REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

2 ème épreuve

CONCOURS DE RECRUTEMENT D' INSPECTEURS DES ECOLES PREPARATOIRES ET LYCEES SECONDAIRES

SESSION 2003

MATHEMATIQUES ✦✦✦ **Durée : 4 Heures** ✦✦✦ **Coef. : 1 ½**

Exercice 1.

1) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0 = 0\,, x_1 = 1$ et $x_{n+2} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}x_{n+1}$ converge et déterminer sa limite.

2) Montrer que la suite (y_n) définie par $y_0 = a\,, y_1 = b$ et $y_{n+2} = \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}y_{n+1}$ converge et déterminer sa limite en fonction des réels a et b.

3) Montrer que la suite (z_n) définie par

$$z_0 = 1\ ,\ z_1 = \frac{4}{3}\ ,\ z_{n+2}^3 = z_n\, z_{n+1}^2$$

est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Soit ABC un triangle non isocèle de côtés $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1) Les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupent la droite (BC) respectivement en I et J.

1a) Montrer que I est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, c).

1b) Que dire du point J ?

1c) Montrer que

$$IB = \frac{ac}{b+c}\ ,\ IC = \frac{ab}{b+c}$$

2) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $bMB = cMC$ est le cercle $\mathcal{C}_A$ de diamètre $[IJ]$.

Ce cercle $\mathcal{C}_A$ est appelé cercle d'Apollonius du segment $[BC]$.

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$aMA = bMB = cMC$$

4) Soit M un point du plan n'appartenant pas au cercle circonscrit au triange ABC ; on désigne par A', B' et C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB).

4a) Montrer que l'on a

$$A'B' = CM \sin\widehat{C}\ ,\ B'C' = AM \sin\widehat{A}\ ,\ C'A' = BM \sin\widehat{B}$$

4b) En déduire l'ensemble des points M du plan pour lesquels le triangle $A'B'C'$ est équilatéral.

Problème.

Notations. Si t est un nombre réel alors on désignera par $\lfloor t \rfloor$ sa partie entière et par $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ sa partie fractionnaire.

Soit b un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel dans l'intervalle $[0, 1[$.

1) On pose $\varepsilon_1(x) = \lfloor bx \rfloor$ et $x_1 = \{bx\}$. Montrer que $\varepsilon_1(x)$ est un entier naturel au plus égal à $b-1$ et que

$$x = \frac{\varepsilon_1(x)}{b} + \frac{x_1}{b}$$

2) On pose, par récurrence sur $n \geq 2$, $\varepsilon_n(x) = \lfloor bx_{n-1} \rfloor$ et $x_n = \{bx_{n-1}\}$. Montrer que l'on a, pour tout n,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i(x)}{b^i} + \frac{x_n}{b^n}$$

et en déduire que x admet "l'écriture en base b" suivante

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(x)}{b^i} \ , \ \varepsilon_i(x) \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$$

3) Que dire de x s'il existe un entier n tel que $x_n = 0$?

4) On suppose dans cette question que $b = 5$ et que

$$\varepsilon_1(x) = 0, \ \varepsilon_2(x) = 2, \ \varepsilon_3(x) = \varepsilon_4(x) = 1 \ , \ \varepsilon_5(x) = 4 \ , \ x_5 = x_2$$

Que vaut alors x ?

5) Montrer que s'il existe n tel que $x_n \in \{x, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ alors l'écriture en base b de x est périodique à partir d'un certain rang et que x est rationnel.

6) Soit a un entier naturel premier avec b et $x = a^{-1}$.

6a) On considère la division euclidienne de b par a :

$$b = aq_1 + r_1 \ , \ 0 \leq r_1 \leq a-1$$

Montrer que r_1 est non nul et exprimer $\varepsilon_1(x)$ et x_1 en fonction de q_1 et r_1.

6b) On définit les entiers q_n et r_n , par récurrence sur $n \geq 2$, en posant

$$br_{n-1} = aq_n + r_n \ , \ 0 \leq r_n \leq a-1$$

Montrer que r_n est non nul et exprimer $\varepsilon_n(x)$ et x_n en fonction de q_n et r_n.

6c) En déduire que

$$\frac{1}{a} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{b^i} \ , \ 0 \leq q_i \leq b-1$$

6d) Montrer que r_n est aussi le reste de la division euclidienne de b^n par a et en déduire que si $r_{n+m} = r_m$ alors $r_n = 1$.

6e) En déduire que l'écriture de a^{-1} en base b est périodique.

7) Applications : Donner les écritures de

7a) $\frac{1}{8}$ en base 11, 7b) $\frac{1}{19}$ en base 10, 7c) $\frac{1}{7}$ en base 13, 7d) $\frac{1}{12}$ en base 13

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

1 ère épreuve

**CONCOURS DE RECRUTEMENT D' INSPECTEURS
DES ECOLES PREPARATOIRES ET LYCEES SECONDAIRES**

SESSION 2003

MATHEMATIQUES | **Durée : 4 Heures** | **Coef. : 1 ½**

Travail à faire

1. Lire attentivement le texte intitulé "formes quadratiques".
2. Traiter les exercices 1 et 2.
3. Traiter le problème.

Exercice 1

Soit $\varphi(x,y) = 75x^2 + 30xy + 3y^2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $\varphi(x,y) = 6$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $\varphi(x,y) = 147$.
3. Pour quelles valeurs de m, $\varphi(x,y) = m$, admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2

Soit $\varphi(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $\varphi(x,y) = 7$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $\varphi(x,y) = 15$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $\varphi(x,y) = 22$.
4. Montrer que φ représente les multiples de 49 et aucun autre multiple de 7.
5. Montrer que φ représente tous les entiers de la forme $7t + 4$.

Problème

On considère la forme quadratique $\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $PGCD(a,b,c) = 1$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}$.

Partie A

1. **a.** Vérifier que Δ n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$.

   b. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul f et un entier relatif d tel que $\Delta = f^2 d$ et d sans facteur carré.

2. On pose $\Delta = f^2 d$.

   Si $d > 0$ on désigne par $\sqrt{d}$ l'unique réel positif tel que $\left(\sqrt{d}\right)^2 = d$.

   Si $d < 0$ on désigne par $\sqrt{d}$ le nombre complexe $i\sqrt{-d}$.

   Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Montrer que K est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ de dimension 2.

3. A tout $z = r + s\sqrt{d} \in K$ on associe $\overline{z} = r - s\sqrt{d}$.
   Soit $W(z) = z\overline{z}$. Vérifier que pour tout $(z, z') \in K^2$, $W(zz') = W(z)W(z')$.

4. Soit $\alpha = \dfrac{-b + f\sqrt{d}}{2}$. On pose $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha = \{r + s\alpha \text{ avec } (r,s) \in \mathbb{Z}^2\}$.

   a. Montrer que M est un aneau unitaire.

   b. Vérifier que si $z = r + s\alpha$ alors $\overline{z} = r + s\overline{\alpha}$.

   c. Montrer que $W(r - s\alpha) = \dfrac{\varphi(r,s)}{a}$ pour $z = r + s\alpha \in M$.

Partie B

Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, $E : x^2 + xy + y^2 = 7$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $1 + z + z^2 = 0$. On désigne par j la solution dont la partie rélle est négative.

2. Vérifier que si (x, y) est solution de E alors $W(x - yj) = 7$.

3. Soit $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$.

   a. Vérifier que pour tout $z \in M$, $W(z) \in \mathbb{Z}$.

   b. Soit G_M le groupe des éléments inversibles de M.
   Montrer que $G_M = \{w \in M \mid W(w) = \pm 1\}$.

   c. En déduire tous les éléments de G_M.

4. Deux éléments z et z' de M sont dits associés si et seulement si il existe $w \in G_M$ tel que $z' = wz$.
   On désigne par $\mathfrak{R}$ la relation definie sur $M \times M$ par $z\mathfrak{R}z'$ si et seulement si z et z' sont associés.

   a. Vérifier que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.

   b. Déterminer la classe de $z_0 = 1 - 2j$.

   c. Soit $z \in M$ tel que $W(z) = 7$. Que peut-on dire de $W(z')$ si z' appartient à la classe de z.

5. Déterminer alors les solutions de $x^2 + xy + y^2 = 7$ dans $\mathbb{Z}^2$.