## EXERCICE N°1 CONCOUR 2005

Soit a, b, c, et d des réels tels que ad –bc $\neq$ 0 $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ pour x $\neq -\frac{d}{c}$

**Partie A/ On suppose que (a-d)² +4bc > 0**

**1)** Montrons que $h(x) - h(y) = \frac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)}(x-y)$

$$h(x) - h(y) = \frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ay+b}{cy+d} = \frac{(ax+b)(cy+d)-(ay+b)(cx+d)}{(cx+d)(cy+d)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{acxy + axd + bcy + bd - acxy - adx - bcx - bd}{(cx+d)(cy+d)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{axd + bcy - ady - bcx}{(cx+d)(cy+d)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{ad(x-y) - bc(x-y)}{(cx+d)(cy+d)}$$

$$h(x) - h(y) = \frac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)}(x-y)$$

**2)** Montrons qu'il existe deux réels α et β tels que $\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = \left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)$ ; $x \neq -\frac{d}{c}$

On cherche à trouver les solutions de l'équation $h(x) = x$ $\Leftrightarrow$ $\frac{ax+b}{cx+d} = x$

$$\Leftrightarrow \quad ax + b = x(cx+d) \Leftrightarrow cx^2 + x(d-a) - b = 0$$

Soit $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$ donc l'équation ( E ) admet deux racines distinct

$\alpha = \frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$ et $\beta = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$

On a $h(x) - \alpha = h(x) - h(\alpha) = \frac{ad-bc}{(cx+d)(c\alpha+d)}(x-\alpha)$ et

$h(x) - \beta = h(x) - h(\beta) = \frac{ad-bc}{(cx+d)(c\beta+d)}(x-\beta) \neq 0$ pour $(x \neq \beta\,, h(x) \neq \beta)$ d'ou

$$\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = \frac{h(x)-h(\alpha)}{h(x)-h(\beta)} = \frac{\frac{ad-bc}{(cx+d)(c\alpha+d)}(x-\alpha)}{\frac{ad-bc}{(cx+d)(c\beta+d)}(x-\beta)} = \left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)$$

**3)** Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par son premier terme $x_0$ et $x_{n+1} = \frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ , $n \geq 0$

a/ La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire $\Leftrightarrow x_0 = x_n = x_{n+1} \Leftrightarrow x_0 = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$

$$\Leftrightarrow \qquad ax_0 + b = x_0(cx_0 + d) \;\Leftrightarrow\; c{x_0}^2 + x_0(d-a) - b = 0 \;\;(\text{E})$$

Soit $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$ donc l'équation ( E ) admet deux racines distinct

$\alpha = \frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$ et $\beta = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$

Pour $x_0 = \alpha = \frac{a-d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$ ou $x_0 = \beta = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$ La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire.

b/ Montrons que si $x_0 \neq \alpha$ et $x_0 \neq \beta$ alors $x_n \neq \alpha$ et $x_n \neq \beta$

Soit la propriété P(n) : pour tout n $x_n \neq \alpha$ et $x_n \neq \beta$

La propriété P(n) est vrai pour n =0 supposons qu'elle est vrai pour n c-a-d $x_n \neq \alpha$ et $x_n \neq \beta$ et montrons qu'elle est vrai pour n + 1

On a

$$x_{n+1} - \alpha = h(x_n) - \mathrm{h}(\alpha) = \frac{\mathrm{ad-bc}}{(cx_n + d)(c\alpha + d)}(x_n - \alpha) \neq 0$$

et

$$x_{n+1} - \beta = h(x_n) - \mathrm{h}(\beta) = \frac{\mathrm{ad-bc}}{(cx_n + d)(c\beta + d)}(x_n - \beta) \neq 0$$

car $\mathrm{ad-bc} \neq 0$ , $(x_n - \alpha) \neq 0$ et $(x_n - \beta) \neq 0$

c/ pour $x_0 \neq \alpha$ et $x_0 \neq \beta$ Etudions la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$

On a

$$\frac{h(x_n) - \alpha}{h(x_n) - \beta} = \left(\frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\right)\left(\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}\right)$$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} = \left(\frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\right)\left(\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta}\right)$$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_{n+1} - \beta} = \left(\frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\right)^n\left(\frac{x_0 - \alpha}{x_0 - \beta}\right)$$

On considère la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ définie par $\varphi_0 = \frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}$ et $\varphi_n = \frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}$ , $n \geq 0$

La suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de premier terme $\varphi_0 = \frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}$ et de raison

r $=\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ en effet $\varphi_{n+1} = \frac{x_{n+1}-\alpha}{x_{n+1}-\beta} = \left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}\right) = \left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\varphi_n$

on a

$$\frac{x_n - \alpha}{x_n - \beta} = \varphi_n$$

$$x_n - \alpha = \varphi_n(x_n - \beta)$$

$$x_n(1-\varphi_n) = -\beta\varphi_n + \alpha$$

$$x_n = \frac{\alpha - \beta\varphi_n}{\varphi_n - 1} = \frac{\varphi_n(\frac{\alpha}{\varphi_n} - \beta)}{\varphi_n\left(1-\frac{1}{\varphi_n}\right)} = \frac{\frac{\alpha}{\varphi_n} - \beta}{1-\frac{1}{\varphi_n}}$$

- Si $\left|\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right| > 1$ Donc $\lim_{+\infty}\varphi_n = \pm\infty$ et par suite $\lim_{+\infty} x_n = \lim \frac{\frac{\alpha}{\varphi_n}-\beta}{1-\frac{1}{\varphi_n}} = \beta$
- Si $\left|\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right| < 1$ Donc $\lim_{+\infty}\varphi_n = 0$ et par suite $\lim_{+\infty} x_n = \lim\frac{\alpha-\beta\varphi_n}{\varphi_n-1} = \alpha$
- Si $\frac{c\beta+d}{c\alpha+d} = 1 \Leftrightarrow c(\beta-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha$ Impossible car $\Delta = (a-d)^2 + 4bc > 0$
- Si $\frac{c\beta+d}{c\alpha+d} = -1 \Leftrightarrow c(\beta+\alpha) = -2d \Leftrightarrow \beta+\alpha = \frac{-2d}{c}$

  la suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite et on a $\lim_{+\infty}\varphi_{2n} = \frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}$ et $\lim_{+\infty}\varphi_{2n+1} = -\frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}$ et par suite $\lim_{+\infty} x_{2n} = x_0$ et $\lim_{+\infty} x_{2n} = \frac{\beta\frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}+\alpha}{\left(1+\frac{x_0-\alpha}{x_0-\beta}\right)} = \frac{-\alpha\beta+\beta x_0+\alpha x_0-\alpha\beta}{x_0-\beta+x_0-\alpha} = \frac{\beta x_0+\alpha x_0-2\alpha\beta}{2x_0-\alpha-\beta} \neq x_0$ si non

  $\frac{\beta x_0+\alpha x_0-2\alpha\beta}{2x_0-\alpha-\beta} = x_0 \Leftrightarrow \beta x_0+\alpha x_0-2\alpha\beta = x_0(2x_0-\alpha-\beta) \Leftrightarrow$

  $\beta x_0+\alpha x_0-2\alpha\beta = 2{x_0}^2 - x_0\alpha - x_0\beta \Leftrightarrow {x_0}^2 - (\beta+\alpha)x_0 + \alpha\beta = 0$

  $\Delta = (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta = (\beta-\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} = |\beta-\alpha|$

  $x_0 = \frac{\beta+\alpha+\beta-\alpha}{2} = \beta$ ou $x_0 = \frac{\beta+\alpha-\beta\mp\alpha}{2} = \alpha$ ce qui est absurde car $x_0 \neq \beta$ et $x_0 \neq \alpha$

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite.

**4)** $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n+2}{x_n+1}$ , $n \geq 0$ $\quad x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad x_2 = \frac{7}{5}$

**a/** Soit P(n) : $x_n \geq \sqrt{2}$

On a $x_1 \geq \sqrt{2}$ supposons que $x_n \geq \sqrt{2}$ montrons que $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$

$$Pour\ \ n \geq 1 \qquad x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{(1-\sqrt{2})(x_n + \sqrt{2})}{x_n + 1} \geq 0$$

Donc pour $n \geq 1 \quad x_n \geq \sqrt{2}$

$$Pour\ \ n \geq 1 \qquad x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} - \ x_n = \frac{2 - {x_n}^2}{x_n + 1} = \frac{(\sqrt{2} - x_n)(\sqrt{2} + x_n)}{x_n + 1} \leq 0$$

D'où la suite $(x_n)$ est une suite minoré est décroissante donc converge vers une limite l

Vérifiant $l = \frac{l+2}{l+1} \quad 2 - l^2 = 0 \quad (\sqrt{2} - l)(\sqrt{2} + l) = 0 \quad l = \sqrt{2}$ ou $l = -\sqrt{2}$ or $x_n \geq \sqrt{2}$ donc $l = \sqrt{2}$

<u>Autre méthode</u>

$x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} \quad , n \geq 0$

l'équation ( E ) $x = \frac{x+2}{x+1} \Leftrightarrow \ x^2 - 2 = 0$ donc $\beta = \sqrt{2}$ ou $\alpha = -\sqrt{2}$ sont les solutions

De ( E )

On a $\left|\frac{c\beta + d}{c\alpha + d}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{2}}\right| = (\sqrt{2} + 1)^2 > 1$

d'après la 3°) c/ question la suite $(x_n)$ est une suite convergente et elle converge vers $\beta = \sqrt{2}$

**b/** Montrons que si $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ alors $x_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

Avec $q_{n+1} = p_n + \ q_n \quad p_{n+1} = p_n + 2\ q_n$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} = \frac{\frac{p_n}{q_n} + 2}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

**c/** Montrons que $p_n q_{n+1} - \ q_n p_{n+1} = \pm 1$

**d/** On a $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \pm 1$

Et $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (p_n)^2 - 2(q_n)^2$

Donc $|(p_n)^2 - 2(q_n)^2| = 1$

$$\left|\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^2 - 2\right| = \frac{1}{{q_n}^2}$$

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| \left|\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}\right| = \frac{1}{{q_n}^2}$$

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| = \frac{|q_n|}{{q_n}^2 |p_n + q_n\sqrt{2}|}$$

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| = \frac{1}{|q_n(p_n + q_n\sqrt{2})|} \leq \frac{1}{|q_n(p_n + q_n|} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

**e/** La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n+10}{x_n+1}$ , $n \geq 0$

l'équation ( E ) $x = \frac{x+10}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 10 = 0$ donc $\beta = \sqrt{10}$ ou $\alpha = -\sqrt{10}$ sont les solutions de l'équation ( E ) $\left|\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right| = \left|\frac{1+\sqrt{10}}{1-\sqrt{10}}\right| = \frac{(1+\sqrt{10})^2}{9} > 1$

D'après la 3°) question c/la suite $(x_n)$ converge vers $\beta = \sqrt{10}$

**f)** Donnons des approximations successives de $\sqrt{10}$

**Partie B/ dans cette partie on suppose que $(a-d)^2 + 4bc = 0$**

**1)** Montrons qu'il existe un réel $\alpha$ tel que $\frac{1}{h(x)-\alpha} = \frac{c}{(c\alpha+d)} + \frac{1}{(x-\alpha)}$

- Soit l'équation $h(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{ax+b}{cx+d} \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$

Comme c $\neq 0$ Soit donc $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$

Donc $cx^2 - (a-d)x - b = 0$ admet une solution double $\alpha = \frac{a-d}{2c}$

- On a $\alpha$ est une solution de $cx^2 - (a-d)x - b = 0 \Rightarrow c\alpha^2 - (a-d)\alpha = b$ On a aussi $\alpha = \frac{a-d}{2c} \Rightarrow a = 2\alpha c + d$

$$\frac{1}{h(x)-\alpha} = \frac{1}{\frac{ax+b}{cx+d} - \alpha} = \frac{cx+d}{ax+b-\alpha cx - d\alpha}$$

$$= \frac{cx+d}{(2\alpha c+d)x + c\alpha^2 - (a-d)\alpha - \alpha cx - d\alpha}$$

$$= \frac{cx+d}{(2\alpha c+d)x + c\alpha^2 - (2\alpha c+d-d)\alpha - \alpha cx - d\alpha}$$

$$= \frac{cx+d}{\alpha c(x-\alpha) + d(x-\alpha)} = \frac{cx+d}{(c\alpha+d)(x-\alpha)}$$

$$= \frac{cx - c\alpha + c\alpha + d}{(c\alpha+d)(x-\alpha)} = \frac{c(x-\alpha) + c\alpha + d}{(c\alpha+d)(x-\alpha)}$$

$$= \frac{c(x-\alpha)}{(c\alpha+d)(x-\alpha)} + \frac{c\alpha+d}{(c\alpha+d)(x-\alpha)}$$

$$= \frac{c}{(c\alpha+d)} + \frac{1}{(x-\alpha)}$$

**2)** Soit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par son premier terme $x_0$ et $x_{n+1} = \frac{ax_n+b}{cx_n+d}$ $, n \geq 0$

- Si $x_0 = \alpha = \frac{a-d}{2c}$ alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire donc convergente et elle converge vers $\alpha = \frac{a-d}{2c}$
- Si $x_0 \neq \alpha$ montrons que pour tout $n \geq 0$ $x_n \neq \alpha$
  Soit la propriété P(n) : pour tout $n \geq 0$ $x_n \neq \alpha$
  La propriété P(n) est vrai pour n =0 supposons qu'elle est vrai pour un entier n et montrons qu'elle est vrai pour n + 1
  On a

$$x_{n+1} - \alpha = h(x_n) - h(\alpha) = \frac{ad - bc}{(cx_n + d)(c\alpha + d)}(x_n - \alpha) \neq 0$$

On considère maintenant la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ définie par $y_0 = \frac{1}{x_0 - \alpha}$ et $y_n = \frac{1}{x_n - \alpha}$ $, n \geq 0$

On a $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}-\alpha} = \frac{c}{c\alpha+d} + \frac{1}{x_n-\alpha} = r + y_n$

La suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite arithmétique de premier terme $y_0 = \frac{1}{x_0-\alpha}$ et de raison $r = \frac{c}{c\alpha+d}$ D'où $y_n = y_0 + nr \iff \frac{1}{x_n-\alpha} = y_0 + nr \iff x_n = \frac{1}{y_0+nr} + \alpha$

Comme c $\neq$ 0 alors $\frac{c}{c\alpha+d} \neq 0$ la $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc converge et elle converge vers $\alpha$.

## Exercice N° 2

Soit $\begin{array}{llll} f & : & IR \longrightarrow IR \\ & & x \longrightarrow f(x) \end{array}$ continue sur IR et vérifiant f(x+y) = f(x) +f(y) pour tout (x,y) ∈ $IR^2$

- Montrons que pour tout entier n et pour tout réel x $f(nx) = nf(x)$ (1)

On a $f(0+1) = f(1) = f(0) + f(1) \Rightarrow f(0) = 0$ donc $f(0) = 0 \times f(x)$

La propriété ( 1 ) est donc vraie pour n = 0 supposons qu'elle est vraie pour un entier n et montrons qu'elle est vraie pour n+1

$$f\big((n+1)x\big) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

- Montrons que pour tout entier n $f(n) = nf(1)$ (2)

Pour $x = 1$ (1) $\Rightarrow f(n) = nf(1)$

- Montrons que pour tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ $f(x) = xf(1)$ (3)

Soit p et q deux entier tel que q $\neq$ 0 et x = $\frac{p}{q}$ $\Rightarrow$ qx=p

De (1) et (2) en tire $qf(x) = f(qx) = f(p) = pf(1)$

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{p}{q} f(1) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1) \quad (3)$

- Pour finaliser Montrons que pour tout réel $x \quad f(x) = xf(1)$

Soit x un réel, on pose $p_n = E(10^n x)$ et considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ des nombres rationnels définie par : pour tout entier naturel n $x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$.

- On a $10^n x - 1 \leq E(10^n x) < 10^n x \Rightarrow x - \frac{1}{10^n} \leq \frac{E(10^n x)}{10^n} < x \Rightarrow x - \frac{1}{10^n} \leq x_n < x$
- La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est donc encadrée par deux suite qui converge vers la même limite x $\Rightarrow$
  La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge et on a $lim(x_n) = x \quad (4)$
- $f(x_n) = f\left(\frac{E(10^n x)}{10^n}\right) = \left(\frac{E(10^n x)}{10^n}\right) f(1) = x_n f(1) \quad (5)$

Or f est continue sur IR $\Rightarrow \quad lim f(x_n) = x \quad (6)$

De (4) , (5) et (6) et par passage à la limite en déduit que pour tout réel x $f(x) = xf(1)$

Ce qui montre que pour tout réel x on a $f(x) = x f(1)$

Problème

Notations et définitions

Soit P le plan euclidien et B un sous-ensemble fini de P ayant au moins deux éléments. Les éléments de B sont appelés points de base.

a) Un point M est dit constructible à la règle et au compas à partir de B s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, $M_i$ est un point d'intersection ,soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles; ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = B \cup \{M_1, \ldots, M_{i-1}\}$ de la manière suivante :

- Chaque droite passe par deux points distincts de $E_i$.
- Chaque cercle est centré en un point de $E_i$ et a pour rayon la distance entre deux points de $E_i$.

b) Une droite passant par deux points constructibles est dite constructible.

c) Un cercle centré en un point constructible et ayant pour rayon la distance entre deux points constructibles est dit constructible.

**I)**

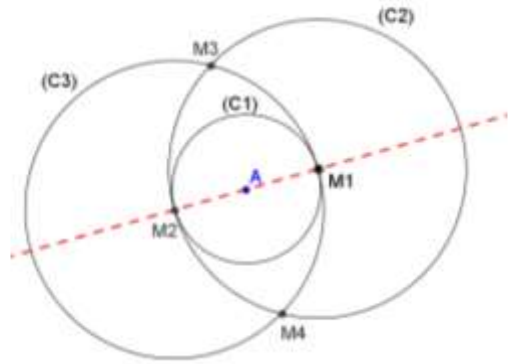
**1)** Montrons que si D est une droite constructible et A un point constructible alors la perpendiculaire à D passant par A ainsi que la parallèle à D sont des droites constructibles.

Soit D une droite constructible et A un point constructible

- **Si A est un point de la droite D**

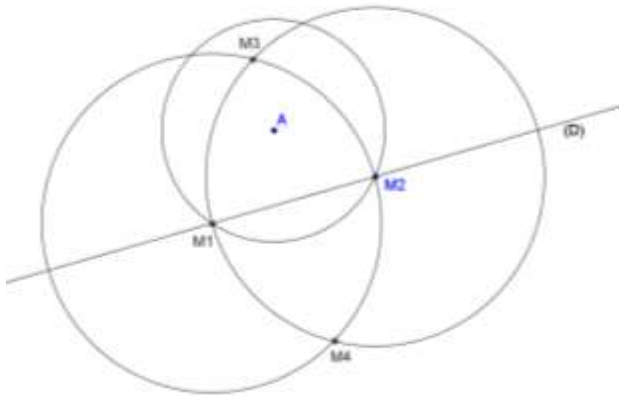
  D est une droite constructible il existe un point $M_1$ constructible distinct du point A tel que D passe les point $M_1$ et A

Les points A et $M_1$ sont constructible donc Le cercle $\mathcal{C}1$ de centre A et de rayon A $M_1$ est constructible. $\mathcal{C}1$ recoupe la droite D en un autre point $M_2$ autre que $M_1$




Les points $M_1$ et $M_2$ sont constructible, donc les cercle $\mathcal{C}2$ et $\mathcal{C}3$ de centre respectifs $M_1$ et $M_2$ et de rayon $M_1M_2$ sont constructibles.
$\mathcal{C}2$ et $\mathcal{C}3$ se coupent en deux points $M_3$ et $M_4$
Les points $M_3$ et $M_4$ sont constructible donc la droite $(M_3M_4)$ est constructible.
La droite $(M_3M_4)$ passe par A et perpendiculaire à D.

- **Si A est un point n'appartenant pas à la droite D**



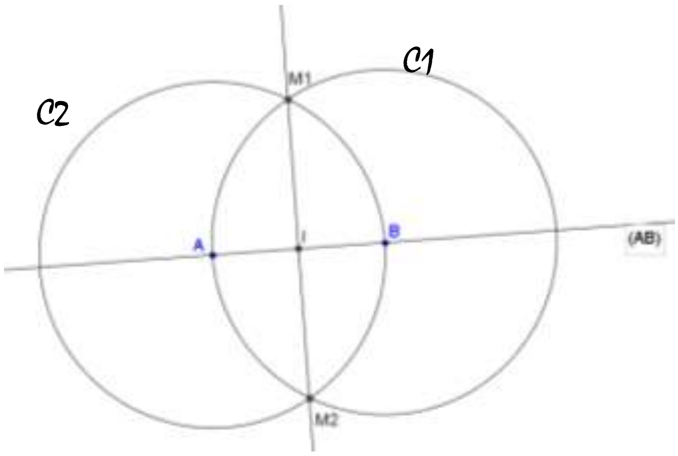

D est une droite constructible elle passe donc par un point $M_2$ constructibles
Les points A et $M_2$ sont constructible donc Le cercle $\mathcal{C}_0$ de centre A et de rayon A $M_2$ est constructible. $\mathcal{C}_0$ coupe la droite D en un autre point $M_1$ autre que $M_2$
Les points $M_1$ et $M_2$ sont constructible donc le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $M_2$ et de rayon $M_2M_1$ est constructible.
Les points $M_1$ et $M_2$ sont constructible donc le cercle $\mathcal{C}2$ de centre $M_1$ et de rayon $M_1M_2$ est constructible.
$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}2$ se coupent en deux points $M_3$ et $M_4$
Les points $M_3$ et $M_4$ sont constructibles donc la droite $(M_3M_4)$ est constructible.
La droite $(M_3M_4)$ passe par A et perpendiculaire à D.

- Soit D’ la perpendiculaire à la droite D passant par A d’après ce qui précède la D’’ perpendiculaire à D’ passant par A est constructible ; D’’ est la droite parallèle à D passant par A

**2)** Montrons que si A et B sont deux points constructibles alors le milieu et la médiatrice de segment $[AB]$ sont constructibles.

Les points A et B sont constructible donc les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}2$ de centres respectifs A et B et de même rayon AB sont constructibles. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}2$ se coupent en deux points $M_1$ et $M_2$.

Les points $M_1$ et $M_2$ sont donc constructibles, la droite $(M_1M_2)$ est aussi constructible, cette droite est la médiatrice de segment $[AB]$ elle coupe (AB) en un point I milieu de $[AB]$



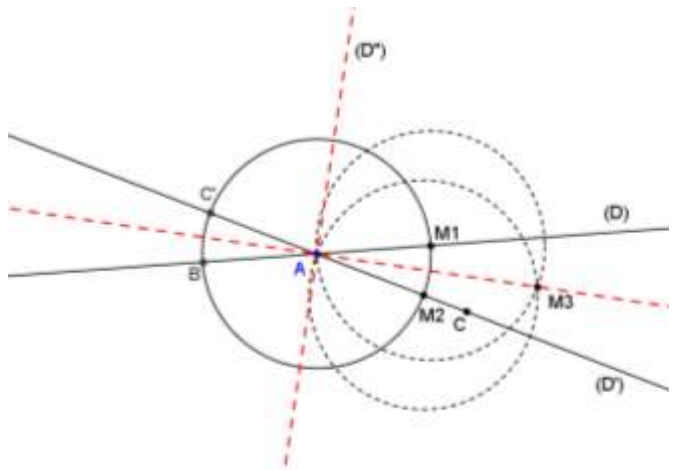

**3)** Montrons que si D et D’ sont deux droites constructibles concourantes alors les bissectrices des angles déterminés par ces deux droites sont constructibles.

D et D’ sont deux droites constructibles concourantes ils existent trois points A, $M_1$ et C tels que la droite D passe par $(AM_1)$ et la droite D’ passe par (AC)

Les points A et $M_1$ sont constructible donc le cercles $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon A $M_1$ est constructible. $\mathcal{C}_1$ coupe la droites D en deux points $M_1$ et B et la droite D’ en deux points $M_2$ et C’.

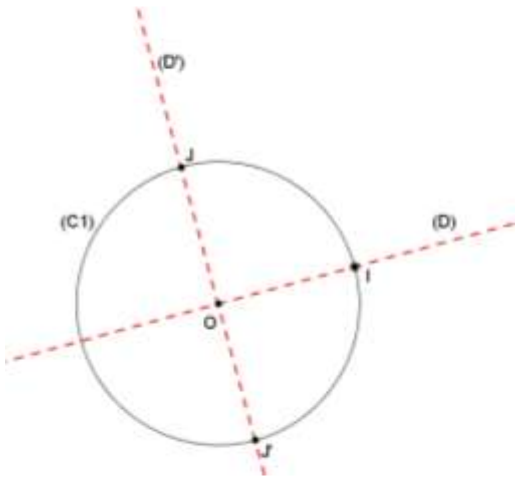
Les points $M_1$ et M2 sont constructibles donc les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}2$ de centres respectifs $M_1$ et $M_2$ et de même rayon $AM_1$ sont constructibles. $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}2$ se coupent en un point $M_3$ autre que A.

Les points A et $M_3$ sont constructibles la droite $(AM_3)$ est donc constructible. La perpendiculaire D’’ à la droite $(AM_3)$ passant par A est aussi constructible. Ces droite $(AM_3)$ et D’’ sont les bissectrices des angles déterminés par les deux droites D et D’




**II/** Soit O et I deux points du plan tel que OI = 1. On pose B $=\{O\ ,\ I\}$

**1)** Montrons qu'il existe un point constructible J tel que $(O\ ,I\ ,\ J)$ soit un repère orthonormé.




Les points O et I sont deux points donnés de P la droite D passant par O et I est constructible la perpendiculaire D' à la droite D passant par O est alors constructible.

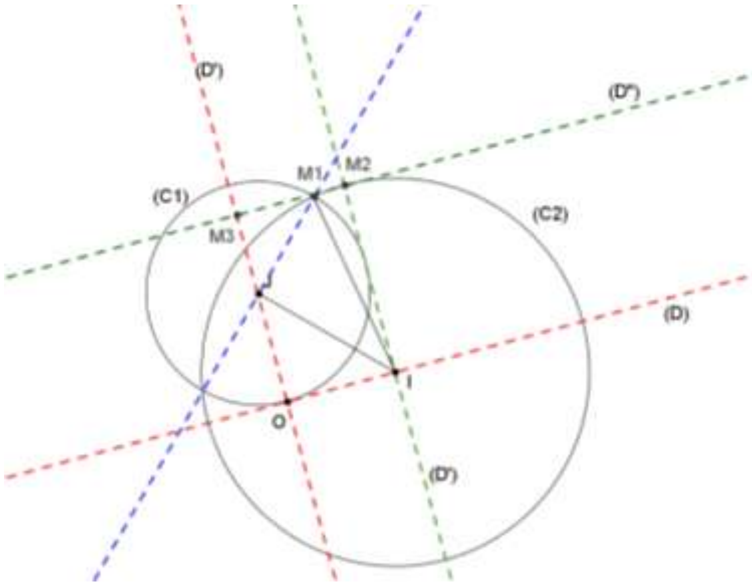
Le cercle $\mathcal{C}1$ de centre O et de rayon OI = 1 est aussi constructible.

Le cercle $\mathcal{C}1$ et la droite D' se coupent en deux point J et J'.

Le Point J vérifie : J est constructible puisque c'est l'intersection d'une droite est un cercle OJ = 1 et (OJ) perpendiculaire à (OI) ce qui prouve qu'il existe un point constructible J tel que $(O\ ,I\ ,\ J)$ soit un repère orthonormé.

**2)** Un nombre réel est dit constructible s'il est une des coordonnées, dans le repère$(O\ ,I\ ,\ J)$, d'un point constructible.

**a)** Montrons que $\sqrt{3}$ est constructible.




Les points I et J sont constructibles la droite (IJ) est donc constructibles ainsi que sa perpendiculaire Δ passant par J

Les points O et J sont constructible le cercle ($\mathcal{C}1$) de centre J et de rayon OJ est donc constructible

La droite Δ et le cercle ($\mathcal{C}1$) se coupent $M_1$et A. $M_1$ est donc constructible. Le triangle $IJM_1$ rectangle J et $JM_1$ =1 d'après Pythagore $IM_1$ = $\sqrt{3}$

Les points I et $M_1$ sont constructibles le cercle de centre I et de rayon $IM_1$ et donc constructible.

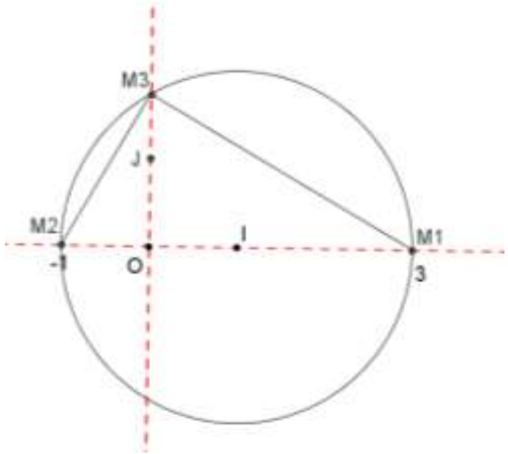
La droite (D) et le point I sont constructibles la perpendiculaire (D'') à (D) passant par I est donc constructible

La droite (D'') et le cercle ($\mathcal{C}1$) se coupent en $M_2$, $M_2$ est donc constructible.

La droite (D'') et le point $M_2$ sont constructibles la perpendiculaire (D''') à (D') passant par $M_2$ est donc constructible.

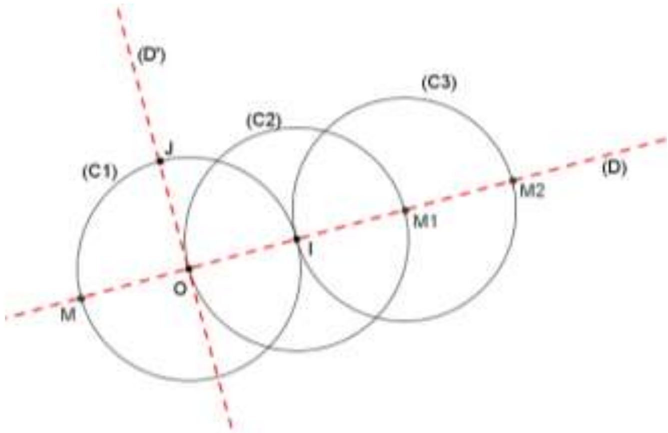
La droite (D''') coupe la droite ( D') en $M_3$. Le point $M_3$ est donc constructible. $M_3$ est d'ordonné $\sqrt{3}$ , dans le repère (O, I, J) , $\sqrt{3}$ est donc constructible.

Autre Méthode




Le nombre 3 est constructible il existe donc un point M1 d'abscisse, dans le repère (O, I, J) , 3.
-1 est constructible il existe donc un point M2 d'abscisse, dans le repère (O, I, J) ,-1.
Soit M''Le milieu des points M et M'. M'' est constructible le cercle de centre M'' et de rayon M1M'' est aussi constructible elle coupe la droite (OJ) au point $M_3$ d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\sqrt{3}$ puisque dans un triangle rectangle MM'$M_3$ on a $OM_3{}^2 = OM' \times OM = 3 \quad \Leftrightarrow \quad OM_3 = \sqrt{3}$

**b)** Montrons que tout entier est constructible.




- Si n est un entier positif.

Le point O est constructible d'abscisse 0, dans le repère (O, I, J), 0 est constructible.

Les points O et I sont constructible le cercle ($\mathcal{C}1$) de centre O et de rayon OI =1 est donc constructible. le cercle ($\mathcal{C}1$) coupe la droite (OI) en $M_1$ qui est d'abscisse 1, dans le repère (O, I, J), 1 est constructible.

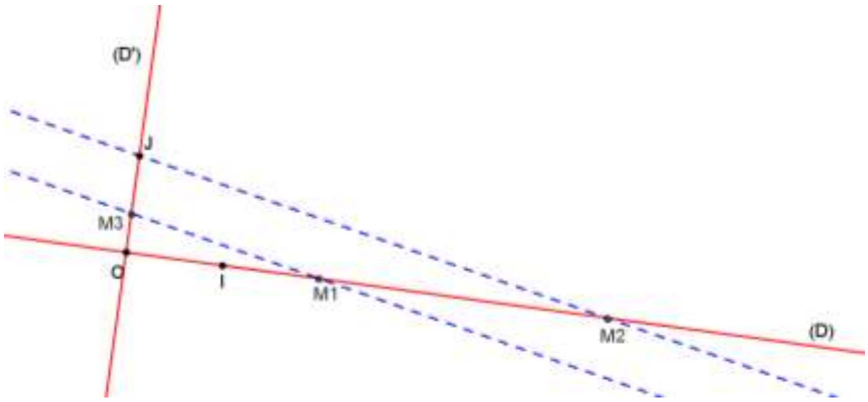
Supposons que les entiers n-1 et n sont constructibles et montrons que l'entier n est constructible

les entiers n-1 et n sont constructibles ils existent donc deux points $M_{(n-1)}$ et $M_n$ constructibles d'abscisses respectifs, dans le repère (O, I, J), n-1 et n. le cercle ($\mathcal{C}_n$) de centre $M_n$ et de rayon $M_nM_{(n-1)}$ = 1 est constructible et elle coupe la droite (OI) en un point $M_{(n+1)}$ autre que le point $M_{(n-1)}$. Le point est donc constructible et il est d'abscisse, dans le repère (O, I, J), n+1. L'entier n+1 est donc constructible.

- Si n est un entier négatif.

Si n est un entier négatif alors –n est positif il est donc constructible il existe donc un point $M_{(-n)}$ constructible d'abscisse, dans le repère (O, I, J), -n. le cercle ($\mathcal{C}_{-n}$) de centre $M_{(-n)}$ et de rayon O $M_{(-n)}$ = -n est constructible et elle coupe la droite (OI) en un point $M_{(n)}$ autre que le point $M_{(-n)}$. Le point $M_{(n)}$ est donc constructible et il est d'abscisse, dans le repère (O, I, J), n. L'entier n est donc constructible.

**c)** Montrons que $\frac{2}{5}$ est constructible.




Les entiers 2 et 5 sont constructibles ils existent donc deux points $M_1$ et $M_2$ constructibles d'abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), 2 et 5.

La droite ($JM_2$) est constructible ainsi que sa parallèle Δ passant par $M_1$.

Δ coupe (OJ) en un point $M_3$ D'après Thalès $\overline{OM_3} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM_2}} = \frac{2}{5}$

Le point $M_3$ est constructible et est d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\frac{2}{5}$. Le rationnel $\frac{2}{5}$ est donc constructible.

**3)** On désigne par Δ l'ensemble des nombres constructibles.
Montrons que Δ est un <u>sous corps</u> de IR contenant Q.

- Δ est un ensemble non vide (tout entier est constructible)
- $0 \in \Delta$ , pour $x \in \Delta$ $0 + x = x + 0 = x \Leftrightarrow$ Δ admet un élément neutre 0

- Soit x un nombre constructible. Il existe donc un point $M_1$ constructible d'abscisse, dans le repère (O, I, J), x. Le cercle ($\mathcal{C}1$) de centre O et de rayon $OM_1$ coupe la droite (OI) en un point $M_2$ autre que $M_1$ et tel que $\overline{OM_2} = -\overline{OM_1} = -x$

Le point $M_2$ est donc constructible d'abscisse, dans le repère (O, I, J),- x.

Le réel –x est un nombre constructible donc $-x \in \Delta$ et vérifiant $x + (-x) = 0$

Ce qui montre que tout élément de Δ admet un opposé $-x \in \Delta$ .

- Soient x et y deux nombres constructibles, Montrons que leur somme est constructible.

Les nombres x et y sont constructibles ils existent donc deux points $M_1$ et $M_2$ constructibles d'abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), x et y.

Les points O, $M_1$ et $M_2$ constructibles le cercle de centre M2 et de rayon $OM_1$ coupe la droit (OI) en deux points A et B. le point A vérifie $\overline{OA} = \overline{OM_2} + \overline{M_2A} = y + x$ si non c'est le point B qui le vérifie. Le point A est donc constructible d'abscisse $x + y$, dans le repère (O, I, J), ce qui montre que loi + est stable dans Δ.

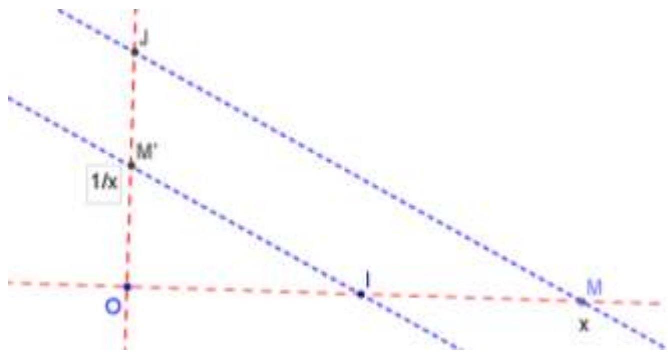
- $x + y = y + x$ la loi + est commutative puisque Δ est un sous ensemble de IR.
- La loi + est associative puisque Δ est un sous ensemble de IR.

Ainsi $(\Delta, +)$ est un groupe commutatif.

- OI = 1 donc Le réel 1 est constructible $\Rightarrow 1 \in \Delta$

et on a pour tout $x \in \Delta$ $1\times x = x \times 1 = x$ 1 est l'élément neutre pour la loi ×

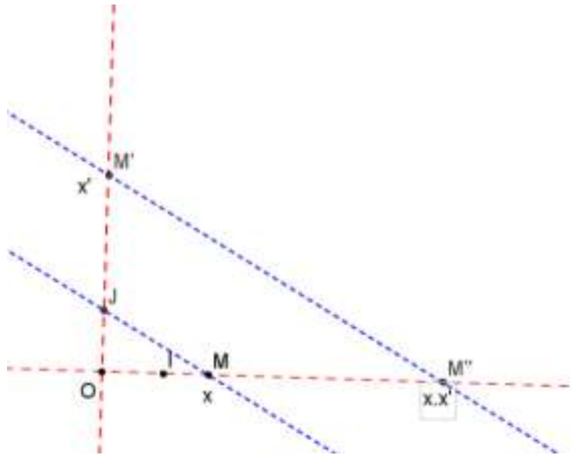
Soit $x \in \Delta$ , Le nombre x est constructible il existe donc un point M d'abscisse, dans le repère (O, I, J), x. La droite passante par I et parallèle à la droite (MJ) coupe la droite (OJ) en un point M' d'ordonné $\frac{1}{x}$ , dans le repère (O, I, J).




- Pour tout $x \in \Delta$ $x$ admet un inverse $\frac{1}{x} \in \Delta$

Soit $x \in \Delta$ et $x' \in \Delta$ , Les nombres $x$ et $x'$ sont constructibles il existe donc un point M d'abscisse $x$ et un point M' d'ordonné $x'$, dans le repère (O, I, J),. La droite passante par M' et parallèle à la droite (MJ) coupe la droite (OJ) en un point M' d'abscisse $\times x'$ , dans le repère (O, I, J).

- Δ est stable pour la loi ×
- (Δ , +, × ) est un sous corps de IR




- Montrons que tout nombre rationnel est constructible.

Soit p et q deux entiers positifs et tel que $q \neq 0$

Les entiers p et q sont constructibles ils existent donc deux points $M_1$ et $M_2$ constructibles d'abscisse respectifs, dans le repère (O, I, J), p et q.

La droite ($JM_2$) est constructible ainsi que sa parallèle D passant par $M_1$.

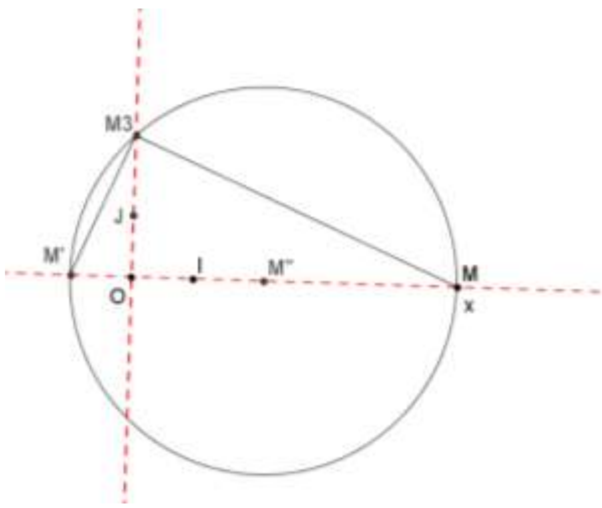
D coupe (OJ) en un point $M_3$ D'après Thalès $\overline{OM_3} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM_2}} = \frac{p}{q}$

Le point $M_3$ est constructible et est d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\frac{p}{q}$. Le rationnel $\frac{p}{q}$ est donc constructible. Son opposé et aussi constructible.

Ce qui montre que Q est inclus dans Δ

Conclusion : Δ est un sous corps de IR contenant Q.

**4)** a) Montrons que si t∈ Δ et $t \geq 0$ alors $\sqrt{t} \in \Delta$



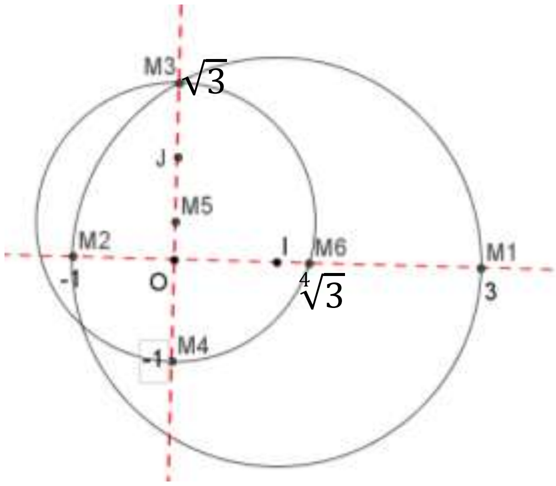

Soit $t \in \Delta$ $t \geq 0$ , Le nombre $t$ est constructible il existe donc un point M d'abscisse, dans le repère (O, I, J) , $t$.

-1 est constructible il existe donc un point M' d'abscisse, dans le repère (O, I, J) ,-1.

Soit M''Le milieu des points M et M'. M'' est constructible le cercle de centre M'' et de rayon MM'' est aussi constructible elle coupe la droite (OJ) au point $M_3$ d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\sqrt{t}$ puisque dans un triangle rectangle MM'$M_3$ on a

$$OM_3{}^2 = OM' \times OM = t \quad \Leftrightarrow \quad OM_3 = \sqrt{t}$$

b) construction $\sqrt[4]{3}$.




Le point $M_1$ d'abscisse 3, dans le repère (O, I, J), , $M_2$ , dans le repère (O, I, J), d'abscisse -1 Le cercle de centre I est de rayon $IM_1$ = 2 coupe la droite (OJ) en un point $M_3$ d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\sqrt{3}$

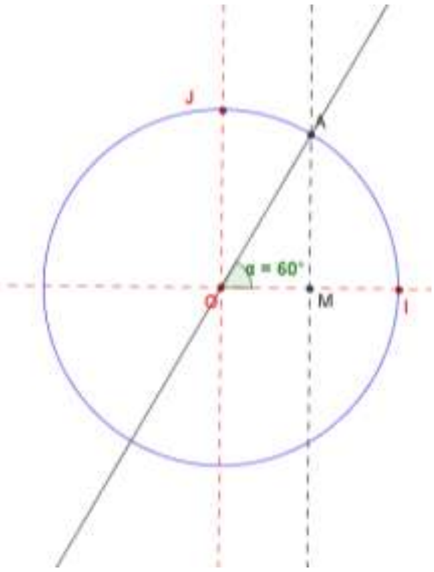
Soit $M_4$ le point d'ordonné -1, dans le repère (O, I, J), et $M_5$ le milieu de $[M_4M_3]$

Le cercle de centre $M_5$ et de rayon $M_5M_3$ = $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ coupe la droite (OI) en un point $M_6$ d'abscisse $\sqrt[4]{3}$, dans le repère (O, I, J).

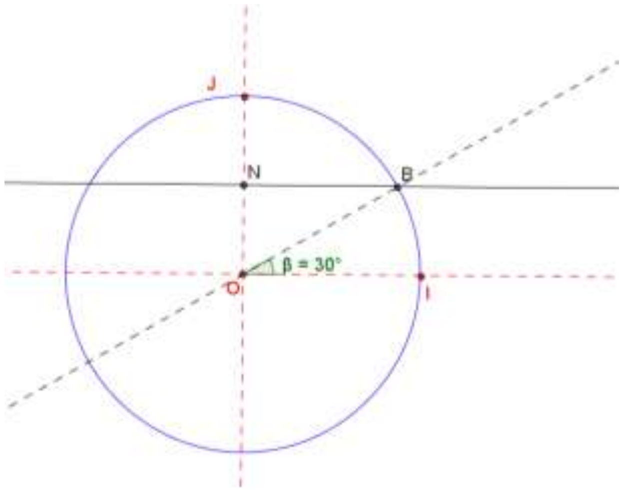
**5)** soit $\theta \in [0\ ,\ \pi]$. On dira que l'angle $\theta$ est constructible si le point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \theta$ est constructible.

On cherche si les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont constructibles.

- Soit le point M de la droite (OI) d'abscisse, dans le repère (O, I, J), $\frac{1}{2}$ le point M est constructible puisque le rationnel $\frac{1}{2}$ est constructible.la perpendiculaire à (OI) passant par M est aussi constructible coupe le cercle trigonométrique au point A. le point A est constructible et tel que $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3}$. Le réel $\frac{\pi}{3}$ est constructible.

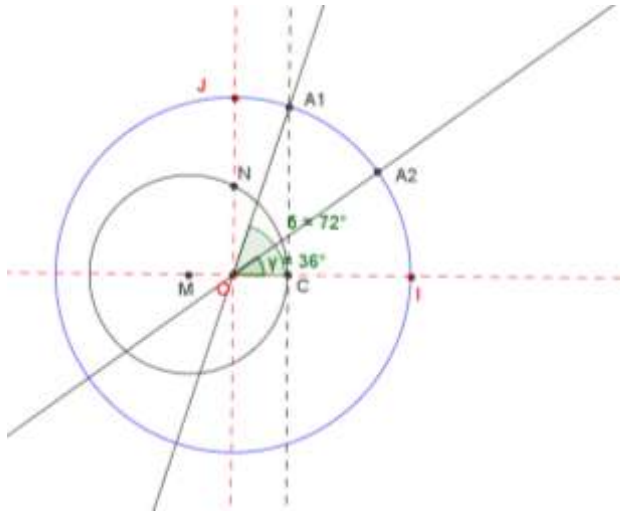



- Soit le point N de la droite (OJ) d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\frac{1}{2}$ le point N est constructible puisque le rationnel $\frac{1}{2}$ est constructible.la perpendiculaire à (OJ) passant par N est aussi constructible coupe le cercle trigonométrique au point B. le point B est constructible et tel que $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{6}$. Le réel $\frac{\pi}{6}$ est constructible.




- Soit le point N de la droite (OJ) d'ordonné, dans le repère (O, I, J), $\frac{1}{2}$ et le point M de la droite (OI) d'abscisse, dans le repère (O, I, J), $-\frac{1}{4}$ les point M et N sont constructibles puisque les rationnels $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ sont constructibles.

Le cercle de centre M et de rayon MN qui est constructible coupe la droite (OI) en un point C d'abscisse positif x = $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = cos\frac{2\pi}{5}$ la perpendiculaire à la droite (OI) passant par C coupe le cercle trigonométrique en un point A1 le point A1 est constructible et tel que $\widehat{IOA_1} = \frac{2\pi}{5}$. Le réel $\frac{2\pi}{5}$ est constructible. La bissectrice intérieure de l'angle déterminer par les droites (OI) et (OA1) est constructible coupe le cercle trigonométrique en un point A2 et tel que $\widehat{IOA_2} = \frac{\pi}{5}$. Le réel $\frac{\pi}{5}$ est constructible.




**III/** dans cette partie nous admettons le résultat de Wantzel suivant :

Tout nombre constructible est algébrique sur Q et son degré est une puissance de 2.

**1)** a) montrons que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

Si $\sqrt[3]{2}$ est constructible alors il existe un polynôme $Q(X)$ de degré est une puissance de 2 à coefficients rationnels tel que $\sqrt[3]{2}$ est une solution de $Q(X)$

Donc $Q(X) = \left(X - \sqrt[3]{2}\right)P(X)$

Soient $Q(X) = a_n X^{2^n} + a_{n-1}X^{2^{n-1}} + a_{n-2}X^{2^{n-2}} + a_{n-3}X^{2^{n-3}} \ldots + a_0$

$P(X) = b_n X^{2^{n-1}} + b_{n-1}X^{2^{n-2}} + b_{n-2}X^{2^{n-3}} + b_{n-3}X^{2^{n-4}} \ldots + b_0$ avec

$a_k$ et $b_k$ sont des nombre rationnels pour tout les entiers k = 0, 1, 2 ….., n et $a_n \neq 0$

On a

$$Q(X) = \left(X - \sqrt[3]{2}\right)P(X) = b_n X^{2^n} + \left(b_{n-1} - b_n\sqrt[3]{2}\right)X^{2^{n-1}} + \left(b_{n-2} - b_{n-1}\sqrt[3]{2}\right)X^{2^{n-2}}$$
$$+ (b_{n-3} - b_{n-2}\sqrt[3]{2})X^{2^{n-3}} \ldots + (b_0 - b_1\sqrt[3]{2})X + b_0\sqrt[3]{2}$$

Donc

$$a_n = b_n \neq 0 \qquad b_{k-1} - b_n\sqrt[3]{2} = a_{k-1} \quad \text{et} \quad b_0\sqrt[3]{2} = a_0$$

$b_n\sqrt[3]{2} = b_{k-1} - a_{k-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{b_n}$ est un nombre rationnel ce qui est absurde

Donc $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

b) Déduisons que l'on ne peut pas construire à la règle et au compas l'arrête d'un cube ayant un volume double d'un cube donné.
Soit a l'arrête d'un cube donné et b celui de cube qu'on veut construire on a donc
$\sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{2}$
Puisque $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible donc $\sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible

**2)** Montrons que l'on ne peut pas construire à la règle et au compas un carré ayant même air qu'un cercle donné.

Si un carré de cote a ayant même air qu'un cercle de rayon r donné alors $a = r\sqrt{\pi}$

Comme $\pi$ est un nombre transcendant donc $a = r\sqrt{\pi}$ est aussi un nombre transcendant

Ce qui prouve que $a = r\sqrt{\pi}$ n'est pas constructible

**3)** On considérant le polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$.
Montrons que $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas un nombre constructible.

$$\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{9}} + e^{-i\frac{\pi}{9}}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} + 3e^{i\frac{\pi}{9}} + 3e^{-i\frac{\pi}{9}}\right) = \frac{1}{4}cos\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 3\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

$$P\left(\cos\frac{\pi}{9}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + 3\cos\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} = 0$$

Donc $\cos\frac{\pi}{9}$ est une solution de $P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2} = 0$ or P(X) n'est pas de degré $2^n$

Donc $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas algébrique sur Q est par conséquence $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible à la règle et au compas.

Déduisons que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable.
L'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable car $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas constructible.