REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Concours d'entrée au cycle de formation pour le recrutement d'inspecteurs des écoles préparatoires et lycées secondaires

(Session 2004)

Epreuve : MATHEMATIQUES ⁎ Durée : 4 Heures ⁎ Coef. : 3

Exercice 1

La lettre n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dit que deux entiers relatifs x et y sont congrus modulo n, lorsque $x - y$ est un élément de $n\mathbb{Z}$. On écrit alors $x \equiv y\,[n]$.
La relation ainsi définie est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.
L'ensemble quotient sera noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
L'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont définies de la façon suivante
$\forall\,(\overline{x}, \overline{y}) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x}.\overline{y} = \overline{xy}$, et confèrent à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ une structure d'anneau commutatif.

1- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps commutatif.

2- On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par $\varphi(n)$ le nombre d'éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que a et n soient premiers entre eux.
Montrer que $a^{\varphi(n)} \equiv 1\,[n]$.

3- Montrer que
n est un nombre premier si et seulement si $(n-1)! \equiv -1\,[n]$.

4- Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 6, on a
si $n-1$ est premier alors $(n-2)! \equiv -1\,[n-1]$;
si $n-1$ n'est pas premier alors $(n-2)! \equiv 0\,[n-1]$.

5- Soit m un entier strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que $\left(\dfrac{n^m - 1}{n-1} - m\right)$ est divisible par $(n-1)$.

6- Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, tel que $m \geq 1$ et $n \geq 2$.
Montrer que si $(n-1)! + 1 = n^m$ alors $(n-2)! \equiv m\,[n-1]$.

7- Déterminer tous les couples d'entiers (m, n) solutions de l'équation
(E) : $(n-1)! + 1 = n^m$ où $m \geq 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que $U_n = o(V_n)$ lorsque $n \to +\infty$, s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et telle que $U_n = \varepsilon_n V_n$.
On dit que U_n et V_n sont équivalentes lorsque $n \to +\infty$ et on note $U_n \backsim V_n$ lorsque $U_n - V_n = o(V_n)$ $n \to +\infty$.

Première partie

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

1- Etablir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

2- En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Deuxième partie

Soit $a > 0$ et f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que f soit de classe C^2 sur $[0,1]$; $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$, $\alpha = -\dfrac{1}{2} f''(0) \neq 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $f(x) < 1$.

1- Montrer que $\alpha > 0$.

2- Soit $a < 1$.

Montrer que $\int_0^a (1-u^2)^n du \backsim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ lorsque $n \to +\infty$.

3- Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K_n = \int_0^1 f^n(x)dx$ et $U_n = \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n\alpha}}\right)^{-1}$.

a- Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < a < 1$, tel que pour tout $0 \leq x \leq a$;
$1 - (\alpha+\varepsilon)x^2 \leq f(x) \leq 1 - (\alpha - \varepsilon)x^2$.

b- En déduire que
$U_n \left(\int_0^a (1-(\alpha+\varepsilon)x^2)^n dx - k^n\right) \leq U_n K_n \leq U_n \left(\int_0^a (1-(\alpha-\varepsilon)x^2)^n dx + k^n\right)$,
où $k = \sup\limits_{a\leq t\leq 1} |f(t)|$.

c- Donner alors un équivalent de K_n lorsque $n \to +\infty$.

5- Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $V_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^n e^{-x}x^n$.

Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 tout

Dans tout cet exercice, P désigne un plan affine euclidien orienté, $R = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé direct de P. Les coordonnées et les affixes des points de P (respectivement des vecteurs du plan vectoriel associé) sont définis par rapport au repère R (respectivement à la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$).

Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$, et θ un nombre réel. On rappelle que θ est une mesure de l'angle orienté du couple de droites (D_1, D_2) si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2}) \equiv \theta\,[\pi]$.

Etant donné trois droites D; D_1 et D_2 du plan P, on dit que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si les angles orientés des couples de droites (D, D_1) et (D, D_2) ont des mesures opposées modulo π.

Première partie

1- Soit $Q(X) = a_0X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X + a_4$ un polynôme de degré 4 à coéfficients complexes a_j, $0 \leq j \leq 4$.

On note x_1, x_2, x_3 et x_4 ses quatre racines complexes, distinctes ou non , et on pose:

$$\sigma_1 = \sum_{1\leq j\leq 4} x_j, \quad \sigma_2 = \sum_{1\leq j<k\leq 4} x_jx_k, \quad \sigma_3 = \sum_{a\leq j<k<l\leq 4} x_jx_kx_l, \quad \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4.$$

Exprimer σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 en fonction des coefficients a_0, a_1, a_2, $a_3$et a_4.

2- Soit D_1 et D_2 deux droites de P de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$. On note z_1 et z_2 les affixes respectives de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$. Soit θ un nombre réel.

Donner une propriété du nombre complexe $\frac{z_2}{z_1}e^{-i\theta}$ qui soit équivalente à l'égalité: $(D_1, D_2) \equiv \theta\,[\pi]$.

3- Soit $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Préciser la nature et les éléments de la transformation ϕ du plan P définie analytiquement dans le repère R par la représentation : $x' = \lambda x + \alpha$, $y' = \lambda y + \beta$.

Deuxième partie

1- Soit trois droites D; D_1 et D_2 du plan P, $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de D d'affixe z, $\overrightarrow{v}_j$ un vecteur directeur de D_j d'affixe z_j, $1 \leq j \leq 2$.

a- Montrer que D_1 et D_2 sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si $\frac{z_1z_2}{z^2}$ est réel.

b- En déduire que lorsque D_1 et D_2 sont parallèles, elles sont symétriquement inclinées sur D si et seulement si, elles sont soit parallèles à D, soit perpendiculaires à D.

Voir suite au verso →

2- Soit A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre points dictincts d'un cercle C du plan P.

Pour $1 \leq j \leq 4$, on note z_j l'affixe de A_j. On suppose que les droites (A_1A_2) et (A_3A_4) sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

a- Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_4)(z_2 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_4)}$ est un nombre réel.

b- Montrer que les droites (A_1A_3) et (A_2A_4) sont symétriquement inclinées sur D. En est-il de même pour les droites (A_1A_4) et (A_2A_3)?

3- Soit A_1, A_2 et A_3 trois points distincts d'un cercle C du plan P et T la tangente en A_1 à C.

Pour $1 \leq j \leq 3$, on note z_j l'affixe de A_j. On note t l'affixe d'un vecteur directeur de T, et on suppose que (A_1A_2) et (A_1A_3) sont symétriquement inclinées sur une droite D de P.

a- Montrer que $\dfrac{(z_3 - z_2)\, t}{(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)}$ est un nombre réel.

b- Montrer que les droites T et (A_2A_3) sont symétriquement inclinées sur D.