République Tunisienne
Ministère de l'Education et de la Formation

Concours d'entrée au cycle de formation pour le recrutement d'inspecteurs des écoles préparatoires et lycées secondaires (Session 2007)

Epreuve : *MATHEMATIQUES* *** **Durée : 4 Heures** *** **Coeff : 3**

Exercice

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, les entiers a^{n+1} et $\sum_{k=0}^{n} a^k$ sont premiers entre eux.

2) a. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $a^{n+1}x + (\sum_{k=0}^{n} a^k)y = 1$.

b. En déduire les solutions entières de l'équation $2^{n+1}(x+y) = y+1$.

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par D_n la droite d'équation $3^{n+1}x - 2y = 1$.

a. Déterminer l'ensemble F_n des points $M(x, y)$ de la droite D_n dont les coordonnées sont entières.

b. Existe-t-il des points de D_n appartenant au cercle de centre O et dont le rayon est égal $\frac{3^{n+1}-1}{2}$?

Problème

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout couple de réels $x < y$, il existe une élément a de A tel que $x < a < y$.

I. Soit un réel x.

1) Pour tout entier naturel n, on pose $p_n = E(10^n x)$, où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t.

a. Montrer que la suite de décimaux $\left(\frac{p_n}{10^n}\right)_n$ converge vers le réel x.

b. Déduire que le corps des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f(A) est dense dans $f(\mathbb{R})$.

II. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro.

On note $H_+ = \{x \in H \text{ tel que } x > 0\}$.

1) Montrer que H_+ est non vide et qu'il admet une borne inférieure, que l'on notera a.

2) Dans cette question, on suppose que a est strictement positif.

a. Montrer que $a \in H_+$.

b. En déduire que $H = a\mathbb{Z}$.

3) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

a. Montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

b. Soit u et v deux réels non nuls et soit $H = u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = \{un + vm \; ; \; (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Montrer que si $\frac{u}{v}$ est irrationnel alors H est dense dans $\mathbb{R}$.

c. Etudier la réciproque.

d. Parmi les sous ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous, quels sont ceux qui sont denses dans $\mathbb{R}$?

$\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$; $\ln 2\mathbb{Z} + \ln 5\mathbb{Z}$; $\sqrt{18}\mathbb{Z} + \sqrt{50}\mathbb{Z}$.

4) Soit un rationnel non nul r et $G = \{mr + 2k\pi \; ; \; (m, k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $G_1 = \{\cos(mr) \; ; \; m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. Co A ende

5) Soit D l'ensemble des nombres décimaux inversibles.

a. Montrer que $D = \{\pm 2^{\alpha} 5^{\beta} \; ; \; (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2\}$.

b. Montrer que l'ensemble $D' = \{\ln|x| \; ; \; x \in D\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c. Déduire que D est dense dans $\mathbb{R}$.