REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Concours d'entrée au cycle de formation pour le recrutement d'inspecteurs des écoles préparatoires et lycées secondaires

(Session 2005)

Epreuve : *MATHEMATIQUES* ⁎ **Durée : 4 Heures** ⁎ **Coef. : 3**

Exercice 1

Soit a, b, c et d des réels tels que $ad - bc \neq 0$.

On considère l'homographie h définie par $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

A) Dans cette partie, on suppose que $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

1) Montrer que $h(x) - h(y) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)}(x-y)$.

2) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\frac{h(x)-\alpha}{h(x)-\beta} = \left(\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}\right)\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right),\ x \neq -\frac{d}{c}.$$

3) On considère la suite (x_n) définie par son premier terme x_0 et $x_{n+1} = \dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$, $n \geq 0$.

a) Montrer qu'il existe deux valeurs α et β de x_0, pour lesquelles la suite (x_n) est stationnaire.

b) Montrer que si x_0 n'est ni égal à α , ni égal à β , il en est de même de x_n.

Dans ce cas, étudier la convergence de la suite (x_n).

4) On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n+2}{x_n+1}$, $n \geq 0$.

a) Montrer que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

b)Montrer que si $x_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ alors $x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ avec

$p_{n+1} = p_n + 2q_n$; $q_{n+1} = p_n + q_n$, $n \geq 0$.

c)Montrer que $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \pm 1$, $n \geq 0$.

d) En déduire que $\left|\dfrac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| \leq \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$, $n \geq 0$.

e) Ecrire une suite homographique qui converge vers $\sqrt{10}$.

f)Donner des approximations successives de $\sqrt{10}$.

B) Dans cette partie, on suppose que $(a-d)^2 + 4bc = 0$.

1) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\dfrac{1}{h(x)-\alpha} = \dfrac{c}{c\alpha+d} + \dfrac{1}{x-\alpha}$.

2) On considère la suite (x_n) définie par son premier terme x_0 et $x_{n+1} = \dfrac{ax_n+b}{cx_n+d}$, $n \geq 0$.

Donner un procédé pour étudier la suite (x_n).

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Donner pour tout réel x, l'expression de $f(x)$ en fonction de $f(1)$.

Problème

Notations et définitions

Soit P le plan euclidien et B un sous-ensemble fini de P ayant au moins deux éléments. Les éléments de B sont appelés points de base.

a) Un point M est dit constructible à la règle et au compas à partir de B s'il existe une suite finie de points $M_1, M_2, \ldots, M_n = M$ telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, M_i est un point d'intersection soit de deux droites, soit d'une droite et d'un cercle, soit de deux cercles; ces droites et cercles étant obtenus à l'aide de l'ensemble $E_i = B \cup \{M_1, \ldots, M_{i-1}\}$ de la manière suivante :

- Chaque droite passe par deux points distincts de E_i.
- Chaque cercle est centré en un point de E_i et a pour rayon la distance entre deux points de E_i.

b) Une droite passant par deux points constructibles est dite constructible.

c) Un cercle centré en un point constructible et ayant pour rayon la distance entre deux points constructibles est dit constructible.

I.

1) Montrer que si D est une droite constructible et A est un point constructible alors la perpendiculaire à D passant par A ainsi que la parallèle à D passant par A sont des droites constructibles.

2) Montrer que si A et B sont deux points constructibles alors le milieu et la médiatrice du segment $[AB]$ sont constructibles.

3) Montrer que si D et D' sont deux droites constructibles concourantes alors les bissectrices des angles déterminés par ces droites sont constructibles.

II.

Soit O et I deux points du plan tels que OI=1. On pose $B = \{O, I\}$.

1) Montrer qu'il existe un point constructible J tel que (O, I, J) soit un repère orthonormé.

2) Un nombre réel est dit constructible s'il est une des coordonnées, dans le repère (O,I,J), d'un point constructible.

a) Montrer que $\sqrt{3}$ est constructible.

b) Montrer que tout entier est constructible.

c) Montrer que $\frac{2}{5}$ est constructible.

3) On désigne par Δ l'ensemble des nombres constructibles. Montrer que est Δ un sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$.

4) a) Montrer que si $t \in \Delta$ et $t \geq 0$ alors $\sqrt{t} \in \Delta$.

b) Construire $\sqrt[4]{3}$.

5) soit $\theta \in [0,\pi]$. On dira que l'angle θ est constructible si le point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \theta$ est constructible. Les angles $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\pi}{3}$ sont-ils constructibles ?

III.

Dans cette question nous admettrons le résultat de Wantzel suivant:

Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

1) a) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

b) En déduire que l'on ne peut pas construire à la règle et au compas l'arête d'un cube ayant un volume double d'un cube donné.

2) Montrer que l'on ne peut pas construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné.

3) En considérant le polynôme $P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$, montrer que $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas un nombre constructible.

En déduire que l'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas trisectable.