République Tunisienne Ministère de l'éducation	**Concours d'entrée au cycle de formation pour le recrutement d'inspecteurs des écoles préparatoires et lycées secondaires** ◈ **Session 2011** ◈

Épreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 heures	Coefficient : 3

Exercice 1

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

A/ Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que :

- Pour tout x appartenant à $[a,b]$, $\psi(x) \geq 0$.
- Il existe un réel x_0 appartenant à $[a, b]$ tel que $\psi(x_0) \neq 0$.

Montrer qu'il existe un réel α appartenant à $[a, b]$ tel que $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi(\alpha)\int_a^b \psi(x)dx$.

B/ Soit f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$ telles que :

- g est continue sur $[a, b]$.
- f est dérivable et strictement croissante sur $[a, b]$ et sa dérivée est continue sur $[a, b]$.

On désigne par G la primitive de g sur $[a, b]$ qui s'annule en a.

1. Justifier que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)f'(x)dx$.
2. En déduire qu'il existe un reel c de $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx.$$

Exercice 2

1. Soit p un nombre premier et $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$.

   Montrer que p divise C_p^k.
2. En déduire le petit théorème de Fermat : « Si $n \geq 1$ et p est premier alors $n^p \equiv n \pmod p$ ».
3. Soit p un nombre premier.

   Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{Z}^N$, $\left(\sum_{i=1}^{i=N} x_i\right)^p \equiv \sum_{i=1}^{i=N} (x_i)^p \pmod p$.

Exercice 3

I/ Soit C un cercle de centre I et de rayon R et O un point du plan.

1. Une droite passant par O coupe le cercle C en A et B.

   Montrer que $\overline{OA}.\overline{OB}$ est un nombre constant p qu'on précisera.
2. Dans cette question on suppose que $OI > R$.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Montrer que si T est un point du cercle **C** tel que la droite (OT) est tangente à **C** alors $OT^2 = p$.

II/ Soit O un point du plan et $k \in \mathbb{R}^*$.

On désigne par $I(O, k)$ l'application de $P \setminus \{O\}$ dans $P \setminus \{O\}$, qui à tout point M de $P \setminus \{O\}$ associe le point M' de la droite (OM) telle que $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.

($I(O, k)$ est appelée l'inversion de pôle O et de puissance k).

1. Montrer que $I(O, k)$ est bijective. Déterminer sa réciproque.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $I(O, k)$.
3. Soit A et B deux points distincts tels que $O \notin (AB)$ .On pose $I(O, k)(A) = A'$ et $I(O, k)(B) = B'$. Montrer que A, B, A'et B' appartiennent à un même cercle.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $h(O, \alpha)$ l'homothétie de centre O et de rapport α.

   Montrer que $h(O, \alpha) \circ I(O, k) = I(O, \alpha k)$.
5. Déterminer l'image d'une droite par $I(O, k)$.
6. Déterminer l'image d'un cercle par $I(O, k)$.
7. Soit C_1 et C_2 deux cercles non isométriques tangents extérieurement en T. Soit (D) une tangente commune à C_1 et C_2 respectivement en A et B.

   On se propose de construire un cercle C tangent aux cercles C_1 et C_2 et à la droite (D).

   On considère l'inversion f de pôle A et de puissance AB^2.

   a) Déterminer les images de la droite (D) et du cercle C_2 par f.

   b) Déterminer T' l'image du point T par f. En déduire l'image du cercle C_1.

   c) Conclure.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux