Concourt 2009

Exercice N°1

1) $On\ considère\ la\ suite\ (u_n)\ définie\ sur\ IN*\ par:$

$u_1 = 0\ et\ u_2 = 1\ et\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n, u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1} + u_n}{3}$

$a)\ Exprimer\ \ u_{n+2} - u_{n+1}\ en\ fonction\ de\ \ u_{n+1} - u_n$

$b)\ déduire\ l'expression\ de\ u_n\ en\ fonction\ de\ n$

2) $a\ étant\ un\ réel\ strictement\ positif, on\ considère\ la\ suite\ (v_n)\ définie\ sur\ IN*\ par:\ v_1 = 1\ et\ v_2 = a\ et\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n, v_{n+2} = \sqrt[3]{v^2{}_{n+1} v_n}$

$a)\ exprimer\ v_n$ en fonction de a et de n

b) montrer que la suite (v_n) est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE N°2

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on note $\sigma(n) la\ somme\ des\ ses\ diviseurs.$

I- 1) soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

a/ montrons que n est premier si et seulement si $\sigma(n) = n + 1$

b/ montrons que pour tout entier p premier on a $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$

2) soient m et n deux entiers strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.

Montons que $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$

II/ on dit qu'un entier naturel est un nombre parfait si et seulement si $\sigma(n) = 2n$

1°)

a- Vérifier que les entier 6 ; 28 et 496 sont parfaits et Montrer que l'entier 2^n ne l'est pas

2°) soit n un entier tel que $(2^{n+1} - 1) soit\ premier$

a- Montrons que les entiers $2^n\ et\ 2^{n+1} - 1\ \ sont\ premiers\ entre\ eux$

b- En déduire que l'entier $2^n \times (2^{n+1} - 1)$ est parfait.

3°/ soit a un entier parfait pair.

a- Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n et un entier impair b tel que $a = b \times 2^n$

b- Montrer que b $=2^{n+1} - 1$et que b est un nombre premier.

c- En déduire qu'un entier pair a est parfait si et seulement si il s'écrit sous la forme $a = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ ou $2^n - 1$ est un nombre premier.

4°/ Soit a un entier parfait pair

a- Montrons que les nombres des diviseurs positif de a est pair.

b- Soient d_1 , d_2 , d_3 … $\mathrm{d}_{2\mathrm{k}}$ $les\ diviseurs\ positifs\ de\ a$.

$$\text{montrer que } \sum_{i=1}^{i=2n} \left(\frac{1}{\mathrm{d_i}}\right) = 2$$

Exercice N°3

Soit I la fonction définie sur IR par : $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\, d\theta$

1°) a- Montrons que I est de classe C² et solution de l'équation différentielle :

(E) : ty''(t) +y'(t) +ty(t) = 0

b- Déterminer une équation différentielle du second degré vérifiée par *la fonction* :

$u\colon\ t \longrightarrow\ I(t)\sqrt{t} \quad , t \in\ ]0, \quad +\infty[$

2°) *soit* v *une solution non nulle de l'équation différentielle* : $y''(t) + y(t) = 0$

et α *et* β *deux zéros consécutifs de* v *avec* $0 < \alpha < \beta$

a – Montrons que $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\, dt = [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]_{\alpha}^{\beta}$

b – déduire que $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(t)v(t)}{4t^2}\, dt = u(\beta)v'(\beta) - u'(\alpha)v(\alpha)$

3°)

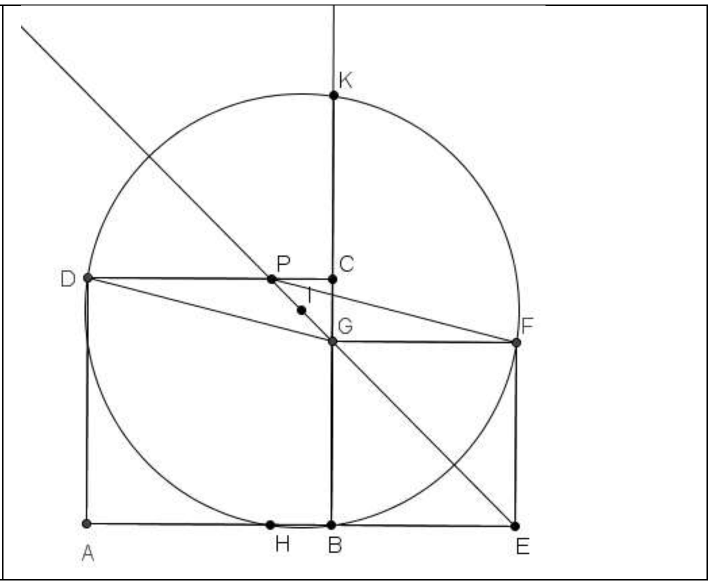
a – Montrons que $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(t)\sin(t)}{4t^2}\, dt \leq \sqrt{\pi}\,(1+\sqrt{2})$

b – EN déduire que $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta)\, d\theta\right) \frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}\, dt \leq 4\pi\sqrt{\pi}(1+\sqrt{2})$

Exercice N°4

Dans le plan orienté, on considère deux carrés directes ABCD et BEFG de cotés respectifs 4cm et 3cm comme l'indique la figure ci-contre:

1) On désigne par P le point d'intersection des droites (EG) et (DC).
   Montrer que le quadrilatère GFPD est un parallélogramme.
   On désigne par I le centre de ce parallélogramme.
2) Soit C le cercle de centre I et passant par B. On note H le deuxième point d'intersection de C avec la droite (AB).
   a) Montrer $[DF]$ est un diamètre de C
   b) Montrer que la droite (IH) est la bissectrice du segment $[DF]$.



3) Soit K le point de la demi-droite $[GC\ )$ tel que GK = EH
   a) Montrer que le quadrilatère DHFK est un carré.
   b) Calculer l'aire du carré DHFK et déduire la mesure de son coté.

Concourt 2009 solution

Exercice N°1

3) $On\ considère\ la\ suite\ (u_n)\ définie\ sur\ IN*\ par:$

$u_1 = 0\ et\ u_2 = 1\ et\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n, u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1} + u_n}{3}$

$Exprimer\ \ u_{n+2} - u_{n+1}\ en\ fonction\ de\ \ u_{n+1} - u_n$

$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1} + u_n}{3} - u_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} + u_n - 3u_{n+1}}{3} = -\dfrac{1}{3}(u_{n+1} - u_n)$

$déduire\ l'expression\ de\ u_n\ en\ fonction\ de\ n$

$On\ pose\ \ x_n = u_{n+1} - u_n\ on\ a\ x_{n+1} = -\dfrac{1}{3}x_n\ donc\ la\ suite\ (x_n)\ est\ une\ suite\ gèomètrique$

$de\ raisson\ q = -\dfrac{1}{3}\ et\ de\ premier\ terme\ x_1 = u_2 - u_1 = 1$

$d'une\ part\ \sum_{1}^{n-1} x_k = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)\ \ d'autre\ \ part\ \ \ \ \sum_{1}^{n-1} x_k = u_n - u_1 = u_n$

$d'ou\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n\ non\ nul\ \ \ u_n = \dfrac{3}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right)$

4) $a\ étant\ un\ réel\ strictement\ positif, on\ considère\ la\ suite\ (v_n)\ définie\ sur\ IN*\ par:\ v_1 = 1\ et\ v_2 = a\ et\ pour\ tout\ entier\ naturel\ n, v_{n+2} = \sqrt[3]{v^2{}_{n+1}v_n}$

$Montrons\ par\ recurance\ que\ \ pour\ tout\ entier\ n\ non\ nul\ on\ a\ v_n = e^{au_n}$

$lnv_1 = 0 = au_1\ \ \ \ \Rightarrow v_1 = e^{au_1}\ \ ,\ \ \ lnv_2 = ln(au_2)\ \ \Rightarrow v_2 = e^{au_2}$

$on\ suppose\ que\ \ v_n = e^{au_n}\ et\ v_{n+1} = e^{au_{n+1}}\ \ montrons\ que\ \ \ v_{n+2} = e^{au_{n+2}}$

$soit\ n\ un\ entier\ naturéel$

$ln(\ v_{n+2}) = ln\left(\sqrt[3]{v^2{}_{n+1}v_n}\right) = \dfrac{2lnv_{n+1} + lnv_n}{3}$

$= \frac{2lne^{au_{n+1}} + lne^{au_n}}{3} = a\frac{2u_{n+1}+u_n}{3} = au_{n+2}\ \ \ \ \Rightarrow\ \ \ \ v_{n+2} = e^{au_{n+2}}$

$d'ou\ pour\ tout\ entier\ n\ non\ nul\ on\ a\ v_n = e^{au_n}$

$$on\ a\ v_n = e^{au_n} = e^{a\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)} \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} e^{a\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)} = e^{\frac{3a}{4}}$$

EXERCICE N°2

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on note $\sigma(n)$ *la somme des ses diviseurs.*

II- 1) soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

a/ montrons que n est premier si et seulement si $\sigma(n) = n+1$

- On suppose que n est premier montrons que $\sigma(n) = n+1$
  Si n est premier alors les seuls diviseurs de n sont n et 1 et par suite
  $\sigma(n) = n+1$
- On suppose que $\sigma(n) = n+1$ montrons que n est premier
  Si n n'est pas premier alors il existe au moins un diviseur d de n et tel que 1< d <n
  Donc $\sigma(n) \geq n+d+1 \Rightarrow n+1 \geq n+d+1 \Rightarrow 0 \geq d$ ce qui contre dit 1< d <n

  Donc n est premier.

Conclusion : n est premier si et seulement si $\sigma(n) = n+1$

b/ montrons que pour tout entier p premier on a $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$

Soit p un entier premier les seuls diviseurs de p^n sont donc les entiers p^k $avec\ k \in \{0;1;2;\dots;n\}$ et par suite

$$\sigma(p^n) = \sum_0^n p^k = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

c/ soient m et n deux entiers strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.

Montons que $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$

- Soient P et q deux entiers naturels premiers les diviseurs de pq sont les entiers 1, p, q, et pq

Donc $\sigma(pq) = 1+p+q+pq = 1+p+q(1+p) = (1+p)(1+q) = \sigma(p)\sigma(q)$

- Soient P et q deux entiers naturels premiers et $\alpha\ et\ \beta\ deux\ entiers\ naturels$

Soit $D = \{\, p^i q^j\ tel\ que\ i = 0,1,2\dots\alpha\ ; j = 0,1,2..\beta \,\}$ l'ensemble des diviseurs de v$p^\alpha q^\beta$

$$\sigma(p^\alpha q^\beta) = \sum_{\substack{0\leq i\leq\alpha \\ 0\leq j\leq\beta}} p^i q^j = \sum_{0\leq i\leq\alpha} p^i \left(\sum_{0\leq j\leq\beta} q^j\right) = \sigma(p^\alpha)\sigma(q^\beta)$$

- Soient

$$m = \prod_0^k {p_i}^{\alpha_i}\ \ et\ n = \prod_0^{k'} {q_i}^{\beta_i}\ \ la\ décomposition\ en\ facteurs\ premiers\ de\ n\ et\ m$$

Pour $i \in \{0;1;2;\dots;k\}\ et\ j \in \{0;1;2;\dots;k'\}$ on a

$p_i \neq q_i$ *si non m et n ne sont pas premiers entre eux*

$$mn = \left(\prod_0^k {p_i}^{\alpha_i}\right)\left(\prod_0^{k'} {q_i}^{\beta_i}\right) = \prod_{\substack{0\leq i\leq k \\ 0\leq j\leq k'}} {p_i}^{\alpha_i}\, {q_i}^{\beta_i}$$

$$\sigma(nm) = \sigma\left(\prod_{\substack{0\leq i\leq k \\ 0\leq j\leq k'}} {p_i}^{\alpha_i}\, {q_i}^{\beta_i}\right) = \sum_{\substack{0\leq i\leq k \\ 0\leq j\leq k'}} {p_i}^{\alpha_i}\, {q_i}^{\beta_i} = \left(\sum_{0\leq i\leq k} {p_i}^{\alpha_i}\right)\left(\sum_{0\leq j\leq k'} {q_i}^{\beta_i}\right) = \sigma(n)\sigma(m)$$

II/ 1°) $\sigma(6) = \sigma(3\times 2) = \sigma(3)\times\sigma(2) = 4\times 3 = 12 = 2\times 6 \Rightarrow 6\ est\ un\ entier\ parfait$

$$\sigma(28) = \sigma(7\times 4) = \sigma(7)\times\sigma(4) = 8\times\sigma(2^2) = 8\times\left(\frac{2^3-1}{2-1}\right) = 8\times 7 = 2\times 28$$

$\Rightarrow 28\ est\ un\ entier\ parfait$

$$\sigma(496) = \sigma(31\times 2^4) = \sigma(31)\times\sigma(2^4) = 31\times\left(\frac{2^5-1}{2-1}\right) = 32\times 31 = 2^5\times 31 = 2\times 496$$

$\Rightarrow 496\ est\ un\ entier\ parfait$

On suppose que 2^n est un entier parfait Alors

$\sigma(2^n) = 2 \times 2^n \Leftrightarrow \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} \Leftrightarrow 0 = 1\ ce\ qui\ est\ impossible$

2°) soit n un entier tel que $(2^{n+1}-1) soit\ premier$

c- Montrons que les entiers $2^n\ et\ 2^{n+1}-1\ sont\ premiers\ entre\ eux$

$$2 \times 2^n - (2^{n+1}-1) = 1 \xRightarrow[Thé\ de\ Bezout]{} 2^n\ et\ 2^{n+1}-1\ sont\ premiers\ entre\ eux$$

d- Montrons que l'entier $2^n \times (2^{n+1}-1)$ est parfait $2^n\ et\ 2^{n+1}-1\ sont\ premiers\ entre\ eux$

$\Rightarrow \sigma\left(2^n \times (2^{n+1}-1)\right) = \sigma(2^n)\sigma(2^{n+1}-1)$

On a $\sigma(2^n) = 2^{n+1}-1$ et $2^{n+1}-1\ et\ un\ entier\ premier\ donc\ \sigma(2^{n+1}-1) = 2^{n+1}$

Donc $\sigma\left(2^n \times (2^{n+1}-1)\right) = \sigma(2^n)\sigma(2^{n+1}-1)$

$$= 2^{n+1} \times (2^{n+1}-1) = 2 \times \left(2^n \times (2^{n+1}-1)\right)$$

3°/ soit a un entier parfait pair.

d- Montrons qu'il existe un entier naturel n non nul et un entier impair b tel que $a = b \times 2^n$

$soit\ a = \prod_{0}^{k} {p_i}^{\alpha_i}\ la\ décomposition\ de\ a\ en\ facteurs\ premiers$

Comme a est un entier pair alors 2 divise a et par suite il existe un entier i entre 0 et k tel que $p_i = 2$ et pour tout j$\neq i\ p_i est\ un\ entier\ premier\ strictement\ superieur\ à\ 2$

$on\ pose\ b = \prod_{j\neq i}^{k} {p_j}^{\alpha_j}\ et\ \alpha_i = n\quad {p_i}^{\alpha_i} = 2^n\ donc\ a = b \times 2^n$

$comme$ pour tout j $\neq i\ p_i est\ un\ entier\ premier\ strictement\ superieur\ à\ 2\ donc$ $des\ entier\ impairs$ L'entier b est donc impair .

$b-$ L'entier b est impair $\Rightarrow$ b et 2^n sont premier entre eux $\Rightarrow\ \sigma(a) = \sigma(b)\sigma(2^n)$

$a\ est\ parfait\ \Rightarrow \sigma(a) = 2a \Rightarrow \sigma(b)\sigma(2^n) = 2a \Rightarrow \sigma(b)(2^{n+1}-1) = b \times 2^{n+1}$

$si\ b\ est\ premier\ \Rightarrow \sigma(b) = b + 1 \Rightarrow (b+1)(2^{n+1}-1) = b \times 2^{n+1}$

$\Rightarrow b \times 2^{n+1} - b + 2^{n+1} - 1 = b \times 2^{n+1} \Rightarrow b = 2^{n+1} - 1$

$si\ b\ n'est\ pas\ premier\ \Rightarrow \sigma(b) > b + 1$

$$\Rightarrow \sigma(b)(2^{n+1}-1) = b \times 2^{n+1} \Rightarrow (b+1)(2^{n+1}-1) < b \times 2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+1} - 1 < 0$$

Ce qui est impossible donc b est premier et $b = 2^{n+1} - 1$

c/ - Si a est un entier naturel pair parfait d'après a- et b- $a = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$

ou $(2^n - 1)\ est\ premier$

- Réciproquement si $a = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ou $(2^n - 1)\ est\ premier$ alors

$\sigma(a) = \sigma\left(2^{n-1} \times (2^n - 1)\right) = \sigma(2^{n-1}) \times \sigma(2^n - 1) = (2^n - 1) \times 2^n$

$= 2 \times 2^{n-1} \times (2^n - 1) = 2a$ donc a est un entier pair parfait.

5) Soit a un entier parfait pair

a/ Montrons que les nombres des diviseurs positif de a est pair.

Supposons que a est un entier positifs.

a est un entier naturel pair parfait d'après 3° c/ $a = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$ ou $(2^n - 1)$

$est\ un\ entier\ premier$

Soient $d_k = 2^{k-1}$ ou k sont les entiers 1, 2, 3 …..n Les entiers d_k sont les diviseurs de 2^{n-1}

or $(2^n - 1)\ est\ un\ entier\ premier\ donc\ les\ seuls\ diviseurs\ de\ a\ sont\ les\ entier$ d_k

et $d_k \times (2^n - 1)$ ce qui prouve que les nombres des diviseurs positif de a est pair.

e- Soient d_1 , d_2 , d_3 … d_{2k} *les diviseurs positifs de a*

montrons que $\sum_{i=1}^{i=2n} \left(\frac{1}{d_i}\right)$

$$\sum_{i=1}^{i=2n} \left(\frac{1}{d_i}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{(2^{k-1})(2^n - 1)}\right) = \left[\frac{1}{2^n - 1} + 1\right] \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2^n - 1} + 1\right] \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{2^n}{2^n - 1} \times \frac{2^n - 1}{2^n} \times 2 = 2$$

Exercise N°3

Soit I la fonction définie sur IR par : $I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t sin\theta)\, d\theta$

1°) a- Montrons que I est de classe C² et solution de l'équation différentielle :

(E) : ty''(t) +y'(t) +ty(t) = 0

Pour $\theta \in [0, \pi]$ La fonction $f(t) = \cos(t sin\theta)$ est de classe C^2 donc

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t sin\theta)\, d\theta \ \text{ est de classe } C^2 \text{ et on a}$$

$$I'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -sin\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta \ \text{ et } I''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -sin^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta$$

$$I''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -sin^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - cos^2\theta) \cos(t sin\theta)\, d\theta$$

$$I''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t sin\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} cos^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta = -I(t) + \frac{1}{t\pi} \int_0^{\pi} t cos^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta$$

$$soit\ J(t) = \frac{1}{t\pi} \int_0^{\pi} cos^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta$$

On pose $u(\theta) = cos\theta$ et $v'(\theta) = t cos\theta\, cos(t sin\theta)$

$u'(\theta) = -sin\theta$ et $v(\theta) = sin(t sin\theta)$

$$J(t) = \frac{1}{t\pi} \int_0^{\pi} cos^2\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta = J(t) = \frac{1}{t\pi} [cos\theta \sin(t sin\theta)]_0^{\pi} - \frac{1}{t\pi} \int_0^{\pi} -sin\theta \cos(t sin\theta)\, d\theta = -\frac{1}{t} I'(t)$$

$$d'ou \quad I''(x) = -I(t) = -\frac{1}{t} I'(t) \Rightarrow \quad t I''(x) + I'(t) + t I(t) = 0$$

b- *soit la fonction* $u \longrightarrow I(t)\sqrt{t}$, $t \in]0, +\infty[$

Pour $t \in]0, +\infty[$ $u(t) = I(t)\sqrt{t}$ *est de classe C² et on a*

$$u'(t) = I'(t)\sqrt{t} + I(t) \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$u''(t) = I''(t)\sqrt{t} + I'(t)\frac{1}{2\sqrt{t}} + I'(t)\frac{1}{2\sqrt{t}} - I(t)\frac{1}{4t\sqrt{t}} = I''(t)\sqrt{t} + I'(t)\frac{1}{\sqrt{t}} - I(t)\frac{1}{4t\sqrt{t}}$

$donc \ \ \sqrt{t}\,u''(t) = tI''(t) + I'(t) - I(t)\frac{1}{4t}$

$or \ \ tI''(x) + I'(t) + tI(t) = 0 \Leftrightarrow tI''(x) + I'(t) = -tI(t)$

$d'ou \ \ \sqrt{t}\,u''(t) = -tI(t) - I(t)\frac{1}{4t} = \left(-t - \frac{1}{4t}\right)I(t) = -\left(\frac{4t^2+1}{4t}\right)I(t) = -\left(\frac{4t^2+1}{4t\sqrt{t}}\right)u(t)$

$d'ou \ \ 4t^2u''(t) + (4t^2+1)u(t) = 0$

2°) $soit\ v\ une\ solution\ non\ nulle\ de\ l'équation\ différentielle : y''(t) + y(t) = 0$

$et\alpha et\ \beta\ deux\ zéros\ consécutifs\ de\ v\ avec\ 0 < \alpha < \beta$

a − Montrons que $\int_\alpha^\beta \frac{u(t)v(t)}{4t^2}dt$

$v\ une\ solution\ non\ nulle\ de\ l'équation\ différentielle : y''(t) + y(t) = 0$

$\Rightarrow v''(t) = -v(t)$

On a

$4t^2u''(t) + (4t^2+1)u(t) = 0 \Rightarrow u''(t) = -\frac{4t^2+1}{4t^2}u(t)$

$On\ pose\ h(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t) \qquad pour\ tout\ t \in [\alpha, \beta]$

$h'(t) = u'(t)v'(t) + u(t)v''(t) - u''(t)v(t) - u'(t)v'(t)$

$$h'(t) = u(t)v''(t) - u''(t)v(t) = -u(t)v(t) + \frac{4t^2+1}{4t^2}u(t)v(t) = \left(-1 + \frac{4t^2+1}{4t^2}\right)u(t)v(t)$$

$$= \left(\frac{-4t^2+4t^2+1}{4t^2}\right)u(t)v(t) = \frac{u(t)v(t)}{4t^2}$$

$d'une\ part \int_\alpha^\beta h'(t)dt = [h(t)]_\alpha^\beta = [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]_\alpha^\beta$

$d'autre\ part \int_\alpha^\beta h'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{u(t)v(t)}{4t^2}dt$

$d'ou \int_\alpha^\beta \frac{u(t)v(t)}{4t^2}dt = [u(t)v'(t) - u'(t)v(t)]_\alpha^\beta$

$b -\ \ déduire\ que \int_\alpha^\beta \frac{u(t)v(t)}{4t^2}dt = u(\beta)v'(\beta) - u'(\alpha)v(\alpha)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(t)v(t)}{4t^2} dt = u(\beta)v'(\beta) - u'(\beta)v(\beta) - u(\alpha)v'(\alpha) + u'(\alpha)v(\alpha)$$

$or\ v(\beta) = v(\alpha) = 0$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{u(t)v(t)}{4t^2} dt = u(\beta)v'(\beta) - u(\alpha)v'(\alpha)$$

3°)

$a -\ \ Montrons\ que\ \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(t)\sin(t)}{4t^2} dt \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$

$\sin'(t) = \cos(t) \ \Leftrightarrow\ sin''(t) = -\sin(t) \Leftrightarrow sin''(t) + \sin(t) = 0\ \ donc\ v(t) = \sin(t)$

$est\ une\ solution\ non\ nulle\ de\ l'équation\ différentielle : y''(t) + y(t) = 0$

$v(\pi) = \sin(\pi) = 0\ et\ v(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$

$donc\ \ \pi\ et\ 2\pi\ sont\ deux\ solution\ de\ v(t) = \sin(t)$

D'après 2°) b- en déduit que

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(t)\sin(t)}{4t^2} dt = u(2\pi)cos(2\pi) - u(\pi)cos(\pi) = u(\pi) + u(2\pi)\ = \sqrt{\pi}I(\pi) + \sqrt{2\pi}I(2\pi)$$

$$= \sqrt{\pi}\left(I(\pi) + \sqrt{2}I(2\pi)\right)$$

$$I(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(tsin\theta)\, d\theta$$

$pour\ \theta \in [0,\pi]\quad 0 \le sin\theta \le 1\quad et\ \ pour\ tout\ t \in [\pi, 2\pi]\quad 0 \le tsin\theta \le t \le 2\pi$

$-1 \le \cos(tsin\theta) \le 1$

$$-1\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(tsin\theta)\, d\theta \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta$$

$$-1 \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(tsin\theta)\, d\theta \le 1 \Rightarrow\ \forall\ t\ réel\ \ -1 \le I(t) \le 1$$

$donc\ I(\pi) \le 1\ et\ \ I(2\pi) \le 1\ \ \Rightarrow I(\pi) \le 1\ et\ \ \sqrt{2}I(2\pi) \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow I(\pi) + \sqrt{2}I(2\pi) \le 1 + \sqrt{2}$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(t)\sin(t)}{4t^2} dt = \sqrt{\pi}\left(I(\pi) + \sqrt{2}I(2\pi)\right) \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$b -\ \ déduire\ que\ \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_{\pi}^{\pi}\cos(tsin\theta)d\theta\right)\frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}dt$

$On\ a\ \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{u(t)\sin(t)}{4t^2} dt \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sqrt{t}\,I(t)\sin(t)}{4t^2}dt \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{2\pi}\frac{I(t)\sin(t)}{4t\sqrt{t}}dt \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(tsin\theta)\,d\theta\right)\frac{\sin(t)}{4t\sqrt{t}}dt \le \sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

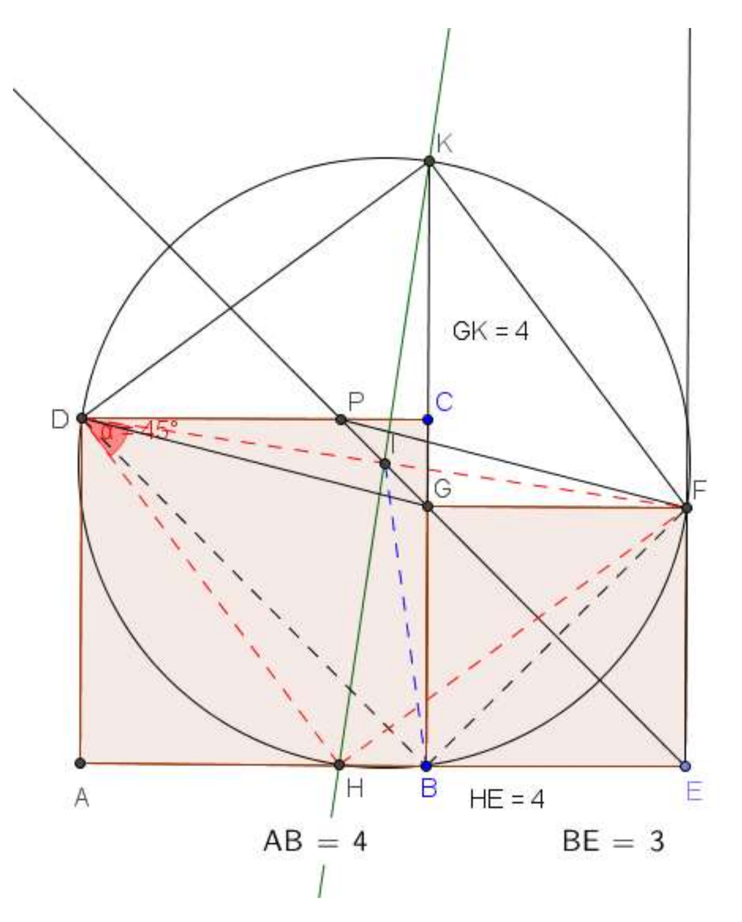
$$\Rightarrow \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(tsin\theta)\,d\theta\right)\frac{\sin(t)}{t\sqrt{t}}dt \le 4\pi\sqrt{\pi}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

EXERCICE N° 4 concours 2009

1) On a GCP triangle rectangle en C et $\widehat{GCP} = \frac{\pi}{4}$ donc GCP isocèle de sommet principal C donc CP = CG =1cm d'où DP = GF = 3cm et on a (DP)//(GF) et par suite GFCD est un parallélogramme.

$\widehat{DBF} = \widehat{DBG} + \widehat{GBF} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que le triangle BDF est rectangle en B or I le milieu de $[DF]$ donc IB = ID = IF et comme B est un point du cercle C donc les points D et F sont aussi
Ce qui prouve que le segment $[DF]$ est un diamètre de C.
Les angles $\widehat{HDB}$ et $\widehat{HFB}$ sont inscrits au cercle c et ils interceptent le même arc HB donc $\widehat{HDB} = \widehat{HFB}$

$$\widehat{ADH} = \widehat{ADB} - \widehat{HDB} = \frac{\pi}{4} - \widehat{HDB}$$
$$\widehat{DHA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ADH} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \widehat{HDB}\right) = \frac{\pi}{4} + \widehat{HDB}$$
$$\widehat{HFE} = \widehat{HFB} + \widehat{BFE} = \widehat{HFB} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \widehat{HDB}$$



On a
$DF^2 = DH^2 + HF^2$, $DH^2 = AD^2 + AH^2 = 16 + AH^2$ et $FH^2 = HE^2 + EF^2 = HE^2 + 9$

$donc\ 16 + AH^2 + HE^2 + 9 = 50 \Rightarrow AH^2 + HE^2 = 25 \Rightarrow AH^2 = 25 - HE^2$

Or AH = AE –HE= 7 - HE⇒AH² = 49 – 14 HE + HE² ⇒ $25 - HE^2$ = 49 – 14 HE + HE²⇔2 HE² – 14 HE +24 = 0

Soit $\Delta = 49 - 48 = 1$ HE = $\frac{7-1}{2} = 3$ ou HE = $\frac{7+1}{2} = 4$ Or $H \in [AB]$ donc HE $= 4$ et par suite AH = 3

DH² = AD² + AH² = 16 + 9 = 25 DH = 5 et HF² = HE² + FE² = 16+9=25 HF = 5 = DH

Conclusion H est un point de la médiatrice de $[DF]$

KGF est un triangle rectangle en G KF² = GF² + GK² = 9+16 = 25 donc KF = 5 DCK est un triangle rectangle en C

DK² = dc² + ck² +16+9= 25 donc DK = 5

Ainsi DK = FK donc K est un point de la médiatrice de $[DF]$ DK² + KF² = 25+25=50 = DF²

Donc DFK est un triangle rectangle en K et on a DFH lui aussi un triangle rectangle en H donc DHFK est carré de coté DH = 5