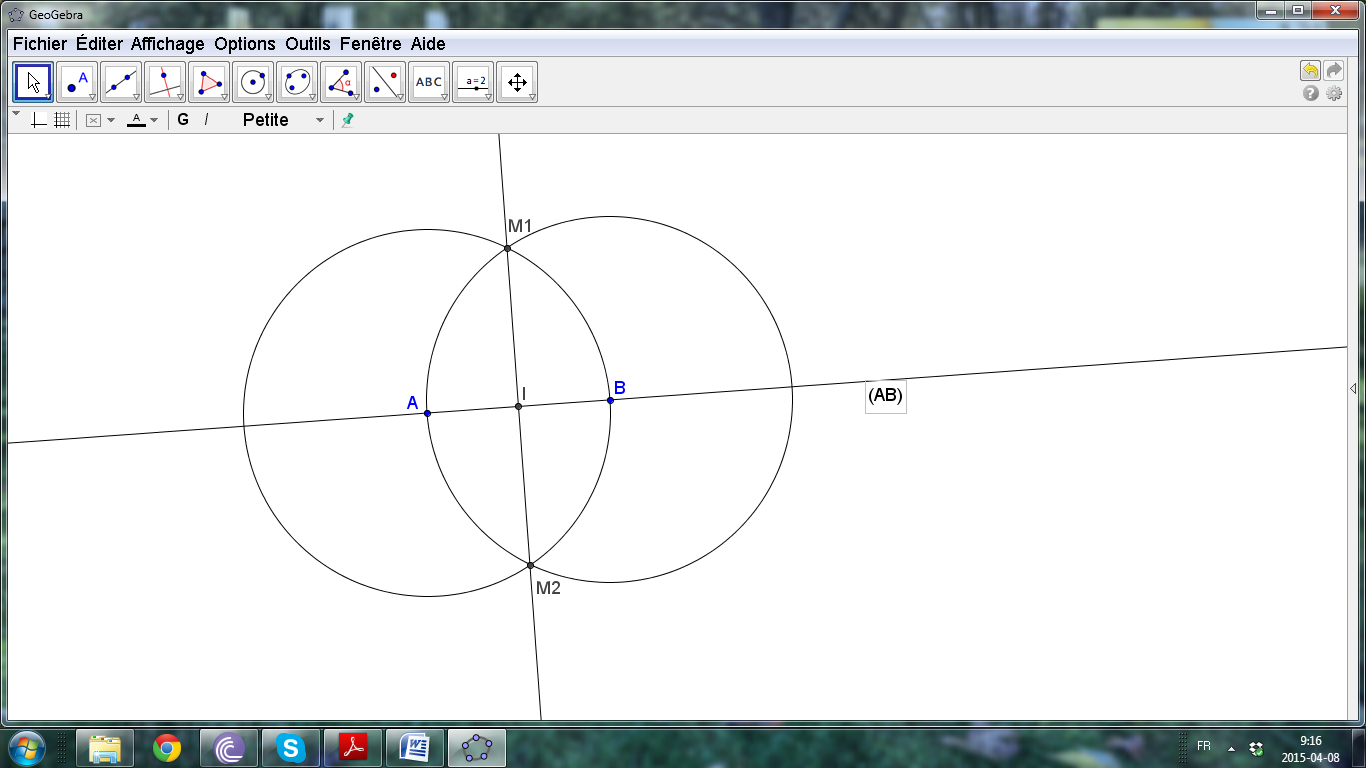
La droite (M3M4) passe par A et perpendiculaire à D.

* Soit D’ la perpendiculaire à la droite D passant par A d’après ce qui précède la D’’ perpendiculaire à D’ passant par A est constructible ; D’’ est la droite parallèle à D passant par A

1. Montrons que si A et B sont deux points constructibles alors le milieu et la médiatrice de segment sont constructibles.

Les points A et B sont constructible donc les cercles C1 et C2 de centres respectifs A et B et de même rayon AB sont constructibles. C1 et C2 se coupent en deux points M1 et M2.

Les points M1 et M2 sont donc constructibles, la droite (M1M2) est aussi constructible, cette droite est la médiatrice de segment elle coupe (AB) en un point I milieu de



C1

C2

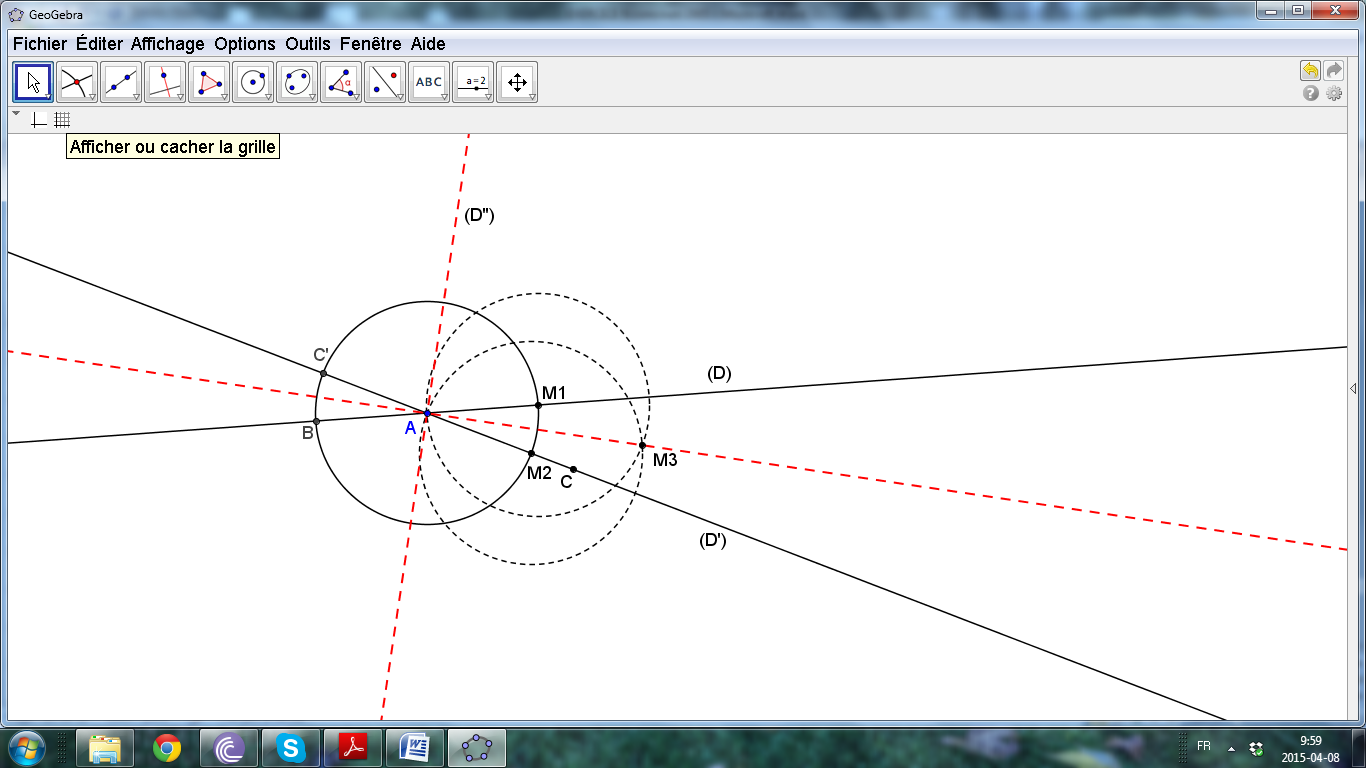
1. Montrons que si D et D’ sont deux droites constructibles concourantes alors les bissectrices des angles déterminés par ces deux droites sont constructibles.

D et D’ sont deux droites constructibles concourantes ils existent trois points A, M1 et C tels que la droite D passe par (AM1) et la droite D’ passe par (AC)

Les points A et M1 sont constructible donc le cercles C1 de centre A et de rayon A M1 est constructible. C1 coupe la droites D en deux points M1 et B et la droite D’ en deux points M2 et C’.

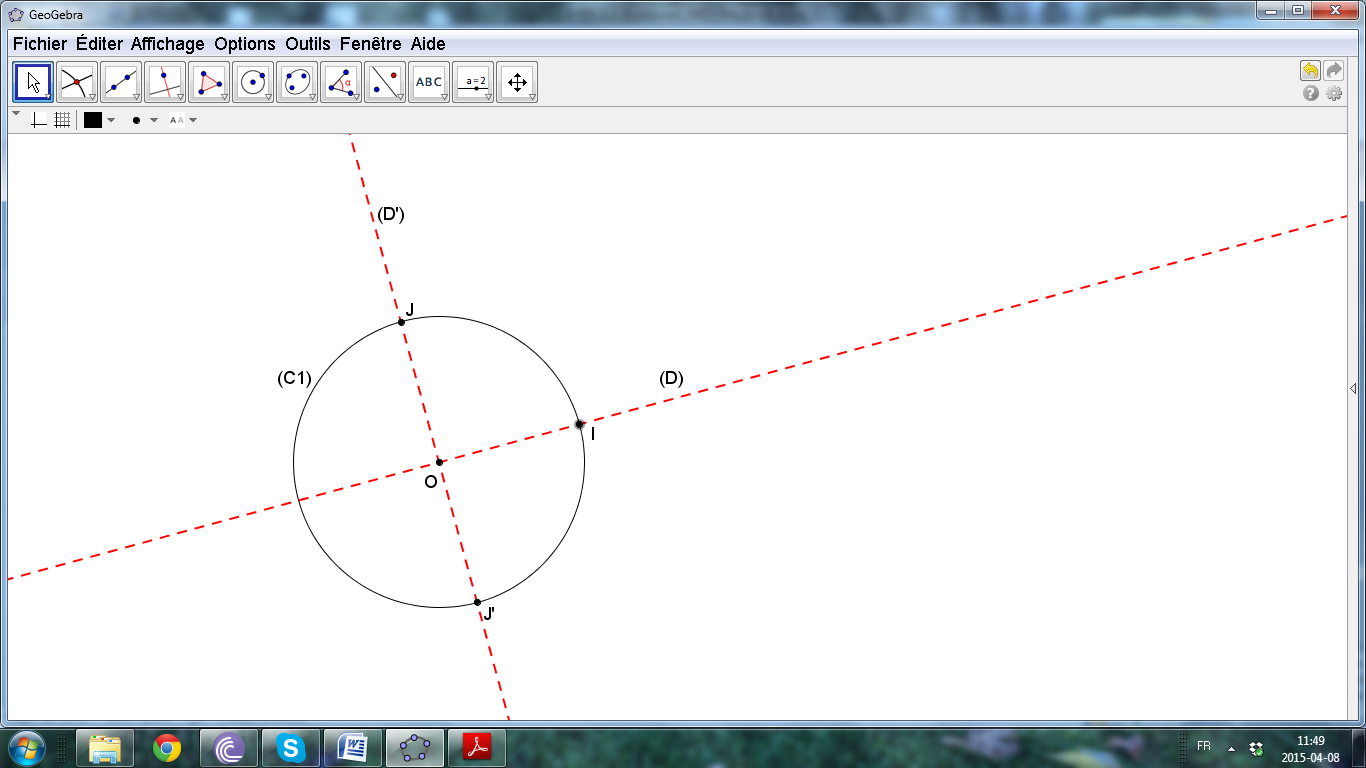
Les points M1 et M2 sont constructibles donc les cercles C1 et C2 de centres respectifs M1 et M2 et de même rayon AM1 sont constructibles. C1 et C2 se coupent en un point M3 autre que A.

Les points A et M3 sont constructibles la droite (AM3) est donc constructible. La perpendiculaire D’’ à la droite (AM3) passant par A est aussi constructible. Ces droite (AM3) et D’’ sont les bissectrices des angles déterminés par les deux droites D et D’



**II/** Soit O et I deux points du plan tel que OI = 1. On pose B =

1. Montrons qu’il existe un point constructible J tel que soit un repère orthonormé.



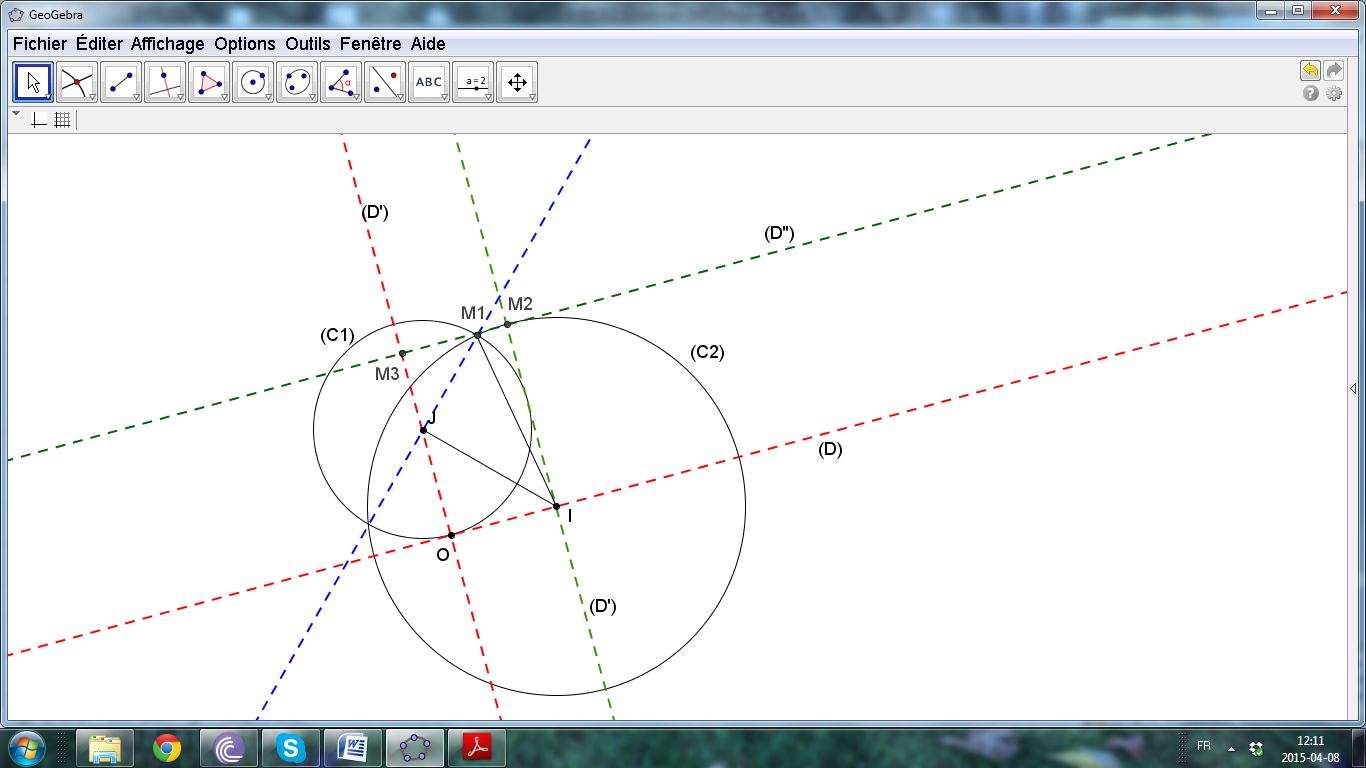
Les points O et I sont deux points donnés de P la droite D passant par O et I est constructible la perpendiculaire D’ à la droite D passant par O est alors constructible.

Le cercle C1 de centre O et de rayon OI = 1 est aussi constructible.

Le cercle C1 et la droite D’ se coupent en deux point J et J’.

Le Point J vérifie : J est constructible puisque c’est l’intersection d’une droite est un cercle OJ = 1 et (OJ) perpendiculaire à (OI) ce qui prouve qu’il existe un point constructible J tel que soit un repère orthonormé.

1. Un nombre réel est dit constructible s’il est une des coordonnées, dans le repère, d’un point constructible.
2. Montrons que est constructible.



Les points I et J sont constructibles la droite (IJ) est donc constructibles ainsi que sa perpendiculaire ∆ passant par J

Les points O et J sont constructible le cercle (C1) de centre J et de rayon OJ est donc constructible

La droite ∆ et le cercle (C1) se coupent M1et A. M1 est donc constructible. Le triangle IJM1 rectangle J et JM1 =1 d’après Pythagore IM1 =

Les points I et M1 sont constructibles le cercle de centre I et de rayon IM1 et donc constructible.

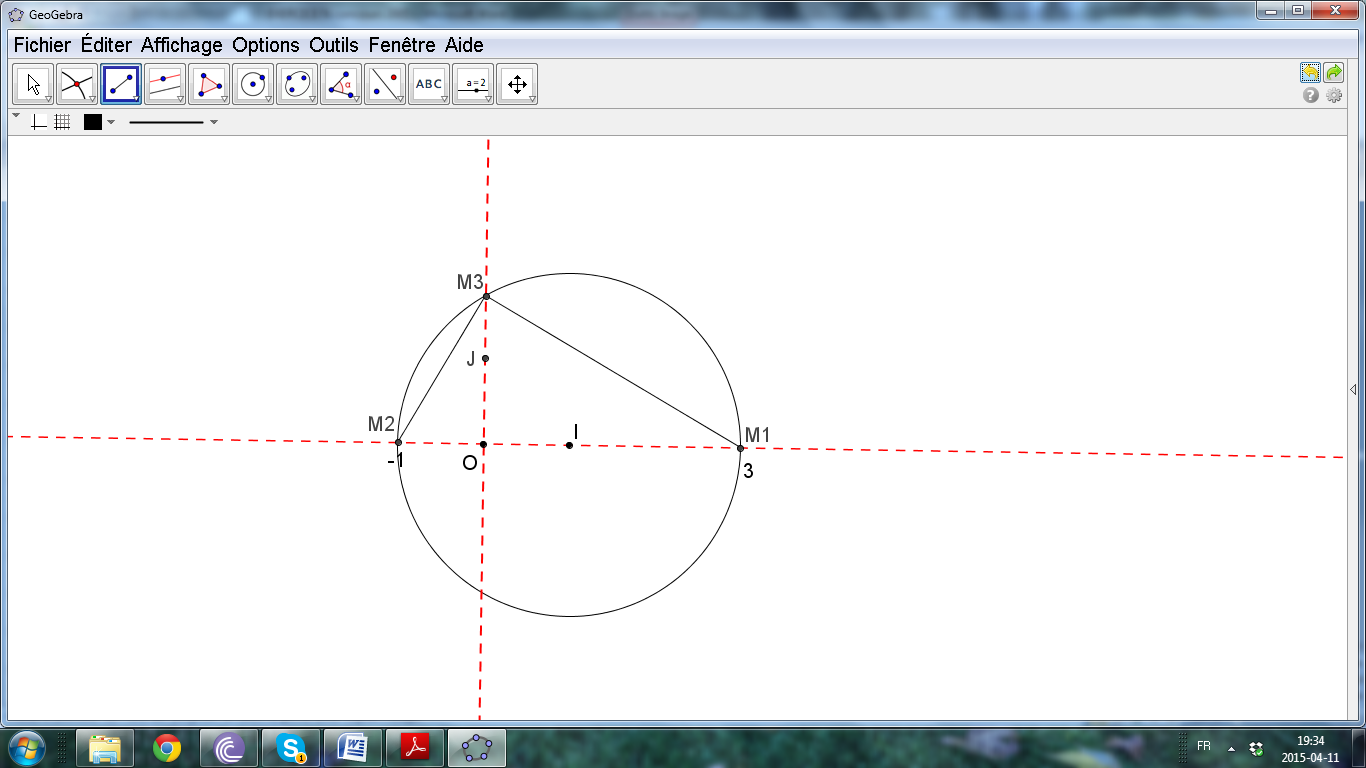
La droite (D) et le point I sont constructibles la perpendiculaire (D’’) à (D) passant par I est donc constructible

La droite (D’’) et le cercle (C1) se coupent en M2, M2 est donc constructible.

La droite (D’’) et le point M2 sont constructibles la perpendiculaire (D’’’) à (D’) passant par M2 est donc constructible.

La droite (D’’’) coupe la droite ( D’) en M3. Le point M3 est donc constructible. M3 est d’ordonné , dans le repère (O, I, J) , est donc constructible.

Autre Méthode



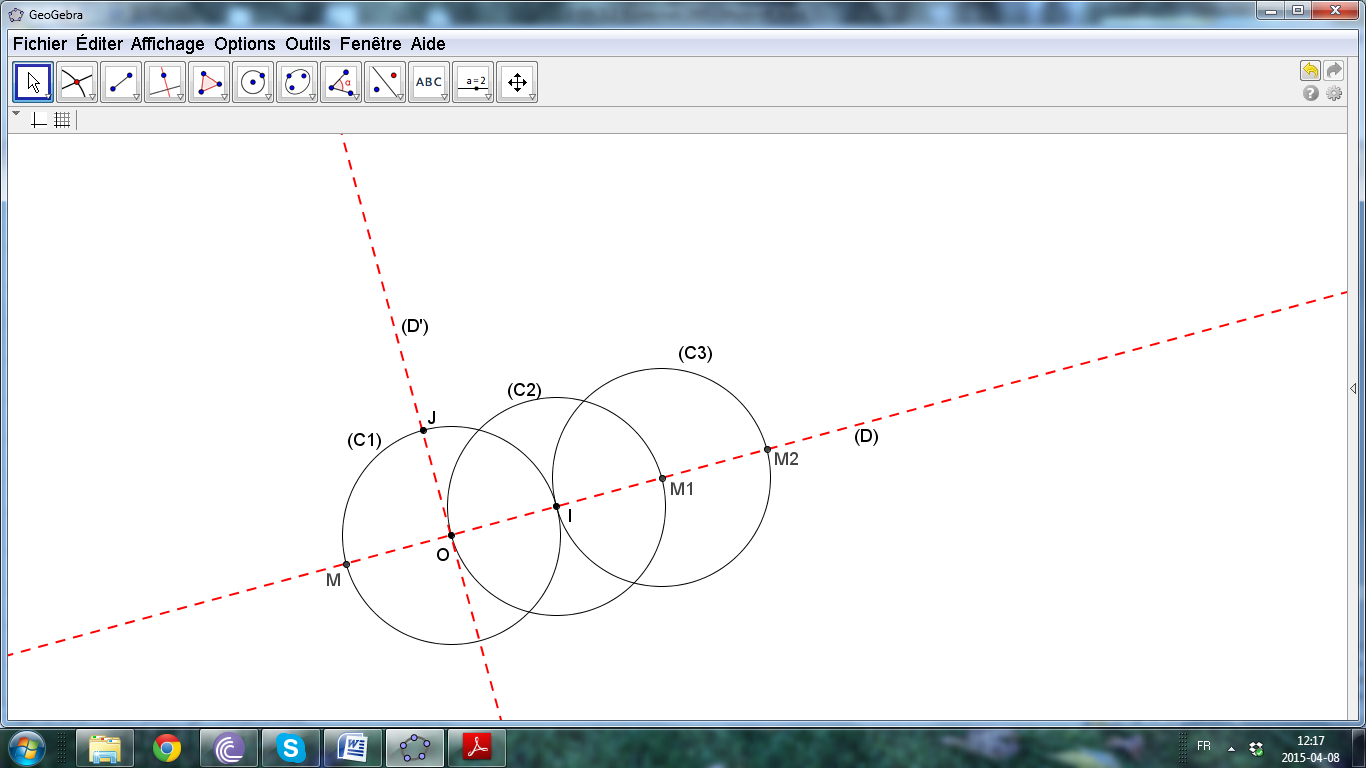
Le nombre est constructible il existe donc un point M1 d’abscisse, dans le repère (O, I, J) , .

-1 est constructible il existe donc un point M2 d’abscisse, dans le repère (O, I, J) ,-1.

Soit M’’Le milieu des points M et M’. M’’ est constructible le cercle de centre M’’ et de rayon M1M’’ est aussi constructible elle coupe la droite (OJ) au point M3 d’ordonné, dans le repère (O, I, J), puisque dans un triangle rectangle MM’M3

on a

1. Montrons que tout entier est constructible.



* Si n est un entier positif.

Le point O est constructible d’abscisse 0, dans le repère (O, I, J), 0 est constructible.

Les points O et I sont constructible le cercle (C1) de centre O et de rayon OI =1 est donc constructible. le cercle (C1) coupe la droite (OI) en M1 qui est d’abscisse 1, dans le repère (O, I, J), 1 est constructible.

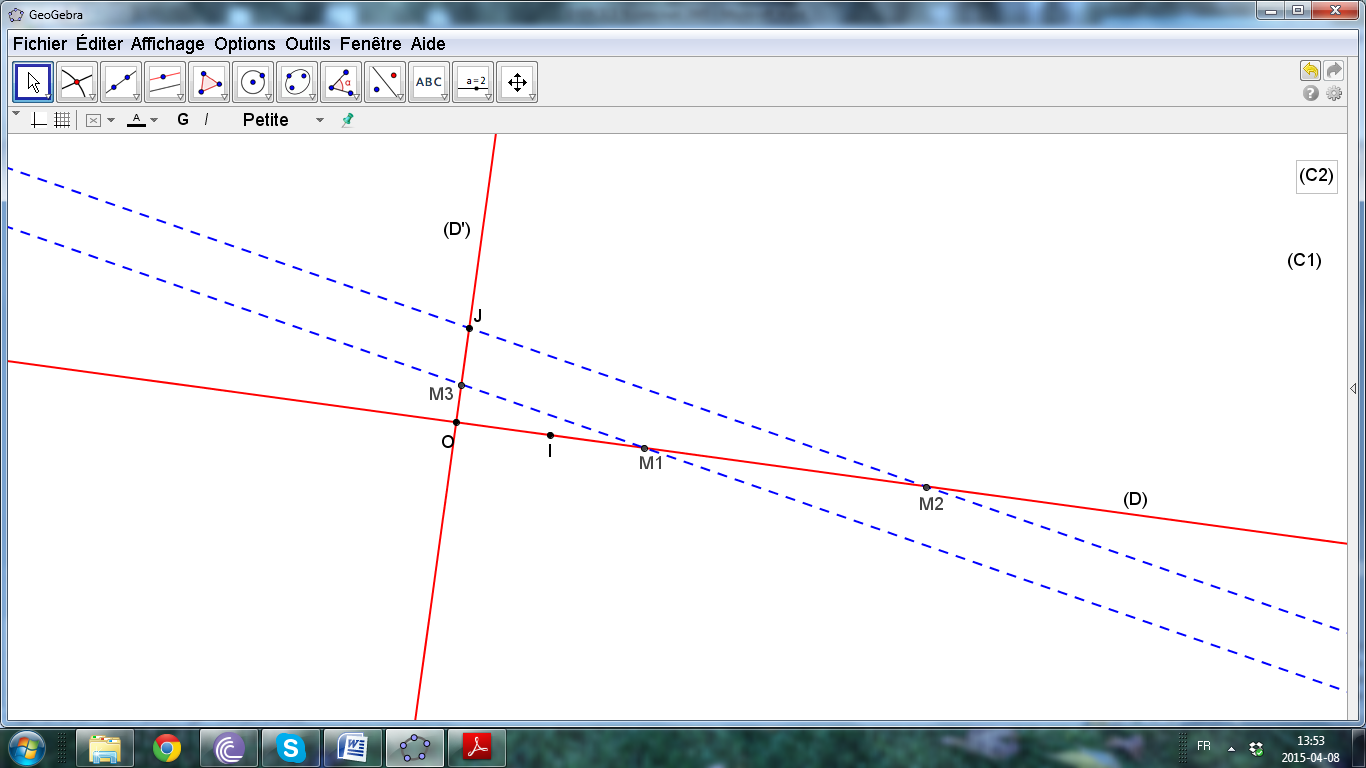
Supposons que les entiers n-1 et n sont constructibles et montrons que l’entier n est constructible

les entiers n-1 et n sont constructibles ils existent donc deux points M(n-1) et Mn constructibles d’abscisses respectifs, dans le repère (O, I, J), n-1 et n. le cercle (Cn) de centre Mn et de rayon MnM(n-1) = 1 est constructible et elle coupe la droite (OI) en un point M(n+1) autre que le point M(n-1). Le point est donc constructible et il est d’abscisse, dans le repère (O, I, J), n+1. L’entier n+1 est donc constructible.

* Si n est un entier négatif.

Si n est un entier négatif alors –n est positif il est donc constructible il existe donc un point M(-n) constructible d’abscisse, dans le repère (O, I, J), -n. le cercle (C-n) de centre M(-n) et de rayon O M(-n) = -n est constructible et elle coupe la droite (OI) en un point M(n) autre que le point M(-n). Le point M(n) est donc constructible et il est d’abscisse, dans le repère (O, I, J), n. L’entier n est donc constructible.

1. Montrons que est constructible.



Les entiers 2 et 5 sont constructibles ils existent donc deux points M1 et M2 constructibles d’abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), 2 et 5.

La droite (JM2) est constructible ainsi que sa parallèle ∆ passant par M1.

∆ coupe (OJ) en un point M3 D’après Thalès =

Le point M3 est constructible et est d’ordonné, dans le repère (O, I, J), . Le rationnel est donc constructible.

1. On désigne par ∆ l’ensemble des nombres constructibles.

Montrons que ∆ est un sous corps de IR contenant Q.

* ∆ est un ensemble non vide (tout entier est constructible)
* , pour admet un élément neutre 0
* Soit x un nombre constructible. Il existe donc un point M1 constructible d’abscisse, dans le repère (O, I, J), x. Le cercle (C1) de centre O et de rayon OM1 coupe la droite (OI) en un point M2 autre que M1 et tel que

Le point M2 est donc constructible d’abscisse, dans le repère (O, I, J),- x.

Le réel –x est un nombre constructible donc et vérifiant

Ce qui montre que tout élément de ∆ admet un opposé .

* Soient x et y deux nombres constructibles, Montrons que leur somme est constructible.

Les nombres x et y sont constructibles ils existent donc deux points M1 et M2 constructibles d’abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), x et y.

Les points O, M1 et M2 constructibles le cercle de centre M2 et de rayon OM1 coupe la droit (OI) en deux points A et B. le point A vérifie si non c’est le point B qui le vérifie. Le point A est donc constructible d’abscisse, dans le repère (O, I, J), ce qui montre que loi + est stable dans ∆.

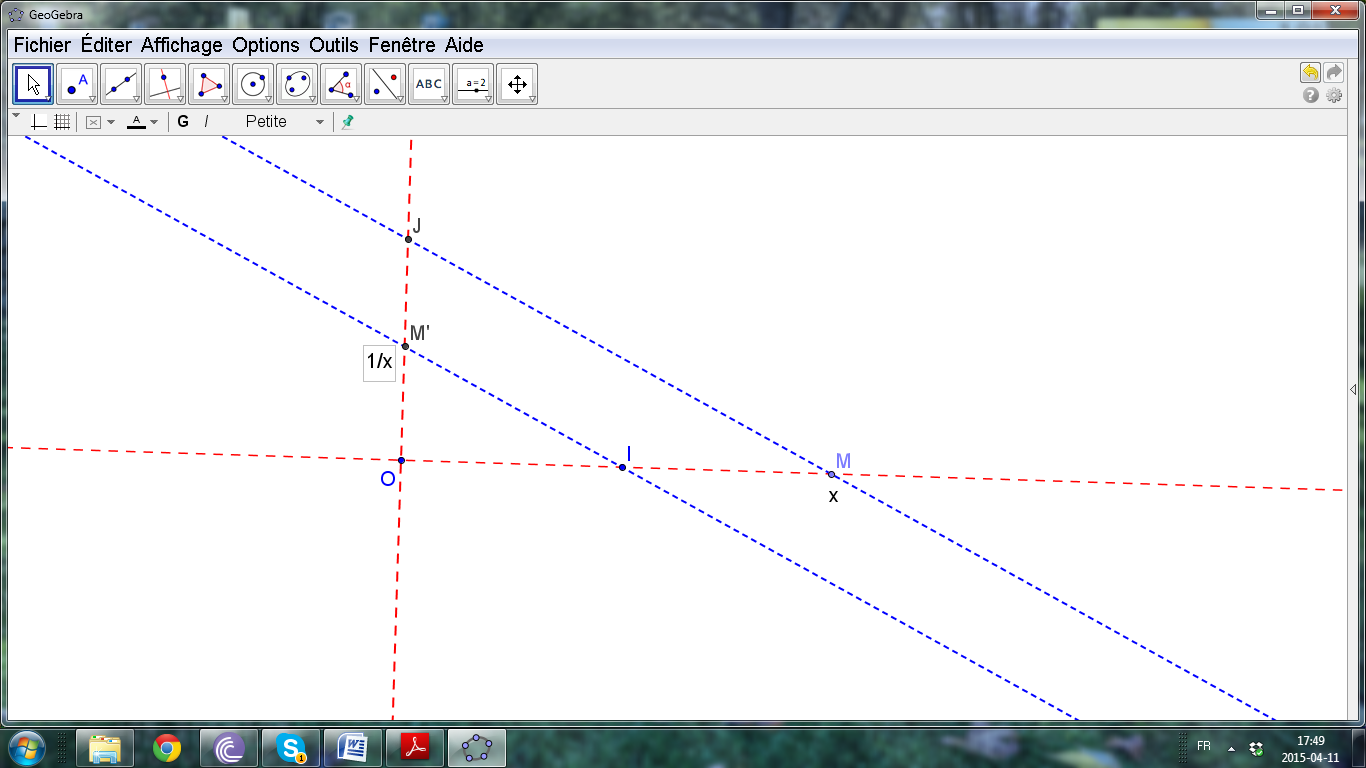
* la loi + est commutative puisque ∆ est un sous ensemble de IR.
* La loi + est associative puisque ∆ est un sous ensemble de IR.

Ainsi est un groupe commutatif.

* OI = 1 donc Le réel 1 est constructible

et on a pour tout 1 1 est l’élément neutre pour la loi

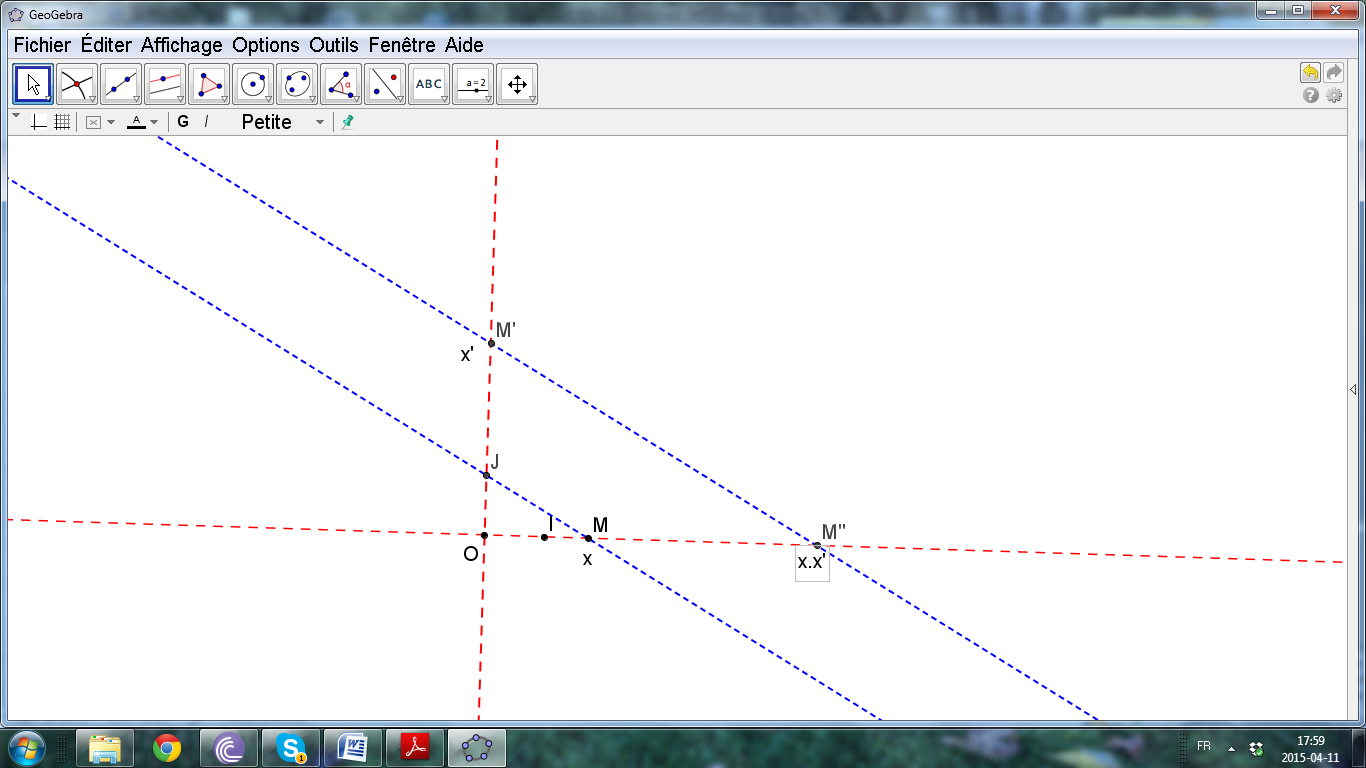
Soit , Le nombre x est constructible il existe donc un point M d’abscisse, dans le repère (O, I, J), x. La droite passante par I et parallèle à la droite (MJ) coupe la droite (OJ) en un point M’ d’ordonné , dans le repère (O, I, J).



* Pour tout admet un inverse

Soit et , Les nombres et sont constructibles il existe donc un point M d’abscisse et un point M’ d’ordonné . La droite passante par M’ et parallèle à la droite (MJ) coupe la droite (OJ) en un point M’ d’abscisse , dans le repère (O, I, J).

* est stable pour la loi
* ( , +, ) est un sous corps de IR



* Montrons que tout nombre rationnel est constructible.

Soit p et q deux entiers positifs et tel que

Les entiers p et q sont constructibles ils existent donc deux points M1 et M2 constructibles d’abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), p et q.

La droite (JM2) est constructible ainsi que sa parallèle D passant par M1.

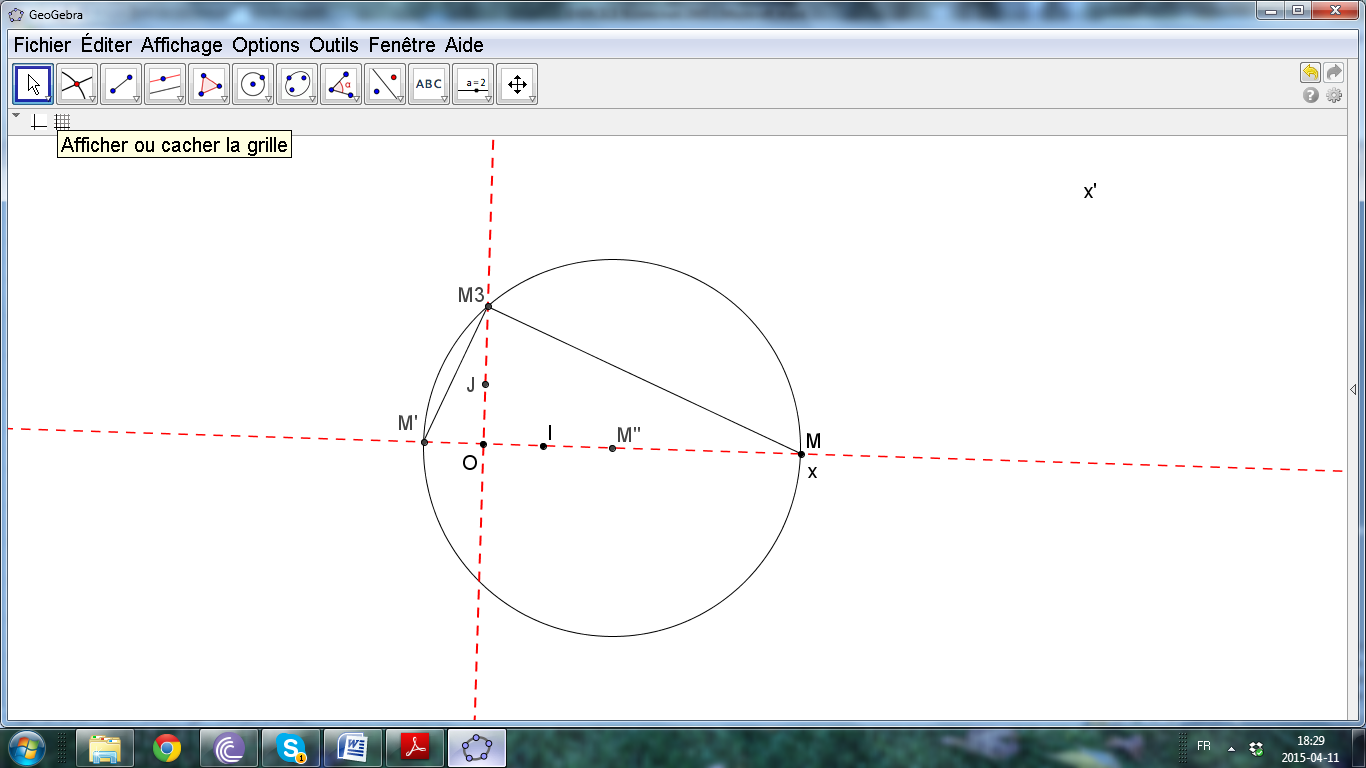
D coupe (OJ) en un point M3 D’après Thalès =

Le point M3 est constructible et est d’ordonné, dans le repère (O, I, J), . Le rationnel est donc constructible. Son opposé et aussi constructible.

Ce qui montre que Q est inclus dans ∆

Conclusion : ∆ est un sous corps de IR contenant Q.

1. a) Montrons que si t et t alors

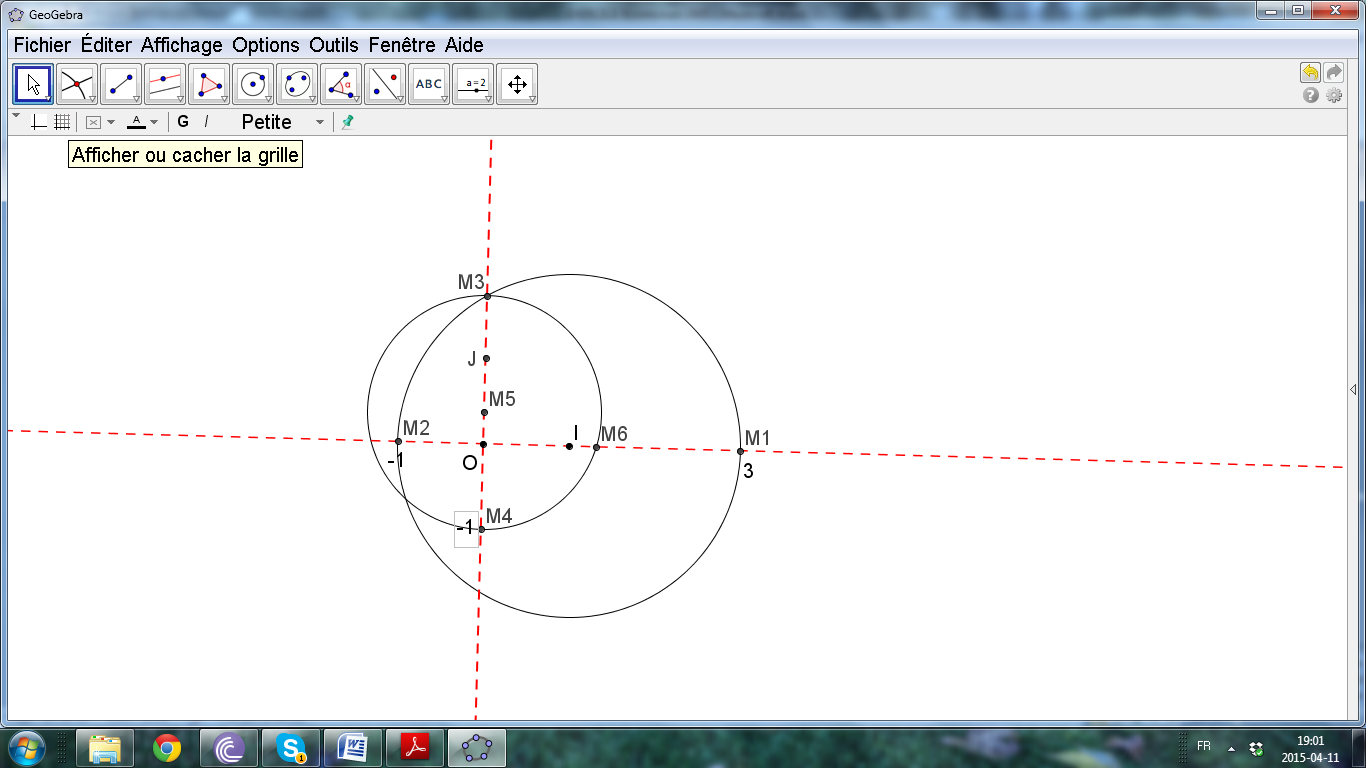


Soit , Le nombre est constructible il existe donc un point M d’abscisse, dans le repère (O, I, J) , .

-1 est constructible il existe donc un point M’ d’abscisse, dans le repère (O, I, J) ,-1.

Soit M’’Le milieu des points M et M’. M’’ est constructible le cercle de centre M’’ et de rayon MM’’ est aussi constructible elle coupe la droite (OJ) au point M3 d’ordonné, dans le repère (O, I, J), puisque dans un triangle rectangle MM’M3 on a

b) construction.



Le point M1 d’abscisse 3, dans le repère (O, I, J), , M2 , dans le repère (O, I, J), d’abscisse -1 Le cercle de centre I est de rayon IM1 = 2 coupe la droite (OJ) en un point M3 d’ordonné, dans le repère (O, I, J),

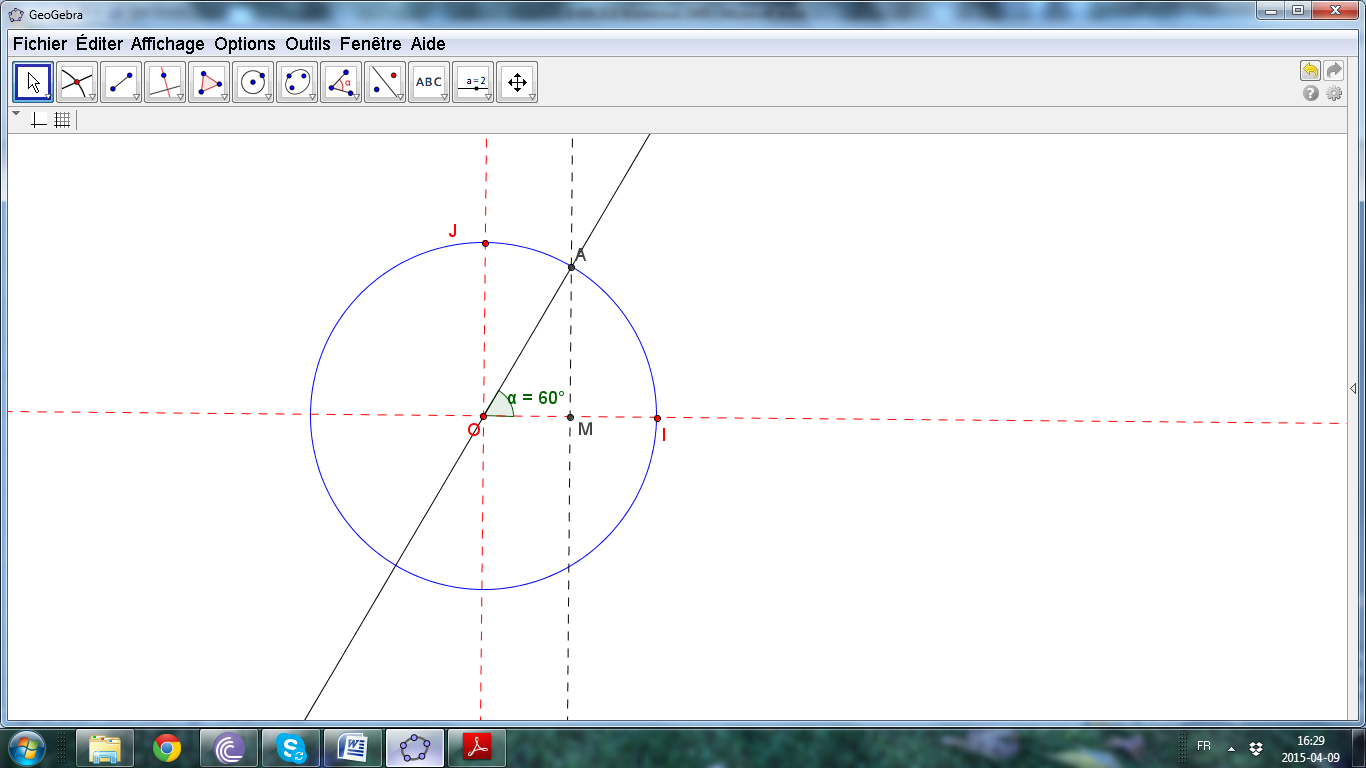
Soit M4 le point d’ordonné -1, dans le repère (O, I, J), et M5 le milieu de

Le cercle de centre M5 et de rayon M5M3 = coupe la droite (OI) en un point M6 d’abscisse , dans le repère (O, I, J).

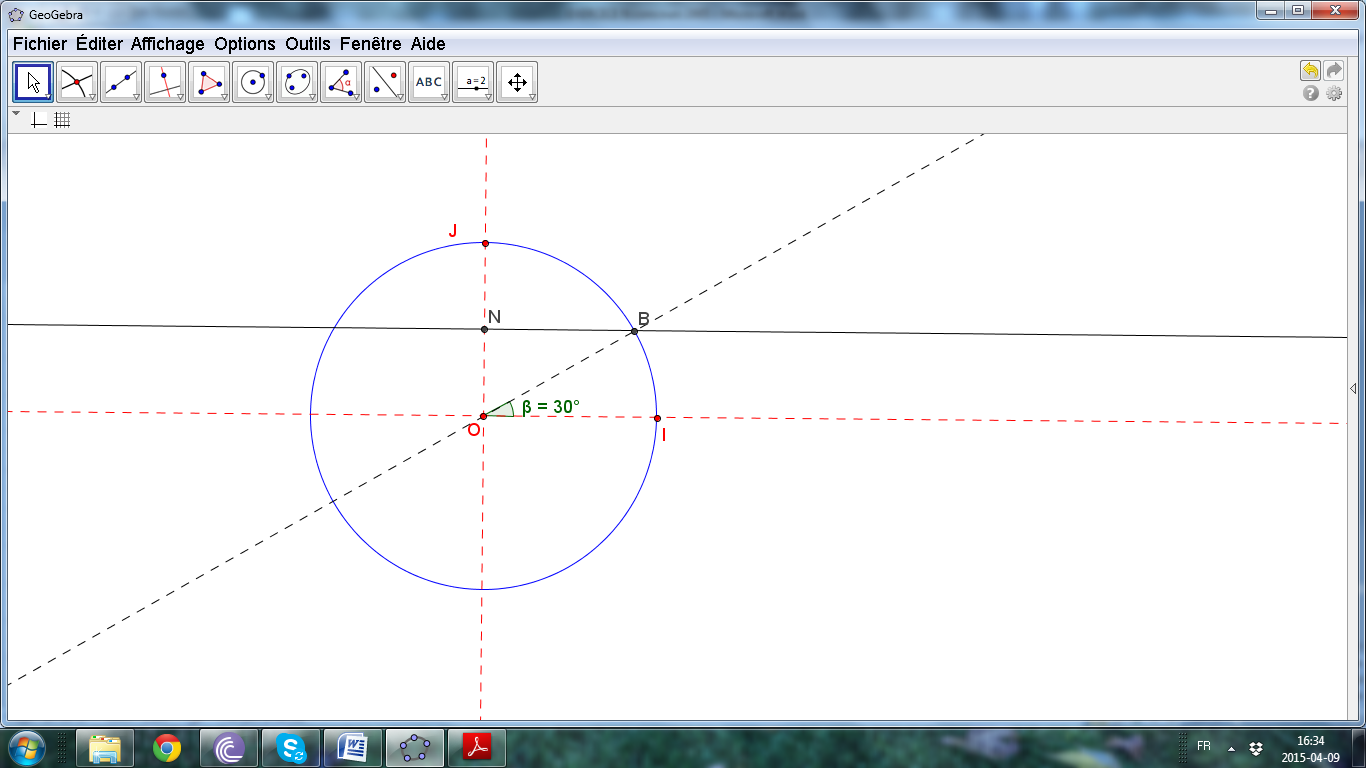
1. soit. On dira que l’angle est constructible si le point M du cercle trigonométrique tel que est constructible.

On cherche si les angles , et sont constructibles.

* Soit le point M de la droite (OI) d’abscisse, dans le repère (O, I, J), le point M est constructible puisque le rationnel est constructible.la perpendiculaire à (OI) passant par M est aussi constructible coupe le cercle trigonométrique au point A. le point A est constructible et tel que . Le réel est constructible.

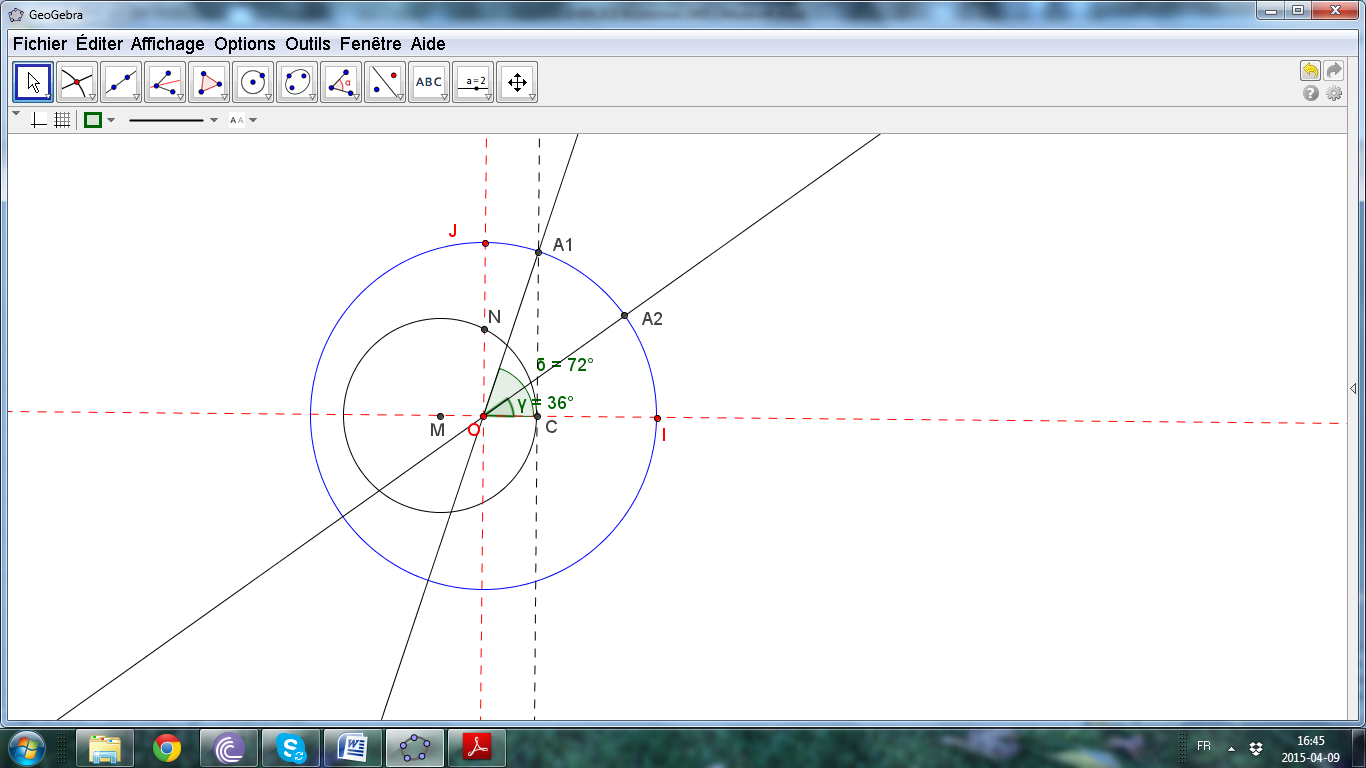


* Soit le point N de la droite (OJ) d’ordonné, dans le repère (O, I, J), le point N est constructible puisque le rationnel est constructible.la perpendiculaire à (OJ) passant par N est aussi constructible coupe le cercle trigonométrique au point B. le point B est constructible et tel que . Le réel est constructible.



* Soit le point N de la droite (OJ) d’ordonné, dans le repère (O, I, J), et le point M de la droite (OI) d’abscisse, dans le repère (O, I, J), les point M et N sont constructibles puisque les rationnels et sont constructibles.

Le cercle de centre M et de rayon MN qui est constructible coupe la droite (OI) en un point C d’abscisse positif x = la perpendiculaire à la droite (OI) passant par C coupe le cercle trigonométrique en un point A1 le point A1 est constructible et tel que . Le réel est constructible. La bissectrice intérieure de l’angle déterminer par les droites (OI) et (OA1) est constructible coupe le cercle trigonométrique en un point A2 et tel que . Le réel est constructible.



**III/** dans cette partie nous admettons le résultat de Wantzel suivant :

Tout nombre constructible est algébrique sur Q et son degré est une puissance de 2.

1. a) montrons que n’est pas constructible.

Si est constructible alors il existe un polynôme de degré est une puissance de 2 à coefficients rationnels tel que est une solution de

Donc

Soient

et sont des nombre rationnels pour tout les entiers k = 0, 1, 2 ….., n et

On a

Donc

et

est un nombre rationnel ce qui est absurde

Donc n’est pas constructible.

b) Déduisons que l’on ne peut pas construire à la règle et au compas l’arrête d’un cube ayant un volume double d’un cube donné.

Soit a l’arrête d’un cube donné et b celui de cube qu’on veut construire on a donc

Puisque n’est pas constructible donc n’est pas constructible

1. Montrons que l’on ne peut pas construire à la règle et au compas un carré ayant même air qu’un cercle donné.

Si un carré de cote a ayant même air qu’un cercle de rayon r donné alors

Comme est un nombre transcendant donc est aussi un nombre transcendant

Ce qui prouve que n’est pas constructible

1. On considérant le polynôme .

Montrons que n’est pas un nombre constructible.

Donc est une solution de = 0 or P(X) n’est pas de degré

Donc n’est pas algébrique sur Q est par conséquence n’est pas constructible à la règle et au compas.

Déduisons que l’angle n’est pas trisectable.

L’angle n’est pas trisectable car n’est pas constructible.