REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

1 ^{ère} *épreuve*

CONCOURS DE RECRUTEMENT D' INSPECTEURS DES ECOLES PREPARATOIRES ET LYCEES SECONDAIRES

SESSION 2002

MATHEMATIQUES — **Durée : 4 Heures** — **Coef. : 1 ½**

Travail à faire

1. Lire attentivement le texte intitulé "Formules de sommation"
2. Prouver l'application No 2 page 2
3. Traiter les exercices No 1 et No 2 page 3
4. Traiter le problème

Problème

Dans ce problème, on adopte les notations suivantes

Les lettres a, d, m, n désignent des entiers, la notation d/n signifie d divise n et on désigne par $(a,d) = pgcd(a,d)$. On considère les fonctions arithmétiques multiplicatives suivantes :

La fonction μ de Möbius définie par

$$\mu(p^v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 0 \\ -1 & \text{si } v = 1, \\ 0 & \text{si } v > 1, \end{cases}$$

La fonction identité j définie par

$$j(n) = n \quad (n \geq 1).$$

La fonction δ définie par

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

La fonction unité définie par

$$1(n) = 1 \quad (n \geq 1)$$

1. Vérifier que l'on a
$$1 * \mu = \delta$$

2. On désigne par φ la fonction indicatrice d'Euler définie par
$$\varphi(n) = card\{1 \leq m \leq n, \quad (m,n) = 1\}$$
   a) Déterminer $\varphi(25), \varphi(72), \varphi(256)$.
   b) Prouver que chaque rationnel $\frac{m}{n}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\frac{a}{d}$ avec d/n et $(a,d) = 1$

3. Montrer que pour toute fonction de la variable réelle F on a
$$\sum_{1 \leq m \leq n} F(\frac{m}{n}) = \sum_{d/n} \sum_{\substack{1 \leq a \leq d \\ (a,d)=1}} F(\frac{a}{d})$$

4. En déduire que l'on a pour tout $n \geq 1$

$$n = \sum_{d/n} \varphi(d)$$

5. Montrer que $\varphi = \mu * j$ (on pourra utiliser 1)). et en déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\varphi(n) = n \prod_{p/n} (1 - \frac{1}{p})$$

Formules de sommation

Notations

Dans ce texte, nous adopterons les notations suivantes :

- Les lettres $p, p_1, p_2, \ldots$ désignent des nombres premiers.
- Les lettres $d, k, n, \ldots$ désignent des entiers.
- Le symbole $d \mid n$ signifie que d divise n.
- Le symbole $p^k \parallel n$ signifie que p^k divise n et que p^{k+1} ne divise pas n.
- Pour tout réel x, on désigne par $[x]$ la partie entière de x et par $\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire.
- Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de l'infini, on dit que f est un grand O de g, et on écrit $f = O(g)$ s'il existe $M > 0$, $A > 0$ tels que :

$$x > A \Rightarrow \mid f(x) \mid \leq M \mid g(x) \mid$$

I- Estimation de sommes de fonctions arithmétiques.

On appelle fonction arithmétique toute fonction définie sur $\mathbf{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Théorème 1 : Lemme d'intégration par parties.

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1, g une fonction arithmétique et $G : [a, b] \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $G(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$. On a :

$$\sum_{a<n\leq b} g(n)f(n) = G(b)f(b) - G(a)f(a) - \int_a^b G(t)f'(t)dt$$

◇ Preuve : De l'égalité $\int_n^b f'(t)dt = f(b) - f(n)$, on déduit que :

$\sum\limits_{a<n\leq b} g(n)f(n) = f(b) \sum\limits_{a<n\leq b} g(n) - \sum\limits_{a<n\leq b} g(n) \int_n^b f'(t)dt$

et cela donne :

$\sum\limits_{a<n\leq b} g(n)f(n) = f(b)\{G(b) - G(a)\} - \int_a^b f'(t) \sum\limits_{a<n\leq t} g(n)dt$

Le théorème en découle. ◇

Applications

1) Pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} = Logx + \gamma + O(\frac{1}{x})$$

où γ est la constante d'Euler définie par :

$$\gamma = 1 + \int_1^\infty \frac{[t]-t}{t^2}dt$$

$\diamond$ Preuve : En appliquant le théorème aux fonctions $t \mapsto f(t) = 1/t$ et $n \mapsto g(n) = 1$, on obtient :

$$\sum_{1<n\leq x} \frac{1}{n} = \frac{[x]}{x} - 1 + \int_1^x \frac{[t]}{t^2}dt$$

ou encore, puisque $x = [x] + \{x\}$,

$$\sum_{1\leq n\leq x} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^x \frac{[t]-t}{t^2}dt + Logx - \frac{\{x\}}{x}$$

et cela permet de conclure. $\diamond$.

2) Pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\sum_{n\leq x} Logn = xLogx - x + O(Logx)$$

II- Fonctions multiplicatives et produit de convolution.

Une classe de fonctions arithmétiques joue un rôle important : les fonctions multiplicatives. On dit qu'une fonction arithmétique f est multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux.

La condition $f(1) = 1$ permet d'exclure la fonction identiquement nulle des fonctions multiplicatives et il est clair qu'une fonction multiplicative est complètement déterminée par ses valeurs sur les puissances des nombres premiers. En effet si $n = \prod_{i=1}^k p_i^{d_i}$ est la décomposition de n en facteurs premiers alors $f(n) = \prod_{i=1}^k f(p_i^{d_i})$.

Exemples de fonctions multiplicatives.

1) La fonction arithmétique 1 définie par $1(n) = 1$ pour tout n.

2) La fonction arithmétique δ définie par $\delta(n) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon.

3) La fonction de Möbius définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est un produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{si } n \text{ contient des facteurs carrés.} \end{cases}$$

4) La fonction diviseur τ comptant le nombre de diviseurs d'un entier et définie par :

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

Exercice 1
1) Calculer $\mu(30)$, $\mu(24)$, $\mu(1998)$, $\tau(16)$, $\tau(125), \tau(2000)$.
2) Montrer que μ et τ sont multiplicatives.

On munit l'ensemble des fonctions multiplicatives d'une loi de composition, notée $*$, appelée produit de convolution de Dirichlet et définie par :

$$f * g(n) = \sum_{dm=n} f(d)g(m) \ , \ n \geq 1$$

Exercice 2
Montrer que $\tau = 1 * 1$ et $\delta = 1 * \mu$.

Théorème 2 : Formule de l'hyperbole.
Soit f et g deux fonctions multiplicatives et $h = f * g$ et pour $x \geq 2$:

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \ , \ G(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$$

Alors si $1 \leq y \leq x$ on a :

$$\sum_{n \leq x} h(n) = \sum_{n \leq y} f(n)G(\frac{x}{n}) + \sum_{n \leq x/y} g(n)F(\frac{x}{n}) - F(y)G(\frac{x}{y})$$

◇ Preuve : On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} h(n) &= \sum_{n \leq x} \left\{ \sum_{md=n} f(d)g(m) \right\} \\ &= \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{md=n \\ d \leq y}} f(d)g(m) + \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{md=n \\ d > y}} f(d)g(m) \\ &= \sum_{d \leq y} f(d)G(\tfrac{x}{d}) + \sum_{m \leq x/y} g(m) \sum_{y < d \leq x/m} f(d) \end{aligned}$$

et le théorème en découle.◇

Application : Formule de Dirichlet.
Montrer que pour $x \geq 2$, on a :

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = xLogx + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$