REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Concours d'entrée au cycle de formation pour le recrutement d'inspecteurs des écoles préparatoires et lycées secondaires (Session 2008)

Epreuve : MATHEMATIQUES — Durée : 4 Heures — Coefficient : 3

Exercice 1

Soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. On considère la suite, dite de Fibonacci, définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n \geq 1. \end{cases}$

   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$.

   b. Montrer que la suite (u_n) est divergente.

   c. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1}u_{n-1} - u_n{}^2 = (-1)^{n-1}$.

2. On pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   a. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n et de u_{n+1}.

   b. Exprimer $v_n{}^2 - v_n$ en fonction de u_n.

   c. Soit (w_n) et (x_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_{2n}$ et $x_n = v_{2n+1}$.
   Montrer que les suites (w_n) et (x_n) sont adjacentes.

   d. Montrer que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2

A/ Soit k un entier naturel impair et n un entier naturel quelconque.

1. Montrer que le nombre $2^k + 1$ est divisible par 3.
2. Montrer que pour $k \neq 1$, le nombre $2^{k.2^n} + 1$ n'est pas premier.
3. Soit p un entier naturel non nul.
   Déduire de ce qui précède que si $2^p + 1$ est un nombre premier alors, p est de la forme 2^n où n est un entier naturel.

B / Pour tout entier naturel n, on pose $f_n = 2^{2^n} + 1$.

1. f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4 sont-ils des nombres premiers ?
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $f_{n+1} = (f_n - 1)^2 + 1$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n > 1$, $f_n \equiv 7 \pmod{10}$.
3. a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n \equiv 1 \pmod 4$ et $f_{4n} \equiv 37 \pmod{25}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $f_{4n} \equiv 37 \pmod{100}$.
4. Déduire de ce qui précède et suivant les valeurs de n, le reste modulo 100 de f_n.

C/ Dans cette partie on se propose de montrer que l'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini.

1. Soit n un entier naturel pair. Montrer que pour tout entier naturel non nul x, le nombre $x^n - 1$ est divisible par $x+1$.
2. Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \neq 0$. On pose $a = 2^{2^n}$.
   a. Montrer que $\dfrac{f_{n+p} - 2}{f_n} = \dfrac{a^{2^p} - 1}{a+1}$.
   b. En déduire que f_n divise $f_{n+p} - 2$.
   c. En déduire que si d est un diviseur commun de f_n et f_{n+p} alors $d = 1$ ou $d = 2$.
   d. Montrer que f_n et f_{n+p} sont premiers entre eux.
3. Déduire de ce qui précède que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 3

Etant donné, dans le plan orienté, deux points O_1 et O_2, on désigne par M_1 le transformé d'un point quelconque M de ce plan par la rotation de centre O_1 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et par M_2 le transformé de M_1 par la rotation de centre O_2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

1. Montrer que le milieu J du segment $[MM_2]$ est un point fixe.
2. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M_1 et M_2 sont alignés.
3. Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $\dfrac{MM_1}{M_1M_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 4

Soit I un point du plan et $D = \{M \in P \text{ tel que } IM \leq 1\}$. (D est le disque de centre I et de rayon 1).

Soit M un point du plan et $d(M, D) = \inf\{MK, K \in D\}$.

1. Montrer que si M est extérieur au disque, alors $d(M, D) = MM_0$ où M_0 est l'intersection du cercle de centre I et de rayon 1 avec le segment $[IM]$.
2. Soit Δ une droite telle que la distance de I à Δ est égale à 2.
   Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $d(M, D) = 2d(M, \Delta)$.