Sujet

Exercice 1 : (4 points)

Soit f une similitude indirecte du plan de rapport k différent de 1.

1) a) Démontrer que f se décompose sous la forme $h \circ S$ où h est une homothétie de rapport k et S est une symétrie axiale.

b) Montrer que la direction de l'axe de S ne dépend que de f.

2) Soit $f = h_{(P,k)} \circ S_D$ où $h_{(P,\,k)}$ désigne l'homothétie de centre P

et de rapport k et S_D désigne la symétrie axiale d'axe D.

On se propose de chercher une droite Δ et un point Ω de Δ tel que $f = h_{(\Omega,k)} \circ S_\Delta$.

a) Montrer qu'une telle décomposition existe si, et seulement si

$(\frac{1}{k}-1)\overrightarrow{\Omega P} + 2\overrightarrow{\Omega H} = \vec{0}$, H étant le projeté orthogonal de P sur D.

b) En déduire l'existence d'une telle décomposition.

c) Montrer que Ω est l'unique point fixe de f.

Exercice 2 : (3 points)

On considère dans l'espace un carré ABCD de côté a et inclus dans un plan P.
Soit Q le plan perpendiculaire à P et contenant la droite (AB) et ζ un demi-cercle de diamètre [AB] inclus dans le plan Q. On note O le milieu de [AB].
Soit M un point du segment [AB] et N son symétrique par rapport à O.
Dans le plan Q, la perpendiculaire en M à [AB] coupe le demi-cercle en F.
Dans le plan P, la perpendiculaire en N à [AB] coupe [AC] en G.
Déterminer AM pour que FG soit minimale.

Exercice 3 : (3 points)

Soit X un entier naturel à quatre chiffres tel que 4 est son chiffre des centaines et son chiffre des unités. Si on permute les chiffres des milliers et des dizaines on obtient l'entier naturel Y tel que le reste de la division euclidienne de Y par X est égal à 2,
On pose Y= k X + 2 où k est un entier naturel.

1) Montrer que l'entier (202k – 201) est un multiple de 5.
2) Déterminer l'entier X.

Exercice 4 : (3 points)

On considère dans le plan orienté une droite Δ , un cercle Γ de centre O et un point A n'appartenant pas à Δ.

Construire un carré ABCD tel que le point B appartient à la droite Δ et les droites (AD) et (CD) soient tangentes au cercle Γ .

(Le cercle Γ peut être à l'intérieur ou à l'extérieur du carré). Donner toutes les solutions.

Exercice 5 : (7 points)

1) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan(x)$ et f^{-1} la fonction réciproque de f.

et g l'application de IR dans IR définie par $g(0)=1$ et pour tout réel x non nul $g(x)=\frac{f^{-1}(x)}{x}$.

a) Montrer que g est continue sur IR et que g est paire.

b) Montrer que pour tout réel x non nul $\int_0^x \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=-\frac{1}{2}x^2g'(x)$

c) Dresser le tableau de variation de g (on admettra que g est dérivable en 0 et que $g'(0)=0$)

d) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Soit φ l'application de IR dans IR définie par $\varphi(0)=1$ et pour tout réel x non nul

$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt$.

a) Montrer que φ est continue sur IR et que φ est paire.

b) Montrer que pour tout réel x $g(x)\leq\varphi(x)\leq 1$

c) Montrer que φ est dérivable sur IR.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x g(t)dt$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

e) Dresser le tableau de variation de φ .

f) Tracer la courbe Γ de φ dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur IN par u_0 un réel donné et par $u_{n+1}=\varphi(u_n)$

a) Montrer que pour tout réel x strictement positif $|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{x}(1-g(x))$.

b) Montrer que pour tout réel x $|\varphi'(x)|\leq\frac{1}{4}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel $\alpha\in\left]0,1\right]$