République Tunisienne Ministère de l'éducation	Concours D'entrée Au Cycle De Formation Pour le Recrutement d'Inspecteurs Des Ecoles Préparatoire Et Lycées Secondaires ◈ Session 2010 ◈	
Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 heures	Coefficient : 3

Exercice 1 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ on considère un quadrilatère convexe ABCD et on designe par b, c et d les affixes respectives des points B , C et D.

1) a- Justifier que : $\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|+\left|\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right| \geq \left|\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right|$

b- En déduire que : $AD \times BC + AB \times CD \geq AC \times BD$

2) Montrer que le quadrilatère ABCD est inscrptible si et seulement si

$AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$

3) Soit MNPQ un parallelogramme. Un cercle passant par M recoupe les segments [MN], [MP] et [MQ] respectivement en N' , P',et Q'.

Montrer que $MN \times MN' + MQ \times MQ' = MP \times MP'$

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur de ce triangle.
Les droites (PA) , (PB) et (PC) coupent respectivement (BC) , (AC) et (AB) en A' , B' et C'.
On désigne par $\alpha,\ \beta\ et\ \gamma$ les aires respectives des triangles PBC , PAC et PAB.

1) a)Montrer que $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{A'B}{A'C}$

b) En déduire que A' est le barycentre des points pondérés $(B,\beta) et (C,\gamma)$.

c) Montrer que P est le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),\ (B,\beta) et (C,\gamma)$

2) On pose $S=\frac{PA}{PA'}+\frac{PB}{PB'}+\frac{PC}{PC'}$.

a) Exprimer S en fonction de $\alpha, \beta\ et\ \gamma$.

b) Montrer que $S \geq 6$.

c) Déterminer la position de P pour laquelle la somme S est minimale.

Problème :

Soit f une fonction , définie, continue, deux fois dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et telle que f(a) = f(b) = 0.

1) Soit $x_0 \in]a,b[$, on considère la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = f(x) - A(x-a)(x-b)$ où $A = \dfrac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$.

   Calculer $\varphi(x_0)$, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]a,b[$ tel que

   $f(x_0) = \dfrac{f''(\alpha)}{2}(x_0-a)(x_0-b)$.

2) Soit g une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a,b]$ on ait $m \le g''(x) \le M$.

   a- Montrer que pour tout $x \in [a,b]$

   $$M\,\frac{(x-a)(x-b)}{2} \le g(x) - g(a)\frac{x-b}{a-b} - g(b)\frac{x-a}{b-a} \le m\,\frac{(x-a)(x-b)}{2}$$

   b- En déduire la relation

   $$-M\,\frac{(b-a)^3}{12} \le \int_a^b g(x)dx - \frac{b-a}{2}(g(a)+g(b)) \le -m\,\frac{(b-a)^3}{12} \qquad (1)$$

3) En appliquant la relation (1) à la fonction ℓn sur l'intervalle $[n, n+1]$ (*où* $n \in \mathbb{N}^*$),

   démontrer la relation $\dfrac{1}{12(n+1)^2} \le (n+\dfrac{1}{2})\ell n(1+\dfrac{1}{n}) - 1 \le \dfrac{1}{12n^2}$.

4) On pose pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \ell n(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!})$

   et pour tout entier naturel $n \ge 2$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

   a- Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   b- En déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite ℓ et que l'on a pour tout entier naturel $n \ge 2$, $\ell - \dfrac{1}{12(n-1)} < u_n < \ell$.

5) On considère la suite (I_n) définie sur IN par $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel non nul n,

   $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

   a- Montrer que (I_n) est décroissante.

   b- Calculer I_1 et montrer que pour tout entier $n \ge 2$, $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

   c- En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

6) **a-** Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi$.

   b- En déduire que $\ell = -\dfrac{\ell n(2\pi)}{2}$.