(Le sujet comporte 5 exercices)

Exercice 1

Déterminer le plus petit entier naturel a vérifiant : $a \equiv 6\,(23)$ et $a^2 \equiv 13\,(23^2)$

Exercice 2

Un jeu consiste à une suite d'épreuves de tirs de fléchettes sur une cible.

Deux joueurs A et B participent à ce jeu. Pour chaque épreuve :

La probabilité que le joueur A atteigne la cible en un tir est de $\frac{2}{3}$.

La probabilité que le joueur B atteigne la cible en un tir est de $\frac{1}{2}$.

Dans la première épreuve, chacun des deux joueurs effectue un tir, le joueur qui atteint la cible poursuit le jeu et passe à l'épreuve suivante, celui qui échoue est éliminé.

Le jeu se poursuit de cette manière et ne cesse que lorsque les deux joueurs sont éliminés.

Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'événement:

E_n : « à l'issue de la nième épreuve, aucun joueur n'est éliminé »

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination.

1) a) Calculer $p(X=1)$.

b) Déterminer $p(E_{n+1}/E_n)$ puis écrire $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

c) Déterminer $p(E_n)$ et en déduire $p(X>n)$.

d) Etablir que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 ; $p(X>n-1)=p(X=n)+p(X>n)$.

e) Donner alors $p(X=n)$, pour n supérieur ou égal à 2 . Vérifier que cette formule reste valable pour n = 1.

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} p(X=k)$.

3) Montrer que $np(X>n)+\sum_{k=1}^{k=n} kp(X=k)=\sum_{k=0}^{k=n-1} p(X>k)$

4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kp(X=k)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 3

On considère dans le plan, un triangle quelconque ABC et on pose BC = a , CA = b et AB = c.

La bissectrice intérieure issue de A coupe le segment [BC] en un point I.

1) a) Montrer que $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}$.

b) En déduire que I est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, c).

2) Soit O le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Montrer que le point O est le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B, b) et (C, c).

3) a) Donner une condition nécessaire sur b et c pour que la bissectrice extérieure issue de A coupe la droite (BC).

b) On suppose que cette condition est remplie et note J le point d'intersection de la bissectrice extérieure issue de A et la droite (BC).

Montrer que J est le barycentre des points pondérés (B, b) et (C, - c).

4) On note K le barycentre des points pondérés (A, a) ; (B,- b) et (C, - c). Montrer que K est le point de concours de trois droites particulières du triangle ABC que l'on indiquera.

5) On suppose que le triangle ABC est non rectangle.

a) On note A_1 le pied de la hauteur issue de A.

Montrer que A_1 est barycentre des points pondérés (B , $\tan\hat{A}$) , (C , $\tan\hat{C}$)

b) En déduire que l'orthocentre H du triangle ABC est barycentre des points pondérés

(A , $\tan\hat{A}$) , (B , $\tan\hat{B}$) , (C , $\tan\hat{C}$).

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère l'hyperbole $(\mathscr{H})$ d'équation : $xy = 1$.
Soit P un point de $(\mathscr{H})$, Q son symétrique par rapport à O et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre P et passant par Q.
On note A et B les deux points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la branche de $(\mathscr{H})$ contenant P et on note C le deuxième point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec la branche de $(\mathscr{H})$ contenant Q (Éventuellement C = Q).
On se propose de démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

1) On désigne par p, a, b et c les abscisses respectives des points P, A, B et C.

a) Soit $M(x,y)$ un point du plan. Montrer que $M\in(\mathscr{C})\cap(\mathscr{H}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-2px^3-3x^2\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)-\frac{2}{p}x+1=0 \\ xy=1 \end{cases}$

b) Montrer que $a+b+c=3p$.

c) Calculer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

2) Conclure.

Exercice 5

I- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I qu'on cherchera.
2) Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3) On note g^{-1} la fonction réciproque de g. Exprimer, pour $x \in I$, $g^{-1}(x)$ en fonction de x.

II- On se propose de déterminer la famille $\mathscr{F}$ des fonctions numériques à variables réelles f définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et vérifiant pour tout réel x , $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.

A) 1) Déterminer les fonctions constantes de $\mathscr{F}$.
2) Montrer que la fonction g est un élément de $\mathscr{F}$.
3) On suppose que f est un élément de $\mathscr{F}$, déterminer les valeurs possibles de f(0).
4) Montrer que si f appartient à $\mathscr{F}$ alors pour tout réel x , $-1 \le f(x) \le 1$.

B) Soit f une fonction de la famille $\mathscr{F}$ telle que $f(0) \neq 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{N}$, la suite (u_n) par $u_n = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$.

1) Montrer que la suite (u_n) converge vers f(0) .
2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de u_{n+1} et en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant.
3) Etudier, suivant le signe de u_0, la monotonie de la suite (u_n).
4) Montrer que si $f(0) = 1$ alors $u_0 \ge 1$. En déduire que f est constante.
5) Montrer que si $f(0) = -1$ alors $u_0 \le -1$. En déduire que f est constante.

C) Soit f un élément de $\mathscr{F}$ vérifiant $f(0) = 0$.

1) a) Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 1$ ou $f(a) = -1$ alors la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ est constante.

b) En déduire que pour tout x, $f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.

2) On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = g^{-1}(f(x))$.
   a) Montrer que φ est dérivable en 0.
   b) Montrer que pour tout réel x, $\varphi(2x) = 2\varphi(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réel non nul x , la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{x}\ \varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ est convergente et donner sa limite.

   b) Montrer que la suite (v_n) est constante.

   c) En déduire que φ est une fonction linéaire.

   d) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que pour tout réel x, $f(x) = g(\alpha x)$

D) 1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(\lambda x)$ est un élément de $\mathscr{F}$.

2) Déterminer alors la famille $\mathscr{F}$.