CONCOUR 2011

EXERCICE N°1

*Soit a et b deux réels tels que a<b*

*A/ Soit deux fonctions continues sur telles :*

*. pour tout réel x appartenant à ,*

*Il existe un réel x0 appartenant à ,*

*Montrons qu’il existe un réel α appartenant à , tel que*

*est une fonction continue sur il existe deux réel M et m tels que pour tout réel x appartenant à ,*

Or *pour tout réel x appartenant à , donc*

Comme *Il existe un réel x0 appartenant à , et pour tout réel x appartenant à , Alors*

*la relation ( 1) Devient*

Il existe donc un réel *α appartenant à tel que d’où*

*B/ soient f et g deux fonctions définies sur tells que :*

*. g est continue sur .*

*. f est dérivable et strictement croissante sur et sa fonction dérivée est continue sur .*

*On désigne par G la primitive de g sur qui s’annule en a.*

1. *Justifie que*
2. *En déduire qu’il existe un réel c de tel que*
3. *Puisque f est dérivable sur et sa fonction dérivée est continue sur*

*et g est continue sur donc d’après le théorème d’intégration par partie on a*

1. *f est dérivable et strictement croissante sur donc f vérifie*

*pour tout réel x appartenant à ,*

*Il existe un réel x0 appartenant à ,*

*et comme g est continue sur d’après la partie A il existe un réel c appartenant à tel que*

*EXERCICE N° 2*

1. *Soit p un nombre premier et k*

*Montrons que p divise*

*Donc*

1. *Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et p premier*

*Montrons que*

*Pour n = 1 vraie*

*On suppose que est vraie*

*Donc pour tout entier supérieur ou égal à 1 et p premier*

1. *Si est un entier négatif et non nul alors (-n) donc donc*

*On a aussi donc pour tout entier on a pour tout i = 1, 2,…., N*

Exercice N°3

|  |  |
| --- | --- |
| C est un cercle de centre O et de rayon R et O un point du plan  Une droite passant par O coupe le cercle C en A et B   1. Montrons que . est un nombre constant p qu’on précisera.   La droite (OI) coupe le cercle C en B’ et A’.  Les triangle OAB’ et OA’B sont semblables en effet deux angles inscrits au cercle C et interceptent le même arc BB’ et  Donc  Donc . = . =( OI +IA’).(OI-IB’)=OI² -R² = p |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Le triangle OTI est rectangle en T d’après Pythagore  OT² = OI² - R² =p  II/  Soit O un point du plan et  I(O,k) :  M M’ tel que . = k   1. Montrons que I(O,k)  est bijective.   I(O,k)(M) =M’ M’ et . =k  M et . =k I(O,k)(M’) =M  I(O,k)  est bijective et sa réciproque est elle-même.   1. I(O,k)(M) =M . =k OM =   L’ensemble des points invariant par I(O,k) est le cercle de centre o et de rayon   1. I(o,k)(A) = A’ A’ et . =k   I(o,k)(B) = A’ B’ et . =k  On O donc les points A, B et A’ ne sont pas alignés.  Soit C le cercle passant par les points A, B et A’  Et on pose B’’ l’autre point d’intersection de C et la droite (OB)  On a . = .  Or . = .  donc . = . = et B’’ sont confondues et par suite B’ est un point de C. |  |

1. Soit et h(O,) l’homothétie de centre O et de rapport

Soit M’ = I(o,k)(M) et M’’ = h(O,)(M’)

I(O,k)(M) =M’ M’ et . =k

M’’ = h(O,)(M’)

M’’ et .

On a alors M’ et M’’ donc M’’ .

. Ainsi M’’ et donc

I(O,k)(M) = M’’= h(O,)(M’) = h(O,)o I(o,k)(M)

Ce qui prouve que h(O,)o I(o,k) = I(O,k)

1. Si D une droite passant par O

* Si M un point de D

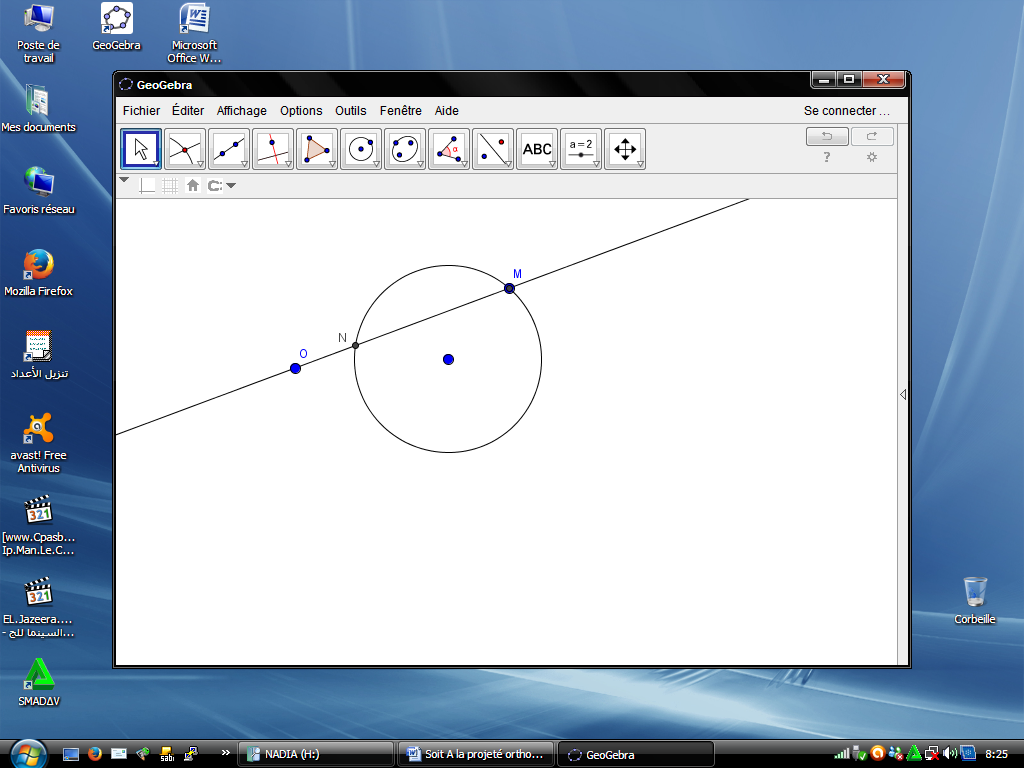
I(O,k)(M) =M’ M’ M’ est un point de D

* Si M’ et un point de D et tel I(O,k)(M) =M’ I(O,k)(M’) =M M M est un point de D

Donc I(O,k)( D) =D

|  |  |
| --- | --- |
|  | Si D une droite et telle que OD  Soit A la projeté orthogonal de O sur la droite D et A' son image par I(O,k).  M un point de D et M' son image par I(O,k).  Le point O *les points A, A’ ,M et M’ sont sur un même cercle C donc*  *or M*  *le triangle OM’A’ et rectangle en M’ le point M’ est un point du cercle C’ de diamètre*  Ainsi I(O,k)( D ) =C |

|  |  |
| --- | --- |
|  | - Soit C un cercle de centre J passant par le point O  La droite (OJ) recoupe le cercle C en A.  Soit A' l'image de A par I(O,k)  Le point A' est un point de la droite (OJ)  Soit D la perpendiculaire à (OJ) en A'  On a |

* Soit C un cercle de centre J ne passant pas par le point O.
* 
* Si la puissance p du point o par rapport au cercle C est égale k alors I(o,k)(C ) = C
* Si la puissance p du point o par rapport au cercle C est différente de k

Soit M un point de C et N le deuxième point d’intersection de la droite (OM) et de C

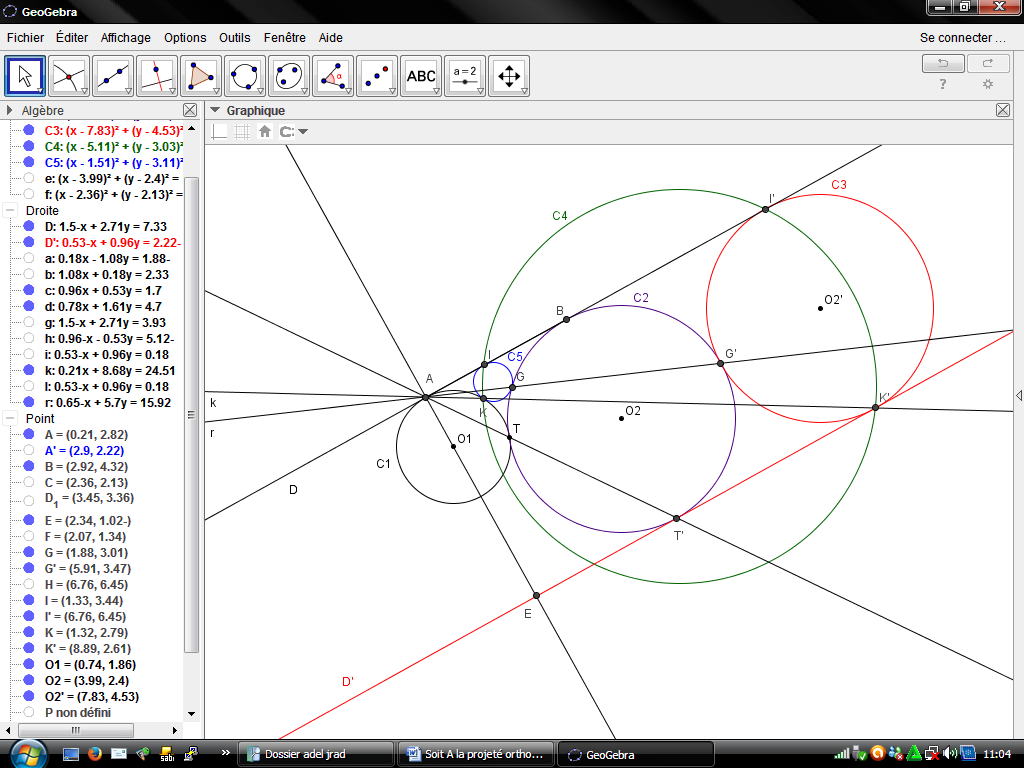
I(O,k)(M) =M’ M’ et . =k

or . =p et N

Les points O M, M’ et N sont donc alignés et on a . =k et a . =p

|  |  |
| --- | --- |
| *D passe par A donc f(D) = D*  *T' = f(T) donc T' (AT) or T C2 donc T' est le point d'intersection de (AT)et de C2 autre que T*  *Donc T' = B*  *C1 passe par A son image par f est la droite D' perpendiculaire à la droite (AO1) en T'* |  |

*c)*

**

*Soit C3 le cercle tangente à C2 à la droite D' et à la droite D*

*On pose K' le point de contact de C3 et la droite D'; la droite (AK') recoupe C1 en K*

*Donc f(K) =K'*

*On pose G' le point de contact de C3 et le cercle C2; la droite (AG') recoupe C2 en G*

*Donc f(G) = G'*

*On pose I' le point de contact de C3 et la droite D et I' = f(I)*

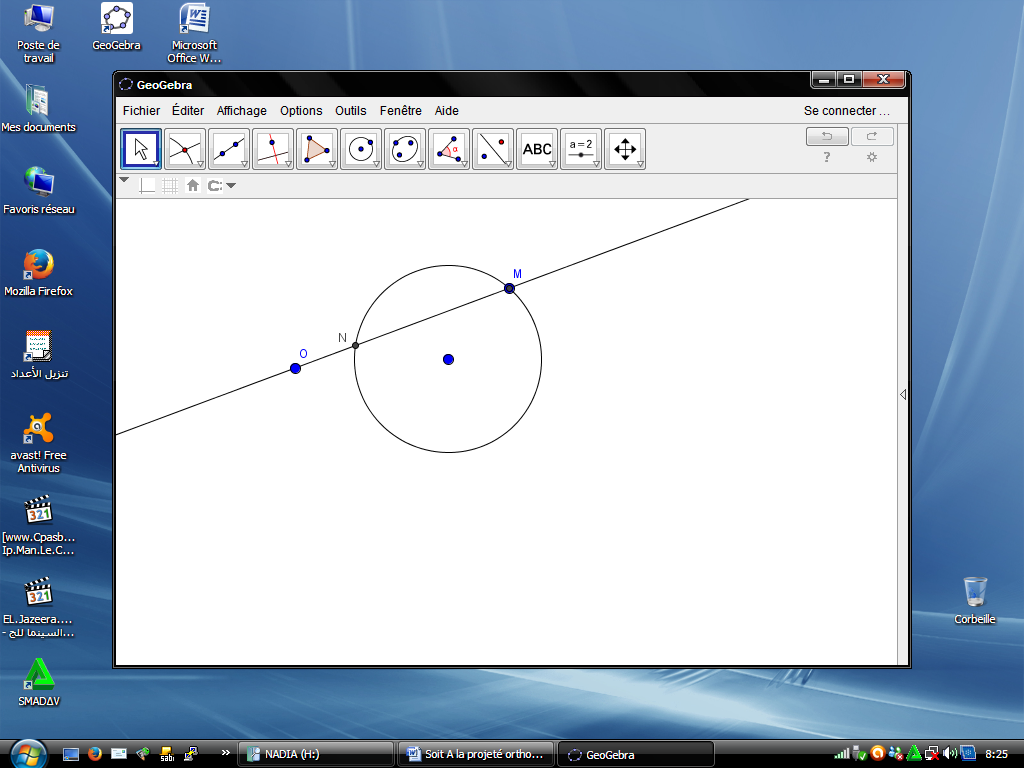
*On a f(K) =K' et f(I)= I' donc K, K', I et I' sont dans un même cercle C4, I' est donc le point d'intersection de (AI) et le cercle C4*

*Le cercle C5 passant par K', G' et I' est l'image de C3 par f.*

*C5 est tangente aux cercle C1 et C2 et à la droite D Puisque son image C3 par f et tangente aux droites D et D' et à C2.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | Soit A la projeté orthogonal de O sur la droite D et A' son image par I(O,k).  M un point de D et M' son image par I(O,k).  Le point O *les points A,A' ,M et M' sont sur un même cercle C donc*    *or M*  *le triangle OM'A' et rectangle en M' le point M' est un point du cercle C' de diamètre* |

|  |  |
| --- | --- |
|  | - Soit C un cercle de centre J passant par le point O  La droite (OJ) recoupe le cercle C en A.  Soit A' l'image de A par I(O,k)  Le point A' est un point de la droite (OJ)  Soit D la perpendiculaire à (OJ) en A'  On a  donc  - Soit C un cercle de centre J ne passant pas par le point O. |



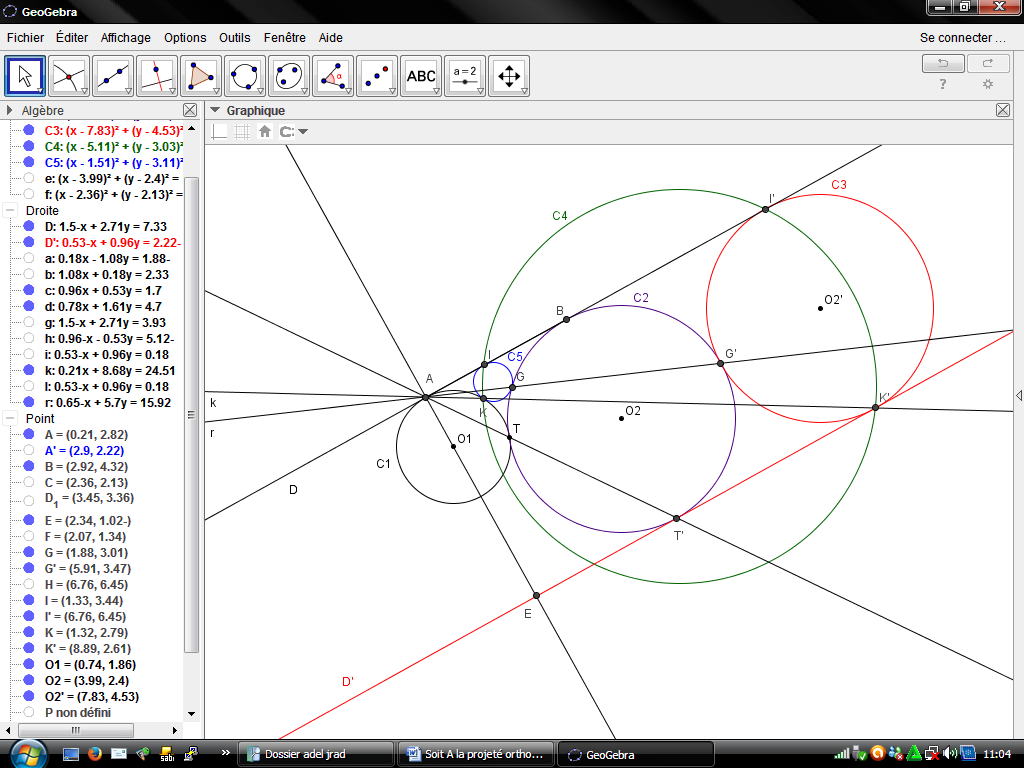
*I(O,k)(M)=M'*

*On a*

*Les points M N ; M' et N sont alignées et donc*

|  |  |
| --- | --- |
| *D passe par A donc f(D) = D*  *T' = f(T) donc T' (AT) or T C2 donc T' est le point d'intersection de (AT)et de C2 autre que T*  *Donc T' = B*  *C1 passe par A son image par f est la droite D' perpendiculaire à la droite (AO1) en T'* |  |

*c)*

**

*Soit C3 le cercle tangente à C2 à la droite D' et à la droite D*

*On pose K' le point de contact de C3 et la droite D'; la droite (AK') recoupe C1 en K*

*Donc f(K) =K'*

*On pose G' le point de contact de C3 et le cercle C2; la droite (AG') recoupe C2 en G*

*Donc f(G) = G'*

*On pose I' le point de contact de C3 et la droite D et I' = f(I)*

*On a f(K) =K' et f(I)= I' donc K, K', I et I' sont dans un même cercle C4, I' est donc le point d'intersection de (AI) et le cercle C4*

*Le cercle C5 passant par K', G' et I' est l'image de C3 par f.*

*C5 est tangente aux cercle C1 et C2 et à la droite D Puisque son image C3 par f et tangente aux droites D et D' et à C2.*