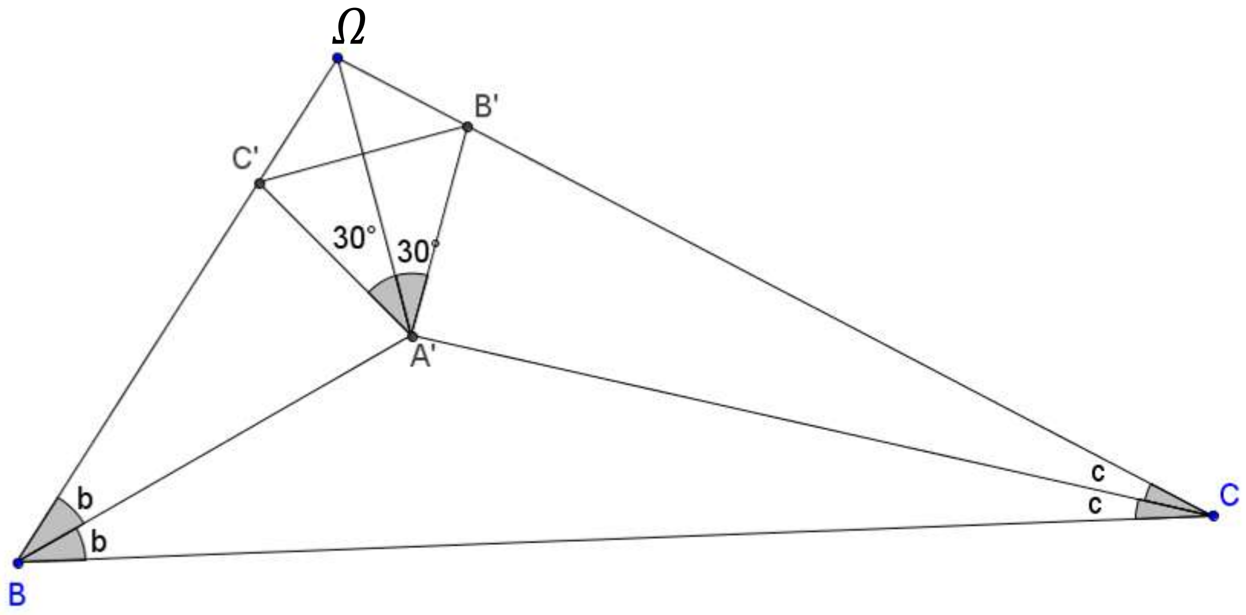
Exercice N° 1

1) $a/$



$b/$ *Les demi droites* $[BA')$ *et* $[CA')$ *sont les deux bissectrices du triangle* ΩBC *issue respectivement de* B *et* C *donc la demi − droite* $[\Omega A')$ *et la bissectrice du triangle* ΩBC *issue de* Ω.

Les tringles $\Omega C'A'$ *et* $\Omega B'C'$ *sont isométrique (angle − coté – angle)donc*

$C'A' = A'B'$ *et* $\Omega C' = \Omega B'$

$A'C' = A'B'$ *donc le triangle* $A'B'C'$ *est isocèle et comme* $\widehat{A'B'C'} = \dfrac{\pi}{6}$

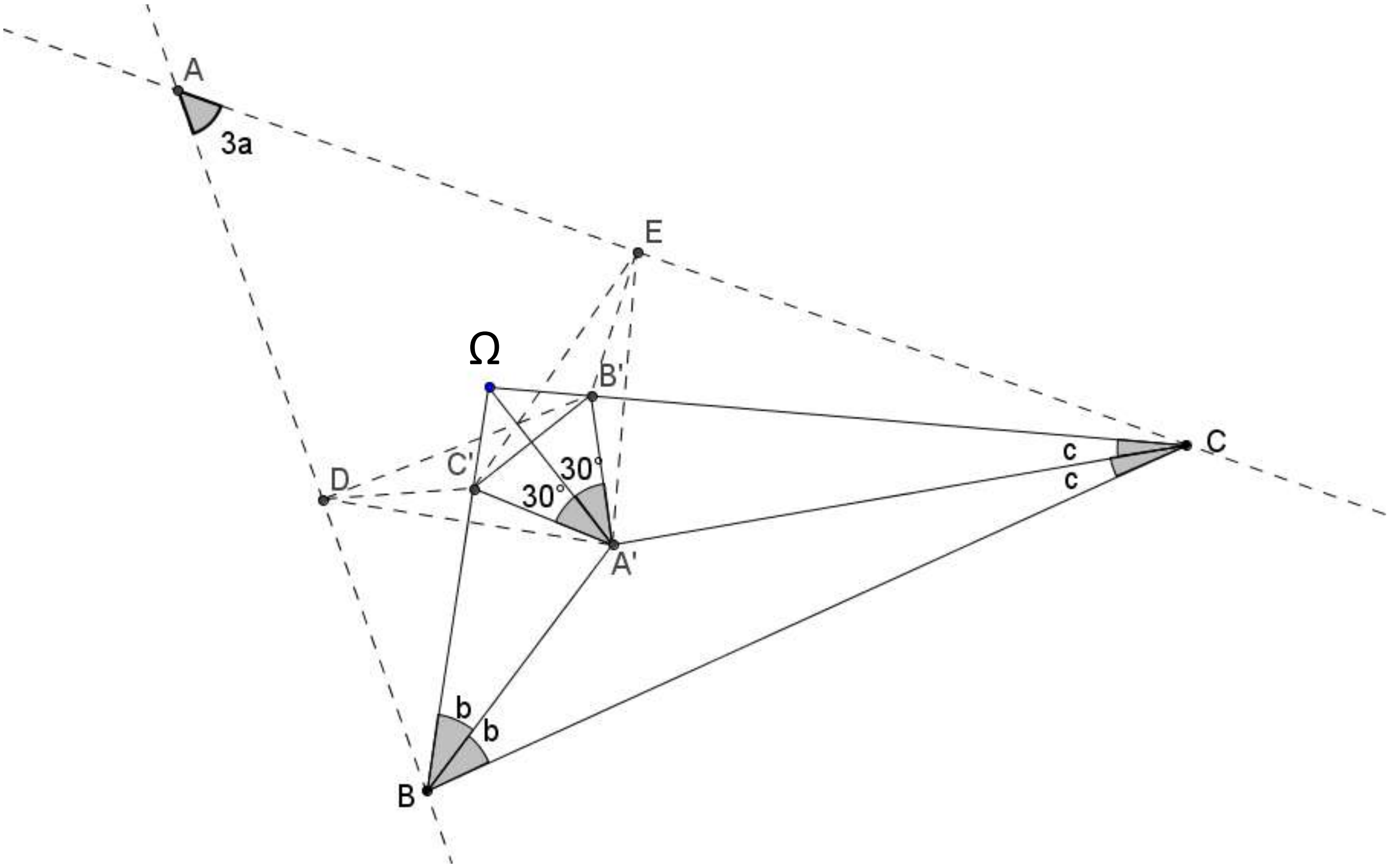
le triangle $A'B'C'$ *est donc équilatéral.*

$\Omega C' = \Omega B'$ *donc Le triangle* $\Omega B'C'$ *est isocèle de sommet principale* Ω.

$c/$ *On a Le triangle* $\Omega B'C'$ *est isocèle de sommet principale* Ω *donc*

$$\widehat{\Omega C'B'} = \widehat{\Omega B'C'} = \frac{180° - \widehat{B\Omega C}}{2} = \frac{180° - (180° - 2b - 2c)}{2} = b + c$$

2)



a) $Montrons\ que\ D\widehat{C'}B' = E\widehat{B'}C' = \pi - 2a.$

$$on\ a\ \ 3a + 3b + 3c = \pi \quad \Rightarrow \quad a + b + c = \frac{\pi}{3}$$

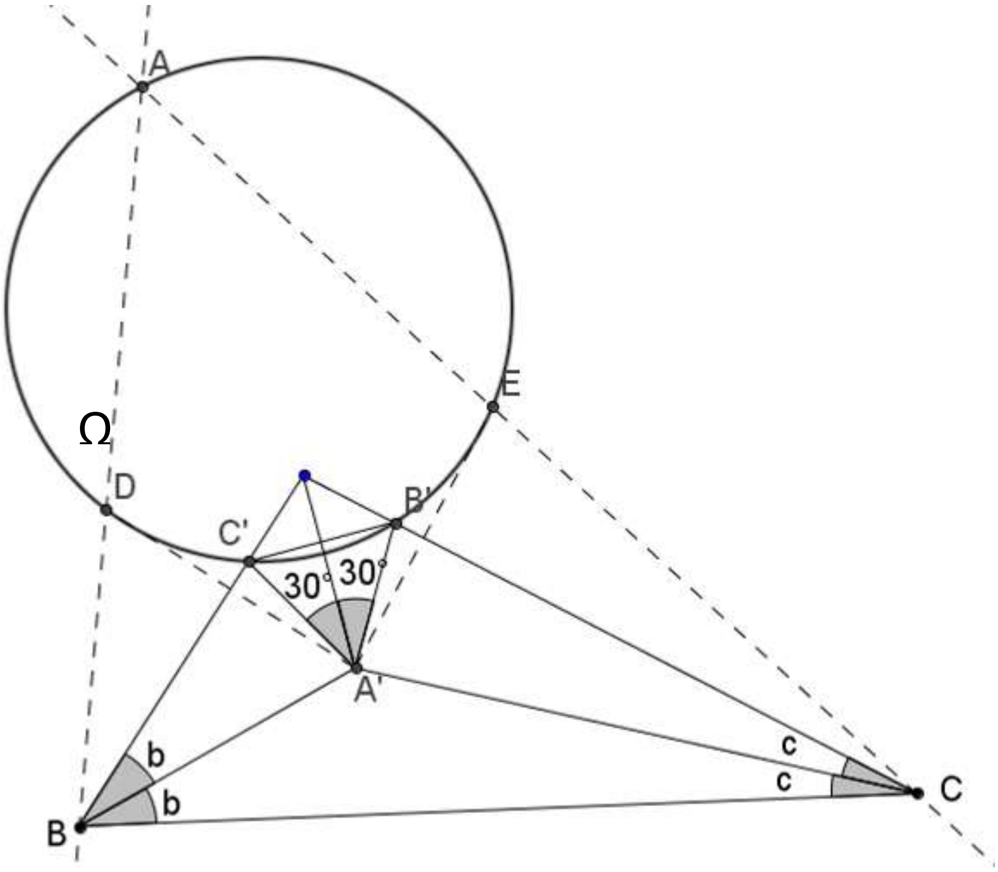
$On\ a\ E = S_{(\Omega C)}(A')\ donc\ A'B' = B'E\ \ et\ on\ a\ D = S_{(\Omega B)}(A')\ donc\ A'C' = C'D.$

$les\ triangles\ A'C'D\ et\ A'B'E\ sont\ isocèles\ de\ sommet\ principales\ respectifs\ C'\ et\ B'.$

$A'B'C'\ est\ équilatéral\ donc\ C'B' = A'B' = A'C'\ Donc\ \ C'D = B'C' = B'E$

b) $Montrons\ que\ les\ points\ D, C', B', et\ E\ appartiennent\ à\ un\ même\ cercle$

$que\ l'on\ précisera.$


A
E
Ω
D
B'
C'
30°
30°
A'
b
b
c
c
B
C

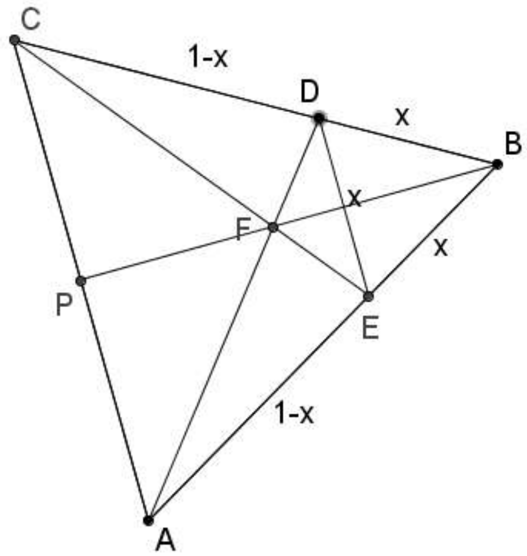
Exercice N°2

Soit ABC *un triangle équilatéral de coté* 1 *et soit* D *un point de* $[BC]$

On pose $BD = x$ *avec* $x \neq 0, x \neq 1$ *et* $x \neq \frac{1}{3}$

Soit E *le point de* $[AB]$ *tel que* $BE = x$*. les segments* $[AD]$ *et* $[CE]$ *se coupent en* F*.*

On pose P *le milieu de* $[AC]$*.*



1) $a/ \ -$ *Montrons que* $\frac{FD}{FA} = \frac{FE}{FC} = x$

- *On a* $BD = BE = x$ *et* $C\hat{B}A = \frac{\pi}{3} \Rightarrow BDE$ *est un triangle équilatéral de coté* x*.*

$DE = BD = BE = x$

$DC = BC - BD = 1 - x$ *et* $EA = BA - BE = 1 - x$

- *Les droites* (BC) *et* (BA) *se coupe en* A *et le points* $D \in (BC)$ *et* $E \in (BA)$

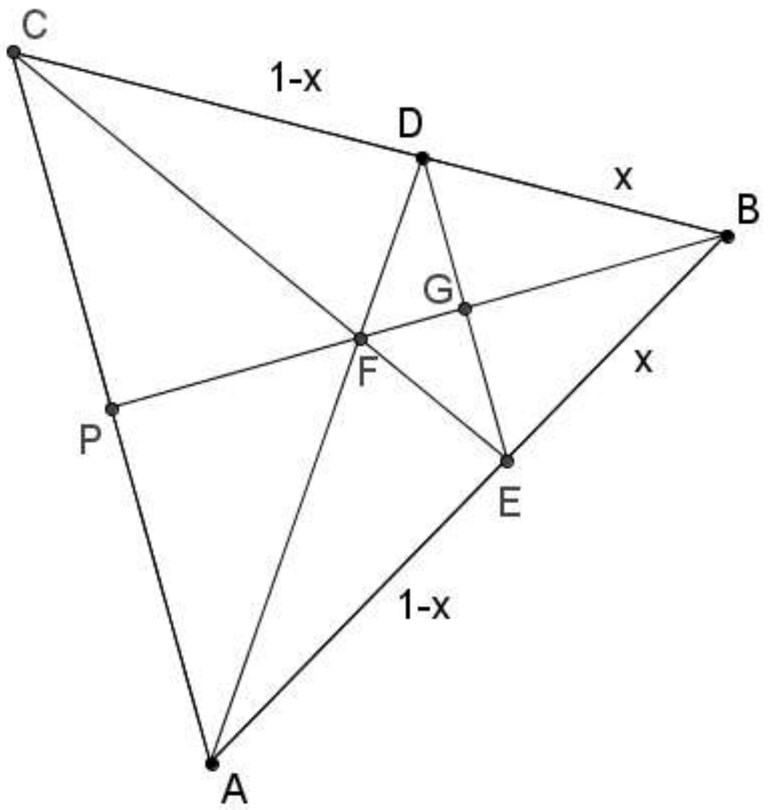
et on a $\frac{BD}{BC} = \frac{x}{1-x} = \frac{BE}{BA}$ *donc* $(DE) \, // \, (AC)$ *d'après la réciproque de Thalès.*

Dans le trapèze $ACDE$ *les droites* (AD)*et* (CE)*ce coupe en* F

d'après le théorème de Thalès on alors $\frac{FD}{FA} = \frac{FE}{FC} = \frac{DE}{AC} = \frac{x}{1} = x$

d'ou $\frac{FD}{FA} = \frac{FE}{FC} = x$

$-$ *Montrons que* $\frac{FB}{FP} = \frac{2x}{1-x}$



$$\frac{BG}{GP} = \frac{BE}{EA} = \frac{x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad BG = GP\frac{x}{1-x}$$
$$\frac{FG}{FP} = \frac{GE}{PA} = x \quad \Rightarrow \quad FG = xFP$$

$$FB = FG + BG = GP\tfrac{x}{1-x} + \ xFP \quad on\ a\ \ GP\ = FG + FP = (x+1)FP$$
$$FB = (x+1)\frac{x}{1-x}FP + \ xFP = \frac{x(x+1)+x(1-x)}{1-x}FP = \frac{2x}{1-x}PF$$
$$d'ou \qquad \frac{FB}{FP} = \frac{2x}{1-x}$$
$b/\ $ *Déduisons que* $FP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

- *On a* $\frac{FB}{FP} = \frac{2x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad FB\ = \frac{2x}{1-x}FP$
- *On a* $BP\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FP\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - FB \quad \Rightarrow \quad FP\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2x}{1-x}FP$

$$\Rightarrow \quad FP\left(1\ + \frac{2x}{1-x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad FP\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow FP = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

2) *On désigne par* $S1$ *l'air du triangle* BEF *et par* $S2$ *l'air du triangle* AFP.

Montrons que $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2x^2}{1-x}$

$Soit\ G\ le\ point\ d'intersection\ de\ [DE]\ et\ [FB]$

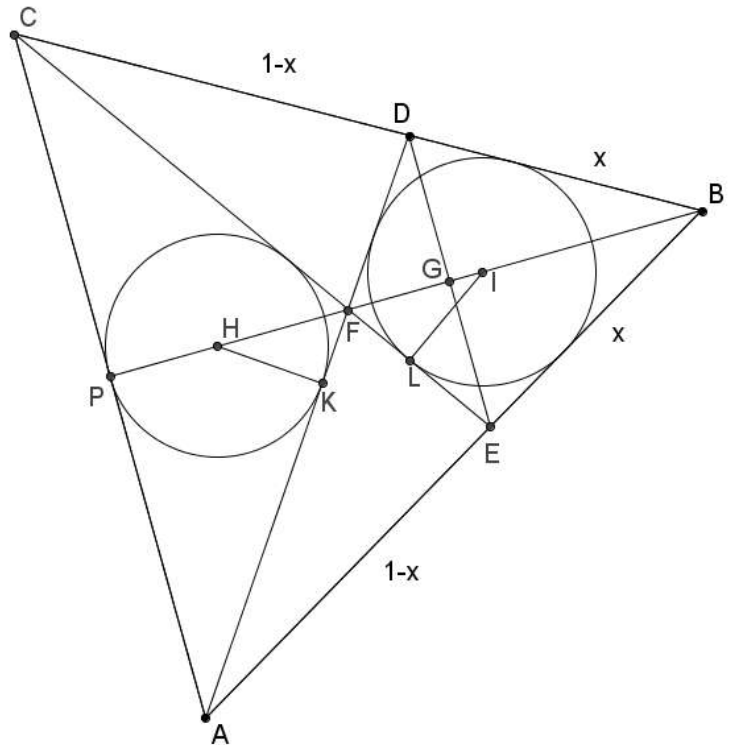
EG el la hauteur du triangle BEF issue du point E et On a $EG = \dfrac{x}{2}$

$$S_1 = \frac{EH \times FB}{2} = \frac{xFB}{4}$$

AFP est un triangle rectangle en P $donc\ S_2 = \dfrac{AP \times FP}{2} = \dfrac{FP}{4}$

$$d'ou \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{xFB}{4}}{\frac{FP}{4}} = x\left(\frac{FB}{FP}\right) = x\left(\frac{2x}{1-x}\right) = \frac{2x^2}{1-x}$$

3) $On\ suppose\ que\ le\ rayon\ r\ du\ cercle\ inscrit\ au\ triangle\ AFC\ est\ le\ m$ê$me\ que$ $celui\ du\ cercle\ inscrit\ au\ quadrilat$è$re\ BDFE$.



$a/\ Montrons\ que\ FA = \frac{1-2x}{3x-1}$

$air(AFC) = 2S2 = \frac{1}{2}(1+2FA)r \Rightarrow S2 = \frac{1}{4}(1+2FA)r$

$air(BDFE) = 2S1 = \frac{1}{2}(2FD+2x)r = \frac{1}{2}(2xFA+2x)r = xr(1+FA)$

$\Rightarrow \quad S1 = \frac{1}{2}xr(1+FA)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{air(BDFE)}}{\text{air(AFC)}} = \frac{S1}{S2} = \frac{\frac{1}{2}x(1+FA)}{\frac{1}{4}(1+2FA)} = \frac{2x(1+FA)}{1+2FA}$$

or on a $\quad \frac{S1}{S2} = \frac{2x^2}{1-x}$

d'ou $\quad \frac{2x(1+FA)}{1+2FA} = \frac{2x^2}{1-x}$

signifie $\quad \frac{1+FA}{(1+2FA)} = \frac{x}{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad (1+FA)(1-x) = x(1+2FA)$

$\Leftrightarrow \quad (1+FA)(1-x) = x(1+2FA) \Leftrightarrow \quad FA(1-x) - 2xFA = x - (1-x)$

$\Leftrightarrow \quad FA(1-3x) = -1+2x \quad \Leftrightarrow \quad FA = \frac{1-2x}{3x-1}$

b/ Déduisons la valeur de x puis celle de r