**Concourt 2010**

**Exercice N°1**

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (A, ) on considère un quadrilatère convexe ABCD et on désigne par b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.
2. Justifier que :
3. En déduire que : ADBC +ABCD ACBD



1. Montrer que le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si

ADBC +ABCD ACBD



1. Soit MNPQ un parallélogramme. Un cercle passant par M recoupe les segments , et respectivement en N’ , P’ et Q’.

Montrer que MNMN’ +MQMQ’ MPMP’



**Exercice N°2**

Soit ABC un triangle et P un point à l’intérieur de ce triangle.

Les droites (PA) , (PB) et (PC) coupent respectivement (BC) , (AC) et (AB) en A’ , B’ et C’

On désigne par α, β et les aires respectives des triangles PBC, PAC et PAB.

1. a) Montrer que
2. En déduire que A’ est le barycentre des points pondérés (B ; ) et (C ; )
3. Montrer que P est le barycentre des points pondérés ( A ; α ) (B ; ) et (C ; )
4. On pose
5. Exprimer S en fonction de α, β et .
6. Montrer que
7. Déterminer la position de P pour laquelle la somme S est minimal.

**EXERCICE N°3**

Soit f une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur et telle que f(a) = f(b) = 0.

1. Soit x0 , on considère la fonction

Calculer et et en déduire qu’il existe un réel , tel que

1. Soit g une fonction deux fois dérivable sur l’intervalle sur telle qu’il existe deux réels m et M tels que pour tout on ait
2. Montrer que pour tout x

b)

1. En appliquant la relation à la fonction ln surl’intervalle sur
2. On pose pour tout entier naturel non nul n, et pour entier naturel
3. Montrer que la suite est croissante et que la suite est décroissante.
4. En déduire que les suites et ont la meme limite l et que l’on a pour tout entier naturel ,
5. On considère la suite définie sur par et pour tout entier naturel non nul n,



1. Montrer que la suite est décroissante.
2. Calculer et montrer que pour tout entier naturel
3. En déduire les expressions de et en fonction de n

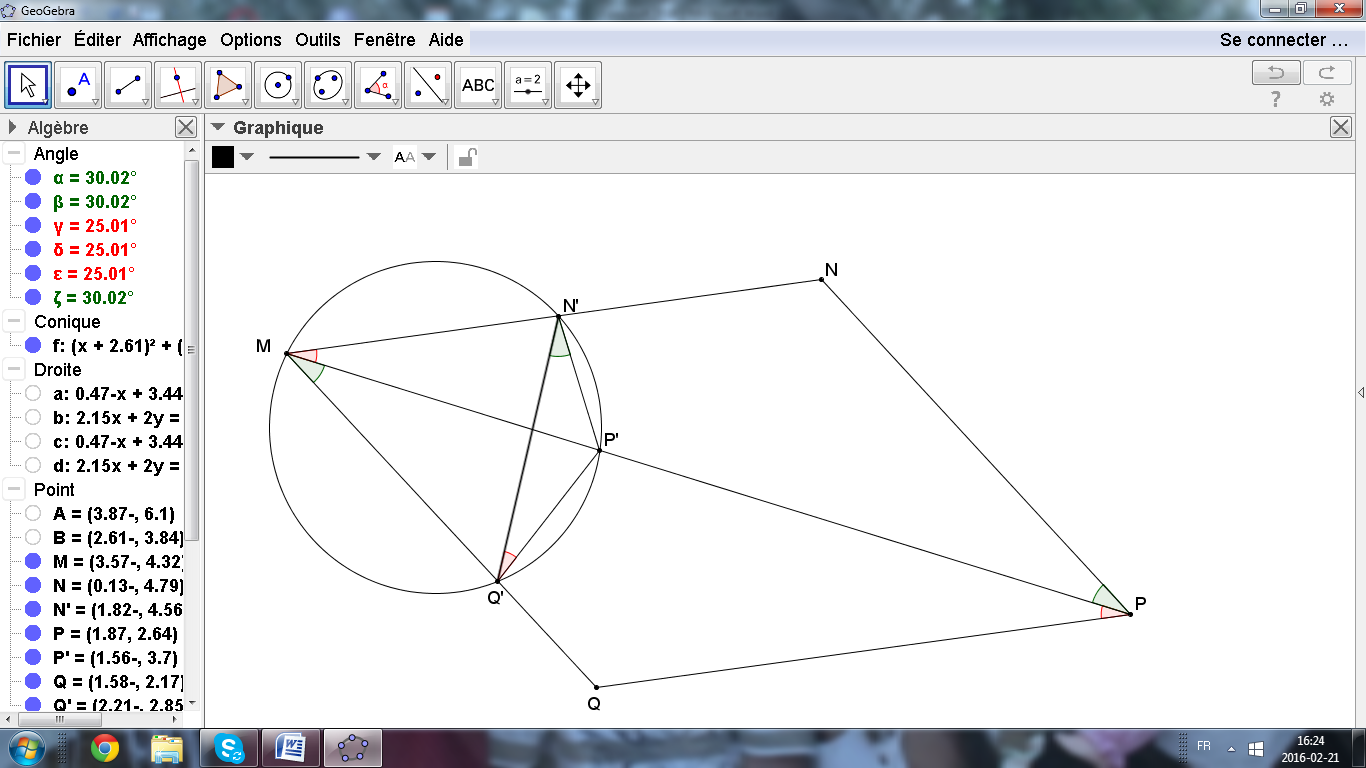
**Concourt 2010 Solution**

**EXERCICE N°1**

1. a)
2. on a

le quadrilatère ABCD est inscriptible si et seulement si

D’où



Les points M;N’ ; P’ et Q’ sont cocycliques donc

MNPQ est parallélogramme (MN) //(PQ) et (MQ) // (NP) donc

Et par suite

Ainsi les triangles P’N’Q’ et NMP sont semblables donc

Donc

Or MN’P’Q’ est inscriptible donc

MP’ N’Q’ = MQ’ N’P’ +MN’P’Q’



**Exercice N° 2**

|  |  |
| --- | --- |
| donc |  |

Et par suite le point A’ est le barycentre des points pondérés

Montrons que P est le barycentre des points pondérés

* On Montrer que P est le barycentre des points pondérés

A’ est le barycentre des points pondérés donc

Devient et comme

Donc P est le barycentre des points pondérés .

On pose

S est minimal S = 6

P est le centre de gravité de triangle ABC.

**EXERCICE N°3**

* f est une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur et donc est continue est dérivable sur et on a il existe donc un réel tel que
* de même est continue est dérivable sur et on a il existe donc un réel tel que
* f est une fonction, définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle sur et on a

donc est continue est dérivable sur et on a il existe donc un réel tel que

On a

Or

1. Soit g une fonction deux fois dérivable sur l’intervalle sur telle qu’il existe deux réels m et M tels que pour tout on ait
2. Montrons que pour tout

Soit On pose

est deux fois dérivable sur l’intervalle sur vérifiant :

D’après la question 1

Pour tout il existe un réel telle que

On a pour tout on ait donc

La relation reste vraie pour x= a ou x= b

Ainsi pour tout on a

b)

**on a**

donc



Donc

1. En appliquant la relation à la fonction ln surl’intervalle sur

La fonction ln esr deux fois dérivable sur Pour tout x de ln’’(x) = -

D’après la relation ( 1 )

1. On pose pour tout entier naturel non nul n, et pour entier naturel
2. Montrer que la suite est croissante et que la suite est décroissante.

Donc la suite est croissante

Donc la suite est décroissante.

1. En déduire que les suites et ont la meme limite l et que l’on a pour tout entier naturel ,

On a pour tout entier naturel

La suite est alors une suite croissante et majorée elle est donc convergente soit l sa limite

La suite est alors une suite décroissante et minorée elle est donc convergente

La suite est converge vers l est elle est croissante

La suite est converge vers l est elle est décroissante

D’où pour tout entier n on a

1. 5) On considère la suite définie sur par et pour tout entier naturel non nul n,
2. Montrer que la suite est décroissante.

Donc La suite est décroissante

1. Calculer et montrer que pour tout entier naturel

On pose et

*Donc*

1. En déduire les expressions de et en fonction de n