J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Classes préparatoires
1er cycle universitaire

Dunod Université

Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Jean-Marie ARNAUDIÈS

Maître de conférences
Université Paris VI

Pierre DELEZOIDE

Professeur de Mathématiques supérieures
au Lycée Louis le Grand, Paris

Henri FRAYSSE

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales
au Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

DUNOD

ISBN 2 10 001471 4

À notre ami le Professeur André WARUSFEL

INTRODUCTION

Nous présentons ici le premier d'une série de quatre livres d'exercices corrigés correspondant au *Cours de Mathématiques* de J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, un pour chaque tome.

Dans ces livres de cours, nous avons sélectionné environ un exercice sur cinq, en variant les niveaux, mais surtout en les choisissant aussi représentatifs que possible. Nous avons aussi donné la réponse à un assez grand nombre des exercices les plus ardus. Toutefois, nous n'avons pas classé les questions par ordre de difficulté, car un tel classement comporterait une trop grande part de subjectivité. Chacun sait que bien souvent, les énigmes sont loin d'être résolues par ceux que l'on attend, et qu'inversement, ce ne sont pas toujours ceux que l'on aurait cru qui «sèchent»... donc, au lecteur d'apprécier le prix de son effort !

Pour chaque exercice, nous avons tenu à donner une solution très développée, en l'ouvrant au maximum sur son environnement mathématique ; car il est bien plus bénéfique à tous égards d'étudier un exercice en relation avec cet environnement que l'exercice pour lui-même, isolément. Le rôle de l'association d'idées en mathématiques est bien connu. Le grand mathématicien Hadamard disait que pour résoudre une question épineuse, après avoir bien «séché» sur elle il faut l'abandonner, puis «penser à côté». Les exercices de mathématiques évoquent l'art des illusionnistes : un spectateur passif pourrait s'extasier toute sa vie devant ces tours de magie sans jamais en percer le secret. De même, un «bachoteur» naïf pourrait lire des centaines d'exercices de mathématiques sans augmenter sa capacité à en résoudre de nouveaux, s'il n'essayait de comprendre un peu ce qui se passe dans les coulisses, c'est-à-dire de bien situer la question dans son environnement. L'idéal serait d'apprendre à en composer de nouveaux, ou même plus simplement à en présenter de connus sous un jour original, qui les rende méconnaissables au spectateur passif...

Nous avons voulu la plus grande rigueur dans la rédaction des solutions, au moins autant que pour les livres de cours. Le résultat, nous l'espérons, est un outil de travail de fond, pour les préparations de longue haleine, qui au-delà du souci immédiat de la réussite à tel ou tel concours, préserve le plus large contact avec la science.

Il va de soi que nous remercions d'avance ceux de nos lecteurs qui voudront bien nous faire part de leurs remarques et suggestions.

Nous remercions vivement les Éditions Dunod, et tout particulièrement Gisèle Maïus, d'avoir entrepris la publication de ces ouvrages, qui s'imposaient pour donner leur pleine efficacité aux quatre livres de cours.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction V

CHAPITRE I. Les nombres réels 1

§ I.2 Groupes abéliens totalement ordonnés, exercice 2 1
§ I.3 Groupes archimédiens, exercices 1, 2, 5 2
§ I.4 Le théorème d'isomorphisme, exercice 2 4
§ I.5 Les nombres réels, exercices 1, 2, 5, 6 4
§ I.6 Puissances, exponentielles, logarithmes, exercices 5, 7, 8, 10 7

CHAPITRE II Suites, introduction aux séries 11

§ II.1 Limites de suites réelles, exercices 2, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 23, 24, 25 11
§ II.2 Suites à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ou à valeurs dans $\mathbb{C}$, exercices 1, 2, 8 24
§ II.3 Exponentielle naturelle, logarithme népérien, exercices 1, 2, 5 26
§ II.4 Comparaison des suites, exercices 1, 2, 5, 6, 9 29
§ II.5 Premières notions sur les séries, exercices 3, 8, 11, 12, 13, 18, 19 39
§ II.6 Développement de base donnée d'un réel positif, exercices 1, 4, 5, 8, 11 44

CHAPITRE III Topologie de $\mathbb{R}$ 51

§ III.1 Ensembles adjacents et coupures dans $\mathbb{R}$, exercice 3 51
§ III.2 Ouverts, fermés et voisinages dans $\mathbb{R}$, exercices 3, 5, 8, 10 52
§ III.3 Ensembles de réels, exercices 1,4, 5, 7, 10, 12 59
§ III.4 Continuité des fonctions de variable réelle, exercices 6, 8, 11, 16 65
§ III.5 Les théorèmes de Heine, exercices 2, 7 11, 15 70
§ III.6 La droite numérique achevée, exercice 5 74

CHAPITRE IV Fonctions d'une variable réelle 77

§ IV.1 Limites, exercices 2, 6, 8, 12 77
§ IV.2 Fonctions monotones, exercices 1, 3, 11, 12 81
§ IV.3 Valeurs d'adhérence d'une fonction, exercices 2, 3, 7, 9 91
§ IV.5 Fonctions périodiques, exercices 5, 7 95
§ IV.6 Dérivées, exercices 3, 4 97
§ IV.7 Dérivées successives, exercices 3, 5

CHAPITRE V **Variation des fonctions, fonctions usuelles** 105

§ V.1 Égalités et inégalités d'accroissements finis, exercices 2, 3, 12 105
§ V.2 Variation des fonctions, exercices 2, 6e, 7, 14, 50, 20 109
§ V.3 L'exponentielle complexe ; fonctions hyperboliques et circulaires complexes, exercice 1 117
§ V.4 Fonctions circulaires d'une variable réelle, exercices 2e, 3, 5, 8, 14, 23, 29 117
§ V.5 Fonctions convexes, exercices 2, 3, 9, 15 136

CHAPITRE VI **Formules de Taylor, développements limités** 141

§ VI.2 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point ; notations de Landau, exercices 5, 7, 13 141
§ VI.3 Formules de Taylor, exercices 1, 2, 3, 4, 8 146
§ VI.4 Développements limités, exercices 1c, 1g, 4d, 6, 8d 160
§ VI.6 Développements asymptotiques, exercices 4, 5 167

CHAPITRE VII **Notions sur l'intégration** 171

§ VII.1 Convergence simple, convergence uniforme, exercices 1c,1e, 5, 10, 11 171
§ VII.2 Intégration des fonctions en escalier, exercices 3, 6, 9 177
§ VII.3 Fonctions bornées intégrables, exercices 5, 3 182
§ VII.4 Ensembles mesurables bornés dans $\mathbb{R}$, exercices 1, 4, 6 185
§ VII.5 Sommes de Riemann, exercices 1, 9, 11 188
§ VII.6 Primitives, exercices 1, 3, 9, 13, 16 198
§ VII.8 Inégalités de Schwarz, Minkowski et Hölder, exercices 1, 8 207

CHAPITRE VIII **Primitives, intégrales généralisées et intégrales à paramètres** 213

§ VIII.1 Primitives de fonctions rationnelles, exercices 1, 2, 5 213
§ VIII.2 Fonctions rationnelles en certaines fonctions usuelles, exercices 1, 3e, 3h, 4d,4h, 5h, 5i, 11i, 13 225
§ VIII.3 Intégrales généralisées, exercices 3c, 4c, 4g, 5, 9, 12, 23c, 23f, 32, 35, 37 237
§ VIII.4 Intégrales généralisées : compléments, exercice 1a 267
§ VIII.5 Intégrales à paramètres, exercices 2, 5, 12, 14, 19 268

CHAPITRE IX **Séries numériques** 289

§ IX.1 Comparaison de séries à termes positifs, exercices 5, 6 7f 289
§ IX.2 Règles usuelles de convergence, exercices 4, 6, 7 295
§ IX.3 Comparaison séries-intégrales, exercices 2, 4b, 7 299
§ IX.4 Séries à termes quelconques, exercices 1a, 1g, 1l, 2a, 6a, 11, 1g, 21, 23 305
§ IX.6 Notions sur les produits infinis, exercices 1, 3f, 3lh, 8, 16 327
§ IX.7 Notions sur les familles sommables de nombres complex exercices 4, 9

CHAPITRE X **Topologie, espaces métriques, espaces normés** 335

§ X.1 Distances et normes, exercices 3, 9, 11, 12 339
§ X.2 Topologie d'un espace métrique, exercices 1, 2 345
§ X.3 Sous-ensembles remarquables, exercices 1a, c, d, 3, 9 348
§ X.4 Limites, exercice 6 352
§ X.5 Continuité, exercices 1, 6, 10, 11 356
§ X.6 Continuité dans les evn, exercices 1, 2, 8 368

CHAPITRE XI **Compacité, complétude, connexité** 377

§ XI.1 Espaces compacts, exercices 2, 4, 5, 8, 15, 16, 18, 23 377
§ XI.2 Espaces métriques complets, exercices 5, 6, 20, 21 388
§ XI.3 Connexité, exercices 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 23, 28 397
§ XI.4 Séries dans un evn, exercice 7 405
§ XI.5 Dérivation des fonctions à valeurs dans un K-evn, exercices 2, 3 407

CHAPITRE XII **Suites et séries de fonctions** 415

§ XII.1 Généralités, exercices 2, 5, 8 415
§ XII.2 Continuités et limites uniformes, exercices 2, 4, 5 418
§ XII.3 Dérivation et passage à la limite, exercices 3, 5 424
§ XII.4 Séries de fonctions, produits infinis de fonctions, exercices 1, 8d, 9, 1 428
§ XII.5 Exemples et applications, exercices 2, 5, 9, 10, 12 441

Bibliographie 452

Chapitre I

LES NOMBRES RÉELS

§ I.2 *GROUPES ABÉLIENS TOTALEMENT ORDONNÉS*

Exercice 2 :

> a) Montrer que le groupe $\mathbb{Q}_+^*$ muni de la multiplication usuelle et de l'ordre usuel n'est pas isomorphe au groupe $\mathbb{Q}$ muni de l'addition usuelle et de l'ordre usuel.
> b) Construire sur $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ un ordre total qui en fait un groupe totalement ordonné non isomorphe au groupe ordonné $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leq)$, où $\leq$ est l'ordre usuel. ■

Pour démontrer qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre deux objets structurés on peut exhiber une propriété structurelle (c'est-à-dire invariante par les isomorphismes) vraie pour l'un et fausse pour l'autre.

a) Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes, car la propriété :

$$\exists x \exists y \, (2.y = x) ,$$

est vraie dans $(\mathbb{Q}, +)$ mais son équivalent multiplicatif :

$$\exists x \exists y \, (y^2 = x) ,$$

est faux dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$; il suffit de prendre $x = 2$ (voir chapitre I.1 exercice 1).

b) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée des nombres entiers premiers. Tout nombre rationnel strictement positif s'écrit de manière unique comme produit d'un nombre fini de nombres premiers affectés de puissances entières positives ou négatives. A un nombre rationnel r strictement positif on peut donc faire correspondre une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telle que :

$$r = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{h_n} ,$$

l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, h_n \neq 0\}$ étant fini.

Démontrons que l'application ainsi définie est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$ vers le sous-groupe S_0 du groupe additif des suites à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ne prenant qu'un nombre fini de fois une valeur non nulle.

Il est évident que c'est une bijection dont la réciproque est l'application qui à une suite (h_n) d'entiers relatifs, dont seulement un nombre fini sont non nuls, fait correspondre le nombre :

$$r = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{h_n} \ .$$

Montrons qu'il s'agit d'un homomorphisme de groupes. Si :

$$r = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{h_n} \quad \text{et} \quad s = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{k_n} \ ,$$

alors :

$$r.s = \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n^{h_n + k_n} \ .$$

L'image de $r.s$ est donc la suite somme de la suite (h_n), image de r, et de la suite (k_n), image de s ; ce qu'il fallait démontrer.

On peut démontrer facilement que le groupe des suites à valeurs dans un groupe totalement ordonné $(G,\prec)$ muni de l'ordre lexicographique, est un groupe totalement ordonné. D'autre part il est clair que tout sous-groupe d'un groupe totalement ordonné est un groupe totalement ordonné. On munit ainsi S_0 d'une structure de groupe ordonné (voir aussi l'exercice 4). En utilisant l'isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$ et S_0 on peut munir $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$ d'une structure d'ordre différent de l'ordre usuel, mais compatible avec la structure de groupe. Par exemple 3 qui correspond à la suite $(0,1,0,...)$ sera, pour cet ordre, inférieur à 2 qui correspond à la suite $(1,0,0,...)$. Ces deux ordres ne sont effectivement pas isomorphes : $\mathbb{Q}_+^*$ muni de l'ordre ordinaire est archimédien alors que S_0 muni de l'ordre lexicographique ne l'est pas.

§ I.3 *GROUPES ARCHIMÉDIENS*

Exercice 1 :

> Montrer que l'inégalité $(1+h)^n \geq 1+nh \quad (n \in \mathbb{N})$, démontrée pour h rationnel >0, reste valable pour h rationnel >-1. ■

Soit $h > -1$ démontrons l'inégalité par récurrence sur n.

L'inégalité est vraie pour $n=0$ car $(1+h)^0 = 1$, et aussi pour $n=1$ car $(1+h)^1 = 1+h$.

Si elle est vraie pour n alors :

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) \ ,$$

car $(1+h)$ est ≥ 0 ; en développant :

$$(1+h)^{n+1} \geq \left(1+(n+1)h+nh^2\right) \geq (1+(n+1)h) \ .$$

L'inégalité est donc vraie pour $n+1$. La proposition est donc démontrée.

Exercice 2 :

> On ordonne $\mathbb{Z}^2$ lexicographiquement. Donner un exemple, dans ce groupe additif, de couples de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'une croissante, l'autre décroissante, telles que $a_n \leq b_n$ pour tout n, et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] = \varnothing$. ■

Prenons $a_n = (0,n)$ et $b_n = (1,-n)$. Il est clair que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante et que, pour l'ordre lexicographique, $a_n < b_n$ pour tout entier n. S'il existait un élément (p,q) commun à tous les intervalles $[a_n, b_n]$, on aurait pour tout n :

$$(0,n) \leq (p,q) \leq (1,-n) \ .$$

On voit que p ne peut être que 0 ou 1. Si c'est 0, q doit être plus grand que tous les entiers positifs. Si c'est 1, l'entier q doit être plus petit que tous les entiers négatifs. Cela est donc impossible.

Exercice 5 :

> Soit $(G,+,\leq)$ un groupe Archimédien. On suppose que G vérifie la propriété des segments emboîtés. Montrer que G est complet. ■

D'après le Théorème I.3.2, G est complet si, et seulement si, il vérifie la propriété de la borne supérieure, ce que nous allons vérifier ici.

Démontrons d'abord l'existence d'une suite (u_k) d'éléments strictement positifs de G de limite nulle. Pour tout k entier > 0 on peut trouver $u_k > 0$ dans G tel que $k.u_k \leq 1$ (I.2.1) ; montrons qu'une telle suite (u_k) est de limite nulle. Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver N entier tel que $N.\varepsilon \geq 1$ (I.3.1) ; alors pour $k > N$ on a :

$$ku_k \leq 1 \leq N\varepsilon < k\varepsilon \quad \text{donc} \quad 0 < u_k < \varepsilon .$$

Soit E une partie non vide majorée de G, définissons par récurrence une suite $[a_k, b_k]$ d'intervalles fermés emboîtés de la manière suivante.

On choisit pour a_0 un élément majoré (au sens large) par un élément de E, par exemple un élément de E (qui est non vide) et pour b_0 un majorant de E.

Supposons a_k et b_k déterminés, a_k étant majoré par un éléme étant un majorant de E (donc $a_k \le b_k$). Choisissons a_{k+1} sous la forme $a_k + pu_{k+1}$ où p est le plus grand entier positif (donc $a_{k+1} \ge a_k$) tel que ce nombre soit majoré par un élément de E et $b_{k+1} = \min(b_k, a_{k+1} + u_{k+1})$. Le nombre b_{k+1} est bien dans les deux cas un majorant de E plus petit que b_k. Comme $0 \le b_{k+1} - a_{k+1} \le u_{k+1}$, la suite des intervalles $[a_k, b_k]$ est bien emboîtée et son intersection est $\{L\}$.

Vérifions maintenant que L est la borne supérieure de E.

C'est un majorant de E :

Sinon, si e est un élément de E tel que $L < e$, alors pour k assez grand, b_k vérifie : $L \le b_k < e$, ce qui contredit le fait que b_k est un majorant de E.

C'est le plus petit des majorants de E :

Sinon il existe un majorant m de E tel que $m < L$; pour k assez grand, $m < a_k \le L$; comme a_k est majoré par un élément de E, cela contredit le fait que m est un majorant de E.

La propriété de la borne supérieure est donc démontrée.

§ I.4 *LES THÉORÈMES D'ISOMORPHISMES*

Exercice 2 :

> Donner un exemple de groupe abélien divisible admettant des éléments de torsion. ■

Considérons le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Une classe représentée par la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ est de période q ; tout élément est de torsion. Ce groupe est bien divisible car il est clair que tout groupe quotient d'un groupe divisible est divisible.

§ I.5 *LES NOMBRES RÉELS*

Exercice 1 :

> On considère un groupe Archimédien $(G,+,\le)$. Soit $a > 0$ dans G et $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes $f : G \to \mathbb{R}$ croissant tel que $f(a) = \alpha$. De plus f est injectif. ■

Montrons l'existence d'un tel homomorphisme.

Notons $\mathbb{R}_G$ le complété de Cauchy de G et I l'injection canonique de G dans $\mathbb{R}_G$. D'après le théorème I.4.1, $\mathbb{R}_G$ et $\mathbb{R}$ étant tous les deux des groupes Archimédiens complets il existe un (et un seul) homomorphisme

$\mathbb{R}_G \to \mathbb{R}$ croissant tel que $g(I(a)) = \alpha$. Et cette application est un isomorphisme. On en déduit que $f = goI$ convient et est strictement croissant.

Montrons maintenant l'unicité d'un tel homomorphisme.

Soient f_1 et f_2 différents vérifiant les conditions, et b dans G tel que $f_1(b) \neq f_2(b)$. On peut supposer que $f_1(b) < f_2(b)$. Soit $N > 0$ tel que $N(f_2(b) - f_1(b)) > \alpha$ et p tel que $pa \leq Nb < (p+1)a$. En appliquant f_1 et f_2 on obtient les deux inégalités :

$$p\alpha \leq N f_1(b) \text{ et } N f_2(b) \leq (p+1)\alpha.$$

On en déduit :

$$N(f_2(b) - f_1(b)) \leq \alpha \quad ,$$

ce qui est contradictoire.

Exercice 2 :

> a) Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et qu'entre deux rationnels distincts il existe toujours un nombre irrationnel.
>
> b) On considère la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a + b\alpha$ où α désigne un nombre irrationnel donné. Montrer que f est injective. Que peut-on dire de $f(\mathbb{Z}^2)$? Montrer que c'est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$. ■

a) Soient $x < y$ deux réels distincts, montrons qu'on peut intercaler entre ces réels un irrationnel. Soit α un irrationnel positif, q entier > 0 tel que $\frac{\alpha}{q} < (y - x)$, et p entier relatif tel que $p\frac{\alpha}{q} \leq x < (p+1)\frac{\alpha}{q}$; donc $x < (p+1)\frac{\alpha}{q} \leq x + \frac{\alpha}{q} < y$. Le nombre irrationnel $(p+1)\frac{\alpha}{q}$ convient.

b) f est un homomorphisme de groupes additifs donc $f(\mathbb{Z}^2)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et f est injective car son noyau est $\{(0, 0)\}$: en effet, si $a + b\alpha = 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$ alors $b \neq 0$ et $\alpha = -\frac{a}{b}$ serait rationnel.

En tant que sous-groupe non nul du groupe archimédien $(\mathbb{R}, +)$, $f(\mathbb{Z}^2)$ est archimédien. Il est soit discret et égal à $m\mathbb{Z}$ où m est son plus petit élément > 0, soit partout dense dans $\mathbb{R}$ (voir I.5.2). La première éventualité est à rejeter, car alors 1 et α seraient tous les deux des multiples entiers d'un même nombre m (on disait naguère *commensurables*), le rapport α serait rationnel.

Exercice 5 :

> On considère l'ensemble E des nombres $a + b\sqrt{2}$, avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que cet ensemble peut être mu
> ordres de groupe totalement ordonné archimédien dis

également qu'on peut le doter d'un ordre non archimédien (à partir de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Q}^2$). ■

Soit r un rationnel > 0 non carré dans $\mathbb{Q}$. L'ensemble des nombres $a+b\sqrt{r}$, avec $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$, noté $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$, un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et c'est un sous-groupe Archimédien car il n'est pas discret. Démontrons cela élémentairement :

Si n est la partie entière de $\sqrt{r}$, soit $u_k=(\sqrt{r}-n)^k$. La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constituée d'éléments strictement positifs du groupe (binôme de Newton) et a pour limite 0.

Ces groupes sont tous, en tant que groupes, isomorphes à $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ par l'homomorphisme de groupe : $(a,b)\mapsto a+b\sqrt{r}$ qui est injectif car r n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$. Le groupe $\mathbb{Q}^2$ peut donc être muni d'autant d'ordres compatibles avec sa structure de groupe, archimédiens. Ces ordres sont tous différents : si $\sqrt{r_1}<\dfrac{p}{q}<\sqrt{r_2}$ $(q>0)$ alors $-p+q\sqrt{r_1}<0+0\sqrt{r_1}$, donc $(-p,q)<(0,0)$ pour l'ordre provenant de r_1 et c'est l'inégalité inverse pour l'ordre provenant de r_2.

On peut se demander si ces ordres, tout en étant différents, peuvent être isomorphes. La proposition suivante répond en partie à cette question (voir aussi X.5 exercice 6) :

Les groupes ordonnés $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$ où r et s sont des rationnels >0 non carrés dans $\mathbb{Q}$ sont isomorphes si, et seulement si, le rationnel r/s est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Montrons que si les groupes ordonnés $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$ sont isomorphes, ils sont égaux.

Soit φ un isomorphisme entre ces deux groupes ordonnés ; il est donc strictement croissant. Considérons qu'il s'agit d'un homomorphisme strictement croissant de $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'homomorphisme $f(x)=x\varphi(1)$ est aussi strictement croissant de $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ dans $\mathbb{R}$ et coïncide avec φ en 1. On démontre dans l'exercice 1 que dans ce cas $f=\varphi$. Pour tout x dans $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ on a donc :

$$\varphi(x)=x\varphi(1) \text{ donc } x=\frac{\varphi(x)}{\varphi(1)}\in\mathbb{Q}(\sqrt{s}) .$$

On en déduit que $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ est inclus dans $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$. Par raison de symétrie les deux groupes sont donc égaux.

Le lecteur pourra facilement terminer la démonstration en prouvant que les groupes $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{s})$ sont égaux si, et seulement si, le rapport r/s est le carré d'un rationnel et conclure en justifiant qu'on obtient par cette méthode une infinité de structures de groupe archimédien sur $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ non isomorphes entre elles.

Le groupe $\mathbb{Q}^2$ peut aussi être muni de l'ordre lexicographique, ce qui lui donne une autre structure de groupe totalement ordonné (§ I.2 exercice 4) qui n'est pas archimédienne car (0,1) ne peut être majoré par aucun multiple entier de (1,0).

Ce résultat est aussi vrai par isomorphisme de groupe pour chacun de ces groupes $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ et en particulier pour $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice 6 :

> Soit (x_n) une suite de réels. Sachant que les suites extraites (x_{2n}), (x_{2n+1}) et (x_{3n}) sont convergentes, montrer que (x_n) converge. Les deux premières hypothèses suffisent-elles ? ■

Soit Lp la limite de (x_{2n}), Li la limite de (x_{2n+1}) et Lt la limite de la suite (x_{3n}). Montrons d'abord que ces trois limites sont nécessairement identiques si elles existent.

La suite (x_{6n}) est extraite de (x_{2n}) et de (x_{3n}), elle est donc convergente et sa limite ne peut être que $Lp = Lt$. De même la suite (x_{6n+3}) est extraite de (x_{2n+1}) et de (x_{3n}) et est convergente de limite $Li = Lt$. Donc $Lp = Li$.

La suite (x_n) est donc convergente vers $Li = Lp$.

La suite $(-1)^n$ vérifie les deux premières hypothèses et n'est pas convergente.

§ I.6 *PUISSANCES, EXPONENTIELLES, LOGARITHMES*

Exercice 5 :

> Résoudre l'équation $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. ■

On écrit cela $4^x\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ou encore : $\dfrac{3}{2}4^x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}3^x$. La résolution est ensuite immédiate en prenant le logarithme.

Exercice 7 :

> Montrer que le nombre $\mathrm{Log}_{10}5 + \mathrm{Log}_{10}3$ est irrationnel. ■

Supposons que ce nombre soit $\dfrac{p}{q}$ irréductible. Donc Log 15 = $\dfrac{p}{q}$ Log 10, donc $15^q = 10^p$, donc $3^q5^q = 2^p5^p$. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers on aurait $p = 0 = q$, ce qui est exclu car $q > 0$.

Exercice 8 :

> Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$, x étant u

On pourrait prétendre la solution $x = 40$ évidente. Mais comment trouver cela et comment démontrer que c'est la seule solution ?

Supposons que $x \geq 0$ soit solution et posons $u = \sqrt[4]{41+x}, v = \sqrt[4]{41-x}$, $s = u + v$ et $p = uv$. Par hypothèse : $s = 4$ et $u^4 + v^4 = 82$; en développant $(u+v)^4$ on obtient les conditions nécessaires suivantes :

$$u^4 + v^4 + 4(u^2+v^2)uv + 6u^2v^2 = (u+v)^4$$
$$82 + 4(s^2 - 2p)p + 6p^2 = s^4$$
$$82 + 4(16-2p)p + 6p^2 = 256$$
$$-2p^2 + 64p - 174 = 0$$
$$p^2 - 32p + 87 = 0 \text{ donc nécessairement } p = 3 \text{ ou } p = 29.$$

u et v sont donc nécessairement racines des équations :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ ou } x^2 - 4x + 29 = 0.$$

La deuxième n'a pas de racines réelles ; la première a pour racines 1 et 3 donc, comme $v \leq u$ puisque $x \geq 0$, nécessairement $v = 1$ et $u = 3$. Il y a donc une seule solution possible : $x = 40$. On vérifie que c'est effectivement une solution donc la seule solution.

Exercice 10 :

> Deux naturels distincts peuvent-il vérifier la relation $a^b = b^a$?
> Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^2$ vérifiant cette égalité. ■

Pour répondre à la première question des moyens élémentaires suffisent.

Les égalités suivantes sont équivalentes :

$$a^b = b^a$$
$$b.\text{Log}\, a = a.\text{Log}\, b$$
$$\frac{\text{Log}\, a}{a} = \frac{\text{Log}\, b}{b}.$$

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{\text{Log}\, x}{x}$ est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, \infty[$. Un couple (a, b) d'entiers différents ne peut être solution que si le plus petit, a, est 2 (ou 1) ; la valeur du plus grand b étant unique c'est visiblement 4. La seule solution est donc $2^4 = 4^2$.

Pour répondre à la deuxième question nous utiliserons les lemmes suivants :

> Lemme 1 : Si la puissance $k > 0$ d'un rationnel r est entière, ce rationnel est entier.

Posons $r = \dfrac{p}{q}$ irréductible. Soit m entier tel que :

$$m = r^k \text{ ce qui équivaut à } q^k m = p^k ,$$

q est premier avec p et divise p^k donc $q = 1$.

Fin du lemme 1.

> Lemme 2 : Si p, q, n, m sont des entiers > 0, p et q premiers entre eux, et $n^p = m^q$ alors il existe un entier r tel que $n = r^q$ et $m = r^p$.

D'après l'identité de Bezout il existe des entiers relatifs a et b tels que $ap + bq = 1$. Donc :

$$m = (m^a)^p (m^q)^b = (m^a n^b)^p = r^p.$$

$r = m^a n^b$ est a priori un rationnel, mais le lemme 1 prouve que c'est un entier. On a aussi $n = r^q$.

Remarquons qu'alors le pgcd de n et m est le plus petit des deux.

Fin du lemme 2.

Posons $a = \dfrac{p}{q}$ et $b = \dfrac{u}{v}$ fractions irréductibles telles que : $a < b$ et $a^b = b^a$. En élevant cette égalité à la puissance qv, on obtient : $a^{qu} = b^{pv}$. Par unicité de l'écriture sous forme irréductible, cette égalité est équivalente à l'égalité des numérateurs et des dénominateurs :

$$p^{qu} = u^{pv} \text{et } q^{qu} = v^{pv}.$$

Comme $a = \dfrac{p}{q} < b = \dfrac{u}{v}$, $pv < qu$, donc nécessairement $p \leq u$ et $q \leq v$. Comme on peut ramener les exposants à des nombres premiers entre eux, d'après le lemme 2, p divise u et q divise v. On peut écrire $u = kp$ et $v = hq$ et $k > h$ puisque $b = \dfrac{u}{v} = \dfrac{kp}{hq} > \dfrac{p}{q} = a$. Les égalités ci-dessus s'écrivent :

$$p^{kpq} = (kp)^{hpq} \quad \text{et} \quad q^{kpq} = (hq)^{hpq} ,$$

ou encore : $p^k = (kp)^h$ et $q^k = (hq)^h$,

ce qui équivaut à : $p^{k-h} = k^h$ et $q^{k-h} = h^h$.

Comme p et q sont premiers entre eux, k et h le sont aussi. Mais k-h et h étant premiers entre eux, le lemme 2 affirme l'existence de deux entiers r et s tels que :

$$p = r^h \quad k = r^{k-h} \quad \text{et} \quad q = s^h \quad h = s^{k-h} .$$

On arrive à l'égalité : $k - h = r^{k-h} - s^{k-h}$.

En posant $d = k - h > 0$: $d = r^d - s^d$.

On constate $r > s$. Si $d > 1$, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} r^d - s^d &= (s + (r-s))^d - s^d \geq d(r-s) + \frac{d(d-1)}{2}(r-s)^2 \\ &> d(r-s) \geq d \quad . \end{aligned}$$

La seule valeur possible de d est 1. Posons $n = h$. On trouve les valeurs suivantes :

$k = n+1, s = h = n, r = k = n+1, p = (n+1)^n, q = n^n, u = kp = (n+1)^{n+1}$,
$v = hq = n^{n+1}$.

Donc : $a = \dfrac{p}{q} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,

et : $b = \dfrac{u}{v} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

On vérifie immédiatement que tous les couples $(a,b), a = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $b = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ satisfont la relation $a^b = b^a$; ce sont donc les couples solutions (pour n =1 on retrouve (2,4)).

Chapitre II

SUITES, INTRODUCTION AUX SÉRIES

§ II.1 *LIMITES DE SUITES RÉELLES*

Exercice 2 :

> Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'on peut calculer $\sqrt[k]{a}$ en utilisant la suite définie par récurrence à partir de $u_0 > 0$ par : $u_{n+1} = \dfrac{k-1}{k} u_n + \dfrac{a}{k u_n^{k-1}}$. Montrer que la convergence est encore quadratique, et que l'on a $0 \leq u_n - a^{1/k} \leq (k-1)(u_{n-1} - u_n)$. ■

Posons $r = \sqrt[k]{a}$.

$$u_{n+1} = \frac{k-1}{k} u_n + \frac{r^k}{k u_n^{k-1}} = u_n - \frac{u_n^k - r^k}{k u_n^{k-1}} = u_n - \frac{P_k(u_n)}{P_k'(u_n)}.$$

On reconnait sous cette forme l'itération de la méthode de Newton appliquée au calcul d'un zéro de $P_k(x) = x^k - r^k$.

P étant un polynôme, étudions le problème général d'une récurrence :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{P(a_n)}{P'(a_n)}.$$

Soit r un zéro simple de P. Posons $b_n = a_n - r$; cette suite vérifie la récurrence :

$$b_{n+1} = b_n - \frac{P(r+b_n)}{P'(r+b_n)} = \frac{Q(b_n)}{P'(r+b_n)},$$

où $Q(x) = xP'(x+r) - P(x+r)$. On constate $Q'(x) = xP''(x+r)$ donc $Q(0) = Q'(0) = 0$. On peut donc poser $Q(x) = x^2 R(x)$. La suite (b_n) est définie (éventuellement) par la relation de récurrence :

$$b_{n+1} = b_n^2 \frac{R(b_n)}{P'(b_n + r)}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$, $P'(x+r) \neq 0$ et $\left| x\dfrac{R(x)}{P'(x+r)} \right| \leq 1/2$. Si la valeur initiale de la suite est dans cet intervalle, ou si elle est définie jusqu'au rang n_0 et entre dans cet intervalle, il est clair qu'elle est définie pour tout n, reste dans l'intervalle et tend vers 0 puisque :

$$|b_{n+1}| \leq 1/2 |b_n|.$$

Si b_n prend la valeur 0, elle est stationnaire en 0, sinon la convergence est au moins quadratique puisque au moins à partir du rang n_0 :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n^2} = \frac{R(b_n)}{P'(b_n + r)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{R(0)}{P'(r)}.$$

Dans l'exercice proposé ci-dessus il est clair que la suite (u_n) est toujours définie et reste à valeurs > 0, si sa valeur initiale est > 0. Montrons ensuite élémentairement que pour tout $n > 0$, $u_n \geq r$. L'inégalité :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^k - r^k}{ku_n^{k-1}} \geq r,$$

équivaut à :

$$ku_n^{k-1}(u_n - r) \geq (u_n^k - r^k) = (u_n^{k-1} + u_n^{k-2}r + \cdots + u_n r^{k-2} + r^{k-1})(u_n - r).$$

On vérifie cela facilement, que u_n soit plus grand ou plus petit que r.

La formule :

$$u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^k - r^k}{ku_n^{k-1}},$$

montre alors que la suite (u_n) est décroissante au moins à partir du rang 1 ($u_1 \geq u_2 \geq u_3 \ldots$). Elle est donc convergente vers un nombre $L \geq r$ vérifiant :

$$0 = \frac{L^k - r^k}{kL^{k-1}}.$$

La limite est donc r et, d'après ce qui précède, la convergence est nécessairement quadratique.

Exercice 7 :

> Soit des réels a, b tels que $0 < a < b$. On définit par récurrence les suites (u_n) et (v_n) à partir de $u_0 = a, v_0 = b$ par :
>
> $(\forall n \geq 0)\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n),\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$ (suites de Schwob).
>
> Montrer que ces suites convergent. Soit $\varphi \in \left]0, \pi/2\right[$ tel que $a = b\cos\varphi$. Exprimer leur limite commune en fonction de b et φ. ■

Réc

Supposons $u_n < v_n$, ce qui est vrai pour $n = 0$. Alors $u_n < u_{n+1} < v_n$ et $u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$ puisque les moyennes arithmétiques et géométriques de deux nombres sont entre ceux-ci. On déduit de cela que (u_n) est cr
décroissante et que v_n majore (strictement) u_n. On vérif

$0 < v_{n+1} - u_{n+1} < v_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ et que par conséquent $v_n - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Ces deux suites sont donc adjacentes et ont une limite commune.

Pour avoir une idée des valeurs de u_n et v_n si on pose $a = b\cos\varphi$, calculons quelques termes :

$$u_1 = \frac{1}{2}(b\cos\varphi + b) = b\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

et
$$v_1 = \sqrt{b\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)b} = b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(b\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}\right)$$

et
$$v_2 = b\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{4}\right).$$

On voit à peu près les valeurs de u_n et v_n mais la solution vient de la remarque que :

$$\cos(\alpha/2) = \frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)},$$

donc :

$$v_1 = b\frac{\sin\varphi}{2\sin(\varphi/2)},$$

et :

$$v_2 = b\frac{\sin\varphi}{2\sin(\varphi/2)} \cdot \frac{\sin(\varphi/2)}{2\sin(\varphi/4)} = b\frac{\sin\varphi}{4\sin(\varphi/4)}.$$

Vérifions les formules suivantes par récurrence :

$$v_n = \frac{b\sin\varphi}{2^n\sin\left(\varphi/2^n\right)} \text{ et } u_n = v_n\cos\left(\varphi/2^n\right).$$

C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour n alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}v_n\left(1 + \cos\left(\varphi/2^n\right)\right) = v_n\cos^2\left(\varphi/2^{n+1}\right),$$

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\left(\varphi/2^{n+1}\right) = \frac{b\sin\varphi}{2^n\sin\left(\varphi/2^n\right)} \cdot \frac{\sin\left(\varphi/2^n\right)}{2\sin\left(\varphi/2^{n+1}\right)},$$

$$v_{n+1} = \frac{b\sin\varphi}{2^{n+1}\sin\left(\varphi/2^{n+1}\right)},$$

$$u_{n+1} = v_n\cos\left(\varphi/2^{n+1}\right)\cos\left(\varphi/2^{n+1}\right) = v_{n+1}\cos\left(\varphi/2^{n+1}\right).$$

Ces formules sont donc vérifiées pour tout n.

Comme $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ on en déduit facilement que la limite commune de (u_n) et de (v_n) est $b\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$.

Exercice 8 :

Soit $b>1$ et la suite réelle (u_n) définie par récurrence à partir de $u_0 = a\ (a>0)$ par : $u_{n+1} = a + \frac{1-b^{-n}}{2}u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Montrer que la suite (u_n) est bornée, qu'elle est croissante et trouver sa limite.
On considère ensuite une suite (v_n) qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} \leq a + \frac{1-b^{-n}}{2}v_n$. Montrer que $v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la suite (v_n) est majorée mais qu'elle n'est pas nécessairement convergente. ■

Il est clair par récurrence que pour tout n, $a \leq u_n \leq 2a$. Montrons aussi par récurrence que (u_n) est croissante :

$u_0 = a$ et $u_1 = a + 0\cdot a = u_0$. Supposons $u_{n-1} \leq u_n$. Comme $b>1$ la suite $\left(\frac{1-b^{-n}}{2}\right)$ est croissante positive, donc $u_n = a + \frac{1-b^{-n+1}}{2}u_{n-1} \leq a + \frac{1-b^{-n}}{2}u_n$ $= u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc bien croissante.

La suite (u_n) étant croissante majorée admet donc une limite L. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité : $a + \frac{1-b^{-n}}{2}u_n = u_{n+1}$ on voit que $a + \frac{1}{2}L = L$ et donc $L = 2a$.

Si pour tout n entier, $v_{n+1} \leq a + \frac{1-b^{-n}}{2}v_n$, alors pour $n = 0$, $v_1 \leq a = u_1$. On voit alors par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$ et que donc la suite (v_n)est majorée par $2a$ comme (u_n).

Prenons pour tout $n>0$ une valeur de v_{n+1} comprise entre a et $a + \frac{1-b^{-n}}{2}a$, on aura toujours la relation $v_{n+1} \leq a + \frac{1-b^{-n}}{2}v_n$ puisque $v_n \geq a$. On peut évidemment choisir une telle suite non convergente car les intervalles $\left[a, a + \frac{1-b^{-n}}{2}a\right]$ forment une suite croissante pour l'inclusion.

Exercice 10

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ et la suite des moyennes (v_n) de terme général : $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$.

a) Montrer que si la suite (u_n) croit, il en est de même pour la suite (v_n).

b) Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

c) Les réciproques sont-elles vraies ? ■

a) Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$v_n \leq v_{n+1},$$
$$(n+1)(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \leq n(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1}),$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \leq nu_{n+1} \text{ c'est-à-dire } v_n \leq u_{n+1}.$$

Si la suite (u_n) est croissante, cette dernière inégalité est bien vérifiée, donc dans ce cas la suite (v_n) est croissante.

b) Supposons que (u_n) ait pour limite l'infini . Soit M réel, il existe N entier tel que :

$$\forall n \geq N \quad (u_n \geq M+1).$$

Pour $n \geq N$ on peut minorer v_n :

$$v_n \geq \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{N-1}}{n} + \frac{n-N}{n}(M+1).$$

N étant fixé, ce minorant tend vers $M+1$ quand n tend vers l'infini. On peut donc trouver N' tel que :

$$(\forall n \geq N') \quad \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_{N-1}}{n} + \frac{n-N}{n}(M+1) \geq M.$$

On a donc :

$$\forall n \geq \max(N, N'), \quad v_n \geq M.$$

Cela prouve que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

c) On a vu en a) que si (v_n) est croissante alors pour tout n, $u_{n+1} \geq v_n$. Si $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ on aura aussi $u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Donnons un exemple où (v_n) est croissante sans que (u_n) le soit :

prenons $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et pour $p > 0$, $u_{2p+1} = 2p+2$ et $u_{2p+2} = 2p+1$. On voit facilement que si n est pair ($n > 0$) :

$$v_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

et que si n est impair ($n > 1$) :

$$v_n = \frac{(1+2+\ldots+n)+1}{n} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{n}.$$

Donc pour tout $p > 0$:

$$v_{2p} < v_{2p+1} \text{ puisque } \frac{2p+1}{2} < \frac{2p+2}{2} + \frac{1}{2p+1},$$

et :

$$v_{2p+1} < v_{2p+2} \text{ puisque } p+1+\frac{1}{2p+1} < \frac{2p+3}{2} .$$

Comme de plus $v_1 = 1 < v_2 = \frac{3}{2}$, la suite (v_n)est bien croissante.

Donnons un exemple où (v_n) tend vers l'infini et où (u_n) n'a pas de limite :

Si $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$ un calcul simple donne $v_{2n} = \frac{n+1}{2}$ et $v_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{n+1}{2}$. Il est clair que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, et que (u_n) n'a ni limite finie ni infinie.

Exercice 11 :

> Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\sigma(n)} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$. ■

D'une manière ou d'une autre la solution de cette question est liée au fait que si $a > 0$, $\{n, u_n \geq a\}$est fini puisque $u_n < a$ est vrai à partir d'un certain rang.

Introduisons sur $\mathbb{N}$ un autre ordre, R , défini par : nRm si $u_n > u_m$ ou si $u_n = u_m$ et $n \leq m$. C'est-à-dire qu'on classe les entiers suivant la valeur de u_n (ordre décroissant) puis en cas d'ex-aequo suivant leur valeur. Cet ordre (lexicographique) est total. Pour m donné, nRm implique $u_n \geq u_m > 0$. Pour tout m, l'ensemble $\{n, nRm\}$ est donc fini non vide et a donc un plus petit et un plus grand élément pour R. On montre alors facilement que cet ordre est un bon ordre isomorphe à l'ordre usuel dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection σ strictement croissante de réciproque strictement croissante de $(\mathbb{N}, \leq)$ vers $(\mathbb{N}, R)$.

Si $n \leq m$ alors $\sigma(n)\ R\ \sigma(m)$ donc $u_{\sigma(n)} \geq u_{\sigma(m)}$. La suite $(u_{\sigma(n)})$ est donc décroissante, sa limite ne peut être que 0, sinon (u_n) serait minorée par un nombre $L > 0$.

Remarquons qu'en utilisant une méthode analogue, on peut démontrer que si (u_n) est une suite de réels de limite $+\infty$, on peut trouver une bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ soit croissante de limite $+\infty$.

Exercice 12 :

> Si l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective, alors $f(n) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. ■

Soit M dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, f(n) < M\}$ est fini puisque (image réciproque d'un ensemble fini par une application injective). Soit N un majorant de cet ensemble ; pour tout $n > N$, $f(n) \geq M$. La proposition est donc démontrée.

Exercice 14 :

> a) Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+m} \leq u_m + u_n$ pour tous entiers m et $n \geq 0$. Montrer que $\frac{u_n}{n}$ tend vers $-\infty$ ou vers une limite finie.
> b) Soit (v_n) une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que $v_{m+n} \leq v_m v_n$ pour tous entiers ≥ 0, m et n. Montrer que la suite $\left(\sqrt[n]{v_n}\right)$ converge et que sa limite est $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}}\left(\sqrt[n]{v_n}\right)$. ■

Pour m fixé > 0 écrivons la division euclidienne de n par m : $n = dm+r$ où $0 \leq r < m$. On voit facilement que :

$$u_n = u_{dm+r} \leq du_m + u_r \text{ (y compris si } d = 0).$$

Posons $x_n = \frac{u_n}{n}$. On en déduit les propositions suivantes équivalentes :

$$nx_n \leq mdx_m + rx_r,$$
$$nx_n \leq (n-r)x_m + rx_r,$$
$$x_n \leq x_m + \frac{r}{n}(x_r - x_m).$$

Les nombres $r(x_r - x_m)$ étant en nombre fini, soit M_m leur plus grand élément. On a :

$$x_n \leq x_m + \frac{M_m}{n}.$$

Supposons que (x_n) soit minorée et posons $k = \inf\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$, $k + \varepsilon/2$ n'étant pas un minorant on peut trouver m tel que $k \leq x_m \leq k + \varepsilon/2$. Ayant maintenant fixé le nombre m, pour n assez grand $\frac{M_m}{n} < \varepsilon/2$ donc $k \leq x_n < k + \varepsilon$. La suite (x_n) a donc dans ce cas pour limite sa borne inférieure.

Supposons (x_n) non minorée. Soit M réel, $M - 1$ n'est pas un minorant donc on peut trouver m tel que $x_m < M - 1$. Le nombre m étant maintenant fixé, pour n assez grand $\frac{M_m}{n} < 1$ et $x_n < M$. La suite (x_n) tend donc dans ce cas vers $-\infty$ (qui est aussi sa borne inférieure).

b) Si la suite (v_n) prend la valeur 0 en m, alors pour tout $n \geq 0$, $0 \leq v_{n+m} \leq v_n v_m = 0$. La suite est donc nulle à partir du rang m et le résultat est vrai.

Sinon on peut poser $u_n = \text{Log}(v_n)$; la suite (u_n)vérifie les hyp

On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{Log}(v_n)}{n}\right)$ est convergente vers sa borne inférieure réelle ou $-\infty$. La suite $\left(\sqrt[n]{v_n}\right)$ est donc convergente vers sa borne inférieure dans les deux cas.

Exercice 15

> Soit (a_n) une suite réelle telle que, pour tous naturels m et n : $a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1$.
>
> a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ converge. On note λ sa limite.
>
> b) Montrer que $(\forall n)\ \lambda n - 1 \le a_n \le \lambda n + 1$. ■

a) Posons pour tout n entier $b_n = a_n + 1$. On vérifie que pour tous n et m entiers $b_{n+m} < b_m + b_n$. Il découle de l'exercice précédent 14a), que la suite $\left(\dfrac{b_n}{n}\right)$ est convergente vers un réel B qui est sa borne inférieure, ou a pour limite $-\infty$. La suite $\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{b_n}{n} - \dfrac{1}{n}$ converge donc vers B ou a pour limite $-\infty$.

Posons de manière analogue pour tout n entier $c_n = 1 - a_n$. Pour tous n et m entiers $c_{n+m} < c_m + c_n$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{c_n}{n}\right)$ converge vers un réel C qui est sa borne inférieure, ou a pour limite $-\infty$. La suite $\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{c_n}{n}$ est donc convergente vers $-C$ ou a pour limite $+\infty$.

Il est alors évident que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ a une limite finie $B = -C = \lambda$.

b) On reprend les notations du a).

La borne inférieure de la suite $\dfrac{b_n}{n}$ est λ. On en déduit que pour tout entier n :

$$\frac{a_n}{n} + \frac{1}{n} \ge \lambda \text{ ce qui équivaut à } a_n \ge n\lambda - 1.$$

De même $-\lambda$ est la borne inférieure de $\dfrac{c_n}{n}$.

On en déduit que pour tout entier n :

$$\frac{1}{n} - \frac{a_n}{n} \ge -\lambda \text{ ce qui équivaut à } 1 + n\lambda \ge a_n.$$

Exercice 16 :

> a) Soit (u_n) une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que :
>
> $\dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{nu_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\dfrac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n^2u_n} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

b) Soit (u_n) une suite de réels non nuls, et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{nu_n} \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$.

Montrer que : $\dfrac{u_1+2u_2+\ldots+nu_n}{n^2u_n} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

Nous utiliserons dans la résolution de cet exercice la généralisation suivante du lemme de Cesaro :

Si $\sum a_n$ est une série divergente de nombres > 0 et (u_n) une suite de nombres réels ou complexes de limite L, la suite de terme général $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$ a pour limite L.

a) Posons : $s_n = u_1+u_2+\ldots+u_n$ et $v_n = \dfrac{s_n}{nu_n}$. La suite (v_n) a pour limite $\alpha \geq 0$ et (s_n) qui est une suite croissante strictement positive a une limite finie ou $+\infty$. Comme $nu_n = \dfrac{s_n}{v_n}$, on voit que dans tous les cas, (nu_n) a une limite finie > 0 ou bien $nu_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Calculons la somme :

$$\sum_{i=1}^{n}(iu_i+s_i) = \sum_{i=1}^{n} iu_i + \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} iu_i + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)u_i = \sum_{i=1}^{n}(n+1)u_i = (n+1)s_n.$$

Or $s_i = iu_iv_i$, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}(1+v_i)iu_i = (n+1)nu_nv_n,$$

donc en divisant par n^2u_n on obtient :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1+v_i)iu_i}{n^2u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)v_n \underset{n\to\infty}{\to} \alpha.$$

D'autre part comme (nu_n) est positive de limite finie > 0 ou infinie, la série $\sum iu_i$ est divergente ; d'après la généralisation du lemme de Cesaro on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(1+v_i)iu_i}{\sum_{i=1}^{n}iu_i} \underset{n\to\infty}{\to} 1+\alpha.$$

En faisant le quotient, on obtient le résultat demandé.

b) Reprenons les notations du a).

$u_{n+1} = s_{n+1} - s_n = (n+1)u_{n+1}v_{n+1} - nu_nv_n$, donc $nv_nu_n = [(n+1)v_{n+1} - 1]\,u_{n+1}$. Comme (v_n) a une limite strictement positive α, (nv_n) tend vers $+\infty$ et à partir d'un rang N, nv_n et $(n+1)v_{n+1} - 1$ sont tous les deux strictement positifs. Il est clair que u_n garde un signe constant après le rang N. En remplaçant éventuellement u_n par $-u_n$, ce qui ne change pas v_n, on peut se ramener au cas où u_n est strictement positive à partir d'un certain rang N. La suite $s_n = nu_nv_n$ est strictement positive à partir du rang N et croissante strictement, donc a une limite > 0 ou $+\infty$. La suite de terme général $nu_n = \dfrac{s_n}{v_n}$ a donc aussi une limite finie $L > 0$ ou $+\infty$. Le premier cas est exclu, car alors u_n est le terme général d'une série divergente, $s_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$et $nu_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$(puisque $\alpha > 0$), ce qui est contradictoire.

A partir de là on voit qu'on peut remplacer, sans changer les limites, les N premiers termes de (u_n) par des valeurs quelconques positives, par exemple 1. On peut donc appliquer le résultat du a) pour conclure.

Exercice 19 :

> Soit deux réels p et q tels que $1 < p < q$. On définit, pour $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $n \mapsto \mathrm{Ent}(n\alpha)$, c'est-à-dire la partie entière de $n\alpha$.
> a) Montrer que f_p et f_q sont injectives.
> b) Montrer : pour que $\mathrm{Im}(f_p)$ et $\mathrm{Im}(f_q)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, il faut et il suffit que p et q soient irrationnels et que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. ■

a) Supposons $\alpha \geq 1$ et montrons que f_α est strictement croissante donc injective.

Si $m > n$, alors $m\alpha \geq (n+1)\alpha \geq n\alpha + 1$, donc $\mathrm{Ent}(m\alpha) \geq \mathrm{Ent}(n\alpha + 1)$ $= \mathrm{Ent}(n\alpha) + 1$.

b) 1) Supposons p et q irrationnels et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

– Montrons que les images de f_p et de f_q sont disjointes :

Si $k = \text{Ent}(np) = \text{Ent}(mq)$ alors :

$$k < np < k+1 \text{ et } k < mq < k+1.$$

Il ne peut pas y avoir d'égalité puisque p et q sont irrationnels. On en déduit :

$$\frac{k}{p} < n < \frac{k+1}{p} \text{ et } \frac{k}{q} < m < \frac{k+1}{q}.$$

En faisant la somme de ces deux inégalités on obtient : $k < n+m < k+1$, ce qui est impossible puisque n, m et k sont des entiers.

– Montrons que $\text{Im}(f_p)$ et $\text{Im}(f_q)$ recouvrent $\mathbb{N}^*$.

Supposons que k entier ne soit pas dans $\text{Im}(f_p)$ et posons $n = \text{Ent}\left(\frac{k}{p}\right)$; alors $np < k < (n+1)p$ et $(n+1)p$ ne peut pas être entre k et k+1 sinon $f_p(n+1) = k$; donc :

$$np < k < k+1 < (n+1)p.$$

On tire de ces inégalités les inégalités équivalentes suivantes :

$$n < \frac{k}{p} < (k+1)\frac{1}{p} < n+1,$$

$$n < k\left(1-\frac{1}{q}\right) < (k+1)\left(1-\frac{1}{q}\right) < n+1,$$

$$\frac{k}{q} < k-n < \frac{k+1}{q},$$

$$k < q(k-n) < k+1.$$

Cette dernière inégalité prouve que $f_q(k-n) = k$, k est donc alors dans $\text{Im}(f_q)$.

2) Supposons maintenant inversement que $\text{Im}(f_p)$ et $\text{Im}(f_q)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$ et montrons que p et q sont irrationnels et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Les éléments de $\text{Im}(f_p)$ et de $\text{Im}(f_q)$ sont $\text{Ent}(p) < \text{Ent}(2p) < \cdots$ et $\text{Ent}(q) < \text{Ent}(2q) < \cdots$. Comme 1 est dans l'une des images et que $p < q$, nécessairement $1 = \text{Ent}(p)$, donc $1 < p < 2$.

Notons $p = 1+\frac{1}{k}$ où k est un réel >1 et montrons que $\text{Im}(f_p)$ est constituée de segments dans $\mathbb{N}$ séparés par des "trous" d'un seul élément.

Soit n_1 le premier entier après k ($n_1 - 1 < k \leq n_1$), n_2 le premier entier après $2k$ ($n_2 - 1 < 2k \leq n_2$) et d'une manière générale n_i le premier entier après ik ($n_i - 1 < ik \leq n_i$).

$$f_p(n) = \text{Ent}\left(n\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) = n + \text{Ent}\left(\frac{n}{k}\right),$$

donc :

– si $1 \le n < n_1$, $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{k}\right) = 0$, $f_p(n) = n$,

valeurs prises : $1, 2, \cdots, n_1 - 1$

– si $n_1 \le n < n_2$, $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{k}\right) = 1$, $f_p(n) = n + 1$,

valeurs prises : $n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n_2$.

– si $n_2 \le n < n_3$, $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{k}\right) = 2$, $f_p(n) = n + 2$,

valeurs prises : $n_2 + 2, n_2 + 3, \cdots, n_3 + 1$.

...

– si $n_{i-1} \le n < n_i$, $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{k}\right) = i - 1$, $f_p(n) = n + i - 1$;

valeurs prises. : $n_{i-1} + i - 1, n_{i-1} + i, \ldots\ldots, n_i + i - 2$.

– si $n_i \le n < n_{i+1}$, $\mathrm{Ent}\left(\frac{n}{k}\right) = i$, $f_p(n) = n + i$,

valeurs prises : $n_i + i, n_i + i + 1, \ldots\ldots, n_{i+1} + i - 1$.

Les lacunes dans la suite des valeurs prises par f_p sont donc $n_1, n_2 + 1, \cdots, n_i + i - 1, \cdots$. Ces lacunes sont nécessairement les valeurs prises dans l'ordre par f_q, donc, pour tout $i > 0$, $\mathrm{Ent}(iq) = n_i + i - 1$. On en déduit pour tout entier $i > 0$ les inégalités ($n_i - 1 < ik \le n_i$) :

$$ik + i - 1 \le n_i + i - 1 \le iq < n_i + i < ik + 1 + i \quad \text{d'où} \quad k + 1 - \frac{1}{i} \le q < k + 1 + \frac{1}{i}.$$

Donc $q = k + 1$, et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1}{k+1} = 1$.

Montrons aussi que p et q sont nécessairement irrationnels.

Si p est rationnel, k l'est aussi. Notons alors $k = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont des entiers premiers entre eux.

$$p = 1 + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{a} \text{ et } q = k + 1 = \frac{a+b}{b},$$

$$f_p(a) = \mathrm{Ent}(a+b) = a + b \text{ et } f_q(b) = \mathrm{Ent}(a+b) = a + b.$$

Cela est en contradiction avec l'hypothèse que $\mathrm{Im}(f_p)$ et $\mathrm{Im}(f_q)$ sont disjointes.

Exercice 23 :

> On donne $u_0 > 0$ et la suite réelle définie par
> $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.
>
> ■

La suite (u_n) est positive et comme : $u_{n+1}^2 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} +$

elle est croissante. Elle a donc une limite finie $L \geq 0$ ou tend vers $+\infty$. Dans le premier cas, la limite finie L de (u_n) vérifierait : $L^2 = L^2 + L$, donc $L = 0$; c'est impossible puisque $u_0 > 0$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Exercice 24 :

> Montrez que $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{n}}}}}$ converge vers une limite $\lambda = 1{,}757932\cdots$ avec $|u_n - \lambda| \leq ((n-1)!)^{-1/2}$. ■

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$, est évidemment positive croissante. Pour la majorer, remplaçons comme indiqué, n par $n+n+1 \geq n$ dans la dernière racine. La suite obtenue (v_n) sera décroissante à partir du rang 2 car :

$$v_{n+1} \leq v_n \text{ équivaut à : } n + \sqrt{2n+3} \leq 2n+1,$$

$$\text{soit : } (n+1)^2 \geq 2n+3 \text{ ou encore : } n^2 \geq 2 .$$

La suite (v_n) ainsi obtenue est donc majorée par v_2 ; comme elle majore (u_n) cela prouve que u_n est elle-même majorée donc convergente, vers une limite λ majorée par tous les v_n pour $n \geq 2$.

Posons pour $n \geq p$:

$$u_{n,p} = \sqrt{p+\sqrt{p+1+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}$$

et $$v_{n,p} = \sqrt{p+\sqrt{p+1+\sqrt{\ldots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}}}}$$

On voit que :

$$v_{n,p}^2 - u_{n,p}^2 = v_{n,p+1} - u_{n,p+1} ,$$

donc :

$$v_{n,p} - u_{n,p} = \frac{v_{n,p+1} - u_{n,p+1}}{v_{n,p} + u_{n,p}} \leq \frac{v_{n,p+1} - u_{n,p+1}}{2\sqrt{p}},$$

car $\sqrt{p}$ minore $u_{n,p}$ et $v_{n,p}$.

La première majoration est : $v_n - u_n = v_{n,1} - u_{n,1} \leq \dfrac{v_{n,2} - u_{n,2}}{2\sqrt{1}}$.

La dernière est : $v_{n,n} - u_{n,n} = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{n+1}{2\sqrt{n}}$.

On en déduit la majoration : $v_n - u_n \leq \dfrac{n+1}{2^n\sqrt{n!}}$ et donc pour $n \geq 2$: $\lambda - u_n \leq \dfrac{n+1}{2^n\sqrt{n!}}$.

Pour $n = 1$ la majoration est aussi vérifiée car

$\lambda - u_1 \leq v_2 - u_1 = \sqrt{1+\sqrt{5}} - 1 < 1$.

On obtient la majoration proposée car :

$$\forall n \geq 1,\ 2^n \geq (n+1) \quad \text{d'où} \quad \forall n \geq 1, \frac{n+1}{2^n\sqrt{n}} \leq 1.$$

On peut obtenir les valeurs de u_n par la fonction Pascal suivante :

```
function radic (n : integer) : real ;
var
i : integer ;
r : real ;
begin
     r := 0 ;
     for i := n downto 1
            r := sqrt(i + r) ;
     radic := r ;
end ;
```

Exercice 25 :

> Une certaine suite (u_n) est telle que les suites extraites (a_n), (b_n), (c_n) où $a_n = u_{3n+2}, b_n = u_{4n+1}, c_n = u_{5n+3}$ convergent. La suite (u_n) converge-t-elle ? ■

Les entiers de la forme $60n$ ne sont dans aucune des suites $3n+2$, $4n+1$, $5n+3$, car $60n$ est congru à 0 modulo 3, 4 et 5. Il est clair que la suite (u_{60n}) n'est pas "liée" par les suites extraites de l'énoncé. Précisément, définissons par exemple la suite (u_n) par $u_n = 1$ si 60 divise n, et 0 sinon. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont constantes égales à 0, la suite $(u_{60\,n})$ est constante égale à 1. La suite (u_n) n'est pas convergente.

On peut cependant remarquer que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) ont nécessairement même limite, car la suite $(u_{60\,n+53})$ est extraite de ces trois suites puisque $60n+53$ est congru à 2 modulo 3, 1 modulo 4 et 3 modulo 5.

§ II.2 *SUITES À VALEURS DANS $\mathbb{R}^p$ OU À VALEURS DANS $\mathbb{C}$*

Exercice 1 :

> Construire une suite complexe $(z_n) = (x_n + iy_n)$ telle que (x_n) et (y_n) admettent des suites extraites convergentes, mais que (z_n) n'en admette pas. ■

Prenons par exemple $x_n = n$ si n pair , 0 sinon, et $y_n = n$ si n in

Pour tout n, $|z_n| = n$; la suite (z_n) n'admet donc aucune suite extraite bornée, ni a fortiori convergente. Pourtant les suites (x_{2n+1}) et (y_{2n}) sont convergentes.

Exercice 2 :

> Soit (a_n), (b_n) deux suites complexes tendant vers 0. On suppose trouvé $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
> $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq M$ pour tout n. Montrez que : $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. ■

Soit $\varepsilon > 0$ et p tel que :

$$\forall n > p, \left(|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} M \right).$$

En décomposant la somme en deux parties, à la manière de Cesaro, on obtient :

$$|a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1| \leq |a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_p b_{n+1-p}| + |a_{p+1}||b_{n-p}| + \cdots + |a_{n+1}||b_1|.$$

La deuxième partie est évidemment majorée par $\varepsilon/2$ et, pour p fixé, la première tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il y a en effet dans cette somme un nombre fini fixe de termes, chacun de limite nulle. On peut donc trouver un entier q ($> p$) tel que pour $n > q$ cette première partie soit majorée par $\varepsilon/2$. On obtient alors :

$$\forall n > q, (|a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots\ldots + a_n b_1| < \varepsilon).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 8 :

> Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_n}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et (s_n) une suite complexe convergeant vers $s \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\dfrac{s_0 u_n + s_1 u_{n-1} + \ldots + s_n u_0}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} \underset{n\to\infty}{\to} s$. ■

Comme dans beaucoup d'exercices de ce type il est commode de se ramener au cas où $s = 0$ en posant $z_n = s_n - s$, suite de limite nulle. En effet si

$$\frac{z_0 u_n + z_1 u_{n-1} + \ldots + z_n u_0}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

alors :

$$\frac{s_0 u_n + s_1 u_{n-1} + \ldots + s_n u_0}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} = \frac{(z_0 + s)u_n + (z_1 + s)u_{n-1} + \ldots + (z_n + s)u_0}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} =$$

$$= \frac{z_0 u_n + z_1 u_{n-1} + \ldots + z_n u_0}{u_0 + u_1 + \ldots + u_n} + s \underset{n}{\to} s \quad .$$

Posons aussi $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Soit $\varepsilon > 0$ et p tel que : $\forall n \geq p$, $\left(|z_n| < \varepsilon/2\right)$,

et M un majorant de la suite $\left(|z_n|\right)$. Comme dans la démonstration du lemme de Cesaro on découpe la somme en deux parties :

$$z_0u_n + z_1u_{n-1} + \ldots + z_nu_0 = z_0u_n + z_1u_{n-1} + \ldots + z_{p-1}u_{n-p+1} + z_pu_{n-p} + \ldots + z_nu_0.$$

On majore la valeur absolue de la somme par la somme des valeurs absolues ; comme les coefficients u_k sont positifs on trouve :

$$|z_0u_n + z_1u_{n-1} + \cdots + z_nu_0| \leq |z_0|u_n + \cdots + |z_{p-1}|u_{n-p+1} + |z_p|u_{n-p} + \cdots + |z_n|u_0.$$

En utilisant les deux majorations de $|z_k|$ on obtient :

$$|z_0u_n + z_1u_{n-1} + \ldots + z_nu_0| \leq M(u_n + u_{n-1} + \ldots u_{n-p+1}) + \varepsilon/2(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-p}),$$

ou encore :

$$|z_0u_n + z_1u_{n-1} + \ldots + z_nu_0| \leq M(v_n - v_{n-p}) + (\varepsilon/2)v_{n-p}.$$

Or la première hypothèse de l'énoncé s'écrit :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ c'est-à-dire, } \frac{v_n - v_{n-1}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ ou encore : } \frac{v_{n-1}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier $q \geq 1$ fixé :

$$\frac{v_{n-q}}{v_n} \underset{n\to\infty,\, n>q}{\longrightarrow} 1.$$

D'où en prenant $q = p$: $\dfrac{M(v_n - v_{n-p}) + (\varepsilon/2)v_{n-p}}{v_n} \underset{n\to\infty,\, n>p}{\longrightarrow} \varepsilon/2.$

On déduit de cela l'existence de $N > p$ tel que :

$$\forall n > N,\ \frac{M(v_n - v_{n-p}) + (\varepsilon/2)v_{n-p}}{v_n} < \varepsilon,$$

donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \frac{|z_0u_n + z_1u_{n-1} + \ldots + z_nu_0|}{v_n} < \varepsilon.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

§ II.3 *EXPONENTIELLE NATURELLE, LOGARITHME NÉPÉRIEN*

Exercice 1 :

> En utilisant une méthode analogue à celle du texte, démontrer que $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < 1.$

En déduire que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\downarrow} \mathrm{e}$, puis, que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\uparrow} \frac{1}{\mathrm{e}}$, n désignant un entier ≥ 1. ■

La première inégalité est équivalente, pour $n > 1$, à :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n,$$

or :

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}.$$

La première inégalité est donc vérifiée.

On en déduit que $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$ est décroissante puisque :

$v_n < v_{n-1}$ équivaut à $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n}$,

ou encore $(n^2-1)^n(n+1) < n^{2n+1}$.

En divisant par n^{2n+1}, on en déduit que :

$v_n < v_{n-1}$ équivaut à : $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$,

inégalité démontrée ci-dessus.

La suite (v_n) est donc bien décroissante et a pour limite e, car :

$$v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 1.\mathrm{e}.$$

D'autre part : $v_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$, donc $\frac{1}{v_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Cette suite tend donc en croissant vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice 2 :

En majorant n par $\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, trouver la limite de la suite $u_n = \sqrt[n]{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n}$. ■

D'après le binôme de Newton, pour tout $n \geq 2$ (ou 1) :

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1+n\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n}=1+2\sqrt{n}+2(n-1),$$

Or :

$$1+2\sqrt{n}+2(n-1)\geq n \text{ équivaut à : } n+2\sqrt{n}\geq 1.$$

Donc pour tout $n \geq 1$:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq n \geq 1 \text{ soit encore } 1+\frac{2}{\sqrt{n}} \geq \sqrt[n]{n} \geq 1.$$

Donc $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, et en prenant le logarithme : $\dfrac{\operatorname{Log} n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Exercice 5 :

> A partir de : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\downarrow} e$ (cf. exercice 1), montrer que $(n+1)\operatorname{Log}\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 1$ et en déduire la majoration :
>
> $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n} < 1+\operatorname{Log} n.$
>
> *Application :* On considère la suite (u_n) définie à partir de $u_0 \in \;]0,1[$ par $u_{n+1}=u_n-u_n^2$. Après avoir montré que $u_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$, on cherchera la limite de (nu_n). ■

La première question est évidente en prenant le logarithme. On en déduit que pour tout entier $n>0$, $\operatorname{Log}\dfrac{n+1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ et que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\operatorname{Log}\frac{2}{1}+\operatorname{Log}\frac{3}{2}+\cdots+\operatorname{Log}\frac{n}{n-1} = 1+\operatorname{Log}\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\right),$$

soit :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\operatorname{Log}(n).$$

Application : $u_{n+1}=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$, il est donc clair que si u_0 est dans $]0,1[$, la suite reste dans cet intervalle et est décroissante. Elle est donc convergente et sa limite L vérifie $L=L-L^2$, donc $L=0$.

La suite $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ vérifie la relation :

$$\frac{1}{v_{n+1}}=\frac{1}{v_n}-\frac{1}{v_n^2}=\frac{v_n-1}{v_n^2} \quad \text{ou encore : } v_{n+1}=\frac{v_n^2}{v_n-1}=v_n+1+\frac{1}{v_n-1}.$$

Comme $v_0 = \dfrac{1}{u_0} > 1$, et que pour tout n, $v_n > 1$ (puisque $u_n < 1$), on obtient la minoration :

$$v_{n+1} > v_n + 1.$$

Il est alors évident par récurrence que pour tout n, $v_n > (n+1)$. On en déduit la majoration :

$$\forall n > 0, v_{n+1} < v_n + 1 + \frac{1}{n} \text{ ; qui équivaut à : } \forall n > 0, v_{n+1} - v_n < 1 + \frac{1}{n}.$$

D'où :

$$v_n = v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \cdots + v_2 - v_1 + v_1 < (n-1) + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{1} + v_1,$$

soit encore :

$$n < n+1 < v_n < n - 1 + 1 + \mathrm{Log}(n-1) + v_1 < n + \mathrm{Log}(n) + v_1.$$

En divisant par n :

$$1 < \frac{1}{nu_n} = \frac{v_n}{n} < 1 + \frac{\mathrm{Log}(n)}{n} + \frac{v_1}{n}.$$

On en déduit : $nu_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

N.B. Autre méthode, repartons de la formule :

$$v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1}.$$

Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, on en déduit : $v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Appliquons à cette suite des différences le lemme de Cesaro. On obtient :

$\dfrac{v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \ldots + v_1 - v_0}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, donc $\dfrac{v_n - v_0}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$. On retrouve bien le résultat précédemment démontré.

§ II.4 *COMPARAISON DES SUITES*

Exercice 1 :

> On définit par récurrence la suite (u_n) de $\mathbb{R}$, à partir de $u_0 = a \geq 0$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \dfrac{1}{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
>
> a) Etudier les cas particuliers a=0 et a=1.
>
> b) Pour a différent de 0 et de 1, calculer $u_{n+2} - 1$ et $u_{n+2} - u_n$ et en déduire que les suites (u_{2p+1}) et (u_{2p}) sont monotones et convergentes.
>
> c) Si $a \in \,]0,1[$, la suite converge. Peut-elle être monotone ?

d) Si $a > 1$ montrer que $0 < u_{2p+2} - 1 < (u_{2p} - 1)\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)^2$.

En déduire (cf. exemple 9) que $u_{2p} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 1$, puis, que la suite (u_n) converge. ■

a) Calculons quelques termes de (u_n), pour la valeur initiale 0 :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{0+\frac{1}{1}} = 1, \quad u_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$u_3 = \frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 1, \quad u_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

On devine les formules :

$$u_{2p} = \frac{2p}{2p+1} \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = 1.$$

La vérification de ces formules par récurrence est sans problème. Procédons de même pour la valeur initiale $a = 1$:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$u_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \quad u_4 = \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1.$$

On devine les formules :

$$u_{2p} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}$$

que l'on démontre ensuite facilement par récurrence.

b) On remarque que la suite est bien définie et positive pour toute valeur initiale $a \geq 0$.

Calculons $u_{n+2} - 1$:

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)u_n + 1} \text{ et } u_{n+2} - 1 = \frac{n+2}{(n+2)\frac{n+1}{(n+1)u_n+1} + 1} - 1.$$

Après quelques transformations on trouve :

$$u_{n+2} - 1 = \frac{(n+1)^2(u_n - 1)}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1} \left(= \frac{(n+1)^2(u_n - 1)}{(n+2)^2 + (n+1)(u_n - 1)} \right).$$

On constate $u_1 = \frac{1}{a+1} < 1$; donc par récurrence il est clair que pour tout $p \geq 0$, $u_{2p+1} < 1$ et d'autre part pour tout $p \geq 0$, $u_{2p} - 1$ est du même signe que $u_0 - 1 = a - 1$.

Calculons $u_{n+2} - u_n$:

$$u_{n+2} - u_n = (u_{n+2} - 1) - (u_n - 1) = (u_n - 1)\left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1} - 1\right),$$

$$u_{n+2} - u_n = (1 - u_n)\frac{(n+1)u_n + (n+2)}{(n+2)(n+1) + (n+1)u_n + 1}.$$

Pour tout $p \geq 0$, $u_{2p+1} < 1$; la suite (u_{2p+1}) est donc croissante majorée par 1 donc convergente.

Si $a > 1$, alors pour tout $p \geq 0$, $u_{2p} > 1$; la suite (u_{2p}) est donc décroissante minorée par 1 donc convergente.

Si $a < 1$, alors pour tout $p \geq 0$, $u_{2p} < 1$; la suite (u_{2p}) est donc croissante majorée par 1 donc convergente.

c) Remarquons que comme $u_{2p+1} = \dfrac{1}{u_{2p} + \dfrac{1}{2p+1}}$, les limites des suites (u_{2p+1}) et (u_{2p}) sont inverses l'une de l'autre. Si $0 < a < 1$, les deux suites sont croissantes et majorées par 1 donc convergentes vers des limites ≤ 1 ; il est alors nécessaire que ces limites soient 1.

La deuxième partie de la question n'est pas de réponse simple. Sa résolution a été reportée à la fin de la correction de cet exercice.

d) Si $a > 1$, d'après les formules trouvées dans b) en minorant u_{2p} par 1 on obtient :

$$u_{2p+2} - 1 = \frac{(2p+1)^2(u_{2p} - 1)}{(2p+2)(2p+1) + (2p+1)u_{2p} + 1} < \frac{(2p+1)^2(u_{2p} - 1)}{(2p+2)(2p+1) + (2p+1) + 1},$$

$$u_{2p+2} - 1 < \frac{(2p+1)^2}{(2p+2)^2}(u_{2p} - 1).$$

Posons $v_n = (n+1)(u_n - 1)$, on a la majoration :

$$v_{2p+2} < \frac{(2p+3)(2p+1)}{(2p+2)^2} v_{2p} = \left(1 - \frac{1}{(2p+2)^2}\right) v_{2p} < v_{2p}.$$

La suite (v_{2p}) étant décroissante, on en déduit :

$$(2p+1)(u_{2p} - 1) \leq a - 1 \text{ d'où } 1 < u_{2p} < 1 + \frac{a-1}{2p+1}.$$

La limite de la suite (u_{2p}) est donc 1. La limite de la suite (u_{2p+1}) est son inverse, 1 aussi, donc la suite (u_n) est convergente vers 1.

Résolution de c) :

Nous noterons plutôt (x_n) la suite étudiée ici pour pouvoir réuti

(u_n) et (v_n) de l'exemple 9, c'est-à-dire les suites définies par les conditions initiales $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$, et les relations de récurrence, pour tout n entier > 0, $u_n = \dfrac{2n-1}{2n}u_{n-1}$ et $v_n = \dfrac{2n}{2n+1}v_{n-1}$; de telle sorte que pour tout $n > 0$:

$$u_n = \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n} \qquad v_n = \frac{2.4.6.\cdots.2n}{3.5.\cdots.(2n+1)}.$$

1) Etablissons d'abord une formule donnant $y_n = 1 - x_n$ en fonction de a et de n. Nous avons établi au b) la formule :

$$1 - x_{n+2} = \frac{(n+1)^2(1-x_n)}{(n+2)^2 - (n+1)(1-x_n)},$$

ce qui équivaut à :

$$y_{n+2} = \frac{(n+1)^2 y_n}{(n+2)^2 - (n+1)y_n}.$$

Cela suggère que, pour n fixé, y_n est une fonction homographique en $y_0 = 1 - a$. Séparons le cas où n est pair du cas où n est impair.

Cherchons des suites d'entiers naturels (a_p), (c_p), (d_p) tels que pour tout $p \geq 0$:

$$y_{2p} = \frac{a_p y_0}{d_p - c_p y_0}.$$

Pour $p = 0$, les valeurs : $a_0 = 1, c_0 = 0, d_0 = 1$ conviennent. Pour $p \geq 0$, si les valeurs a_p, c_p, d_p conviennent, les valeurs entières a_{p+1}, c_{p+1}, d_{p+1} conviendront si, et seulement si, l'égalité suivante est vraie :

$$y_{2p+2} = \frac{(2p+1)^2 \dfrac{a_p y_0}{d_p - c_p y_0}}{(2p+2)^2 - (2p+1)\dfrac{a_p y_0}{d_p - c_p y_0}} = \frac{a_{p+1} y_0}{d_{p+1} - c_{p+1} y_0}.$$

En faisant les calculs on trouve que pour que cette égalité soit vraie, il suffit de donner aux nombres $a_{p+1}, c_{p+1}, d_{p+1}$ les valeurs suivantes :

$$a_{p+1} = (2p+1)^2 a_p, \quad d_{p+1} = (2p+2)^2 d_p, \quad c_{p+1} = (2p+2)^2 c_p + (2p+1)a_p,$$

qui sont bien des entiers naturels.

En conclusion les suites $(a_p), (c_p), (d_p)$ définies par les conditions initiales :

$$a_0 = 1, c_0 = 0, d_0 = 1,$$

et les relations, pour tout $p \geq 0$:

$$a_{p+1} = (2p+1)^2 a_p, \quad d_{p+1} = (2p+2)^2 d_p, \quad c_{p+1} = (2p+2)^2 c_p + (2p+1)a_p,$$

vérifient pour tout $p \geq 0$:

$$y_{2p} = \frac{a_p y_0}{d_p - c_p y_0}.$$

On peut calculer pour $p > 0$ les nombres a_p et d_p ($a_0 = d_0 = 1$) :

$$a_p = (2p-1)^2.(2p-3)^2.\cdots.3^2.1^2, \quad d_p = (2p)^2.(2p-2)^2.\cdots.4^2.2^2.$$

Pour obtenir les valeurs de c_p on peut reprendre les calculs du a) en changeant les notations.

Si $a = 0$, donc $y_0 = 1$,

$x_{2p} = \dfrac{2p}{2p+1}$ ce qui équivaut à $y_{2p} = \dfrac{1}{2p+1} = \dfrac{a_p}{d_p - c_p}$,

d'où pour tout $p \geq 0$,

$c_p = d_p - (2p+1)a_p$.

Comme pour tout $p \geq 0$, $\dfrac{a_p}{d_p} = u_p^2$, on en déduit finalement la formule :

$$\forall p \geq 0, \quad y_{2p} = \frac{u_p^2(1-a)}{1-\left(1-(2p+1)u_p^2\right)(1-a)} = \frac{u_p^2(1-a)}{a+(2p+1)u_p^2(1-a)}.$$

On peut obtenir la valeur de y_{2p+1} en utilisant la formule :

$$x_{2p+1} = \frac{(2p+1)}{(2p+1)x_{2p}+1},$$

ce qui équivaut à :

$$y_{2p+1} = 1 - x_{2p+1} = \frac{(2p+1)(x_{2p}-1)+1}{(2p+1)x_{2p}+1},$$

ou encore :

$$y_{2p+1} = \frac{1-(2p+1)y_{2p}}{(2p+2)-(2p+1)y_{2p}}.$$

En effectuant les calculs on trouve pour tout p entier :

$$y_{2p+1} = \frac{av_p^2}{(2p+2)v_p^2 a + (1-a)}.$$

2) Déduisons en maintenant que les suites $\left((2p+1)y_{2p}\right)$ et $\left((2p+2)y_{2p+1}\right)$ sont convergentes.

Reprenons l'étude des suites décroissantes positives $\left(u_p\right)$ et $\left(v_p\right)$.

Posons $\rho_p = \dfrac{u_p}{v_p}$; cette suite est décroissante car :

$$\frac{\rho_{p+1}}{\rho_p} = \frac{(2p+1)(2p+3)}{(2p+2)^2} = \frac{(2p+2)^2-1}{(2p+2)^2} < 1.$$

Posons aussi pour $p > 0$, $\lambda_p = \dfrac{u_p}{v_{p-1}}$; cette suite minore ρ_p et est croissante :

$$\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} = \frac{u_{p+1}v_{p-1}}{v_p u_p} = \frac{(2p+1)^2}{2p(2p+2)} > 1.$$

Comme de plus :
$$\frac{\rho_p}{\lambda_p}=\frac{v_{p-1}}{v_p}=\frac{2p+1}{2p}\underset{p\to\infty}{\to}1,$$
on en déduit que ces deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite $W>0$.

On remarque encore que :
$$(2p+1)u_pv_p=1 \text{ d'où } (2p+1)u_p^2=\frac{u_p}{v_p}=\rho_p\underset{p\to\infty}{\to}W .$$
Ceci montre que :
$$(2p+1)y_{2p}=\frac{(2p+1)u_p^2(1-a)}{a+(2p+1)u_p^2(1-a)}\underset{p\to\infty}{\to}\frac{(1-a)W}{a+(1-a)W}.$$
De manière analogue :
$$(2p+2)v_pu_{p+1}=1 \text{ d'où } (2p+2)v_p^2=\frac{v_p}{u_{p+1}}=\frac{1}{\lambda_{p+1}}\underset{p\to\infty}{\to}\frac{1}{W} .$$
Ceci montre que :
$$(2p+2)y_{2p+1}=\frac{a(2p+2)v_p^2}{(2p+2)v_p^2a+(1-a)}\underset{p\to\infty}{\to}\frac{a}{a+(1-a)W}.$$
La somme des deux limites est 1, ce qui était prévisible car :
$$(2p+2)y_{2p+1}=\left(1-(2p+1)y_{2p}\right)\frac{(2p+2)}{(2p+2)-(2p+1)y_{2p}}.$$

3) Montrons que la suite (x_n) ne peut être monotone que pour la seule valeur de a vérifiant : $a=(1-a)w$.

Si la suite (x_n) est monotone, la suite (y_n), $y_n=1-x_n$ aussi et comme :
$$\frac{(2p+2)y_{2p+1}}{(2p)y_{2p-1}}\underset{p\to\infty}{\to}1 ,$$
on en déduit que les suites (y_{2p-1}) et (y_{2p+1}) sont équivalentes ; comme par monotonie elles encadrent la suite (y_{2p}), ces trois suites sont équivalentes. Les suites $((2p)y_{2p-1})$, $((2p+1)y_{2p})$ et $((2p+2)y_{2p+1})$ sont donc aussi équivalentes et ont nécessairement même limite.

Une condition nécessaire est donc : $a=(1-a)W$ ce qui équivaut à : $a=\dfrac{W}{1+W}$, qui est entre 0 et 1.

4) Montrons que cette condition nécessaire est suffisante.

Les suites (y_{2p}) et (y_{2p+1}) sont définies par les formules :
$$y_{2p}=\frac{u_p^2(1-a)}{a+(2p+1)u_p^2(1-a)}=\frac{u_p^2}{W+(2p+1)u_p^2},$$

$$y_{2p+1} = \frac{av_p^2}{(2p+2)v_p^2 a + (1-a)} = \frac{Wv_p^2}{1+(2p+2)Wv_p^2}.$$

Vérifions que la suite (y_n) est décroissante et qu'en conséquence la suite (x_n) est croissante . Il suffit de montrer que pour tout p :

$$y_{2p} > y_{2p+1} > y_{2p+2},$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{u_p^2}{W+(2p+1)u_p^2} > \frac{Wv_p^2}{1+(2p+2)Wv_p^2} > \frac{u_{p+1}^2}{W+(2p+3)u_{p+1}^2}.$$

On obtient des conditions équivalentes en prenant les inverses :

$$2p+1+\frac{W}{u_p^2} < 2p+2+\frac{1}{Wv_p^2} < 2p+3+\frac{W}{u_{p+1}^2},$$

soit encore :

$$\frac{W}{u_p^2} < 1+\frac{1}{Wv_p^2} < 2+\frac{W}{u_{p+1}^2}.$$

La première inégalité est impliquée par :

$$\frac{W}{u_p^2} < \frac{1}{Wv_p^2} \text{ ce qui revient à : } W < \frac{u_p}{v_p}.$$

Ce qui est vrai car la suite $\rho_p = \dfrac{u_p}{v_p}$ est décroissante de limite W.

La deuxième inégalité est impliquée par :

$$\frac{1}{Wv_p^2} < \frac{W}{u_{p+1}^2} \text{ ce qui revient à : } \frac{u_{p+1}}{v_p} < W$$

Ceci est vrai car d'après l'étude des suites (u_p) et (v_p), la suite $\lambda_{p+1} = \dfrac{u_{p+1}}{v_p}$ est croissante de limite W.

Donc la suite (y_n) décroît, et donc la suite (x_n) croît.

5) Conclusion de l'étude :

La suite (x_n), notée initialement (u_n) , est monotone si, et seulement si, la valeur initiale $a = u_0$ est égale à $\dfrac{W}{1+W}$, et elle est alors croissante (voir exemple 9, la valeur de W est $\dfrac{2}{\pi}$).

Exercice 2 :

> Soit $(u_{p,n})_{p\geq 0, n\geq 0}$ une suite double de réels ≥ 0. Montrer qu'on peut trouver une suite (v_n) de $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$(\forall p \in \mathbb{N})\, u_{p,n} \underset{n\to\infty}{\in} o(v_n). \blacksquare$$

Nous utiliserons une variante de ce qu'on appelle généralement le procédé diagonal :

Soit $v_n = n\max\{u_{p,n}\,, 0 \le p \le n\}$. On vérifie que pour p fixé il suffit que n soit plus grand que p pour qu'on ait l'inégalité : $u_{p,n} \le \frac{v_n}{n}$. Donc pour p fixé quelconque $\frac{u_{p,n}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5 :

Soit (a_n) et (b_n) deux suites à termes réels > 0. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que si $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ et si $B_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \infty$, alors $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} B_n$. $\blacksquare$

Supposons démontré le lemme suivant :

Soit (d_n) et (b_n) deux suites à termes réels, $b_n > 0$. On pose $D_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Si $d_n \in o(b_n)$ et si $B_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \infty$, alors $D_n \in o(B_n)$.

Il suffit alors d'appliquer ce lemme en remplaçant $d_n$par $a_n - b_n$.

Démontrons maintenant le lemme.

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que pour tout $k > N$, $|d_k| < \frac{\varepsilon}{2} b_k$. Pour $n > N$ on peut en déduire lesmajorations suivantes :

$$|d_0 + d_1 + \cdots + d_n| < |d_0 + d_1 + \cdots + d_N| + \frac{\varepsilon}{2}(b_{N+1} + \cdots + b_n) = |D_N| + \frac{\varepsilon}{2}(B_n - B_N),$$

$$\frac{|D_n|}{B_n} < \frac{|D_N| + \frac{\varepsilon}{2}(B_n - B_N)}{B_n}.$$

Ce dernier majorant ayant pour limite $\frac{\varepsilon}{2}$ quant n tend vers l'infini, on peut trouver $N' > N$ tel que pour tout $n > N'$ on ait la majoration $\frac{|D_n|}{B_n} < \varepsilon$.

Le lemme est donc démontré.

Exercice 6 :

> Soit $x_0 = 5$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $45 < x_{1000} < 45{,}1$; plus généralement, soit $x_0 > 0$ et la suite définie par $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. ■

En élevant la relation de récurrence au carré on obtient :

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}.$$

On en tire l'égalité suivante, vraie pour tout $n > 0$:

$$x_n^2 = x_0^2 + 2n + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2}.$$

On en déduit d'abord la minoration :

$$x_n^2 \geq x_0^2 + 2n,$$

puis l'encadrement :

$$x_0^2 + 2n \leq x_n^2 \leq x_0^2 + 2n + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2 + 2} + \cdots + \frac{1}{x_0^2 + 2n - 2}.$$

Pour la valeur 1000 de n, et la valeur initiale 5 de x_0, cet encadrement devient concrètement

$$2025 \leq x_n^2 \leq 2025 + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{2023}.$$

Pour majorer le terme de droite on peut utiliser l'inégalité :

$$\frac{1}{2p+1} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{2x+1},$$

ce qui donne finalement l'encadrement :

$$2025 \leq x_n^2 \leq 2025 + \int_{11}^{1011} \frac{dx}{2x+1} = 2025 + \frac{\operatorname{Log} 2023 - \operatorname{Log} 23}{2}.$$

Un calcul numérique donne le résultat :

$2025 \leq x_n^2 \leq 2025 + 2{,}24 = 2027{,}24$ d'où $45 \leq x_{1000} \leq \sqrt{2027{,}24} \leq 45{,}025$.

Démontrons maintenant que $x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$; on peut même en utilisant l'exercice précédent donner un équivalent simple de cette suite.

Montrons d'abord que $x_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$.

On sait que $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. En divisant par n les deux membres de l'égalité :

$$x_n^2 = x_0^2 + 2n + \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2},$$

et en utilisant le lemme de Cesaro, on trouve que $\frac{x_n^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$, ce qu'il fallait démontrer.

Donc :

$$\frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{n+1}) = 2\big(\log(n+2) - \log(n+1)\big).$$

D'après l'exercice précédent, la somme partielle :

$x_n^2 - (x_0^2 + 2n) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_1^2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}^2}$ est équivalente à la somme partielle

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\big(\log(k+2) - \log(k+1)\big) \quad = \frac{1}{2}\log(n+1).$$

Pour conclure on peut utiliser l'égalité : $x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} = \frac{x_n^2 - (x_0^2 + 2n)}{x_n + \sqrt{x_0^2 + 2n}}$, qui montre que :

$$x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\log(n+1)}{4\sqrt{2n}}.$$

Cette dernière suite est bien de limite nulle.

Exercice 9 :

> Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$. Montrer que
> $u_n - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$. ■

La suite (u_n), à valeurs positives, est plus simplement définie par la valeur initiale $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

On en déduit immédiatement que pour tout $n > 0$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

Montrons par récurrence que cette suite est strictement croissante :

On constate : $u_1 > u_0$ et si on suppose $u_n > u_{n-1}$ alors

$u_{n+1}^2 = n + 1 + u_n > n + u_{n-1} = u_n^2$ donc $u_{n+1} > u_n$.

On en déduit pour $n > 0$ l'inégalité :

$$0 < u_n - \sqrt{n} = \frac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} < \frac{u_n}{u_n + \sqrt{n}} < 1.$$

Cela prouve que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ et que donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}$. En réutilisant l'égalité ci-dessus on en déduit $u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{}$

§ II.5 *PREMIÈRES NOTIONS SUR LES SÉRIES*

Exercice 3 :

Calculer la somme des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3} \quad ; v_n = \frac{n^4-(n+1)^3}{n!} \quad ; w_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

$$x_n = \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \geq 2) \quad ; y_n = \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \quad ; z_n = (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

■

Pour la première sommation on peut redémontrer les formules : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ce qui donne

$$u_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

donc $\sum_{k=1}^{n} u_k = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 2.$

On peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)^3}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{(k-1)!} - \sum_{h=1}^{n+1} \frac{h^3}{(h-1)!} = -\frac{(n+1)^3}{n!}.$$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = 0.$

Pour la troisième somme on utilise une transformation analogue :

$$w_n = \frac{n}{(n^2+1)^2-n^2} = \frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1} - \frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Si on pose $a_n = \frac{1}{n^2-n+1}$ alors $a_{n+1} = \frac{1}{n^2+n+1}$, donc $w_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

On en déduit la somme de la série car : $\sum_{k=0}^{n} w_k = \frac{1}{2}(a_0 - a_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$

De même pour la quatrième :

$$x_n = \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{n-1}{n}\right) - \log\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

d'où : $\sum_{k=2}^{n} x_k = \log\frac{1}{2} - \log\frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} -\log 2.$

Pour la série de terme général y_n, on vérifie d'abord que $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. On peut donc regrouper les termes deux par deux à partir de $n = 2$. Or :

$$y_{2p} + y_{2p+1} = \log\left(1+\frac{1}{2p}\right) + \log\left(1-\frac{1}{2p+1}\right) = \log\frac{2p+1}{2p} + \log\frac{2p}{2p+1} = 0.$$

On en déduit que cette série est de somme nulle.

Le terme général de la série $\{z_n\}$ ayant aussi une limite nulle, on peut regrouper les termes deux par deux à partir de $n = 1$. Or :

$$b_p = z_{2p-1} + z_{2p} = -\log\left(\frac{2p}{2p-1}\right) + \log\left(\frac{2p+1}{2p}\right) = \log\frac{(2p-1)(2p+1)}{(2p)^2}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{p} b_k = \log\frac{1\times3\times3\times5\times\cdots\times(2p-3)\times(2p-1)\times(2p-1)\times(2p+1)}{2^2\times4^2\times\cdots\times(2p)^2}.$$

En reprenant les notations de l'exemple 9 du § II.4, on voit que :

$$\sum_{k=1}^{p} b_k = \log\frac{u_p}{v_p} = \log\rho_p \underset{p\to\infty}{\to} \log W.$$

Exercice 8 :

> Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application injective. Montrer que, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$, et qu'en conséquence la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ diverge. ■

Démontrons la première inégalité, pour tout f, par récurrence sur N. Elle est vraie pour $N = 1$. Supposons la vraie pour $N-1$. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une injection

– cas où $f(N) \geq N$:

En appliquant la récurrence on a : $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{f(n)}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1}$,

donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{N}{N^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$;

– cas où $f(N) < N$:

Dans ce cas, comme f prend N valeurs différentes sur $[1, N]$, l'une d'elles est supérieure ou égale à N. Soit i, $i < N$ tel que $f(i) \geq N$. On voit facilement que $\frac{f(i)}{i^2} + \frac{f(N)}{N^2} > \frac{f(N)}{i^2} + \frac{f(i)}{N^2}$ car $f(i) \geq N > f(N)$.

Posons $g(n) = f(n)$ si $n \neq i$ et $n \neq N$, $g(i) = f(N)$ et $g(N) = f(i) \geq N$, g est une injection et $g(N) \geq N$. On est donc ramené au premier cas, d'où l'inégalité :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{f(n)}{n^2} > \sum_{n=1}^{N} \frac{g(n)}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N}.$$
Cela termine la récurrence.

La série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ est donc toujours divergente.

Exercice 11 :

> Soit $\sum u_n$ une série à termes ≥ 0 convergente.
>
> a) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum (u_n)^\alpha$ converge.
>
> b) Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.
>
> c) Montrer par un exemple que la série $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^{1/2}}$ peut diverger. ■

a) Comme la série $\sum u_n$ est convergente son terme général tend vers 0 et puisque $\alpha > 1$, il est clair que $u_n^\alpha \underset{n \to \infty}{\in} o(u_n)$. La série $\sum (u_n)^\alpha$ est donc convergente.

b) On peut ici utiliser l'inégalité $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, vraie pour tous a,b réels ≥ 0.

On a donc $\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha} \leq \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{n^{2\alpha}})$. Les séries $\{u_n\}$ et $\left\{\frac{1}{n^{2\alpha}}\right\}$ étant convergentes (puisque $2\alpha > 1$), la série $\left\{\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right\}$ l'est aussi.

c) Posons $u_n = \frac{1}{n \log^2(n)}$, on obtient $\frac{\sqrt{u_n}}{n^{1/2}} = \frac{1}{n \log n}$. La première série est convergente, le deuxième divergente (voir §IX 3).

Exercice 12 :

> Le terme général d'une série est défini, pour $n \geq 1$, par $(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} + n$. Chercher un encadrement simple de u_n, et en déduire que la série $\sum u_n$ diverge. ■

Pour $n = 1$ on obtient $u_1 = \frac{1}{4}$, indépendamment de u_0. Tous les termes suivants sont donc strictement positifs et $(n+1)^2 u_n \geq n$, d'où $u_n \geq \dfrac{n}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

La série est donc divergente.

Exercice 13 :

> Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$.
> a) Si la série $\sum u_n$ converge, construire une suite λ_n de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \infty$ et que la série $\sum \lambda_n u_n$ converge.
> b) Si la série $\sum u_n$ diverge, construire une suite λ_n de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$ et que la série $\sum \lambda_n u_n$ diverge. ■

a) Soit $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k$, les termes de cette suite sont tous strictement positifs. Prenons pour tout n, $\lambda_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$; cette suite est bien constituée de termes strictement positifs et tend en croissant vers l'infini. Montrons que la série $\sum \lambda_n u_n$ est encore convergente.

Comme la suite (r_k) est décroissante, pour tout k, $\sqrt{r_k} + \sqrt{r_{k+1}} \leq 2\sqrt{r_k}$. En multipliant par $\dfrac{\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}}{\sqrt{r_k}}$ on obtient : $\dfrac{u_k}{\sqrt{r_k}} = \dfrac{r_k - r_{k+1}}{\sqrt{r_k}} \leq 2\left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right)$.

Donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u_k}{\sqrt{r_k}} \leq 2\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right) = 2\left(\sqrt{r_0} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leq 2\sqrt{r_0}$. Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \lambda_n u_n$ sont donc majorées ; cette série est donc convergente.

b) Si la série $\sum u_n$ est divergente, la suite $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Prenons pour tout $n \geq 0$, $\lambda_n = \dfrac{1}{\sqrt{s_n}}$; on vérifie que : $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Pour $n > 0$, $\dfrac{u_n}{\sqrt{s_n}} = \dfrac{s_n - s_{n-1}}{\sqrt{s_n}} = \dfrac{\left(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}\right)\left(\sqrt{s_n} + \sqrt{s_{n-1}}\right)}{\sqrt{s_n}} \geq \left(\sqrt{s_n} - \sqrt{s_{n-1}}\right)$.

Donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{\sqrt{s_k}} \geq \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{s_k} - \sqrt{s_{k-1}}\right) = \sqrt{s_n} - \sqrt{s_0} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$. La série $\sum \lambda_n u_n$ est donc divergente.

La série $\sum_{n>0}\frac{u_n}{s_{n-1}}$ est aussi divergente (mais elle diverge moins vite que la précédente). Nous utiliserons pour le démontrer l'inégalité :
$\forall x>-1, x\geq \log(1+x)$.

On constate que pour tout $k>0$:

$$\frac{u_k}{s_{k-1}}=\frac{s_k-s_{k-1}}{s_{k-1}}\geq \log\left(1+\frac{s_k-s_{k-1}}{s_{k-1}}\right)=\log\left(\frac{s_k}{s_{k-1}}\right).$$

Donc : $\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{s_{k-1}}\geq \sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{s_k}{s_{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\big(\log(s_k)-\log(s_{k-1})\big)=\log(s_n)-\log(s_0)$.

La série est donc bien divergente.

Exercice 18 :

> Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels ≥ 0. Nature de la série de terme général $v_n=\sqrt{u_n u_{2n}}$. ■

On peut utiliser l'inégalité $\sqrt{u_n u_{2n}}\leq \frac{1}{2}(u_n+u_{2n})$. La série $\sum u_n$ étant convergente à termes réels ≥ 0, la série $\sum u_{2n}$ est aussi convergente. La série $\sum v_n$ est donc convergente.

Exercice 19 :

> Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels ≥ 0. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons : $v_n=\sup_{p\geq n} u_p$. La série $\sum v_n$ converge-t-elle nécessairement ? ■

La réponse est non.

Posons $u_n=0$ si n n'est pas un carré parfait ou $n=0$ et $u_{k^2}=\frac{1}{k^2}$. Il est clair que la série $\sum u_n$ est convergente et que sa somme est $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

Si $k^2<n\leq (k+1)^2$ alors $v_n=\frac{1}{(k+1)^2}$, donc :

$$\sum_{k^2<n\leq (k+1)^2} v_n=\frac{1}{(k+1)^2}\left((k+1)^2-k^2\right)=\frac{2k+1}{(k+1)^2}.$$

La série $\sum v_n$ est donc divergente.

§ II 6 *DÉVELOPPEMENT DE BASE DONNÉE D'UN RÉEL POSITIF*

Exercice 1 :

> Utiliser les développements propres en base t des nombres réels de l'intervalle $E=[0,1[$ pour démontrer que cet ensemble E n'est pas dénombrable. ■

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans E. Montrons qu'elle n'est pas surjective en exhibant un élément x de E qui n'est pas dans l'ensemble des éléments de cette suite. Il suffit pour cela que le premier chiffre de son écriture propre à base t soit différent de celui de u_1, que son deuxième soit différent du deuxième de u_2 etc. Précisément pour $n>0$, soit $a_n=0$ si le $n^{\text{ième}}$ chiffre de u_n n'est pas nul et 1 s'il est nul. Le nombre $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{-n}$ est bien un élément de E dont le développement propre à base t est la suite $0,a_1a_2\cdots$. Il ne peut être égal à aucun des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

L'ensemble E n'est donc pas dénombrable, puisque aucune suite n'est surjective dans E.

Nous devons ce raisonnement à Cantor.

Exercice 4 :

> On remarque que $\frac{1}{37}=0,\overline{027}$ et $\frac{1}{27}=0,\overline{037}$, où les chiffres surmontés de la barre sont répétés indéfiniment.
> a) Expliquez ce phénomène.
> b) Plus généralement, soit p entier ≥ 3 donné. Trouver tous les couples (a,b) d'entiers $\in\ [1,10^p[$ tels que, si on les écrit en numération décimale
> $a=\overline{a}_{p-1}\overline{a}_{p-2}\cdots\overline{a}_1\overline{a}_0$ et $b=\overline{b}_{p-1}\overline{b}_{p-2}\cdots\overline{b}_1\overline{b}_0$
> on ait :
> $\frac{1}{a}=0,\overline{b_{p-1}b_{p-2}\cdots b_1b_0}$ et $\frac{1}{b}=0,\overline{a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_1a_0}$
> Former effectivement tous ces couples pour $p\in\{3,4,5,6\}$.

a) Le nombre $0,\overline{027}$ est la somme de la série :

$$0,\overline{027}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{27}{10^{3n}}=\frac{27}{1000}\sum_{n=0}^{\infty}10^{-3n}=\frac{27}{1000}\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{27}{999}.$$

De même $0,\overline{037} = \dfrac{37}{999}$. Comme $999 = 27 \times 37$, on a bien les deux égalités :

$$\frac{1}{37} = 0,\overline{027} \text{ et } \frac{1}{27} = 0,\overline{037}\cdot$$

b) On généralise facilement ces relations. De manière analogue :

$$0,\overline{b_{p-1}b_{p-2}\cdots b_1 b_0} = \frac{b}{10^p - 1} \text{ et } 0,\overline{a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_1 a_0} = \frac{a}{10^p - 1}.$$

Les égalités $\dfrac{1}{a} = 0,\overline{b_{p-1}b_{p-2}\cdots b_1 b_0}$ et $\dfrac{1}{b} = 0,\overline{a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_1 a_0}$ seront donc vraies si, et seulement si $ab = 10^p - 1$.

Pour p entier donné, il nous faut énumérer les décompositions de $10^p - 1$ en produit de deux facteurs, le plus petit étant >1 (sinon l'écriture à base 10 du plus grand ne comporterait que des 9). On peut obtenir ces décompositions à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.

Pour $p = 3$, on obtient les décompositions :

$$999 = 3^3 \times 37$$
$$999 = 3 \times 333 = 9 \times 111 = 27 \times 37.$$

Pour $p = 4$, on obtient les décompositions :

$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$
$$9999 = 3 \times 3333 = 9 \times 1111 = 11 \times 909 = 33 \times 303 = 99 \times 101.$$

Pour $p = 5$, on obtient les décompositions :

$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$
$$99999 = 3 \times 33333 = 9 \times 11111 = 41 \times 2439 = 123 \times 813 = 271 \times 369.$$

Pour $p = 6$, on obtient la décomposition en facteurs premiers :

$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37.$$

Le nombre de diviseurs de ce nombre est donc $4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$, et comme ce n'est pas un carré, le nombre de couples d'entiers (a,b) $a < b$ tels que $ab = 999999$ est 32. Il faut enlever le couple $(1,999999)$ et le premier entier est majoré strictement par 1000. Il y a en définitive 31 solutions qui sont :

$$999999 = 3 \times 333333 = 7 \times 142857 = 9 \times 111111 = 11 \times 90909 = 13 \times 76923$$
$$999999 = 21 \times 47619 = 27 \times 37037 = 33 \times 30303 = 37 \times 27027 = 39 \times 25641$$
$$999999 = 63 \times 15873 = 77 \times 12987 = 91 \times 10989 = 99 \times 10101 = 111 \times 9009$$
$$999999 = 117 \times 8547 = 143 \times 6993 = 189 \times 5291 = 231 \times 4329 = 259 \times 3861$$
$$999999 = 273 \times 3663 = 297 \times 3367 = 333 \times 3003 = 351 \times 2849 = 407 \times 2457$$
$$999999 = 429 \times 2331 = 481 \times 2079 = 693 \times 1443 = 777 \times 1287 = 819 \times 1221$$
$$999999 = 999 \times 1001.$$

Exercice 5 :

> Soit t un entier ≥ 2, $\mathscr{D}_t$ et $\mathscr{D}'_t$ les ensembles définis au début du §II.6. $\mathscr{D}'_t$ est muni de l'ordre lexicographique noté $\leq$.
>
> a) Montrer qu'il n'existe aucune bijection croissante de $(\mathscr{D}'_t, \leq)$ sur $(\mathbb{R}_+, \leq)$.
>
> b) Montrer que dans l'ensemble $(\mathscr{D}'_t, \leq)$ toute partie non vide et majorée possède toujours une borne supérieure. Est-ce qu'une partie non vide et minorée possède toujours une borne inférieure ? ■

a) Les deux ensembles étant totalement ordonnés, s'il existait une bijection croissante entre $(\mathscr{D}'_t, \leq)$ et $(\mathbb{R}_+, \leq)$, ces deux ensembles ordonnés seraient isomorphes et les deux ordres auraient les mêmes propriétés. Entre deux réels distincts on peut toujours trouver un troisième réel. Or il n'existe pour l'ordre lexicographique aucun élément entre, par exemple, les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ éléments de $\mathscr{D}'_t$ définies par $a_n = 0$ si $n \neq 0$ et $a_0 = 1$, et $b_n = 0$ si $n \leq 0$ et $b_n = 9$ si $n > 0$. Les deux ordres ne peuvent donc pas être isomorphes.

b) Soit E une partie non vide majorée de $\mathscr{D}'_t$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un majorant de E. On peut trouver un entier relatif n_0 tel que pour tout $n \leq n_0$, $M_n = 0$; pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de E et pour tout $n \leq n_0$, $a_n = 0$

On pose $E_0 = E$.

Soit E_1 l'ensemble des éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de E_0 tels que a_{n_0+1} soit le plus grand possible, cet entier étant noté s_{n_0+1}.

De manière générale , si E_{p-1} est défini, soit E_p l'ensemble des éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de E_{p-1} tels que a_{n_0+p}. soit le plus grand possible, cet entier étant noté s_{n_0+p}.

On complète la définition de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en posant pour tout $n \leq n_0$, $s_n = 0$.

On constate que les suites élements de E_p coïncident avec $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ jusqu'au rang $n_0 + p$.

Cette suite est bien un élément de $\mathscr{D}'_t$. Montrons que c'est la borne supérieure de E.

C'est un majorant :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de E différent de $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et q le plus petit des entiers relatifs n tels que $a_n \neq s_n$, donc $q > n_0$. Posons $q = n_0$

$(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est visiblement élément de E_{p-1}, donc $a_q = a_{n_0+p} < s_{n_0+p}$. Pour l'ordre lexicographique, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ majore donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

C'est le plus petit des majorants :

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un majorant de E. Supposons qu'il minore strictement $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$; notons q le plus petit des entiers relatifs n tels que $s_n \neq M_n$; alors pour tout $n < q$, $M_n = s_n$ et $M_q < s_q$, donc $q \geq n_0$. Posons $q = n_0 + p$; d'après la définition de s_p et de E_p, toute suite élément de E_p coïncide avec $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ jusqu'au rang q et majore donc strictement $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Cela est contradictoire. Donc $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bien le plus petit des majorants de E, c'est-à-dire la borne supérieure de E.

c) Remarquons que toute partie non vide de $\mathcal{D}'_t$ est minorée par la suite nulle. Pour démontrer que toute partie non vide de $\mathcal{D}'_t$ admet une borne inférieure, il suffit évidemment de le démontrer pour toutes les parties non vides majorées. On peut alors reprendre la démonstration précédente mutatis mutandis.

Exercice 8 :

> Soit a un entier impair, non divisible par 5. Montrer que a possède toujours un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1 en numération décimale. ■

La proposition pour a est vraie si, et seulement si, il existe k et p entiers > 0 tels que $9ka = 10^p - 1 = \underbrace{99\cdots99}_{p \text{ fois } 9}$; ce qui est équivalent à la proposition : il existe un entier $p > 0$ tel que 10^p soit congru à 1 modulo $9a$. D'après les hypothèses, $9a$ et 10 sont premiers entre eux. Le nombre p existe donc : on peut prendre la période multiplicative de la classe de 10 modulo $9a$.

Quelques exemples :

Pour $a = 3$, $p = 3$, $37 \times 3 = 111$.

Pour $a = 7$, $p = 6$, $15873 \times 7 = 111111$.

Pour $a = 9$, $p = 9$, $12345679 \times 9 = 111111111$.

Exercice 11 :

> Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres réels du segment [0,1] qui peuvent s'écrire en base trois, en utilisant seulement les chiffres 0 et 2.
> a) Montrer que $[0,1] \setminus \mathscr{C}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts.
> b) Montrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans $\mathscr{C}$.
> c) Montrer que $\mathscr{C}$ a la puissance du continu.
> d) Montrer que $\mathscr{C} + \mathscr{C} = [0,2]$. ■

J'appellerai ternaire (par analogie avec binaire) les nombres dont l'écriture propre à base trois est finie. Si x est un élément de $[0,1]$ et n'est pas ternaire, il a une seule écriture à base 3, son écriture propre ; ceci est aussi vrai pour le nombre 0. Si $x = \overline{0,a_1 \ldots a_p}$ $(a_p \neq 0)$ est un nombre ternaire non nul, l'autre écriture de ce nombre est $x = \overline{0,a_1 \cdots a_{p-1} a'_p 22 \cdots}$ $(a'_p = a_p - 1)$. On constate en particulier que 1 est dans $\mathscr{C}$.

a) Soit O_p l'ensemble des éléments de $[0,1]$ dont l'écriture propre à base 3, $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, est telle que : $\forall i \quad 1 \leq i < p,\ a_i \in \{0,2\}$ et $a_p = 1$ et $\exists i > p \quad a_i \neq 0$.

Montrons que $[0,1] \setminus \mathscr{C} = \bigcup_{p \geq 1} O_p$; réunion d'ensembles évidemment deux à deux disjoints.

Si $x \in \bigcup_{p \geq 1} O_p$; soit $p \geq 1$ tel que $x \in O_p$.

Si x n'est pas ternaire, il a une seule écriture, qui contient un 1, donc il n'est pas dans $\mathscr{C}$.

Si x est ternaire, comme on peut trouver $i > p$ tel que $a_i \neq 0$, le rang du dernier chiffre non nul dans l'écriture propre de x est $q > p$. Les deux écritures de x sont de la forme : $x = \overline{0,a_1 \cdots a_{q-1} a_q}$ et $x = \overline{0,a_1 \cdots a_{q-1} a'_q 22 \cdots}$ où $a'_q = a_q - 1$; elles coïncident au moins jusqu'au rang $q-1 \geq p$; elles contiennent donc toutes les deux un chiffre 1 au rang p, donc x n'est pas dans $\mathscr{C}$.

Si x , élément de $[0,1]$, n'est pas dans $\mathscr{C}$; l'écriture propre $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de x contient au moins un 1, à un rang qui n'est pas 0, car 1 est dans $\mathscr{C}$. Soit $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $a_p = 1$. Le nombre x vérifie les deux premières conditions d'appartenance à O_p ; il reste à vérifier la dernière ; mais si pour tout $i > p \quad a_i = 0$, le nombre x serait ternaire et son autre écriture ne serait composée que de 0 et de 2, ce qui est exclu. On en déduit que x est dans $\bigcup_{p \geq 1} O_p$.

On a donc bien démontré l'égalité $[0,1] \setminus \mathscr{C} = \bigcup_{p \geq 1} O_p$.

Montrons maintenant :

$$O_p = \bigcup_{(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \in \{0,2\}^{p-1}} \left] \overline{0,a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 1},\ \overline{0,a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 2} \right[,$$ ces 2^{p-1} intervalles ouverts étant deux à deux disjoints ($O_1 =]0,1 ; 0,2[$).

Si x est dans un tel intervalle $\left] \overline{0,a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 1},\ \overline{0,a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 2} \right[$, on voit facilement qu'il vérifie les trois conditions d'appartenance à O_p.

Si x est dans O_p, soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son écriture propre à base 3, il appartient à l'intervalle $\left]\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}1},\ \overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}2}\right[$, et n'appartient qu'à celui là.

Le complémentaire de $\mathscr{C}$ dans [0,1] est donc réunion dénombrable d'intervalles ouverts (deux à deux disjoints).

b) La longueur de l'intervalle ouvert $\left]\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}1},\ \overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}2}\right[$ est $1/3^p$. Pour N entier, l'ensemble $\bigcup_{p=1}^{N} O_p$ est réunion de $1+2+\cdots+2^{N-1}=2^N-1$ intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est $1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3^2}+\cdots+2^{N-1}\times\frac{1}{3^N}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^N$. Si un intervalle ouvert $]a,b[$ est inclus dans $\mathscr{C}$, cet intervalle et les intervalles qui composent $\bigcup_{p=1}^{N} O_p$, sont deux à deux disjoints ; la somme de leurs longueurs doit être inférieure ou égale à 1. Cela n'est possible pour tout N que si $b=a$.

c) Soit x dans $\mathscr{C}$.

S'il n'est pas ternaire son écriture propre n'utilise que les chiffres 0 et 2.

Montrons que s'il est ternaire l'une seulement des deux écritures à base 3 ne contient que des 0 et des 2. Cela est vrai pour 0 et pour 1 ; dans les autres cas, si l'écriture propre de x est $x=\overline{0,a_1\cdots a_p}$ $(a_p\neq 0)$, l'écriture impropre de x est $x=\overline{0,a_1\cdots a_{p-1}a'_p\,222\cdots}$ $(a'_p=a_p-1)$; si l'un des a_i ,$1\le i<p$ était égal à 1, aucune des deux écritures de x ne conviendraient, x ne serait pas dans $\mathscr{C}$; si $a_p=1$ seule l'écriture impropre de x convient, si $a_p=2$ seule l'écriture propre de x convient.

A tout x dans $\mathscr{C}$ nous ferons correspondre celle de ses deux écritures qui ne contient que des 0 et des 2. Nous dirons qu'il s'agit de l'écriture de x.

Soit x dans $\mathscr{C}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son écriture ; posons $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i}$ où $b_i=a_i/2$.

L'application f est à valeurs dans [0,1], montrons qu'elle est surjective.

On vérifie d'abord $f(1)=1$. Soit y dans [0,1[, y a une écriture propre à base 2, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $(b_0=0)$; le nombre $x=\sum_{i=1}^{\infty} 2b_i3^{-i}$ est un élément de [0,1[qui est visiblement un élément de $\mathscr{C}$ dont l'image par f est bien y.

L'ensemble $\mathscr{C}$ a donc "plus" d'éléments que [0,1], mais comme il est inclus dans [0,1] il en a aussi "moins". Les deux ensembles sont donc équipotents (Théorème de Cantor-Bernstein).

d) Soit a un élément de l'intervalle [0, 2] ; montrons qu'il appartient à $\mathscr{C}+\mathscr{C}$ (l'inclusion opposée est évidente).

Le nombre $\frac{a}{2}$ étant dans l'intervalle [0, 1], on peut l'écrire sous la forme : $\frac{a}{2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$ où $\forall i>0, a_i \in \{0,1,2\}$. On a donc : $a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^i}$. Définissons de la manière suivante les suites d'entiers $(x_i)_{i>0}$ et $(y_i)_{i>0}$:

– si $a_i=0$ alors $x_i=y_i=0$,
– si $a_i=1$ alors $x_i=2, y_i=0$,
– si $a_i=2$ alors $x_i=2, y_i=2$.

Pour tout $i>0$, on a donc : $2a_i=x_i+y_i$ et donc $a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{3^i}$.
Comme les nombres $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}$ et $y=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{y_i}{3^i}$ sont des éléments de $\mathscr{C}$, le nombre a est bien dans $\mathscr{C}+\mathscr{C}$.

Chapitre III

TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}$

§ III.1 *ENSEMBLES ADJACENTS ET COUPURES DANS $\mathbb{R}$*

Exercice 3 :

> Soient I et J deux ensembles non vides et $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels. Montrer que cette famille est majorée ssi : pour tout i la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est majorée et la famille $\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)_{i\in I}$ est majorée.
>
> Si c'est le cas, prouver que : $\sup_{(i,j)\in I\times J}(u_{i,j}) = \sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)$. ■

Supposons la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ majorée par le réel M. Pour tout i dans I la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est aussi majorée par M ; elle a donc une borne supérieure et $\sup_{j\in J}(u_{i,j}) \leq M$. La famille $\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)_{i\in I}$ est donc majorée par M.

Si on prend pour valeur de M la plus petite possible, c'est-à-dire $\sup_{(i,j)\in I\times J}(u_{i,j})$, on arrive à la conclusion : $\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right) \leq \sup_{(i,j)\in I\times J}(u_{i,j})$.

Supposons maintenant que pour tout i dans I, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est majorée et la famille $\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)_{i\in I}$ est majorée ; soit M l'un de ces majorants. Il est clair que M majore tous les termes de la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ qui est donc majorée. Si on prend pour M le plus petit possible, c'est-à-dire $\sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)$, on obtient l'inégalité : $\sup_{(i,j)\in I\times J}(u_{i,j}) \leq \sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)$.

On a donc démontré l'équivalence des deux hypothèses. De plus si elles sont satisfaites, par double inégalité on obtient : $\sup_{(i,j)\in I\times J}(u_{i,j}) = \sup_{i\in I}\left(\sup_{j\in J}(u_{i,j})\right)$

§ III.2 *OUVERTS, FERMÉS ET VOISINAGES DANS* $\mathbb{R}$

Exercice 3 :

> On appelle voisinage d'une partie E de $\mathbb{R}$ tout ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe un ouvert ω vérifiant $E \subset \omega \subset V$.
> a) Des propriétés du théorème III.2.4 , lesquelles restent vraies pour les voisinages d'une partie ?
> b) Si $E \subset \mathbb{R}$, on appelle système fondamental de voisinages de E tout ensemble $\mathcal{B}$ de voisinages de E tel que, pour tout voisinage V de E, il existe $W \in \mathcal{B}$ vérifiant $W \subset V$. Montrer que $\mathbb{N}$ n'admet aucun système fondamental dénombrable de voisinages. ■

a) On peut adapter les propriétés des voisinages d'un point de la manière suivante :

(I) Toute partie contenant un voisinage de E est un voisinage de E.

(II) L'ensemble des voisinages de E est stable par intersections finies.

(III) Tout voisinage de E contient E .

La propriété (I) est évidente. La propriété (II) est vraie car l'intersection de toute famille finie d'ouverts est un ouvert. La propriété (III) est évidente. La propriété (IV) des voisinages d'un point est difficilement transposable.

b) Montrons que pour toute famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de $\mathbb{N}$, on peut trouver un ouvert ω contenant $\mathbb{N}$, donc voisinage de $\mathbb{N}$, mais qui ne contienne aucun des V_p . Cela démontrera que $\mathbb{N}$ ne peut pas avoir de système fondamental dénombrable de voisinages.

Soit $U_n = V_n \cap \left]n-1/2, n+1/2\right[$ et U_n' un ouvert voisinage de n, strictement inclus dans U_n. Les U_n (et les U_n') sont deux à deux disjoints. Prenons pour ω la réunion des U_n'. L'ensemble ω est bien un ouvert contenant $\mathbb{N}$. Il ne contient aucun ensemble V_p car son intersection avec $U_p = V_p \cap \left]p-1/2, p+1/2\right[$ est U_p' strictement inclus dans U_p.

Exercice 5 :

> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose trouvés des intervalles ouverts $I_1, I_2, \cdots, I_n$ en nombre fini tels que $\bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i = I$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\bigcup_{j \neq i} I_j$ soit un intervalle. Montrer grâce à un exemple que cette propriété ne peut pas être étendue à une suite infinie $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $\bigcup_{k \geq 0} I_k = I$. ■

S'il existe i et j différents dans I tels que $I_i \subset I_j$, il est évide
choisir i.

Sinon :

La borne supérieure a de I (finie ou infinie), est la plus grande des bornes supérieures des intervalles I_k, en nombre fini ; c'est la borne supérieure d'au moins un de ces intervalles ; en fait c'est la borne supérieure d'un seul de ces intervalles, sinon l'un des intervalles contiendrait un autre, ce que nous avons exclu. Soit I_i cet intervalle ; montrons que i convient, c'est-à-dire que $\bigcup_{j \neq i} I_j$ est un intervalle.

Si x et y sont éléments de $\bigcup_{j \neq i} I_j$, $x < y$, et z, $x < z < y$. L'élément z est dans I, mais s'il n'appartenait qu'à I_i, tout intervalle I_j, $j \neq i$, ayant y pour élément, serait inclus dans $]z, a[$, donc dans I_i, ce qui est exclu. Le réel z appartient donc à au moins un autre intervalle, donc à $\bigcup_{j \neq i} I_j$.

Cet ensemble est donc bien un intervalle.

b) Nous allons fabriquer un exemple où $\bigcup_k I_k = I$, la borne supérieure de I n'étant égale à aucune des bornes supérieures des I_k, de même pour la borne inférieure.

Choisissons : $I =]-\infty, \infty[$ et $I_k =]k, k+2[$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Il est clair que $\bigcup_k I_k = I$, mais le nombre entier i n'appartient qu'à un seul des intervalles : I_i. L'ensemble $\bigcup_{j \neq i} I_j$ est égal à $]-\infty, i[\cup]i, \infty[$ qui n'est pas un intervalle. On pourrait évidemment faire un changement d'indices pour que l'ensemble des indices soit $\mathbb{N}$ et non $\mathbb{Z}$.

Exercice 8 :

> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_\Omega$ l'ensemble de ses composantes connexes supposées toutes bornées. Pour chaque partie finie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}_\Omega$ on note $S_{\mathscr{C}} = \sum_{i \in \mathscr{C}} \Lambda(I)$, où $\Lambda(I)$ désigne la longueur de I (par définition si $I =]a,b[$, $\Lambda(I) = b - a$). On notera $\mathfrak{F}_\Omega$ l'ensemble des parties finies de $\mathscr{C}_\Omega$. On dit que Ω est de mesure finie ssi il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $S_{\mathscr{C}} \leq M$ pour tout $\mathscr{C} \in \mathfrak{F}_\Omega$. Dans ce cas, le réel $\sup_{\mathscr{C} \in \mathfrak{F}_\Omega} S_{\mathscr{C}}$ sera appelé la mesure de Lebesgue de Ω et noté $\Lambda(\Omega)$.
>
> a) On suppose Ω de mesure finie et $\mathscr{C}_\Omega$ infini (donc dénombrable). Montrer que, pour toute bijection $n \mapsto I_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{C}_\Omega$, la série $\sum \Lambda(I_n)$ converge et a pour somme $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(I_n) = \Lambda(\Omega)$.
>
> b) Montrer que si Ω' est un ouvert de mesure finie et Ω ouvert inclus dans Ω', alors Ω est aussi de mesure finie et $\Lambda(\Omega) \leq \Lambda$

c) Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion, d'ouverts de mesures finies tels que la suite $(\Lambda(\Omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Montrer que $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est de mesure finie et que $\Lambda(\Omega) = \lim_{n \to \infty} \Lambda(\Omega_n)$.

d) Si Ω et Ω' sont deux ouverts de mesure finie, montrer que $\Omega \cup \Omega'$ est de mesure finie et :
$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega') - \Lambda(\Omega \cap \Omega')$. ■

a) Pour N entier, soit $\mathscr{C}_N = \{I_n, 0 \le n \le N\}$. On a l'égalité $\sum_{n=0}^{N} \Lambda(I_n) = \sum_{I \in \mathscr{C}_N} \Lambda(I)$, donc pour tout N entier, $\sum_{n=0}^{N} \Lambda(I_n) \le \Lambda(\Omega)$. La série $\sum \Lambda(I_n)$ est donc convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(I_n) \le \Lambda(\Omega)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathscr{C}$ une partie finie de $\mathscr{C}_\Omega$ telle que :
$\Lambda(\Omega) - \varepsilon < \sum_{I \in \mathscr{C}} \Lambda(I) \le \Lambda(\Omega)$; l'image réciproque de $\mathscr{C}$ par $n \mapsto I_n$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, donc majorée par un certain entier N. L'ensemble $\mathscr{C}$ est alors inclus dans $\mathscr{C}_N$; donc :

$$\Lambda(\Omega) - \varepsilon < \sum_{I \in \mathscr{C}} \Lambda(I) \le \sum_{I \in \mathscr{C}_N} \Lambda(I) = \sum_{n=0}^{N} \Lambda(I_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(I_n) \le \Lambda(\Omega).$$

Ces inégalités étant vraies pour tout $\varepsilon > 0$. On a bien :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(I_n) = \Lambda(\Omega)$$

.

b) Montrons d'abord le résultat demandé dans le cas où Ω' est un intervalle ouvert borné $J =]a,b[$, et Ω a un nombre fini n de composantes connexes, par récurrence sur n.

Le résultat est évidemment vrai pour $n = 1$. Supposons le vrai si Ω a un nombre de composantes connexes inférieur ou égal à n. Soit Ω qui a $n+1$ composantes connexes, et $I =]\alpha,\beta[$ l'une d'entre-elles. On peut partager Ω en trois parties disjointes : $\Omega = (\Omega \cap]a,\alpha[) \cup]\alpha,\beta[\cup (\Omega \cap]\beta,b[)$. Chacun de ces trois ouverts est réunion de composantes connexes de Ω, en nombre inférieur ou égal à n. La somme des longueurs des composantes connexes dont la réunion est $\Omega \cap]a,\alpha[$ est, par l'hypothèse de récurrence, inférieure ou égale à $\alpha - a$, la somme des longueurs des composantes connexes dont la réunion est $\Omega \cap]\beta,b[$ est, par l'hypothèse de récurrence, inférieure ou égale à $b - \beta$. La somme des longueurs de toutes les composantes connexes de Ω est donc inférieure ou égale à : $(\alpha - a) + (\beta - \alpha) + (b - \beta) = b - a$.

Le résultat est vrai dans tous les cas où Ω a un nombre de composantes connexes inférieur ou égal à $n+1$.
Le résultat est donc démontré par récurrence.

Supposons maintenant que Ω et Ω' vérifient les conditions générales de l'énoncé. Soit $\mathscr{C}$ un ensemble fini de composantes connexes de Ω. Chaque composante connexe de Ω est incluse dans une composante connexe de Ω'. L'ensemble des composantes connexes de Ω' qui contiennent l'un des éléments de $\mathscr{C}$ est donc un ensemble fini, noté $\mathscr{C}'$. On peut écrire : $\sum_{I\in\mathscr{C}}\Lambda(I)=\sum_{I'\in\mathscr{C}'}\sum_{I\subset I'}\Lambda(I)$. Or pour tout I' dans $\mathscr{C}'$, $\sum_{I\subset I'}\Lambda(I)\leq\Lambda(I')$ d'après ce qui précède . On en déduit : $\sum_{I\in\mathscr{C}}\Lambda(I)\leq\sum_{I'\in\mathscr{C}'}\Lambda(I')\leq\Lambda(\Omega')$. L'ouvert Ω est donc de mesure finie et $\Lambda(\Omega)\leq\Lambda(\Omega')$.

c) Justifions d'abord que les composantes connexes de Ω sont toutes bornées.

Soit I une composante connexe de Ω et $[a,b]\subset I$. Ce compact est recouvert par la famille $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc est inclus dans l'un de ces ouverts. Il est en de même pour $]a,b[$. La longueur de $]a,b[$ est donc, d'après b), inférieure ou égale à la mesure de l'un des Ω_n ; donc $b-a\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)$. Comme cela est vrai pour tout intervalle compact inclus dans I, l'intervalle I est borné de longueur inférieure ou égale à $\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)$.

Soit maintenant un ensemble fini $\mathscr{C}$ de composantes connexes de Ω, et $l<\sum_{I\in\mathscr{C}}\Lambda(I)$; il est clair qu'on peut trouver des intervalles compacts, un dans chaque élément de $\mathscr{C}$, dont la somme des longueurs soit supérieure ou égale à l. La réunion de ce nombre fini d'intervalles compacts est un compact recouvert par la famille $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc inclus dans l'un de ces ouverts. En considérant éventuellement l'ouvert réunion des intérieurs de ces intervalles compacts et en utilisant b), on en déduit $l\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)$. Comme cela est vrai pour tout réel $l, l<\sum_{I\in\mathscr{C}}\Lambda(I)$, on a l'inégalité $\sum_{I\in\mathscr{C}}\Lambda(I)\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)$. Cela prouve que Ω est de mesure finie et que $\Lambda(\Omega)\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)$. L'inégalité opposée étant évidente d'après b), il y a en fait égalité. Donc $\Lambda(\Omega)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\Omega_n)=\lim_{n\to\infty}\Lambda(\Omega_n)$, puisque la suite est croissante.

d) Démontrons d'abord le résultat dans le cas où les ouverts Ω et Ω' sont disjoints. C'est clair si ces deux ouverts n'ont qu'un nombre fini de composantes connexes. Si Ω et Ω' sont quelconques, on peut toujours les cons réunion de familles croissantes d'ouverts $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\Omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chacun de ces ouverts n'ayant qu'un nombre fini de composantes connexes, toutes bornées. Comme $\Omega\cup\Omega'$ est la réunion de la famille croissante $(\Omega_n\cup\Omega'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de mesures finies et $\Lambda(\Omega_n\cup\Omega'_n)=\Lambda(\Omega_n)+\Lambda(\Omega'_n)\underset{n\to\infty}{\to}\Lambda(\Omega)+\Lambda(\Omega')$, d'après c), cet ouvert est de mesure finie et $\Lambda(\Omega\cup\Omega')=\Lambda(\Omega)+\Lambda(\Omega')$.

Justifions ensuite que le résultat est vrai dans le cas où Ω et Ω' sont deux intervalles ouverts bornés : $\Omega=]a,b[$ et $\Omega'=]a',b'[$. Pour limiter le nombre de cas, on peut toujours supposer que $b\le b'$. On supposera aussi que ces intervalles sont non vides, car si l'un d'eux est vide, l'égalité est vraie.

– si $b\le a'$. Les deux intervalles sont disjoints, le résultat est évident.

– si $a'<b\le b'$.

  – si $a<a'$: $\Omega\cap\Omega'=]a',b[$ et $\Omega\cup\Omega'=]a,b'[$. On constate l'égalité :
  $$b'-a=(b-a)+(b'-a')-(b-a');$$
  – si $a'\le a$: $\Omega\subset\Omega'$, donc $\Omega\cap\Omega'=\Omega$ et $\Omega\cup\Omega'=\Omega'$. On constate bien que :
  $$b'-a'=(b-a)+(b'-a')-(b-a).$$

Démontrons maintenant la formule dans le cas où Ω est réunion d'un nombre fini de composantes connexes et Ω' est un intervalle ouvert borné J, par récurrence sur le nombre n de composantes connexes de Ω que coupe J. C'est vrai si ce nombre est nul par définition de $\Lambda(\Omega\cup J)$. Supposons le résultat vrai dans tous les cas où l'intervalle coupe un nombre de composantes connexes de Ω inférieur ou égal à n. Si l'intervalle J coupe $n+1$ composantes connexes de Ω, soit l'une d'elles I. Ecrivons $\Omega=\Omega_1\cup I$, Ω_1 étant réunion des composantes connexes de Ω différentes de I. L'ensemble $I\cup J$ est un intervalle et il coupe seulement n composantes connexes de Ω_1 ; donc :
$$\Lambda(\Omega\cup J)=\Lambda(\Omega_1\cup(I\cup J))=\Lambda(\Omega_1)+\Lambda(I\cup J)-\Lambda(\Omega_1\cap(I\cup J)),$$
$$\Lambda(\Omega\cup J)=\Lambda(\Omega_1)+\Lambda(I)+\Lambda(J)-\Lambda(I\cap J)-\Lambda(\Omega_1\cap J)\text{ car }\Omega_1\cap I=\varnothing,$$
d'où :
$$\Lambda(\Omega\cup J)=\Lambda(\Omega_1\cup I)+\Lambda(J)-\Lambda((I\cup\Omega_1)\cap J),$$
$$\Lambda(\Omega\cup J)=\Lambda(\Omega)+\Lambda(J)-\Lambda(\Omega\cap J).$$
La proposition est donc démontrée par récurrence.

Examinons le cas où Ω est un ouvert quelconque de mesure finie et Ω' toujours un intervalle ouvert borné J. On peut toujours trouver une suite croissante $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts dont la réunion est Ω, chacun des Ω_n étant réunion d'un nombre fini de composantes connexes bornées. Nous utiliserons le c) pour obtenir l'égalité demandée. Les ouverts $\Omega\cup J$ et $\Omega\cap J$ sont respective[illegible] des familles croissantes d'ouverts de mesures finies :

$(\Omega_n \cup J)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Omega_n \cap J)_{n \in \mathbb{N}}$. L'ouvert $\Omega \cap J$ est de mesure finie car inclus dans Ω et d'après c), $\Lambda(\Omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda(\Omega_n)$ et $\Lambda(\Omega \cap J) = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda(\Omega_n \cap J)$.

Donc : $\Lambda(\Omega_n \cup J) = \Lambda(\Omega_n) + \Lambda(J) - \Lambda(\Omega_n \cap J) \underset{n\to\infty}{\to} \Lambda(\Omega) + \Lambda(J) - \Lambda(\Omega \cap J)$

$\Omega \cup J$ est bien de mesure finie et $\Lambda(\Omega \cup J) = \Lambda(\Omega) + \Lambda(J) - \Lambda(\Omega \cap J)$.

Généralisons maintenant au cas où Ω' est réunion d'un nombre fini de composante connexes, par récurrence sur le nombre n de ces composantes connexes. Le résultat est vrai si $n = 1$. Supposons le vrai pour n. Soit Ω un ouvert quelconque de mesure finie et Ω' ouvert réunion de $n+1$ composantes connexes. Ecrivons $\Omega' = \Omega'_1 \cup I'$, l'ouvert Ω'_1 étant la réunion des composantes connexes de Ω' différentes de I'. En utilisant l'hypothèse de récurrence et la propriété démontrée ci-dessus, on obtient les égalités :

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda((\Omega \cup \Omega_1') \cup I') = \Lambda(\Omega \cup \Omega_1') + \Lambda(I') - \Lambda((\Omega \cup \Omega_1') \cap I'),$$

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega_1') - \Lambda(\Omega \cap \Omega_1') + \Lambda(I') - \Lambda(\Omega \cap I'),$$

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + (\Lambda(\Omega_1') + \Lambda(I')) - (\Lambda(\Omega \cap \Omega_1') + \Lambda(\Omega \cap I')).$$

Or les ouverts $\Omega \cap \Omega_1'$ et $\Omega \cap I'$ sont disjoints. D'après la première remarque de ce d) on a donc l'égalité :

$$\Lambda(\Omega \cap \Omega_1') + \Lambda(\Omega \cap I') = \Lambda(\Omega \cap (\Omega_1' \cup I')) = \Lambda(\Omega \cap \Omega').$$

On obtient donc l'égalité :

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega') - \Lambda(\Omega \cap \Omega').$$

Il reste en dernier lieu à généraliser la proposition démontrée ci-dessus au cas où Ω' est un ouvert de mesure finie quelconque. Supposons qu'il est réunion de la famille croissante $\left(\Omega_n'\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts n'ayant chacun qu'un nombre fini de composantes connexes bornées.

L'ouvert de mesure finie $\Omega \cap \Omega'$ est réunion de la famille croissante $\left(\Omega \cap \Omega_n'\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de mesures finies donc : $\Lambda(\Omega \cap \Omega_n') \underset{n\to\infty}{\to} \Lambda(\Omega \cap \Omega')$.

L'ouvert $\Omega \cup \Omega'$ est réunion de la famille croissante $\left(\Omega \cup \Omega_n'\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de mesures finies or :

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega_n') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega_n') - \Lambda(\Omega \cap \Omega_n') \underset{n\to\infty}{\to} \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega') - \Lambda(\Omega \cap \Omega').$$

L'ouvert $\Omega \cup \Omega'$ est donc de mesure finie et :

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega') - \Lambda(\Omega \cap \Omega').$$

Ce qui termine cette démonstration.

Exercice 10 :

> a) Soit $l \in \mathbb{R}_+^*$. A tout réel x on associe $I(x) = \left]x - \frac{l}{2}, x + \frac{l}{2}\right[$. On donne deux réels a et b ($a < b$). Montrer qu'il existe un ensemble fini E tel que $[a, b] \subset \bigcup_{x \in E} I(x)$ et $l\,\mathrm{card}(E) \le l + (b - a)$.
>
> b) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a,b] \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.
> Montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [a,b], \exists i \in I$, $]x - l, x + l[\subset \Omega_i$. En utilisant a), donner une nouvelle démonstration du lemme 1. ■

a) Soit p un entier > 0 et p éléments de $]a,b[$ répartis de la manière suivante : $x_1 = a + \dfrac{b-a}{2p}$, et pour k de 1 à p, $x_k = x_1 + (k-1)\dfrac{b-a}{p}$, de telle sorte que $x_p = b - \dfrac{b-a}{2p}$. Les p intervalles $\left]x_k - \frac{l}{2},\ x_k + \frac{l}{2}\right[$ recouvrent $[a,b]$ si, et seulement si, $l > \dfrac{b-a}{p}$, ce qui équivaut à $p > \dfrac{b-a}{l}$.

Si l est donné, on peut trouver un entier $p > 0$ tel que $\dfrac{b-a}{l} < p \le \dfrac{b-a}{l} + 1$. L'ensemble $E = \{x_1, \cdots, x_p\}$ convient puisque $pl \le (b-a) + l$.

b) Nous pouvons ici utiliser une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration du lemme 1.

Notons Y l'ensemble des éléments $y \in [a,b]$ tels que :

$$\exists l > 0, \forall x \in [a,y], \exists i \in I \quad]x - l, x + l[\subset \Omega_i.$$

Cet ensemble contient a puisque $\exists i \in I$, $a \in \Omega_i$ et que Ω_i est un ouvert.

Il est majoré par b et admet donc une borne supérieure $c \in [a,b]$.

Soit $i_0 \in I$ tel que $c \in \Omega_{i_0}$, et α un réel > 0 tel que $]c - \alpha, c + \alpha[\subset \Omega_{i_0}$.

Prenons $y \in E \cap]c - \alpha/2, c[$; il existe un réel $l > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,y], \exists i \in I, \quad]x - l, x + l[\subset \Omega_i.$$

D'autre part :

$$\forall x \in [c - \alpha/2, c + \alpha/2],\ ]x - \alpha/2, x + \alpha/2[\subset \Omega_{i_0}.$$

Donc en prenant $l' = \inf(l, \alpha/2)$, on a :

$$\forall x \in [a, c + \alpha/2], \exists i \in I, \quad]x - l', x + l'[\subset \Omega_i.$$

Le nombre $c + \alpha/2$ n'est pas dans Y, puisque c est la borne supérieure de Y. La seule possibilité est que $c + \alpha/2 > b$. Il est alors clair que $b \in Y$, ce qu'il fallait démontrer.

D'après le a), pour un $l > 0$ tel que $\forall x \in [a,b], \exists i \in I$, $]x - l/2,$

on peut trouver des éléments $x_1,\cdots,x_p$ de $[a,b]$ tels que les intervalles $]x_k - l/2,\ x_k + l/2[$ $(k \in \{1,\cdots,p\})$ recouvrent $[a,b]$.

On peut aussi trouver des éléments $i_1,\cdots,i_p$ de I tels que $]x_k - l/2, x_k + l/2[\ \subset \Omega_{i_k}$ $(k \in \{1,\cdots,p\})$. La famille des $\left(\Omega_{i_k}\right)_{k\in\{1,\cdots,p\}}$ recouvre donc $[a,b]$.

On peut donc extraire de la famille $\left(\Omega_i\right)_{i\in I}$ une sous-famille finie qui recouvre encore $[a,b]$.

§ III.3 *ENSEMBLES DE RÉELS*

Exercice 1 :

> Soit (x_n) une suite convergente de réels, et x sa limite. Montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ est un compact de $\mathbb{R}$. ■

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ qui recouvre l'ensemble $E = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$. Il existe en particulier un indice $i_0$dans I tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est un voisinage de x, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $x_n \in O_{i_0}$. On peut donc recouvrir l'ensemble E avec O_{i_0} et au plus $N+1$ des O_i qui contiennent les réels x_k, $k \in \{1,\cdots,N\}$. On peut donc extraire de la famille $(O_i)_{i\in I}$ un sous-recouvrement fini.

L'ensemble E est donc compact.

Exercice 4 :

> Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres à valeurs dans {-1, 1}. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$. ■

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ ne prend évidemment que des valeurs entières. Ses valeurs d'adhérence sont donc les nombres x tels que $\{n \in \mathbb{N},\ S_n = x\}$ est infini, ce sont des entiers. De plus, comme cette suite ne varie que de +1 ou -1 à la fois, si a et b sont des valeurs prises par la suite, toutes les valeurs entières entre a et b sont aussi prises par la suite.

Montrons que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervall

Si a et b sont des valeurs d'adhérence de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$, et c un entier $a < c < b$, montrons que pour tout N entier, il existe un entier $k > N$ tel que $S_k = c$. Cela prouvera que c est une valeur d'adhérence de la suite.

Puisque a est une valeur d'adhérence, il existe $n > N$, tel que $S_n = a$. Comme b est aussi une valeur d'adhérence, il existe $m > n$, tel que $S_m = b$. Entre m et n il existe un entier k tel que $S_k = c$.

Cela termine la démonstration.

Exercice 5 :

> Déterminer les points d'accumulation de l'ensemble E formé par les réels $\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^{m+n}$, où $(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$. ■

Notons *acc(A)* l'ensemble des points d'accumulation (ou ensemble dérivé) d'une partie A de $\mathbb{R}$. Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme :

> Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, $acc(A)\cup acc(B) = acc(A\cup B)$.

> L'inclusion $acc(A)\cup acc(B) \quad\subset\quad acc(A\cup B)$ est évidente.
> Démontrons l'inclusion opposée.
> Si x n'est ni un point d'accumulation de A, ni un point d'accumulation de B, alors on peut trouver deux nombres réels > 0, α et β tels que $]x-\alpha, x+\alpha[\cap A \subset \{x\}$ et $]x-\beta, x+\beta[\cap B \subset \{x\}$. Soit $\gamma = \inf(\alpha,\beta)$, il est clair que $]x-\gamma, x+\gamma[\cap (A\cup B)\subset\{x\}$; le réel x n'est donc pas non plus dans $acc(A\cup B)$.
> Fin du lemme.

Nous poserons $u_{m,n} = \left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^{m+n}$

Supposons que m ou n soit égal à 1. Par exemple m . Alors $u_{1,n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

On peut démontrer (voir § II.3 Exercice 5) que cette suite tend en décroissant vers e .

Supposons que m et n soient tous les deux ≥ 2 ; dans ce cas $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leq 1$, donc $u_{m,n}\leq 1$.

Posons $A = \{u_{m,n},\ (m\geq 2)\ \&\ (n\geq 2)\ \}$ et $B = \{u_{1,n},\ n\geq 1\}$. D'après le lemme, l'ensemble des points d'accumulation de $A\cup B = \{u_{m,n}\}$ est la réunion de l'ensemble des points d'accumulation de A et de ceux de B .

L'ensemble B est l'ensemble des termes d'une suite converg[illegible] semble dérivé n'a qu'un seul élément, la limite de cette suite, le rée[illegible]

Il est évident que 0, qui est la limite de la suite $\left(u_{2,n}\right)_{n\geq 2}$ est un point d'accumulation de A . Pour montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A est réduit à $\{0\}$, montrons que pour tout
$\varepsilon > 0$, $\{(m,n),\ (m\geq 2)\ \&\ (n\geq 2)\ \&\ u_{m,n}\geq \varepsilon\}$ est fini.

Etudions la fonction $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{x+y}$, définie pour x et y réels ≥ 2. Sa dérivée par rapport à x est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f(x,y)\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)-\dfrac{y}{x}\right)$, toujours négative.

Donc si $m\geq 2$ et $n\geq 2$, et $u_{m,n}\geq \varepsilon$, alors $u_{2,n}\geq u_{m,n}\geq \varepsilon$ et de même $u_{m,2}\geq u_{m,n}\geq \varepsilon$. Comme $u_{p,2}=u_{2,p}\underset{p\to\infty}{\longrightarrow}0$, il existe un rang N tel que pour tout $p>N$, $u_{p,2}=u_{2,p}<\varepsilon$. On en déduit que :

$\{(m,n),\ (m\geq 2)\ \&\ (n\geq 2)\ \&\ u_{m,n}\geq \varepsilon\}\subset\{0,\cdots,N\}^2$.

Cet ensemble est donc fini.

Si $x>0$, l'ensemble $\{(n,m),\ (n\geq 2)\ \&\ (m\geq 2),\ u_{m,n}\in\ ]x/2,3x/2[$ est fini ; le réel x n'est donc pas un point d'accumulation de A.

On a donc bien démontré que $acc(E)=\{0,\mathrm{e}\}$.

Exercice 7 :

> Soit E une partie de $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points d'accumulation est dénombrable. Montrer que E est dénombrable. ■

Notons acc(E) l'ensemble des points d'accumulation de E. Pour n entier strictement positif définissons :

$E_n=\{x\in[-n,n]\cap E,\ \forall y\in acc(E)\quad |x-y|\geq 1/n\}$ et montrons qu'il s'agit toujours d'un ensemble fini.

Si cet ensemble était infini, comme il est borné, il aurait au moins un point d'accumulation a qui serait aussi point d'accumulation de E . L'ensemble $\{x\in E_n,\quad |x-a|<1/n\}$ devrait être infini puisque a est un point d'accumulation de E_n, mais il devrait aussi être vide car tout x de E_n est à distance d'au moins $1/n$ de tout élément de *acc(E)* en général et de a en particulier. Comme cela est impossible, E_n est toujours fini.

Montrons maintenant : $E\subset acc(E)\cup\bigcup\limits_{n>0}E_n$. Cela prouvera que E est dénombrable.

En effet si x est dans E mais pas dans *acc(E)* , alors il existe un $\varepsilon>0$ tel que l'intervalle $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ ne coupe pas *acc(E)* car cet ensemble est fermé (Prop III.3.2). Pour un entier $n>0$ tel que $\varepsilon>1/n$ et $n>|x|$, x appartient à E_n, ce qui achève la démonstration.

Exercice 10 :

> Soit, pour $N \in \mathbb{N}^*$, E_N l'ensemble des réels
> $\left\{\begin{matrix} 2^{-\alpha_1} + 2^{-\alpha_2} + \cdots + 2^{-\alpha_N} ; \forall i \in \{1, \cdots, N\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N} \text{ et} \\ 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N \end{matrix}\right\}$
>
> a) Trouver les ensembles dérivés itérés $E'_N, E''_N, \cdots, E_N^{(k)}, \cdots (k \in \mathbb{N}^*)$.
>
> b) Construire une partie E de $\mathbb{R}$ telle que la suite $\left(E^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ soit strictement décroissante pour l'inclusion. ■

a) L'ensemble E_1 est l'ensemble des inverses des puissances entières de 2, son ensemble dérivé est bien sûr $\{0\}$. Nous définirons conventionnellement $E_0 = \{0\} = E'_1$. L'ensemble dérivé de E_0 est vide.

Montrons que $E'_N = \bigcup_{0 \leq p < N} E_p$ pour tout entier N (c'est vrai pour $N = 0$ et 1)

Vérifions que si $p < N$ alors $E_p \subset E'_N$.

Si $x \in E_p$, $\quad x = 2^{-\alpha_1} + 2^{-\alpha_2} + \cdots + 2^{-\alpha_p}$,

$\forall i \in \{1, \cdots, p\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$.

Posons $y_k = 2^{-\alpha_1} + 2^{-\alpha_2} + \cdots + 2^{-\alpha_p} + 2^{-(\alpha_p + 1 + k)} + \cdots + 2^{-(\alpha_p + N - p + k)}$. Il est clair que la suite ainsi définie est injective (écriture à base 2), à valeurs dans E_N, de limite x. Le réel x est donc bien dans E'_N.

On a démontré l'inclusion $\bigcup_{0 \leq p < N} E_p \subset E'_N$, démontrons l'inclusion opposée.

Remarquons d'abord qu'un élément de E_N s'écrit en notation à base 2 avec N fois 1, dont 1 au plus avant la virgule et qu'il est par conséquent majoré par $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-N+1} = 2 - 2^{-N+1}$. Les ensembles E_N et E'_N sont donc inclus dans $\left[0, 2 - 2^{-N+1}\right] \subset [0, 2[$. Nous sommes ramenés à démontrer qu'un élément de $[0, 2[$ qui n'est pas dans $\bigcup_{0 \leq p < N} E_p$ n'est pas non plus dans E'_N.

Les éléments de $[0, 2[$ qui ne sont pas dans $\bigcup_{0 \leq p < N} E_p$ sont les nombres réels dont le développement propre à base 2 comporte au moins N fois 1.

Soit x un tel élément, $(a_i)_{i \geq 0}$ son développement propre à base 2 et p le rang du $N^{\text{ième}}$ chiffre qui est 1. Introduisons l'ensemble B des nombres réels y tels que $2^{p+1} y$ est entier (relatif) ; cet ensemble n'a, comme $\mathbb{Z}$, que des points isolés ; x n'étant pas point d'accumulation de B, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]\, x - \varepsilon, x + \varepsilon [$ n'a aucun élément commun avec B, sauf peut-être x. Montrons qu'il en est de même avec E_N ; cela prouvera que x n'est pas dans E'_N.

Soit y un élément de E_N, différent de x, et $(b_i)_{i\geq 0}$ son développement binaire propre ; soit q le plus petit entier tel que $a_q \neq b_q$

– soit $q > p$. Dans ce cas les développements propres de x et de y coïncident jusqu'au rang p ; le développement propre de y comporte donc N fois 1 entre le rang 1 et le rang p ; il ne peut donc pas contenir d'autres chiffres 1, tous les autres chiffres sont 0. Le réel y est donc dans B et sa différence avec x est, en valeur absolue, au moins ε.

– soit $q \leq p$.

Si $x < y$, nécessairement $a_q = 0$ et $b_q = 1$. Soit $y' = \overline{0,b_1 \cdots b_q}$, y' est dans B et $x < y' \leq y$. On a donc $|x - y| \geq \varepsilon$.

Si $y < x$, nécessairement $b_q = 0$ et $a_q = 1$.

Si $q < p$. Soit $y' = 0,\overline{a_1 \cdots a_q}$, y' est dans B et $y < y' < x$, On a donc $|x - y| \geq \varepsilon$.

Si $q = p$, les développements de x et y coïncident jusqu'au rang $p - 1$ et comprennent tous les deux $N - 1$ chiffres 1 ; le chiffre de rang q est 1 pour x et 0 pour y ; le développement propre binaire de y comprend donc exactement 1 chiffre de plus égal à 1, à un rang strictement plus grand que p. Soit $y' = \overline{0,b_1 \cdots b_p 1}$, y' est dans B et $y \leq y' < x$. On a donc $|x - y| \geq \varepsilon$.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, cela termine la démonstration de l'égalité $E'_N = \bigcup\limits_{0 \leq p < N} E_p$.

Montrons maintenant que pour $k > 0$, $E_N^{(k)} = \bigcup\limits_{0 \leq p \leq N-k} E_p$ (vide si $N < k$).

C'est vrai pour $k = 1$. Si c'est vrai pour k, en utilisant l'égalité $acc(A \cup B) = acc(A) \cup acc(B)$ démontrée dans l'exercice 5, on voit que $E_N^{(k+1)} = \bigcup\limits_{0 \leq p \leq N-k} E'_p = \bigcup\limits_{0 \leq p \leq N-k} \bigcup\limits_{q < p} E_q = \bigcup\limits_{0 \leq q \leq N-k-1} E_q$. Ce qui démontre la formule par récurrence.

On constate que la suite $\left(E_N^{(k)}\right)_{k>0}$ est décroissante, vide pour $k > N$.

b) Rappelons que $E_N \subset \left[0, 2 - 2^{-N+1}\right] \subset [0,2[$. Posons $F = \bigcup\limits_{N>0} \left(2N + E'_N\right)$.

Chaque ensemble $F_N = \left(2N + E'_N\right)$ est inclus dans $I_N = \left[2N, 2N + 2 - 2^{-N+1}\right]$. Ces intervalles fermés sont deux à deux disjoints. Les premiers sont : $I_1 = [2,3]$ $I_2 = [4, 6 - 1/2]$ etc.

Montrons que si pour tout $N > 0$ l'ensemble A_N est inclus dans I_N alors l'ensemble des points d'accumulation de $A = \bigcup\limits_{N>0} A_N$ est égal à $\bigcup\limits_{N>0} A'_N$.

Remarquons que $B = \bigcup_{N>0} I_N$ est un fermé car son complémentaire est une union d'intervalles ouverts. Il en est de même pour tous les ensembles $B \setminus I_N$.

L'ensemble A étant inclus dans B, on peut écrire :
$acc(A) = acc((A \cap I_N) \cup (A \cap (B \setminus I_N))) = acc(A \cap I_N) \cup acc(A \cap (B \setminus I_N))$.

L'ensemble $B \setminus I_N$ étant fermé, l'ensemble $acc(A \cap (B \setminus I_N))$ est disjoint de I_N.

On a donc : $acc(A) \cap I_N = acc(A \cap I_N) = acc(A_N)$.

On en déduit : $acc(A) = \bigcup_{N>0} acc(A) \cap I_N = \bigcup_{N>0} acc(A_N)$.

On peut généraliser cette proposition ; il est clair que pour tout $k \geq 0$ on a aussi :

$$acc^k(A) = \bigcup_{N>0} acc^k(A_N).$$

On peut appliquer l'égalité ci-dessus au cas : $A_N = F_N = 2N + E'_N$. On trouve alors :

$$F^{(k)} = \bigcup_{N>0} F_N^{(k)}.$$

Il est clair que $F_N^{(k)} = 2N + E_N^{(k+1)}$. Pour N fixé, il s'agit d'une suite décroissante (voir a)). On en déduit que la suite $\left(F^{(k)}\right)_{k \geq 0}$ est décroissante. Il est facile de voir qu'elle est strictement décroissante :
$F^{(k)} \cap I_{k+1} = F_{k+1}^{(k)} = 2k+2+E_{k+1}^{(k+1)} = 2k+2+E_0 = \{2k+2\}$,
mais $F^{(k+1)} \cap I_{k+1} = F_{k+1}^{(k+1)} = 2k+2+E_{k+1}^{(k+2)} = 2k+2+E'_0 = \varnothing$.

Exercice 12 :

> On donne deux suites de réels (u_n) et (ε_n) avec $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \varepsilon_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. ■

Soient trois réels : $a < x < b$. Supposons que a et b soient des valeurs d'adhérence de la suite (u_n), mais que x n'en soit pas une. On peut alors trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que $a < x - \varepsilon < x + \varepsilon < b$ et tel que $\{n \in \mathrm{N}, u_n \in \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[-\{x\}\}$ soit fini, majoré par N_1.

Soit $N > N_1$ tel que pour tout $n > N$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon$.

Comme b est une valeur d'adhérence de la suite, on peut certainement trouver $p > N$ tel que $u_p \geq x$. Soit q le plus petit entier strictement plus g que $u_q < x$; un tel entier existe, sinon a ne serait pas une valeur d'adhérence de la suite. On a alors : $u_{q-1} \geq x > u_q \geq u_{q-1} + \varepsilon_{q-1}$.

Comme $q-1 \geq p > N$, $\left|\varepsilon_{q-1}\right| < \varepsilon$. On en déduit : $x > u_q > x - \varepsilon$. C'est une contradiction car $\{n > N_1, u_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[-\{x\}\}$ devrait être vide.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est donc nécessairement un intervalle.

§ III.4 *CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE*

Exercice 6 :

> Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Construire une fonction continue $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f \leq g$. ■

L'idée est qu'une application monotone est bornée sur chaque intervalle borné. Sur l'intervalle $[n, n+1]$ (n entier), f est majorée par $f(n+1)$. On peut majorer f par l'application g continue, affine par morceaux qui vaut $f(n+1)$ en n. Cette application sera de plus croissante.

Exercice 8 :

> Notons Y la fonction "échelon unité" définie sur $\mathbb{R}$ par $Y(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $Y(x) = 1$ si $x > 0$. Soit par ailleurs $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$. Etudier les points de continuité, les points de continuité à droite ou à gauche, de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par :
> $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y(x - r_n)}{2^n}$. ■

Cette série à termes positifs est bien convergente car $\sum_{n=0}^{N} \frac{Y(x-r_n)}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \leq 2$ pour tout entier N. On peut aussi constater que l'application ainsi définie est croissante car si $x \leq x'$ alors pour tout entier n on a : $Y(x - r_n) \leq Y(x' - r_n)$ donc $f(x) \leq f(x')$.

Montrons d'abord que pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$: $f(x) \underset{x \to x_0, x < x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe N entier tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Posons $\alpha = \inf\{x_0 - r_i,\ \ i \in \{1, \cdots, N\} \text{ et } r_i < x_0\}$. Ce nomb ment positif car c'est le plus petit élément d'un ensemble fini de nombres tous strictement positifs.

Soit maintenant x tel que : $x_0 - \alpha < x < x_0$.

On a l'égalité : $f(x_0) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y(x_0 - r_n) - Y(x - r_n)}{2^n}$.

Dans cette somme, le terme d'indice n est nul sauf si $x_0 - r_n > 0 \geq x - r_n$, ou encore $x \leq r_n < x_0$, auquel cas il vaut $1/2^n$; cela ne peut avoir lieu, d'après la définition de α, que si $n > N$. Donc : $0 \leq f(x_0) - f(x) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon$.

Montrons maintenant que si x_0 est irrationnel alors $f(x) \underset{x \to x_0,\, x > x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ et que si x_0 est le rationnel r_{n_0} alors : $f(x) \underset{x \to x_0,\, x > x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + 1/2^{n_0}$.

On raisonne comme dans la première partie. Soit ε > 0 ; il existe N entier tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Si $x_0 = r_{n_0}$, on suppose aussi que $N \geq n_0$.

Posons $\alpha = \inf\{r_i - x_0,\quad i \in \{1, \cdots, N\} \text{ et } r_i > x_0\}$. Ce nombre est strictement positif car c'est le plus petit élément d'un ensemble fini de nombres tous strictement positifs.

Soit maintenant x tel que : $x_0 < x < x_0 + \alpha$.

On a l'égalité : $f(x) - f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y(x - r_n) - Y(x_0 - r_n)}{2^n}$.

Dans cette somme le terme d'indice n est nul sauf si $x - r_n > 0 \geq x_0 - r_n$ ou encore $x > r_n \geq x_0$, auquel cas il vaut $1/2^n$.

Soit x_0 est irrationnel. L'égalité $x_0 = r_n$ est exclue et la définition de α fait que les termes non nul de la somme sont d'indices $n > N$.

Donc $0 \leq f(x) - f(x_0) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon$.

Soit $x_0 = r_{n_0}$. Les termes non nuls dans la somme sont celui d'indice n_0 et, toujours d'après la définition de α, des termes dont l'indice n vérifie $n > N$. On a donc : $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{Y(x - r_n) - Y(x_0 - r_n)}{2^n}$.

On en déduit :

$$0 \leq f(x) - f(x_0) - \frac{1}{2^{n_0}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{Y(x - r_n) - Y(x_0 - r_n)}{2^n} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Cela démontre bien ce qui était annoncé.

On déduit que cela que f est continue à gauche partout, continue à irrationnel et discontinue à droite en tout rationnel.

Exercice 11 :

> Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$, et $f: F \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'on peut prolonger f en $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
> Indication : Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$. Pour $I \in \mathscr{C}$, si $I =]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ on posera $\tilde{f}(x) = f(a)$ pour $x \in I$; si $I =]a,b[$ on posera
> $\tilde{f}(x) = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ pour $x \in I$.
> Application : On prend pour F l'ensemble triadique de Cantor, c'est-à-dire l'ensemble des réels que peuvent d'écrire sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{3^n}$, avec $a_n \in \{0,2\}$. A chaque $x \in F$ on associe
> $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{2^n}$ avec $b_n = \dfrac{a_n}{2}$ pour tout n. Montrer que $f: F \to \mathbb{R}$ est continue. Que peut-on dire de $\tilde{f}$? ■

On définit $\tilde{f}$ comme dans l'énoncé. Au voisinage d'un réel x_0 qui n'est pas dans F, l'application $\tilde{f}$ est affine ; elle est donc continue en x_0. Montrons que $\tilde{f}$ est continue en tout x_0 élément de F.

Soit x_0 élément de F, montrons que $\tilde{f}$ est continue à droite en x_0.

Si x_0 est isolé à droite dans F, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0+\alpha[\cap F = \varnothing$. Le réel x_0 est la borne inférieure de l'une des composantes connexes de $\mathscr{C}$; l'application $\tilde{f}$ est affine sur $[x_0, x_0+\alpha[$ et est donc continue à droite en x_0.

Si x_0 n'est pas isolé à droite, soit $\varepsilon > 0$; f étant continue en x_0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout x dans $[x_0, x_0+\alpha[\cap F$ on ait $f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$; choisissons un réel x_1 dans $]x_0, x_0+\alpha[\cap F$, ce qui est possible puisque x_0 n'est pas isolé à droite dans F. Pour tout x dans $[x_0, x_1]$, ou bien x est dans F et $f(x) \in]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$, ou bien x n'est pas dans F et la valeur $\tilde{f}(x)$ est obtenue par interpolation linéaire entre deux valeurs de f en des éléments de $[x_0, x_1]$; il est donc clair que $\tilde{f}(x) \in]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$. Cela prouve que $\tilde{f}$ est continue à droite en x_0.

On démontrerait de manière analogue que $\tilde{f}$ est continue à gauche en tout x_0 élément de F.

L'application $\tilde{f}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$.

Application : L'application f est celle introduite dans la résolution de l'exercice 11c) du § II.6. Rappelons qu'on peut définir une telle applicatior ment du compact de Cantor peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$ où pour tout i, $a_i = 0$ ou $a_i = 2$.

La suite $(a_i)_{i>0}$ sera dite écriture de l'élément x du compact de Cantor.

Soient x et y deux éléments du compact de Cantor ; l'écriture de x étant $(a_i)_{i>0}$ et l'écriture de y étant $(b_i)_{i>0}$. Si $x < y$, les deux écritures sont différentes, il existe $i > 0$ tel que $a_i \neq b_i$ et si p est le plus petit, $a_i = 0$ et $b_i = 2$. On peut écrire : $y - x = \frac{2}{3^p} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{b_i - a_i}{3^i}$, mais comme $\left| \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{b_i - a_i}{3^i} \right| \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^p}$, on en déduit que $\frac{1}{3^p} \leq y - x \leq \frac{1}{3^{p-1}}$.

Comparons maintenant les valeurs de f en x et en y : $f(y) - f(x) = \frac{1}{2^p} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{b_i/2 - a_i/2}{2^i}$. Or $\left| \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{b_i/2 - a_i/2}{2^i} \right| \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^p}$, donc : $0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^{p-1}}$.

On déduit de cela en particulier que f est croissante. Montrons qu'elle est (uniformément) continue sur le compact de Cantor.

Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Si x et y sont deux éléments du compact de Cantor vérifiant : $0 < y - x < \frac{1}{3^N}$, le nombre entier p défini ci-dessus vérifie : $\frac{1}{3^p} \leq y - x < \frac{1}{3^N}$ donc $p > N$. On en déduit : $0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{2^{p-1}} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$

L'application f est donc uniformément continue sur le compact de Cantor.

D'après l'étude faite dans l'exercice 11 du § II.6, le complémentaire du compact de Cantor dans [0,1] est $\mathscr{C} = \bigcup_{p \geq 1} O_p$ où

$$O_p = \bigcup_{(a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}) \in \{0,2\}^{p-1}} \left] \overline{0{,}a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 1}, \quad \overline{0{,}a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 2} \right[.$$

C'est une union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. On obtient le complémentaire dans $\mathbb{R}$ en ajoutant les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$. Calculons f en les bornes de ces intervalles, éléments du compact de Cantor :

$$f\left(\overline{0{,}a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 1}\right) = f\left(\overline{0{,}a_1 a_2 \cdots a_{p-1} 022 \cdots}\right)$$

$$= \overline{0{,}b_1 b_2 \cdots b_{p-1} 011 \cdots} = \overline{0{,}b_1 b_2 \cdots b_{p-1} 1} \quad (b_i =$$

Les deux écritures contenant des b sont à base 3, celles contenant des a à base 2. $f\left(\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}2}\right)=\overline{0,b_1b_2\cdots b_{p-1}1}\quad (b_i=a_i/2)$.

L'écriture de gauche est à base 3, celle de droite à base 2.

L'application $\tilde{f}$ est donc constante sur chaque composante connexe du complémentaire du compact de Cantor et il est clair qu'elle est croissante.

En reprenant l'étude initiale (et les mêmes notations), on voit que si x et y sont deux éléments du compact de Cantor tels que $x<y$, on ne peut avoir $f(x)=f(y)$ que si $\sum\limits_{i=p+1}^{\infty}\dfrac{b_i/2-a_i/2}{2^i}=-\dfrac{1}{2^p}$, donc uniquement dans le cas où pour tout $i>p$, $a_i=2$ et $b_i=0$. Les réels x et y sont donc $x=\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}022\cdots}=\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}1}$ et $y=\overline{0,a_1a_2\cdots a_{p-1}2}$ (écritures à base 3). Ce sont les bornes d'une composante connexe du complémentaire du compact de Cantor.

L'application continue ainsi définie est appelée fonction de Lebesgue.

Exercice 16 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tous x et y réels, $f(x+y)=f(x)+f(y)$, on suppose qu'il existe un intervalle $]a,b[\quad (a<b)$ sur lequel f soit majorée. Montrer que f est bornée sur chaque intervalle borné. En déduire qu'elle est continue et qu'il existe un réel λ tel que pour tout x réel, $f(x)=\lambda x$. Montrer qu'il existe des endomorphismes du groupe $(\mathbb{R},+)$ qui ne vérifient pas ces conditions. ■

On remarque d'abord que f est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$. En utilisant les propriétés des endomorphismes de groupes on montre qu'elle est $\mathbb{Q}$-linéaire : si p est un entier relatif et q un entier strictement positif, pour tout x réel : $q.f\left(\dfrac{p}{q}x\right)=f\left(q.\dfrac{p}{q}x\right)=f(p.x)=p.f(x)$ donc $f\left(\dfrac{p}{q}x\right)=\dfrac{p}{q}f(x)$.

Soient $c=\dfrac{a+b}{2}$, $d=\dfrac{b-a}{2}$ et M un majorant de f sur $]a,b[$.

Si x est dans $]-d,d[$, les nombres $x+c$ et $c-x$ sont dans $]a,b[$, donc $f(x)=f(x+c)-f(c)\le M-f(c)$. et $f(x)=f(c)-f(c-x)\ge f(c)-M$. L'application f est donc bornée sur $]-d,d[$. Soit K un majorant de $|f|$ sur cet intervalle.

Montrons que f est (uniformément) continue sur $\mathbb{R}$:

Soit x un réel non nul, on peut trouver un rationnel strictement positif r tel que $\dfrac{d}{2|x|}<r<\dfrac{d}{|x|}$ donc $r|x|<d$ et $\dfrac{1}{r}<\dfrac{2|x|}{d}$. On en déduit :

$|f(rx)| \le K$ et $|f(x)| \le \dfrac{K}{r} < \dfrac{2K}{d}|x|$.

Cette inégalité est vraie aussi en 0. Posons $M' = \dfrac{2K}{d}$, pour tous réels x et y on a la majoration : $|f(y) - f(x)| = |f(y-x)| \le M'|y-x|$. Il est alors clair que f est uniformément continue (elle est M'-lipschitzienne, voir définition V.1.1).

Montrons que pour tout x réel, $f(x) = f(1)x$.

Cette égalité est vraie pour tous les rationnels, car f est $\mathbb{Q}$-linéaire. Si x est un réel quelconque, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels, de limite x. Puisque f est continue en x : $f(r_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$; comme $f(r_n) = r_n.f(1)$, cette suite a aussi pour limite $x.f(1)$; on en déduit (par unicité de la limite) : $f(x) = x.f(1)$. L'application f est $\mathbb{R}$-linéaire.

Soit f est une forme $\mathbb{Q}$-linéaire non nulle du $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$. On peut la considérer comme application $\mathbb{Q}$-linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais son image est $\mathbb{Q}$. Il est donc impossible qu'elle soit $\mathbb{R}$-linéaire. Elle n'est donc majorée (ni minorée) sur aucun intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

§ III.5 *LES THÉORÈMES DE HEINE*

Exercice 2 :

> a) Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continues à droite telles que pour tout x réel ≥ 0 : $f(x) = f(x^2)$.
>
> b) Trouver les fonctions $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout x dans l'intervalle $]0,1[$, $f(x) = f(x^2)$.
>
> c) Parmi les solutions, quelles sont celles qui sont uniformément continues ? ■

Supposons que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifie les conditions du a), et soit x réel, $0 < x < 1$.

Posons $u_n = x^{(2^n)}$ pour tout n entier naturel. On vérifie que :

$$u_{n+1} = x^{(2^{n+1})} = x^{(2^n + 2^n)} = x^{(2^n)} \times x^{(2^n)} = u_n^2.$$

Donc, pour tout n entier, $f(u_{n+1}) = f(u_n)$. Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$ et que f est continue à droite en 0, $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(0)$. La suite $(f(u_n))$ est constante et vaut $f(x)$, donc $f(x) = f(0)$.

Soit maintenant x réel, $1 \leq x$. Posons $v_n = x^{\left(2^{-n}\right)}$. On vérifie que $v_{n+1}^2 = \left(x^{\left(2^{-n-1}\right)}\right)^2 = x^{\left(2.2^{-n-1}\right)} = v_n$. Donc, pour tout n entier, $f(v_{n+1}) = f(v_n)$. Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 1$ et que f est continue à droite en 1, $f(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(1)$. La suite $(f(v_n))$ est constante et vaut $f(x)$, donc $f(x) = f(1)$.

Les applications qui vérifient les conditions du a) sont donc nécessairement des applications constantes sur $[0,1[$ et sur $[1,+\infty[$.

Réciproquement, il est clair que les applications constantes sur $[0,1[$ et sur $[1,+\infty[$ conviennent.

b) Soit f une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Considérons l'application g définie pour tout $t > 0$ par : $g(t) = f\left(e^{-t}\right)$. On a aussi pour tout x dans $]0,1[$, $f(x) = g(-\log(x))$. L'application f vérifie les conditions si, et seulement si, l'application g est continue et pour tout $t > 0$, $g(2t) = g(t)$. Transformons encore le problème. A une application g définie sur $]0,+\infty[$ faisons correspondre l'application h, définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(u) = g\left(e^u\right)$ pour tout u réel. On a aussi : $g(t) = h(\log(t))$ pour tout $t > 0$. L'application g est solution du deuxième problème si, et seulement si, pour tout réel u on a : $h(u+\log(2)) = h(u)$ et h continue. Une application f vérifie donc les conditions de l'énoncé si, et seulement si, il existe une application continue h, $\log(2)$-périodique telle que pour tout x dans $]0,1[$: $f(x) = h(\log(-\log(x)))$. Une telle application h est déterminée par sa restriction à n'importe quelle période $[u, u+\log(2)]$. Plus précisément, sa restriction à un tel intervalle est n'importe quelle application continue de $[u, u+\log(2)]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $h(u) = h(u+\log(2))$. De manière analogue, l'application f est déterminée par sa restriction à tout intervalle de la forme $\left[a, a^2\right]$ où $0 < a < 1$, et cette restriction est n'importe quelle application continue de $\left[a, a^2\right]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = f\left(a^2\right)$.

c) Supposons f uniformément continue. Soient x et y deux éléments de $]0,1[$. Posons $u_n = x^{\left(2^n\right)}$ et $v_n = y^{\left(2^n\right)}$. Ces deux suites ont pour limite 0, leur différence aussi. En appliquant le critère d'uniforme continuité, on voit que cela implique que la suite $(f(v_n) - f(u_n))$ a aussi pour limite 0. Or cette suite est constante et vaut $f(y) - f(x)$. On en déduit que les seules applications uniformément continues qui vérifient les conditions, sont les applications constantes.

Exercice 7 :

> Soit I un intervalle ouvert non vide et $f: I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $f(I) = J$ ouvert, et pour tout y réel, $\operatorname{card}\left(f^{-1}(y)\right) \leq 2$. Montrer que f est strictement monotone. ■

Montrons que f est injective, ou encore que pour tout y dans J, $\operatorname{card}\left(f^{-1}(y)\right) = 1$. Le résultat demandé, f strictement monotone, s'en déduira par application du théorème IV.2.3.

Soit y dans J, supposons qu'il existe deux éléments a et b ($a < b$) dans I tels que $y = f(a) = f(b)$. Comme f ne peut prendre la valeur y ailleurs qu'en a et b, l'application $g : x \mapsto f(x) - y$ garde un signe constant sur chaque intervalle ouvert non vide : $]-\infty, a[\, \cap I$, $]a, b[$ et $]b, +\infty[\, \cap I$. Supposons par exemple que g soit strictement positive sur $]a, b[$, elle atteint alors son maximum relatif à $[a, b]$ en un élément c de $]a, b[$. Notons M cette valeur maximale strictement positive. Chaque réel de l'intervalle $]0, M[$ est une valeur prise par g deux fois sur $]a, b[$, une fois sur $]a, c[$ et une fois sur $]c, b[$, et ne peut donc être atteinte ailleurs ; les intervalles $g(]-\infty, a] \cap I)$ et $g([b, +\infty[\, \cap I)$, inclus dans $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_-$, d'extrémité 0, ne coupent donc pas $]0, M[$ et sont donc inclus dans $\mathbb{R}_-$. L'application g, et l'application f, atteignent donc toutes les deux un maximum absolu en c ; cela est impossible car l'intervalle image J est supposé ouvert. Comme on peut démontrer de manière analogue qu'il est impossible que g soit strictement négative sur $]a, b[$, on en déduit qu'il est impossible que f prenne la même valeur en deux éléments de I différents. L'application f est donc bien injective, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 11 :

> On considère l'application $f: [0, 10[\to \mathbb{R}$ ainsi définie : x étant donné par son développement décimal propre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, si la suite des décimales de rang impair n'est pas périodique, on pose $f(x) = 0$, si au contraire elle est périodique à partir du rang $2n - 1$, on pose $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2p}}{10^p}$. Montrer que f n'est continue en aucun élément de $[0,10[$ mais vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. ■

Pour tout x dans $[0, 10[$, $f(x) = 0$ ou $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2p}}{10^p} \leq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{9}{10^p} = 10$.

L'image de $[0,10[$ par f est donc incluse dans $[0,10]$. Montrons qu'en fait l'image de tout intervalle I non trivial inclus dans $[0,10[$ est $[0,10]$.

Soient d un nombre décimal et $\varepsilon > 0$ tels que $]d, d+\varepsilon[\, \subset I$ (leur existence est évidente). Soit k un entier naturel tel que $10^k d$ est entier ; prenons

que : $2n-3>k$ et $2\times 10^{-(2n-3)}<\varepsilon$. Si y est élément de [0, 10], il existe une suite d'entiers compris entre 0 et 9 : $\left(b_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que : $y=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{b_p}{10^p}$; si y <10 on peut utiliser l'écriture propre, si y =10, on peut poser pour tout p, $b_p=9$. On peut fabriquer à partir de ces éléments un réel x dans $]d$, d +ε[tel que $f(x)=y$.
Posons pour cela : $x=d+\frac{1}{10^{2n-3}}+\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{b_p}{10^{2n+2p}}$. On vérifie d'abord que x est bien dans $]\,d,d+\varepsilon\,[$. D'autre part, comme $2n-3>k$, la dernière décimale non nulle de rang impair dans l'écriture de x est celle de rang $2n-3$. La suite des décimales de rang impair dans l'écriture de x est donc périodique (de période 1) à partir du rang $2n-1$ exactement. Soit $\left(a_j\right)_{j\geq 0}$ la suite des décimales de x ; on voit que pour tout $p\geq 0$, $a_{2n+2p}=b_p$; on en déduit que $f(x)=\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{b_p}{10^p}=y$.

L'image par f de tout intervalle est donc un intervalle.

Justifions que f n'est continue en aucun point x_0 de [0, 10[.

Soit ε, $0<\varepsilon<5$. L'intervalle [0, 10] n'est pas inclus dans $\left]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon\right[$; pour aucun $\alpha>0$, l'image par f de l'intervalle (non trivial) $\left]x_0-\alpha,x_0+\alpha\right[\cap[0,10[$ n'est incluse dans $\left]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon\right[$ puisque c'est [0, 10] ; f n'est donc pas continue en x_0.

Exercice 15 :

> Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction et A l'ensemble des points où f présente un maximum local. Montrer que $f(A)$ est au plus dénombrable. ■

Pour un réel ε > 0, soit A_ε l'ensemble des réels x tels que :
$\forall z\in\left]x-\varepsilon,x+\varepsilon\right[\quad f(z)\leq f(x)$.

Montrons que $f\left(A_\varepsilon\right)$ est au plus dénombrable.

Si x_1 et x_2 sont deux éléments de A_ε tels que $|x_1-x_2|<\varepsilon$, alors $x_1\in\left]x_2-\varepsilon,x_2+\varepsilon\right[$ donc $f(x_1)\leq f(x_2)$ et de même $f(x_2)\leq f(x_1)$. On en déduit que $f(x_1)=f(x_2)$.

Pour tout entier relatif n l'ensemble $B_n=f\left(A_\varepsilon\cap\left[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon\right[\right)$ a donc au plus 1 élément. Il est alors clair que $f(A_\varepsilon)$, qui est l'union des B_n pour n entier relatif, est au plus dénombrable.

On voit que $A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}A_{1/n}$ et que donc : $f(A)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}f\left(A_{1/n}\right)$. L'ensemble $f(A)$, union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, e nombrable.

§ III.6 *LA DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE*

Exercice 5 :

Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty}(u_n)$ et $\limsup\limits_{n\to\infty}(u_n)$ pour chacune des suites ci-après :

a) $u_n = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$ $(n \geq 1)$.

b) $u_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n - \text{Ent}\left(2+\sqrt{3}\right)^n$.

c) $u_n = \left(1+\dfrac{n\theta - \text{Ent}(n\theta)}{n}\right)^n$ ($n \geq 1$, θ étant un réel donné dans $]0,1[$).

d) $u_n = \dfrac{1}{2}+(-1)^n \dfrac{n^2}{n^2+4}$. ■

Pour a) et d), montrons que si les suites extraites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont toutes les deux convergentes, leurs limites sont les seules valeurs d'adhérence de la suite (u_n). On en déduira immédiatement les valeurs de $\liminf\limits_{n\to\infty}(u_n)$ et de $\limsup\limits_{n\to\infty}(u_n)$.

Si l est un réel différent des limites de ces deux suites extraites, comme il n'est pas valeur d'adhérence de la suite (u_{2p}), il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\{p, u_{2p} \in\ ]l-\alpha, l+\alpha[\}$ est fini ; il existe de même un réel $\beta > 0$ tel que $\{p, u_{2p+1} \in\ ]l-\beta, l+\beta[\}$ est fini. ; si $\gamma = \inf(\alpha,\beta)\ (>0)$, il est clair que $\{n, u_n \in\ ]l-\gamma, l+\gamma[\}$ est fini. Le réel l n'est donc pas valeur d'adhérence de la suite u_n.

Pour le a), on trouve :

$$u_{2p} = \left(1+\frac{1}{2p}\right)^{2p} \underset{p\to\infty}{\to} \text{e} \text{ et } u_{2p+1} = \left(1-\frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1} \underset{p\to\infty}{\to} 1/\text{e}.$$

Donc : $\liminf\limits_{n\to\infty}(u_n) = 1/\text{e}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty}(u_n) = \text{e}$.

Pour le d), on trouve

$$u_{2p} = \frac{1}{2}+\frac{4p^2}{4p^2+4} \underset{p\to\infty}{\to} \frac{3}{2} \text{ et } u_{2p+1} = \frac{1}{2}-\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2+4} \underset{p\to\infty}{\to} -\frac{1}{2}.$$

Donc : $\liminf\limits_{n\to\infty}(u_n) = -1/2$ et $\limsup\limits_{n\to\infty}(u_n) = 3/2$.

b) Les nombres $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ sont les zéros du polynôme

Posons : $s_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$. Cette suite vérifie la récurrence $s_{n+2} = 4s_{n+1} - s_n$ et les valeurs initiales sont : $s_0 = 2$, $s_1 = 4$; cette suite ne prend donc que des valeurs entières. On peut écrire :
$(2+\sqrt{3})^n = s_n - (2-\sqrt{3})^n$. Comme : $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, pour tout entier n strictement positif, $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$, donc $s_n - 1 < (2+\sqrt{3})^n < s_n$ et $\mathrm{Ent}\,(2+\sqrt{3})^n = s_n - 1$. La suite étudiée est donc $u_n = 1-(2-\sqrt{3})^n$ qui est convergente de limite 1.

c) Démontrons le lemme suivant :

> Si $u_n = \left(1+\dfrac{v_n}{n}\right)^n$ et (v_n) est une suite bornée, alors les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les nombres $\exp(l)$ où l est une valeur d'adhérence de la suite (v_n).

Pour n assez grand, $u_n > 0$, et on peut écrire : $\log(u_n) = n\log\left(1+\dfrac{v_n}{n}\right)$.
Comme $\dfrac{v_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit : $\log(u_n) \sim n\dfrac{v_n}{n} = v_n$. Soit L est une valeur d'adhérence de (u_n), $L \geq 0$; 0 est exclu car la suite (v_n) ne pourrait pas être bornée, donc $L > 0$; il est alors clair que $\log(L)$ est valeur d'adhérence de (v_n). Inversement, si l est valeur d'adhérence de la suite (v_n), c'est-à-dire limite d'une suite extraite de la suite (v_n), on voit que $\exp(l)$ est limite d'une suite extraite de la suite (u_n) donc valeur d'adhérence de la suite (u_n).

On pourrait appliquer ce résultat au a) pour obtenir le même résultat. Dans l'exemple proposé ici , $v_n = n\theta - \mathrm{Ent}(n\theta)$. Les hypothèses d'application du lemme sont bien réunies.

Déterminons les valeurs d'adhérence de cette suite. Il faut distinguer deux cas :

<u>1^er^ cas</u> : θ est rationnel, $\theta = \dfrac{p}{q}$ (représentant irréductible). Posons : $np = k_n q + r_n$, division euclidienne. On voit facilement que pour tout n , $v_n = \dfrac{r_n}{q}$. Cette suite ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs de la forme $\dfrac{r}{q}$ où $0 \leq r < q$. Montrons que ces valeurs sont les valeurs d'adhérence de la suite (v_n). Comme p et q sont premiers entre eux, la multiplication par p modulo q est bijective, il existe donc des entiers $n_0, n_1, \cdots, n_{r-1}$ dans $\{0, \cdots, q-1\}$ tels que pour i variant de 0 à $q-1$, $r_{n_i} = i$. Pour i entre 0 à q -1, la suit

est extraite de la suite (v_n) et a pour limite $\frac{i}{q}$. Cela prouve bien que ces valeurs sont les valeurs d'adhérence de la suite (v_n). Les valeurs d'adhérence de la suite (u_n) sont donc les réels $\exp\left(\frac{i}{q}\right), i \in \{0, \cdots, q-1\}$.

<u>$2^{\text{ième}}$ cas</u> : θ est irrationnel. Montrons qu'alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) est l'intervalle $[0,1]$. Comme cette suite est à valeurs dans $[0,1]$, il suffit de montrer que tout élément de $[0,1]$ est valeur d'adhérence de la suite.

Sinon, il existerait un élément x dans $[0,1]$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N}, v_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\}$ soit fini. Dans tous les cas, on pourrait trouver un intervalle ouvert $]a,b[$ inclus dans $[0,1]$ qui ne contiendrait aucun terme de la suite. Comme θ est irrationnel, le sous-groupe additif $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\theta$ est partout dense dans $\mathbb{R}$ (voir §I) et il existe deux entiers relatifs n et m tels que $0 \le a < m + n\theta < b \le 1$. Le nombre $-m$ est visiblement $\text{Ent}(n\theta)$ donc $v_n = m + n\theta \in]a,b[$, ce qui est contradictoire.

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est dans ce cas l'intervalle $[1, e]$.

Chapitre IV

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

§ IV.1 *LIMITES*

Exercice 2 :

> Donner un exemple d'une suite réelle (x_n) qui n'est pas convergente, et telle cependant que, pour chaque $k \geq 2$, la suite extraite $(x_{kn})_{n\geq 0}$ soit convergente. ■

Posons : $x_n = 0$ si n n'est pas premier et $x_n = 1$ si n est premier. Cette suite n'est évidemment pas convergente puisque l'ensemble des nombres premiers est infini ; mais si $k \geq 2$ et $n > 1$, le nombre kn n'est pas premier ; donc $u_{kn} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6 :

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout x réel, $\lim\limits_{y\to x,\, y\neq x} f(y)$ existe et vaut $g(x)$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue. ■

Soit x_0 réel, par définition de la fonction g, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\alpha >$ 0 tel que $\forall x \in\ ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus\{x_0\}$, $|f(x) - g(x_0)| < \varepsilon$. Soit x_1 un élément de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus\{x_0\}$, l'inégalité $|f(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ est vraie dans un voisinage de x_1, et donc, en passant à la limite dans cette inégalité, $|g(x_1) - g(x_0)| \leq \varepsilon$.

On a donc bien montré que l'application g était continue en x_0.

Exercice 8 :

> Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et une fonction arbitraire $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose A sans point isolé. On note $\mathfrak{D}_0$ l'ensem

tels que $\lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$ existe et soit distincte de $f(a)$. Montrer que $\mathcal{D}_0$ est au plus dénombrable. ■

Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $\mathcal{D}_\varepsilon$ l'ensemble des éléments a de A tels que la limite $l(a) = \lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$ existe et vérifie $|l(a) - f(a)| > \varepsilon$.

Montrons que $\mathcal{D}_\varepsilon$ n'a que des points isolés.

Soit a dans $\mathcal{D}_\varepsilon$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \,]a-\alpha, a+\alpha[\, \cap A \setminus \{a\},\ |f(x) - l(a)| < \varepsilon/2\ .$$

Pour tout x_1 dans $]a-\alpha, a+\alpha[\, \cap A \setminus \{a\}$, si la limite $l(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1,\, x \neq x_1} f(x)$ existe, comme l'inégalité $|f(x) - l(a)| < \varepsilon/2$ est vraie au voisinage de x_1, par prolongement des inégalités, on en déduit : $|l(x_1) - l(a)| \leq \varepsilon/2$. Comme $|f(x_1) - l(a)| < \varepsilon/2$, on voit que $|f(x_1) - l(x_1)| < \varepsilon$, donc le réel x_1 n'est pas dans $\mathcal{D}_\varepsilon$. L'intersection de $\mathcal{D}_\varepsilon$ avec l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ est donc réduite à $\{a\}$.

Tout élément de $\mathcal{D}_\varepsilon$ est donc isolé, ce qu'il fallait démontrer.

L'ensemble $\mathcal{D}_\varepsilon$ est donc dénombrable (voir §III.3 exercice 2).

Il est évident que $\mathcal{D}_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_{1/n}$ et que donc $\mathcal{D}_0$ est dénombrable.

Exercice 12 :

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Pour tous réels a, b avec $a < b$, on pose :

$\Gamma_{a,b}(f) = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid \exists (s_1, s_2, \cdots, s_{2m}) \in I^{2m}, s_1 < s_2 < \cdots < s_{2m}$

et $f(s_1) > b, f(s_2) < a, \cdots, f(s_{2m-1}) > b, f(s_{2m}) < a\}$

a) Si f est bornée et si $\Gamma_{a,b}(f)$ est fini pour tous a, b $a < b$, montrer que f est réglée sur I.

b) Si I est compact et si f est réglée sur I, alors $\Gamma_{a,b}(f)$ est fini pour tous a, b ($a < b$). ■

a) Soit x_0 dans I qui n'est pas la borne inférieure de I, montrons que $f(x)$ a une limite quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures.

Soient a et b deux réels, $a < b$, nous dirons que l'intervalle $[a, b]$ possède la propriété (S) s'il existe un réel $x, x < x_0$ tel que $]x, x_0[\, \subset I$ et $\forall s \in \,]x, x_0[, f(s) \geq a$ et nous dirons qu'il possède la propriété (I) s'il existe un réel $x, x < x_0$ tel que $]x, x_0[\, \subset I$ et $\forall s \in \,]x, x_0[, f(s) \leq b$.

Montrons que tout intervalle $[a, b]$ possède l'une ou l'autre de ce

Sinon, soit $x, x < x_0$ tel que $]x, x_0[\subset I$, il existe alors un élément s_1 de $]x, x_0[$ tel que $f(s_1) > b$, il existe un élément s_2 de l'intervalle $]s_1, x_0[$ tel que $f(s_2) < a$ etc. On peut donc trouver une suite $(s_k)_{k>0}$, strictement croissante, dans $]x, x_0[$, telle que pour tout entier $k > 0$, $f(s_{2k-1}) > b$ et $f(s_{2k}) < a$. Cela contredit évidemment l'hypothèse que $\Gamma_{a,b}$ est fini.

Première méthode :

Pour $x < x_0$ dans I, posons $M_x = \sup\{f(y), y \in \,]x, x_0[\,\}$ et $m_x = \inf\{f(y), y \in \,]x, x_0[\,\}$; ces deux nombres existent bien car f est bornée. L'application $x \mapsto m_x$ est évidemment croissante et $x \mapsto M_x$ est décroissante. De plus, il est clair pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de I inférieurs strictement à x_0, on a l'inégalité : $m_{x_1} \le M_{x_2}$. Les applications $x \mapsto m_x$ et $x \mapsto M_x$ ont donc des limites finies quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures (voir §IV.2) ; on posera $M = \lim\limits_{x \to x_0,\, x<x_0} M_x$ et $m = \lim\limits_{x \to x_0,\, x<x_0} m_x$, on a bien sûr l'inégalité : $m \le M$.

(On dira que M est la limite supérieure de f au voisinage de x_0 par valeurs inférieures et m la limite inférieure).

Montrons que f a une limite au voisinage de x_0 par valeurs inférieures si, et seulement si, $M = m$ et que dans ce cas, la limite est $m = M = L$.

On voit facilement qu'il s'agit d'une condition nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante .

Supposons $M = m = L$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $L - \varepsilon < L < L + \varepsilon$, on peut trouver deux éléments x_1 et x_2 de I , strictement plus petits que x_0 tels que : $L - \varepsilon < m_{x_1} \le L \le M_{x_2} < L + \varepsilon$. Soit $x_3 = \sup(x_1, x_2)$, on a : $L - \varepsilon < m_{x_3} \le L \le M_{x_3} < L + \varepsilon$. Pour tout élément x de $]x_3, x_0[$ on a l'encadrement : $L - \varepsilon < m_{x_3} \le f(x) \le M_{x_3} < L + \varepsilon$.

On a donc bien démontré : $\lim\limits_{x \to x_0,\, x<x_0} f(x) = L.$

Montrons maintenant que, si l'hypothèse du a) est vérifiée, il est impossible que $m < M$.

En effet, si tel est le cas, choisissons deux réels a est b tels que $m < a < b < M$; pour tout réel x, $x < x_0$ dans I, on vérifie $m_x \le m < a$, donc il existe $y, x < y < x_0$ tel que $m_x \le f(y) < a$. L'intervalle $[a, b]$ ne peut donc vérifier la propriété (S). De manière analogue, en utilisant M on montrerait qu'il ne peut vérifier la propriété (I). Cela est impossible, donc $m = M$.

Deuxième méthode :

Soit M un majorant de f en valeur absolue sur I. Posons $a_0 = -M$ et $b_0 = M$. Il est clair que l'intervalle $[a_0, b_0]$ possède les propriétés (S) et (I). Supposons avoir trouvé des intervalles emboîtés $I_k = [a_k, b_k]$ pour k variant (

sédant tous les propriétés (S) et (I). Posons alors
$c_n = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $d_n = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$. L'intervalle $[c_n, d_n]$ possède la propriété (S) ou (I) ; s'il possède la propriété (S) il est clair que l'intervalle $[c_n, b_n]$ possède la propriété (S), mais aussi la propriété (I), comme $[a_n, b_n]$; il possède alors les propriétés (S) et (I) et nous poserons $I_{n+1} = [c_n, b_n]$. Dans le cas où $[c_n, d_n]$ ne posséderait pas la propriété (S), on vérifierait de manière analogue que $[a_n, d_n]$ possède les propriétés (S) et (I), et on poserait $I_{n+1} = [a_n, d_n]$.

On peut donc engendrer une suite d'intervalles emboîtés $(\operatorname{long}(I_{n+1}) = 2/3 \operatorname{long}(I_n))$, dont l'intersection est un singleton $\{L\}$. Montrons que $\lim\limits_{x \to x_0,\, x < x_0} f(x) = L$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $I_n \subset]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$; l'intervalle I_n possédant les propriétés (S) et (I), on peut trouver deux réels, x_1 et x_2 tels que les intervalles $]x_1, x_0[$ et $]x_2, x_0[$ soient inclus dans I et vérifient
$\forall s \in\ ]x_1, x_0[, f(s) \geq a_n$ et $\forall s \in\ ]x_2, x_0[, f(s) \leq b_n$. Donc si $x_3 = \sup(x_1, x_2)$, alors $\forall s \in\ ]x_3, x_0[, f(s) \in I_n \subset]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

On a donc bien démontré $f(s) \underset{x \to x_0,\, x < x_0}{\longrightarrow} L$.

On démontrerait de manière analogue que si x_0 n'est pas la borne supérieure de l'intervalle I, l'application f a une limite quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures.

L'application f est donc réglée.

b) Soient deux réels a et b, $a < b$, montrons que $\Gamma_{a,b}$ est fini.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon \leq b - a$. Si x n'est pas la borne inférieure de I, on peut trouver un réel y, $y < x$ dans I, tel que
$\forall z \in\ ]y, x[\,, f(x-0) - \varepsilon < f(z) < f(x-0) + \varepsilon$. Comme b et a ne peuvent pas être tous les deux dans l'intervalle $]f(x-0) - \varepsilon, f(x-0) + \varepsilon[$, ou bien $a \leq f(x-0) - \varepsilon$ ou bien $b \geq f(x-0) + \varepsilon$. Donc ou bien $\forall z \in\ ]y, x[\,, f(z) > a$, ou bien $\forall z \in\ ]y, x[\,, f(z) < b$.

On peut procéder de manière analogue à droite. Pour tout x dans I on peut donc trouver un intervalle V_x, voisinage ouvert de x dans I , tel que :

$$\forall z \in V_x \cap]-\infty, x[, f(z) \geq a \text{ ou } \forall z \in V_x \cap]-\infty, x[, f(x) \leq b,$$

et :

$$\forall z \in V_x \cap]x, \infty[, f(x) \geq a \text{ ou } \forall z \in V_x \cap]x, \infty[, f(x) \leq b.$$

Comme I est compact, de la famille $(V_x)_{x \in I}$, recouvrement de I par des ouverts de I, on peut extraire une sous-famille finie. Il existe donc une partie finie P de I telle que $(V_x)_{x \in P}$ est un recouvrement de I.

Supposons que $(s_k)_{1\le k\le 2m}$ soit une suite strictement croissante d'éléments de I telle que : $f(s_1) > b, f(s_2) < a, \cdots, f(s_{2m-1}) > b, f(s_{2m}) < a$. Pour tout x dans P, il est clair que $V_x \cap]-\infty, x[$ et $V_x \cap]x, \infty[$ ne contiennent qu'au plus un terme de la suite ; V_x ne contient au plus que 3 termes de la suite ; donc $2m \le 3\mathrm{card}(P)$.

Le nombre $\Gamma_{a,b}$ est donc fini.

§ IV.2 *FONCTIONS MONOTONES*

Exercice 1 :

> Soit $f: [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. ■

Soit $E = \{x \in [0,1], f(x) \ge x\}$. L'ensemble borné E n'est pas vide car $f(0) \ge 0$. Soit $c = \sup(E)$, montrons que $f(c) = c$.

Si $f(c) < c$, alors on peut trouver x dans E tel que $f(c) < x \le c$; or $f(c) \ge f(x)$ car f est croissante, et $f(x) \ge x$ car x est dans E ; donc $f(c) \ge f(x) \ge x > f(c)$. Il y a contradiction.

Si $f(c) > c$, alors $f(f(c)) \ge f(c)$ car f est croissante, et $f(f(c)) < f(c)$ car $f(c) \notin E$. Il y a contradiction.

On a donc bien démontré $f(c) = c$.

Exercice 3 :

> a)Trouver toutes les fonctions continues $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f[f(x)] = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
>
> b) Soit $a > 0, a \ne 1$, quelles sont les applications continues $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f[f(x)] = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
>
> c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ donné, quelles sont les applications continues $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f[f(x)] = x + \lambda$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
>
> d) Soient a est b deux réels non nuls, quelles sont les applications continues $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f[f(x)] = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
>
> ■

Remarquons d'une manière générale que si g est une application continue strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bijective, les applications continues f telles $f \circ f = g$ sont nécessairement injectives, donc strictement monotones (théorème IV.2.3) et bijectives. Si une telle application f existe, elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante ; dans les deux cas, l'application g est strictement croissante.

Remarquons encore que si x est un point fixe de f (et f en a nécessairement un et un seul si elle est strictement décroissante puisque $x \mapsto f(x) -$ ment décroissante de $+\infty$ à $-\infty$), alors c'est aussi un point fixe de g

comme $g \circ f = f \circ g$, si x est un point fixe de g, $f(x)$ est aussi un point fixe de g ; dans le cas où g n'a qu'un seul point fixe, c'est aussi un point fixe de f et c'est le seul.

a) Soit x réel quelconque, si $x < f(x)$, comme $f(x) > f(f(x)) = x$, f ne peut être que strictement décroissante. De même, si $f(x) < x$, comme $x = f(f(x)) > f(x)$, f ne peut être que strictement décroissante. La seule solution strictement croissante est donc l'identité.

Etudions les solutions strictement décroissantes.

D'après le préliminaire, f a un point fixe unique a. Posons $h(t) = f(t+a) - a$. L'application h est strictement décroissante continue, elle a pour unique point fixe 0 et elle vérifie $h \circ h = Id$, en effet, pour tout t, $h(h(t)) = f\big(f(t+a) - a + a\big) - a = t$.

La restriction k de h à $\mathbb{R}_+$ est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_-$. Montrons que l'application qui, à f solution, fait correspondre le couple (a, k), est une bijection de l'ensemble des solutions, vers l'ensemble des couples formés d'un réel quelconque et d'une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_-$. Décrivons la correspondance inverse.

Si k est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_-$, alors il est évident que $k(0) = 0$. Définissons h par $h(x) = k(x)$ si $x \geq 0$, et $h(x) = k^{-1}(x)$ si $x \leq 0$ (les deux définitions sont cohérentes en 0). On voit bien que h est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et, si $x \geq 0$, $h(h(x)) = k^{-1}(k(x)) = x$, si $x \leq 0$, $h(h(x)) = k(k^{-1}(x)) = x$; donc $h \circ h = Id$. Pour terminer, à h nous ferons correspondre l'application continue strictement décroissante f définie pour tout x réel par : $f(x) = h(t-a) + a$; l'application f sera bien continue strictement décroissante, de seul point fixe a, et vérifiera $f \circ f = Id$.

Il est clair que ces deux correspondances sont réciproques l'une de l'autre.

b) La fonction g dans cet exemple est $x \mapsto ax$ et n'a comme point fixe que 0. On en déduit que les solutions, s'il en existe, sont des applications continues strictement monotones dont le seul point fixe est 0.

Cherchons l'ensemble des solutions strictement croissantes.

Comme $f(0) = 0$, les intervalles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ sont tous les deux stables par f. On peut donc chercher indépendamment l'ensemble des applications strictement croissantes bijectives continues de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ qui vérifient la relation, et les applications strictement croissantes bijectives continues de $\mathbb{R}_-$ vers $\mathbb{R}_-$ qui vérifient la relation. Le deuxième problème se ramène au premier en posant : $g(x) = -f(-x)$. Pour le premier, il suffit de trouver l'ensemble des applications continues strictement croissantes bijectives de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient la relation (sur $\mathbb{R}_+^*$), car une telle application a nécessairement pour limite 0 au voisinage de 0 par valeurs supérieures. A une application f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut associer l'application $k = \log \circ f \circ \exp$; il est clair que f sera cont strictement croissante et vérifiera $f \circ f = aId$, si, et seulement si, k est continue, bijective strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et vérifie : $\forall t, k(k(t)) = t + \log(a)$. On est donc ramené au problème du c).

Cherchons l'ensemble des solutions strictement décroissantes.

Si f est une solution strictement décroissante, sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_-$; elle doit vérifier $\forall x \geq 0, f(ax) = af(x)$. Montrons que l'application qui à f strictement décroissante bijective fait correspondre sa restriction à $\mathbb{R}_+$, considérée comme bijection de $\mathbb{R}_+$vers $\mathbb{R}_-$, est une bijection entre l'ensemble des applications continues strictement décroissantes bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $f \circ f = aId$, et l'ensemble des bijections continues h de $\mathbb{R}_+$vers $\mathbb{R}_-$ vérifiant : $\forall x \geq 0, h(ax) = ah(x)$. Il suffit d'exhiber la bijection réciproque : à une telle application h, nous ferons correspondre l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = h(x)$ si $x \geq 0$, et $f(x) = ah^{-1}(x)$ si $x \leq 0$. Il est clair que f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Vérifions que $f \circ f = aId$.

Si $x \geq 0$, comme $f(x) \leq 0$, $f(f(x)) = ah^{-1}(h(x)) = ax$. Si $x \leq 0$, comme $f(x) \geq 0$, $f(f(x)) = f(ah^{-1}(x)) = h(ah^{-1}(x)) = ah(h^{-1}(x)) = ax$.

Il reste à déterminer l'ensemble des applications h, strictement décroissantes continues bijectives de $\mathbb{R}_+$vers $\mathbb{R}_-$ qui vérifient $\forall x \geq 0, h(ax) = ah(x)$. En considérant les applications $-h$, on est ramené à déterminer l'ensemble des applications k, continues strictement croissantes bijectives de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$ qui vérifient la même condition : $\forall x \geq 0, k(ax) = ak(x)$. On peut comme précédemment considérer les restrictions à $\mathbb{R}_+^*$, et en posant $\varphi = \log \circ k \circ \exp$, ramener le problème à la détermination de l'ensemble des applications continues strictement croissantes bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation : $\forall t, \varphi(t + \log(a)) = \varphi(t) + \log(a)$. Or φ vérifie cette relation si, et seulement si, $t \mapsto \varphi(t) - t$ est $\log(a)$-périodique. On peut donc considérer le problème comme résolu.

c) L'application g est ici : $x \mapsto x + \lambda$, $\lambda \neq 0$. On peut supposer que $\lambda > 0$, car f vérifie $\forall x, f(f(x)) = x + \lambda$ si, et seulement si, f^{-1} vérifie $\forall x, f^{-1}(f^{-1}(x)) = x - \lambda$.

Comme l'application g n'a pas de point fixe, f ne peut pas en avoir ; elle est donc nécessairement strictement croissante. Montrons que pour tout x on a $x < f(x) < x + \lambda$. En effet, si $f(x) < x$, comme f est strictement croissante, $x + \lambda = f(f(x)) < f(x) < x$, ce qui est impossible ; donc $x < f(x)$, et en appliquant f on obtient : $f(x) < f(f(x)) = x + \lambda$. En particulier, $0 < f(0) < \lambda$. Remarquons que comme f commute avec $x \mapsto x + \lambda$, pour tout x réel $f(x + \lambda) = f(x) + \lambda$. On devine que f est déterminée par sa restri
valle $[0, f(0)]$, dont l'image par f est $[f(0), \lambda]$.

Plus précisément, soit v un réel tel que $0 < v < \lambda$, et S l'ensemble des solutions continues telles que $f(0) = v$. Montrons que l'application qui à f élément de S fait correspondre la restriction de f à l'intervalle $[0, v]$, considérée comme bijection de $[0, v]$ sur $[v, \lambda]$, est une bijection de S vers l'ensemble des applications continues strictement croissantes de $[0, v]$ sur $[v, \lambda]$. Il suffit d'exhiber la correspondance inverse.

Soit φ une application strictement croissante continue de $[0, v]$ sur $[v, \lambda]$. Définissons f sur $[0, \lambda]$ par $f(x) = \varphi(x)$ si $0 \le x \le v$ et $f(x) = \varphi^{-1}(x) + \lambda$ si $v \le x \le \lambda$ (les deux définitions sont compatibles en v). L'application f ainsi définie est continue (en particulier en v).

On vérifie que $f(\lambda) - \lambda = v = f(0) - 0$; on peut donc prolonger à $\mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x) - x$ en une application continue λ-périodique (de manière unique) et donc prolonger à $\mathbb{R}$ l'application f en une application continue vérifiant pour tout x réel la relation : $f(x + \lambda) = f(x) + \lambda$ (de manière unique). Montrons que l'application f définie ainsi est bien dans S.

Si $0 \le x \le v$, alors $v \le f(x) \le \lambda$ donc
$f(f(x)) = f(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) + \lambda = x + \lambda$.

Si $v \le x \le \lambda$ alors $f(x) = \varphi^{-1}(x) + \lambda$ donc $\lambda \le f(x) \le v + \lambda$ et
$f(f(x)) = f(\varphi^{-1}(x) + \lambda) = f(\varphi^{-1}(x)) + \lambda = \varphi(\varphi^{-1}(x)) + \lambda = x + \lambda$.

Si $k\lambda \le x \le (k+1)\lambda$ (k entier),
$f(f(x)) = f(f(x - k\lambda) + k\lambda) = f(f(x - k\lambda)) + k\lambda$. Comme $0 \le x - k\lambda \le \lambda$,
$f(f(x)) = (x - k\lambda) + \lambda + k\lambda = x + \lambda$.

L'application f est donc bien dans S.

d) D'après le préliminaire, si $a < 0$, l'application g étant strictement décroissante, l'ensemble des solutions est vide. Si $a = 1$, on est dans le cas du c). Cherchons l'ensemble des solutions dans le cas où $a > 0$ et $a \neq 1$.

L'application g a alors un point fixe unique : $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$. Ramenons ce point fixe à 0 en posant $h(x) = f(x + x_0) - x_0$. L'application h est continue si, et seulement si, f l'est, et f vérifie la condition si, et seulement si, pour tout x réel :
$h(h(x)) = h(f(x + x_0) - x_0) = f(f(x + x_0)) - x_0 = a(x + x_0) + b - x_0 = ax$.

Nous sommes donc ramené au cas résolu dans le b).

Exercice 11 :

> Pour $x \in [0,1[$, on note $(a_n(x))_{n\ge1}$ le développement décimal propre de x. On fait correspondre à x le réel $y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{20^n}$, la suite $(b_n)_{n\ge1}$ étant ainsi définie : $|b_n| = 2a_{2n-1}$ si $a_{2n} \in \{0, 2, 4\}$; $|b_n| = 2a_{2n-1} + 1$ si a_{2n} est impair ; $|b_n| = 2$

$a_{2n} \in \{6,8\}$; on définit par récurrence le signe ε_n à affecter à b_n : $\varepsilon_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$ si $a_{2n} \in \{0,2,4,5,7,9\}$ et $\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n$ sinon. Montrer que $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, mais qu'elle n'est monotone sur aucun intervalle de longueur > 0 (Singh, 1930). ■

Montrons d'abord que f est continue en tout nombre non décimal x $(0 < x < 1)$ de développement propre : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Pour un entier p donné > 1, les réels dans l'intervalle : $\left]\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p}}, \overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p}} + 10^{-2p}\right[$, voisinage ouvert de x, ont les mêmes décimales que x jusqu'à l'ordre $2p$ (compris). Les signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p+1}$ sont donc toujours les mêmes et les nombres $b_1, b_2, \cdots, b_p$ seront toujours les mêmes.

Si x' est dans cet intervalle, on voit que : $f(x') - f(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{b'_n - b_n}{20^n}$, où (b'_n) est la suite associée à x', et que donc :

$$|f(x') - f(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{40}{20^n} = \frac{40}{19 \times 20^p}.$$

Il est donc clair que f est continue en x.

Montrons maintenant que si x est décimal, f est continue à droite en x.

On peut raisonner de manière analogue. Nous poserons toujours $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$.

Pour un entier p donné > 1, les réels dans l'intervalle : $\left[x, \overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p}} + 10^{-2p}\right[$ ont les mêmes décimales que x jusqu'à l'ordre $2p$ (compris) ; on en déduit comme précédemment que pour tout x' dans cet intervalle :

$$|f(x') - f(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{40}{20^n} = \frac{40}{19 \times 20^p},$$

et que conséquent, f est continue à droite en x.

Nous n'avons utilisé jusqu'à présent la définition de f que de manière très superficielle. La continuité de f à gauche en les décimaux (> 0), vient du fait que pour de tels nombres on peut aussi calculer f en utilisant le développement impropre de x . C'est ici qu'intervient la définition précise de f : elle a été choisie pour que justement le développement propre et le développement impropre de x donnent le même résultat. En admettant ce fait, montrons que f est continue à gauche en les décimaux (> 0).

Soit x un décimal > 0 . Nous poserons : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, développement impropre de x. Un entier p étant donné, on voit facilement que les dé propres (ou impropres) des réels x' de l'intervalle : $\left]\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p}}, x\right[$ coïncident jusqu'à l'ordre $2p$ (compris) avec le développement impropre de x. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, puisqu'on calcule $f(x)$ en utilisant le développement impropre de x, on aura : $|f(x')-f(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{40}{20^n} = \frac{40}{19\times 20^p}$.

La continuité est donc bien démontrée.

Montrons maintenant ce qui avait été annoncé, c'est-à-dire que si x est décimal (> 0) le développement propre et le développement impropre de x donnent le même résultat pour $f(x)$.

Posons pour a entier entre 0 et 9 :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(a)$	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1
$\sigma(a)$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1

Au développement décimal propre de x, $(a_n)_{n\geq 1}$, nous ferons correspondre la suite des signes $(s_n)_{n\geq 1}$, définie par $s_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1, s_{n+1} = \sigma(a_{2n})s_n$, puis la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout n par $b_n = s_n(2a_{2n-1} + \gamma(a_{2n}))$, enfin le réel $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{20^n}$. Nous procéderons de manière analogue avec le développement décimal impropre $(a'_n)_{n\geq 1}$, pour obtenir $y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n}{20^n}$.

Supposons que le rang du dernier chiffre non nul dans le développement propre de x (décimal) soit impair, égal à $2p+1$, et calculons les différentes suites pour le développement propre et le développement impropre.

Le développement propre de x est la suite : $(a_1, a_2, \cdots, a_{2p}, a, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Le développement impropre de x est la suite :
$(a_1, a_2, \cdots, a_{2p}, a-1, 9, 9, \cdots, 9, \cdots)$.

Les deux développements coïncident jusqu'au rang $2p$. Les deux suites de signes coïncident jusqu'au rang $p+1$, les suites $\gamma(a_{2n})$ et $\gamma'(a_{2n})$ coïncident jusqu'au rang p, les deux suites b_n et b'_n coïncident donc jusqu'au rang p.

Au rang $p+1$:

les signes sont égaux, notons les s. Les valeurs de γ sont $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(9) = 1$. La valeur de b_{p+1} est $s \cdot 2a$, celle de b'_{p+1} est $s\cdot(2(a-1)+1) = s\cdot(2a-1)$. Donc $b_{p+1} - b'_{p+1} = s$.

A un rang $n > p+1$:

les deux suites de signes sont constantes à partir du rang $p+1$ car $\sigma(0) = \sigma(9) = 1$. Les deux signes sont égaux à s. La valeur de γ

jours 0, celle de $\gamma(a'_{2n})$ toujours 1. La valeur de b_n est toujours $s\cdot(2\cdot 0)=0$, celle de b'_n est toujours $s\cdot(2\cdot 9+1)=19s$. Donc $b_n - b'_n = -19s$.

La différence des valeurs y et y' trouvées est donc

$y - y' = s\left(\dfrac{1}{20^{p+1}} - \displaystyle\sum_{n=p+2}^{\infty}\dfrac{19}{20^n}\right)$. Un calcul rapide prouve que cette différence est nulle.

Supposons maintenant que le rang du dernier chiffre non nul dans le développement propre de x (décimal) soit pair, égal à $2p$, et calculons les différentes suites pour le développement propre et le développement impropre.

Le développement propre de x est la suite : $(a_1, a_2, \cdots, a_{2p-1}, a, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Le développement impropre de x est la suite :
$(a_1, a_2, \cdots, a_{2p-1}, a-1, 9, 9, \cdots, 9, \cdots)$.

Nous noterons a la valeur du dernier chiffre non nul dans le développement décimal propre.

Les deux développements coïncident jusqu'au rang $2p$-1. Les deux suites de signes coïncident jusqu'au rang p, les suites $\gamma(a_{2n})$ et $\gamma'(a_{2n})$ coïncident jusqu'au rang p-1, les deux suites b_n et b'_n coïncident donc jusqu'au rang p-1.

Au rang p :

les signes sont égaux, notons les s. On vérifie que $\gamma(a_{2p}) = \gamma(a)$, et $\gamma(a'_{2p}) = \gamma(a-1)$. Donc $b_p = s\cdot(2a_{2p-1} + \gamma(a))$, $b'_p = s\cdot(2a_{2p-1} + \gamma(a-1))$ et la différence est : $b_p - b'_p = s\cdot(\gamma(a) - \gamma(a-1))$.

Au rang p+1 :

les signes sont $\sigma(a).s$ et $\sigma(a-1)\cdot s$. On vérifie que $\gamma(a_{2p+2}) = \gamma(0) = 0$, et $\gamma(a'_{2p+2}) = \gamma(9) = 1$. Donc $b_{p+1} = \sigma(a)\cdot s\cdot(2\cdot 0 + 0) = 0$

et $b'_{p+1} = \sigma(a-1)\cdot s\cdot(2\cdot 9 + 9) = 19\, s\, \sigma(a-1)$.

Donc $b_{p+1} - b'_{p+1} = -19s\cdot\sigma(a-1)$.

Au rang $n > p$+1 :

le nombre b_n est évidemment toujours nul. Le signe s'_n est constant car $\sigma(9) = 1$. On trouve facilement : $b_n - b'_n = -19s\cdot\sigma(a-1)$.

On trouve donc que : $y - y' = s\cdot\left(\dfrac{\gamma(a) - \gamma(a-1)}{20^p} - \sigma(a-1)\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty}\dfrac{19}{20^n}\right)$,

ou encore : $y - y' = s\cdot\left(\dfrac{\gamma(a) - \gamma(a-1) - \sigma(a-1)}{20^p}\right)$.

Il reste donc à vérifier que pour tout entier a entre 1 et 9, on a :

$\gamma(a) - \gamma(a-1) - \sigma(a-1) = 0$,

ou bien encore, pour tout a entre 0 et 8,

$\gamma(a+1) = \gamma(a) + \sigma(a)$.

Le lecteur vérifiera sans peine cette relation :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(a)$	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1
$\sigma(a)$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1

Cela achève de démontrer que f est continue en tout point.

Montrons maintenant que f n'est monotone sur aucun intervalle.

Soit p entier donné calculons les valeurs de f sur les nombres décimaux de la forme : $\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p-1}a}$, les $2p$-1 premières décimales étant considérées comme fixes et la dernière comme variable entre 0 et 9. Nous reprenons les notations précédentes.

Les signes jusqu'au rang p sont indépendants de a. Notons $s = s_p$. Les valeurs de b_n, pour n variant de 1 à p-1 sont indépendantes de a.

Au rang p : $\gamma(a_{2p}) = \gamma(a)$ et $b_p = s\cdot(2a_{2p-1} + \gamma(a))$.

Au rang $n > p$: il est clair que $b_n = 0$.

En définitive on peut exprimer la valeur de f sous la forme : $y = C + s\cdot\dfrac{\gamma(a)}{20^p}$ où C est indépendant de a et s un signe indépendant de a. On peut prendre pour a les valeurs 0, 1, 2 pour lesquelles $\gamma(a)$ vaut 0, 1, 0.

On voit bien que dans tout intervalle non singleton, on pourra toujours trouver dans cet ordre trois nombres décimaux ainsi constitués et que donc l'application f ne peut pas être monotone sur cet intervalle.

Exercice 12 :

> (Exemple de Peano, 1890). Pour $t \in [0,1]$, soit $(a_n)_{n\geq 1}$ le développement propre de t à base 3. Soit $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{3^n}$, où $b_1 = a_1$, et (si $n \geq 2$), $b_n = a_{2n-1}$ si $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}$ est pair et $b_n = 2 - a_{2n-1}$ dans le cas contraire. Montrer que $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ ainsi définie est continue mais n'est monotone sur aucun intervalle de longueur > 0. ■

Montrons d'abord que f est continue en tout nombre non triadique x $(0 < x < 1)$ de développement propre : $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$.

Pour un entier p donné > 1, les développements à base 3 des réels x' dans l'intervalle $\left]\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p-1}}, \overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p-1}} + 3^{-2p+1}\right[$, voisinage ouvert de x, coïncident jusqu'à l'ordre $2p$-1 (compris) avec celui de x. Les suites $(b'_n)_{n\geq 1}$, associée à x', et $(b_n)_{n\geq 1}$, associée à x, coïncident jusqu'au rang p. donc

$f(x')-f(x)=\sum\limits_{n=p+1}^{\infty}\dfrac{b'_n-b_n}{3^n}$; comme les nombres b sont 0, 1 ou 2, on en déduit la majoration : $|f(x')-f(x)|\leq \sum\limits_{n=p+1}^{\infty}\dfrac{2}{3^n}=\dfrac{1}{3^p}$.

Il est clair que cela démontre la continuité de f en x.

Montrons la continuité à droite de f en x triadique dans $[0, 1[$. Nous posons toujours $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$.

Si p est un entier (>1), tous les réels x' dans l'intervalle $\left[\, x\, ,\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p-1}}+3^{-2p+1}\right[$, voisinage de x à droite, ont le même développement jusqu'au rang $2p$-1. On a donc comme précédemment la majoration : $|f(x')-f(x)|\leq\dfrac{1}{3^p}$; ce qui prouve que f est bien continue à droite en x.

Pour démontrer la continuité de f à gauche en x (triadique >0), nous utiliserons le fait qu'on peut calculer $f(x)$ en utilisant le développement impropre de x : on obtiendra le même résultat. Admettons cela pour l'instant.

Posons toujours $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$, mais il s'agit cette fois du développement impropre de x. Un entier p (>1) étant donné, les développements (propres ou impropres) des réels x' de l'intervalle : $\left]\,\overline{0,a_1a_2\cdots a_{2p-1}}\, ,\, x\,\right[$, voisinage à gauche de x, coïncident visiblement avec le développement impropre de x jusqu'à l'ordre $2p$-1. Comme on peut calculer $f(x)$ en utilisant le développement impropre de x, on trouve la même majoration que ci-dessus : $|f(x')-f(x)|\leq\dfrac{1}{3^p}$; cela démontre la continuité à gauche de f en x.

Montrons maintenant ce qui a été annoncé.

Soit x triadique (>0), $(a_n)_{n\geq 1}$ son développement triadique propre, $(a'_n)_{n\geq 1}$ son développement impropre. Posons : $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}$ $\;(s_0=0)$ et

$s'_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a'_{2i}$ $\;(s'_0=0)$. Notons $\varphi : x\mapsto 2-x$, involution affine (de pente -1).

On vérifie que pour tout $n\geq 1$: $b_n=\varphi^{s_{n-1}}(a_{2n-1})$ et $b'_n=\varphi^{s'_{n-1}}(a'_{2n-1})$. Posons enfin $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{3^n}$ et $y'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b'_n}{3^n}$.

Supposons que le rang du dernier chiffre non nul dans le développement propre de x soit $2p$. Le développement propre de x est la suite : $(a_1, a_2, \cdots, a_{2p-1}, a, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Le développement impropre est la suite :
$(a_1, a_2, \cdots, a_{2p-1}, a-1, 2, 2, \cdots, 2, \cdots)$.

Les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(s_n')_{n\geq 1}$ coïncident visiblement jusqu'au rang p-1 ; les suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n')_{n\geq 1}$ coïncident jusqu'au rang p.

La parité des suites (s_n) et (s_n') est fixe à partir du rang p. Donc, à un rang $n > p$: $b_n = \varphi^{s_{p-1}+a}(0)$ et $b_n' = \varphi^{s_{p-1}+a-1}(2) = \varphi^{s_{p-1}+a-1}(\varphi(0)) = \varphi^{s_{p-1}+a}(0)$. Donc $b_n' = b_n$.

Dans ce cas, $y' = y$ est évident.

Supposons maintenant que le rang du premier chiffre non nul dans le développement propre de x soit $2p+1$.

Le développement propre de x est la suite : $(a_1, a_2, \cdots, a_{2p}, a, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$.

Le développement impropre est la suite :
$(a_1, a_2, \cdots, a_{2p}, a-1, 2, 2, \cdots, 2, \cdots)$.

Les suites (s_n) et (s_n') coïncident jusqu'au rang p et leurs parités sont ensuite fixes.

Les suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n')_{n\geq 1}$ coïncident jusqu'au rang p.

Au rang p+1 : $b_{p+1} = \varphi^{s_p}(a)$ et $b_{p+1}' = \varphi^{s_p}(a-1)$, donc
$b_{p+1}' - b_{p+1} = -(-1)^{s_p}$ (φ est affine de pente -1).

A un rang $n > p+1$: $b_n = \varphi^{s_p}(0)$ et $b_n' = \varphi^{s_p}(2)$, donc $b_n' - b_n = 2\cdot(-1)^{s_p}$.

On en déduit : $y' - y = (-1)^{s_p}\left(-\dfrac{1}{3^{p+1}} + \displaystyle\sum_{n=p+2}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}\right)$. Un calcul rapide montre que cette expression est bien nulle.

Cela achève la démonstration de la continuité de f.

Démontrons maintenant que f n'est monotone sur aucun intervalle non singleton.

Nous gardons les mêmes notations que ci-dessus.

Un nombre entier p (> 1) étant donné, calculons les valeurs de f en des nombres triadiques de la forme : $\overline{0{,}a_1a_2\cdots a_{2p-1}a00\cdots}$ (développement propre), les nombres $a_1, a_2, \cdots, a_{2p-1}$ étant considérés comme fixes et a comme variable dans {0, 1, 2}.

Les nombres $b_1, b_2, \cdots, b_p$ sont invariants et pour $n \geq p+1$, $s_{n-1} = s_p = s_{p-1} + a$; donc : $b_n = \varphi^{s_{p-1}+a}(0)$.

On peut donc écrire $f(x)$ sous la forme :

$C+\varphi^{s_{p-1}+a}(0)\left(\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\right)=C+\frac{\varphi^{s_{p-1}+a}(0)}{2\cdot 3^p}$, où C et s_{p-1} ne dépendent pas de a.

Suivant les valeurs de a et la parité de s_{p-1}, les valeurs de $\varphi^{s_{p-1}+a}(0)$ sont :

a	0	1	2
si s_{p-1} est pair :	0	2	0
si s_{p-1} est impair :	2	0	2

Tout intervalle contenant au moins trois nombres triadiques dans cet ordre et ainsi constitués, f ne peut être monotone sur aucun intervalle.

§ IV.3 *VALEURS D'ADHÉRENCE D'UNE FONCTION*

Exercice 2 :

> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On donne $u_0\in\mathbb{R}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $(\forall n\geq 0)\ u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés (I) et (II) ci-après :
> (I) la suite (u_n) converge dans $\mathbb{R}$,
> (II) la suite (u_n) possède dans $\mathbb{R}$ une unique valeur d'adhérence. ■

On sait que (I) implique (II). Démontrons que (II) implique (I).

Notons L la seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ de la suite (u_n). C'est peut-être la seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ de la suite, mais $+\infty$ et $-\infty$ pourraient a priori être aussi valeurs d'adhérence ; on ne peut donc utiliser le théorème IV.3.3 pour en déduire que la suite est convergente (La suite définie par : $u_n=0$, si n est pair et $u_n=n$ si n impair, a pour seule valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ le réel 0).

Soient deux réels a et b tels que $a<L<b$. L'application continue f étant bornée sur $[a,b]$, on peut trouver un nombre M tel que $f([a,b])\cup[a,b]\subset[-M,M]$.

Il n'y a dans l'intervalle $[-M,a]$ aucune valeur d'adhérence de la suite ; donc l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}, u_n\in[-M,a]\}$ est fini. De même l'ensemble $\{n\in\mathbb{N}, u_n\in[b,M]\}$ est fini. Soit N un majorant de ces deux ensembles finis d'entiers.

Comme L est valeur d'adhérence de la suite, on peut trouver un entier n_0 tel que $n_0>N$ et $u_{n_0}\in\ ]a,b[$.

Mais si un entier $n > N$ est tel que $u_n \in \,]a,b[$, alors, comme $f([a,b]) \subset [-M,M]$, $u_{n+1} \in [-M,M]$ et $u_{n+1} \notin [-M,a] \cup [b,M]$, donc $u_{n+1} \in \,]a,b[$. On peut donc démontrer par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in \,]a,b[$.

On a démontré que pour tout intervalle $]a,b[$ voisinage de L, il existait un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in \,]a,b[$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

Exercice 3 :

> Soit $f:[0,1] \to [0,1]$ continue. A partir de $u_0 \in [0,1]$, on définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par $(\forall n)\, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer l'équivalence des propriétés (I) et (II) ci-après :
> (I) $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, (II) la suite (u_n) converge. ■

Montrons que (I) implique (II), la réciproque étant évidente.

Notons que l'hypothèse (I) s'écrit aussi $f(u_n) - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Si L est valeur d'adhérence de (u_n), elle est limite d'une suite extraite (u_{n_k}) et $f(u_{n_k}) - u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$; on en déduit que $f(L) = L$, c'est-à-dire que L est un point fixe de f.

Dans la résolution de l'exercice 12 du §III.3, nous avons démontré que sous l'hypothèse $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (et même une sous une hypothèse plus faible), l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) était un intervalle. C'est le cas ici.

Si la suite (u_n) avait au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, a et b ($a < b$), tout élément de $]a,b[$ serait valeur d'adhérence et on pourrait certainement trouver un terme u_{n_0} de la suite dans cet intervalle. Ce terme serait aussi valeur d'adhérence, donc point fixe de f et la suite (u_n) serait stationnaire à partir du rang n_0. Cela est contradictoire.

On en déduit que la suite (u_n) a une seule valeur d'adhérence ; comme elle est bornée, elle est convergente.

Exercice 7 :

> Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f: A \to \mathbb{R}$ une fonction, on appelle oscillation de f sur A l'élément $\sup\limits_{(x,y)\in A^2} |f(x) - f(y)|$ de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, que l'on note $\omega_A(f)$.
> Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est adhérent à A dans $\mathbb{R} \cup \{$ [illegible]
> appelle oscillation de f en a l'élément, noté $\omega(f;a)$ d

égal à $\inf_{V \in \mathcal{V}_a} \omega_{A \cap V}(f)$, où $\mathcal{V}_a$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
a) Si f est bornée au voisinage de a, montrer que :
$\omega(f;a) = \limsup_{x \to a} f(x) - \liminf_{x \to a} f(x)$.
b) Montrer que si f n'est pas bornée au voisinage de a, il n'y a aucune façon raisonnable d'étendre le résultat du a). ■

a) Soient (u_n) une suite dans A de limite a telle que $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\to} \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x)$, et une suite (v_n) dans A de limite a telle que $f(v_n) \underset{n \to \infty}{\to} \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.

Si V est un voisinage de a dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, u_n et v_n sont dans V et donc $\omega_{V \cap A}(f) \geq |f(v_n) - f(u_n)|$. En faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient $\omega_{V \cap A}(f) \geq \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x) - \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.
On en déduit $\omega(f;a) \geq \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x) - \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.

Pour prouver l'inégalité opposée, démontrons que pour tout $y > \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x)$: $\exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap A, f(x) < y$.

En effet, sinon : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[\cap A, f(x) \geq y$.

Il existerait donc dans A une suite $(x_n)_{n>0}$ de limite a telle que pour tout $n > 0$, $f(x_n) \geq y$. On pourrait alors extraire de la suite $(f(x_n))_{n>0}$ une suite convergente, vers L. Ce nombre L serait une valeur d'adhérence de f au voisinage de a dans A, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
On démontre de manière analogue :

$$\forall y < \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x), \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap A, f(x) > y.$$

Supposons $\omega(f;a) > \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x) - \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x)$. Puisque ces nombres sont réels, on peut trouver deux nombres réels m et M tels que :
$M > \limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x) \geq \liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x) > m$ et $\omega(f;a) > M - m$.
D'après le résultat précédemment démontré, on peut trouver un voisinage V de a dans A tel que : $\forall x \in V \cap A, m < f(x) < M$, donc $\omega_{V \cap A}(f) \leq M - m$. Ce qui est contradictoire.

b) Montrons que si f n'est pas majorée au voisinage de a dans A, c'est-à-dire si $\limsup_{x \to a,\, x \in A} f(x) = +\infty$, alors $\omega(f;a) = +\infty$, et ce indépendamment de $\liminf_{x \to a,\, x \in A} f(x)$.

On peut en effet trouver une suite (u_n) dans A de limite a telle que $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Soit V un voisinage de a dans A et x un élément de V, il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, u_n est dans V, et donc $|f(x) - f(u_n)| \leq \omega_{V \cap A}(f)$.

En faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient : $\omega_{V \cap A}(f) = +\infty$.

Ceci étant vrai pour tout voisinage de a dans A, $\omega(f;a) = +\infty$.

On démontrerait de même que si f n'est pas minorée au voisinage de a dans A, alors $\omega(f;a) = +\infty$.

Exercice 9 :

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble E des $a \in \mathbb{R}$ tels que $\limsup_{x\to a,\, x\geq a} f(x) \neq \limsup_{x\to a,\, x\leq a} f(x)$ est au plus dénombrable. ■

Nous utiliserons la propriété démontrée dans la résolution de l'exercice 7 :

$$\forall y > \limsup_{x\to a,\, x\in A} f(x), \exists V \in \mathcal{V}_a, \forall x \in V \cap A, f(x) < y.$$

Soit r un réel quelconque (pour l'instant), posons :

$$G_r = \left\{a,\ \limsup_{x\to a,\, x\leq a} f(x) < r < \limsup_{x\to a,\, x\geq a} f(x)\right\},$$

et de manière analogue :

$$D_r = \left\{a,\ \limsup_{x\to a,\, x\geq a} f(x) < r < \limsup_{x\to a,\, x\leq a} f(x)\right\}.$$

Montrons que les éléments de G_r sont isolés à gauche, c'est-à-dire : $\forall a \in G_r, \exists \alpha > 0,]a-\alpha, a[\cap G_r = \emptyset$.

En effet, soit a élément de G_r et r' tel que $\limsup_{x\to a,\, x\leq a} f(x) < r' < r$, on peut trouver un réel strictement positif α tel que pour tout x dans $]a-\alpha, a]$, $f(x) < r'$; les limites supérieures à droite et à gauche au voisinage de tout élément de $]a-\alpha, a[$ seront $\leq r'$, donc cet intervalle ne contient aucun élément de G_r.

On démontrerait de manière analogue que tous les éléments de D_r sont isolés à droite.

Montrons maintenant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ dont tous les éléments sont isolés à gauche, est au plus dénombrable.

Pour un entier $n > 0$ posons $A_n = \{x \in A,]x - 1/n, x[\cap A = \emptyset\}$. Un intervalle $[k/n, (k+1)/n[$ où k un entier relatif quelconque, ne peut contenir qu'au plus un élément de A_n : si $\frac{k}{n} \leq y < x < \frac{k+1}{n}$, alors $y \in]x - 1/n, x[$ donc y ou x n'est pas dans A_n.

On en déduit que pour tout $n > 0$, A_n est au plus dénombrable et que $A = \bigcup\limits_{n>0} A_n$ l'est aussi.

On démontrerait de manière analogue que toute partie de $\mathbb{R}$ dont tous les points sont isolés à droite est au plus dénombrable.

Entre deux nombres réels distincts il existe un rationnel ; il est donc clair que :

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (G_r \cup D_r).$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et que pour tout rationnel r les ensembles G_r et D_r sont au plus dénombrables, l'ensemble E est au plus dénombrable.

§ IV.5 *FONCTIONS PÉRIODIQUES*

Exercice 5 :

> Soit A un réel > 0, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p :]A, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions rationnelles non nulles, et $a_1, a_2, \cdots, a_p$ des réels $(a_1 > a_2 > \cdots > a_p \; ; p \geq 1)$. Peut-il exister une fonction périodique φ : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui coïncide sur $]A, +\infty[$ avec la fonction
> $t \mapsto \sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_i(t) \exp(a_i t)$? ■

Démontrons le lemme suivant :

> Si φ et ψ sont des fractions rationnelles non nulles, et si a et b sont des réels tels que $a < b$, alors $\varphi(t) e^{at} \underset{t \to +\infty}{\in} o\left(\psi(t) e^{bt}\right)$.

Il existe un entier relatif k et un réel $\lambda \neq 0$ tels que la fraction rationnelle $\dfrac{\varphi(t)}{\psi(t)}$ est équivalente au voisinage de l'infini à λt^k, donc $\dfrac{\varphi(t) e^{at}}{\psi(t) e^{bt}}$ est équivalente au voisinage de l'infini à $\lambda t^k e^{-(b-a)t}$. Elle est donc de limite nulle à l'infini, ce qu'il fallait démontrer.

On voit alors que l'application $g(t) = \sum\limits_{i=1}^{p} \varphi_i(t) \exp(a_i t)$ est équivalente au voisinage de l'infini à $\varphi_1(t) \exp(a_1 t)$, qui a elle-même un équivalent de la forme $\lambda t^k \exp(a_1 t)$ où $\lambda \neq 0$ et k est un entier relatif. Dans tous les cas la fonction g aura une limite finie ou infinie quand t tend vers $+\infty$.

Si $a_1 > 0$, alors g aura pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ au voisinage de +
signe de λ. Il est impossible qu'elle soit la restriction d'une fonctic

Si $a_1 < 0$, alors g aura pour limite 0 et ne peut être restriction d'une fonction périodique que si elle est constante nulle. Dans ce cas elle n'aurait pas pour équivalent $\lambda t^k \exp(a_1 t)$, avec $\lambda \neq 0$.

Si $a_1 = 0$, $g(t)$ est équivalente à $\varphi_1(t)$ et ne peut être la restriction d'une fonction périodique que si la limite de $\varphi_1(t)$ est finie, égale à C. Dans ce cas g a pour limite C et ne peut être restriction d'une fonction périodique que si elle est constante et égale à C. On aurait alors pour tout $t > A$: $\sum_{i=2}^{p} \varphi_i(t)\exp(a_i t) = C - \varphi_1(t)$.

D'après le lemme, puisque les $a_i, i \in \{2, \cdots, p\}$ sont tous < 0, si la fraction rationnelle $\varphi_1(t) - C$ n'était pas nulle, on aurait $\sum_{i=2}^{p} \varphi_i(t)\exp(a_i t) \in o(C - \varphi_1(t))$; cela est impossible, donc la fraction rationnelle $\varphi_1(t) - C$ est nulle.

Effectivement si p=1, si $a_1 = 0$ et si pour tout $t > A$, $\varphi_1(t) = C$ constante non nulle, la fonction g est bien la restriction d'une fonction périodique (constante !).

A part dans ce cas, si $p \geq 2$, on devrait avoir pour tout $t > A$, $g(t) = \sum_{i=2}^{p} \varphi_i(t)\exp(a_i t) = 0$. D'après le lemme, g est équivalente à $\varphi_2(t)\exp(a_2 t)$ au voisinage de l'infini, et elle ne peut donc être nulle.

La fonction g ne peut être la restriction d'une fonction périodique que si $p = 1$, $a_1 = 0$, et $\varphi_1(t) = C$ constante non nulle.

Exercice 7 :

> Soit deux fonctions f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues, périodiques et non constantes, de plus petites périodes respectives T_1 et T_2.
>
> a) Si $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, quelle est la plus petite période de $f_1 + f_2$? L'inclusion $\mathcal{P}_{f_1} \cap \mathcal{P}_{f_2} \subset \mathcal{P}_{f_1+f_2}$ peut-elle être stricte ?
>
> b) Si $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, alors les fonctions f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}$, autrement dit, les relations $n \geq 1$, $A_0 \in \mathbb{C}[X], \cdots, A_n \in \mathbb{C}[X]$, et $A_0(f_1) + A_1(f_1)f_2 + \cdots + A_n(f_1)(f_2)^n = 0$ entraînent $A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0$. ■

a) Soit n un entier > 1. Prenons $f_1(x) = \sin x + \sin nx$ de période 2π, et $f_2(x) = -\sin x$. La plus petite période de $f_1(x) + f_2(x) = \sin nx$ est $\frac{2\pi}{n}$. Dans ce cas l'inclusion $\mathcal{P}_{f_1} \cap \mathcal{P}_{f_2} \subset \mathcal{P}_{f_1+f_2}$ est stricte.

Dans le cas général supposons que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, p

Le nombre $qT_1 = pT_2$ est une période commune des deux fonctions donc une période de la somme. La plus petite période commune est (si elle existe, car la somme peut être constante) de la forme $\frac{qT_1}{n} = \frac{pT_2}{n}$ où n est un entier > 0 ; comme le montre l'exemple initial, on ne peut pas en dire plus.

b) Supposons $\sum_{i=0}^{p} A_i(f_1)(f_2)^i = 0$. Soit x réel, pour tout entier relatif n,

$$\sum_{i=0}^{p} A_i(f_1(x+nT_1))(f_2(x+nT_1))^i = 0.$$

Donc pour tout couple d'entiers relatifs n et m :

$$\sum_{i=0}^{p} A_i(f_1(x))(f_2(x+nT_1+mT_2))^i = 0.$$

Donc $\left\{ y, \sum_{i=0}^{p} A_i(f_1(x))(f_2(y))^i = 0 \right\}$ contient l'ensemble des nombres de la forme $x + nT_1 + mT_2$, n et m entiers relatifs quelconques. Cet ensemble est partout dense dans $\mathbb{R}$ puisque le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ est irrationnel. Par continuité on en déduit que pour tout y réel :

$$\sum_{i=0}^{p} A_i(f_1(x))(f_2(y))^i = 0.$$

Toujours pour x fixé, le polynôme en Y : $\sum_{i=0}^{p} A_i(f_1(x))Y^i$ est nul sur l'image de l'application f_2 , qui est un ensemble infini : si l'image de f_2 était finie, l'image de la partie réelle et l'image de la partie imaginaire de f_2 le seraient ; comme ce sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elles seraient constantes ; donc f_2 serait constante. C'est donc le polynôme nul. On en déduit que pour tout i entre 0 et p et pour tout x dans $\mathbb{R}$, $A_i(f_1(x)) = 0$. Comme f_1 n'est pas constante, on voit comme ci-dessus que les polynômes A_i sont tous nuls ; ce qu'il fallait démontrer.

§ IV.6 *DÉRIVÉES*

Exercice 3 :

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, et C un réel > 1. Montrer que $f'(0)$ existe, si, et seulement si, $L = \lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} \frac{f(Cx) - f(x)}{x}$ existe. Si c'est le cas, quelle est la relation entre L et $f'(0)$? ■

Si f est dérivable en 0 :

$$\frac{f(Cx)-f(x)}{x} = C\cdot\frac{f(Cx)-f(0)}{Cx} - \frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} (C-1)f'(0) = L.$$

Réciproquement supposons que $\dfrac{f(Cx)-f(x)}{x} \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} L.$

Ramenons-nous, au moins pour alléger les formules, au cas où $L = 0$, en posant $g(x) = f(x) - Kx$, la constante K étant convenablement choisie.

$$\frac{g(Cx)-g(x)}{x} = \frac{f(Cx)-f(x)}{x} - K(C-1) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} L - K(C-1).$$

Nous poserons donc $K = \dfrac{L}{C-1}$, de telle sorte que : $\dfrac{g(Cx)-g(x)}{x} \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} 0.$

Montrons qu'alors g est dérivable en 0 de dérivée nulle, ce qui démontrera que f est dérivable en 0, de dérivée $\dfrac{L}{C-1}$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, |x| < \alpha$, on a :

$$\left|g(x) - g\left(\frac{x}{C}\right)\right| \leq \varepsilon\frac{C-1}{C}|x|.$$

Donc pour tout i entier, $\left|g\left(\dfrac{x}{C^i}\right) - g\left(\dfrac{x}{C^{i+1}}\right)\right| \leq \varepsilon\dfrac{C-1}{C}\dfrac{|x|}{C^i}$,

d'où :

$$\left|g(x) - g\left(\frac{x}{C^{n+1}}\right)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} g\left(\frac{x}{C^i}\right) - g\left(\frac{x}{C^{i+1}}\right)\right| \leq \varepsilon\frac{C-1}{C}|x|\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{C^i} \leq \varepsilon|x|.$$

En faisant tendre n vers l'infini, l'application g étant continue en 0, on en déduit : $|g(x) - g(0)| \leq \varepsilon|x|$, majoration valide pour tout $x, |x| < \alpha$.

L'application g est donc bien dérivable en 0 de dérivée nulle, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4 :

> Montrer que la fonction continue $f\colon]0,1[\to\mathbb{R}$ définie dans l'exercice 11 du § IV.2 n'est dérivable en aucun point. ■

Rappelons brièvement les notations utilisées dans la résolution de l'exercice 11.

Nous avons noté pour a entier entre 0 et 9 :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(a)$	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1
$\sigma(a)$	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1

Le nombre x étant un élément de $[0, 1[$, de développement décimal propre $(a_n)_{n\geq 1}$, nous lui faisons correspondre la suite des signes $(s_n)_{n\geq 1}$, définie par $s_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $s_{n+1} = \sigma(a_{2n})s_n$, puis la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout n par $b_n = s_n(2a_{2n-1} + \gamma(a_{2n}))$, et enfin le réel $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{20^n}$.

On peut constater facilement sur le tableau ci-dessus que pour tout a entre 0 et 4, $\sigma(a) = \sigma(a+5)$ et $\gamma(a+5) = \gamma(a)+1$, et donc aussi que pour tout a entre 5 et 9, $\sigma(a) = \sigma(a-5)$et $\gamma(a-5) = \gamma(a)-1$.

Posons pour tout $p > 0$, $v_p = 5$ si $a_{2p} < 5$ et $v_p = -5$ sinon. Comparons les valeurs de f en x et en $x' = x + \frac{v_p}{10^{2p}}$. Les développements propres de ces deux nombres diffèrent uniquement au rang $2p$, le chiffre de rang $2p$ de x étant a_{2p}, celui de x' étant $a_{2p} + v_p$, c'est-à-dire $a_{2p} + 5$ si $a_{2p} < 5$, et $a_{2p} - 5$ si $a_{2p} \geq 5$. Comme dans tous les cas $\sigma(a_{2p}) = \sigma(a_{2p} + v_p)$, on voit que les suites de signes associées à x et x' sont identiques. La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ associée à x, et la suite $(b'_n)_{n\geq 1}$ associée à x' ne diffèrent qu'au rang p ; $b_p = s_p(2a_{2p-1} + \gamma(a_{2p}))$ et $b'_p = s_p(2a_{2p-1} + \gamma(a_{2p} + v_p))$. Dans tous les cas, on observe que $|b'_p - b_p| = 1$ et donc $\left| f\left(x + \frac{v_p}{10^p}\right) - f(x)\right| = \frac{1}{20^p}$.

On en tire :

$$\left| \frac{f\left(x + \frac{v_p}{10^{2p}}\right) - f(x)}{\frac{v_p}{10^{2p}}} \right| = \frac{\frac{1}{20^p}}{\frac{5}{10^{2p}}} = \frac{1}{5} \times \frac{100^p}{20^p} = 5^{p-1} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Cela prouve que l'application f n'est pas dérivable en x.

Le lecteur pourra de manière analogue vérifier que si on pose :

$$u_p = 2 \text{ si } a_{2p} \in \{0, 1, 2, 5, 6\} \text{ et } u_p = -2 \text{ sinon,}$$

alors pour tout $p > 0$, $f(x + u_p) - f(x) = 0$.

§ IV.7 *DÉRIVÉES SUCCESSIVES*

Exercice 3 :

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

a) Vérifier que f est de classe C^{∞}, et que sa dérivée n-ième ($n \geq 1$) s'écrit : $f^{(n)}(x) = P_n(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{1}{2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, P_n ayant la parité de n et son terme dominant valant $n!X^n$ (on posera aussi $P_0 = 1$).

b) Vérifier la relation $\left(1-x^2\right)f'(x) - x f(x) = 0$ et en déduire, pour $n \geq 1$ et $x \in\ ]-1,1[$ les relations

(1) $\quad P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) + n^2\left(1-x^2\right)P_{n-1}(x)$

(2) $\quad P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$

(3) $\quad \left(1-x^2\right)P_n''(x) + (2n-1)x P_n'(x) - n^2 P_n(x) = 0$.

c) A partir de (3) calculer les coefficients de P_n. En déduire que, pour tout $x \in\ ]0,1[$, $f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on dit que la fonction f est absolument monotone sur $]0,1[$). ■

a) La fonction f étant composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, elle est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. Supposons que pour tout $x \in\ ]-1,1[$:

(4) $\quad f^{(n)}(x) = P_n(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{1}{2}}$,

où P_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant n ! et de même parité que n.

Cette proposition est vraie pour $n = 0$.

En dérivant cette identité, on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{1}{2}} + P_n(x)x(2n+1)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{3}{2}}.$$

Posons :

(5) $\quad P_{n+1}(x) = \left(1-x^2\right)P_n'(x) + (2n+1)x P_n(x)$.

Il s'agit bien d'un polynôme de degré n+1 et de coefficient dominant $((2n+1)-n)n! = (n+1)!$; sa parité est l'opposée de celle de P_n, c'est donc celle de n+1. Pour tout $x \in\ ]-1,1[$:

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{3}{2}}.$$

On a donc démontré par récurrence la propriété demandée (que nous notons (4)).

b) La formule (5) trouvée dans le a) (ou le calcul direct) donne : $P_1(x) = x$, d'où pour tout $x \in \,]-1,1[$, $f'(x) = x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ donc $\left(1-x^2\right)f'(x) = x\,f(x)$.

Les dérivées d'ordre > 2 des polynômes $1-x^2$ et x sont nulles. Pour cette raison, nous sommes amenés à utiliser la formule de Leibnitz.

Pour tout entier $n \geq 2$, en dérivant cette identité n fois on obtient, pour tout $x \in \,]-1,1[$

$$\left(1-x^2\right)f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}(-2x)f^{(n)}(x) + \binom{n}{2}(-2)f^{(n-1)}(x) =$$
$$= x\,f^{(n)}(x) + \binom{n}{1}f^{(n-1)}(x).$$

C'est-à-dire :

$$\left(1-x^2\right)f^{(n+1)}(x) - 2nx\,f^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) = x\,f^{(n)}(x) + n\,f^{(n-1)}(x).$$

Sous cette forme, cette égalité est vraie aussi pour $n = 1$. Donc pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \,]-1,1[$, on a :

$$\left(1-x^2\right)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)x\,f^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

En utilisant l'expression (4) trouvée dans le a) :

$$\left(1-x^2\right)P_{n+1}(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{3}{2}} - (2n+1)x\,P_n(x)\left(1-x^2\right)^{-n-\frac{1}{2}} - n^2 P_{n-1}(x)\left(1-x^2\right)^{-n+\frac{1}{2}} = 0,$$

ce qui donne l'égalité :

(1) $\quad P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) + n^2\left(1-x^2\right)P_{n-1}(x)$.

En comparant avec l'égalité :

(5) $\quad P_{n+1}(x) = \left(1-x^2\right)P_n'(x) + (2n+1)x\,P_n(x)$,

on voit que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \,]-1,1[$:

(2) $\quad P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$, soit pour tout $n \geq 0$:

(6) $\quad P_{n+1}'(x) = (n+1)^2 P_n(x)$.

En dérivant cette dernière identité, on obtient :

(7) $\quad P_{n+1}''(x) = (n+1)^2 P_n'(x) = (n+1)^2 n^2 P_{n-1}(x)$.

En utilisant dans (1) les égalités (6) et (7) on obtient pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \,]-1,1[$

$$P_{n+1}(x) = (2n+1)x\frac{P_{n+1}'(x)}{(n+1)^2} + n^2\left(1-x^2\right)\frac{P_{n+1}''(x)}{n^2(n+1)^2}.$$

Soit encore :

$$\left(1-x^2\right)P_{n+1}''(x) + (2n+1)x\,P_{n+1}'(x) - (n+1)^2 P_{n+1}(x) = 0.$$

Donc pour tout $n \geq 2$ et $x \in \,]-1,1[$ on a :

(3) $\quad \left(1-x^2\right)P_n''(x) + (2n-1)x\,P_n'(x) - n^2 P_n(x) = 0$.

Pour $n = 1$ cette relation est :

$$\left(1-x^2\right)P_1''(x) + x\,P_1'(x) - P_1(x) = 0,$$

ce qui est vrai puisque $P_1(x) = x$ (la relation est triviale pour $n =$

c) En posant $x = 0$ dans l'identité (1) on trouve que pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1}(0) = n^2 P_{n-1}(0)$. De cela on en déduit facilement que pour tout p entier ≥ 1 :

(8) : $P_{2p}(0) = (2p-1)^2 \cdot (2p-3)^2 \cdot \cdots \cdot 3^2 \cdot 1^2 \cdot P_0(0) =$

$$= \left(\frac{2p \cdot (2p-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2p \cdot (2p-2) \cdot \cdots \cdot 2} \right)^2 = \left(\frac{(2p)!}{2^p p!} \right)^2 .$$

Les valeurs en 0 des polynômes P_{2p+1} sont nulles, car ils sont impairs.

De l'identité (2) $P'_n(x) = n^2 P_{n-1}(x)$, vraie pour tout entier $n \geq 1$, on tire facilement :

$$P_n^{(k)}(x) = n^2 \cdot (n-1)^2 \cdot \cdots \cdot (n-k+1)^2 \cdot P_{n-k}(x) = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)^2 P_{n-k}(x),$$

vraie pour tout couple d'entiers (n, k), $0 \leq k \leq n$ (le cas $n = 0$ est trivial).

Connaissant la valeur en 0 des polynômes, cette identité nous permet de déterminer la valeur en 0 des polynômes dérivés, donc les coefficients des polynômes.

Posons : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$, on vérifie que :

$$a_{n,k} = \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)^2 \frac{P_{n-k}(0)}{k!}.$$

Si $n - k$ est impair $a_{n,k} = 0$, si $n - k = 2p$ soit $k = n - 2p$, on peut appliquer la formule (8) pour trouver :

$$a_{n,n-2p} = \left(\frac{n!}{2p!} \right)^2 \frac{P_{2p}(0)}{(n-2p)!} = \left(\frac{n!}{(2p)!} \right)^2 \frac{1}{(n-2p)!} \left(\frac{(2p)!}{2^p p!} \right)^2 ,$$

c'est-à-dire :

$$a_{n,n-2p} = \frac{1}{(n-2p)!} \left(\frac{n!}{2^p p!} \right)^2 .$$

Tous ces coefficients étant > 0, il est clair que les polynômes P_n, pour $n \geq 0$, ne prennent que des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$; d'après la formule (4) cela est vrai aussi pour $f^{(n)}$ sur l'intervalle $]0, 1[$. L'application f est donc bien absolument monotone sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 5 :

> Montrer que, sur $]0,+\infty[$, la dérivée n-ième de f_n définie par $f_n(x) = x^{n-1} e^{1/x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(-1)^n \dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

Prouver de même que la dérivée n-ième de $g_n(x) = x^{n-1}\log(x)$ est $\dfrac{(n-1)!}{x}$.

Ces deux résultats sont des conséquences de la propriété générale suivante :

Soit f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, posons $f_n(x) = x^{n-1} f(1/x)$, pour $n > 0$ et $x > 0$, alors (1) $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(1/x)$. ■

Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \geq 1$. Nous poserons $\varphi_n(x) = f_n^{(n)}(x)$.

Pour $n = 1$, $f_1(x) = f(1/x)$, donc $\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)}{x^2} f^{(1)}(1/x)$, la formule est vérifiée.

Supposons la propriété vraie pour $n \geq 1$.

$f_{n+1}(x) = x^n f(1/x) = x f_n(x)$ et $f_{n+1}^{(1)}(x) = f_n(x) + x f_n^{(1)}(x)$.

La formule de Leibnitz nous donne la dérivée n-ième de cette fonction :

$\varphi_{n+1}(x) = f_{n+1}^{(n+1)}(x) = f_n^{(n)}(x) + x f_n^{(n+1)}(x) + n f_n^{(n)}(x)$.

On en déduit :

(2) $\quad \varphi_{n+1}(x) = (n+1)\varphi_n(x) + x\varphi_n'(x)$.

L'hypothèse de récurrence étant : $\varphi_n(x) = f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(1/x)$ soit encore : $x^{n+1}\varphi_n(x) = (-1)^n f^{(n)}(1/x)$,

on obtient en dérivant :

$$(n+1)x^n\varphi_n(x) + x^{n+1}\varphi_n'(x) = (-1)^n\left(\frac{-1}{x^2}\right) f^{(n+1)}(1/x),$$

c'est-à-dire :

$$(n+1)\varphi_n(x) + x\,\varphi_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}(1/x).$$

En comparant avec la formule (2) ci-dessus, on trouve :

$$\varphi_{n+1}(x) = f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}(1/x),$$

ce qu'il fallait démontrer. La formule (1) est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Appliquons cette formule dans le cas où f est la fonction exp, dont la dérivée n-ième est la fonction exp. On trouve immédiatement :

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{1/x}.$$

Appliquons la formule (1) au cas où f est log, dont la dérivée n-ième est (pour $n \geq 1$)

$$x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Ici : $f_n(x) = x^{n-1} f(1/x) = x^{n-1} \log(1/x) = -x^{n-1} \log(x) = -g_n(x)$.

La formule (1) donne :

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}(1/x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} (-1)^{n-1}(n-1)!x^n = -\frac{(n-1)!}{x}.$$

Donc : $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre V

VARIATION DES FONCTIONS, FONCTIONS USUELLES

§ V.1 *ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS D'ACCROISSEMENTS FINIS*

Exercice 2 :

> Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.
> a) On suppose que P possède k zéros réels distincts. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $P - \alpha P'$ possède au moins k zéros réels distincts.
> b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et dissocié sur $\mathbb{R}$:
> $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p$. Montrer que $Q = P + a_1 P' + \cdots + a_p P^{(p)}$ possède au moins autant de zéros réels que P. En déduire que si P est dissocié à facteurs simples dans $\mathbb{R}[X]$, il en est de même de Q. ■

a) Posons $f(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}} P(x)$, en dérivant nous obtenons :

$f'(x) = \dfrac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} (\alpha P'(x) - P(x))$. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_p$ $\left(x_1 < x_2 < \cdots < x_p\right)$ les zéros du polynôme P, dans l'ordre (donc $p \geq k$). D'après le théorème de Rolle, entre deux zéros de P (donc de f) il y a au moins un zéro de f' , donc du polynôme $P - \alpha P'$. Si $\alpha > 0$ alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; d'après l'exercice 1, il y a au moins un zéro de f' dans l'intervalle $]x_p, +\infty[$. De manière analogue, si $\alpha < 0$, il y a au moins un zéro de f' dans l'intervalle $]-\infty, x_1[$. Dans tous les cas, le polynôme $P - \alpha P'$ a donc au moins $p \geq k$ zéros réels distincts (le résultat est vrai aussi si $\alpha = 0$).

b) Soit D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.

Le polynôme P étant dissocié sur $\mathbb{R}$, sa décomposition en produit de facteurs irréductibles s'écrit : $P(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{n_i}$

Posons : $R(X)=\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i X)^{n_i}=1+a_1X+\cdots+a_pX^p$.

En substituant D à X dans le polynôme R, en application du théorème de substitution, nous obtenons l'égalité :

$$R(D)=\prod_{i=1}^{k}(Id-\alpha_i D)^{n_i}=1+a_1D+\cdots+a_pD^p,$$

le produit devant être pris au sens de la composition des endomorphismes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Comme pour tout polynôme A, et pour tout i entre 1 et k, le polynôme $(Id-\alpha_i D)(A)=A-\alpha_i A'$ a au moins autant de zéros réels distincts que A, il est clair que le polynôme :

$$Q=\left(1+a_1D+\cdots+a_pD^p\right)(P)=R(D)(P)=\left(\prod_{i=1}^{k}(Id-\alpha_i D)^{n_i}\right)(P),$$

a au moins autant de zéros réels que P.

Si P est dissocié sur $\mathbb{R}$ et n'a que des zéros simples, le nombre de ses zéros réels distincts est égal à son degré, c'est-à-dire p. Le polynôme Q est de degré p, comme P, et a au moins p zéros réels distincts. Ce polynôme de degré p a donc p zéros réels, tous simples ; il est donc dissocié sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble borné, et non identiquement nulle. Montrer que si $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ réels tels que $a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$ et $(\forall i\in\{1,\cdots,n\})\ f^{(n)}(a_i)f^{(n)}(a_{i+1})<0$. ■

Supposons f nulle à l'extérieur de l'intervalle $]a,b[$.

Démontrons le résultat par récurrence sur $n\geq 1$.

Pour $n=1$, la proposition est : il existe deux réels a_1,a_2, $a_1<a_2$ tels que $f'(a_1)f'(a_2)<0$.

Ceci est vérifié, car sinon, f serait monotone (au sens large) sur $\mathbb{R}$, donc nulle (car elle est nulle à l'extérieur de $]a,b[$).

Supposons que la propriété soit vérifiée à l'ordre n. Il existe donc $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ réels tels que :

$a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}$ et $(\forall i\in\{1,\cdots,n\})\ f^{(n)}(a_i)f^{(n)}(a_{i+1})<0$.

Supposons $f^{(n)}(a_1)>0$, ce qu'on peut toujours supposer en remplaçant éventuellement f par $-f$. On peut trouver $a_1'\in\,]a,a_1[$ tel que $f^{(n+1)}(a_1')>0$, sinon, $f^{(n)}$ serait décroissante sur $[a,a_1]$ et $f^{(n)}(a_1)$ serait ≤ 0. Comme $f^{(n)}(a_2)<0$, on peut trouver $a_2'\in\,]a_1,a_2[$ tel que $f^{(n+1)}(a_2')<0$, sinon , $f^{(n)}$ serait croissante sur $[a_1,a_2]$ et $f^{(n)}(a_2)$ serait >0. On dé
manière analogue, pour tout k entre 0 et n, l'existenc

$a'_{k+1} \in \,]\, a_k, a_{k+1} \,[\,$ ($a_0 = a$) tel que $f^{(n+1)}(a'_{k+1})$ est du signe de $(-1)^k$.

En particulier, pour $k = n$, $a'_{n+1} \in \,]\, a_n, a_{n+1} \,[\,$, et $f^{(n+1)}(a'_{n+1})$ est du signe de $(-1)^n$.

Si n est pair, $f^{(n)}(a_{n+1}) > 0$,

donc $f^{(n)}$ n'est pas croissante sur $]a_{n+1}, b[$ et on peut trouver $a'_{n+2} \in \,]\, a_{n+1}, b \,[$ tel que $f^{(n+1)}(a'_{n+2}) < 0$, donc du signe de $(-1)^{n+1}$

Si n est impair, $f^{(n)}(a_{n+1}) < 0$,

donc $f^{(n)}$ n'est pas décroissante sur $]a_{n+1}, b[$ et on peut trouver $a'_{n+2} \in \,]\, a_{n+1}, b \,[$ tel que $f^{(n+1)}(a'_{n+2}) > 0$ donc du signe de $(-1)^{n+1}$.

On peut donc trouver n+2 réels, $a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n+2}$ tels que $a'_1 < a'_2 < \cdots < a'_{n+2}$ et pour tout k entre 0 et n+1, $f^{(n+1)}(a_{k+1})$ est du signe de $(-1)^k$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 :

> (Théorème de Darboux) : Soit $f : [\, \alpha, \beta \,] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$) et admettant une dérivée à droite en tout point de $]\, \alpha, \beta \,[$.
>
> On pose $m = \inf\limits_{x \in \,]\alpha, \beta[} f'_d(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in \,]\alpha, \beta[} f'_d(x)$.
>
> a) Monter que si f n'est sur aucun intervalle non trivial une fonction affine, l'ensemble $\mathfrak{D}$ de tous les nombres $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ où x et y sont des nombres arbitraires de $[\, \alpha, \beta \,]$ tels que $x \neq y$ est identique à $]\, m, M [$.
>
> b) On suppose en outre que f possède une dérivée à gauche en tout point de $]\, \alpha, \beta \,[$. Montrer qu'alors les bornes inférieures (resp. supérieures) de f'_g et f'_d dans $]\, \alpha, \beta \,[$ sont les mêmes.
>
> c) En déduire que si f est dérivable sur $]\, \alpha, \beta \,[$, l'image par f' d'un intervalle I contenu dans $]\, \alpha, \beta \,[$ est un intervalle, autrement dit qu'une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elle soit ou non continue.
>
> d) Donner une démonstration directe de cette dernière propriété en utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pour une valeur de h convenablement choisie. ■

Le théorème V.1.4 démontre que pour tout couple (x, y) d'éléments de $[\, \alpha, \beta \,]$ distincts, $m \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$. Donc $\mathfrak{D} \subset [\, m, M \,]$ (signification particulière si $m = -\infty$ ou $M = +\infty$).

Dans le cas général, c'est-à-dire sans l'hypothèse que f n'est affine sur aucun intervalle non trivial, montrons que : $]m, M[\, \subset \mathscr{D} \subset [m, M]$.

Soit $p \in\,]m, M[$ (si $m = M$ il n'y a rien à démontrer). D'après les définitions de m et de M, il existe des réels a et b de $]\alpha, \beta[$ tels que : $m \leq f'_d(a) < p < f'_d(b) \leq M$.

Définissons l'application g par $g(x) = f(x) - px$ pour tout x dans $[\alpha, \beta]$. On vérifie $g'_d(a) < 0 < g'_d(b)$. Posons $u = \inf\{a, b\}$ et $v = \sup\{a, b\}$, de telle sorte que $\alpha < u < v < \beta$ et $g'_d(u) g'_d(v) < 0$.

Soient u' et v' tels que $\alpha < u' < u < v < v' < \beta$; g n'est pas injective sur $[u', v']$, sinon elle y serait monotone (théorème IV.2.3) et les dérivées à droite de g en u et en v seraient ou toutes les deux ≥ 0, ou toutes les deux ≤ 0. Il existe donc deux réels distincts x et y de l'intervalle $[u', v']$ tels que $g(x) = g(y)$, c'est-à-dire $f(x) - px = f(y) - py$ ou encore $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = p$, ce que nous voulions démontrer.

Montrons maintenant que si f n'est affine sur aucun intervalle non trivial, m et M ne peuvent pas être éléments de $\mathscr{D}$.

Supposons qu'il existe dans $[\alpha, \beta]$ deux nombres x et y tels que $\alpha \leq x < y \leq \beta$ et $m = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Posons pour tout t dans $[\alpha, \beta]$, $g(t) = f(t) - mt$, alors $g(x) = g(y)$ et pour tout t dans $]\alpha, \beta[$, $g'_d(t) \geq 0$. L'application g est donc croissante sur $[\alpha, \beta]$ et constante sur $[x, y]$. L'application f est donc affine sur $[x, y]$, ce qui contredit l'hypothèse. Le nombre m ne peut donc être élément de $\mathscr{D}$.

En appliquant ce qui vient d'être démontré à $-f$, on voit que M ne peut pas non plus être élément de $\mathscr{D}$. On peut conclure en affirmant que $]m, M[\, = \mathscr{D}$.

b) On montrerait de manière analogue (ou directement en considérant la fonction $x \mapsto f(-x)$) que les bornes inférieures et supérieures de $\mathscr{D}$ sont $\inf\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_g(x)$ et $\sup\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_g(x)$.

Donc $\inf\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_d(x) = \inf \mathscr{D} = \inf\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_g(x)$,

et : $\sup\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_d(x) = \sup \mathscr{D} = \sup\limits_{x \in]\alpha,\beta[} f'_g(x)$.

Ce résultat est d'ailleurs indépendant de l'hypothèse que la restriction de f à un intervalle non trivial n'est pas affine. L'ensemble $\mathscr{D}$ est toujours un intervalle.

c) On démontre facilement en utilisant le théorème V.1.3 (dit des accroissements finis) que $\mathscr{D} \subset f'(]\alpha, \beta[)$. Ce qui précède montre que $\mathscr{D}$ est un intervalle, et que $f'(]\alpha, \beta[) \subset \mathrm{adh}(\mathscr{D})$. Il est donc clair que $f'(]\alpha, \beta[)$ est lui-même un intervalle. Ce résultat s'étend à tout intervalle ouve

$]\alpha,\beta[$. Il s'étend aussi à tous les intervalles inclus dans $]\alpha,\beta[$, car si $x\in\ ]\alpha,\beta[$, le théorème de Rolle prouve que $f'(x)$ est adhérent à $f'(]x,\beta[)$ et à $f'(]\alpha,x[)$.

d) Démontrons directement que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit p strictement entre $f'(u)$ et $f'(v)$, où $\alpha<u<v<\beta$.

Posons pour tout x dans $[\alpha,\beta]$, $g(x)=f(x)-px$; alors $g'(u)g'(v)<0$. Supposons par exemple que $g'(u)>0$, donc $g'(v)<0$ (sinon on considère $-g$).

Il existe un réel $h>0$, assez petit pour que $u<u+h<v-h<v$, $g(u+h)>g(u)$ et $g(v-h)>g(v)$.

Posons pour tout t dans $[u,v-h]$, $\varphi(t)=\dfrac{g(t+h)-g(t)}{h}$. On vérifie que $\varphi(u)>0$ et $\varphi(v-h)<0$. Comme φ est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver w dans $[u,v-h]$ tel que $\varphi(w)=0=\dfrac{g(w+h)-g(w)}{h}$. D'après le théorème de Rolle, il existe entre w et $w+h$ un réel c tel que $g'(c)=\dfrac{g(w+h)-g(w)}{h}=0$; donc $f'(c)=p$, ce qu'il fallait démontrer.

Autre démonstration :

Une fois posé $g'(u)g'(v)<0$, on pouvait aussi dire que g ne peut être injective sur $[u,v]$, sinon elle y serait monotone et les nombres $g'(u)$ et $g'(v)$ seraient ou tous les deux ≥ 0, ou tous les deux ≤ 0. Il existe donc deux réels u' et v' tel que $u\leq u'<v'\leq v$ et $g(u')=g(v')$; d'où, d'après le théorème de Rolle, l'existence d'un nombre c entre u' et v' tel que $g'(c)=0$, c'est-à-dire $f'(c)=p$.

§ V.2 *VARIATION DES FONCTIONS*

Exercice 2 :

> Calculer la dérivée n-ième de $f:\ x\mapsto e^{x\,\mathrm{ch}\,a}\mathrm{ch}(x\,\mathrm{sh}\,a)$ où $a\in\mathbb{R}$ est donné. ■

En appliquant la définition des fonctions ch et sh, on trouve :

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{x\,\mathrm{ch}\,a}\left(e^{x\,\mathrm{sh}\,a}+e^{-x\,\mathrm{sh}\,a}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x(\mathrm{ch}\,a+\mathrm{sh}\,a)}+e^{x(\mathrm{ch}\,a-\mathrm{sh}\,a)}\right),$$

d'où : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{x\exp a}+e^{x\exp(-a)}\right)$.

On obtient facilement la dérivée n-ième :
$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left((\exp a)^n \mathrm{e}^{x\exp a}+(\exp -a)^n \mathrm{e}^{x\exp(-a)}\right)$,
ou encore :
$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{na+x\exp a}+\mathrm{e}^{-na+x\exp(-a)}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{na+x\,\mathrm{ch}\,a+x\,\mathrm{sh}\,a}+\mathrm{e}^{-na+x\,\mathrm{ch}\,a-x\,\mathrm{sh}\,a}\right)$,
c'est-à-dire : $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{x\,\mathrm{ch}\,a}\mathrm{ch}(na+x\,\mathrm{sh}\,a)$.

Exercice 6 e) :

> Etudier les variations de la fonction $f: x\mapsto \frac{(x-1)^2}{x}\mathrm{e}^{1/x}$, en précisant l'ensemble de définition. ■

Le domaine de définition est évidemment $\mathbb{R}^*$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine. Calculons la dérivée :

$$f'(x)=\left(\frac{2(x-1)}{x}-\frac{(x-1)^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{(x-1)^2}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}=\frac{x-1}{x}\left(2-\frac{x-1}{x}-\frac{x-1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x},$$

d'où : $f'(x)=\frac{x-1}{x}\left(\frac{2x^2-x(x-1)-(x-1)}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x}=\left(x^2+1\right)\frac{x-1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x}$.

Le signe de la dérivée est donné par cette expression.
Calculons les limites au bornes :
Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$:

$$f(x)-x=\frac{(x-1)^2}{x}\mathrm{e}^{1/x}-x=\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}-x=x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)-\left(2-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}.$$

Comme $x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$, on voit que : $f(x)-x\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1-2=-1$.
Il y a donc asymptote d'équation $y=x-1$.
Le même calcul montre qu'il y a aussi asymptote d'équation $y=x-1$ au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de 0 par valeurs supérieures :

$$\mathrm{e}^{1/x}\underset{x\to0,\,x>0}{\longrightarrow}+\infty \text{ et } \frac{(x-1)^2}{x}\underset{x\to0,\,x>0}{\longrightarrow}+\infty, \text{ donc } f(x)\underset{x\to0,\,x>0}{\longrightarrow}+\infty.$$

Au voisinage de 0 par valeurs inférieures :

$$\mathrm{e}^{1/x}\underset{x\to0,\,x<0}{\longrightarrow}0 \text{ et } \frac{(x-1)^2}{x}\underset{x\to0,\,x<0}{\longrightarrow}-\infty,$$

l'exponentielle est prépondérante donc : $f(x)\underset{x\to0,\,x<0}{\longrightarrow}0$.

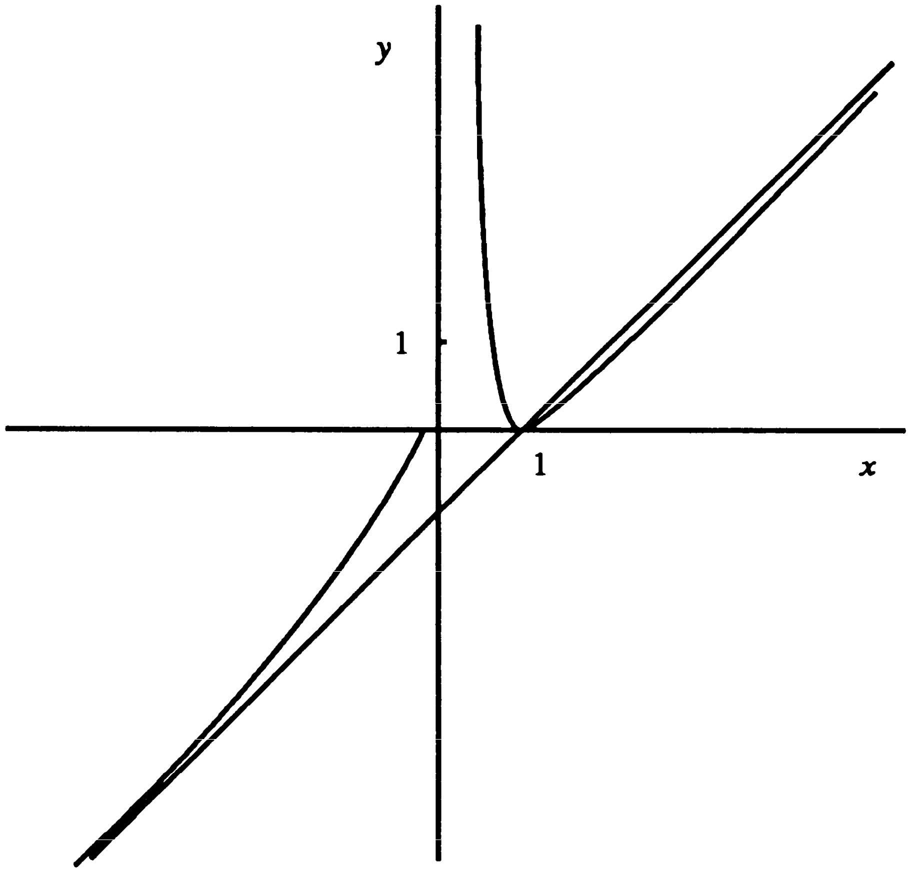
Remarquons que pour la même raison : $\frac{f(x)}{x}\underset{x\to0,\,x<0}{\longrightarrow}0$.

Le prolongement par continuité à gauche de f en 0 a donc une dér[illegible]
nulle en 0.

Nous pouvons rassembler ces résultats dans un tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$		$+$	
f	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

L'allure du graphe est la suivante :



Exercice 7 :

> Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq e^t - 1 - t \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$ et que, pour $t < 0$ on a même $0 \leq e^t - 1 - t < \frac{t^2}{2}$. ■

Distinguons le cas où $t \geq 0$ du cas où $t \leq 0$.

Pour $t \geq 0$, posons $f(t) = \mathrm{e}^t - 1 - t$ et $g(t) = \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$.

Pour tout $t > 0$, on peut trouver un réel c, $0 < c < t$, $f'(t) = \mathrm{e}^t - 1 = t\,\mathrm{e}^c$.

On vérifie alors que $0 < f'(t) < t\mathrm{e}^t < t\mathrm{e}^t + \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^t = g'(t)$.

L'application $g - f$ est donc strictement croissante sur $[0, \infty[$; comme sa valeur en 0 est 0, elle est strictement positive sur $]0, \infty[$.

D'autre part f est strictement croissante sur $[0, \infty[$, $f(0) = 0$, donc elle est strictement positive sur $]0, \infty[$.

On en déduit que pour tout $t > 0$, $0 < \mathrm{e}^t - 1 - t < \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^t$.

Pour tout $t < 0$, on peut trouver un réel c, $t < c < 0$, $f'(t) = \mathrm{e}^t - 1 = t\,\mathrm{e}^c$.

On vérifie alors que $t < f'(t) < 0$.

En posant $g(t) = \dfrac{t^2}{2}$, on voit que f et $g - f$ sont strictement décroissantes sur $]-\infty, 0]$, nulles en 0, et donc strictement positives sur $]-\infty, 0[$. On en déduit que pour tout $t < 0$, $0 < \mathrm{e}^t - 1 - t < \dfrac{t^2}{2}$.

La formule de Taylor à l'ordre 2 (voir VI.3.1), permet d'affirmer l'existence pour tout $t \neq 0$ d'un réel c strictement entre 0 et t tel que $\mathrm{e}^t - 1 - t = \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^c$. Les résultats démontrés ci-dessus, s'en déduisent immédiatement.

Exercice 14 :

> Pour $x > 0$ et $y > 0$ quelconques, on a : $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^y < \mathrm{e}^x < \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$. ■

Démontrons le lemme suivant :

> Pour tout $x > -1, x \neq 0, \log(1 + x) < x$.

La fonction $f(x) = x - \log(1 + x)$ a pour dérivée $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

Le tableau de variations de f est :

x	-1		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Donc pour tout $x > -1, x \neq 0, x - \log(1+x) > 0$.

On déduit du lemme que pour tout $x > 0$ et $y > 0$:

$$\log\left(1+\frac{x}{y}\right) < \frac{x}{y} \text{ , ou encore } y\log\left(1+\frac{x}{y}\right) < x, \text{ d'où } \left(1+\frac{x}{y}\right)^y < e^x,$$

et :

$$\log\left(1-\frac{x}{x+y}\right) < -\frac{x}{x+y}, \text{ ou encore } \frac{x}{x+y} < \log\left(\frac{x+y}{y}\right) = \log\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

d'où :

$$x < (x+y)\log\left(1+\frac{x}{y}\right), \text{ soit enfin } e^x < \left(1+\frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

Exercice 15 :

> Pour x suffisamment grand il est évident que $(x+1)^x < x^{(x+1)}$. Comment déterminer la borne inférieure des x vérifiant cette inégalité ? ■

Pour tout $x > 0$ l'inégalité est équivalente à $(x+1)\log x > x\log(x+1)$.

Posons $\varphi(x) = (x+1)\log x - x\log(x+1) = \log x - x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

L'inégalité est équivalente à $\varphi(x) > 0$.
Calculons les dérivées première et seconde de φ :

$$\varphi'(x) = \frac{(x+1)}{x} + \log x - \frac{x}{x+1} - \log(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \log x - \log(x+1),$$

et :

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)} = \frac{x-1}{x^2} - \frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)^2 - x^2(x+2)}{x^2(x+1)^2} = -\frac{1+x+x^2}{x^2(x+1)^2}.$$

L'application φ' est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} - \log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) > 0$.

L'application φ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comme $\varphi(x) \underset{x \to 0,\, x>0}{\longrightarrow} -\infty$ et $\varphi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que l'application φ a un et un seul zéro dans $]0, +\infty[$, qui est la borne inférieure de l'ensemble des x tels que $\varphi(x) > 0$.

On constate que $\varphi(1) = -\log(2) < 0$ et $\varphi(\mathrm{e}) = 1 - \mathrm{e}\log\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) > 1 - \mathrm{e}\dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0$ (d'après le lemme de l'exercice précédent). Le zéro cherché se trouve donc entre 1 et e.

On peut obtenir des valeurs approchées de ce zéro par dichotomie ou par la méthode du point fixe : si on pose $\psi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, le zéro cherché apparaît comme le seul point fixe de ψ. On peut démontrer que l'application ψ est bien contractante sur $[1, \mathrm{e}]$ (voir théorème XI.2.5). Une valeur approchée du zéro est : 2,293166287412.

Exercice 20 :

> Soit $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit par récurrence la suite de polynômes (P_n) à coefficients réels ainsi : $P_0 = 1; P_1 = X$ et $(\forall n \geq 2)$ $P_n(X) = X\, P_{n-1}(X) + \lambda_{n-2} P_{n-2}(X)$.
>
> a) Vérifier que $P_{2p}(X) = F_p(X^2)$ et $P_{2p+1}(X) = XG_p(X^2)$, où F_p et G_p sont des polynômes de degré p à coefficients > 0 ($p \in \mathbb{N}$).
>
> b) Montrer que pour $p \geq 1$, F_p et G_p sont dissociés à facteurs simples dans $\mathbb{R}[X]$, leurs racines étant strictement négatives.
>
> Application : Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, étudier $\Delta_n(X)$:
>
> $$\Delta_n(X) = \det \begin{bmatrix} X & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & X & a_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & X \end{bmatrix}$$
>
> où $a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_{n-1}$ sont donnés dans $\mathbb{R}_+^*$. ■

a) Démontrons la propriété par récurrence sur p.

Elle est vraie pour $p = 0$, en posant $F_0 = G_0 = 1$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre p :

$$P_{2p+2}(X) = X\,P_{2p+1}(X) + \lambda_{2p}P_{2p}(X)$$
$$= X^2G_p\left(X^2\right) + \lambda_{2p}F_p\left(X^2\right).$$

Nous poserons :

$F_{p+1}(Y) = YG_p(Y) + \lambda_{2p}F_p(Y)$ de sorte que $P_{2p+2}(X) = F_{p+1}\left(X^2\right)$.

C'est bien un polynôme de degré $p+1$ dont tous les coefficients sont > 0.

$$P_{2p+3}(X) = X\,P_{2p+2}(X) + \lambda_{2p+1}P_{2p+1}(X)$$
$$= X\left[F_{p+1}\left(X^2\right) + \lambda_{2p+1}G_p\left(X^2\right)\right].$$

Nous poserons :

$G_{p+1}(Y) = F_{p+1}(Y) + \lambda_{2p+1}G_p(Y)$ de sorte que $P_{2p+3}(X) = X\,G_{p+1}\left(X^2\right)$.

C'est bien un polynôme de degré $p+1$ dont tous les coefficients sont > 0.

La proposition est donc démontrée pour tout p entier.

b) Les coefficients de F_p et G_p étant tous > 0, ces deux polynômes ne prennent que des valeurs > 0 sur $[0, +\infty[$, et leurs zéros sont tous < 0.

Pour $p = 1$:

$F_1(X) = X + \lambda_0$ a un zéro simple $\alpha_{1,1} < 0$.

$G_1(X) = X + \lambda_0 + \lambda_1$ a un zéro simple $\beta_{1,1} < \alpha_{1,1} < 0$.

Supposons que pour $p \geq 1$, F_p ait p zéros simples $\left(\alpha_{p,i}\right)_{1\leq i\leq p}$, que G_p ait p zéros simples $\left(\beta_{p,i}\right)_{1\leq i\leq p}$ et qu'ils soient ainsi disposés :

$$\beta_{p,1} < \alpha_{p,1} < \beta_{p,2} < \alpha_{p,2} < \cdots < \beta_{p,p} < \alpha_{p,p} < 0.$$

et démontrons qu'il en est de même à l'ordre $p+1$.

Ces zéros étant tous simples, il est facile de déterminer les signes des polynômes sur les différents intervalles.

Le signe de F_p est celui de :

$(-1)^0$ sur $]\,\alpha_{p,p}, 0\,[$,

$(-1)^k$ sur $]\,\alpha_{p,p-k}, \alpha_{p,p-k+1}\,[$ pour k variant de 1 à p-1,

$(-1)^p$ sur $]-\infty, \alpha_{p,1}\,[$.

Le signe de G_p est celui de :

$(-1)^0$ sur $]\,\beta_{p,p}, 0\,[$,

$(-1)^k$ sur $]\,\beta_{p,p-k}, \beta_{p,p-k+1}\,[$ pour k variant de 1 à p-1,

$(-1)^p$ sur $]-\infty, \beta_{p,1}\,[$.

En un zéro de G_p le signe de F_{p+1} est le même que celui de F_p. Donc

– pour k variant de 1 à p-1, $\beta_{p,p-k+1} \in\ ]\,\alpha_{p,p-k}, \alpha_{p,p-k+1}\,[$ donc $F_{p+1}\left(\beta_{p,p-k+1}\right)$ est du signe de $(-1)^k$;

– pour $k = p$, $\beta_{p,1} \in \left]-\infty, \alpha_{p,1}\right[$, donc $F_{p+1}\left(\beta_{p,1}\right)$ est du signe de $(-1)^p$.

En un zéro de F_p le signe de F_{p+1} est l'opposé du signe de G_p, donc :

– pour $k = 0$, $\alpha_{p,p} \in \left]\beta_{p,p}, 0\right[$ donc $F_{p+1}\left(\alpha_{p,p}\right)$ est du signe de -1 ;

– pour k variant de 1 à p-1, $\alpha_{p,p-k} \in \left]\beta_{p,p-k}, \beta_{p,p-k+1}\right[$;
donc $F_{p+1}\left(\alpha_{p,p-k}\right)$ est du signe de $(-1)^{k+1}$.

De plus, le signe de F_{p+1} est +1 au voisinage de 0 et $(-1)^{p+1}$ au voisinage de -∞.

Il y a donc au moins un zéro de F_{p+1} dans chacun des intervalles :

$\left]\alpha_{p,p}, 0\right[$, $\left]\alpha_{p,p-k}, \beta_{p,p-k+1}\right[$ pour k variant de 1 à p-1 et $\left]-\infty, \beta_{p,1}\right[$.

Comme F_{p+1} est de degré p+1, il a au plus p+1 zéros. Chacun de ces p+1 intervalles contient donc un unique zéro simple de F_{p+1}. Le polynôme F_{p+1} est donc dissocié sur $\mathbb{R}$ et tous ses zéros sont simples. Notons ces zéros (dans l'ordre croissant) $\left(\alpha_{p+1,i}\right)_{1 \le i \le p+1}$. Ce qui précède montre qu'il sont ainsi disposés :

$$\alpha_{p+1,1} < \beta_{p,1} < \alpha_{p,1} < \alpha_{p+1,2} < \beta_{p,2} < \cdots < \alpha_{p+1,p} < \beta_{p,p} < \alpha_{p,p} < \alpha_{p+1,p+1} < 0.$$

Comme $G_{p+1}(Y) = F_{p+1}(Y) + \lambda_{2p+1} G_p(Y)$, G_{p+1} est du signe de G_p en un zéro de F_{p+1}. On en déduit :

– pour $k = 0$, $\alpha_{p+1,p+1} \in \left]\beta_{p,p}, 0\right[$ donc $G_{p+1}\left(\alpha_{p+1,p+1}\right)$ est du signe de $(-1)^0$;

– pour k variant de 1 à p-1, $\alpha_{p+1,p+1-k} \in \left]\beta_{p,p-k}, \beta_{p,p-k+1}\right[$ donc $G_{p+1}\left(\alpha_{p+1,p+1-k}\right)$ est du signe de $(-1)^k$;

– pour $k = p$, $\alpha_{p+1,1} \in \left]-\infty, \beta_{p,1}\right[$, donc $G_{p+1}\left(\alpha_{p+1,1}\right)$ est du signe de $(-1)^p$.

De plus le signe de G_{p+1} est celui de $(-1)^{p+1}$ au voisinage de -∞.

Donc G_{p+1} a au moins un zéro dans chacun des intervalles :

$\left]\alpha_{p+1,p-k}, \alpha_{p+1,p+1-k}\right[$ pour k variant de 0 à p-1 et $\left]-\infty, \alpha_{p+1,1}\right[$.

Comme G_{p+1} est de degré p+1, il a au plus p+1 zéros, donc exactement p+1 zéros tous simples, un seul dans chacun de ces intervalles. Notons ces zéros (dans l'ordre croissant) $\left(\beta_{p+1,i}\right)_{1 \le i \le p+1}$. Ce qui précède montre qu'il sont ainsi disposés :

$$\beta_{p+1,1} < \alpha_{p+1,1} < \beta_{p+1,2} < \alpha_{p+1,2} < \cdots < \beta_{p+1,p+1} < \alpha_{p+1,p+1} < 0.$$

La propriété est donc vraie par récurrence pour tout p entier ≥ 1.

Application : En développant $\Delta_n(X)$ on trouve facilement pour $n \geq 4$ la relation :

(1) $\Delta_n(X) = X\Delta_{n-1}(X) + a_n b_{n-1}\Delta_{n-2}(X)$.

En posant $\Delta_1(X) = X$, la relation (1) est encore vraie pour $n = 3$.

En posant $\Delta_0(X) = 1$, la relation (1) est encore vraie pour $n = 2$, puisque dans ce cas elle s'écrit :

$$\Delta_2(X) = \det\begin{bmatrix} X & a_2 \\ -b_1 & X \end{bmatrix} = X \cdot X + a_2 b_1 = X\Delta_1(X) + a_2 b_1 \Delta_0(X).$$

Les hypothèses de l'exercice sont bien vérifiées si on pose pour $k \geq 0$, $\lambda_k = a_{k+2}b_{k+1}$.

§ V.3 *L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ; FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET CIRCULAIRES COMPLEXES*

Exercice 1 :

> Montrer que les seuls homomorphismes de groupes dérivables $h : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ sont les fonctions $h : t \mapsto e^{zt}$ où $z \in \mathbb{C}$. ■

Ces fonctions sont bien des homomorphismes de groupes dérivables. Montrons que ce sont les seuls.

Soit $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ un homomorphisme de groupes dérivable en 0.

Soit x_0 réel ; comme pour tout t réel, $f(t) = f(x_0) \times f(t - x_0)$, f est donc dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0) = f(x_0) \times f'(0)$. Donc, pour tout t réel, $f'(t) = f'(0) \times f(t)$.

Posons $f'(0) = z$. Comme $f(0) = 1$, d'après le corollaire 2 de la proposition V.3.1, l'application f est nécessairement identique à $h : t \mapsto e^{zt}$.

On pourrait aussi justifier le résultat en démontrant que : $g : t \mapsto e^{-zt} f(t)$ est constante car de dérivée nulle, et égale à sa valeur en 0, c'est-à-dire 1.

§ V.4 *FONCTIONS CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE RÉELLE*

Exercice 2 e) :

> Etudier les variations de la fonction suivante : $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$. ■

La fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, 1[$.

Posons pour $x \in]0, 1[$, $\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{x}$; l'application φ est à valeurs dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, elle est strictement croissante.

On voit facilement que $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\sin\varphi(x)\cos\varphi(x)}=\dfrac{2\varphi(x)}{\sin(2\varphi(x))}$.

Etudions l'application $g: y\mapsto \dfrac{\sin y}{y}$, définie sur $]0,\pi/2[$.

Calculons sa dérivée :

$$g'(y)=\frac{\cos y}{y}-\frac{\sin y}{y^2}=\cos y\frac{y-\tan y}{y^2}<0 \text{ sur }]0,\pi/2[.$$

L'application g est donc strictement décroissante de sa limite en 0, qui vaut 1, à sa limite en $\pi/2$, qui vaut 0. Elle est strictement positive.

Nous pouvions aussi déduire ce résultat du fait que la fonction sin est concave sur l'intervalle $[0,\pi/2[$ (voir proposition V.5.2.).

Comme pour tout x dans $]0, 1[$, $f(x)=\dfrac{1}{g(2\varphi(x))}$, on voit que f est strictement positive, strictement croissante de sa limite en 0, de valeur 1, à sa limite en 1, de valeur $+\infty$.

Exercice 3 :

a) Soit $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $f_\alpha(x)=x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ si $x>0$ et $f_\alpha(0)=0$, α étant un réel > 0 donné.

Vérifier que f_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. On pose $\alpha=\lambda+2p$ avec $0<\lambda\le 2$ et $p\in\mathbb{N}$. Tracer le graphe approximatif de f_α au voisinage de 0 en distinguant les cas $0<\alpha<1$, $\alpha=1$, $1<\alpha\le 2$. Montrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}_+$ et que : si $\lambda=2$, $f_\alpha^{(p+1)}(0)$ existe, mais $f_\alpha^{(p+1)}$ n'est pas continue en 0. Cependant $f_\alpha^{(p+1)}$ est bornée au voisinage de 0.

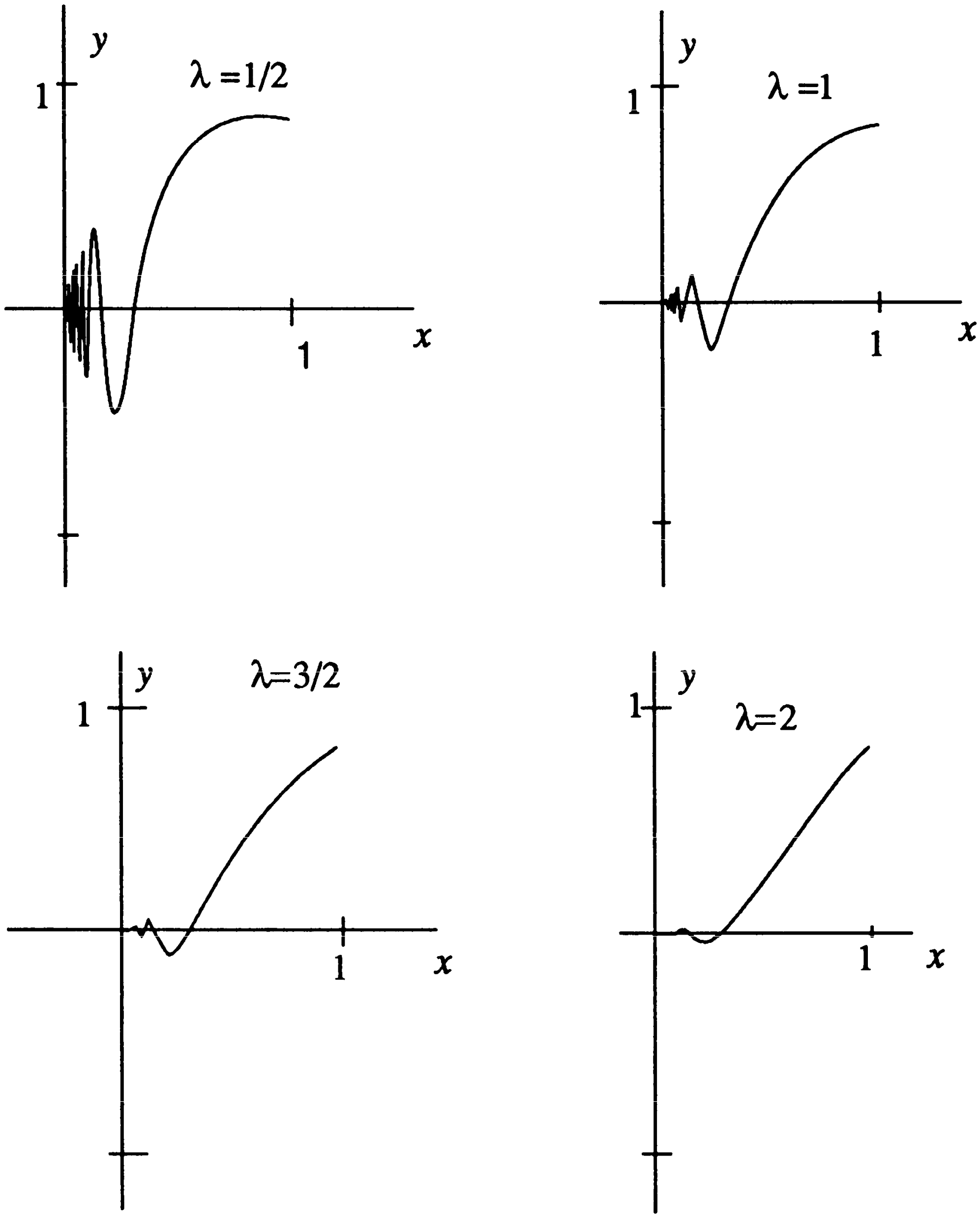
Si $1<\lambda<2$, $f_\alpha^{(p+1)}(0)$ existe, mais $f_\alpha^{(p+1)}$ n'est bornée dans aucun voisinage de 0.

Si $0<\lambda\le 1$, $f_\alpha^{(p+1)}(0)$ n'existe pas.

b) Soit $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x)=x\cdot\sin(\log x)$ si $x>0$ et $f(0)=0$. Montrer que f est lipschitzienne. Calculer le K_f défini dans l'exercice 13 du §V.1, et montrer que f n'est pas dérivable en 0.

c) Soit $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer les $f^{(n)}(0)$ pour $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour chaque n, pour tout réel $\alpha>0$, $f^{(n)}$ s'annule un infinité de fois sur $[0,\alpha]$, et que 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble des zéros de $f^{(n)}$. ■

Dans le cas où $p = 0$ les graphes des fonctions f_α ont les allures suivantes :



Les nombres λ réel, $0 < \lambda \leq 2$ et p entier étant fixés, posons $f(x) = x^{2p+\lambda} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

L'application f est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$. Pour calculer commodément ses dérivées successives, nous pouvons la considérer comme la partie imaginaire de la fonction à valeurs complexes : $\varphi(x) = x^{2p+\lambda} \exp\left(i\frac{1}{x}\right)$.

Montrons par récurrence sur k entier que la dérivée d'ordre k de cette application est de la forme (1) $\varphi^{(k)}(x) = x^{2(p-k)+\lambda}(-i)^k P_k(x) \exp\left(i\frac{1}{x}\right)$, où P_k est un polynôme à coefficients complexes tel que $P_k(0) = 1$.

La propriété est vraie pour $k = 0$; supposons la vraie pour l'enti
vant l'identité (1) on obtient :

$$\varphi^{(k+1)}(x)=x^{2(p-k-1)+\lambda}(-i)^{k+1}P_{k+1}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right),$$

en posant :

$$P_{k+1}(x)=\big(1+ix\big(2(p-k)+\lambda\big)\big)P_k(x)+ix^2P_k'(x).$$

On vérifie que : $P_{k+1}(0)=P_k(0)=1$.

La propriété annoncée est donc vraie par récurrence pour tout k entier.

Pour la suite, démontrons le lemme suivant :

> Soit f une application définie et continue sur $[\,0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$; si pour tout k entre 1 et n, $f^{(k)}(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0$, alors f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont nulles en 0.

Démontrons cette propriété par récurrence sur n. C'est vrai pour $n=1$, d'après le théorème V.1.7.

Supposons la propriété vraie pour n et démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$. Soit f une application définie et continue sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ telle que pour tout k entre 1 et $n+1$, $f^{(k)}(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0$. D'après l'hypothèse de récurrence, elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,+\infty[$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont nulles en 0.

Posons $g(x)=f^{(n)}(x)$, l'application g est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0$, donc, d'après le théorème V.1.7, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée en 0 est nulle. L'application f est donc de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,+\infty[$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ sont nulles en 0.

La propriété est donc vraie par récurrence.

Fin de la démonstration du lemme.

Nous pouvons appliquer ce lemme à la fonction φ. En effet, comme $\lambda>0$, on voit facilement que pour tout entier k, $1\le k\le p$, $\varphi^{(k)}(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0$. Donc φ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $[0,+\infty[$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p sont nulles en 0. Il en est de même pour sa partie imaginaire f.

Supposons maintenant que $\lambda=2$.

Nous avons établi que $\varphi^{(p)}(x)=x^2(-i)^pP_p(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)$; on en déduit :

$$\frac{\varphi^{(p)}(x)-\varphi^{(p)}(0)}{x}=x(-i)^pP_p(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0.$$

L'application φ est donc dérivable $p+1$ fois en 0 et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$ sont nulles en 0. Il en est de même pour f.

Montrons que $f^{(p+1)}$ est bornée au voisinage de 0 mais non continue.

$$\varphi^{(p+1)}(x)=(-i)^{p+1}P_{p+1}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)=P_{p+1}(x)\exp\left(i\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

On voit facilement que $\varphi^{(p+1)}$, donc $f^{(p+1)}$, est bornée au voisinage de 0.

Posons $P_{p+1}(x)=A_{p+1}(x)+iB_{p+1}(x)$, les polynômes A_{p+1} et B_{p+1} étant à coefficients réels. Comme $P_{p+1}(0)=1$, $A_{p+1}(0)=1$ et $B_{p+1}(0)=0$. Cela nous permet d'établir :

$$f^{(p+1)}(x)=A_{p+1}(x)\sin\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)+B_{p+1}(x)\cos\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Le deuxième terme a pour limite 0 quand x tend vers 0, le premier n'a pas de limite car il est équivalent à $\sin\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)$ au voisinage de 0 par valeurs supérieures. La dérivée d'ordre $p+1$ de f n'est donc certainement pas continue en 0.

Supposons $1<\lambda<2$.

Nous avons toujours :

$$\varphi^{(p)}(x)=x^{\lambda}(-i)^{p}P_{p}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right),$$

d'où :

$$\frac{\varphi^{(p)}(x)-\varphi^{(p)}(0)}{x}=x^{\lambda-1}(-i)^{p}P_{p}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)\underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow}0.$$

Les applications φ et f sont donc dérivables $p+1$ fois en 0 et $f^{(p+1)}(0)=0$.

Mais :

$$\varphi^{(p+1)}(x)=x^{\lambda-2}(-i)^{p+1}P_{p+1}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)=x^{\lambda-2}P_{p+1}(x)\exp\left(i\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

donc en reprenant les mêmes notations que ci-dessus :

$$f^{(p+1)}(x)=x^{\lambda-2}\left[A_{p+1}(x)\sin\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)+B_{p+1}(x)\cos\left(\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

On voit bien que cette fonction n'est pas bornée au voisinage de 0, il suffit pour cela de calculer sa valeur en x tel que $\frac{1}{x}-(p+1)\frac{\pi}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en $x_k=\frac{2}{(4k+p+2)\pi}$ pour k entier.

Pour $0<\lambda\leq 1$.

On a de même : $\frac{\varphi^{(p)}(x)-\varphi^{(p)}(0)}{x}=x^{\lambda-1}(-i)^{p}P_{p}(x)\exp\left(i\frac{1}{x}\right)$,

d'où en prenant des notations analogues à celles utilisées ci-dessus :

$$\frac{f^{(p)}(x)-f^{(p)}(0)}{x}=x^{\lambda-1}\left[A_{p}(x)\sin\left(\frac{1}{x}-p\frac{\pi}{2}\right)+B_{p}(x)\cos\left(\frac{1}{x}-p\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Si $0 < \lambda < 1$, on vérifie comme précédemment que ce quotient n'est pas borné au voisinage de 0 ; donc $f^{(p+1)}(0)$ n'existe pas.

Si $\lambda = 1$, le quotient est borné, mais n'a pas de limite quand x tend vers 0 ; donc $f^{(p+1)}(0)$ n'existe pas.

b) L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et elle est continue en 0. Calculons sa dérivée :

$$f'(x) = \sin(\log(x)) + x\cos(\log(x))\frac{1}{x} = \sqrt{2}\sin\left(\log(x) + \frac{\pi}{4}\right).$$

L'application f' est bornée en valeur absolue par $\sqrt{2}$ sur $]0,+\infty[$, donc f est lipschitzienne sur $[0,+\infty[$. Il est clair que comme f' prend la valeur $\sqrt{2}$, $K_f = \sqrt{2}$ (exercice 13 e)).

Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin(\log(x)).$$

Cette fonction n'a pas de limite quand x tend vers 0, f n'est donc pas dérivable en 0.

c) Posons ici $\varphi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\exp\left(i\frac{1}{x}\right) = \exp\left(\frac{i-1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $\varphi(0) = 0$. Cette application à valeurs complexes est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et continue en 0.

Montrons par récurrence sur n que $\varphi^{(n)}$ s'exprime sous la forme :

$$(1) \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{(1-i)^n}{x^{2n}} P_n(x) \exp\left(\frac{i-1}{x}\right),$$

P_n étant un polynôme à coefficients complexes tel que $P_n(0) = 1$.

Cette propriété est vraie pour $n = 0$ en posant : $P_0(X) = 1$. Supposons la vraie pour n. En dérivant l'expression (1) on obtient :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{(1-i)^{n+1}}{x^{2n+2}} P_{n+1}(x) \exp\left(\frac{i-1}{x}\right),$$

en posant :

$$P_{n+1}(x) = (1 - n(i+1)x)P_n(x) + \frac{i+1}{2}x^2 P_n'(x).$$

On vérifie que $P_{n+1}(0) = P_n(0) = 1$; la propriété est donc vraie à l'ordre n+1.

Elle est donc vraie par récurrence pour tout entier n.

Il est alors clair que pour tout n entier, $\varphi^{(n)}(x) \underset{x \to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0$, donc que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$, toutes ses dérivées en 0 étant nulles.

Posons pour tout x réel : $\psi(x) = \varphi(|x|)$, on voit facilement que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, toutes ses dérivées étant nulles en 0. Il en est de
qui est la partie imaginaire de ψ.

Etudions maintenant les zéros de $f^{(n)}$.

En notant comme dans le a) : $P_n(x) = A_n(x) + iB_n(x)$, où les polynômes A_n et B_n sont à coefficients réels, $A_n(0) = 1$ et $B_n(0) = 0$, on obtient l'expression :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(1-i)^n}{x^{2n}} P_n(x) \exp\left(\frac{i-1}{x}\right) = P_n(x) \frac{1}{x^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) (\sqrt{2})^n \exp i\left(\frac{1}{x} - n\frac{\pi}{4}\right),$$

d'où :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(\sqrt{2})^n}{x^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\left(A_n(x)\sin\left(\frac{1}{x} - n\frac{\pi}{4}\right) + B_n(x)\cos\left(\frac{1}{x} - n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Soit pour k entier x_k tel que $\dfrac{1}{x_k} - n\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, c'est-à-dire $x_k = \dfrac{4}{(4k+n+2)\pi}$; on vérifie que $x_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$, donc $A_n(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} 1$. Il existe donc un rang K tel que pour tout entier k, $k > K$, $A_n(x_k) > 0$. Comme :

$$f^{(n)}(x_k) = \frac{(\sqrt{2})^n}{x_k^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{x_k}\right) A_n(x_k)(-1)^k,$$

pour tout entier k, $k > K$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f^{(n)}$ prend la valeur 0 au moins une fois sur l'intervalle $]\,x_{k+1}, x_k\,[$. On a donc montré que $f^{(n)}$ prend la valeur 0 une infinité de fois sur tout intervalle $]\,0, \alpha\,[$, $\alpha > 0$.

Montrons maintenant que 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble des zéros de $f^{(n)}$.

Supposons que l'ensemble des zéros de $f^{(n)}$ ait un point d'accumulation non nul, x_0, que l'on peut supposer > 0. Alors $\dfrac{1}{x_0}$ serait point d'accumulation de l'ensemble des zéros de l'application g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(y) = A_n\left(\frac{1}{y}\right)\sin\left(y - n\frac{\pi}{4}\right) + B_n\left(\frac{1}{y}\right)\cos\left(y - n\frac{\pi}{4}\right).$$

Soit $N = \sup(\deg(A_n), \deg(B_n))$; la fonction $h : x \mapsto x^N g(x)$ s'écrit sous la forme :

$h(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$,

où A et B sont des polynômes à coefficients réels, non tous les deux nuls.

Le réel $\dfrac{1}{x_0}$ serait point d'accumulation de l'ensemble des zéros de cette application h. C'est impossible d'après la démonstration de l'exercice suivant (5).

Exercice 5 :

> Soit A et B deux polynômes à coefficients réels, non tous les deux nuls. Montrer que l'ensemble E des zéros de l'application $f: x \mapsto A(x)\cos x + B(x)\sin x$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est discret. ■

Supposons que x_0 réel soit point d'accumulation des zéros de f. Il est évident d'après le théorème de Rolle que x_0 est alors point d'accumulation des zéros de la dérivée f' et, par récurrence, de toutes les dérivées successives de f. Comme toutes ces dérivées sont continues, elles prennent donc toutes la valeur 0 en x_0. Montrons que cela est impossible.

Montrons par récurrence sur n que si A et B sont deux polynômes à coefficients réels, tous les deux de degré $\leq n$, les dérivées successives de $h(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$ ne sont toutes nulles en x_0, que si A et B sont tous les deux nuls.

La proposition est vraie pour $n = 0$, par étude élémentaire.

Supposons la vraie pour n. Soient A et B deux polynômes à coefficients réels, tous les deux de degré $\leq n+1$, tels que toutes les dérivées de $h(x) = A(x)\cos(x) + B(x)\sin(x)$ soient toutes nulles en x_0. En dérivant deux fois, on obtient :

$$h''(x) = -h(x) + \left(A''(x) + 2B'(x)\right)\cos x + \left(B''(x) - 2A'(x)\right)\sin x.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on trouve que les polynômes $A'' + 2B'$ et $B'' - 2A'$ sont nuls.

Cela implique que A et B sont tous les deux nuls, en effet, si :

$$A'' + 2B' = 0 \text{ et } B'' - 2A' = 0,$$

alors :

$$A^{(3)} = -4A' \text{ et } B^{(3)} = -4B' \ ;$$

les polynômes A' et B' ne peuvent être que nuls, les polynômes A et B que constants, donc nuls (le résultat est vrai pour $n = 0$).

La proposition est donc vraie pour tout $n \geq 0$ par récurrence.

Cela termine la démonstration de cet exercice.

Exercice 8 :

> Soit $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Montrer l'équivalence des conditions (I) et (II) suivantes :
>
> (I) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0$
>
> (II) Il existe ε, ε', ε'' dans $\{-1,+1\}$ dont deux au moins valent +1 tels que
>
> $\varepsilon \operatorname{Arccos} x + \varepsilon' \operatorname{Arccos} y + \varepsilon'' \operatorname{Arccos} z \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. ■

Supposons que (I) soit vérifiée. Alors :

$$(xy+z)^2 = x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right).$$

Posons : $\alpha = \text{Arccos}\, x$, $\beta = \text{Arccos}\, y$ et $\gamma = \text{Arccos}\, z$. D'après l'égalité ci-dessus, il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :

$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma = \varepsilon \sin\alpha \sin\beta$, d'où $\cos(\alpha + \varepsilon\beta) = -\cos\gamma = \cos(\gamma + \pi)$.

Donc, ou bien il existe un entier relatif k tel que :

(1) $\quad \alpha + \varepsilon\beta - \gamma = (2k+1)\pi$,

ou bien il existe un entier relatif k tel que :

(2) $\quad \alpha + \varepsilon\beta + \gamma = (2k+1)\pi$.

Dans le cas (1), si $\varepsilon = -1$, on peut considérer que :

$$-\alpha + \beta + \gamma = -(2k+1)\pi = \pi - 2(k+1)\pi.$$

La propriété (II) est donc toujours vérifiée.

Supposons que (II) soit vérifiée. Conservons les mêmes notations :

$$\varepsilon\alpha + \varepsilon'\beta = -\varepsilon''\gamma + \pi + 2k\pi,$$

donc :

$$\cos(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \varepsilon\varepsilon' \sin\alpha\sin\beta = -\cos\gamma,$$

d'où :

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma = \varepsilon\varepsilon' \sin\alpha\sin\beta,$$

En élevant au carré on obtient :

$$(\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)^2 = \left(1 - \cos^2\alpha\right)\left(1 - \cos^2\beta\right),$$

soit enfin :

$$(xy+z)^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right), \text{ d'où } x^2y^2 + 2xyz + z^2 = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2,$$

c'est-à-dire l'égalité (I) :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$$

La propriété (I) est donc vérifiée.

Cela termine la démonstration de l'équivalence des propriétés (I) et (II).

Exercice 14 :

Démontrer les formules suivantes qui permettent de calculer des approximations de π.

(1) $\dfrac{\pi}{4} = \text{Arc tg}\dfrac{1}{2} + \text{Arc tg}\dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{\pi}{4} = 2\,\text{Arc tg}\dfrac{1}{3} + \text{Arc tg}\dfrac{1}{7}$,

(3) $\dfrac{\pi}{4} = 3\,\text{Arc tg}\dfrac{1}{4} + \text{Arc tg}\dfrac{1}{20} + \text{Arc tg}\dfrac{1}{1985}$,

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\text{Arc tg}\dfrac{1}{5} - \text{Arc tg}\dfrac{1}{239}$ Formule de Méchin (1706).

Démontrer que le seul couple $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que : $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\text{Arc tg}\dfrac{1}{p} + \text{Arc tg}\dfrac{1}{q}$ est le couple (5,-239). ■

Démontrons l'égalité (1).

On vérifie que : $0 < \text{Arc tg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} = \text{Arc tg}1$ et $0 < \text{Arc tg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4} = \text{Arc tg}1$.
On en déduit que les deux nombres, $\frac{\pi}{4}$ et $\text{Arc tg}\frac{1}{2} + \text{Arc tg}\frac{1}{3}$, sont dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ils sont donc égaux si, et seulement si, il ont la même tangente, c'est-à-dire si : $1 = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$.

ce qui est vrai.

Démontrons l'égalité (2) que nous écrivons : $\frac{\pi}{4} - \text{Arc tg}\frac{1}{7} = 2\,\text{Arc tg}\frac{1}{3}$.

En raisonnant comme ci-dessus, on voit que cette égalité est équivalente à :

$$\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} = \frac{2\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}.$$

Ce qui est vrai.

Démontrons l'égalité (3) que nous écrivons :
$\frac{\pi}{4} - \text{Arc tg}\frac{1}{1985} = 3\,\text{Arc tg}\frac{1}{4} + \text{Arc tg}\frac{1}{20}$.

On vérifie que $\text{Arc tg}\frac{1}{4} < \frac{\pi}{8}$ (car $\text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$), donc que $3\,\text{Arc tg}\frac{1}{4} + \text{Arc tg}\frac{1}{20} < \frac{\pi}{2}$. Les nombres à droite et à gauche de l'égalité à démontrer sont donc tous les deux dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; ils sont égaux si, et seulement si, ils ont la même tangente. Vérifions cette condition.

En utilisant la formule : $\text{tg}(3x) = \dfrac{3\,\text{tg}(x) - \text{tg}^3(x)}{1-3\,\text{tg}^2(x)}$, on trouve $\text{tg}\left(3\,\text{Arc tg}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{47}{52}$. L'égalité à démontrer équivaut donc à :

$$\frac{1-\frac{1}{1985}}{1+\frac{1}{1985}} = \frac{\frac{47}{52}+\frac{1}{20}}{1-\frac{47}{52}\times\frac{1}{20}}.$$

Un calcul élémentaire le prouve.

Démontrons l'égalité (4) que nous écrivons : $\frac{\pi}{4} + \text{Arc tg}\frac{1}{239} = 4\,\text{Arc tg}\frac{1}{5}$.

On vérifie que $\text{Arc tg}\frac{1}{5} < \text{Arc tg}\frac{1}{4} < \frac{\pi}{8}$, donc les nombres à droite et à gauche de l'égalité à démontrer sont tous les deux dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$; ils sont égaux si, et seulement si, ils ont la même tangente. Vérifions cette condition.

En utilisant la formule :

$\text{tg}(4x) = \frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2 - 4t^2}$ $(t = \text{tg}(x))$, on trouve $\text{tg}\left(4\,\text{Arc tg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119}$.

Il reste à vérifier : $\frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \frac{120}{119}$, ce qui s'établit sans peine.

Démontrons maintenant que le couple (5,-239) est la seule solution.

Supposons que $\frac{\pi}{4} = 4\,\text{Arc tg}\frac{1}{p} + \text{Arc tg}\frac{1}{q}$.

La valeur -1 pour q est exclue, car dans ce cas on aurait $\text{Arc tg}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi}{8}$, donc $p = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (car $\text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$), ce qui est impossible. La valeur 1 est aussi exclue.

Donc $\frac{\pi}{4} - \text{Arc tg}\frac{1}{q} = 4\,\text{Arc tg}\frac{1}{p} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \text{Arc tg}\frac{1}{p} < \frac{\pi}{8}$; l'entier p est donc nécessairement positif et $p > \frac{1}{\sqrt{2}-1} > 2$.

Ecrivons que les deux nombres $\frac{\pi}{4} - \text{Arc tg}\frac{1}{q}$ et $4\,\text{Arc tg}\frac{1}{p}$ ont même tangente.

En utilisant la formule donnant $\text{tg}(4x)$ en fonction de $t = \text{tg}(x)$, on trouve que les entiers p et q vérifient la relation :

$$\frac{4p(p^2-1)}{(p^2-1)^2 - 4p^2} = \frac{q-1}{q+1} \text{ soit } \frac{(p^2-1)^2 - 4p^2}{4p(p^2-1)} = \frac{q+1}{q-1}.$$

On peut écrire cette égalité sous la forme :

$$\frac{(p^2-1)^2 - 4(p^2-1) - 4}{p(p^2-1)} = p - \frac{5}{p} - \frac{4}{p(p^2-1)} = 4\left(1 + \frac{2}{q-1}\right).$$

On voit facilement que $\frac{4}{3} \le 4\left(1+\frac{2}{q-1}\right) \le 12$, puisque $|q| \ge 2$.

Comme d'autre part la suite $u_p = p - \frac{5}{p} - \frac{4}{p\left(p^2-1\right)}$ est strictement croissante et $u_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, seul un nombre fini d'entiers $p \geq 3$ peuvent convenir. On peut accélérer la recherche en remarquant que 8 divise nécessairement q-1.

En effet si $(q-1)\left[\left(p^2-1\right)^2 - 4p^2\right] = (q+1)4p\left(p^2-1\right)$,

– soit p est pair, $\left(p^2-1\right)^2 - 4p^2$ est impair, 8 divise q-1,

– soit $p = 2k+1$, $p^2-1 = 4k(k+1)$, d'où :

$$(q-1)\left[16k^2(k+1)^2 - 4p^2\right] = (q+1)4p4k(k+1),$$

$$(q-1)\left[4k^2(k+1)^2 - p^2\right] = (q+1)p4k(k+1),$$

8 divise $4k(k+1)$, comme p est impair, 8 divise q-1.

En posant $q = 1+8h$, h entier relatif non nul, on trouve la condition :

$$u_p = p - \frac{5}{p} - \frac{4}{p\left(p^2-1\right)} = 4 + \frac{1}{h} \in [\,3, 5\,].$$

L'entier p est donc ≥ 4 (car $p > u_p$). On trouve facilement :

$$u_4 = \frac{161}{60} < 3,$$

$u_5 = 4 - \frac{1}{30}$, ce qui correspond à la solution $p = 5$, $h = -30$, $q = -239$,

et $u_6 = \frac{1081}{210} > 5$.

Il n'y a pas d'autres solutions.

Exercice 23 :

> Soit $f: [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3(1-x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $0 < x \leq 1$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable, que f' est bornée, mais que $f'([\,0,1\,])$ n'est pas un intervalle fermé (c'est un intervalle d'après le théorème de Darboux). ■

On voit bien que f est continue sur [0, 1] et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur]0, 1]. Elle est aussi dérivable en 0, de dérivée nulle ; en effet :

$$\frac{f(x)}{x} = x^2(1-x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0.$$

Calculons sa dérivée en $x > 0$:

$$f'(x) = \left(3x^2 - 4x^3\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2(1-x)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

L'application f est donc dérivable sur [0, 1], de dérivée bornée. Plus précisément pour tout x dans]0, 1], on a la majoration :
$|f'(x)| \leq x^2 |3-4x| + 2(1-x)$.

Sur $]\,0, 3/4\,]$:

$$|f'(x)| \leq x^2(3-4x) + 2(1-x) = 2 - 2x + 3x^2 - 4x^3 = P(x).$$

$P'(x) = -2 + 6x - 12x^2$ de discriminant réduit $\Delta' = 9 - 24 < 0$.
Le polynôme P est donc strictement décroissant sur $\mathbb{R}$, et on obtient $|f'(x)| < P(0) = 2$.

Sur $[\,3/4, 1\,]$:

$$|f'(x)| \leq x^2(4x-3) + 2(1-x) = 2 - 2x - 3x^2 + 4x^3 = Q(x).$$

$Q'(x) = -2 - 6x + 12x^2$ de discriminant réduit $\Delta' = 9 + 24 > 0$. Le polynôme Q' a donc deux zéros, l'un < 0, l'autre > 0. Comme $Q'(3/4) = \dfrac{1}{4}$, le zéro positif est $< 3/4$, Q' est donc > 0 sur $[\,3/4, 1\,]$, et Q est strictement croissant. On déduit $|f'(x)| \leq Q(1) = 1$.

En conclusion, on peut affirmer que pour tout x dans]0, 1], $|f'(x)| < 2$, ce qui est vrai aussi en 0. On en déduit que $J = f'([\,0, 1\,])$ est un intervalle (théorème de Darboux), inclus dans]-2, 2[.
Montrons qu'il y a en fait égalité.

Considérons la suite $(x_n)_{n>0}$ de réels > 0, tels que pour tout $n > 0$, $\dfrac{1}{x_n^2} = n\pi$.
Cette suite est à valeurs dans]0, 1], de limite nulle, et $f'(x_n) = -2(1-x_n)(-1)^n$.
Il y a donc dans l'intervalle J des réels aussi proches que l'on veut de -2 ou de +2.

On en déduit que $J = f'([\,0, 1\,]) =]-2, 2[$. Cela confirme que l'application f' n'est pas continue.

Exercice 29 :

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $A = f(a), B = f(b), C = f(c)$. Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver un polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ de degré le plus bas possible, tel que $a + b + c = 0 \Rightarrow P(f(a), f(b), f(c)) = 0$.

(I) $f(x) = \cos x$, (II) $f(x) = \sin x$, (III) $f(x) = \dfrac{1}{1 + \lambda \cos x}$ $(\lambda \neq 0)$,

(IV) $f(x) = \operatorname{tg}^2(x)$.

b) Pour chaque P trouvé en a), trouver tous les $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(f(a), f(b), f(c)) = 0$. ■

(I) Envisageons le cas où $f(x) = \cos x$.

Montrons que si un polynôme vérifie la condition, alors il est divisible par le polynôme $A(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XYZ - 1$.

Supposons que le polynôme P vérifie la condition, alors pour tous a et b réels,

$$P(\cos a, \cos b, \cos(-a-b)) = P(\cos a, \cos b, \cos a \cos b - \sin a \sin b) = 0.$$

Soient x et y réels dans l'intervalle $]-1,1[$.

En appliquant l'égalité précédente à : $a = \text{Arc}\cos x$, $b = \text{Arc}\cos y$, on trouve :

$$P\left(x, y, xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = 0.$$

Et en appliquant l'égalité précédente à : $a = -\text{Arc}\cos x, b = \text{Arc}\cos y$, on trouve :

$$P\left(x, y, xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = 0.$$

Les nombres $xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ et $xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ étant distincts, le polynôme en Z : $P(x, y, Z)$, est divisible par :

$$\begin{aligned}\left(Z - xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)&\left(Z - xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)\\ &= (Z-xy)^2 - \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right) = Z^2 + x^2 + y^2 - 2xyZ - 1\\ &= A(x,y,Z)\end{aligned}$$

L'algorithme d'Euclide montre que les coefficients du quotient s'écrivent comme des fonctions polynomiales en x et y. Il existe donc un polynôme $Q(X,Y,Z)$ tel que pour tous x et y dans $]-1,1[$ et tout z réel, $P(x,y,z) = Q(x,y,z)A(x,y,z)$. On sait qu'alors $P = Q \times A$ (voir *Algèbre* théorème X.1.2 corollaire 2).

Montrons qu'un polynôme divisible par le polynôme A vérifie la condition de l'énoncé. Cherchons pour cela $\left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad A(\cos a, \cos b, \cos c) = 0\right\}$.

On vérifie facilement que :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c - 1 = 0,$$

équivaut à :

$$(\cos c - \cos a \cos b)^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b,$$

ou encore :

$$(\cos c - \cos a \cos b)^2 = \sin^2 a \sin^2 b,$$

ou encore :

$$\exists \varepsilon \in \{-1,1\}, \quad \cos c = \cos a \cos b + \varepsilon \sin a \sin b = \cos(a - \varepsilon b),$$

ou encore :

$$\exists \varepsilon, \varepsilon' \in \{-1,1\}^2, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad c = \varepsilon'(a - \varepsilon b) + 2k\pi.$$

Comme $2\pi\mathbb{Z}$ est stable par $x \mapsto -x$, on peut écrire cela de manière plus symétrique :

$$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1,1\}^3, \quad \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cela prouve que si $a+b+c=0$ alors $A(\cos a, \cos b, \cos b)=0$ et $P(\cos a, \cos b, \cos b)=0$ pour tout polynôme P multiple de A ; et cela répond aussi à la question b) dans le cas (I).

(II) Envisageons le cas où $f(x)=\sin x$, en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans le (I)

Montrons que si un polynôme vérifie la condition, alors il est divisible par le polynôme

$$B(X,Y,Z)=X^4+Y^4+Z^4-2\left(X^2Y^2+Y^2Z^2+Z^2X^2\right)+4X^2Y^2Z^2.$$

Supposons que le polynôme P vérifie la condition, alors pour tous a et b réels :

$$P(\sin a, \sin b, -\sin(a+b))=P(\sin a, \sin b, -\sin a\cos b-\sin b\cos a)=0$$

Soient x et y réels dans l'intervalle $]-1,1[$; le polynôme $P(x,y,Z)$ a pour zéros :

$-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$ en prenant : $a=\operatorname{Arc}\sin x, b=\operatorname{Arc}\sin y$,

$x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$ en prenant : $a=\operatorname{Arc}\sin x, b=\pi-\operatorname{Arc}\sin y$,

$-x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ en prenant : $a=\pi-\operatorname{Arc}\sin x, b=\operatorname{Arc}\sin y$,

$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ en prenant : $a=\pi-\operatorname{Arc}\sin x, b=\pi-\operatorname{Arc}\sin y$.

Ces 4 zéros sont deux à deux distincts si x et y sont dans un certain ouvert O non vide de $]-1,1[^2$. Pour tout couple $(x,y)\in O$, le polynôme $P(x,y,Z)$ est divisible par :

$$\prod_{(\varepsilon,\varepsilon')\in\{-1,1\}^2}\left(Z+\varepsilon x\sqrt{1-y^2}+\varepsilon' y\sqrt{1-x^2}\right),$$

qui est égal à :

$$\prod_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\left[\left(Z+\varepsilon x\sqrt{1-y^2}\right)^2-y^2\left(1-x^2\right)\right]$$
$$=\prod_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\left(Z^2+x^2\left(1-y^2\right)-y^2\left(1-x^2\right)-2\varepsilon x\sqrt{1-y^2}Z\right)$$
$$=\prod_{\varepsilon\in\{-1,1\}}\left(Z^2+x^2-y^2-2\varepsilon x\sqrt{1-y^2}Z\right)$$
$$=\left(Z^2+x^2-y^2\right)^2-4x^2\left(1-y^2\right)Z^2$$
$$=x^4+y^4+Z^4-2\left(x^2y^2+y^2Z^2+Z^2x^2\right)+4x^2x^2Z^2=B(x,y,Z).$$

L'algorithme d'Euclide montre que les coefficients du quotient s'écrivent comme des fonctions polynomiales en x et y. Il existe donc un polynôme $Q(X,Y,Z)$ tel que pour tout couple $(x,y)\in O$ et tout z réel, $P(x,y,z)=Q(x,y,z)B(x,y,z)$. On en déduit $P=Q\times B$.

Réciproquement :

Remarquons que : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a+b+c=0 \Rightarrow 2a+2b+2c=0$,
donc que : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a+b+c=0 \Rightarrow A(\cos 2a,\cos 2b,\cos 2c)=0$,
soit encore :
$\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ a+b+c=0 \Rightarrow A\left(1-2\sin^2 a, 1-2\sin^2 b, 1-2\sin^2 c\right)=0.$

Le polynôme $A\left(1-2X^2,1-2Y^2,1-2Z^2\right)$ est donc divisible par le polynôme B, et, comme il est de même degré : 4, il lui est proportionnel. On vérifie aisément en effet :

$$A\left(1-2X^2,1-2Y^2,1-2Z^2\right)=4B(X,Y,Z).$$

On en déduit que $B(\sin a,\sin b,\sin c)=0$ équivaut à $A(\cos 2a,\cos 2b,\cos 2c)=0$, ce qui d'après le (I) équivaut à :

$$\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\{-1,1\}^3,\quad 2\varepsilon_1 a+2\varepsilon_2 b+2\varepsilon_3 c\in 2\pi\mathbb{Z},$$

soit encore : $\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\in\{-1,1\}^3,\quad \varepsilon_1 a+\varepsilon_2 b+\varepsilon_3 c\in \pi\mathbb{Z}$.
On en déduit que si $a+b+c=0$, alors $B(\sin a,\sin b,\sin c)=0$, ce qui est aussi vrai pour tout polynôme P multiple de B.
Cela termine la démonstration de la réciproque, et répond à la question b), dans le cas (II).

(III) Envisageons le cas où $f(x)=\dfrac{1}{1+\lambda\cos x}$, $\lambda\neq 0$. L'idée est d'utiliser des transformations algébriques pour résoudre cette question à partir des résultats du (I).
Le problème est compliqué par le fait que si $\lambda\geq 1$, la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
Posons $O_\lambda=\{x\in\mathbb{R}, 1+\lambda\cos x\neq 0\}$, $H=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a+b+c=0\}$ et $H_\lambda=\{(a,b,c)\in O_\lambda^3, a+b+c=0\}$. On admettra ici, pour ne pas surcharger la démonstration principale, que H_λ est partout dense dans H.

Démontrons que
(1) $\quad \forall(a,b,c)\in H_\lambda,\quad P\big(f(a),f(b),f(c)\big)=0$
équivaut à P divisible par :

$$C_\lambda(X,Y,Z)=X^2Y^2Z^2A\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{X}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{Y}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{Z}-1\right)\right).$$

On obtient :

$$C_\lambda(X,Y,Z)=\frac{1}{\lambda^2}\left((1-X)^2Y^2Z^2+(1-Y)^2Z^2X^2+(1-Z)^2X^2Y^2\right)$$
$$-\frac{2}{\lambda^3}(1-X)(1-Y)(1-Z)XYZ-X^2Y^2Z^2\,.$$

Soit P un polynôme en X, Y, Z , soit p son degré en X, q en
supposons qu'il vérifie (1) alors :

$\forall(a,b,c)\in H_\lambda$

$$(1+\lambda\cos a)^p(1+\lambda\cos b)^q(1+\lambda\cos c)^r P\left(\frac{1}{1+\lambda\cos a},\frac{1}{1+\lambda\cos b},\frac{1}{1+\lambda\cos c}\right)=0.$$

Soit Q le polynôme :

$$Q(X,Y,Z)=(1+\lambda X)^p(1+\lambda Y)^q(1+\lambda Z)^r P\left(\frac{1}{1+\lambda X},\frac{1}{1+\lambda Y},\frac{1}{1+\lambda Z}\right).$$

Ce polynôme vérifie :

$$\forall(a,b,c)\in H_\lambda,\quad Q(\cos a,\cos b,\cos c)=0.$$

Comme H_λ est partout dense dans H, il vérifie aussi :

$$\forall(a,b,c)\in H,\quad Q(\cos a,\cos b,\cos c)=0.$$

D'après le (I), cela équivaut à $Q=AR$, où $R\in\mathbb{C}[X,Y,Z]$.

Pour tous x, y, z, différents de $-\dfrac{1}{\lambda}$,

$$(1+\lambda x)^p(1+\lambda y)^q(1+\lambda z)^r P\left(\frac{1}{1+\lambda x},\frac{1}{1+\lambda y},\frac{1}{1+\lambda z}\right)=A(x,y,z)R(x,y,z).$$

Posons $x'=1+\lambda x, y'=1+\lambda y, z'=1+\lambda y$, d'où $x=\dfrac{1}{\lambda}(x'-1)$ et les relations analogues pour y' et z'. Pour tous x', y', z' non nuls :

$$x'^p y'^q z'^r P\left(\frac{1}{x'},\frac{1}{y'},\frac{1}{z'}\right)=A(x,y,z)R(x,y,z),$$

il existe donc un polynôme S en X, Y, Z tel que :

$$(2)\qquad X^pY^qZ^rP\left(\frac{1}{X},\frac{1}{Y},\frac{1}{Z}\right)=A\left(\frac{1}{\lambda}(X-1),\frac{1}{\lambda}(Y-1),\frac{1}{\lambda}(Z-1)\right)S(X,Y,Z).$$

On vérifie que le polynôme :

$$A\left(\frac{1}{\lambda}(X-1),\frac{1}{\lambda}(Y-1),\frac{1}{\lambda}(Z-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\left((X-1)^2+(Y-1)^2+(Z-1)^2\right)-\frac{2}{\lambda^3}(X-1)(Y-1)(Z-1)-1.$$

est de degré 2 en X, en Y, et en Z.

Or si $P(t)=u_kt^k+\cdots+u_nt^n$, $u_k\neq 0, u_n\neq 0$, est un polynôme non nul de degré n et de valuation k, le polynôme $t^nP\left(\dfrac{1}{t}\right)=u_kt^{n-k}+\cdots+u_n$ est de degré $n-k\leq n$.

Nous pouvons appliquer cette remarque à l'identité (2), considérée comme identité entre polynômes en X à coefficients dans $\mathbb{C}[Y,Z]$; nous en déduisons : $p\geq 2+\deg_X(S)$; de même on peut établir que : $q\geq 2+\deg_Y(S)$, et : $r\geq 2+\deg_Z(S)$.

Nous avons posé :

$$C_\lambda(X,Y,Z)=X^2Y^2Z^2A\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{X}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{Y}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{Z}-1\right)\right)$$

L'identité (2) s'écrit aussi :

(3) $P(X,Y,Z) = C_\lambda(X,Y,Z)X^{p-2}Y^{q-2}Z^{r-2}S\left(\frac{1}{X},\frac{1}{Y},\frac{1}{Z}\right).$

Comme :

$$T(X,Y,Z) = X^{p-2}Y^{q-2}Z^{r-2}S\left(\frac{1}{X},\frac{1}{Y},\frac{1}{Z}\right),$$

est d'après ce qui précède un polynôme, on en déduit que P est bien divisible dans $\mathbb{C}[X,Y,Z]$ par C_λ.

A partir de :

$$A(X,Y,Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XYZ - 1,$$

on établit facilement que :

$$C_\lambda(X,Y,Z) = \frac{1}{\lambda^2}\left((1-X)^2Y^2Z^2 + (1-Y)^2Z^2X^2 + (1-Z)^2X^2Y^2\right)$$
$$-\frac{2}{\lambda^3}(1-X)(1-Y)(1-Z)XYZ - X^2Y^2Z^2 .$$

En posant $\mu = \frac{1}{\lambda}$, on obtient :

$$C_\lambda(X,Y,Z) = (2\mu-1)(1+\mu)^2X^2Y^2Z^2 - 2\mu^2(1+\mu)XYZ(YZ+XZ+XY) +$$
$$+\mu^2\left(Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2\right) + 2\mu^3XYZ(X+Y+Z) - 2\mu^3XYZ .$$

Réciproquement :
Nous procéderons comme dans le (I) et le (II).

Comme : $C_\lambda(x',y',z') = x'^2y'^2z'^2A\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x'}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{y'}-1\right),\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{z'}-1\right)\right).$

La condition :

$$(a,b,c) \in O_\lambda^3 \text{ et } C_\lambda\left(\frac{1}{1+\lambda\cos a},\frac{1}{1+\lambda\cos b},\frac{1}{1+\lambda\cos c}\right) = 0,$$

équivaut à :

$$(a,b,c) \in O_\lambda^3 \text{ et } A(\cos a,\cos b,\cos c) = 0.$$

D'après (I), cette condition équivaut encore à :

$$(a,b,c) \in O_\lambda^3 \text{ et } \exists \varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3 \in \{-1,1\}^3,\quad \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cela démontre que si $(a,b,c) \in O_\lambda^3$ et $a+b+c=0$, alors :

$$C_\lambda\left(\frac{1}{1+\lambda\cos a},\frac{1}{1+\lambda\cos b},\frac{1}{1+\lambda\cos c}\right) = 0.$$

Il en sera évidemment de même pour tous les multiples de C_λ.
Cela résout aussi la question b) dans ce cas (III).

(IV) Envisageons le cas où $f(x) = \mathrm{tg}^2(x)$.

Nous pouvons nous ramener au cas précédent en observant que

$$\operatorname{tg}^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} = -1 + 2\frac{1}{1+\cos 2x}.$$

Reprenons les notations du (III). Le polynôme P vérifiera la condition (1) de l'énoncé, si et seulement si :

$$\forall (a,b,c) \in H_1, \quad P\left(-1+\frac{2}{1+\cos a}, -1+\frac{2}{1+\cos b}, -1+\frac{2}{1+\cos c}\right) = 0.$$

Posons :

$$Q(X,Y,Z) = P(-1+2X, -1+2Y, -1+2Z).$$

Le polynôme P vérifie la condition (1) si, et seulement si, le polynôme Q vérifie :

$$\forall (a,b,c) \in H_1, \quad Q\left(\frac{1}{1+\cos a}, \frac{1}{1+\cos b}, \frac{1}{1+\cos c}\right) = 0.$$

D'après le (III) cela équivaut à ce que le polynôme Q soit divisible par C_1, c'est-à-dire :

$$\exists R \in \mathbb{C}\,[X,Y,Z], \quad P(-1+2X, -1+2Y, -1+2Z) = C_1(X,Y,Z)R(X,Y,Z).$$

Cela équivaut à la condition :

$$\exists S \in \mathbb{C}\,[X,Y,Z], \quad P(X,Y,Z) = C_1\left(\frac{X+1}{2}, \frac{Y+1}{2}, \frac{Z+1}{2}\right) S(X,Y,Z).$$

La condition (1) équivaut ici à ce que le polynôme P soit divisible par :

$$\begin{aligned} D(X,Y,Z) &= C_1\left(\frac{X+1}{2}, \frac{Y+1}{2}, \frac{Z+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{X+1}{2}\right)^2 \left(\frac{Y+1}{2}\right)^2 \left(\frac{Z+1}{2}\right)^2 A\left(\frac{1-X}{1+X}, \frac{1-Y}{1+Y}, \frac{1-Z}{1+Z}\right). \\ &= \frac{1}{2^6}(X+1)^2(Y+1)^2(Z+1)^2 A\left(\frac{1-X}{1+X}, \frac{1-Y}{1+Y}, \frac{1-Z}{1+Z}\right). \end{aligned}$$

On peut vérifier que $16D$ est égal au polynôme :

$$X^2Y^2Z^2 - 2XYZ(X+Y+Z) - 8XYZ + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2(YZ + ZX + XY).$$

Résolvons le d) dans ce cas (IV). Posons : $O = \mathbb{R} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$, en procédant comme précédemment, on trouve que :

$$\begin{aligned} &\left\{(a,b,c) \in O, \quad D(\operatorname{tg}^2 a, \operatorname{tg}^2 b, \operatorname{tg}^2 c) = 0\right\} \\ &= \{(a,b,c) \in O, \quad A(\cos 2a, \cos 2b, \cos 2c) = 0\} \\ &= \left\{(a,b,c), (2a,2b,2c) \in O_1^3 \text{ et } \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1,1\}^3, \quad 2\varepsilon_1 a + 2\varepsilon_2 b + 2\varepsilon_3 c \in 2\pi\mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{(a,b,c) \in O^3 \text{ et } \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{-1,1\}^3, \quad \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + \varepsilon_3 c \in \pi\mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

§ V.5 *FONCTIONS CONVEXES*

Exercice 2 :

> Soit Γ le graphe d'une fonction convexe f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Quel est le nombre de tangentes qu'on peut mener à Γ d'un point de $\mathbb{R}^2$? ■

Montrons d'abord que si $M_0 = (x_0, f(x_0))$ est un point du graphe, il ne passe par ce point qu'une seule tangente, la tangente en M_0.

Soit p la pente d'une tangente au graphe qui passe par M_0.Comme le graphe est "au-dessus" de ses tangentes, pour tout x réel : $f(x) \geq p(x - x_0) + f(x_0)$.

Pour $x > x_0$ on obtient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq p$, donc à la limite $f'(x_0) \geq p$,

pour $x < x_0$ on obtient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq p$ donc à la limite $f'(x_0) \leq p$.

La seule pente possible est donc $f'(x_0)$, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant que si $M_0 = (x_0, y_0)$ n'est pas sur le graphe, il ne passe par ce point qu'au plus deux tangentes au graphe.

Supposons qu'il y en ait trois distinctes (passant par M_0) ; leurs pentes p_1, p_2, p_3, sont bien sûr deux à deux distinctes et on peut supposer $p_1 < p_2 < p_3$.

Soient $y = p_i x + q_i$, i valant 1,2 ou 3, les équations de ces droites. Le graphe de f est toujours "au-dessus" des trois tangentes.

Si $x > x_0$, alors $f(x) \geq p_3 x + q_3 > p_2 x + q_2$; si $x < x_0$, alors $f(x) \geq p_1 x + q_1 > p_2 x + q_2$.

La tangente de pente p_2 ne peut avoir aucun point de contact avec le graphe, sauf en x_0, ce qui est aussi exclu. Il y a donc contradiction.

Il ne peut donc passer par M_0 qu'au plus deux tangentes au graphe.

Remarquons que le graphe Γ peut contenir des parties rectilignes ; cela ne met pas en cause le résultat démontré ; mais dans ce cas, le nombre des réels x tels que la tangente au point d'abscisse x passe par M_0, peut être infini.

Exercice 3 :

> Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée seconde f'' s'annule en exactement n points ($n \geq 0$), et Γ son graphe.
>
> a) Quel est le nombre maximum de points d'intersection de Γ avec une droite ?

> b) Quel est le nombre maximum de tangentes que l'on peut mener à Γ depuis un point du plan ? ■

Soit D droite, si elle est verticale (c'est-à-dire si elle a pour équation $x = x_0$), elle coupe Γ en au plus un point ; sinon elle a une équation de la forme : $y = px + q$.

Posons alors pour tout x réel, $g(x) = f(x) - px - q$. L'application g est de classe $\mathscr{C}^2$ et a même dérivée seconde que f ; g'' s'annule donc exactement en n nombres réels ; les zéros de g sont les abscisses des intersections de Γ et de la droite.

Si on pouvait trouver $n+3$ zéros distincts de g, $t_1, t_2, \cdots, t_{n+3}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+3}$, d'après le théorème de Rolle, on pourrait trouver dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, i variant de 1 à $n+2$, au moins un zéro de g'. L'application g' aurait donc au moins $n+2$ zéros. En raisonnant de manière analogue, on en déduirait que g'' a au moins $n+1$ zéros deux-à-deux distincts, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La droite D ne peut donc couper Γ qu'en au plus $n+2$ points.

b) Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ point du plan, la tangente à Γ au point d'abscisse x passe par M_0, si et seulement si : $y_0 = f(x) + (x_0 - x)f'(x)$.

Considérons l'application g définie pour tout x réel par :

$$g(x) = f(x) + (x_0 - x)f'(x) - y_0.$$

Cette application est de classe $\mathscr{C}^1$, ses zéros sont les abscisses des points de contact des tangentes qui passent par M_0. On vérifie : $g'(x) = (x_0 - x)f''(x)$.

L'application g' a donc au plus $n+1$ zéros, donc, en utilisant comme dans le a) le théorème de Rolle, on en déduit que g a au plus $n+2$ zéros.

Il y a donc au plus $n+2$ tangentes à Γ qui passent par M_0.

Exercice 9 :

> Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est logarithmiquement convexe ssi $\log f$ est convexe.
> a) Si f est logarithmiquement convexe, f est convexe. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.
> b) Montrer que, pour que f soit logarithmiquement convexe, il faut et il suffit que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α soit convexe. ■

Montrons d'abord le lemme suivant :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, (I intervalle) et $g : J \to \mathbb{R}$ croissante convexe, J intervalle tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est convexe.

Pour tous éléments x et y de I, $x<y$, et $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, comme f est convexe :

$$f(\lambda x+(1-\lambda) y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y).$$

Puisque g est croissante et convexe :

$$g(f(\lambda x+(1-\lambda) y)) \leq g(\lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)) \leq \lambda g(f(x))+(1-\lambda) g(f(y)).$$

L'application $g \circ f$ est donc bien convexe sur l'intervalle I.

Fin de la démonstration du lemme.

a) L'application exp est croissante et convexe sur $\mathbb{R}$; si $\log\circ f$ est convexe, l'application $\exp\circ \log\circ f = f$ l'est aussi, d'après le lemme.

Posons pour tout x réel >0 : $f(x)=x^{2}$, f est strictement convexe ; mais, comme pour tout $x>0$, $\log(f(x))=2 \log(x)$, $\log\circ f$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$ puisqu'elle est strictement concave. Cela prouve que la réciproque est fausse.

b) Supposons que f soit logarithmiquement convexe. Pour tout $\alpha>0$, $\alpha \log\circ f$ est convexe sur I, donc, d'après le lemme, $f^{\alpha}=\exp\circ(\alpha \log\circ f)$ est convexe.

Supposons maintenant que pour tout $\alpha>0$, f^{α} est convexe.

Pour tout $\alpha>0$, pour tous x et y dans I, et pour tout $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$:

$$f^{\alpha}(\lambda x+(1-\lambda) y) \leq \lambda f^{\alpha}(x)+(1-\lambda) f^{\alpha}(y),$$

d'où :

$$\log(f(\lambda x+(1-\lambda) y)) \leq \frac{\log\left(\lambda f^{\alpha}(x)+(1-\lambda) f^{\alpha}(y)\right)}{\alpha}.$$

Les réels x, y et λ étant fixés, posons pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$g(\alpha)=\log\left(\lambda f^{\alpha}(x)+(1-\lambda) f^{\alpha}(y)\right)$.

L'application g est dérivable en 0, $g(0)=\log(\lambda+(1-\lambda))=0$, et on calcule facilement : $\quad g'(0)=\lambda \log(f(x))+(1-\lambda) \log(f(y))$.

Donc :

$$\frac{g(\alpha)}{\alpha}=\frac{\log\left(\lambda f^{\alpha}(x)+(1-\lambda) f^{\alpha}(y)\right)}{\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 0,\, \alpha>0}{\longrightarrow} \lambda \log(f(x))+(1-\lambda) \log(f(y)).$$

D'après le théorème de prolongement des inégalités, on en déduit :

$$\log(f(\lambda x+(1-\lambda) y)) \leq \lambda \log(f(x))+(1-\lambda) \log(f(y)).$$

L'application $\log\circ f$ est donc bien convexe.

Exercice 15 :

> Soit (a_i), (b_i) des nombres réels >0 $(1 \leq i \leq n)$ tels que $0<m \leq \dfrac{b_i}{a_i} \leq M$ pour tout i entre 1 et n.

a) Montrer que $b_i^2 + mMa_i^2 \leq (M+m)a_ib_i$, et par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + mM\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq (M+m)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

b) En déduire que :

$$\frac{\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots b_n^2\right)}{\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right)^2} \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}. \blacksquare$$

a) L'inégalité $0 < m \leq \frac{b_i}{a_i} \leq M$ implique, pour tout i entre 1 et n :

$$a_i^2\left(M - \frac{b_i}{a_i}\right)\left(\frac{b_i}{a_i} - m\right) \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$(Ma_i - b_i)(b_i - ma_i) = (M+m)a_ib_i - b_i^2 - Mma_i^2 \geq 0.$$

En faisant la somme de ces inégalités on trouve :

$$(M+m)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - Mm\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

b) Posons $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ et $C = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$.

L'inégalité démontrée dans le a) s'écrit : $(M+m)C \geq B + mMA$.

Donc :

$$(M+m)^2C^2 - 4mMAB \geq (B+mMA)^2 - 4mMAB = (B - mMA)^2 \geq 0.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\frac{(M+m)^2}{4mM} \geq \frac{AB}{C^2}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre VI

FORMULES DE TAYLOR, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

§ VI.2 *COMPARAISON DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT ; NOTATIONS DE LANDAU*

Exercice 5 :

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^2}\left(x\cos^2 x + \sin^2 x\right)$.
> Démontrer que f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$, et que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$; mais que $f \underset{x\to+\infty}{\notin} O\left(\sqrt{x}\,e^{x^2}\right)$ et que $\sqrt{x}\,e^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\notin} O(f)$. ■

Minorons f pour montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$:

$$f(x) = e^{x^2}\left((x-1)\cos^2 x + 1\right) \geq e^{x^2} \text{ pour tout } x \geq 1.$$

Il est donc clair que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \left(2x\left(1 + (x-1)\cos^2 x\right) + \cos^2 x - (x-1)\sin 2x\right)e^{x^2}.$$

Pour tout $x \geq 1$, on obtient une minoration en majorant $\sin 2x$ par 1, et en minorant $\cos^2 x$ par 0. On obtient :

$$f'(x) \geq (2x - (x-1))e^{x^2} \geq (x+1)e^{x^2}.$$

L'application f est donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Posons pour $x > 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}\,e^{x^2}} = \dfrac{x\cos^2 x + \sin^2 x}{\sqrt{x}}$.

Soit pour tout n entier $x_n = \pi/2 + n\pi$. On vérifie :

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } g(x_n) = \frac{\sin^2 x_n}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit pour tout n entier > 0, $y_n = n\pi$. On vérifie :

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } g(y_n) = \frac{y_n \cos^2 y_n}{\sqrt{y_n}} = \sqrt{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Les applications g et $\frac{1}{g}$ ne sont donc pas majorées au voisinage de $+\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 7 :

a) Soit u une fonction : $I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ admettant 0 pour point d'accumulation. On suppose que $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et que pour des réels $\lambda \in \,]0,1[$, $A \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a :
$u(x) - u(\lambda x) \underset{x\to 0}{\sim} A x^\alpha$. Démontrer que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{A}{1-\lambda^\alpha} x^\alpha$.

b) En partant de $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et en multipliant par une fonction convenable, montrer en utilisant a) que $x - \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$.

c) Démontrer de la même manière que $\operatorname{sh} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$ et en déduire que $\operatorname{tg} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$ et $x - \operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$. ■

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$, tel que pour tout $x \neq 0$ dans $I \cap \,]-\eta, \eta[$,

$$1 - \varepsilon < \frac{u(x) - u(\lambda x)}{A x^\alpha} < 1 + \varepsilon.$$

Si i est un entier ≥ 0, et x un réel $\neq 0$ dans $I \cap \,]-\eta, \eta[$, alors $\lambda^i x$ est aussi dans $I \cap \,]-\eta, \eta[$, puisque 0 est point d'accumulation de I. Donc, pour tout i entier ≥ 0, et tout x réel $\neq 0$ dans $I \cap \,]-\eta, \eta[$:

$$1 - \varepsilon < \frac{u(\lambda^i x) - u(\lambda^{i+1} x)}{A \lambda^{i\alpha} x^\alpha} < 1 + \varepsilon \;,$$

ou encore $$(1-\varepsilon)\lambda^{i\alpha} < \frac{u(\lambda^i x) - u(\lambda^{i+1} x)}{A x^\alpha} < (1+\varepsilon)\lambda^{i\alpha}.$$

En faisant la somme de ces inégalités, pour i variant de 0 à n-1, on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i\alpha} < \frac{\sum_{i=0}^{n-1} u(\lambda^i x) - u(\lambda^{i+1} x)}{A x^\alpha} < (1+\varepsilon)\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{i\alpha},$$

c'est-à-dire :

$$(1-\varepsilon)\frac{1-\lambda^{n\alpha}}{1-\lambda^{\alpha}} < \frac{u(x)-u\left(\lambda^n x\right)}{Ax^{\alpha}} < (1+\varepsilon)\frac{1-\lambda^{n\alpha}}{1-\lambda^{\alpha}}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, comme $u(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, et $\lambda^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient :

$$\frac{1-\varepsilon}{1-\lambda^{\alpha}} \le \frac{u(x)}{Ax^{\alpha}} \le \frac{1+\varepsilon}{1-\lambda^{\alpha}} ,$$

ceci étant vrai pour tout x réel $\neq 0$ dans $I \cap]-\eta, \eta[$.

Ce qui précède démontre que $\dfrac{u(x)}{Ax^{\alpha}} \underset{x\to 0,\, x\in I\setminus\{0\}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-\lambda^{\alpha}}$ ou encore :

$$u(x) \underset{x\to 0,\, x\in I\setminus\{0\}}{\sim} \frac{Ax^{\alpha}}{1-\lambda^{\alpha}}.$$

N.B. On peut facilement étendre ce résultat au cas où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, si l'intervalle I est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Posons pour tout $x \neq 0$, $u(x) = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$. On vérifie que $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et :

$$u(x)-u\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} - \frac{\sin x}{x} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right).$$

Comme $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} 1$, on voit que $u(x)-u\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \dfrac{x^2}{8}$.

Les hypothèses du a) étant réunies, on en déduit que :

$$u(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{6}, \text{ donc } x - \sin x = x\,u(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

c) Nous poserons ici pour tout $x \neq 0$, $u(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} - 1$. On sait que $u(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} 0$ et :

$$u(x)-u\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh} x}{x} - \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{x}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}-1\right).$$

En admettant : $\operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, on en déduit : $u(x)-u\left(\dfrac{x}{2}\right) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \dfrac{x^2}{8}$.

Les hypothèses du a) étant vérifiées, on trouve comme ci-dessus :

$$u(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\frac{x^2}{8} = \frac{x^2}{6}, \text{ donc } \operatorname{sh} x - x = x\,u(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$

Démontrons que $\operatorname{tg} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$.

On peut écrire :

$$\operatorname{tg} x - x = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}(\sin x - x + x(1-\cos x)).$$

On en déduit facilement que :

$$\operatorname{tg} x - x \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3 = \frac{x^3}{3}.$$

De manière analogue :

$$x - \operatorname{th} x = \frac{x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x}(x(\operatorname{ch} x - 1) - (\operatorname{sh} x - x)),$$

d'où :

$$x - \operatorname{th} x \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3 = \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 13 :

a) Montrer que l'équation $\operatorname{cotg} x = \log x$ possède , pour chaque entier $n \geq 0$, une unique racine x_n dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ et que $x_n - n\pi \underset{n\to\infty}{\to} 0$

b) Montrer que $x_n - n\pi \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\log n}$. ■

a) Sur chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$, la fonction cotg est strictement décroissante et la fonction log est strictement croissante, la différence est donc strictement décroissante.

On voit facilement que pour tout n entier, $\operatorname{cotg} x - \log x \underset{x\to n\pi,\, x>n\pi}{\longrightarrow} +\infty$ (le cas $n = 0$ est particulier) et $\operatorname{cotg} x - \log x \underset{x\to(n+1)\pi,\, x<(n+1)\pi}{\longrightarrow} -\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue cotg− log admet un unique zéro x_n dans chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$.

On peut remarquer que pour tout n entier :

$0 = \operatorname{cotg}(\pi/2 + n\pi) < \log(\pi/2 + n\pi)$, donc $n\pi < x_n < \pi/2 + n\pi$.

Posons $y_n = x_n - n\pi$. Comme $\operatorname{tg} y_n = \frac{1}{\log(x_n)}$, et $0 < y_n < \pi/2$, on en déduit :

$$(1)\ y_n = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\log(x_n)}\right).$$

Or $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, donc $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

b) Reprenons la même égalité : $y_n = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\log(x_n)}\right)$.

Comme $\frac{1}{\log(x_n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit $y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\log(x_n)}$.

Montrons que $\log(x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \log n$.

On a l'encadrement : $\log(n\pi) \le \log(x_n) \le \log(\pi/2 + n\pi)$.

Or $\log(n\pi) = \log(\pi) + \log(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \log(n)$,

et $\log(n\pi + \pi/2) = \log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \log(\pi) + \log(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \log(n)$,

donc $\log(x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \log(n)$.

Cela termine la démonstration.

Nous pouvons assez facilement préciser le comportement asymptotique de la suite (y_n).

Soit (z_n) la suite définie pour tout n entier > 0 par : $z_n = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\log(n\pi)}\right)$.

Montrons que pour tout k entier ≥ 0, $y_n - z_n \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{1}{\log^k(n\pi)}\right)$.

Les suites (y_n) et (z_n) tendent toutes les deux vers 0 quand n tend vers l'infini, donc :

$$z_n - y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \operatorname{tg}(z_n) - \operatorname{tg}(y_n),$$

et :

$$\operatorname{tg}(z_n) - \operatorname{tg}(y_n) = \frac{1}{\log(n\pi)} - \frac{1}{\log(y_n + n\pi)} = \frac{\log(y_n + n\pi) - \log(n\pi)}{\log(n\pi)\log(y_n + n\pi)} =$$

$$= \frac{\log\left(1 + \frac{y_n}{n\pi}\right)}{\log(n\pi)\log(y_n + n\pi)} \sim \frac{1}{\log^2(n\pi)}\frac{y_n}{n\pi} \sim \frac{1}{\log^3(n\pi)}\frac{1}{n\pi}.$$

On en déduit le résultat annoncé, puisque pour tout k entier :

$$\log^{k-3}(n\pi)\frac{1}{n\pi} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Soit k entier > 0, on sait que :

$$\operatorname{Arctg}(x)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}\right)\underset{x\to 0}{\in} o\left(x^{2k+1}\right),$$

donc :

$$z_n-\left(\frac{1}{\log(n\pi)}-\frac{1}{3}\frac{1}{\log^3(n\pi)}+\frac{1}{5}\frac{1}{\log^5(n\pi)}-\cdots+\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{1}{\log^{2k+1}(n\pi)}\right)$$

$$\underset{x\to 0}{\in} o\left(\frac{1}{\log^{2k+1}(n\pi)}\right).$$

D'après ce qui précède, il en est de même pour la suite (y_n).

§ VI.3 *FORMULES DE TAYLOR*

Exercice 1 :

> Le fonction $f: x \mapsto e^x-1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0)=0$. D'après le théorème de division la fonction $g: x \mapsto \dfrac{e^x-1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0)=1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ Montrer que les dérivées de g sont partout > 0 sur $\mathbb{R}$. ■

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $0 \in I$, et une application $f: I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0)=0$, et dont toutes les dérivées sont > 0 sur I, montrons que l'application g définie sur I par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0)=f'(0)$, a la même propriété (elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'après le théorème de division).

Pour tout x dans I, $f(x)=xg(x)$.

En dérivant k+1 fois, k entier ≥ 0, d'après la formule de Leibnitz, pour tout x dans I :

$$xg^{(k+1)}(x)+(k+1)g^{(k)}(x)=f^{(k+1)}(x).$$

Supposons maintenant x fixé dans I, et posons pour $t \in [0,1]$, $\varphi_k(t)=t^{k+1}g^{(k)}(tx)$.

En dérivant par rapport à t on obtient :

$$\varphi_k'(t)=t^{k+1}xg^{(k+1)}(tx)+(k+1)t^k g^{(k)}(tx)=t^k f^{(k+1)}(tx).$$

Donc $\varphi_k'(t)>0$ si $0<t\leq 1$, φ_k est strictement croissante sur $[0,1]$, et comme $\varphi_k(0)=0$, on en déduit finalement $\varphi_k(1)=g^{(k)}(x)>0$.

On pouvait aussi écrire que pour tout $x \in I$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$. En dérivant k fois sous le signe somme (théorème VIII.5.2), on obtient pour tout $x \in I$:

$$g^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k f^{(k+1)}(tx)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Nous pouvons appliquer ici ce résultat, puisque toutes les dérivées de l'application exp sont > 0 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

> Démontrer que pour α et β réels > 0 donnés, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(0) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ et
> $$f(x) = \exp\left(\frac{-1}{|x|^{\alpha}\,|\log|x|\,|^{\beta}}\right) \text{ si } x \notin \{-1, 0, 1\} \text{ est de classe } \mathscr{C}^{\infty}.$$ ■

Nous pouvons dégager trois lemmes pour démontrer ce résultat.
Lemme 1.

> Soit a réel, I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et une application $\varphi : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. On note $\mathscr{E}_{\varphi}$ l'ensemble des applications $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\lambda > 0$, $f(x)\exp(-\lambda\varphi(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Alors $\mathscr{E}_{\varphi}$ est une sous $\mathbb{R}$-algèbre unitaire de l'algèbre des applications de $I \setminus \{a\}$ dans $\mathbb{R}$.

Il est assez évident que $\mathscr{E}_{\varphi}$ est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application constante égale à 1 est dans $\mathscr{E}_{\varphi}$ car pour tout $\lambda > 0$, $\lambda\varphi(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\exp(-\lambda\varphi(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Si les applications u et v sont dans $\mathscr{E}_{\varphi}$, et $\lambda > 0$,

$$u(x)v(x)\exp(-\lambda\varphi(x)) = u(x)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\varphi(x)\right)v(x)\exp\left(-\frac{\lambda}{2}\varphi(x)\right) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0,$$

donc le produit uv est bien dans $\mathscr{E}_{\varphi}$.
Remarquons que $\varphi \in \mathscr{E}_{\varphi}$, et que donc, $\mathscr{E}_{\varphi}$ contient les polynômes en φ.
Fin du lemme 1.

Lemme 2.

> On garde les mêmes notations que dans le lemme 1. On suppose de plus que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $I \setminus \{a\}$ et que pour tout k entier > 0, $\varphi^{(k)} \in \mathscr{E}_{\varphi}$(la condition est automatiquemei

> $k = 0$). Dans ces conditions, l'application $f : I \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \exp(-\varphi(x))$ si $x \in I \setminus \{a\}$ et $f(a) = 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et toutes ses dérivées sont nulles en a.

L'application f est, d'après les hypothèses, visiblement continue en a, et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I \setminus \{a\}$. Comme on le voit dans la démonstration du théorème de division, il suffit de démontrer que pour tout entier $k > 0$, $f^{(k)}(x) \underset{x \to a}{\to} 0$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $k, 0 \leq k \leq n$ la restriction à $I \setminus \{a\}$ de l'application $x \mapsto f^{(k)}(x) \exp \varphi(x)$ est dans $\mathscr{E}_\varphi$.

Pour $n = 0$, cela signifie : $x \mapsto f(x)\exp(\varphi(x)) = 1$ est dans $\mathscr{E}_\varphi$, ce qui est vrai.

Supposons le résultat vrai pour $n \geq 0$. En dérivant n fois l'identité :

$$f'(x) = -\varphi'(x)\exp(-\varphi(x)) = -\varphi'(x)f(x),$$

vraie pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on obtient (Formule de Leibnitz) :

$$f^{(n+1)}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k+1)}(x) f^{(n-k)}(x),$$

d'où :

$$f^{(n+1)}(x)\exp(\varphi(x)) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k+1)}(x) f^{(n-k)}(x)\exp(\varphi(x)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout k entre 0 et n, $f^{(n-k)} \times (\exp \circ \varphi)$ est dans $\mathscr{E}_\varphi$, par hypothèse $\varphi^{(k+1)}$ aussi. Comme $\mathscr{E}_\varphi$ est une sous-algèbre, on en déduit que $f^{(n+1)} \times (\exp \circ \varphi)$ est dans $\mathscr{E}_\varphi$. Cela achève la démonstration par récurrence.

Cela prouve en particulier que pour tout n entier :

$$f^{(n)}(x)\exp\varphi(x)\exp(-\varphi(x)) = f^{(n)}(x) \underset{x \to a}{\to} 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Fin du lemme 2.

Lemme 3

> On garde les mêmes notations que dans le lemme 2. Si pour tout k entier > 0, il existe $\eta > 0$ tel que $\varphi^{(k)} \underset{x \to a}{\in} O(\varphi^\eta)$, l'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Un entier $k > 0$ étant donné, soit $\eta > 0$ tel que $\varphi^{(k)} \underset{x \to a}{\in} O(\varphi^\eta)$. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\varphi^{\eta}(x)\exp(-\lambda\varphi(x)) = \left(\varphi(x)\exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\varphi(x)\right)\right)^{\eta} \underset{x\to a}{\to} 0.$$

Il est clair que cela implique $\varphi^{(k)} \in \mathscr{C}_{\varphi}$. D'après le lemme 2, on en déduit que l'application f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$.

Fin du lemme 3.

Dans l'exercice proposé, il suffira de démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur les intervalles $]0,+\infty[$ et $]-1,1[$. Comme f est paire, elle sera aussi de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $]-\infty,0[$.

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{|x|^{\alpha}}\dfrac{1}{|\log|x||^{\beta}}$ pour $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$. Cette application est bien de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. Etablissons que $\varphi^{(n)}$ est de la forme :

$$(1)\quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(\log|x|)}{(x\log|x|)^n}\varphi(x),$$

où P_n est un polynôme de degré n.

C'est vrai pour $n = 0$ en posant $P_0(x) = 1$.

Supposons la propriété vraie pour n, et démontrons qu'elle est vraie à l'ordre n+1. En dérivant l'identité (1) on obtient :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{\frac{1}{x}P_n'(\log|x|)}{(x\log|x|)^n}\varphi(x) - n\frac{P_n(\log|x|)}{(x\log|x|)^{n+1}}(1+\log|x|)\varphi(x) + \frac{P_n(\log|x|)}{(x\log|x|)^n}\varphi'(x).$$

Comme d'autre part :

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-\alpha}{x} + \frac{-\beta}{x\log|x|} = -\frac{\alpha\log|x|+\beta}{x\log|x|}.$$

On obtient :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \left[\frac{P_n'(\log|x|)}{x(x\log|x|)^n} - n\frac{P_n(\log|x|)}{(x\log|x|)^{n+1}}(1+\log|x|) - \frac{P_n(\log|x|)}{(x\log|x|)^n}\frac{(\alpha\log|x|+\beta)}{x\log|x|}\right]\varphi(x),$$

ou encore :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{P_n'(\log|x|)\log|x| - nP_n(\log|x|)(1+\log|x|) - P_n(\log|x|)(\alpha\log|x|+\beta)}{(x\log|x|)^{n+1}}\varphi(x).$$

On obtient l'égalité voulue en posant :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= XP_n'(X) - n(1+X)P_n(X) - (\alpha X+\beta)P_n(X) \\ &= XP_n'(X) - ((\alpha+n)X+\beta+n)P_n(X) \end{aligned}$$

Il est clair que comme P_n est de degré n, P_{n+1} est degré n+1 car $\alpha > 0$.

Montrons maintenant en utilisant le lemme 3, que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur I = $]0,+\infty[$ (la difficulté est en a = 1).

L'application φ est ici : $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}|\log x|^{\beta}}$, définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Elle est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi(x) \underset{x\to 1,\, x\neq 1}{\longrightarrow} +\infty$. Il reste à démontrer que pour tout k entier >0, il existe $\eta>0$ tel que $\varphi^{(k)}\in O(\varphi^{\eta})$ au voisinage de 1.

D'après le calcul fait ci-dessus :

$$\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi^{\eta}(x)}=\frac{P_k(\log x)}{(x\log x)^k}\left(x^{\alpha}|\log x|^{\beta}\right)^{\eta-1}.$$

L'entier k étant donné, il suffit de choisir η tel que $\beta(\eta-1)>k$, c'est-à-dire $\eta>\dfrac{k}{\beta}+1$.

Montrons maintenant, toujours en utilisant le lemme 3, que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I=]-1,1[$ (la difficulté est en $a=0$).

L'application φ est ici : $\varphi(x)=\dfrac{1}{|x|^{\alpha}|\log|x||^{\beta}}$, définie sur $]-1,\ 1[\setminus\{0\}$. Elle est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi(x) \underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow} +\infty$. Il reste à démontrer que pour tout k entier >0, il existe $\eta>0$ tel que $\varphi^{(k)}\in O(\varphi^{\eta})$ au voisinage de 0.

D'après le calcul fait ci-dessus :

$$\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\varphi^{\eta}(x)}=\frac{P_k(\log|x|)}{(x\log|x|)^k}\left(|x|^{\alpha}|\log|x||^{\beta}\right)^{\eta-1}.$$

Le polynôme P_k est de degré k, si μ est son coefficient dominant :

$$\frac{P_k(\log|x|)}{(\log|x|)^k}\underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\longrightarrow}\mu,$$

et par conséquent $\dfrac{\left|\varphi^{(k)}(x)\right|}{\varphi^{\eta}(x)}\underset{x\to 0,\, x\neq 0}{\sim}|\mu|\,|x|^{\alpha(\eta-1)-k}|\log|x||^{\beta(\eta-1)}$.

Pour que la condition du lemme 3 soit réalisée, il suffit de choisir η tel que : $\alpha(\eta-1)-k>0$, c'est-à-dire $\eta>\dfrac{k}{\alpha}+1$.

L'application f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $I=]-1,1[$. Comme elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, et sur l'intervalle $]-\infty,0[$ par parité, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

> Si $\varphi:]-\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ est une fonction ($0<\alpha\leq\infty$, $0<\beta\leq\infty$), pour tout réel h tel que $h<\mathrm{Min}(\alpha,\beta)$ notons $\Delta_h\varphi$ la fonction :
>
> $$]-\alpha+|h|,\beta-|h|[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\varphi(x+h)-\varphi(x)$$

On donne un réel $R>0$ et une fonction $f:]-R, R[\to \mathbb{R}$, n fois dérivable ($n \geq 1$).

a) Soit $h_1, h_2, \cdots, h_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} |h_i| < R$. Montrer qu'il existe des réels $\theta_i \in]0,1[$ ($1 \leq i \leq n$) tels que :

$\Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f(0) = h_1 h_2 \cdots h_n f^{(n)}(\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \cdots + \theta_n h_n)$.

b) Soit h un réel tel que $n|h| < R$. Montrer que pour tout x dans l'intervalle $]-R+n|h|, R-n|h|[$ il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h) = h^n f^{(n)}(x+n\theta h). \blacksquare$$

Remarquons de manière générale (en suivant les notations de l'énoncé) que si $\varphi:]-\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ est dérivable , l'application $\Delta_h \varphi$ est aussi dérivable sur $]-\alpha+|h|, \beta-|h|[$ et $(\Delta_h \varphi)' = \Delta_h(\varphi')$.

a) Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ la proposition suivante H_n :

Pour tout réel $R>0$ et toute fonction $f:]-R, R[\to \mathbb{R}$ n fois dérivable, pour tout n-uplet $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ de réels tel que $\sum_{i=1}^{n} |h_i| < R$, l'application $\Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f$ est définie sur $\left]-R+\sum_{i=1}^{n} |h_i|, R-\sum_{i=1}^{n} |h_i|\right[$ et pour tout x réel dans cet intervalle, il existe un n-uplet d'éléments de $]0,1[$, $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$, tel que :

$$\Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f(x) = h_1 h_2 \cdots h_n f^{(n)}(x + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \cdots + \theta_n h_n).$$

Montrons que l'assertion H_1 est vraie.

Soit $R>0$ et une fonction $f:]-R, R[\to \mathbb{R}$ dérivable ; pour tout réel $h, |h| < R$, l'application $\Delta_h f$ est bien définie sur $]-R+|h|, R-|h|[$ et pour tout x dans cet intervalle, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, un réel θ dans $]0,1[$ tel que :

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Supposons que la propriété H_n soit vraie.

Soit $R>0$, une fonction $f:]-R, R[\to \mathbb{R}$, n+1 fois dérivable, et un n+1–uplet $(h_1, h_2, \cdots, h_{n+1})$ de réels tel que $\sum_{i=1}^{n+1} |h_i| < R$.

Posons $g = \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f$. D'après l'hypothèse de récurrence, cette application est définie sur l'intervalle $\left]-R+\sum_{i=1}^{n}|h_i|, R-\sum_{i=1}^{n}|h_i|\right[$. D'après la remarque préliminaire, elle est dérivable et : $g' = \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1}(f')$.

D'après la propriété H_1, l'application $\Delta_{h_{n+1}} g = \Delta_{h_{n+1}} \circ \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1}(f)$ est définie sur $\left]-R+\sum_{i=1}^{n+1}|h_i|, R-\sum_{i=1}^{n+1}|h_i|\right[$ et pour tout x dans cet intervalle, on peut trouver un élément θ_{n+1} de $]0,1[$ tel que :

$$\Delta_{h_{n+1}} \circ \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f(x) = h_{n+1} g'(x+\theta_{n+1}h_{n+1})$$
$$= h_{n+1} \cdot \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f'(x+\theta_{n+1}h_{n+1}).$$

La propriété H_n est vraie pour l'application f' qui est dérivable n fois, en remplaçant x par $x+\theta_{n+1}h_{n+1}$ qui est bien dans l'intervalle $\left]-R+\sum_{i=1}^{n}|h_i|, R-\sum_{i=1}^{n}|h_i|\right[$. Il existe donc un n-uplet d'éléments de $]0,1[$, $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$, tel que :

$$\Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f'(x+\theta_{n+1}h_{n+1})$$
$$= h_1 h_2 \cdots h_n f'^{(n)}(x+\theta_{n+1}h_{n+1}+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\cdots+\theta_n h_n).$$

On a donc bien prouvé l'existence dans l'intervalle $]0,1[$, d'un n+1-uplet de réels, $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n+1})$, tel que :

$$\Delta_{h_{n+1}} \circ \Delta_{h_n} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f(x) = h_1 h_2 \cdots h_n h_{n+1} f^{(n+1)}(x+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\cdots+\theta_n h_n+\theta_{n+1}h_{n+1}).$$

La propriété H_{n+1} est donc vraie.

La propriété H_n est donc vraie pour tout $n \geq 1$. Elle est vraie en particulier pour $x = 0$, ce qui est la proposition à démontrer.

b) Si h est un réel tel que $n|h| < R$, d'après a), l'application $\Delta_h^n f$ est définie sur $]-R+n|h|, R-n|h|[$ et pour tout x dans cet intervalle, il existe un n-uplet d'éléments de $]0,1[$, $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)$, tel que :

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(x+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\cdots+\theta_n h_n).$$

Si on pose $\theta = \dfrac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}$, qui est élément de $]0,1[$, on obtient :

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(x+n\theta h).$$

Montrons maintenant que pour tout x dans l'intervalle $]-R+n|h|, R-n|h|[$:

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h),$$

ce qui démontrera le résultat demandé.

Soit une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; notons $T_h\varphi$ l'application telle que $T_h\varphi(x) = \varphi(x+h)$ pour tout x réel. On voit que $\Delta_h = T_h - Id$, d'où, puisque Δ_h et Id commutent, pour tout n entier :

$$(\Delta_h)^n = (T_h - Id)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T_h^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} T_{(n-k)h}.$$

Donc pour toute application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tout x réel :

$$(\Delta_h)^n(\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi(x+(n-k)h).$$

Prenons pour φ l'application qui coïncide avec f sur l'intervalle $]-R, R[$ et qui est nulle à l'extérieur . Soit h est un réel tel que $n|h| < R$; on vérifie facilement par récurrence sur k, que pour tout entier k entre 0 et n, les applications $(\Delta_h)^k(\varphi)$ et $(\Delta_h)^k(f)$ coïncident sur l'intervalle $]-R+k|h|, R-k|h|[$.

Donc pour tout x dans l'intervalle $]-R+n|h|, R-n|h|[$, $(\Delta_h)^n(f)(x) = (\Delta_h)^n(\varphi)(x)$.

D'autre part, pour tout k entier entre 0 et n et tout x réel dans l'intervalle $]-R+n|h|, R-n|h|[$, $\varphi(x+(n-k)h) = f(x+(n-k)h)$.

On en déduit l'égalité annoncée :

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h^n \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi(x+(n-k)h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+(n-k)h).$$

Cela termine la démonstration de cette question b).

Exercice 4 :

> On reprend les notations de l'exercice 3. On donne $R \in \overline{\mathbb{R}}$ $(0 < R \le \infty)$ et $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'une fonction $f :]-R, R[\to K^N$ $(N \ge 1)$($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), n-1 fois dérivable sur $]-R, R[$, et telle que $f^{(n)}(0)$ existe. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ $\left(\alpha < \dfrac{R}{n}\right)$ tel que
>
> $\forall (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in [-\alpha, \alpha]^n$:
>
> $$v\left[\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n} f\right)(0) - h_1h_2\cdots h_n f^{(n)}(0)\right] \le \varepsilon |h_1h_2\cdots h_n|,$$
>
> où v désigne une norme standard de K^N. ■

Si P est une application polynomiale de degré $\le n$, c'est-à-dire si ses N composantes sont polynomiales de degré $\le n$, l'application $P^{(n)}$ est constante. D'après l'exercice 3a), appliqué à chaque coordonnée réelle de P :

$$\forall (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in [-\alpha, \alpha]^n,\ \Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} P(0) = h_1h_2\cdot$$

Supposons que le résultat soit démontré pour toutes les applications g dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n sont nulles en 0. Soit f vérifiant les conditions de l'énoncé, le résultat sera vrai pour l'application g : $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = f(x) - P(x)$ et pour l'application polynomiale P donc, par linéarité, pour f.

Démontrons ce qui est demandé, dans le cas où toutes les dérivées de l'application f sont nulles en 0.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

> Soit a réel > 0 et g application dérivable p fois sur $]-a, a[$.
>
> Pour tout p-uplet $(h_1, h_2, \cdots, h_p)$ tel que $\sum_{i=1}^{p} |h_i| < a$, et pour tout x dans l'intervalle $\left] -a + \sum_{i=1}^{p} |h_i|, a - \sum_{i=1}^{p} |h_i| \right[$:
>
> $$v\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_p} g(x)\right) \leq |h_1 h_2 \cdots h_p| \sup\left\{ v\left(g^{(p)}(t)\right), t \in \left[x - \sum_{i=1}^{p} |h_i|, x + \sum_{i=1}^{p} |h_i| \right] \right\}.$$

Démontrons cette propriété par récurrence sur $p \geq 1$.

Pour $p = 1$, c'est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis (vectoriel). Supposons la propriété vraie pour p-1.

Soit g une application dérivable p fois sur $]-a, a[$ et $(h_1, h_2, \cdots, h_p)$ un p-uplet tel que $\sum_{i=1}^{p} |h_i| < a$. Posons $\varphi = \Delta_{h_p} g$, définie sur $\left] -a + |h_p|, a - |h_p| \right[$.

D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\sum_{i=1}^{p-1} |h_i| < a - |h_p|$, pour tout x dans $\left] -a + \sum_{i=1}^{p} |h_i|, a - \sum_{i=1}^{p} |h_i| \right[$: $v\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{p-1}} \varphi(x)\right) \leq$

$$|h_1 h_2 \cdots h_{p-1}| \sup\left\{ v\left(\varphi^{(p-1)}(t)\right), t \in \left[x - \sum_{i=1}^{p-1} |h_i|, x + \sum_{i=1}^{p-1} |h_i| \right] \right\}.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis (vectoriel) on établit que pour tout t dans l'intervalle $\left[x - \sum_{i=1}^{p-1} |h_i|, x + \sum_{i=1}^{p-1} |h_i| \right]$:

$$v\left(\varphi^{(p-1)}(t)\right) = v\left(g^{(p-1)}(t + h_p) - g^{(p-1)}(t)\right) \leq |h_p| M,$$

où :

$$M = \sup\left\{ \nu\left(\varphi^{(p)}(t)\right), t \in \left[x - \sum_{i=1}^{p} |h_i|, x + \sum_{i=1}^{p} |h_i| \right] \right\}.$$

Comme : $\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{p-1}}\varphi = \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{p-1}}\Delta_{h_p} g$, cela établit la propriété à l'ordre p.

Fin de la démonstration du lemme.

Reprenons la démonstration principale (dans le cas où toutes les dérivées de l'application f sont nulles en 0, y compris $f(0)=0$).

Comme $\dfrac{f^{(n-1)}(t)}{t} \underset{x\to 0}{\to} f^{(n)}(0)=0$, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $\alpha>0, (n\alpha<R)$, tel que pour tout t dans l'intervalle $[-n\alpha, n\alpha]$, $\nu\left(f^{(n-1)}(t)\right) \le \dfrac{\varepsilon}{2n}|t|$.

Si $n = 1$, c'est la propriété demandée, en remplaçant t par h_1. Nous supposerons dans la suite que $n > 1$.

Soit $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ un n-uplet de réels dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. Les opérateurs linéaires Δ_h, pour différentes valeurs de h, commutant entre eux (voir exercice 3 : $\Delta_h = T_h - Id$), on peut supposer que $|h_n| = \max\limits_{i\in\{1,\cdots,n\}} |h_i|$.

Posons $g = \Delta_{h_n} f$; en appliquant le lemme dans le cas où $p = n - 1 (\ge 1)$, on trouve :

$$\nu\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{n-1}} g(0)\right) \le |h_1 h_2 \cdots h_{n-1}| \sup\left\{ \nu\left(g^{(n-1)}(t)\right), t \in \left[-\sum_{i=1}^{n-1} |h_i|, \sum_{i=1}^{n-1} |h_i| \right] \right\}.$$

Or pour tout t dans $\left[-\sum_{i=1}^{n-1} |h_i|, \sum_{i=1}^{n-1} |h_i| \right]$, comme t et $t+h_n$ sont dans $[-n\alpha, n\alpha]$:

$$\nu\left(g^{(n-1)}(t)\right) = \nu\left(f^{(n-1)}(t+h_n) - f^{(n-1)}(t)\right) \le \frac{\varepsilon}{2n}\left(|t+h_n| + |t|\right).$$

En utilisant le fait que $|h_n| = \max\limits_{i\in\{1,\cdots,n\}} |h_i|$, on obtient :

$$\nu\left(g^{(n-1)}(t)\right) \le \frac{\varepsilon}{2n}(2n-1)|h_n|.$$

On en déduit :

$$\nu\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{n-1}} g(0)\right) \le \varepsilon |h_1 h_2 \cdots h_{n-1} h_n|.$$

Or :

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{n-1}} g(0) = \Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{h_n} f(0).$$

Donc, pour tout $\varepsilon>0$ on peut trouver un réel $\alpha>0, (n\alpha<R)$, tel que pour tout $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$, n-uplet de réels dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$,

$$v\left(\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_{n-1}}\Delta_{h_n}f(0)\right)\leq \varepsilon\left|h_1h_2\cdots h_{n-1}h_n\right| .$$

Cela termine donc la démonstration.

Exercice 8 :

On considère la fonction $f :]0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que pour $n\geq 1$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, où P_{n-1} est un polynôme de degré n-1 à coefficients entiers. Etablir les relations :

(1) $P_n(x)=x^2P'_{n-1}(x)-(2nx-1)P_{n-1}(x)$

(2) $P'_n(x)=-n(n+1)P_{n-1}(x)$

(3) $x^2P''_n(x)-(2nx-1)P'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0$

et déduire de (3) le calcul des coefficients de P_n.

b) En appliquant le théorème de Rolle à f' sur $[\,0,+\infty\,]$, montrer que P_1 admet une racine réelle sur $]0,+\infty[$, puis par récurrence que, pour tout $n\geq 2$, le polynôme P_n est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$, que ses racines sont simples et sont toutes >0, et séparées par celles de P_{n-1}. On range les racines $\left(\zeta_{n,k}\right)_{1\leq k\leq n}$ de P_n par ordre croissant, de sorte que $0<\zeta_{n,1}<\zeta_{n,2}<\cdots<\zeta_{n,n}$. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ fixé, montrer que $\zeta_{n,p}\underset{n\to\infty,\,n\geq p}{\downarrow}0$, la décroissance étant stricte.

c) Pour $q\in\mathbb{N}$ fixé, étudiez de même la suite $\left(\zeta_{n,n-q}\right)_{q\in\mathbb{N},\,n\geq q}$. ■

a) Calculons la dérivée de f : $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^2}f(x)$.

Démontrons par récurrence sur n la propriété. Pour n = 1 elle est vraie : on pose $P_0(x)=1$, qui est bien un polynôme à coefficients entiers de degré 0.

Supposons que $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}f(x)$, ($n$ > 0) où P_{n-1} est un polynôme de degré n-1 à coefficients entiers. En dérivant nous obtenons :

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{x^2P'_{n-1}(x)-(2nx-1)P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}}f(x).$$

Le polynôme :

$$P_n(x)=x^2P'_{n-1}(x)-(2nx-1)P_{n-1}(x),$$

est à coefficients entiers. Il est clairement de degré $\leq n$. Montrons qu'il est exactement de degré n. Si c_{n-1} est le coefficient dominant de P_{n-1}, du monôme de degré n dans P_n est $(n-1)c_{n-1} - 2nc_{n-1} = -(n+1)c_{n-1} \neq 0$ (le cas $n = 1$ est particulier mais ne fait pas exception).

Cela démontre que la propriété est vraie pour n+1.

La propriété est donc vraie par récurrence pour tout $n \geq 1$.

On peut remarquer que le coefficient dominant de P_n est $c_n = (-1)^n(n+1)!$.

Etablissons maintenant la relation (2).

Constatons que pour tout $x > 0$, $x^2 f'(x) = f(x)$. Pour $n \geq 2$, en dérivant n fois cette identité, on obtient (formule de Leibnitz) pour tout $x > 0$:

$$x^2 f^{(n+1)}(x) + 2nx\, f^{(n)}(x) + 2\frac{n(n-1)}{2} f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x).$$

En utilisant la définition de la suite de polynômes (P_n), on trouve facilement que pour tout $x > 0$:

$$P_n(x) + (2nx-1)P_{n-1}(x) + n(n-1)x^2 P_{n-2}(x) = 0.$$

En comparant avec l'identité (1) on voit que :

$$x^2 P_{n-1}'(x) = -n(n-1)x^2 P_{n-2}(x).$$

Comme ceci est vrai pour tout $n \geq 2$ et $x > 0$, on en déduit, pour tout $n \geq 1$, l'égalité des polynômes : (2) $\qquad P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x)$.

Etablissons l'identité (3).

En dérivant l'identité (2) on obtient : $P_n''(x) = -n(n+1)P_{n-1}'(x)$.

Et en multipliant (1) par $n(n+1)$:

$$\begin{aligned} n(n+1)P_n(x) &= n(n+1)x^2 P_{n-1}'(x) - (2nx-1)n(n+1)P_{n-1}(x) \\ &= -x^2 P_n''(x) + (2nx-1)P_n'(x). \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq 1$:

$$x^2 P_n''(x) - (2nx-1)P_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Déterminons maintenant les coefficients de P_n. Posons, n étant fixé, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

La relation (3) s'écrit :

$$x^2 \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k x^{k-2} - (2nx-1)\sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1} + n(n+1)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

En faisant entrer le facteur x^2 dans le premier terme, et en profitant de ce que $k(k-1)$ est nul pour $k = 0$ et $k = 1$, on peut faire partir de 0 l'indice de cette somme. De manière analogue :

$$(2nx-1)\sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1} = 2n\sum_{k=0}^{n} k\, a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2-k-2nk+n^2+n)a_kx^k=-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k .$$

On reconnaît que :

$$k^2-k-2nk+n^2+n=(n-k)^2+(n-k)=(n-k)(n-k+1).$$

Donc pour tout entier $k \leq n$ -1 :

$$a_{k+1}=-\frac{(n-k)(n-k+1)}{k+1}a_k.$$

La relation (1) montre que pour tout $n \geq 1$, $P_n(0)=P_{n-1}(0)$, donc pour tout $n \geq 1$, $P_n(0)=P_0(0)=1$. On a donc ici $a_0=1$.

On déduit alors de la formule de récurrence trouvée que le coefficient de degré k dans P_n, est : $a_{n,k}=\dfrac{(-1)^k}{k!}\dfrac{n+1}{n-k+1}\dfrac{(n!)^2}{(n-k)!^2}=\dfrac{(-1)^k}{k!}\dfrac{(n+1)!n!}{(n-k+1)!(n-k)!}$.

On peut vérifier que :

$$c_n=a_{n,n}=\frac{(-1)^n}{n!}\frac{n+1}{1}\frac{(n!)^2}{0!^2}=(-1)^n(n+1)!$$

b) L'identité (1) donne pour n = 1 : $P_1(x)=1-2x$ qui a un zéro réel unique $\zeta_{1,1}=\dfrac{1}{2}$.

Supposons que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n ait exactement n zéros réels tous simples et > 0, que nous notons dans l'ordre : $0<\zeta_{n,1}<\zeta_{n,2}<\cdots<\zeta_{n,n}$. L'application $f^{(n+1)}$ prend la valeur 0 en chacun des $\zeta_{n,i}$, de plus il est clair que $f^{(n+1)}(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}0$ et $f^{(n+1)}(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Le théorème de Rolle, ou le théorème de Rolle à l'infini (§V.1 exercice 1) démontre l'existence dans chacun des intervalles $\left]0,\zeta_{n,1}\right[$, $\left]\zeta_{n,i},\zeta_{n,i+1}\right[$ pour i variant de 1 à n-1 et $\left]\zeta_{n,n},+\infty\right[$, d'au moins un réel en lequel $f^{(n+2)}$ prend la valeur 0, donc d'un zéro de P_{n+1}. Comme ce polynôme est de degré n+1, il a au plus $n+1$ zéros ; ce polynôme a donc exactement n+1 zéros, exactement 1 dans chacun de ces intervalles. Si nous notons $\left(\zeta_{n+1,i}\right)_{1\leq i\leq n+1}$ la famille croissante des zéros de P_{n+1}, on a donc :

$$0<\zeta_{n+1,1}<\zeta_{n,1}<\zeta_{n+1,2}<\zeta_{n,2}<\cdots<\zeta_{n,i}<\zeta_{n+1,i+1}<\zeta_{n,i+1}<\cdots<\zeta_{n,n}<\zeta_{n+1,n+1}.$$

Cela termine la démonstration par récurrence.

On voit bien que pour tout i fixé, la suite $\left(\zeta_{n,i}\right)_{n\geq i}$ est strictement décroissante et a donc une limite ≥ 0. On voit de même que, pour q fixé, la suite $\left(\zeta_{n,n-q}\right)$ est strictement croissante.

Montrons que pour p fixé $\zeta_{n,p} \underset{n\to\infty,\, n\geq p}{\longrightarrow} 0$.

Pour $p \geq 0$, introduisons le polynôme symétrique élémentaire $\pi_{n-p}(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \cdots, \zeta_{n,n})$, homogène de degré $n-p$. C'est une somme de termes tous strictement positifs, dans lesquels on trouve : $\zeta_{n,p+1}\zeta_{n,p+2}\cdots\zeta_{n,n}$. D'après l'étude faite sur les coefficients de P_n on peut écrire :

$$\pi_{n-p}(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \cdots, \zeta_{n,n}) = (-1)^{n-p}\frac{a_{n,p}}{a_{n,n}} = \frac{(-1)^{n-p}}{(-1)^n(n+1)!}\frac{(-1)^p}{p!}\frac{(n+1)!n!}{(n-p+1)!(n-p)!}$$
$$= \frac{n!}{p!(n-p+1)!(n-p)!}.$$

On déduit de cela :

$$\left(\zeta_{n,p+1}\right)^{n-p} < \zeta_{n,p+1}\zeta_{n,p+2}\cdots\zeta_{n,n} \leq \pi_{n-p}\left(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \cdots, \zeta_{n,n}\right)$$
$$= \frac{n!}{p!(n-p+1)!(n-p)!}.$$

D'où la majoration :

$$\zeta_{n,p+1} \leq \left[\frac{n!}{p!(n-p+1)!(n-p)!}\right]^{\frac{1}{n-p}}.$$

Pour obtenir une majoration plus facilement manipulable, remarquons que :

$$\frac{n!}{p!(n-p+1)!} \leq \frac{1}{p}\binom{n}{p-1} \leq 2^n.$$

Donc :

$$\zeta_{n,p+1} \leq 2^{\frac{n}{n-p}}((n-p)!)^{-\frac{1}{n-p}}.$$

Comme $(m!)^{\frac{1}{m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qu'on voit facilement en prenant le logarithme, il est clair que pour $p \geq 1$ fixé, $\zeta_{n,p} \underset{n\to\infty,\, n\geq p}{\longrightarrow} 0$.

On peut déduire de l'inégalité ci-dessus le résultat plus fort suivant : si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'entiers tels que pour tout n, $p_n \leq n$, et que $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{n} < 1$, alors $\zeta_{n,p_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Comme nous l'avons remarqué dans le b), pour tout entier q fixé, la suite $\left(\zeta_{n,n-q}\right)_{n>q}$ est strictement croissante.

Montrons que $\zeta_{n,n} \underset{n\to\infty,\, n>0}{\longrightarrow} +\infty$.

Rappelons que pour tout entier p , $1 \leq p \leq n$:

$$\pi_p(\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \cdots, \zeta_{n,n}) = \frac{n!}{(n-p)!(p+1)!p!} = \frac{\binom{n}{p}}{(p+1)!}.$$

Nous pouvons en déduire en particulier :

$$\zeta_{n,1} + \zeta_{n,2} + \cdots + \zeta_{n,n} = \frac{n}{2},$$

et :

$$\zeta_{n,1}^2 + \zeta_{n,2}^2 + \cdots + \zeta_{n,n}^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 2\frac{n(n-1)}{2 \times 6} = \frac{n(n+2)}{12} .$$

Comme $\zeta_{n,n}$ est la plus grande des racines, nous en déduisons :

$$n\zeta_{n,n}^2 \geq \zeta_{n,1}^2 + \zeta_{n,2}^2 + \cdots + \zeta_{n,n}^2 = \frac{n(n+2)}{12}, \text{ d'où :}$$

$$\zeta_{n,n} \geq \sqrt{\frac{n+2}{12}},$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Montrons que $\zeta_{n,n-1} \underset{n \to \infty, n>1}{\to} +\infty$.

En utilisant les formules de Newton, nous obtenons :

$$\zeta_{n,1}^3 + \zeta_{n,2}^3 + \cdots + \zeta_{n,n}^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^3 - 3\frac{n}{2} \times \frac{n(n-1)}{2 \times 6} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{6 \times 24} = \frac{n(n+1)(n+2)}{48}.$$

Supposons que la suite $\left(\zeta_{n,n-1}\right)_{n>1}$, qui est croissante, soit majorée par un réel L, alors, pour tout entier $k \geq 2$:

$$s_k(n) = \zeta_{n,1}^k + \zeta_{n,2}^k + \cdots + \zeta_{n,n}^k \leq (n-1)L^k + \zeta_{n,n}^k,$$

d'où :

$$s_k(n) - (n-1)L^k \leq \zeta_{n,n}^k \leq s_k(n).$$

En appliquant ce résultat pour $k = 2$ et $k = 3$, nous obtenons facilement :

$$\zeta_{n,n}^2 \sim s_2(n) \sim \frac{n^2}{12} \text{ et } \zeta_{n,n}^3 \sim s_3(n) \sim \frac{n^3}{48},$$

cela est faux car : $12^3 \neq 48^2$.
Par conséquent, $\zeta_{n,n-1} \underset{n \to \infty, n>1}{\to} +\infty$.

§ VI.4 *DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS*

Exercice 1c) :

> Calculer un DL(0) de la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{e^x - 1}{x} \text{Arc} \sin x\right)$ à l'ordre 4. ■

Pour rendre les calculs plus rapides, on peut essayer d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction exp et de faire apparaître des parités :

$$f(x)=\exp\left(\frac{e^x-1}{x}\operatorname{Arc}\sin x\right)=\exp\left((\operatorname{ch}x-1)\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}\right)\exp\left(\operatorname{sh}x\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}\right).$$

Pour trouver le développement limité de la fonction $a(x)=(\operatorname{ch}x-1)\dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0, comme un équivalent de $\operatorname{ch}x-1$ est $\dfrac{1}{2}x^2$, il suffit d'utiliser le DL à l'ordre 2 de $\dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}$. On obtient :

$$[(\operatorname{ch}x-1)]_4=\left[\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{x^2}{12}\right)\right]_4,$$

d'où :

$$[a(x)]_4=\left[(\operatorname{ch}x-1)\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}\right]_4=\left[\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{x^2}{12}\right)\left(1+\frac{x^2}{6}\right)\right]_4=\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{x^2}{4}\right).$$

D'où : $[\exp(a(x))]_4=1+\dfrac{1}{2}x^2\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right)+\dfrac{1}{8}x^4=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x^4.$

La fonction $b(x)=\operatorname{sh}x\dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}$ étant impaire, son développement à l'ordre 4 au voisinage de 0, est le même qu'à l'ordre 3. Comme un équivalent de $\operatorname{sh}x$ est x au voisinage de 0, il suffit encore d'utiliser le DL à l'ordre 2 de $\dfrac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}$. On obtient :

$$[b(x)]_4=\left[\operatorname{sh}x\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}\right]_4=\left[x\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)\left(1+\frac{1}{6}x^2\right)\right]_4=x\left(1+\frac{1}{3}x^2\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}[\exp(b(x))]_4&=1+x\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2}x^2\left(1+\frac{2}{3}x^2\right)+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\\&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4.\end{aligned}$$

En effectuant le produit des deux polynômes on trouve :

$$\begin{array}{rl}1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4 & (\times 1)\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4 & \left(\times\frac{1}{2}x^2\right)\\ \frac{1}{4}x^4 & \left(\times\frac{1}{4}x^4\right)\end{array}$$

Soit : $\quad [f(x)]_4=1+x+\quad x^2+\quad x^3+\dfrac{7}{8}x^4.$

Exercice 1g) :

> Calculer un DL(0) de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}$ à l'ordre 4 ($x > 0$).
>
> ■

On peut mettre l'application f sous la forme :

$$f(x) = \frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Un développement pair à l'ordre 8 de la fonction $g(y) = \dfrac{\operatorname{Arc\,sin} y}{y}$ au voisinage de 0, donnera un développement à l'ordre 4 au voisinage de 0 par valeurs supérieures de la fonction $\dfrac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. La formule du §VI.4 p278 nous donne :

$$\left[\frac{\operatorname{Arc\,sin} y}{y}\right]_8 = 1 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{40}y^4 + \frac{5}{112}y^6 + \frac{35}{1152}y^8,$$

donc :

$$\left[\frac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right]_4 = 1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4.$$

D'autre part :

$$\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]_4 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4.$$

En effectuant le produit des deux polynômes jusqu'à l'ordre 4 nous obtenons :

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 + & \frac{1}{6}x + & \frac{3}{40}x^2 + & \frac{5}{112}x^3 + & \frac{35}{1152}x^4 & (\times 1) \\
 & -\frac{1}{2}x - & \frac{1}{12}x^2 - & \frac{3}{80}x^3 - & \frac{5}{224}x^4 & \left(\times -\frac{1}{2}x\right) \\
 & & \frac{3}{8}x^2 + & \frac{3}{48}x^3 + & \frac{9}{320}x^4 & \left(\times \frac{3}{8}x^2\right) \\
 & & & -\frac{5}{16}x^3 - & \frac{5}{96}x^4 & \left(\times -\frac{5}{16}x^3\right) \\
 & & & & \frac{35}{128}x^4 & \left(\times \frac{35}{128}x^4\right)
\end{array}$$

D'où : $\quad [f(x)]_4 = 1 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{30}x^2 - \dfrac{17}{70}x^3 + \dfrac{649}{2520}x^4.$

Exercice 4d) :

> Montrer que la fonction $f: x \mapsto \dfrac{(\text{Arc}\sin x)^2}{\text{Arc tg}\, x}$ a une réciproque locale g de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, et calculer un $\text{DL}_5(0)$ de g. ■

Posons pour tout x non nul : $\varphi(x) = \dfrac{\text{Arc}\sin x}{x}$, $\psi(x) = \dfrac{\text{Arc tg}\, x}{x}$ et $\varphi(0) = 1$, $\psi(0) = 1$. D'après le théorème de division, ces deux applications sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que la fonction ψ ne prend jamais la valeur 0 et que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x\dfrac{\varphi^2(x)}{\psi(x)}$. L'application f est donc, si on pose $f(0) = 0$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. On voit facilement que $f'(0) = \dfrac{\varphi^2(0)}{\psi(0)} = 1$, et que par conséquent il existe un réel $a > 0$ tel que pour tout x dans $[-a, a]$, $f'(x) > 0$. L'application f est donc un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ de l'intervalle $]-a, a[$, vers l'intervalle $]f(-a), f(a)[=]-f(a), f(a)[$, puisque f est impaire. Soit g sa réciproque, c'est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$de $]-f(a), f(a)[$ vers $]-a, a[$, elle est impaire et $g'(0) = 1$. Elle a donc au voisinage de 0, un développement de la forme :

$$[g(y)]_5 = y + b_3 y^3 + b_5 y^5.$$

Déterminons d'abord le $\text{DL}_5(0)$ de f au voisinage de 0 ; il suffit pour cela de déterminer le $\text{DL}_4(0)$ des applications φ et ψ.

$$[\varphi(x)]_4 = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4.$$

D'où :

$$\left[\varphi^2(x)\right]_4 = 1 + 2\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4\right) + \frac{1}{36}x^4 = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{45}x^4.$$

D'autre part :

$$[\psi(x)]_4 = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4.$$

d'où :

$$\left[(\psi(x))^{-1}\right]_4 = 1 + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^4\right) + \frac{1}{9}x^4 = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{45}x^4.$$

Effectuons le produit à l'ordre 4 :

$$\begin{array}{rl}
1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{45}x^4 & (\times 1) \\
\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 & \left(\times \frac{1}{3}x^2\right) \\
\frac{8}{45}x^4 & \left(\times \frac{8}{45}x^4\right)
\end{array}$$

On obtient :

$$[f(x)]_5 = x\left(1+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4\right).$$

d'où :

$$\left[f^3(x)\right]_5 = x^3\left(1+2x^2\right) \text{ et } \left[f^5(x)\right]_5 = x^5.$$

Les applications f et g étant réciproques l'une de l'autre :

$$x = [g(f(x))]_5 = \left[f(x)+b_3f^3(x)+b_5f^5(x)\right]_5$$

$$= x\left(1+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4\right)+b_3x^3(1+2x^2)+b_5x^5.$$

On en déduit les conditions :

$$b_3 = -\frac{2}{3}$$

$$b_5 = \frac{1}{45}-2b_3 = \frac{1}{45}+\frac{4}{3} = \frac{61}{45}.$$

Le développement à l'ordre 5 au voisinage de 0 de g est donc :

$$[g(y)]_5 = y-\frac{2}{3}y^3+\frac{61}{45}y^5.$$

Exercice 6 :

a) Soit f l'application définie par $f(0)=0$ et $f(x) = \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ pour tout $x \in \left]0, \pi/2\right]$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0, \pi/2\,]$, et en calculer un $\mathrm{DL}_4(0)$.

b) Plus généralement, soit $A>0$ et p entier ≥ 2. Soit $f : [\,0, A\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$ et $f^{(p)}(0) \neq 0$. Montrer que f admet une réciproque locale g définie sur $[\,0, B\,]$, avec $B>0$, et qu'il existe $\phi : \left[\,0, B^{1/p}\right] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall z \in [\,0, B\,])\ g(z) = \phi\left(z^{1/p}\right)$. ■

a) Soit g l'application vérifiant pour tout $x \neq 0$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6}g(x)$ et $g(0)=1$.

Il est clair d'après le théorème de division que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$. Comme d'autre part, pour tout $x \in \left]0, \pi/2\right]$, $0 < \sin x < x$, $f(x)$ est bien défini et $g(x) > 0$. Utilisons g pour transformer l'expression de f.

On vérifie que pour tout $x \in \left]0, \pi/2\right]$:

$$\cos(f(x)) = \frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{6}g(x) = 1-2\sin^2\left(\frac{f(x)}{2}\right), \text{ d'où :}$$

$$\frac{x^2}{12}g(x) = \sin^2\left(\frac{f(x)}{2}\right).$$

Or pour tout $x \in \left]0, \pi/2\right]$, $0 < f(x) < \pi/2$, donc :

$$f(x) = 2\operatorname{Arc\,sin}\left(x\sqrt{\frac{g(x)}{12}}\right).$$

Cette égalité est vraie aussi en 0. Comme g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et reste > 0 sur $[\,0, \pi/2\,]$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0, \pi/2\,]$.

Déterminons maintenant le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

L'application g est visiblement paire, f est donc la restriction à $[\,0, \pi/2\,]$ d'une application impaire. Il suffit donc de déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f, donc le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{g}$.

On obtient :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5u(x) \text{ où } u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Donc :

$$[g(x)]_2 = 1 - \frac{x^2}{20} \text{ et } \left[\sqrt{g(x)}\right]_2 = 1 - \frac{x^2}{40}.$$

D'autre part :

$$[\operatorname{Arc\,sin} y]_3 = y + \frac{y^3}{6}.$$

Donc :

$$[f(x)]_3 = 2\left[x\left(\frac{g(x)}{12}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{6}\left(\frac{g(x)}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_3 = \frac{2x}{\sqrt{12}}\left(1 - \frac{x^2}{40}\right) + \frac{2x^3}{6\times 12\times\sqrt{12}}.$$

Le développement cherché est donc :

$$[f(x)]_4 = \frac{x}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{x^2}{90}\right).$$

b) Supposons que $f^{(p)}(0) > 0$, le problème serait analogue dans le cas où $f^{(p)}(0) < 0$.

Le monôme $\dfrac{f^{(p)}(0)}{(p-1)!}x^{p-1}$ est la partie principale de l'application dérivée f' au voisinage de zéro ; elle est > 0 au voisinage à droite de 0. Il existe donc un réel A', $0 < A' \leq A$ tel que f' soit > 0 sur $]\,0, A'\,]$; f est donc strictement croissante sur $[0, A'\,]$. L'application f induit donc une bijection $[\,0, A'\,] \to [\,0, B\,]$ où $B = f(A') > 0$, qui est un homéomorphisme. Nous notons g l'application réciproque. Comme f' est strictement positive sur $]\,0, A'\,]$, l'application g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0, B\,]$.

Notons pour tout $x, 0 < x \le A'$, $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{x^p}$ et $\varphi(0) = \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$; en appliquant p fois le théorème de division, on démontre que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, A']$.

D'autre part elle ne prend que des valeurs strictement positives, donc l'application : $x \mapsto h(x) = (f(x))^{1/p} = x(\varphi(x))^{1/p}$,

définie sur $[0, A']$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$. C'est un homéomorphisme de $[0, A']$ vers $\left[0, B^{1/p}\right]$. Sa dérivée en $x > 0$ est $\dfrac{1}{p} f'(x)(f(x))^{\frac{1}{p}-1} > 0$ et $h'(0) = (\varphi(0))^{1/p} > 0$. L'application réciproque, que nous noterons Φ, sera donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour tout $x \in [0, A']$, $\Phi\left((f(x))^{1/p}\right) = x = g(f(x))$,

donc pour tout $y \in [0, B]$, $\Phi\left(y^{1/p}\right) = g(y)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 8d) :

> Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0} \frac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^{\operatorname{sh} x} - (\operatorname{sh} x)^x}$. ■

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, telle que $f(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x$, cherchons un équivalent de $g : x \mapsto x^{f(x)} - f(x)^x$, définie au voisinage de 0 par valeurs supérieures.

Notons $f(x) = x + xu(x)$ où $u(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0$. On vérifie que :

$$g(x) = x^{x+xu(x)} - (1+u(x))^x x^x = x^x\left[\left(x^{xu(x)} - 1\right) - \left((1+u(x))^x - 1\right)\right].$$

Pour le premier terme :

$$x^{xu(x)} - 1 = \exp(xu(x)\log x) - 1 \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} xu(x)\log x,$$

car $xu(x)\log x \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0$.

Pour le second :

$$(1+u(x))^x - 1 = \exp(x\log(1+u(x))) - 1 \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x\log(1+u(x)) \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} xu(x)$$

Le deuxième terme est négligeable devant le premier, donc :

$$g(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x^x xu(x)\log x = x^x(f(x) - x)\log x.$$

Appliquons ici ce résultat pour le numérateur et le dénominateur :

$$x^{\sin x}-(\sin x)^x \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x^x(\sin x - x)\log x \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} -x^x\frac{x^3}{6}\log x,$$

et :

$$x^{\operatorname{sh} x}-(\operatorname{sh} x)^x \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x^x(\operatorname{sh} x - x)\log x \underset{x\to 0,\, x>0}{\sim} x^x\frac{x^3}{6}\log x.$$

On en déduit :

$$f(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\to} -1.$$

§ VI.6 *DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES*

Exercice 4 :

> Soit (u_n) la suite définie à partir de $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin u_n$, $(n \geq 0)$. Montrer en s'inspirant de l'exemple 11 que l'on a :
>
> $$u_n - \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}} + \frac{3\sqrt{3}\log n}{10n^{3/2}} \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{\log(n)}{n^{3/2}}\right). \blacksquare$$

Rappelons les hypothèses et les conclusions de l'exemple 11.

> Soit $A > 0$ et $f : [0, A] \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante, telle que $f(0) = 0$, continue, vérifiant $0 < f(x) < x$ pour tout $x \in \,]0, A]$ et admettant un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la forme
>
> $[f(x)]_3 = x - ax^2 + bx^3$ avec $a > 0$ et $b \neq a^2$.
>
> Alors toute suite telle que $u_0 = \lambda \in \,]0, A]$ et pour tout n entier $u_{n+1} = f(u_n)$, admet le développement :
>
> $$u_n - \frac{1}{a}\frac{1}{n} + \frac{a^2-b}{a^3}\frac{\log(n)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{\log n}{n^2}\right).$$

Ces hypothèses ne sont pas vérifiées dans l'exercice, mais nous pouvons nous y ramener en posant : $f(x) = \sin^2(\sqrt{x})$. Cette application est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, (\pi/2)^2\right]$. On vérifie que pour tout x, $0 < x \leq (\pi/2)^2$, $0 < f(x) < x$ et que $f(0) = 0$. Calculons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f :

$$\sin^2 y = \frac{1}{2}(1-\cos 2y) = y^2 - \frac{1}{3}y^4 + \frac{2}{45}y^6 + \varphi(y)y^6 \text{ où } \varphi(y) \underset{y\to 0}{\to} 0.$$

Donc :

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^3 + \psi(x)x^3 \text{ où } \psi(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\to} 0.$$

Les conditions d'application de l'exemple 11 sont réunies ; on pose $a=\dfrac{1}{3}$ et $b=\dfrac{2}{45}$, en vérifiant que $a^2-b=\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{45}=\dfrac{1}{15}\neq 0$.

Soit maintenant une suite(u_n) telle que $u_0\in\ ]0,\pi/2]$ et pour tout n entier $u_{n+1}=\sin u_n$; nous lui associons la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n=u_n^2$. Cette suite vérifie $v_0\in\left]0,(\pi/2)^2\right]$ et pour tout n entier : $v_{n+1}=u_{n+1}^2=\sin^2(u_n)=\sin^2\left(\sqrt{v_n}\right)=f(v_n)$. On peut donc en déduire le développement :

$$v_n=\frac{1}{1/3}\frac{1}{n}-\frac{1/15}{1/27}\frac{\log n}{n^2}+w_n\frac{\log n}{n^2} \text{ où } w_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Donc :

$$u_n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{3}{5}\frac{\log n}{n}\left(1+w'_n\right)\right)^{1/2} \text{ où } w'_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

On en déduit facilement que :

$$u_n=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{3}{10}\frac{\log n}{n}\left(1+w''_n\right)\right) \text{ où } w''_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Ce qui est le développement cherché.

Exercice 5 :

> Soient α et β deux réels > 0. Au voisinage de 0, dans l'échelle des $\left(x^\lambda\right)_{\lambda>0}$, calculer un développement asymptotique à la précision x^N (N entier donné ≥ 1) de $f:x\mapsto\sin\left(\dfrac{x^\alpha}{1-x^\beta}\right)$. ■

La méthode utilisée ici est de transformer par étapes l'application f de telle sorte qu'à chaque étape l'application transformée diffère de l'application initiale d'un élément de $o\left(x^N\right)$, et qu'on obtienne à la fin une combinaison linéaire de fonctions dans l'échelle utilisée.

On sait que :

$$\sin y=\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}y^{2i+1}+y^{2p+1}u(y) \text{ où } u(y)\underset{y\to 0}{\to} 0,$$

donc :

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\beta}\right)^{2i+1}+\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\beta}\right)^{2p+1}u\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\beta}\right).$$

En choisissant l'entier p de telle sorte que $(2p+1)\alpha>N$, on peut remplacer f par g :

$$(1)\quad g(x)=\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\frac{x^\alpha}{1-x^\beta}\right)^{2i+1}=\sum_{i=0}^{p}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}x^{\alpha(2i+1)}\left(1-x^\beta\right)^{-(2i+1)}.$$

On sait que (§VI.4 p277) :

$$(1-z)^{-(2i+1)}=\sum_{j=0}^{q}\binom{2i+j}{j}z^j+z^q v_i(z) \text{ où } v_i(z)\underset{z\to 0}{\to}0,$$

donc :

$$\left(1-x^\beta\right)^{-(2i+1)}=\sum_{j=0}^{q}\binom{2i+j}{j}x^{\beta j}+x^{\beta q}v_i\left(x^\beta\right).$$

En choisissant l'entier q de telle sorte que $q\beta>N$, on peut remplacer dans l'expression (1), chaque terme :

$$x^{\alpha(2i+1)}\left(1-x^\beta\right)^{-(2i+1)} \text{ par : } x^{\alpha(2i+1)}\sum_{j=0}^{q}\binom{2i+j}{j}x^{\beta j}.$$

L'application f et l'application h définie par :

$$(2)\quad h(x)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\binom{2i+j}{j}x^{\alpha(2i+1)+\beta j},$$

où les entiers p et q sont choisis de telle sorte que $(2p+1)\alpha>N$ et $q\beta>N$, diffèrent donc d'un élément de $o\left(x^N\right)$.

Posons pour alléger l'écriture $a_{i,j}=\dfrac{(-1)^i}{(2i+1)!}\dbinom{2i+j}{j}$.

On peut retirer de l'expression (2) tous les termes qui sont élément de $o\left(x^N\right)$; on obtient :

$$k(x)=\sum_{(i,j)\in E}a_{i,j}x^{(2i+1)\alpha+j\beta} \text{ où } E=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},(2i+1)\alpha+j\beta\le N\right\}.$$

Pour obtenir le développement de f, il convient de regrouper les coefficients $a_{i,j}$ suivant la valeur de $\lambda=(2i+1)\alpha+j\beta$.

Posons $\Lambda=\left\{\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\exists(i,j)\in E,\lambda=(2i+1)\alpha+j\beta\right\}$. C'est un ensemble fini de réels, puisque l'ensemble E est fini.

Pour tout réel $\lambda\in\Lambda$, posons :

$$c_\lambda=\sum_{(i,j)\in E_\lambda}a_{i,j} \text{ où } E_\lambda=\left\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},(2i+1)\alpha+j\beta=\lambda\right\}.$$

On peut constater si le rapport $\dfrac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel, l'ensemble E_λ a un seul élément et que donc $c_\lambda\neq 0$. Dans tous les cas, ce qui précède montre que le développement cherché de f est la famille $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ puisque la fonction f et la fonction k :

$$k(x) = \sum_{(i,j)\in E} a_{i,j} x^{(2i+1)\alpha + j\beta} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{(i,j)\in E_\lambda} a_{i,j} x^{(2i+1)\alpha + j\beta}$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda x^\lambda .$$

diffèrent d'un élément de $o\left(x^N\right)$.

Chapitre VII

NOTIONS SUR L'INTÉGRATION

§ VII.1 *CONVERGENCE SIMPLE, CONVERGENCE UNIFORME*

Exercice 1e) :

> Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions ci-après, en précisant les ensembles de convergence simple et les ensembles de convergence uniforme : $f_n : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x \cos^n x}{1-\cos x}$. ■

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé, $0 < \cos x < 1$, donc : $\dfrac{\sin x \cos^n x}{1-\cos x} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Cette suite de fonctions converge donc simplement vers la fonction nulle.

Transformons l'expression de f_n :

$f_n(x) = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cos^n x = \operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)\cos^n x$. Sous cette forme, on voit bien que pour tout n entier, la fonction f_n est décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Soit un réel $\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 < f_n(x) \le f_n(\alpha)$. Comme $f_n(\alpha) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit que la convergence est uniforme sur l'intervalle $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[$.

La convergence vers la fonction nulle n'est uniforme sur aucun intervalle $]0, \alpha]$. Sinon, pour n assez grand, la fonction f_n serait bornée sur cet intervalle, ce qui est impossible puisque $f_n(x) \underset{x\to 0}{\to} +\infty$.

Exercice 1e) :

> Montrer que la suite de fonctions (f_n) : $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [\,0, n\,]$, et $f_n(x) = 0$ si $x > n$, converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, vers $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

Il y a convergence simple vers la fonction g, car pour x fixé, pour n assez grand la valeur de $f_n(x)$ est $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$, dont la limite est e^{-x}.

Il est facile de voir que pour tout $x < n$,
$\log(f_n(x)) = n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -n\frac{x}{n} = -x$, et que donc $0 < f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$. Cette inégalité est en fait vraie pour tout x réel. Pour démontrer que la convergence est uniforme, cherchons à majorer (on espère uniformément) la différence $\mathrm{e}^{-x} - f_n(x)$; il faudra pour cela minorer $f_n(x)$.

Cherchons un encadrement de $g(t) = \log(1-t)$ sur l'intervalle $\left[\,0, \frac{1}{2}\right]$ par exemple. Nous pouvons utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$g(t) = -t + \frac{t^2}{2} g''(c) \text{ où } 0 \leq c \leq t \leq \frac{1}{2},$$

donc

$$-t \geq \log(1-t) = -t - \frac{t^2}{2(1-c)^2} \geq -t - 2t^2.$$

Nous en déduisons que pour tout $x \in \left[\,0, \frac{n}{2}\right]$:

$$-x \geq n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \log f_n(x) \geq -x - 2\frac{x^2}{n},$$

et que donc :

$$\mathrm{e}^{-x} \geq f_n(x) \geq \exp\left(-x - 2\frac{x^2}{n}\right) = \mathrm{e}^{-x} \mathrm{e}^{-2\frac{x^2}{n}}.$$

En utilisant l'inégalité $\mathrm{e}^{-y} \geq 1 - y$, vraie pour tout y réel, nous obtenons :

$$0 \leq \mathrm{e}^{-x} - f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \mathrm{e}^{-2\frac{x^2}{n}}\right) \leq \mathrm{e}^{-x} \frac{2x^2}{n}.$$

Il est facile de voir que la fonction $x \mapsto 2x^2 \mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par sa valeur en 2. On obtient finalement pour tout $x \in \left[\,0, \frac{n}{2}\right]$, l'encadrement :

$$0 \leq \mathrm{e}^{-x} - f_n(x) \leq \frac{8}{\mathrm{e}^2 n}.$$

Sur l'intervalle $\left[\frac{n}{2}, +\infty\right[$, nous avons la majoration :

$$0 \leq \mathrm{e}^{-x} - f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}.$$

La convergence est donc bien uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5 :

> Soit (f_n) une suite de fonctions convexes qui converge simplement sur $I = [\ a, b\ ]$ $(\ a < b\ )$ vers une fonction f continue. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f. ■

Démontrons le lemme suivant sur les fonctions convexes :

> Soit f convexe $f : [\ a, b\ ] \to \mathbb{R}$, si $f(a), f\left(\frac{a+b}{2}\right), f(b)$ sont dans l'intervalle $[\ u, u+l\ ]$, alors f est à valeurs dans $[\ u-l, u+l\ ]$.

La majoration de f est claire car le graphe de f est en dessous de sa corde entre a et b. Pour obtenir la minoration, nous allons utiliser le fait que le graphe de f est au dessus de ses cordes à l'extérieur des points d'intersection. Posons $c = \frac{a+b}{2}$, nous pouvons minorer $f(x)$ sur l'intervalle $[\ a, c\ ]$ par $f(c) - (c-x)\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ (équation de la corde entre c et b). On obtient donc pour tout $x \in [\ a, c\ ]$ la minoration :

$$f(x) \geq u - (c-a)\frac{u+l-u}{b-c} = u - l.$$

On obtiendrait la même minoration sur l'intervalle $[\ c, b\ ]$.

Fin du lemme.

Soit maintenant un réel $\varepsilon > 0$, l'application f étant uniformément continue sur $I = [\ a, b\ ]$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in [\ a, b\ ]^2,\ \ |x' - x| < \alpha \Rightarrow |f(x') - f(x)| < K\varepsilon.$$

Le nombre K étant une constante que nous déterminerons plus tard.

Soit une subdivision équirépartie $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de l'intervalle I dont le pas est $< \frac{\alpha}{2}$ $(p \geq 2)$.

Pour tout i entre 0 et p, puisque la suite converge simplement vers f, $f_n(x_i) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_i)$. On peut donc trouver un entier N tel que pour tout $n > N$ et pour tout $i, 0 \le i \le p$, $|f_n(x_i) - f(x_i)| < M\varepsilon$, M étant une autre constante dont nous déterminerons ensuite la valeur.

Pour tout entier i entre 1 et $p-1$, l'ensemble $f([x_{i-1}, x_{i+1}])$ est un intervalle fermé borné inclus dans un intervalle de la forme $[\, u, u+K\varepsilon \,]$. Les nombres $f_n(x_{i-1}), f_n(x_i), f_n(x_{i+1})$ sont donc tous dans l'intervalle $[\, u-M\varepsilon, u+(K+M)\varepsilon \,]$. Nous pouvons en déduire, d'après le lemme, que l'ensemble $f_n([x_{i-1}, x_{i+1}])$ est inclus dans l'intervalle $[u-(K+3M)\varepsilon, u+(K+M)\varepsilon]$. La plus grande distance possible entre $f_n(x)$ et $f(x)$, si $x \in [\, x_{i-1}, x_{i+1} \,]$, est donc $(2K+3M)\varepsilon$.

Cette majoration est vraie sur tout l'intervalle I. En choisissant comme valeur de K le nombre $\frac{1}{4}$ et comme valeur de M le nombre $\frac{1}{6}$, on démontrerait donc l'existence d'un entier N tel que pour tout $n > N$, et pour tout $x \in [\, a, b \,]$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

La suite (f_n) converge donc uniformément vers f.

Exercice 10 :

> Etudier les ensembles de convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) : $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^n}$. ■

La monotonie de la fonction f_n ne semble pas évidente ; pourtant , pour $x > 0$, on peut écrire : $f_n(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^n} + \dfrac{1}{x^{n-1}} + \cdots + 1}$; sous cette forme il est clair que la fonction f_n est croissante.

Si $0 \le x \le 1$, on en déduit : $0 \le f_n(x) \le f_n(1) = \dfrac{1}{n+1}$. La convergence est donc uniforme sur l'intervalle $[\, 0, 1 \,]$ vers la fonction nulle.

Si $x > 1$, d'après l'expression trouvée ci-dessus :

$f_n(x) = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^{n+1}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\dfrac{1}{x}$. Pour voir s'il y a convergence uniforme, évaluons la différence entre $f_n(x)$ et sa limite.

$$f_n(x) - \left(1-\frac{1}{x}\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{x^{n+1}}} - 1\right) = \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^{n+1}-1} = \frac{1}{x}\frac{x-1}{x^{n+1}-1},$$

ou encore :

$$f_n(x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\frac{1}{x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1}.$$

On obtient donc l'encadrement suivant, vrai pour tout $x>1$:

$$0\leq f_n(x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{n+1}.$$

La convergence est donc uniforme sur l'intervalle $]1,+\infty[$ vers la fonction $x\mapsto 1-\dfrac{1}{x}$.

On peut remarquer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue g définie par $g(x)=0$ si $0\leq x\leq 1$ et $g(x)=1-\dfrac{1}{x}$ si $x>1$.

Exercice 11 :

> Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
> Démontrer qu'on peut extraire de (f_n) une suite simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
> Indication : montrer que si D est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ on peut extraire de (f_n) une suite simplement convergente sur D. Appliquer ce résultat à une partie dénombrable partout dense (par exemple $\mathbb{Q}$), pour obtenir une limite simple croissante $g:D\to\mathbb{R}$, étendre g à $\mathbb{R}$, et appliquer de nouveau le résultat à l'ensemble des points de discontinuité de g. ■

Le formalisme de l'extraction de suite se révélerait ici particulièrement lourd et conduirait à une démonstration illisible. Tout en exprimant les mêmes idées, nous utiliserons la notion de sous-suite sous une forme "ensembliste". Nous considérerons qu'une suite est une application d'une partie P non bornée (ou infinie) de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qu'une sous-suite d'une telle suite est sa restriction à une partie infinie P', $P'\subset P$. La notion de suite convergente vers un réel L ne pose pas de problème ; nous noterons $u_n \underset{n\to\infty,\, n\in P}{\longrightarrow} L$. Il est évident que si une suite converge vers L, toute sous-suite converge aussi vers L. Le théorème de Bolzano -Weierstrass s'énonce ainsi : toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démontrons que si $(x_p)_{p\,\in\,\mathbb{N}}$ est une suite de réels, il existe une partie P non bornée de $\mathbb{N}$ telle que pour tout p entier, la suite $\left(f_n(x_p)\right)_{n\,\in\,P}$ est convergente.

Comme la suite $\left(f_n(x_0)\right)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une partie non bornée P_0 de $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(f_n(x_0)\right)_{n\,\in\,P_0}$ soit convergente ; la suite $\left(f_n(x_1)\right)_{n\,\in\,P_0}$ étant bornée, il existe une partie P_1 non bornée incluse dans P_0 tell

$\left(f_n(x_1)\right)_{n \in P_1}$ soit convergente. On peut par récurrence construire une suite décroissante $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties non bornées de $\mathbb{N}$ telle que pour tout k entier la suite $\left(f_n(x_k)\right)_{n \in P_k}$ soit convergente.

Montrons maintenant qu'il existe une partie non bornée P qui est incluse dans chaque partie P_k, à partir d'un certain rang, c'est-à-dire précisément :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad P \cap [\, m, +\infty [\, \subset P_k.$$

Soit n_0 le premier élément de P_0, n_1 le premier élément de P_1 strictement plus grand que n_0, qui existe puisque P_1 est non bornée, etc. On peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout k entier, $n_k \in P_k$. Posons alors :

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left([\, n_k, n_{k+1} \,[\cap P_k \right) \text{ (union disjointe).}$$

Montrons que pour tout i entier :

$$P \cap [n_i, +\infty[\subset P_i \,.$$

Si $n \in P$, il existe un unique k entier tel que $n \in [\, n_k, n_{k+1} \,[\cap P_k$; si de plus $n \geq n_i$, alors $i \leq k$, donc $n \in P_k \subset P_i$; ce qu'il fallait démontrer.

Pour tout i entier, la suite $\left(f_n(x_i)\right)_{n \in P_i}$ est convergente, donc la suite $\left(f_n(x_i)\right)_{n \in P}$, qui est, à partir du rang n_i , une sous-suite de la première, est convergente vers la même limite.

On peut conclure en énonçant le résultat sous la forme :

> Si D est une partie finie ou dénombrable de $\mathbb{R}$, il existe une partie non bornée P de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in D$, la suite $\left(f_n(x)\right)_{n \in P}$ est convergente.

Appliquons d'abord ce résultat dans le cas où la partie D est $\mathbb{Q}$. Il existe donc une partie P non bornée de $\mathbb{N}$ telle que pour tout rationnel r, la suite $\left(f_n(r)\right)_{n \in P}$ est convergente, vers un élément de $[\,0,1\,]$ que nous noterons $g(r)$. Comme les applications f_n sont toutes croissantes, l'application g définie sur $\mathbb{Q}$ est aussi croissante et on peut l'étendre sans problème à $\mathbb{R}$ en posant pour tout x réel :

$$\varphi(x) = \sup_{r \leq x,\, r \in \mathbb{Q}} g(r) \text{ ou bien } \psi(x) = \inf_{r \geq x,\, r \in \mathbb{Q}} g(r).$$

On obtient ainsi deux fonctions croissantes telles que pour tout x réel, $\varphi(x) \leq \psi(x)$; posons $D = \{x, \varphi(x) < \psi(x)\}$, et montrons d'abord que si x n'est pas dans D, alors $f_n(x) \underset{n \to \infty,\, n \in P}{\longrightarrow} \varphi(x) = \psi(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe deux rationnels r_1, r_2 tels que :

$$r_1 \leq x \leq r_2 \text{ et } \varphi(x) - \varepsilon < g(r_1) \leq g(r_2) < \psi(x) + \varepsilon.$$

Comme $f_n(r_1) \underset{n\to\infty,\, n\,\in\, P}{\longrightarrow} g(r_1)$, il existe un entier N_1 tel que :

$$\forall n \in P, n \geq N_1 \Rightarrow \varphi(x) - \varepsilon < f_n(r_1) < \psi(x) + \varepsilon.$$

De même, il existe un entier N_2 tel que :

$$\forall n \in P, n \geq N_2 \Rightarrow \varphi(x) - \varepsilon < f_n(r_2) < \psi(x) + \varepsilon.$$

Donc :

$$\forall n \in P, n \geq \sup(N_1, N_2) \Rightarrow \varphi(x) - \varepsilon < f_n(r_1) \leq f_n(x) \leq f_n(r_2) < \psi(x) + \varepsilon.$$

Cela prouve que :

$$f_n(x) \underset{n\to\infty,\, n\,\in\, P}{\longrightarrow} \varphi(x) = \psi(x).$$

Montrons maintenant que l'ensemble D est au plus dénombrable.

Posons $D_n = \left\{x,\ \psi(x) - \varphi(x) > \dfrac{1}{n}\right\}$, il est clair que : $D = \bigcup\limits_{n\,\in\,\mathbb{N}} D_n$. Il suffit donc de démontrer que chaque ensemble D_n est fini.

Si on pouvait trouver dans D_n des éléments $x_0, x_1, \cdots, x_n$ deux à deux distincts ($x_0 < x_1 < \cdots < x_n$), pour tout rationnel $r > x_n$, on aurait
$g(r) \geq (n+1)\dfrac{1}{n} + \varphi(x_0) > 1$, ce qui est impossible, puisque g est à valeurs dans $[\,0,1\,]$. Donc D_n est fini et a au plus n éléments.

D'après le résultat démontré en premier, il existe une partie P' non bornée de $\mathbb{N}$, $P' \subset P$, telle que pour tout x dans D, la suite $(f_n(x))_{n\,\in\,P'}$ est convergente. On peut remarquer que la limite de cette suite sera un nombre compris entre $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

Pour tout x réel, la suite $(f_n(x))_{n\,\in\,P'}$ est donc convergente.

On peut facilement traduire ce résultat en termes de suites extraites. Le résultat est donc démontré.

§ VII.2 *INTÉGRATION DES FONCTIONS EN ESCALIER*

Exercice 3 :

> Soit $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et M l'ensemble $\{x \in [\,a, b\,];\, f'(x) = 0\}$, montrer que $f(M)$ est négligeable. ■

Montrons d'abord que la définition VII.2.3 d'une partie négligeable A de $\mathbb{R}$ est équivalente à la définition :

(1) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe une suite $(I_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ d'intervalles bornés, telle que : $\quad A \subset \bigcup\limits_{n\,\in\,\mathbb{N}} I_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{mes}(I_n) \leq \varepsilon,$

ou une suite finie $(I_n)_{n \in \{0,\cdots,p\}}$ d'intervalles bornés, telle que

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{p} I_n \text{ et } \sum_{n=0}^{p} \operatorname{mes}(I_n) \le \varepsilon.$$

Cette propriété est évidemment vraie si la partie A est négligeable. Supposons qu'une partie A vérifie la propriété (1).

Soit $\varepsilon > 0$, appliquons (1) avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

S'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles bornés telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(I_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout n entier, on peut trouver un intervalle ouvert ω_n, $I_n \subset \omega_n$ tel que $\operatorname{mes}(\omega_n) \le \operatorname{mes}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$.

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(\omega_n) \le \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(I_n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} < \varepsilon$ et $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$.

S'il existe une suite $(I_n)_{n \in \{0,\cdots,p\}}$ d'intervalles bornés telle que $A \subset \bigcup_{n=0}^{p} I_n$ et $\sum_{n=0}^{p} \operatorname{mes}(I_n) \le \frac{\varepsilon}{2}$, on peut poser conventionnellement $I_n = \varnothing$ si $n > p$ et reprendre le raisonnement précédent.

La partie A est donc négligeable.

Reprenons la démonstration principale.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $O_\varepsilon = \left\{ x \in [a,b] ; |f'(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \right\}$; cet ensemble est un ouvert de $[a,b]$, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$; il est donc réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles deux-à-deux disjoints de $[a,b]$, ouverts relativement à $[a,b]$ (Théorème III.2.5).

Supposons d'abord que cet ensemble soit réunion d'une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles deux à deux disjoints. Posons pour n entier $J_n = f(I_n)$; c'est un intervalle. Comme :

$$\forall (x, x') \in I_n^2, \quad |f(x) - f(x')| \le \frac{\varepsilon}{b-a} |x - x'|,$$

on en déduit :

$$\operatorname{mes}(J_n) \le \frac{\varepsilon}{b-a} \operatorname{mes}(I_n).$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\text{mes}(J_n)\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\text{mes}(I_n)\le\varepsilon \text{ puisque } \sum_{n=0}^{\infty}\text{mes}(I_n)\le b-a.$$

Et :

$$f(M)\subset f(O_\varepsilon)=f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}I_n\right)\subset\bigcup_{n=0}^{\infty}J_n.$$

Si l'ensemble O_ε est réunion d'un nombre fini d'intervalles deux à deux disjoints $(I_n)_{n\in\{0,\cdots,p\}}$, on obtient, avec les notations analogues :

$$\sum_{n=0}^{p}\text{mes}(J_n)\le\varepsilon \text{ et } f(M)\subset f(O_\varepsilon)=f\left(\bigcup_{n=0}^{p}I_n\right)\subset\bigcup_{n=0}^{p}J_n.$$

On en déduit d'après le critère (1) que l'ensemble $f(M)$ est négligeable.

Exercice 6 :

> Soit $\mathscr{A}$ une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, ($a$ et b réels, $a<b$).
> Une forme linéaire Φ sur $\mathscr{A}$ est dite multiplicative ssi
> $\left(\forall(f,g)\in\mathscr{A}^2\right)\quad \Phi(fg)=\Phi(f)\Phi(g)$ et $\Phi\left(\chi_{[a,b]}\right)=1$
> Trouver toutes les formes linéaires multiplicatives sur la $\mathbb{R}$-algèbre $\text{Esc}([a,b],\mathbb{R})$. ■

Etablissons d'abord quelques propriétés nécessairement vérifiées par la forme linéaire multiplicative Φ.

Soit A un intervalle inclus dans $[a,b]$.

Sa fonction caractéristique est en escalier, donc $\Phi(\chi_A)=\Phi\left(\chi_A^2\right)=\left(\Phi(\chi_A)\right)^2$.

On en déduit que $\Phi(\chi_A)$ ne peut être que 0 ou 1.

Si B est un intervalle inclus dans $[a,b]$ et $A\subset B$, alors :

$$\Phi(\chi_A)=\Phi(\chi_A\chi_B)=\Phi(\chi_A)\Phi(\chi_B)\le\Phi(\chi_B).$$

Considérons maintenant l'ensemble : $E=\left\{x\in[a,b],\quad \Phi\left(\chi_{[a,x]}\right)=0\right\}$.

D'après ce qui précède, il est clair qu'il s'agit d'un intervalle inclus dans $[a,b]$, d'origine a s'il est non vide.

Si $E=[a,c]$, donc $c<b$, alors pour tout x, $c<x\le b$:

$$\Phi\left(\chi_{]c,x]}\right)=\Phi\left(\chi_{[a,x]}\right)-\Phi\left(\chi_{[a,c]}\right)=1-0=1\ ;$$

pour f application en escalier, on peut trouver $x, c<x\le b$, assez proche de c pour que la valeur de f sur $]c,x]$ soit constante et égale à $f(c+0)$; on peut écrire :

$$\Phi(f)=\Phi(f)\Phi\left(\chi_{]c,x]}\right)=\Phi\left(f\,\chi_{]c,x]}\right)=f(c+0)\Phi\left(\chi_{]c,x]}\right.$$

Si $E = [\, a, c\, [$:

– soit $\Phi\left(\chi_{\{c\}}\right) = 1$; dans ce cas, si f est en escalier :

$$\Phi(f) = \Phi(f)\Phi\left(\chi_{\{c\}}\right) = \Phi\left(f\,\chi_{\{c\}}\right) = \Phi\left(f(c)\,\chi_{\{c\}}\right) = f(c)\Phi\left(\chi_{\{c\}}\right) = f(c) \;;$$

– soit $\Phi\left(\chi_{\{c\}}\right) = 0$; dans ce cas l'égalité $a = c$ serait contradictoire, donc $a < c$, et pour tout $x, a \le x < c$:

$$\Phi\left(\chi_{]x,c[}\right) = \Phi\left(\chi_{[a,c]}\right) - \Phi\left(\chi_{[a,x]}\right) - \Phi\left(\chi_{\{c\}}\right) = 1 - 0 - 0 = 1,$$

si f est en escalier, on peut trouver $x, a \le x < c$ assez proche de c pour que f soit constante sur l'intervalle $]x, c\,[$, et on peut écrire :

$$\Phi(f) = \Phi(f)\Phi\left(\chi_{]x,c[}\right) = \Phi\left(f\,\chi_{]x,c[}\right) = f(c-0)\Phi\left(\chi_{]x,c[}\right) = f(c-0).$$

Les seules formes linéaires multiplicatives possibles sont les applications :

$f \mapsto f(c)$ où $c \in [\, a, b\,]$,

$f \mapsto f(c+0)$ où $c \in [\, a, b\,[$ et

$f \mapsto f(c-0)$ où $c \in \,]\, a, b\,]$.

On vérifie facilement que ces applications sont bien des formes linéaires multiplicatives.

Exercice 9 :

> Soit $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [\,0,1\,]$. Pour ε réel > 0, soit
> $$\omega_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left([\,0,1\,] \cap \left]\, r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right[\,\right).$$
> a) Vérifier que $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} \omega_\varepsilon = G$ est négligeable.
>
> b) Etudier si χ_G est limite simple sur $[\,0,1\,]$ d'une suite de fonctions en escalier. ■

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, $G \subset \omega_{\varepsilon/4}$. Or $\omega_{\varepsilon/4} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(I_n \cap [\,0,1\,]\right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ où $I_n = \left]\, r_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right[$. On vérifie que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mes}(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

Donc l'ensemble G est négligeable.

b) Supposons que (f_n) soit une suite de fonctions en escalier qui converge simplement sur l'intervalle $[\,0,1\,]$ vers la fonction caractéristique de G. Posons pour tout n entier ≥ 0 et tout x réel dans l'intervalle $[\,0,1\,]$, $g_n(x) = 1$ si $f_n(x) \ge \dfrac{1}{2}$ et $g_n(x) = 0$ si $f_n(x) < \dfrac{1}{2}$. Il est facile de voir que la suite (g_n) converge simplement vers la fonction caractéristique de l'ensemb s'agit d'une suite de fonctions en escalier, qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1, ce sont des fonctions caractéristiques de parties de $[0,1]$. Posons :

$$A_n = \{x \in [0,1], g_n(x) = 1\}.$$

La fonction g_n est la fonction caractéristique de la partie A_n. Comme g_n est une fonction en escalier, l'ensemble A_n est réunion finie d'intervalles inclus dans $[0,1]$.

Posons pour p entier ≥ 0 et x réel dans l'intervalle $[0,1]$: $h_p(x) = \inf\{g_n(x), n \geq p\}$, on voit que la suite (h_p) converge simplement en croissant vers χ_G. Comme h_p est la fonction caractéristique de $\bigcap_{n\geq p} A_n$, on peut aussi écrire cela de la manière suivante :

$$G = \bigcup_{p\geq 0}\left(\bigcap_{n\geq p} A_n\right).$$

Soit B_n l'ensemble fini des bornes des intervalles dont la réunion est A_n et $B = \bigcup_{n\geq 0} B_n$; l'ensemble B est dénombrable et :

$$G \subset \bigcup_{p\geq 0}\left(\bigcap_{n\geq p} \overline{A_n}\right) \subset \bigcup_{p\geq 0}\left(\bigcap_{n\geq p} (A_n \cup B)\right) = G \cup B.$$

L'ensemble $G \cup B$ est négligeable, car G et B le sont ; il est donc d'intérieur vide et par conséquent, les fermés $F_p = \bigcap_{n\geq p} \overline{A_n}$ sont tous d'intérieurs vides ; notons $O_p = [0,1] \setminus F_p$, ce sont des ouverts partout denses dans $[0,1]$.

On voit que $G = \bigcap_{p\in \mathbb{N}^*} \omega_{1/p}$, les ensembles $\omega_{1/p}$ étant des ouverts de l'intervalle $[0,1]$, partout denses car contenant $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

D'autre part comme $G \subset \bigcup_{p\geq 0} F_p$, G est disjoint de $\bigcap_{p\geq 0} O_p$; l'ensemble $\left(\bigcap_{p>0} \omega_{1/p}\right) \cap \left(\bigcap_{p\geq 0} O_p\right)$ est donc vide. Cela est impossible, car dans un espace de Baire comme $[0,1]$, une intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense, donc certainement non vide (cf. la résolution de l'exercice 20, §XI.2).

En conséquence, il n'existe aucune suite de fonctions en escalier qui converge simplement sur $[0,1]$ vers χ_G.

§ VII.3 *FONCTIONS BORNÉES INTÉGRABLES*

Exercice 5 :

Soit a et b réels ($a < b$). Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) en $x_0 \in [a, b]$ ssi $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \alpha > 0)$ tel que

$$(\forall x \in [a, b]) \quad |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

Et f est dite semi-continue supérieurement (en abrégé : s.c.s.) en $x_0 \in [a, b]$ ssi $-f$ est s.c.i. en x_0. Enfin f est dite s.c.i. (resp. s.c.s.) ssi f est s.c.i. (resp. s.c.s.) en tout point. Une fonction f est continue ssi elle est à la fois s.c.i. et s.c.s.

a) Soit (f_n) une suite u-bornée et croissante de fonctions s.c.i. Montrer que $\lim f_n$ est s.c.i.

b) Soit (f_n) une suite quelconque u-bornée de fonctions s.c.i. Montrer que $\sup(f_n)$ est s.c.i.

c) Soit $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Montrer que $\chi_A \in \mathcal{V}_B$. La fonction χ_A est-elle s.c.i. ? Est-elle s.c.s. ?

d) Montrer que l'ensemble des fonctions bornées s.c.i. : $[a, b] \to \mathbb{R}$ est stable par combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0, ainsi que par les opérations $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ et $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$.

e) Soit $E \subset [a, b]$. Pour que χ_E soit s.c.i., montrer qu'une C.N.S est que E soit un ouvert relatif sur $[a, b]$. ■

a) Posons pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ et montrons que f est s.c.i. en x_0.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $f(x_0) \geq f_N(x_0) > f(x_0) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

L'application f_N étant s.c.i., il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f_N(x) \geq f_N(x_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

donc :

$$\forall x \in [a, b], \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \geq f_N(x) \geq f_N(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

L'application f est donc s.c.i.

b) La démonstration est ici analogue.

Posons pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = \sup f_n(x)$ et montrons que f est s.c.i. en x_0.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $f(x_0) \geq f_N(x_0) > f(x_0) - \dfrac{\varepsilon}{2}$.

L'application f_N étant s.c.i., il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f_N(x)\geq f_N(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},$$

donc :

$$\forall x \in [a,b], \quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)\geq f_N(x)\geq f_N(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\geq f(x_0)-\varepsilon.$$

L'application f est donc s.c.i.

On peut remarquer que dans le cas a), comme la suite (f_n) est croissante, $\sup(f_n)=\lim(f_n)$. Il aurait été suffisant de démontrer le b).

c) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bijective à valeurs dans $A=[a,b]\cap\mathbb{Q}$. Posons $E_n=\{r_0,r_1,\cdots,r_n\}$, de telle sorte que $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $\chi_A=\sup_{n\in\mathbb{N}}\chi_{E_n}$. La suite (E_n) est croissante pour l'inclusion, donc la suite d'applications en escalier (χ_{E_n}) tend simplement en croissant vers χ_A. On en déduit : $\chi_A \in \mathcal{V}_B$.

Supposons le e) démontré (ce qui n'entraîne pas de cercle vicieux). Si χ_A était s.c.i., l'ensemble $A=[a,b]\cap\mathbb{Q}$, serait un ouvert relatif à $[a,b]$, ce qui est évidemment faux. Si χ_A était s.c.s., l'application $\chi_{[a,b]}-\chi_A=\chi_{[a,b]\setminus A}$ serait s.c.i., et A serait un fermé relatif à $[a,b]$, ce qui est faux. L'application χ_A n'est donc ni s.c.s., ni s.c.i.

d) On voit facilement que si f est s.c.i. et λ un réel ≥ 0, l'application λf est aussi s.c.i. Il suffit donc de démontrer que l'ensemble des applications s.c.i. sur $[a,b]$ est stable par la somme (finie) ; on est donc ramené à démontrer que si f et g sont s.c.i., la somme $f+g$ est s.c.i. en tout $x_0 \in [a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$, on peut trouver $\alpha>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|\leq\alpha \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2},$$

on peut aussi trouver $\beta>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|\leq\beta \Rightarrow g(x)\geq g(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $\gamma=\inf(\alpha,\beta)$(qui est >0), on obtient :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|\leq\gamma \Rightarrow f(x)+g(x)\geq f(x_0)+g(x_0)-\varepsilon.$$

L'application $f+g$ est donc bien s.c.i. sur $[a,b]$.

Démontrons de même que les applications $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont s.c.i. en x_0.

Nous pouvons supposer $f(x_0)\leq g(x_0)$.

Soit $\varepsilon>0$, on peut trouver $\alpha>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|\leq\alpha \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)-\varepsilon,$$

on peut aussi trouver $\beta>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0| \le \beta \Rightarrow g(x) \ge g(x_0) - \varepsilon \ge f(x_0) - \varepsilon.$$

En posant $\gamma = \inf(\alpha, \beta)$(qui est > 0), on obtient :

$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0| \le \gamma$

$$\Rightarrow \sup(f(x), g(x)) \ge g(x) \ge g(x_0) - \varepsilon = \sup(f(x_0), g(x_0)) - \varepsilon,$$

et :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0| \le \gamma \Rightarrow \inf(f(x), g(x)) \ge f(x_0) - \varepsilon = \inf(f(x_0), g(x_0)) - \varepsilon.$$

Les applications $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont donc bien s.c.i. en x_0.

e) Supposons que la partie E de $[a, b]$ soit un ouvert relativement à cet intervalle. Montrons qu'alors χ_E est s.c.i. en tout $x_0 \in [a, b]$.

Si $x_0 \in E$, comme E est un ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a,b] \subset E.$$

Donc :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0| \le \alpha \Rightarrow \chi_E(x) = \chi_E(x_0) = 1.$$

A fortiori, χ_E est s.c.i. en x_0.

Si $x_0 \notin E$, alors $\chi_E(x_0) = 0$ et donc :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad \chi_E(x) \ge \chi_E(x_0).$$

A fortiori, χ_E est s.c.i. en x_0.

Supposons maintenant que χ_E soit s.c.i. et démontrons que E est un ouvert relatif.

Si $x_0 \in E$, en appliquant en x_0 le critère avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ par exemple, on démontre l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0| \le \alpha \Rightarrow \chi_E(x) \ge \chi_E(x_0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Comme χ_E ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, on voit que :

$$]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a,b] \subset E.$$

La partie E de l'intervalle $[a, b]$ est donc un ouvert relatif.

Exercice 9 :

> Soit a et b réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :
> a) f est s.c.i. (voir la définition dans l'exercice 5).
> b) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]y, +\infty[)$ est un ouvert relatif de $[a, b]$.
> c) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(]-\infty, y])$ est fermé.

Démontrons d'abord que les assertions b) et c) sont équivalentes.

Comme $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, pour tout réel y, la partie f^{-1}

$[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, si, et seulement si, c'est un fermé relatif à $[a,b]$, donc si, et seulement si, son complémentaire dans $[a,b]$, qui est $f^{-1}(]y,+\infty[)$, est un ouvert relatif à $[a,b]$.

Démontrons maintenant que les assertions a) et b) sont équivalentes.

Supposons que f soit s.c.i., et y réel, montrons que $f^{-1}(]y,+\infty[)$ est un ouvert relatif à $[a,b]$.

Soit x_0 tel que $f(x_0)>y$; soit ε réel tel que : $0<\varepsilon<f(x_0)-y$; puisque f est s.c.i. en x_0, il existe $\alpha>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)-\varepsilon>y.$$

Le voisinage relatif $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\ \cap\ [a,b]$ de x_0 est donc inclus dans $f^{-1}(]y,+\infty[)$. Cet ensemble est donc, pour tout y réel, un ouvert relatif.

Supposons que pour tout y réel, l'ensemble $f^{-1}(]y,+\infty[)$ soit un ouvert relatif à $[a,b]$ et démontrons que f est s.c.i. en tout $x_0 \in [a,b]$.

Soit $\varepsilon>0$, l'ensemble $f^{-1}\left(\left]f(x_0)-\varepsilon,+\infty\right[\right)$ est un ouvert relatif qui contient x_0, donc il existe $\alpha>0$ tel que :

$$(\forall x \in [a,b]) \quad |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>f(x_0)-\varepsilon.$$

L'application f est donc bien s.c.i. en tout $x_0 \in [a,b]$.

§ VII.4 *ENSEMBLES MESURABLES BORNÉS DANS* $\mathbb{R}$

Exercice 1 :

> Soit deux réels a et b $(a<b)$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée intégrable.
> a) Montrer que, pour tout borélien $B\subset\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est mesurable.
> b) Soit J un intervalle fermé borné contenant $f([a,b])$ et soit $g:J\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $g\circ f \in \mathcal{L}_B$. ■

a) Considérons l'ensemble T des parties de $\mathbb{R}$ dont l'image réciproque par f est mesurable (dans $[a,b]$). Montrons que T est une tribu (définition VII.4.2).

Nous partons du fait que l'ensemble des parties mesurables de $[a,b]$ est une tribu (Théorème VII.4.1).

Si A est B sont éléments de T ;

l'ensemble $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ est mesurable, donc $A\cup B$ est dans T ;

l'ensemble $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$ est mesurable, donc $A\setminus B$ est dans T.

L'ensemble des réels, $\mathbb{R}=f^{-1}([a,b])$ est dans T.

Si (A_n) est une suite d'éléments de T, $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ est mesurable donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est élément de T.

L'ensemble T est donc bien une tribu.

D'après le Théorème VII.4.3, l'ensemble T contient les intervalles de la forme : $]\,y,+\infty\,[$, $[\,y,+\infty\,[$, $]-\infty, y\,[$ et $]-\infty, y\,]$ où y est un réel quelconque. Comme T est une tribu, il contient tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, toutes les réunions dénombrables d'intervalles ouverts, donc tous les ouverts de $\mathbb{R}$, donc les complémentaires des ouverts de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fermés de $\mathbb{R}$. L'ensemble T contient donc la tribu engendrée par les ouverts (et les fermés) de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$; ce qu'il fallait démontrer.

b) L'intervalle J étant compact et g continue, g est bornée sur J ; $g\circ f$ est donc bornée. D'après le théorème VII.4.3, pour que $g\circ f$ soit intégrable, il suffit que pour tout y réel, l'ensemble $(g\circ f)^{-1}(]\,y,+\infty\,[) = f^{-1}\left(g^{-1}(]\,y,+\infty\,[)\right)$ soit mesurable. Or $g^{-1}(]\,y,+\infty\,[)$ est un ouvert relatif dans J, donc un borélien de $\mathbb{R}$, et $f^{-1}\left(g^{-1}(]\,y,+\infty\,[)\right)$ est, d'après a), mesurable. L'application $g\circ f$ est donc bien intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$.

Exercice 4 :

> (un exemple d'ensemble non mesurable) : On se place sur $\mathcal{V} = [\,0,1\,]$. Pour $A \subset [\,0,1\,[$ et $x \in \mathbb{R}$ on note
> $\tau_x(A) = \{\, t+x-\mathrm{Ent}(t+x),\quad t\in A\}$.
> a) Montrer que si $A \subset [\,0,1\,[$ est mesurable et si $x\in\mathbb{R}$, alors $\tau_x(A)$ est mesurable, et $\mathrm{mes}(\tau_x(A)) = \mathrm{mes}(A)$.
> b) Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur $[\,0,1\,[$ par $x\mathcal{R}y$ ssi $x-y\in\mathbb{Q}$, et soit $\mathcal{F}$ un système de représentants pour cette relation d'équivalence. Montrer que les $(\tau_r(\mathcal{F}))_{r\in[0,1[\,\cap\,\mathbb{Q}}$ forment un partage de $[\,0,1\,[$ et en déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas mesurable. ■

a) On voit que si x est réel et que n est entier, $\tau_x(A) = \tau_{x-n}(A)$; on peut donc supposer que $x\in[\,0,1\,[$. Ecrivons alors :
$A = (A \cap [\,1-x,1\,[) \cup (A\cap[\,0,1-x\,[)$ (union disjointe).

Notons $T_x : t\mapsto x+t$. Si $t\in A\cap[\,1-x,1\,[$, alors $t+x\in[\,1,1+x\,[$ donc $t+x-\mathrm{Ent}(t+x) = t+x-1$.

On obtient : $\tau_x(A\cap[\,1-x,1\,[) = T_{x-1}(A\cap[\,1-x,1\,[) \subset [\,0,x\,[$.

Si $t\in A\cap[\,0,1-x\,[$, alors $t+x\in[\,x,1\,[$ donc $t+x-\mathrm{Ent}(t+x) = t+x$.
On obtient : $\tau_x(A\cap[\,0,1-x\,[) = T_x(A\cap[\,0,1-x\,[) \subset [\,x,1\,[$

En définitive :

$\tau_x(A) = T_x(A \cap [0,1-x[) \cup T_{x-1}(A \cap [1-x,1[)$ (union disjointe).

Nous admettrons ici que la mesurabilité et, en cas de mesurabilité, la mesure d'une partie A bornée de $\mathbb{R}$ ne dépendent pas de l'intervalle $[a,b]$, pris comme univers (pourvu que $A \subset [a,b]$) et qu'elle est invariante par translation.

Il en résulte immédiatement que $\tau_x(A)$ est mesurable de mesure :

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}(\tau_x(A)) &= \mathrm{mes}(T_x(A \cap [0,1-x[)) + \mathrm{mes}(T_{x-1}(A \cap [1-x,1[)) \\ &= \mathrm{mes}(A \cap [0,1-x[) + \mathrm{mes}(A \cap [1-x,1[) = \mathrm{mes}(A).\end{aligned}$$

b) Si $t \in [0,1[$, notons $f(t)$ l'élément de $\mathcal{F}$ qui est équivalent à t.

Supposons $t \in \tau_r(\mathcal{F})$, ($r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$), alors $t = u + r - \mathrm{Ent}(u+r)$ où $u \in \mathcal{F}$; notons $n = \mathrm{Ent}(u+r)$, n vaut 0 ou 1 ; comme t et u diffèrent du rationnel $r-n$, nécessairement $u = f(t)$ et $r = t - f(t) + n$; si $t \geq f(t)$, alors $n = 0$ et $r = t - f(t)$; si $t < f(t)$, alors $n = 1$ et $r = t - f(t) + 1$. Le nombre rationnel r est donc unique (s'il existe).

Montrons maintenant que tout $t \in [0,1[$ est dans $\tau_r(\mathcal{F})$, le nombre r étant défini comme ci-dessus, c'est-à-dire : si $t \geq f(t)$, alors $r = t - f(t)$, et si $t < f(t)$, alors $r = t - f(t) + 1$.

Le nombre r ainsi défini est bien un rationnel dans $[0,1[$. Posons $u = f(t)$.

Si $t \geq f(t)$, $t = f(t) + r = u + r - \mathrm{Ent}(u+r) \in \tau_r(\mathcal{F})$.

Si $t < f(t)$, $t = f(t) + r - 1 = u + r - \mathrm{Ent}(u+r) \in \tau_r(\mathcal{F})$.

La famille $\left(\tau_r(\mathcal{F})\right)_{r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}}$ est donc bien un partage (dénombrable) de $[0,1[$.

Si $\mathcal{F}$ était mesurable, chaque ensemble $\tau_r(\mathcal{F}), r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$, le serait.

S'il était de mesure nulle, chaque ensemble $\tau_r(\mathcal{F}), r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$, serait de mesure nulle, donc négligeable ; l'intervalle $[0,1[= \bigcup_{r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}} \tau_r(\mathcal{F})$ serait réunion dénombrable de parties négligeables, donc négligeable, ce qui est faux.

Si $\mathrm{mes}(\mathcal{F}) = \mu > 0$, en prenant n éléments deux-à-deux distincts de $[0,1[\cap \mathbb{Q}$, on pourrait fabriquer une partie mesurable incluse dans $[0,1[$ dont la mesure serait $n\mu$; l'entier n étant aussi grand qu'on veut, c'est impossible.

L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est donc pas mesurable.

On peut remarquer que l'existence de $\mathcal{F}$ découle de l'axiome du choix. Il n'y a en fait aucun procédé constructif qui permette de trouver un ensemble non mesurable.

Exercice 6 :

(un exemple d'ensemble négligeable non borélien) : Soit $f : \mathscr{C} \to [0,1]$ l'application définie sur l'ensemble de Cantor $\mathscr{C}$ comme à l'exercice 11 du § III.4. Vérifier que f est continue et surjective. Soit $\mathscr{N} = f^{-1}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est un ensemble non mesurable de $[0,1]$ défini comme dans l'exercice 4 ci-dessus. Vérifier que $\mathscr{N}$ est négligeable, et que $f(\mathscr{N}) = \mathscr{F}$. (Si $\mathscr{N}$ était borélien, son image par f serait un ensemble Souslinien (cf. Bourbaki, *Top. Gén.*, Chap. IX) donc mesurable, ce qui n'est pas. Donc $\mathscr{N}$ n'est pas borélien).

Vérifions que l'ensemble triadique de Cantor est négligeable ; comme $\mathscr{N} \subset \mathscr{C}$, l'ensemble $\mathscr{N}$ sera aussi négligeable.

On a vu dans la résolution de l'exercice 11b) du § II.6 que $[0,1] \setminus \mathscr{C} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} O_p$, (réunion disjointe) où chaque O_p est un ouvert réunion disjointe d'un nombre fini d'intervalles ouverts. Plus précisément, nous avons établi que $\bigcup_{p=1}^{N} O_p$ était réunion de $2^N - 1$ intervalles ouverts deux-à-deux disjoints, dont la somme des longueurs est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N$. L'ensemble $[0,1] \setminus \mathscr{C}$ est donc mesurable de mesure 1 dans $[0,1]$. L'ensemble de Cantor est donc mesurable de mesure nulle, c'est-à-dire négligeable.

Nous avons démontré dans la résolution de l'exercice 11c) du § II.6 que f était surjective, et dans la résolution de l'exercice 11 du § III.4 qu'elle était continue.

Comme f est surjective : $f(\mathscr{N}) = f\left(f^{-1}(\mathscr{F})\right) = \mathscr{F}$.

§ VII.5 *SOMMES DE RIEMANN*

Exercice 1 :

Calculer à l'aide de sommes de Riemann les intégrales suivantes :

a) $I(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - \mathrm{e}^{it}} \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| > 1)$.

b) $J_k(z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\left(z - \mathrm{e}^{it}\right)^k} \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| > 1,\quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$.

c) $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right)\mathrm{d}\theta, \quad x \in \mathbb{R}, |x| \neq 1$

(intégrales de Poisson).

d) $W_{2k} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{2k} t \, dt$ (intégrales de Wallis). ■

a) Soit n entier > 0, posons pour p entier entre 0 et n, $t_p = \frac{2p\pi}{n}$. La suite $\sigma_n = (t_p)_{p \in \{0,\cdots,n\}}$ est la subdivision équirépartie de pas $\frac{2\pi}{n}$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Posons $z_p = \exp(it_p)$ et $S_n(z) = \frac{2\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{z - z_p}$; cette somme est une somme de Riemann associée à la subdivision σ_n. D'après le théorème VII.5.1, $S_n(z) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}$.

Calculons la somme $S_n(z)$.

Le complexe z étant fixé, posons $u_p = \frac{1}{z - z_p}$, de telle sorte que $z_p = z - \frac{1}{u_p}$.

Comme pour tout p entier entre 0 et $n-1$, $(z_p)^n = 1$, on en déduit $\left(z - \frac{1}{u_p}\right)^n = 1$, ou encore $(zu_p - 1)^n - u_p^n = 0$. Les n complexes u_p, pour p variant de 0 à $n-1$, sont deux à deux distincts et sont les n zéros du polynôme $P_n(X) = (zX-1)^n - X^n$. Un calcul rapide donne :

$$\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{z - z_p} = \frac{nz^{n-1}}{z^n - 1} = \frac{n}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z^n}} \text{ donc } S_n(z) = \frac{2\pi}{z}\frac{1}{1 - \frac{1}{z^n}}.$$

Si $|z| > 1$, alors $S_n(z) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{2\pi}{z}$. On en déduit : $I(z) = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{z - e^{it}} = \frac{2\pi}{z}$.

On peut remarquer que si $|z| < 1$, le même calcul donne $I(z) = 0$.

b) Nous reprenons ici les mêmes notations que dans le a). Nous obtenons de manière analogue $J_k(z) = \lim_{n\to\infty} S_{k,n}(z)$, où $S_{k,n}(z) = \frac{2\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{(z - z_p)^k}$.

Nous avons établi dans le a) que $S_{1,n}(z) = \frac{2\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{z - z_p} = 2\pi\frac{z^{n-1}}{z^n - 1}$.

En dérivant $k-1$ fois cette fraction rationnelle en z, nous obtenons :

$$S_{1,n}^{(k-1)}(z) = \frac{2\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z - z_p)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)! \quad S_{k,n}(z).$$

Montrons par récurrence sur l'entier $k \geq 1$, que pour tout n entier la fraction rationnelle $S_{1,n}^{(k-1)}(z)$ s'exprime sous la forme :

$$(1)\quad S_{1,n}^{(k-1)}(z)=\frac{1}{z^k}\frac{P_{k,n}(z^n)}{(z^n-1)^k},$$

où $P_{k,n}$ est un polynôme de degré k, de coefficient dominant $2\pi(-1)^{k-1}(k-1)!$, nul en 0.

C'est bien sûr vrai pour $k=1$, $P_{1,n}(X)=2\pi X$. Supposons que cela soit vrai pour $k\geq 1$. En dérivant l'égalité (1), nous obtenons :

$$S_{1,n}^{(k)}(z)=\frac{-k}{z^{k+1}}\frac{P_{k,n}(z^n)}{(z^n-1)^k}+\frac{1}{z^k}nz^{n-1}\left(\frac{-kP_{k,n}(z^n)}{(z^n-1)^{k+1}}+\frac{P'_{k,n}(z^n)}{(z^n-1)^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{z^{k+1}}\frac{-k(z^n-1)P_{k,n}(z^n)-knz^nP_{k,n}(z^n)+nz^n(z^n-1)P'_{k,n}(z^n)}{(z^n-1)^{k+1}}.$$

Nous pouvons poser :

$$(2)\quad \begin{aligned}P_{k+1,n}(X)&=-k(X-1)P_{k,n}(X)-knX\,P_{k,n}(X)+nX(X-1)P'_{k,n}(X)=\\&=nX(X-1)P'_{k,n}(X)-(k(n+1)X-k)P_{k,n}(X).\end{aligned}$$

C'est bien un polynôme nul en 0, de degré $\leq(k+1)$; le coefficient du monôme de degré $(k+1)$ est : $(kn-k(n+1))2\pi(-1)^{k-1}(k-1)!=2\pi(-1)^k k!$. La proposition est donc vraie à l'ordre $(k+1)$.

La propriété est donc démontrée par récurrence.

Nous pouvons aussi déduire de la relation de récurrence (2) que, pour k fixé, les coefficients du polynôme $P_{k,n}(X)$ sont des polynômes en n (de degrés $\leq k$ -1). Nous pouvons donc écrire :

$$P_{k,n}(X)=2\pi(-1)^{k-1}(k-1)!\left(X^k+a_{k,k-1}(n)X^{k-1}+\cdots+a_{k,1}(n)X\right),$$

où $a_{k,k-1}(n),\cdots,a_{k,1}(n)$ sont des fonctions polynomiales de l'entier n.

Nous en déduisons l'expression :

$$S_{k,n}(z)=\frac{2\pi}{z^k}\frac{z^{nk}+a_{k,k-1}(n)z^{n(k-1)}+\cdots+a_{k,1}(n)z^n}{(z^n-1)^k}.$$

Si z est un nombre complexe fixe tel que $|z|<1$, et p un entier ≥ 0, on sait que $n^pz^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Il est donc clair que si $|z|<1$, $S_{k,n}(z)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Si $|z|>1$, nous pouvons écrire :

$$S_{k,n}(z)=\frac{2\pi}{z^k}\frac{1+b_{k,k-1}(n)z^{-n}+\cdots+b_{k,1}(n)z^{-n(k-1)}}{(1-z^{-n})^k},$$

donc :

$$S_{k,n}(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{z^k}.$$

Nous en déduisons le résultat cherché : $J_k(z)=\frac{2\pi}{z^k}$ si $|z|>1$, et $J_k(z)=0$ si $|z|<1$.

c) Nous pouvons exprimer l'intégrale sous la forme :
$I(x)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}(|x-\exp(i\theta)|)\,\mathrm{d}\,\theta.$

Soit n entier > 0, posons pour p entier entre 0 et n, $\theta_p=\frac{2p\pi}{n}$. La suite $\sigma_n=(\theta_p)_{p\in\{0,\cdots,n\}}$ est la subdivision équirépartie de pas $\frac{2\pi}{n}$ de l'intervalle $[0,2\pi]$. Posons $z_p=\exp(i\theta_p)$ et $S_n(x)=\frac{\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathrm{Log}(|x-z_p|)$. On voit que $S_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I(x)$.

Calculons $S_n(x)$.

$$S_n(x)=\frac{\pi}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\mathrm{Log}(|x-z_p|)=\frac{\pi}{n}\mathrm{Log}\left(\prod_{p=0}^{n-1}|x-z_p|\right)=\frac{\pi}{n}\mathrm{Log}\left(\left|\prod_{p=0}^{n-1}(x-z_p)\right|\right).$$

Or la famille $(z_p)_{p\in\{0,\cdots,n-1\}}$ est une famille des zéros du polynôme X^n-1, donc

$$x^n-1=\prod_{p=0}^{n-1}(x-z_p) \text{ et } S_n(x)=\frac{\pi}{n}\mathrm{Log}(|x^n-1|).$$

Si $|x|<1$, alors $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $S_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0=I(x)$.

Si $|x|>1$, écrivons $S_n(x)=\pi\mathrm{Log}(|x|)+\frac{\pi}{n}\mathrm{Log}(|1-x^{-n}|)$. On en déduit $I(x)=\pi\mathrm{Log}(|x|)$.

d) Soit n entier > k, posons pour p entier entre 0 et $2n$, $t_p=\frac{p\pi}{2n}$. La suite $\sigma_n=(t_p)_{p\in\{0,\cdots,2n\}}$ est la subdivision équirépartie de pas $\frac{\pi}{2n}$ de l'intervalle $[0,\pi]$. Posons $S_n=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}\cos^{2k}(t_p)$. On voit que $S_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} W_{2k}$.

Calculons S_n.

Posons $u=\exp\left(i\dfrac{\pi}{2n}\right)$, de telle sorte que $\cos^{2k}(t_p)=\dfrac{1}{2^{2k}}\left(u^p+u^{-p}\right)^{2k}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\cos^{2k}(t_p)=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}u^{-jp}u^{(2k-j)p}=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}u^{2(k-j)p}.$$

Ce qui donne :

$$S_n=\frac{\pi}{4n}\sum_{p=0}^{2n-1}\cos^{2k}(t_p)=\frac{\pi}{4n}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{p=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}u^{2(k-j)p}=\frac{\pi}{4n}\frac{1}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\sum_{p=0}^{2n-1}u^{2(k-j)p}.$$

Le nombre complexe $u^{2(k-j)}$ n'est pas 1, sauf si $k=j$, car l'entier $k-j$ prend ses valeurs entre $-k$ et k et $k<n$; donc :

si $k\neq j$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1}u^{2(k-j)p}=\frac{1-u^{4n(k-j)}}{1-u^{2(k-j)}}=0$;

si $k=j$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1}u^{2(k-j)p}=2n.$

On obtient donc :

$$S_n=\frac{\pi}{4n}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}2n=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}=\frac{\pi}{2}\frac{1\cdot3\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdots(2k)}.$$

La suite de ces sommes de Riemann est donc constante, égale à l'intégrale.

Exercice 9 :

> On donne a et α réels > 0. Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère la fonction
>
> $$\Phi_n:\mathbb{R}\setminus\{0,\cdots,n\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{a}{x}+\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-n}.$$
>
> a) Prouver que l'équation $\Phi_n(x)=\alpha$ possède dans $]n,+\infty[$ une racine unique, que l'on notera x_n.
>
> b) Montrer que $x_n\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{n}{1-e^{-\alpha}}$ (pour $\lambda\in]0,1[$, on pourra chercher $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n\left(\dfrac{n}{\lambda}\right)$, par exemple en utilisant des sommes de Riemann convenables de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1-\lambda x}$).
>
> c) Montrer que $x_n-\dfrac{n}{1-e^{-\alpha}}$ admet une limite finie quand $n\to\infty$, et calculer cette limite. ■

a) L'application Φ_n est continue strictement décroissante sur $]n,+\infty[$; comme $\Phi_n(x)\underset{x\to n,\,x>n}{\longrightarrow}+\infty$ et $\Phi_n(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, l'équation $\Phi_n(x)=\alpha$ admet bien une racine unique dans l'intervalle $]n,+\infty[$.

b) Soit $\mu > 1$, $\Phi_n(\mu n) = \dfrac{a}{\mu n} + \dfrac{1}{\mu n - 1} + \cdots + \dfrac{1}{\mu n - n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{n} + \dfrac{1}{\mu - \frac{1}{n}} + \cdots + \dfrac{1}{\mu - 1}\right)$.

Donc :

$$\Phi_n(\mu n) \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mu - t} = \mathrm{Log}\left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right).$$

Si $\mathrm{Log}\left(\dfrac{\mu}{\mu-1}\right) > \alpha$, ce qui équivaut à $\mu < \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}$, alors on peut trouver un rang N tel que pour tout $n > N$, $\Phi_n(\mu n) > \alpha$, donc $\mu n < x_n$, ou encore $\mu < \dfrac{x_n}{n}$.

De manière analogue, si $\mu > \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}$, on peut trouver un rang N' tel que pour tout $n > N'$, $\Phi_n(\mu n) < \alpha$ donc $\mu n > x_n$ ou encore $\mu > \dfrac{x_n}{n}$.

On peut présenter ce qui précède de la manière suivante :
Si $\varepsilon > 0$,

il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} - \varepsilon < \dfrac{x_n}{n}$,

il existe un entier N' tel que pour tout $n > N'$, $\dfrac{x_n}{n} < \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} + \varepsilon$.

On en déduit $\dfrac{x_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}$.

c) Posons $\lambda = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}$, c'est-à-dire $\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\lambda - t}$, et $\dfrac{x_n}{n} = \lambda + u_n$, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Par définition :

$$\frac{a}{n\lambda + nu_n} + \frac{1}{n\lambda + nu_n - 1} + \cdots + \frac{1}{n\lambda + nu_n - n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\lambda - t},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n}\frac{a}{\lambda + u_n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda + u_n - \dfrac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\lambda - t},$$

d'où :

$$\frac{1}{n}\frac{a}{\lambda+u_n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda+u_n-\frac{k}{n}}-\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\lambda-t}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right),$$

soit encore :

$$\frac{a}{\lambda+u_n}-u_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+u_n-\frac{k}{n}\right)\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)}=n\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\lambda-t}-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right),$$

et enfin :

$$nu_n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+u_n-\frac{k}{n}\right)\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)}=\frac{a}{\lambda+u_n}-n\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\lambda-t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right).$$

Déterminons la limite de chacun des termes.

Le plus facile : $\quad \dfrac{a}{\lambda+u_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{a}{\lambda}$.

Pour le coefficient c_n de nu_n :

remarquons d'abord que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+u_n-\frac{k}{n}\right)\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)}=\frac{u_n}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda+u_n-\frac{k}{n}\right)\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)^2}\ ;$$

Il est facile de voir que le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda-\frac{k}{n}\right)^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}J=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(\lambda-t)^2}=\frac{1}{\lambda-1}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda(\lambda-1)}.$$

Le coefficient c_n de $n\,u_n$ a donc pour limite J.

Dernier terme :

$$w_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right)-n\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\lambda-t}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}\right)-n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{\mathrm{d}t}{\lambda-t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda-\frac{k}{n}}-n\,\mathrm{Log}\left(\frac{\lambda-\frac{k-1}{n}}{\lambda-\frac{k}{n}}\right)\right)=n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\lambda-\frac{k}{n}}-\mathrm{Log}\left(1+\frac{\frac{1}{n}}{\lambda-\frac{k}{n}}\right)\right)$$

soit $w_n \quad = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big(u_{n,k}-\mathrm{Log}(1+u_{n,k})\big)$, où $u_{n,k}=\dfrac{\frac{1}{n}}{\lambda-\frac{k}{n}}$.

Posons $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3\varphi(x)$ pour $x > 0$ et $\varphi(0) = \frac{1}{3}$, l'application φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc bornée sur $\left[\ 0, \frac{1}{\lambda - 1}\ \right]$ (par M en valeur absolue). Pour tout n entier > 0 et k entier entre 1 et n, $0 < u_{n,k} \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda - 1}$, donc $\left|\left(u_{n,k}\right)^3 \varphi\left(u_{n,k}\right)\right| \leq \frac{M}{n^3(\lambda - 1)^3}$.

On en déduit :

$$w_n = n\sum_{k=1}^{n}\left(u_{n,k} - \text{Log}\left(1 + u_{n,k}\right)\right) = \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(u_{n,k}\right)^2 - n\sum_{k=1}^{n}\left(u_{n,k}\right)^3 \varphi\left(u_{n,k}\right).$$

Or :

$$\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(u_{n,k}\right)^2 = \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\lambda - \frac{k}{n}}\right)^2 = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\lambda - \frac{k}{n}\right)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\lambda - t)^2} = \frac{1}{2}J,$$

et on voit que :

$$\left|n\sum_{k=1}^{n}\left(u_{n,k}\right)^3 \varphi\left(u_{n,k}\right)\right| \leq \frac{M}{n(\lambda - 1)^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement :

$$w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}J.$$

Ces trois limites étant établies, nous pouvons en déduire que :

$$x_n - \lambda = n\,u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{a}{\lambda} + \frac{1}{2}J}{J} = \frac{1}{2} + \frac{a}{\lambda J},$$

où

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(\lambda - t)^2} = \frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)}.$$

On vérifie facilement que cela s'écrit aussi :

$$x_n - \frac{n}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} + \frac{a}{\lambda J} = \frac{1}{2}\left[\frac{(2a - 1)\mathrm{e}^{-\alpha} + 1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha}}\right].$$

Exercice 11 :

> Soit a, b réels ($a < b$) et $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ bornée intégrable. Pour toute subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de $[\,a, b\,]$
> ($a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$), on pose

$$V_\sigma(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Montrer que lorsque le pas de σ tend vers 0, les sommes $V_\sigma(f)$ convergent vers

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Démontrons d'abord le résultat dans le cas où f est en escalier.

Soit φ une application en escalier $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$, $(y_j)_{j\in\{0,\cdots,p\}}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$, adaptée à φ, et M un majorant de $|\varphi|$ sur $[a,b]$.

Pour toute subdivision $\sigma=\{a_i\}_{0\le i\le n}$ de $[a,b]$ $(a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b)$, de pas $\delta(\sigma)$, nous pouvons écrire :

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x-\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\right).$$

Pour i donné entre 0 et n-1 :

– si aucun des y_j n'est dans $]a_i,a_{i+1}[$, φ est constante sur cet intervalle, donc :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x-\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|=0 \;;$$

– sinon, on peut majorer ce terme positif :

$$0\le\int_{a_i}^{a_{i+1}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x-\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_{a_i}^{a_{i+1}}|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\le M(a_{i+1}-a_i)\le M\delta(\sigma).$$

Le nombre d'indices i tels que l'intervalle $]a_i,a_{i+1}[$ contient au moins un y_j est au plus p+1. On en déduit :

$$0\le\int_a^b|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right|\le(p+1)M\delta(\sigma),$$

d'où :

$$V_\sigma(\varphi)\underset{\delta(\sigma)\to0}{\to}\int_a^b|\varphi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Etablissons maintenant quelques propriétés utiles :

Si f et g sont bornées intégrables sur $[a, b]$, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, $|V_\sigma(f)-V_\sigma(g)| \leq V_\sigma(f-g)$.

Il est clair que pour toutes fonctions f et g bornées intégrables sur $[a, b]$, et toute subdivision σ de $[a,b]$, $V_\sigma(f+g) \leq V_\sigma(f)+V_\sigma(g)$.

On en déduit :

$$V_\sigma(f)=V_\sigma(f-g+g)\leq V_\sigma(f-g)+V_\sigma(g),$$

et :

$$V_\sigma(g)=V_\sigma(g-f+f)\leq V_\sigma(g-f)+V_\sigma(f).$$

Le résultat en découle immédiatement.

Remarquons que cette propriété est vraie aussi pour $f \mapsto \int_a^b |f|$.

On observe aussi que : $V_\sigma(f) \leq \int_a^b |f|$.

Supposons que f soit bornée intégrable sur $[a, b]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $u \in \mathcal{U}_B$, et $v \in \mathcal{V}_B$, $v \leq f \leq u$ et $\int_a^b (u-v) \leq \frac{\varepsilon}{8}$ (Définition VII.3.1) et on peut trouver φ en escalier telle que $\varphi \leq u$ et $\int_a^b (u-\varphi) \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

Donc, comme $|\varphi - f| = |\varphi - u + u - f| \leq (u-\varphi)+(u-f) \leq (u-\varphi)+(u-v)$, on en déduit :

$$\int_a^b |f-\varphi| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Cette application en escalier étant fixée, pour toute subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ ($a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$), de pas $\delta(\sigma)$:

$$\left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x - V_\sigma(f) - \int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + V_\sigma(\varphi)\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x - \int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x\right| + |V_\sigma(f)-V_\sigma(\varphi)|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x + V_\sigma(f-\varphi) \leq 2\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$0 \leq \int_a^b |f| - V_\sigma(f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b |\varphi| - V_\sigma(\varphi).$$

Comme :

$$V_\sigma(\varphi) \underset{\delta(\sigma)\to 0}{\to} \int_a^b |\varphi(x)| \mathrm{d}x,$$

il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour toute subdivision σ de pas $\delta(\sigma) < \alpha$,

$0 \leq \int_a^b |\varphi| - V_\sigma(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $0 \leq \int_a^b |f| - V_\sigma(f) < \varepsilon$.

On a donc bien démontré que : $V_\sigma(f) \underset{\delta(\sigma)\to 0}{\to} \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

§ VII.6 *PRIMITIVES*

Exercice 1 :

> Soit $a \in]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
>
> $$f(x) = \pi - \sqrt{1-a^2} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\cos t}.$$
>
> Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que $f \circ f = Id_{\mathbb{R}}$. ■

Calculons l'intégrale $I(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\cos t}$ pour $0 \leq x < \pi$, par le changement de variable $u = \mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}\right)$, nous écrivons $\mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$.

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\cos t} = \int_0^{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)\left(1 + a\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int_0^{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{2\mathrm{d}u}{1 + a + (1-a)u^2}.$$

En faisant le changement de variable $v = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\, u$, on obtient facilement :

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\, \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

On en déduit finalement que pour tout x, $0 \leq x < \pi$:

$$f(x) = \pi - 2\,\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\, \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

et donc à la limite, f étant continue :

$$f(\pi) = 0.$$

L'application f étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$, $f(0)=\pi$ et $f(\pi)=0$, les intervalles $[0,\pi]$ et $]0,\pi[$ sont stables par f.

Remarquons que pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\frac{f(x)}{2}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right), \text{ donc } \operatorname{tg}\left(\frac{f(x)}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)},$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f(x)}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{f(f(x))}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{f(x)}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

Nous en déduisons que $\operatorname{tg}\left(\frac{f(f(x))}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, et puisque l'intervalle $]0,\pi[$ est stable par f, pour tout $x \in]0,\pi[$, $f(f(x))=x$. Cette relation est aussi vraie par continuité sur l'intervalle fermé $[0,\pi]$.

Etendons maintenant cette propriété à $\mathbb{R}$.

En utilisant la parité la fonction cos, on établit facilement que pour tout x réel :

$$f(x)+f(-x)=2\pi.$$

On en déduit en particulier l'égalité : $f(-\pi)=2\pi$.

D'autre part, la fonction cos étant 2π-périodique, la fonction $x\mapsto f(x+2\pi)-f(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ de valeur $f(-\pi+2\pi)-f(-\pi)=-2\pi$; d'où pour tout x réel :

$$f(x+2\pi)=f(x)-2\pi \text{ et } f(x-2\pi)=f(x)+2\pi.$$

En conséquence, pour tout x réel :

$$f(f(-x))=f(2\pi-f(x))=2\pi-f(f(x)-2\pi)=2\pi-(f(f(x))+2\pi)=-f(f(x)),$$

et :

$$f(f(x+2\pi))=f(f(x)-2\pi)=f(f(x))+2\pi.$$

La fonction $x\mapsto f(f(x))-x$ est donc 2π-périodique, impaire et nulle sur $[0,\pi]$, donc identiquement nulle.

L'application f est donc bien involutive et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

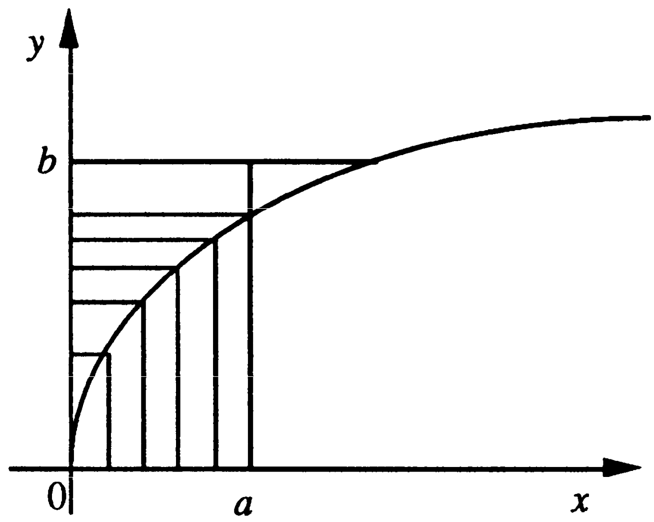
> Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ bijective continue. Montrer :
>
> $$(\forall a\in\mathbb{R}_+,\forall b\in\mathbb{R}_+)\quad ab\le\int_0^a f+\int_0^b f^{<-1>}.\ \blacksquare$$

Comme f est bijective continue sur un intervalle, elle est monotone strictement (théorème IV.2.3) ; si f était strictement décroissante, les valeurs de f seraient majorées par $f(0)$, donc f est strictement croissante ; les valeurs de f étant minorées par $f(0)$, nécessairement $f(0)=0$.

Notons g la réciproque de f, qui est bijective et continue (théorème IV.2.2), et montrons que pour tout $x \geq 0$:

$$x\,f(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{f(x)} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cette proposition est à peu près évidente géométriquement (voir schéma), et si on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$, on peut facilement l'établir en dérivant. Nous allons utiliser des sommes de Riemann pour la démontrer dans le cas général.



Soit $\sigma=\{a_i\}_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[\,0,x\,]$ $(0=a_0<a_1<\cdots<a_n=x)$. Nous pouvons écrire

$$(1)\quad \begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_{i+1})&=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}f(a_{i+1})-\sum_{i=0}^{n-1}a_if(a_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}a_if(a_i)-\sum_{i=0}^{n-1}a_if(a_{i+1})\\&=a_nf(a_n)-a_0f(a_0)-\sum_{i=0}^{n-1}a_i\big(f(a_{i+1})-f(a_i)\big).\end{aligned}$$

C'est ce qu'on appelle une transformation d'Abel.

Posons pour i entre 0 et n, $b_i=f(a_i)$; comme l'application f est strictement croissante, la suite $(b_i)_{i\,\in\,\{0,\cdots,n\}}$ est une subdivision de l'intervalle $[\,0,f(x)\,]$; de plus, comme f est uniformément continue sur $[\,0,x\,]$, on voit que si le pas de la subdivision $\sigma=\{a_i\}_{0\leq i\leq n}$ tend vers 0, alors le pas de la subdivision $(b_i)_{i\,\in\,\{0,\cdots,n\}}$ tend aussi vers 0. Les égalités (1) peuvent s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_{i+1})=x\,f(x)-\sum_{i=0}^{n-1}(b_{i+1}-b_i)g(b_i).$$

En faisant tendre le pas de la subdivision σ vers 0, on obtient à la limite :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x f(x) - \int_0^{f(x)} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

ce qu'il fallait établir.

Supposons que $b \geq f(a)$, ce qui est toujours possible puisque f et g jouent des rôles symétriques.

$$\int_0^a f + \int_0^b g = \int_0^a f + \int_0^{f(a)} g + \int_{f(a)}^b g = a f(a) + \int_{f(a)}^b g.$$

Sur l'intervalle $[\,f(a), b\,]$, g est minorée par $g(f(a)) = a$; donc :

$$\int_0^a f + \int_0^b g = a f(a) + \int_{f(a)}^b g \geq a f(a) + (b - f(a))a = ab.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9 :

> Soit $\varphi : \left[\,0, \frac{\pi}{2}\,\right] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $\varphi(0) = 0$. On pose $g(x) = \varphi^2(x)\operatorname{cotg}(x)$ et :
>
> $$f(x) = g'(x) + (\varphi'(x) - \varphi(x)\ \operatorname{cotg} x)^2.$$
>
> a) Prouver que $\int_0^{\pi/2} f \geq 0$ en calculant $\int_0^{\pi/2} g'(x)\,\mathrm{d}x$.
>
> b) Prouver que $\int_0^{\pi/2} f = \int_0^{\pi/2} \varphi'^2 - \int_0^{\pi/2} \varphi^2$. En déduire : $\int_0^{\pi/2} \varphi'^2 \geq \int_0^{\pi/2} \varphi^2$, l'égalité ayant lieu ssi φ est proportionnelle à $x \mapsto \sin x$. On vérifiera soigneusement à chaque étape que les fonctions utilisées sont prolongeables par continuité en 0. ■

Pour tout $x \in \left]\,0, \frac{\pi}{2}\,\right]$:

$f(x) =$

$= 2\varphi(x)\varphi'(x)\operatorname{cotg} x - \varphi^2(x)\left(1 + \operatorname{cotg}^2 x\right) + \varphi'^2(x) - 2\varphi(x)\varphi'(x)\operatorname{cotg} x + \varphi^2(x)\operatorname{cotg}^2 x$

$= \varphi'^2(x) - \varphi^2(x).$

Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\,0, \frac{\pi}{2}\,\right]$, la fonction f admet un prolongement par continuité pour lequel $f(0) = \varphi'^2(0)$. L'égalité $f(x) = \varphi'^2(x) - \varphi^2(x)$ est alors vraie pour tout $x \in \left[\,0, \frac{\pi}{2}\,\right]$.

Posons pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\psi(x) = \varphi(x)\operatorname{cotg} x$. Cette fonction est prolongeable par continuité en 0, puisque :

$\varphi(x)\operatorname{cotg} x = \frac{\varphi(x)}{x} x \operatorname{cotg} x \underset{x \to 0}{\to} \varphi'(0).$

a) Pour tout $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi^2(x)\operatorname{cotg} x\right]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_\varepsilon^{\pi/2} (\varphi'(x) - \varphi(x)\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= -\varphi(\varepsilon)\psi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{\pi/2} (\varphi'(x) - \psi(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit à la limite que :

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\varphi'(x) - \psi(x))^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

b) La relation :

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

est évidente d'après ce qui précède.

Supposons qu'il y ait égalité, alors :

$$0 = \int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\varphi'(x) - \psi(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \mapsto (\varphi'(x) - \psi(x))^2$ étant continue positive d'intégrale nulle, est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $g : x \mapsto \frac{\varphi(x)}{\sin x}$, est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée :

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)\sin x - \varphi(x)\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\operatorname{cotg} x}{\sin^3 x} = \frac{\varphi'(x) - \psi(x)}{\sin^3 x} = 0.$$

Elle est donc constante, et la fonction φ est proportionnelle à la fonction sin sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par continuité.

On vérifie facilement que cette condition est suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 13 :

Pour tous réels $\lambda > 0$, $\mu > 0$, on pose

$$I(\lambda, \mu) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 \cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}}.$$

a) On donne $a_0 = a > 0, b_0 = b > 0$ avec $a > b$. On pose $a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = \sqrt{ab}$. Démontrer que $I(a,b) = I(a_1, b_1)$ (Gauss).

Indication : Vérifier que $t = \text{Arc}\sin \frac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$ définit un changement de variable admissible dans $I(a,b)$, pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Soit $M(a,b)$ la moyenne arithmético-géométrique de a et de b (voir §II.1, exemple 2). Déduire du a) que $M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)}$, ce qui donne un procédé de calcul rapide de l'intégrale elliptique $I(a,b)$ pour laquelle on ne dispose pas de primitive sous forme élémentaire.

■

Posons pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(u) = \frac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$; cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$.

Calculons sa dérivée :

$$\varphi'(u) = 2a\cos u \frac{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right) - 2(a-b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$= 2a\cos u \frac{a+b-(a-b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2} = 2a\cos u \frac{(a+b)\cos^2 u + 2b\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}.$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On constate d'autre part que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2a}{a+b+a-b} = 1.$

Posons $\psi(u) = \text{Arc}\sin(\varphi(u))$, pour $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; la fonction ψ est continue strictement croissante bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Calculons d'abord $\cos\psi(u)=\sqrt{1-\varphi^2(u)}$:

$$\cos^2\psi(u)=(1-\varphi(u))(1+\varphi(u))=\left(1-\frac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}\right)\left(1+\frac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}\right)$$

$$=\frac{\left(a(1-\sin u)^2+b\left(1-\sin^2 u\right)\right)\left(a(1+\sin u)^2+b\left(1-\sin^2 u\right)\right)}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$=(1-\sin u)(1+\sin u)\frac{(a(1-\sin u)+b(1+\sin u))(a(1+\sin u)+b(1-\sin u))}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$=\cos^2 u\frac{(a+b-(a-b)\sin u)(a+b+(a-b)\sin u)}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$=\cos^2 u\frac{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}=\cos^2 u\frac{(a+b)^2\cos^2 u+4ab\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}.$$

En tenant compte de ce que : $a_1=\dfrac{a+b}{2}$ et $b_1=\sqrt{ab}$, nous obtenons finalement :

$$\cos\psi(u)=2\cos u\frac{\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}}{a+b+(a-b)\sin^2 u}.$$

Ceci nous permet de calculer

$$\psi'(u)=\frac{\varphi'(u)}{\cos\psi(u)}$$

$$=\frac{a+b+(a-b)\sin^2 u}{2\cos u\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}}2a\cos u\frac{a+b-(a-b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u+b_1^2\sin^2 u}}\frac{a+b-(a-b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)}.$$

Sous cette forme, nous voyons que :

$$\psi'(u)\underset{u\to\pi/2}{\longrightarrow}\frac{a}{b_1}\frac{2b}{2a}=\frac{b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

L'application ψ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et sa dérivée est toujours >0 ; c'est donc bien un changement de variable admissible.

Faisons comme indiqué le changement de variable $t=\psi(u)$ dans l'intégrale $I(a,b)$.

Calculons d'abord $a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$.

$$a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\sin^2(t) = a^2 - \left(a^2 - b^2\right)\frac{4a^2\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}$$

$$= a^2\frac{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2 - 4(a-b)(a+b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2} = a^2\frac{\left(a+b-(a-b)\sin^2 u\right)^2}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)^2}.$$

De telle sorte que :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} = \frac{1}{a}\times\frac{a+b+(a-b)\sin^2 u}{a+b-(a-b)\sin^2 u}.$$

Après tous ces calculs préparatifs nous arrivons au calcul de l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{a+b+(a-b)\sin^2 u}{a+b-(a-b)\sin^2 u}\psi'(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\frac{a+b+(a-b)\sin^2 u}{a+b-(a-b)\sin^2 u}\,\frac{a}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u}}\,\frac{a+b-(a-b)\sin^2 u}{\left(a+b+(a-b)\sin^2 u\right)}\mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u}} = I(a_1, b_1).$$

Cela termine le a).

b) Soit $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout n entier, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Il est clair d'après le a) que la suite $\left(I(a_n, b_n)\right)$ est constante et a pour valeur $I(a,b)$.

On sait que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite commune $\mu = M(a,b)$. Montrons que :

$$I(a_n, b_n) \underset{n\to\infty}{\to} I(\mu,\mu) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mu^2}} = \frac{\pi}{2\mu}.$$

Pour tout n entier, $b_n \le a_n$ donc :

$$a_n^2 = a_n^2\cos^2 t + a_n^2\sin^2 t \ge a_n^2\cos^2 t + b_n^2\sin^2 t$$
$$= a_n^2 - \left(a_n^2 - b_n^2\right)\sin^2 t \ge a_n^2 - \left(a_n^2 - b_n^2\right) = b_n^2.$$

Donc :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a_n^2}} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t}} = I(a_n, b_n) \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b_n^2}},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) \leq \frac{\pi}{2b_n}.$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, nous obtenons :

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 16 :

> Soit $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose $I = \int_a^b f$.
>
> a) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier qu'il existe une unique suite $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a = x_{n,0} < x_{n,1} < \cdots < x_{n,n} = b$ et
>
> $$(\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}) \qquad \int_{x_{n,i}}^{x_{n,i+1}} f = \frac{I}{n}.$$
>
> b) Trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n}\Big(f(x_{n,1}) + f(x_{n,2}) + \cdots + f(x_{n,n})\Big)$. ■

Posons pour $x \in [\,a, b\,]$, $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$; cette application est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée est toujours > 0, et $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = I$; c'est donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme croissant entre les intervalles $[\,a, b\,]$ et $[\,0, I\,]$.

a) On voit facilement que la condition de l'énoncé équivaut à :

$$(\forall i \in \{0, \cdots, n\}) \qquad \int_a^{x_{n,i}} f = \frac{iI}{n} \text{ ou encore } \varphi(x_{n,i}) = \frac{iI}{n}.$$

Il existe donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une unique suite $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ vérifiant cette condition.

b) Connaissant cette suite :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\varphi^{-1}\left(\frac{iI}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{I}\int_0^I f(\varphi^{-1}(y))\mathrm{d}y = \frac{J}{I}.$$

(l'application $f \circ \varphi^{-1}$ est continue)

On peut poser $y = \varphi(x)$ pour calculer l'intégrale J. Cela donne :

$$J = \int_0^I f\left(\varphi^{-1}(y)\right)\mathrm{d}y = \int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{n,i}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{I}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

§ VII.8 *INÉGALITÉS DE SCHWARZ, MINKOWSKI ET HÖLDER*

Exercice 1 :

> Soit a, b réels ($a < b$). On donne $f : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}$ bornée intégrable, et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que φ est T-périodique ($T > 0$) et que $\varphi_{|[\,0,T\,]}$ est bornée intégrable. Montrer que
>
> $$\int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x \underset{\lambda\to\infty}{\to} \frac{1}{T}\left(\int_0^T \varphi\right)\left(\int_a^b f\right). \blacksquare$$

Nous admettrons le théorème du changement de variable pour les fonctions intégrables bornées, qui s'énonce :

> Soient I et J des intervalles compacts et φ une application bijective entre I et J, de classe $\mathscr{C}^1$ dont la réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ (on dit $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme) ; si f est intégrable bornée sur J, alors $f \circ \varphi \times |\varphi'|$ est intégrable bornée sur I et
>
> $$\int_I f \circ \varphi \times |\varphi'| = \int_J f.$$

Nous n'utiliserons ici ce théorème que pour des changements de variable affines.

Pour tout n entier relatif, la fonction $x \mapsto \varphi(x - nT) = \varphi(x)$ est intégrable sur $[\,nT, (n+1)T\,]$ et $\displaystyle\int_{nT}^{(n+1)T} \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_0^T \varphi(x)\mathrm{d}x$ (changement de variable).

Pour tous n et m entiers relatifs $n < m$, l'application φ est intégrable sur $[\,nT, mT\,]$ (théorème VII.3.6). Donc cette application est localement bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ (théorème VII.3.6 et définition VII.6.2).

Remarquons que pour tout x réel :

$$\int_x^{x+T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_x^{T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_x^{T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La valeur moyenne de φ est la même sur chaque intervalle de longueur T ; nous noterons $\mu(\varphi)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ cette valeur moyenne.

Supposons que la propriété décrite par l'énoncé soit vraie dans le cas où la fonction périodique est de valeur moyenne nulle.

Dans le cas où la valeur moyenne de φ est quelconque, considérons la fonction $\psi=\varphi-\mu(\varphi)$; c'est une fonction T-périodique intégrable bornée sur $[0,T]$ et sa valeur moyenne est évidemment nulle. D'après l'hypothèse faite, pour toute application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, intégrable bornée :

$$\int_a^b f(x)\psi(\lambda x)\,\mathrm{d}x\underset{\lambda\to\infty}{\to}\mu(\psi)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_a^b\big(f(x)\varphi(\lambda x)-\mu(\varphi)f(x)\big)\,\mathrm{d}x\underset{\lambda\to\infty}{\to}0,$$

soit encore :

$$\int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x\underset{\lambda\to\infty}{\to}\mu(\varphi)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le résultat sera démontré.

Supposons donc que $\mu(\varphi)=0$.

Montrons que la propriété est vraie si f est la fonction caractéristique d'un intervalle I de bornes a' et b', $a\le a'<b'\le b$. Soit $\lambda>0$:

$$\int_a^b\chi_I(x)\varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\int_{a'}^{b'}\varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'}^{\lambda b'}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

(changement de variable).

Soit n entier tel que $\lambda a'+nT\le\lambda b'<\lambda a'+(n+1)T$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'}^{\lambda b'}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'}^{\lambda a'+nT}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'+nT}^{\lambda b'}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'+nT}^{\lambda b'}\varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

car $\mu(\varphi)=0$. Donc :

$$\frac{1}{\lambda}\left|\int_{\lambda a'}^{\lambda b'}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'+nT}^{\lambda b'}|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'+nT}^{\lambda a'+(n+1)T}|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\int_0^T|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

car $|\varphi|$ est aussi T-périodique. On en déduit :

$$\int_a^b \chi_I(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a'}^{\lambda b'}\varphi(t)\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Cette propriété est encore vraie par linéarité pour toutes les fonctions en escalier sur $[a, b]$, qui sont des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'intervalles.

Soit maintenant f bornée intégrable sur $[a, b]$. D'après le théorème de densité VII.8.3, il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier, telle que $\int_a^b |f - f_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Posons :

$$I(\lambda, f) = \int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x.$$

Soit M un majorant de $|\varphi|$ sur $[0, T]$, donc sur $\mathbb{R}$.

On vérifie que pour toute application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée intégrable :

$$|I(\lambda, f)| = \left|\int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \le M\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = M N_1(f).$$

Donc, pour tout n entier :

$$|I(\lambda, f)| \le |I(\lambda, f_n)| + |I(\lambda, f - f_n)| \le |I(\lambda, f_n)| + M N_1(f - f_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n tel que $N_1(f - f_n) < \frac{1}{2M}\varepsilon$; et cet entier étant fixé, il existe $L > 0$ tel que pour tout $\lambda > L$, $|I(\lambda, f_n)| < \frac{1}{2}\varepsilon$, et par conséquent :

$$|I(\lambda, f)| \le |I(\lambda, f_n)| + M N_1(f - f_n) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{M}{2M}\varepsilon = \varepsilon.$$

On a donc bien montré, dans le cas où $\mu(\varphi) = 0$, que pour toute application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée intégrable :

$$\int_a^b f(x)\varphi(\lambda x)\mathrm{d}x \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Cela termine la démonstration.

Exercice 8 :

> Soit a, b réels ($a < b$), $n \in \mathbb{N}$ ($n \ge 2$) et des réels $p_i > 0$ ($i \in \{0, \cdots, n\}$) tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$; on donne $f_1, \cdots, f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ bornées intégrables.

a) Démontrer que :

$$\int_a^b |f_1 f_2 \cdots f_n| \le \prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b |f_k|^{p_k}\right)^{1/p_k}$$

et discuter le cas de l'égalité (si les f_i sont continues).

b) Soit α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha\beta < 1$. Déduire de a) :

$$\left|\int_a^b f_1 f_2\right|^{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{(1-\alpha\beta)}} \le \left(\int_a^b |f_1|^{1+\alpha}|f_2|^{1+\beta}\right)\left(\int_a^b |f_1|^{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}}\left(\int_a^b |f_2|^{1+\beta}\right)^{\frac{\alpha(1+\beta)}{1-\alpha\beta}}.$$

(référence : Titchmarsch, [18]). ■

a) Seuls les modules des fonctions interviennent, nous pourrons donc supposer qu'elles sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour $n=2$, la propriété de l'énoncé est le théorème de Hölder (Théorème VII.8.2). Démontrons cette propriété par récurrence sur n.

Supposons la propriété vraie pour $n \ge 2$; soient des réels $p_i > 0$ $\quad (i \in \{0,\cdots,n+1\})$ tels que $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_{n+1}}=1$ et des fonctions bornées intégrables $f_1,\cdots,f_{n+1} : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}_+$.

Soit p'_{n+1} le réel > 1 tel que $\dfrac{1}{p'_{n+1}}+\dfrac{1}{p_{n+1}}=1$. Posons pour i variant de 1 à n, $q_i = \dfrac{p_i}{p'_{n+1}}$, on vérifie que ce sont des réels > 0, et que :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i} = p'_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} = p'_{n+1}\left(1-\frac{1}{p_{n+1}}\right) = p'_{n+1}\frac{1}{p'_{n+1}} = 1.$$

D'après le théorème de Hölder :

$$(1)\quad \int_a^b (f_1 f_2\cdots f_n) f_{n+1} \le \left(\int_a^b (f_1 f_2 \cdots f_n)^{p'_{n+1}}\right)^{\frac{1}{p'_{n+1}}}\left(\int_a^b (f_{n+1})^{p_{n+1}}\right)^{\frac{1}{p_{n+1}}}.$$

Posons pour tout i entre 1 et n , $g_i = (f_i)^{p'_{n+1}}$. En appliquant la proposition à l'ordre n :

$$(2)\quad \int_a^b (f_1 f_2\cdots f_n)^{p'_{n+1}} = \int_a^b g_1 g_2 \cdots g_n \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b {g_i}^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}},$$

or ${g_i}^{q_i} = (f_i)^{p'_{n+1}q_i} = {f_i}^{p_i}$, on obtient donc :

$$(3)\quad \left(\int_a^b (f_1 f_2 \mathrm{L} f_n)^{p'_{n+1}}\right)^{\frac{1}{p'_{n+1}}} \le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b {f_i}^{p_i}\right)^{\frac{1}{q_i p'_{n+1}}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\int_a^b {f_i}^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

En définitive :

$$
(4) \quad \begin{aligned}
\int_a^b (f_1 f_2 \cdots f_n) f_{n+1} &\leq \left(\int_a^b (f_1 f_2 \cdots f_n)^{p'_{n+1}} \right)^{\frac{1}{p'_{n+1}}} \left(\int_a^b (f_{n+1})^{p_{n+1}} \right)^{\frac{1}{p_{n+1}}} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\int_a^b (f_{n+1})^{p_{n+1}} \right)^{\frac{1}{p_{n+1}}} = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\int_a^b f_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}.
\end{aligned}
$$

L'inégalité est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Nous avons donc démontré par récurrence que l'inégalité est vraie pour tout n.

Démontrons par récurrence, dans le cas où les fonctions sont continues à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, que s'il y a égalité, alors les fonctions $f_i^{p_i}$, pour i variant de 1 à n, sont proportionnelles entre elles. Nous pouvons supposer qu'il s'agit de fonctions toutes non nulles.

La propriété est démontrée pour $n = 2$ (Hölder).

Supposons la vraie pour $n \geq 2$. Soient des réels $p_i > 0 \quad (i \in \{0, \cdots, n+1\})$ tels que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_{n+1}} = 1$ et des fonctions continues, $f_1, \cdots, f_{n+1} : [\, a, b \,] \to \mathbb{R}_+$.

En reprenant les mêmes notations que ci-dessus, s'il y a égalité dans (4) alors il y a égalité dans (3) (c'est-à-dire (2)) et dans (1).

Comme il y a égalité dans (2), d'après l'hypothèse de récurrence, les fonctions $g_i^{q_i} = f_i^{p_i}$ sont proportionnelles entre elles ; écrivons pour i variant de 1 à n : $f_i^{p_i} = \lambda_i \varphi$, où $\lambda_i > 0$ et φ est une fonction continue positive.

Comme il y a égalité dans (1), les fonctions $(f_{n+1})^{p_{n+1}}$ et $(f_1 f_2 \cdots f_n)^{p'_{n+1}}$ sont proportionnelles entre elles. Or :

$$
(f_1 f_2 \cdots f_n)^{p'_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i \varphi)^{p'_{n+1}/p_i} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i \varphi)^{1/q_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1/q_i} \right) \varphi,
$$

puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} = 1$. Les fonctions $f_i^{p_i}$, pour i variant de 1 à $n+1$ sont donc proportionnelles entre elles.

La propriété est donc démontrée par récurrence.

Réciproquement soient des réels $p_i > 0 \quad (i \in \{0, \cdots, n\})$ tels que $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_n} = 1$, et des fonctions bornées intégrables

$f_1, \cdots, f_n : [\, a, b \,] \to \mathbb{R}_+$; supposons que les fonctions $f_i^{p_i}$, pour i variant de 1 à n, soient proportionnelles entre elles ; écrivons, pour i variant de 1 à n, $f_i^{p_i} = \lambda_i \varphi$, où $\lambda_i > 0$ et $\varphi : [\, a, b \,] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction bornée intégrable. On vérifie que :

$$\prod_{i=1}^{n} f_i = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i \varphi)^{1/p_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1/p_i} \right) \varphi = \mu \varphi ,$$

puisque $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$. On en déduit :

$$\int_a^b \prod_{i=1}^{n} f_i = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{1/p_i} \right) \int_a^b \varphi = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \int_a^b \varphi \right)^{1/p_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i^{p_i} \right)^{1/p_i} .$$

Il y a donc dans ce cas égalité.

b) Nous pouvons encore nous ramener au cas où les fonctions f_1 et f_2 sont réelles positives.

L'inégalité à démontrer est équivalente à l'inégalité :

$$\int_a^b f_1 f_2 \le \left(\int_a^b f_1^{1+\alpha} f_2^{1+\beta} \right)^{\frac{(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}} \left(\int_a^b f_1^{1+\alpha} \right)^{\frac{\beta}{(1+\beta)}} \left(\int_a^b f_2^{1+\beta} \right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}} .$$

Posons $p_1 = \dfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{(1-\alpha\beta)}$, $p_2 = \dfrac{(1+\beta)}{\beta}$ et $p_3 = \dfrac{(1+\alpha)}{\alpha}$, ces trois nombres sont > 0 et : $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{p_3} = \dfrac{1 - \alpha\beta + \beta(1+\alpha) + \alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)} = 1$.

Définissons les trois fonctions :

g_1 telle que $g_1^{p_1} = f_1^{1+\alpha} f_2^{1+\beta}$, soit $g_1 = (f_1)^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\beta}} (f_2)^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha}}$,

g_2 telle que $g_2^{p_2} = f_1^{1+\alpha}$, soit $g_2 = (f_1)^{\frac{(1+\alpha)\beta}{1+\beta}}$,

g_3 telle que $g_3^{p_3} = f_2^{1+\beta}$, soit $g_3 = (f_2)^{\frac{(1+\beta)\alpha}{1+\alpha}}$.

Comme :

$$g_1 g_2 g_3 = (f_1)^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)\beta}{1+\beta}} (f_2)^{\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha} + \frac{(1+\beta)\alpha}{1+\alpha}} = f_1 f_2 ,$$

l'inégalité :

$$\int_a^b g_1 g_2 g_3 \le \left(\int_a^b g_1^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\int_a^b g_2^{p_2} \right)^{1/p_2} \left(\int_a^b g_3^{p_3} \right)^{1/p_3} ,$$

qui résulte du a) s'écrit :

$$\int_a^b f_1 f_2 \le \left(\int_a^b f_1^{1+\alpha} f_2^{1+\beta} \right)^{\frac{(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}} \left(\int_a^b f_1^{1+\alpha} \right)^{\frac{\beta}{(1+\beta)}} \left(\int_a^b f_2^{1+\beta} \right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}} ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre VIII

PRIMITIVES, INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET INTÉGRALES À PARAMÈTRES

§ VIII.1 *PRIMITIVES DE FONCTIONS RATIONNELLES*

Exercice 1 :

> Calculer les primitives suivantes :
>
> a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)(1+x^5)}$ b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$
>
> c) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{(x-\lambda)(x^2+1)^3}\mathrm{d}x$ $(\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda^2+1 \neq 0)$
>
> d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a_1{}^2)\cdots(x^2+a_n{}^2)}$ (les $a_i > 0$, distincts)
>
> e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2}$ (les a_i réels distincts)
>
> f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1}$. ■

a) Posons $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$, on trouve facilement que :

$$u+\bar{u} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } u^2+\bar{u}^2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Les pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1+x^3)(1+x^5)}$ (de partie entière nulle) sont -1 à l'ordre 2, et $-j, -j^2, -u, -\bar{u}, -u^2, -\bar{u}^2$, tous simples ; sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est donc de la forme :

$$\frac{1}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}$$

$$(1)\ =\frac{a}{(1+x)^2}+\frac{b}{(1+x)}+\frac{cx+d}{1-x+x^2}+\frac{ex+f}{1+\left(u+\bar{u}\right)x+x^2}+\frac{gx+h}{1+\left(u^2+\bar{u}^2\right)x+x^2}.$$

En multipliant de deux côtés l'égalité par $(1+x)^2$, et en posant $x=-1$, on obtient $a=\frac{1}{15}$. On considère bien sûr que :

$$\frac{(1+x)^2}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}=\frac{1}{\left(1-x+x^2\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4\right)}.$$

On multiplie les deux membres par $1-x+x^2$, et on pose $x=-j$. Comme :

$$\frac{\left(1-x+x^2\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}=\frac{1}{(1+x)\left(1+x^5\right)},$$

on trouve :

$$\frac{1}{(1-j)\left(1-j^5\right)}=\frac{1}{(1-j)\left(1-j^2\right)}=\frac{1}{3}=cj+d.$$

On en déduit : $c=0$ et $d=\frac{1}{3}$.

On multiplie les deux membres par $1+\left(u+\bar{u}\right)x+x^2$, et on pose $x=-u$. Comme :

$$\frac{\left(1+\left(u+\bar{u}\right)x+x^2\right)}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}=\frac{1}{\left(1+x^3\right)(1+x)\left(1+\left(u^2+\bar{u}^2\right)x+x^2\right)},$$

on trouve :

$$f-eu=\frac{1}{\left(1-u^3\right)(1-u)\left(1-\left(u^2+\bar{u}^2\right)u+u^2\right)}=\frac{1}{\left(1+u^4-\left(u+u^3\right)\right)\left(1-\left(u^2+\bar{u}^2\right)u+\right.}$$

$$=\frac{1}{u^2\left(u^{-2}+u^2-\left(u^{-1}+u\right)\right)u\left(u^{-1}+u-\left(u^2+u^{-2}\right)\right)}=-\frac{1}{u^3\left(u^2+\bar{u}^2-\left(u+\bar{u}\right.\right.}$$

$$=-\frac{u^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=-\frac{u^2}{5}=\frac{1}{5}\left(1-\left(u+\bar{u}\right)u\right).$$

On en déduit :

$$f=\frac{1}{5}\ \text{et}\ e=\frac{u+\bar{u}}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{10}=\frac{r_1}{5}.$$

En remplaçant u par u^2, on trouverait de même :

$$h=\frac{1}{5} \text{ et } g=\frac{u^2+\bar{u}^2}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{10}=\frac{r_2}{5}.$$

Les nombres r_1 et r_2 sont les racines de l'équation : $x^2+x-1=0$.

Le dernier coefficient peut être déterminé par plusieurs méthodes, par exemple en posant $x=0$; cela donne :

$$1=\frac{1}{15}+b+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}, \text{ on trouve } b=\frac{1}{5}.$$

La décomposition obtenue est donc :

$$\frac{1}{\left(1+x^3\right)\left(1+x^5\right)}$$

$$=\frac{1/15}{(1+x)^2}+\frac{1/5}{(1+x)}+\frac{1/3}{1-x+x^2}+\frac{1}{5}\times\frac{r_1x+1}{1+r_1x+x^2}+\frac{1}{5}\times\frac{r_2x+1}{1+r_2x+x^2}.$$

Nous écrivons :

$$\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{3/4+(x-1/2)^2},$$

et (k = 1 ou 2) :

$$\frac{r_kx+1}{1+r_kx+x^2}=\frac{r_k}{2}\frac{2x+r_k}{1+r_kx+x^2}+\frac{1-r_k{}^2/2}{\left(1-r_k{}^2/4\right)+\left(x+r_k/2\right)^2}.$$

En remarquant que :

$$r_1=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } r_2=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \text{ d'où } r_k=2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right),$$

on trouve :

$$1-r_k{}^2/2=1-2\cos^2\left(\frac{2k\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{4k\pi}{5}\right)$$

$$\text{et } 1-r_k{}^2/4=1-\cos^2\left(\frac{2k\pi}{5}\right)=\sin^2\left(\frac{2k\pi}{5}\right).$$

On en déduit qu'une primitive de la fraction rationnelle de l'énoncé a) est, sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ qui ne contient pas son pôle réel -1 :

$$f(x)=\frac{-1/15}{1+x}+\frac{1}{5}\log(|1+x|)+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+$$

$$\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{2}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\log\left(1+2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)x+x^2\right)-\frac{\cos\left(\frac{4k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x+\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}\right)\right].$$

b) Pour calculer une primitive $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)^k}$, on peut poser $y = x^2+1$. On est ramené à calculer, sur un intervalle inclus dans $]1,+\infty[$, une primitive $\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)y^k}$. On observe :

$$1 = y^k - (y-1)\left(1+y+\cdots+y^{k-1}\right) \qquad \text{(c'est une identité de Bézout !).}$$

On peut remarquer qu'on applique ici la méthode théorique de décomposition.

On en déduit :

$$\frac{1}{(y-1)y^k} = \frac{1}{y-1} - \left(\frac{1}{y^k} + \frac{1}{y^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{y}\right).$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-1)y^k} = \frac{1}{2}\left[\log(y-1) - \log y + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}\frac{1}{y^p}\right].$$

On trouve donc que sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ une primitive de la fraction rationnelle proposée est :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)^k} = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \sum_{p=1}^{k-1} \frac{1}{p}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^p}\right].$$

c) Soit à calculer : $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{(x-\lambda)\left(x^2+1\right)^3}\mathrm{d}x \quad \left(\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda^2+1 \neq 0\right)$.

De manière générale, la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{A(x)}{(x-\lambda)B(x)},\ A \text{ et } B \text{ polynômes, } B(\lambda) \neq 0,\ \deg(A) \leq \deg(B),$$

s'écrit $F(x) = \frac{a}{x-\lambda} + \frac{P(x)}{B(x)}$, P polynôme, $\deg(P) < \deg(B)$.

On doit vérifier :

$$A(x) = aB(x) + (x-\lambda)P(x),$$

d'où :

$$a = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} \text{ et } P(x) = \frac{A(x)-aB(x)}{x-\lambda} = \frac{A(x)-A(\lambda)}{x-\lambda} - \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}\frac{B(x)-B(\lambda)}{x-\lambda}.$$

On peut en déduire assez facilement le polynôme P.

Ici, on obtient :

$$a = \frac{\left(\lambda^2-1\right)^2}{\left(\lambda^2+1\right)^3} \text{ et } P(x) = \frac{\left(x^2-1\right)^2 - \left(\lambda^2-1\right)^2}{x-\lambda} - a\frac{\left(x^2+1\right)^3 - \left(\lambda^2+1\right)^3}{x-\lambda}.$$

Soit :

$$P(x)=(x+\lambda)(x^2+\lambda^2-2)-a(x+\lambda)\left[(x^2+1)^2+(x^2+1)(\lambda^2+1)+(\lambda^2+1)^2\right].$$

On obtient ainsi la décomposition cherchée :

$$F(x)=\frac{a}{x-\lambda}+\frac{(x+\lambda)}{(x^2+1)^2}+\frac{(\lambda^2-3)(x+\lambda)}{(x^2+1)^3}$$

$$-a\left[\frac{(x+\lambda)}{(x^2+1)}+\frac{(\lambda^2+1)(x+\lambda)}{(x^2+1)^2}+\frac{(\lambda^2+1)^2(x+\lambda)}{(x^2+1)^3}\right].$$

En regroupant les termes on obtient :

$$F(x)=\frac{(\lambda^2-1)^2}{(\lambda^2+1)^3}\frac{1}{x-\lambda}-\frac{(\lambda^2-1)^2}{(\lambda^2+1)^3}\frac{(x+\lambda)}{(x^2+1)}+\frac{4\lambda^2}{(\lambda^2+1)^2}\frac{(x+\lambda)}{(x^2+1)^2}-\frac{4}{\lambda^2+1}\frac{(x+\lambda)}{(x^2+1)^3}.$$

On calcule facilement :

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C,$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C,$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2}+C.$$

La formule (10) du §VIII.1 nous permet de calculer :

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\text{Arc tg}\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\text{Arc tg}\,x+C,$$

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{8}\text{Arc tg}\,x+C.$$

D'autre part la formule (5) nous donne le résultat , si

$\lambda=\alpha+i\beta\ \left(\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}^*\right)$:

$$\int\frac{dx}{x-\lambda}=\log(|x-\lambda|)+i\,\text{Arc tg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

On en déduit le résultat, en ordonnant les termes :

$$\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{(x-\lambda)\left(x^2+1\right)^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\left(\lambda^2-1\right)^2}{\left(\lambda^2+1\right)^3}\left[\mathrm{Log}(|x-\lambda|)+i\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1+x^2\right)\right]$$

$$-\frac{\lambda\left(4+\left(\lambda^2-1\right)^2\right)}{2\left(\lambda^2+1\right)^3}\mathrm{Arctg}\,x+\frac{\lambda}{2\left(\lambda^2+1\right)^2}\frac{\left(\lambda^2-3\right)x-4\lambda}{x^2+1}+\frac{1}{1+\lambda^2}\frac{1-\lambda x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

d) Soit à calculer : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a_1{}^2\right)\cdots\left(x^2+a_n{}^2\right)}$.

Par décomposition en éléments simples, nous obtenons :

$$\frac{1}{\left(y+a_1{}^2\right)\left(y+a_2{}^2\right)\cdots\left(y+a_n{}^2\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{y+a_i^2} \text{ où } b_i=\frac{1}{\prod\limits_{j\neq i}\left(a_j^2-a_i^2\right)}.$$

Nous en déduisons :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a_1{}^2\right)\cdots\left(x^2+a_n{}^2\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\mathrm{Arc\ tg}\left(\frac{x}{a_i}\right).$$

e) Soit à calculer : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2}$ (les a_i réels distincts).

Posons $P(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, et pour j entre 1 et n, $P_j(x)=\prod\limits_{i\neq j}(x-a_i)$. On peut écrire :

$$\frac{1}{P^2(x)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{(x-a_i)^2}+\frac{v_i}{x-a_i}\right).$$

En multipliant par $\left(x-a_j\right)^2$, on obtient :

(1) $\displaystyle\frac{1}{P_j{}^2(x)}=u_j+v_j\left(x-a_j\right)+\left(x-a_j\right)^2F_j(x)$,

où $F_j(x)$ est une fraction rationnelle qui n'a pas le pôle a_j.

On en déduit : $u_j=\dfrac{1}{P_j{}^2(a_j)}$, et en dérivant l'identité (1) :

$$-2\frac{P_j{}'(x)}{P_j{}^3(x)}=v_j+\left(x-a_j\right)\left(\left(x-a_j\right)F_j{}'(x)+2F_j(x)\right),$$

d'où :

$$v_j = -2\frac{P_j'(a_j)}{P_j^3(a_j)}.$$

On peut aussi établir que :

$$P(x) = (x-a_j)P_j(x), \text{ donc } P'(x) = (x-a_j)P_j'(x) + P_j(x),$$

d'où $P'(a_j) = P_j(a_j)$ et $u_j = \dfrac{1}{P'^2(a_j)}$.

D'autre part :

$$P''(x) = (x-a_j)P_j''(x) + 2P_j'(x),$$

d'où $P_j'(a_j) = \dfrac{1}{2}P''(a_j)$ et $v_j = -\dfrac{P''(a_j)}{P'^3(a_j)}$.

Sur chaque intervalle ne contenant aucun des a_i, la primitive cherchée est :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{P^2(x)} = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i \log(|x-a_i|) - \frac{u_i}{x-a_i}\right) + C.$$

f) Soit à calculer : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$.

Etudions le polynôme $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$. On remarque l'anti-symétrie des coefficients qui entraîne la relation : $x^5 P\left(\dfrac{1}{x}\right) = -P(x)$. Ceci démontre que 1 est zéro de P. Par la méthode de Hörner, ou tout autre méthode, on trouve facilement la factorisation :

$$P(x) = (x-1)^3(x+1)^2.$$

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^2}.$$

Plusieurs méthodes sont envisageables, dont particulièrement la méthode de la division par les puissances croissantes en posant $y = x - 1$.

Nous sommes toutefois dans un cas assez particulier et nous pouvons obtenir l'identité de Bézout cherchée par une autre méthode. Posons $z = \dfrac{1}{2}(x-1)$, de telle sorte que :

$$F(x) = \frac{1}{32z^3(1+z)^2}.$$

Or :

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \frac{z^4}{1+z},$$

d'où en dérivant :

$$-\frac{1}{(1+z)^2}=-1+2z-3z^2+\frac{4z^3(1+z)-z^4}{(1+z)^2}.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{z^3(1+z)^2}=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z}-\frac{4+3z}{(1+z)^2}=\frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z}-\frac{1}{(1+z)^2}-\frac{3}{1+z},$$

d'où la décomposition cherchée :

$$F(x)=\frac{1}{32}\left[\frac{8}{(x-1)^3}-\frac{8}{(x-1)^2}+\frac{6}{(x-1)}-\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{6}{(x+1)}\right].$$

Une primitive de F, sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant ni 1 ni -1, est donc :

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{16}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)}+3\log(|x-1|)+\frac{2}{(x+1)}-3\log(|x+1|)\right].$$

Exercice 2 :

> Calculer, pour $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $m\leq n$, la primitive $\displaystyle\int\frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$. ■

La fraction rationnelle est de partie entière nulle et tous ses pôles sont simples, ce sont les racines d'ordre $2n$ de -1, c'est-à-dire les nombres complexes $z_k=\exp(i\varphi_k)$ où $\varphi_k=\frac{1}{2n}(\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. On voit facilement qu'on obtient tous les pôles (une seule fois) en considérant les complexes $(z_k)_{k\in\{0,\cdots,n-1\}}$, qui sont les pôles de parties imaginaires > 0, et leurs conjugués. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de la fraction rationnelle est donc de la forme :

$$(1)\quad \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_k}{x-z_k}+\frac{\overline{a_k}}{x-\overline{z_k}}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_kx-v_k}{x^2-2\cos\varphi_kx+1}\right),$$

où :

$$u_k=a_k+\overline{a_k}\text{ et }v_k=a_k\overline{z_k}+\overline{a_k}z_k.$$

On obtient (voir *cours d'algèbre* chap. VIII) :

$$a_k=\frac{z_k{}^{2m-1}}{2nz_k{}^{2n-1}}=-\frac{1}{2n}z_k{}^{2m},$$

de telle sorte que :

$$u_k=-\frac{1}{n}\cos(2m\varphi_k)\text{ et }v_k=-\frac{1}{n}\cos((2m-1)\varphi_k).$$

Transformons l'égalité (1) :

$$\frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_kx-v_k}{x^2-2\cos\varphi_kx+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{u_k(x-\cos\varphi_k)}{x^2-2\cos\varphi_kx+1}+\frac{w_k}{(x-\cos\varphi_k\cdots}\right)$$

où :

$$w_k = -v_k + u_k \cos\varphi_k = \frac{1}{n}\left(\cos((2m-1)\varphi_k) - \cos(2m\varphi_k)\cos\varphi_k\right) = \frac{1}{n}\sin(2m\varphi_k)\sin\varphi_k .$$

On peut en déduire :

$$\int \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin(2m\varphi_k)\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{x-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right) - \frac{1}{2}\cos(2m\varphi_k)\log\left(x^2 - 2\cos\varphi_k x + 1\right)\right).$$

Exercice 5 :

> Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $k \geq 2$.
> a) Démontrer :
> $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{k-2}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2k}\sum_{m=0}^{k-2}\frac{1}{\sin\left((m+1)\frac{\pi}{k}\right)}$, nombre que l'on notera S_k.
> b) Soit $r \in \{1,\cdots,k\}$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{km+r}$ converge et que sa somme σ_r est donnée par $\sigma_r = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$. En déduire une autre expression de S_k sous forme de somme de série. ■

Nous remarquons d'abord que "l'élément intégral" est invariant par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, de telle sorte que :

$$S_k = \int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{k-2}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{y^{k-2}}}{1+\frac{1}{y^k}}\,\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty}\frac{y^{k-2}+\cdots+y+1}{y^k+1}\,\mathrm{d}y .$$

On peut en déduire :

$$S_k = \int_0^1 \frac{1+x+\cdots+x^{k-2}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x+\cdots+x^{k-2}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x .$$

Pour nous ramener au calcul fait dans l'exercice 2, effectuons le changement de variable $x = z^2$; nous obtenons :

$$S_k = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x+\cdots+x^{k-2}}{1+x^k}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{z+z^3+\cdots+z^{2k-3}}{1+z^{2k}}\mathrm{d}z.$$

Calculons l'intégrale (convergente) :

$$J_{m,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x \quad ,0 \le m < n.$$

Nous avons établi dans l'exercice 2 l'égalité :

$$\int \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin(2m\varphi_k)\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right) - \frac{1}{2}\cos(2m\varphi_k)\log\left(x^2 - 2\cos\varphi_k x + 1\right)\right),$$

où :

$$\varphi_k = \frac{1}{2n}(\pi + 2k\pi).$$

Comme pour tout $k \in \{0,\cdots,n-1\}$, $\sin\varphi_k > 0$, et $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \varphi_k < \frac{\pi}{2}$:

$$\left[\sin(2m\varphi_k)\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{x-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right)\right]_0^{+\infty} = \sin(2m\varphi_k)\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right)\right) =$$

$$= \sin(2m\varphi_k)\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_k\right)\right)\right) = \sin(2m\varphi_k)(\pi - \varphi_k).$$

D'autre part :

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(2m\varphi_k)\log\left(x^2 - 2\cos\varphi_k x + 1\right)\right)\right]_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(2m\varphi_k)\left(2\log x + \log\left(1 - 2\cos\varphi_k\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(2m\varphi_k)(2\log x)\right).$$

Or on sait que l'intégrale converge ; ce dernier terme est nécessairement nul ; un calcul algébrique le démontrerait, mais c'est inutile. Il reste donc :

$$J_{m,n} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x \quad = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2m\varphi_k)(\pi - \varphi_k).$$

Cette intégrale est la partie imaginaire de la somme :

$$S_{m,n} = \quad = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp(2mi\varphi_k)(\pi-\varphi_k).$$

Calculons cette somme ; nous poserons $\alpha = \exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)$, de telle sorte que

$$\exp(2mi\varphi_k) = \alpha^{2m(2k+1)} \text{ et } S_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{2m(2k+1)}\left(\pi-(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right).$$

On peut calculer cette somme de plusieurs manières, dont la suivante :

$$\alpha^{4m}S_{m,n} = \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-1}\alpha^{2m(2h+3)}\left(\pi-(2h+1)\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{2m(2k+1)}\left(\pi-(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right),$$

d'où, comme $\pi-(2k-1)\frac{\pi}{2n}-\pi+(2k+1)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ et $\pi-(2n-1)\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}$:

$$\alpha^{4m}S_{m,n}-S_{m,n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{n}\alpha^{2m(2k+1)}+\frac{\pi}{2n}\alpha^{2m(2n+1)}-\left(\pi-\frac{\pi}{2n}\right)\alpha^{2m}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi}{n}\alpha^{2m(2k+1)}+\frac{\pi}{n}\alpha^{2m}-\pi\alpha^{2m}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi}{n}\alpha^{2m(2k+1)}-\pi\alpha^{2m}\right).$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{2m(2k+1)} = \alpha^{2m}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{4km} = \alpha^{2m}\frac{\alpha^{4mn}-1}{\alpha^{4m}-1} = 0.$$

On vérifie en effet que $\alpha^{4n} = 1$ et $\alpha^{4m} = \exp\left(2i\pi\frac{m}{n}\right) \neq 1.$

Donc :

$$S_{m,n} = -\frac{\pi}{n}\frac{\alpha^{2m}}{\alpha^{4m}-1}$$

$$= -\frac{\pi}{n}\frac{1}{\alpha^{2m}-\alpha^{-2m}} = \frac{\pi}{2n}\frac{i}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}.$$

On en déduit finalement la valeur cherchée :

$$J_{m,n} = \frac{\pi}{2n}\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)}.$$

On peut appliquer ce résultat au calcul de :

$$S_k = \int_0^{+\infty} \frac{z + z^3 + \cdots + z^{2k-3}}{1+z^{2k}} \mathrm{d}z = \sum_{m=1}^{k-1} J_{m,k} = \frac{\pi}{2k} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{k}\right)}.$$

Ce qui démontre la formule du a).

b) On établit que :

$$\int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^k} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{r-1}\left(1 - x^k + x^{2k} - \cdots + (-1)^m x^{km} + (-1)^{m+1} \frac{x^{k(m+1)}}{1+x^k}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{1}{k+r} + \frac{1}{k+2r} - \cdots (-1)^m \frac{1}{km+r} + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{x^{k(m+1)+r-1}}{1+x^k} \mathrm{d}x.$$

Or :

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{k(m+1)+r-1}}{1+x^k} \mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{k(m+1)+r-1} \mathrm{d}x = \frac{1}{k(m+1)+r} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc la série $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{km+r}$ est convergente et :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{km+r} = \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x^k} \mathrm{d}x = \sigma_r.$$

Il est clair d'autre part que :

$$S_k = \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_r = \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{km+r}.$$

Comme le nombre k est fixe, on peut aussi écrire :

$$S_k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{(-1)^m}{km+r} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{km+r}.$$

Or :

$$\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{km+r} = \sum_{n=km+1}^{k(m+1)-1} \frac{1}{n} \text{ d'où : } S_k = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{n=km+1}^{k(m+1)-1} \frac{1}{n}.$$

§ VIII.2 *FONCTIONS RATIONNELLES EN CERTAINES FONCTIONS USUELLES*

Exercice 1 :

> Démontrer :
> $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\log\left(2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right). \blacksquare$$

Il ne s'agit pas d'une intégrale impropre, en effet :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos 2x}{\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

En faisant dans la dernière intégrale le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{8}$, nous obtenons :

$$I = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2y+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos 2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\operatorname{tg}(2y)\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/4} \sin x\,\mathrm{d}x - \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)\operatorname{tg}(2y)\,\mathrm{d}y\right].$$

Comme pour raison de parité :

$$\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \cos y \operatorname{tg}(2y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

on obtient finalement :

$$I = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\int_0^{\pi/8} \sin y \operatorname{tg}(2y)\,\mathrm{d}y\right].$$

Calculons d'abord la primitive :

$$\int \sin y \operatorname{tg}(2y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{2\sin^2 y \cos y}{1-2\sin^2 y}\,\mathrm{d}y.$$

En posant $s = \sin y$, on obtient :

$$\int \sin y \operatorname{tg}(2y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{2s^2}{1-2s^2}\,\mathrm{d}s = \int \left(\frac{1}{1-2s^2} - 1\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}s} + \frac{1}{1+\sqrt{2}s}\right) - 1\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\Big($$

On obtient :

$$I=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right).$$

Pour terminer le calcul :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

d'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad\text{et}\quad\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{8}.$$

Et :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4},$$

d'où :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Enfin :

$$\frac{1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2}{1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1.$$

On obtient bien :

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\log\left(2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2-\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 3 e) :

> Calculer la primitive :
> $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^3 x+\sin^3 x}\ .\ \blacksquare$$

Pour x n'appartenant pas à l'ensemble $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$, posons $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. On a :

$$1+\cos^3 x+\sin^3 x = 1+\frac{\left(1-t^2\right)^3}{\left(1+t^2\right)^3}+\frac{8t^3}{\left(1+t^2\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(1+t^2\right)^3+\left(1-t^2\right)^3+8t^3}{\left(1+t^2\right)^3}=2\frac{1+3t^4+4t^3}{\left(1+t^2\right)^3}\ .$$

Le polynôme $1+4t^3+3t^4$ a un zéro évident $t=-1$, qui correspond à la valeur $x=-\frac{\pi}{2}$ (par exemple). On obtient facilement :

$$1+4t^3+3t^4=(t+1)^2\left(3t^2-2t+1\right).$$

Le polynôme $3t^2-2t+1$, dont le discriminant réduit est -2, n'a pas de zéro réel et reste >0.

On en déduit que l'ensemble des zéros de la fonction $1+\cos^3 x+\sin^3 x$ est constitué d'une part des éléments de $-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}$, et d'autre part des éléments de $\pi+2\pi\mathbb{Z}$, puisque $1+\cos^3\pi+\sin^3\pi=0$. Nous chercherons une primitive sur un intervalle ne contenant aucune de ces valeurs , en faisant le changement de variable : $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

On obtient :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^3 x+\sin^3 x}=\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{1+4t^3+3t^4}\mathrm{d}t\,.$$

Nous avons à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(t)=\frac{\left(1+t^2\right)^2}{1+4t^3+3t^4}\ .$$

La partie entière n'est pas nulle et vaut visiblement $\frac{1}{3}$. On obtient :

$$F(t)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1+3t^2-2t^3}{(1+t)^2\left(3t^2-2t+1\right)}.$$

La décomposition est de la forme :

$$\frac{1+3t^2-2t^3}{(1+t)^2\left(3t^2-2t+1\right)}=\frac{a}{(1+t)}+\frac{b}{(1+t)^2}+\frac{ct+d}{3t^2-2t+1}.$$

En multipliant des deux cotés par $(1+t)^2$, nous obtenons l'identité :

(1) $$\frac{1+3t^2-2t^3}{\left(3t^2-2t+1\right)}=b+a(t+1)+(t+1)^2R(t),$$

où $R(t)$ est une fraction rationnelle qui n'a pas le pôle -1.

Pour la valeur $t=-1$ nous obtenons $b=\frac{6}{6}=1$.

En dérivant l'identité (1), nous obtenons :

$$\frac{\left(6t-6t^2\right)\left(3t^2-2t+1\right)-\left(1+3t^2-2t^3\right)(6t-2)}{\left(3t^2-2t+1\right)^2}=a+(t+1)\left(2R(t)+(t+1)R'(t)\right).$$

Pour la valeur $t=-1$ cette égalité devient : $a=\frac{-12\times6+6\times8}{6\times6}=-\frac{2}{3}$.

Nous arrivons donc au résultat suivant :

$$\frac{1+3t^2-2t^3}{(1+t)^2\left(3t^2-2t+1\right)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{(1+t)}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{ct+d}{3t^2-2t+1}.$$

Terminons la décomposition en prenant des valeurs particulières.

Pour $t=0$: $1=-\frac{2}{3}+1+\frac{d}{1}$; donc $d=\frac{2}{3}$.

En multipliant par t et en faisant tendre t vers l'infini, ou en remplaçant t par $\frac{1}{u}$ et en posant $u=0$: $-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{c}{3}$; donc $c=0$.

Nous obtenons en définitive :

$$\frac{\left(1+t^2\right)^2}{1+4t^3+3t^4}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{(1+t)}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{3t^2-2t+1}\right].$$

Cela nous donne la primitive :

$$\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{1+4t^3+3t^4}\mathrm{d}t=\frac{t}{3}+\frac{2}{3}\left[-\frac{2}{3}\log(|1+t|)-\frac{1}{(1+t)}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{3t-1}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

où :

$$t=\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 3 h) :

> Calculer la primitive :
> $\int\sqrt{a^2+\mathrm{tg}^2\,x}\,\mathrm{d}x \quad (a>0).$ ■

Nous chercherons une primitive sur un intervalle I ne contenant aucun élément de l'ensemble $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$. Sur un tel intervalle, nous pouvons faire le changement de variable $t=\operatorname{tg} x$. Nous obtenons :

$$\int \sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{a^2+t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

En posant maintenant $t=a\operatorname{sh}\varphi$, cela devient :

$$\int \frac{\sqrt{a^2+t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int \frac{a^2\operatorname{ch}^2\varphi}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int\left(1+\frac{a^2-1}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi.$$

Calculons l'intégrale : $\displaystyle\int \frac{1}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

En faisant le changement de variable $\theta=\operatorname{th}\varphi$; nous obtenons :

$$\int \frac{1}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int \frac{\operatorname{ch}^2\varphi}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int \frac{1}{1-\theta^2+a^2\theta^2}\mathrm{d}\theta=\int \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\left(a^2-1\right)\theta^2}.$$

Si $a>1$:

$$\int \frac{1}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{a^2-1}\operatorname{th}\varphi\right).$$

Si $a<1$:

$$\int \frac{1}{1+a^2\operatorname{sh}^2\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{Arg\,th}\left(\sqrt{1-a^2}\operatorname{th}\varphi\right).$$

D'autre part :

$$\operatorname{th}\varphi=\frac{a\operatorname{sh}\varphi}{a\operatorname{ch}\varphi}=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Nous pouvons en déduire que la primitive cherchée est :

– si $a>1$:

$$\operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}x\right)+\sqrt{a^2-1}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{a^2-1}\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 x}}\right) ;$$

– si $a=1$:

$$\operatorname{Arg\,sh}(\operatorname{tg}x) ;$$

– si $a<1$:

$$\operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}x\right)-\sqrt{1-a^2}\operatorname{Arg\,th}\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 x}}\right).$$

Exercice 4 d) :

> Calculer la primitive :
> $$\int \frac{x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Nous pouvons écrire cette primitive sous la forme :

$$\int \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+x+1\right)}.$$

Nous cherchons une primitive sur un intervalle I ne contenant ni 0 ni -1.

L'intégrale se simplifie en posant $y=\frac{1}{x}$:

$$\int \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+x+1\right)}=\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+y}}\frac{-\mathrm{d}y}{y\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}+1\right)}=\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+y}}\frac{-y\mathrm{d}y}{1+y+y^2}.$$

On pose naturellement $v=\sqrt[3]{1+y}$, de telle sorte que $y=v^3-1$:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+y}}\frac{-y\mathrm{d}y}{1+y+y^2}=\int \frac{1}{v}\frac{\left(1-v^3\right)3v^2\,\mathrm{d}v}{1+v^3-1+v^6-2v^3+1}=3\int \frac{\left(1-v^3\right)v\,\mathrm{d}v}{1-v^3+v^6}.$$

Les pôles de la fraction rationnelle sont les nombres complexes ζ tels que :

$$\zeta^3=-j=\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right) \text{ ou } \zeta^3=-j^2=\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

Ce sont donc les nombres complexes $z_k=\exp(i\varphi_k)$ où $\varphi_k=\frac{\pi}{9}+2k\frac{\pi}{3}$, k prenant les valeurs 0, 1, 2, et leurs conjugués ; ces pôles sont tous simples. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est donc de la forme :

$$3\frac{\left(1-v^3\right)v}{1-v^3+v^6}=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{a_k}{v-z_k}+\frac{\overline{a_k}}{v-\overline{z_k}}\right)=\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{\left(a_k+\overline{a_k}\right)v-\left(a_k\overline{z_k}+\overline{a_k}z_k\right)}{v^2-2v\cos\varphi_k+1}\right).$$

On obtient :

$$a_k=3\frac{\left(1-{z_k}^3\right)z_k}{-3{z_k}^2+6{z_k}^5}=\frac{1-{z_k}^3}{z_k\left(2{z_k}^3-1\right)}=-\overline{z_k}\frac{1+j^2}{2j^2+1}=\overline{z_k}\frac{j}{-i\sqrt{3}}=\frac{ij\overline{z_k}}{\sqrt{3}},$$

de telle sorte que :

$$a_k+\overline{a_k}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\alpha_k) \text{ où } \alpha_k=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}-\varphi_k=\frac{7\pi}{6}-\varphi_k,$$

et :

$$a_k\overline{z_k}+\overline{a_k}z_k=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\beta_k \text{ où } \beta_k=\frac{7\pi}{6}-2\varphi_k.$$

Donc :

$$3\frac{\left(1-v^3\right)v}{1-v^3+v^6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{2v\cos\alpha_k-2\cos\beta_k}{v^2-2v\cos\varphi_k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{2\cos\alpha_k\left(v-\cos\varphi_k\right)+2\left(\cos\alpha_k\cos\varphi_k-\cos\beta_k\right)}{v^2-2v\cos\varphi_k+1}\right)$$

Comme $\beta_k=\alpha_k-\varphi_k$, on obtient :

$$3\frac{\left(1-v^3\right)v}{1-v^3+v^6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{2}\left(\frac{2\cos\alpha_k\left(v-\cos\varphi_k\right)}{v^2-2v\cos\varphi_k+1}-2\frac{\sin\alpha_k\sin\varphi_k}{\left(v-\cos\varphi_k\right)^2+\sin^2\varphi_k}\right).$$

D'où la primitive :

$$\int 3\frac{\left(1-v^3\right)v}{1-v^3+v^6}\mathrm{d}v=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{2}\left(\cos\alpha_k\log\left(v^2-2\cos\varphi_k v+1\right)-2\sin\alpha_k\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{v-\cos\varphi_k}{\sin\varphi_k}\right)\right),$$

où $v=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}$.

Exercice 4 h) :

> Calculer la primitive :
>
> $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+b^2\cos^2 x\right)^n}\quad (n\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{R}^*).\ \blacksquare$$

Nous cherchons une primitive sur un intervalle I ne contenant aucun élément de l'ensemble $\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, et sur lequel la fonction $\left(1+b^2\cos^2 x\right)$ ne prend pas la valeur 0. Nous pouvons alors faire le changement de variable $t=\operatorname{tg}x$. Cela donne :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+b^2\cos^2 x\right)^n}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)\left(1+\dfrac{b^2}{1+t^2}\right)^n}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^{n-1}\mathrm{d}t}{\left(1+b^2+t^2\right)^n}.$$

En posant maintenant $\varphi=\operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+b^2}}\right)$, nous obtenons :

$$\int\frac{\left(1+t^2\right)^{n-1}\mathrm{d}t}{\left(1+b^2+t^2\right)^n}=\int\frac{\left(1+\left(1+b^2\right)\operatorname{tg}^2\varphi\right)^{n-1}}{\left(1+b^2\right)^n\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^n}\frac{\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}=$$

$$=\int\frac{\left(\cos^2\varphi+\left(1+b^2\right)\sin^2\varphi\right)^{n-1}}{\left(1+b^2\right)^n}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{d}\varpi=$$

$$= \frac{\sqrt{1+b^2}}{\left(1+b^2\right)^n}\int\left(1+b^2\sin^2\varphi\right)^{n-1}\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Nous pouvons alors calculer les intégrales :

$$I_n = \int\left(1+b^2\sin^2\varphi\right)^{n-1}\mathrm{d}\varphi,$$

en développant selon la formule du binôme et en utilisant les intégrales de Wallis.

Exercice 4 j) :

Calculer la primitive :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}. \blacksquare$$

Les intervalles sur lesquels on cherche une primitive sont a priori inclus dans $[-1,1]$; on voit facilement que la fonction $x \mapsto x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ prend la valeur 0 en -1 et en 0. Nous supposerons que l'intervalle d'intégration I est inclus dans $]0,1[$ ou dans $]-1,0[$; dans le premier cas nous poserons $\varepsilon = 1$, dans le second $\varepsilon = -1$.

Dans les deux cas posons $x = \sin\varphi$ (précisément $\varphi = \operatorname{Arc}\sin x$). Nous obtenons :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} = \int\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi+\sqrt{1-\cos\varphi}} = \int\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi+\sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|} =$$

$$= \int\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi+\varepsilon\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}} = \int\frac{\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi+\varepsilon\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \int\frac{\left(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1\right)\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\right)} = \int\frac{\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\right)\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Soit encore :

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} = \int\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2\log\left(\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\right)+\varepsilon\sqrt{2}\operatorname{Arg\,th}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1-\cos\varphi}{2}\right)+\varepsilon\sqrt{2}\operatorname{Arg\,th}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Il est facile de trouver une primitive en fonction de x :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} = \log\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}\right) + \varepsilon\sqrt{2}\,\mathrm{Arg\,th}\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}\right).$$

Exercice 5 h) :

> Calculer l'intégrale définie :
> $$\int_0^{\pi/4} \log(1+\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

On obtient :

$$\int_0^{\pi/4} \log(1+\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \log(\cos x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{4}\log\sqrt{2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{\pi/4} \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{8}\log 2 + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

Exercice 5 i) :

> Calculer l'intégrale définie :
> $$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx}{\cos^n x}\,\mathrm{d}x \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right). \blacksquare$$

On vérifie facilement que $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Essayons d'établir une récurrence qui permette de calculer I_n.

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx\cos x - \sin nx\sin x}{\cos^{n+1} x}\,\mathrm{d}x = I_n - \int_0^{\pi/4} \sin nx \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x}\,\mathrm{d}x.$$

Nous pouvons calculer la deuxième intégrale par parties :

$$\int_0^{\pi/4} \sin nx \frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n}\frac{1}{\cos^n x}\sin nx\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{n}\frac{1}{\cos^n x} n\cos nx \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\frac{\pi}{4} - I_n.$$

De telle sorte que :

$$I_{n+1} = 2I_n - \frac{1}{n}\left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\frac{\pi}{4},$$

soit encore :

$$\frac{I_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{I_n}{2^n} - \frac{1}{n2^{n+1}}\left(\sqrt{2}\right)^n \sin n\frac{\pi}{4} = \frac{I_n}{2^n} - \frac{1}{2n\left(\sqrt{2}\right)^n}\sin n\frac{\pi}{4}.$$

On obtient finalement :

$$\frac{I_n}{2^n} = \frac{I_1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k\left(\sqrt{2}\right)^k}\sin k\frac{\pi}{4},$$

ou encore : $I_n = 2^n\left[\frac{\pi}{8} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k\left(\sqrt{2}\right)^k}\sin k\frac{\pi}{4}\right].$

Exercice 11 i) :

Calculer la primitive :

$$\int \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Nous cherchons une primitive sur un intervalle inclus dans $]-\infty, -3[$ ou dans $]-1, +\infty[$. Nous pouvons utiliser le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$.

Nous obtenons :

$$u^2 = \frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3},\ x+3 = \frac{2}{1-u^2} \text{ et } x+2 = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Il vient :

$$\int \operatorname{Arc\,tg} u \,\mathrm{d}x = (x+2)\operatorname{Arc\,tg} u - \int (x+2)\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} =$$

$$= (x+2)\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}.$$

On pourra retenir l'idée qu'il y a toujours de multiples manières d'intégrer par parties, et qu'un choix judicieux peut simplifier considérablement les calculs.

Pour terminer :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{|x+3|}+\sqrt{|x+1|}}{\left|\sqrt{|x+3|}-\sqrt{|x+1|}\right|}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+3|}\right)^2}{2}\right) = \log\left(\sqrt{|x+1|}+\sqrt{|x+3|}\right) - \frac{1}{2}\log 2.$$

En effet dans les conditions de l'exercice $\left||x+3|-|x+1|\right| = 2$. On obtient finalement :

$$\int \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,\mathrm{d}x = (x+2)\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{x+1}{x+3}} - \log\left(\sqrt{|x+3|}+\sqrt{|x+1|}\right).$$

Exercice 13 :

Soit c un réel tel que $0 < c < 1$. On considère les primitives :

$$I = \int \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)(x^4-c^2)}} \text{ et } J = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)(x^4-c^2)}}.$$

Montrer qu'en prenant pour nouvelle variable $y = \dfrac{x^2}{1+c} + \dfrac{c}{(1+c)x^2}$,

on peut exprimer I et J à l'aide de $U = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left[(1+c)y-2\sqrt{c}\right](1-y^2)}}$

et $V = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left[(1+c)y+2\sqrt{c}\right](1-y^2)}}$ (Legendre). ■

On peut considérer que les primitives I et J sont définies sur l'intervalle $\left]\sqrt{c}, 1\right[$.

Etudions rapidement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+c}\left(x^2 + \dfrac{c}{x^2}\right)$ sur l'intervalle d'intégration.

On voit facilement qu'elle est d'abord strictement décroissante, de la valeur 1 atteinte en $\sqrt{c}$, jusqu'à sa valeur minimale atteinte en x tel que $x^2 = \dfrac{c}{x^2}$, c'est à dire en $\sqrt[4]{c}$, la valeur minimale étant $\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$; puis strictement croissante jusqu'à la valeur 1, atteinte pour $x = 1$. Il faut donc considérer deux changements de variables, le premier entre l'intervalle $\left]\sqrt{c}, \sqrt[4]{c}\right[$ et $\left]\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}, 1\right[$, le de l'intervalle $\left]\sqrt[4]{c},1\right[$ et $\left]\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c},1\right[$.

Essayons d'exprimer en fonction de x les primitives U et V.

$$y^2=\frac{1}{(1+c)^2}\left(x^4+2c+\frac{c^2}{x^4}\right),$$

d'où :

$$1-y^2=\frac{1}{(1+c)^2}\left((1+c)^2-x^4-2c-\frac{c^2}{x^4}\right)=\frac{1}{(1+c)^2}\left(1+c^2-x^4-\frac{c^2}{x^4}\right)=$$

$$=\frac{1}{(1+c)^2}\frac{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}{x^4}.$$

D'autre part pour $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$:

$$(1+c)y-2\varepsilon\sqrt{c}=x^2+\frac{c}{x^2}-2\varepsilon\sqrt{c}=\left(x-\varepsilon\frac{\sqrt{c}}{x}\right)^2.$$

On obtient aussi :

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+c}\left(2x-\frac{2c}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{x(1+c)}\left(x^2-\frac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

On en déduit finalement :

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left[(1+c)y-2\varepsilon\sqrt{c}\right]\left(1-y^2\right)}}=\int\frac{\dfrac{2}{x(1+c)}\left(x^2-\dfrac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left|x-\varepsilon\dfrac{\sqrt{c}}{x}\right|\sqrt{\dfrac{1}{(1+c)^2}\dfrac{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}{x^4}}}=$$

$$=\int\frac{2x\left(x^2-\dfrac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left|x-\varepsilon\dfrac{\sqrt{c}}{x}\right|\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}}.$$

Pour $\varepsilon=-1$, nous obtenons :

$$V=\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left[(1+c)y+2\sqrt{c}\right]\left(1-y^2\right)}}=\int\frac{2x\left(x^2-\dfrac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{\sqrt{c}}{x}\right)\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}}=$$

$$=\int\frac{2x\left(x-\dfrac{\sqrt{c}}{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}}.$$

Le résultat ne dépend pas du changement de variable utilisé.

Pour $\varepsilon = 1$.

Si nous utilisons le changement de variable entre l'intervalle $\left]\sqrt[4]{c}, 1\right[$ et $\left]\frac{2\sqrt{c}}{1+c}, 1\right[$ alors $x > \frac{\sqrt{c}}{x}$, nous obtenons donc :

$$U = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left[(1+c)y - 2\sqrt{c}\right]\left(1-y^2\right)}} = \int \frac{2x\left(x^2 - \frac{c}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x - \frac{\sqrt{c}}{x}\right)\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}} =$$

$$= \int \frac{2x\left(x + \frac{\sqrt{c}}{x}\right)\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}}.$$

Nous voyons que :

$$\frac{U+V}{2} = \int \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}} = I,$$

et que :

$$\frac{U-V}{2\sqrt{c}} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^4\right)\left(x^4-c^2\right)}} = J.$$

Dans le cas où l'intervalle d'intégration est $\left]\sqrt{c}, \sqrt[4]{c}\right[$, le lecteur pourra vérifier qu'il suffit de remplacer U par $-U$ dans les formules ci-dessus.

§ VIII.3 *INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES*

Exercice 3 c) :

> Prouver la convergence et calculer :
>
> $$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^4+3x^2-2}}. \blacksquare$$

On voit facilement qu'on peut effectuer le changement de variable $y = x^2$ sans changer la nature de l'intégrale. Cela donne :

$$I = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{2y\sqrt{-y^2+3y-2}}.$$

Cette intégrale se simplifie en posant $z=\dfrac{1}{y}$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale). On obtient :

$$I=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{-2z^2+3z-1}}=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z)(2z-1)}}.$$

Il s'agit bien d'une intégrale impropre au voisinage des deux bornes, mais convergente par application de la règle de Riemann ($\alpha=1/2$).

C'est une intégrale abélienne et comme :

$$-2z^2+3z-1=(-2)\left(z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}\right)=(-2)\left(\left(z-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{16}-\left(z-\frac{3}{4}\right)^2\right)=\frac{1}{8}\left(1-16\left(z-\frac{3}{4}\right)^2\right).$$

nous pouvons utiliser le changement de variable :

$$z=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sin\varphi \text{ et } \varphi=\operatorname{Arcsin}(4z-3).$$

Pour $z=1$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$; pour $z=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\operatorname{Arcsin}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$. Nous obtenons :

$$I=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\frac{1}{8}\left(1-16\left(z-\frac{3}{4}\right)^2\right)}}=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\frac{1}{4}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\frac{1}{\sqrt{8}}\cos\varphi}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Exercice 4 e) :

> Etudier la convergence et éventuellement calculer :
>
> $$I=\int_0^1\frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1-x)^{3/2}}.\ ■$$

Cette intégrale est impropre au voisinage de la borne 1, et :

$$\frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}\sim\frac{\operatorname{Arcsin}1}{(1-x)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2(1-x)^{3/2}} \text{ (au voisinage de 1).}$$

Elle est donc divergente par application de la règle de Riemann ($\alpha=\dfrac{3}{2}>1$).

Exercice 4 g) :

> Etudier la convergence et éventuellement calculer :
> $$I=\int_0^{+\infty}\frac{x-\operatorname{Arc\,tg}x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}\mathrm{d}x.\ \blacksquare$$

Il s'agit en fait d'une intégrale propre en 0, car :

$$\frac{x-\operatorname{Arc\,tg}x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}\sim\frac{1}{3}\frac{x^3}{x^2}\sim\frac{1}{3}x \text{ (au voisinage de 0).}$$

Soit a réel, $0<a$, calculons séparément les intégrales :

$$\int_a^{+\infty}\frac{x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}=\left[\log(\operatorname{Arc\,tg}x)\right]_a^{+\infty}=$$

$$=\log\left(\frac{\pi}{2}\right)-\log(\operatorname{Arc\,tg}a).$$

La partie tout intégrée a un sens, car l'existence de ses limites aux bornes est évidente, et cela prouve la convergence des intégrales écrites.

D'autre part :

$$\int_a^{+\infty}\frac{\operatorname{Arc\,tg}x\,\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)}=\int_0^{1/a}\frac{y\,\mathrm{d}y}{\left(1+y^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left(1+y^2\right)\right]_0^{1/a}=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{a^2}\right).$$

Dans ce cas, l'intégrale impropre se transforme par changement de variable en intégrale propre.

Nous obtenons donc :

$$\int_a^{+\infty}\frac{x-\operatorname{Arc\,tg}x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}\mathrm{d}x=\log\left(\frac{\pi}{2}\right)-\log(\operatorname{Arc\,tg}a)-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{a^2}\right)=$$

$$=\log\left(\frac{\pi}{2}\right)-\log\left(\frac{\operatorname{Arc\,tg}a}{a}\sqrt{1+a^2}\right).$$

En faisant tendre a vers 0, on obtient facilement :

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-\operatorname{Arc\,tg}x}{x\left(1+x^2\right)\operatorname{Arc\,tg}x}\mathrm{d}x=\log\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 5 :

> Calculer en moins d'une minute $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ ou $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$ grâce au changement $x = e^t$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}$. ■

On peut d'abord remarquer, avant ou après le changement de variable, que les deux intégrales sont égales (on le voit aussi directement en utilisant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$).

Donc :

$$2I = 2J = I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^4+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+e^{2t}}{e^{4t}+1}e^t dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{1+2\operatorname{sh}^2 t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arc tg}\sqrt{2}u\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Donc :

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \left[\frac{x}{1+x^4}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\frac{4x^3\,dx}{(x^4+1)^2} =$$

$$= 4\int_0^{+\infty} \frac{(x^4+1)-1}{(x^4+1)^2}dx = 4I - 4\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2}.$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)^2} = \frac{3}{4}I = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi.$$

Exercice 9 :

a) Démontrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\log u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. On note s ce nombre.

b) Soit x un réel ≥ 1. Calculer $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(x^2+t^2\right)\sqrt{t^2+1}}$.

c) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de s. ■

a) Soit n entier > 0. Nous pouvons utiliser l'identité :

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 - \cdots + (-1)^n u^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} u^{2n+2}}{1+u^2}.$$

Nous sommes amenés à calculer les intégrales :

$$I_k = \int_0^1 u^{2k}(-\log u)\,\mathrm{d}u, \text{ pour } k \text{ entier} \geq 0.$$

En intégrant par parties, nous obtenons facilement :

$$\int_0^1 u^{2k}(-\log u)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{2k+1}}{2k+1}(-\log u)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^{2k+1}}{2k+1} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{-\log u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} + \int_0^1 (-\log u) \frac{(-1)^{n+1} u^{2n+2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Nous pouvons facilement montrer que le reste est de limite nulle, en majorant sa valeur absolue :

$$\left| \int_0^1 (-\log u) \frac{(-1)^{n+1} u^{2n+2}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \right| \leq \int_0^1 (-\log u) u^{2n+2}\,\mathrm{d}u = I_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \frac{-\log u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,$$

ce qu'il fallait démontrer.

b) Posons $x = \operatorname{ch}\beta$ $\quad (\beta \geq 0)$ et utilisons le changement de variable $t = \operatorname{sh}\varphi$. Nous obtenons :

$$g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\left(\operatorname{ch}^2\beta+\operatorname{sh}^2\varphi\right)\operatorname{ch}\varphi}\mathrm{d}\varphi=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\left(\operatorname{ch}^2\beta+\operatorname{sh}^2\varphi\right)}=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}\varphi}{(\operatorname{ch}2\beta+\operatorname{ch}2\varphi)}=\int_0^{+\infty}\frac{4\mathrm{e}^{2\varphi}\mathrm{d}\varphi}{\left(\mathrm{e}^{4\varphi}+2\mathrm{e}^{2\varphi}\operatorname{ch}2\beta+1\right)}.$$

En faisant le changement de variable $u=\mathrm{e}^{2\varphi}$ dans la dernière intégrale, nous obtenons,

– dans le cas où $\beta>0$:

$$g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}u}{\left(u^2+2u\operatorname{ch}2\beta+1\right)}=\int_1^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}u}{\left(u+\mathrm{e}^{2\beta}\right)\left(u+\mathrm{e}^{-2\beta}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sh}2\beta}\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{\left(u+\mathrm{e}^{-2\beta}\right)}-\frac{1}{\left(u+\mathrm{e}^{2\beta}\right)}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{\operatorname{sh}2\beta}\left[\log\left(\frac{u+\mathrm{e}^{-2\beta}}{u+\mathrm{e}^{+2\beta}}\right)\right]_1^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{sh}2\beta}\log\left(\frac{1+\mathrm{e}^{2\beta}}{1+\mathrm{e}^{-2\beta}}\right)=\frac{1}{\operatorname{sh}2\beta}\log\left(\mathrm{e}^{2\beta}\right)=\frac{\beta}{\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta}\ ;$$

– dans le cas où $\beta=0$ (c'est-à-dire $x=1$) :

$$g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}u}{(u+1)^2}=\left[\frac{-2}{u+1}\right]_1^{+\infty}=1.$$

On obtient finalement :

$$g(x)=\frac{\operatorname{Argch}x}{x\sqrt{x^2-1}}\ \text{si}\ x>1\ \text{et}\ g(1)=1.$$

On peut remarquer que g est continue en 1.

c) L'intégrale à calculer est :

$$\int_1^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{Argch}x}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

En utilisant le changement de variable $x=\operatorname{ch}\beta$, $\beta=\operatorname{Argch}x$, nous obtenons :

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta} \operatorname{sh}\beta\,\mathrm{d}\beta = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch}\beta}\,\mathrm{d}\beta = \int_0^{+\infty} \frac{2\beta}{e^{\beta}+e^{-\beta}}\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\beta}{1+e^{-2\beta}} e^{-\beta}\,\mathrm{d}\beta .$$

Nous pouvons poser $u = e^{-\beta}$ pour obtenir :

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{(-\log u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2s.$$

Exercice 12 :

> Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x$. ■

Posons pour tout x réel et n entier ≥ 2 : $f_n(x) = \sin^n x$. On vérifie que :

$$f_n'(x) = n\cos x \sin^{n-1} x$$

et :

$$f_n''(x) = -n\sin x \sin^{n-1} x + n(n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x = -n^2 \sin^n x + n(n-1)\sin^{n-2} x.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n''(x)\,\mathrm{d}x = -n^2 I_n(a) + n(n-1) I_{n-2}(a).$$

Nous pouvons utiliser deux intégrations par parties pour évaluer cette intégrale. Comme $e^{-ax} f_n'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puisque f_n' est bornée, et que $f_n'(0) = 0$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n''(x)\,\mathrm{d}x = \left[e^{-ax} f_n'(x)\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= a\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n'(x)\,\mathrm{d}x .$$

De manière analogue, puisque f_n est bornée et que $f_n(0) = 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n'(x)\,\mathrm{d}x = \left[e^{-ax} f_n(x)\right]_0^{+\infty} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax} f_n(x)\,\mathrm{d}x = aI_n(a).$$

Nous obtenons ainsi pour tout entier $n \geq 2$, la relation de récurrence :

$$a^2 I_n(a) = -n^2 I_n(a) + n(n-1) I_{n-2}(a),$$

soit encore :

$$I_n(a) = \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} I_{n-2}(a).$$

Déterminons les valeurs initiales :

$$I_0(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

et :

$$I_1(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x \, dx,$$

qui est la partie imaginaire de :

$$\int_0^{+\infty} e^{(-a+i)x} dx = \left[\frac{e^{(-a+i)x}}{-a+i} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-i} = \frac{a+i}{a^2+1},$$

donc :

$$I_1(a) = \frac{1}{1+a^2}.$$

On obtient facilement que pour tout p entier > 0 :

$$I_{2p}(a) = \frac{(2p)!}{\left((2p)^2 + a^2\right)\left((2p-2)^2 + a^2\right) \cdots \left(2^2 + a^2\right)} \times \frac{1}{a},$$

et :

$$I_{2p+1}(a) = \frac{(2p+1)!}{\left((2p+1)^2 + a^2\right)\left((2p-1)^2 + a^2\right) \cdots \left(3^2 + a^2\right)} \times \frac{1}{1+a^2}.$$

Exercice 23 e) :

> Indiquer la nature de l'intégrale suivante :
>
> $$\int_0^{+\infty} x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} dx \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ (Polyà).} \blacksquare$$

Nous poserons pour tout x réel ≥ 0, $f(x) = x^\alpha |\cos x|^{x^\beta}$.

Partie I

Discutons de la convergence au voisinage de 0.

$$\log\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right) = x^\beta \log(\cos x) \sim x^\beta (\cos x - 1) \sim -\frac{1}{2} x^{\beta+2} \text{ (au voisinage de 0).}$$

Cas où $\beta+2>0$:

$$\log\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right)\underset{x\to 0}{\to}0, \text{ donc } f(x)\sim x^\alpha \text{ (au voisinage de 0).}$$

Cas où $\beta+2=0$:

$$\log\left(\frac{f(x)}{x^\alpha}\right)\underset{x\to 0}{\to}-\frac{1}{2}, \text{ donc } f(x)\sim \mathrm{e}^{-1/2}\,x^\alpha \text{ (au voisinage de 0).}$$

Dans ces deux cas, d'après la règle de Riemann, l'intégrale est convergente si, et seulement si, $\alpha>-1$.

Cas où $\beta+2<0$:

$$\log(f(x))=\alpha\log x+x^\beta\log(\cos x)=x^{\beta+2}\left(\alpha\frac{\log x}{x^{\beta+2}}+\frac{\log(\cos x)}{x^2}\right).$$

Comme :

$$\alpha\frac{\log x}{x^{\beta+2}}+\frac{\log(\cos x)}{x^2}\underset{x\to 0}{\to}-\frac{1}{2}, \text{ on en déduit : } \log(f(x))\sim-\frac{1}{2}x^{\beta+2},$$

donc $f(x)\underset{x\to 0}{\to}0$.

L'intégrale est dans ce cas toujours convergente.

En conclusion, dans le cas où $\beta<-2$, l'intégrale est toujours convergente au voisinage de la borne 0 , et dans le cas où $\beta\geq-2$, convergente si, et seulement si, $\alpha>-1$.

Discutons maintenant de la convergence de l'intégrale au voisinage de la borne $+\infty$.

D'après le théorème VIII.3.3, l'intégrale est convergente si, et seulement si, la série de terme général :

$$a_k=\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}x^\alpha|\cos x|^{x^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ (où } k \text{ est un entier} \geq 1\text{),}$$

est convergente.

Nous pouvons encadrer cette série par les séries de termes généraux :

$$u_k=\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}|\cos x|^{x^\beta}\,\mathrm{d}x \text{ et } v_k=\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^\alpha\int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}}|\cos x|^{x^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$a_k\sim(k\pi)^\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos y)^{(y+k\pi)^\beta}\,\mathrm{d}y.$$

Dans le cas où $\beta = 0$:

$$a_k \sim (k\pi)^\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y \,\mathrm{d}y \sim 2\pi^\alpha k^\alpha .$$

D'après la règle de Riemann, il y a convergence si, et seulement si, $\alpha < -1$.

Dans le cas où $\beta < 0$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(-\pi/2+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(y+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \le \pi ,$$

Nous utiliserons le lemme dont la démonstration a été reportée à la fin :

$$\int_0^{\pi/2} (\cos y)^t \,\mathrm{d}y \underset{t \to 0,\, t>0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

D'après ce lemme, et ce qui précède :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(y+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \pi ,$$

nous en déduisons :

$$a_k \sim (k\pi)^\alpha \pi \sim \pi^{\alpha+1} k^\alpha .$$

Il y a donc convergence, dans ce cas si, et seulement si, $\alpha < -1$.

Dans le cas où $\beta > 0$:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(\pi/2+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(y+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \le \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(-\pi/2+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y .$$

Nous utiliserons le lemme dont la démonstration a été reportée à la fin :

$$\sqrt{t} \int_0^{\pi/2} (\cos y)^t \,\mathrm{d}y \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

D'après ce lemme :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(\pi/2+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(\pi/2+k\pi)^\beta}}$$

$$\text{et} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(-\pi/2+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(-\pi/2+k\pi)^\beta}} .$$

Donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos y)^{(y+k\pi)^\beta} \,\mathrm{d}y \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{(k\pi)^{\beta/2}} \text{ et } a_k \sim (k\pi)^\alpha \frac{\sqrt{2\pi}}{(k\pi)^{\beta/2}} = \sqrt{2\pi}(k\pi)^{\alpha-\beta/2} .$$

L'intégrale est donc convergente dans ce cas si, et seulement si, $(\alpha - \beta/2) < -1$.

L'intégrale est donc convergente au voisinage des bornes 0 et $+\infty$:
dans le cas où $\beta < -2$, si, et seulement si, $\alpha < -1$,
dans le cas où $\beta > 0$, si, et seulement si, $-1 < \alpha < -1 + \dfrac{\beta}{2}$.

Dans le cas où $-2 \le \beta \le 0$, l'intégrale n'est jamais convergente aux deux bornes en même temps.

Partie II

Démonstration du premier lemme : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos y)^t \,\mathrm{d}y \underset{t\to 0,\, t>0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

C'est un exercice classique et relativement facile pour qui a bien compris les méthodes "du type Césaro". On peut considérer aussi que c'est une application du théorème de convergence dominée (Théorème VII.3.3).

Démonstration du deuxième lemme : $\displaystyle\sqrt{t}\int_0^{\pi/2} (\cos y)^t \,\mathrm{d}y \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Il ressort de l'étude des intégrales de Wallis (exemple 3 du §VIII.2) que :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ (n entier, au voisinage de $+\infty$).}$$

Comme pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $0 \le \cos x \le 1$, la fonction $t \mapsto W_t = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^t x \,\mathrm{d}x$ est décroissante, donc pour t donné ≥ 0, si n est la partie entière de t, on a l'encadrement $W_{n+1} \le W_t \le W_n$. Comme $\mathrm{E}(t) \sim t$ au voisinage de $+\infty$, on voit que $W_t \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}$, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 23 f) :

> Indiquer la nature de l'intégrale suivante :
>
> $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^\alpha\left(1 + x^\beta\right)} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ \blacksquare$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^\alpha\left(1 + x^\beta\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$ où $p = \inf(\alpha, \alpha + \beta)$ et $q = \sup(\alpha, \alpha + \beta)$, nous pouvons nous ramener à la discussion de la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^p + x^q} \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des réels, } p \le q.$$

Etude au voisinage de la borne 0.

On voit que si $p < q$, $\dfrac{\sin x}{x^p + x^q} \sim x^{1-p}$, et si $p = q$, $\dfrac{\sin x}{x^p + x^q} \sim \dfrac{1}{2} x^{1-p}$. L'intégrale est donc convergente au voisinage de la borne 0 si, et seulement si, $1 - p > -1$, c'est-à-dire $p < 2$.

Etude au voisinage de la borne $+\infty$.

Supposons que l'intégrale soit convergente, alors, nécessairement :

$$I_k = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^p + x^q} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ (k \text{ entier}).$$

Pour k entier assez grand, la fonction $x \mapsto x^p + x^q$ est monotone sur l'intervalle $[\,2k\pi, 2k\pi + \pi\,]$, et par conséquent I_k est compris entre $\dfrac{1}{(2k\pi)^p + (2k\pi)^q} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\dfrac{1}{(2k\pi+\pi)^p + (2k\pi+\pi)^q} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$.

Un équivalent de I_k est donc $\dfrac{2}{(2k\pi)^q}$ si $p < q$ et $\dfrac{1}{(2k\pi)^q}$ si $p = q$.

Une condition nécessaire pour que l'intégrale soit convergente au voisinage de la borne $+\infty$ est donc $q > 0$.

Cette condition, $q > 0$, est suffisante ; en effet la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^p + x^q}$, dont la dérivée est $x \mapsto -\dfrac{px^{p-1} + qx^{q-1}}{\left(x^p + x^q\right)^2}$, est alors visiblement décroissante au voisinage de $+\infty$, de limite nulle ; l'étude faite dans l'exemple 13 (§VIII.3) montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$ est dans ce cas convergente au voisinage de la borne $+\infty$.

En conclusion, l'intégrale est convergente en la borne 0 si, et seulement si, $\inf(\alpha, \alpha + \beta) < 2$, et convergente au voisinage de la borne $+\infty$ si, et seulement si, $\sup(\alpha, \alpha + \beta) > 0$. Ces deux conditions ne sont pas contradictoires.

Exercice 32 :

> Montrer que $(\forall x>0)\quad \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \log x + \gamma + \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. ■

1) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t - \log x - \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{x} = 0$, et est donc constante. Cette valeur constante est $L = -\displaystyle\lim_{x\to 0,\, x>0}\left(\log x + \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)$. Il s'agit de montrer $L=\gamma$.

Pour la suite, le réel $x>0$ étant fixé, nous poserons $f(\lambda,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\dfrac{\cos t}{t}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [x,+\infty[$.

2) Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(\lambda,t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ (définition VIII.5.1).

Comme pour tout $\lambda \geq 0$ l'application $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{t}$ est décroissante sur $[x,+\infty[$, pour tous (X,Y), $x<X<Y$, il existe un réel ξ, $X \leq \xi \leq Y$ tel que :

$$\left|\int_X^Y \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda X}}{X}\left|\int_X^{\xi}\cos t\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{X},$$

en application du second théorème de la moyenne.

On voit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ vérifie le critère de Cauchy uniforme pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (la convergence est normale sur tout intervalle $[\lambda_0,+\infty[$ où $\lambda_0>0$).

3) L'application f est continue et bornée en valeur absolue sur $\mathbb{R}_+\times[x,+\infty[$ par $\dfrac{1}{x}$. Les hypothèses du théorème VIII.5.3. sont donc satisfaites. On en déduit que :

$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to 0}{\to} \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4) D'autre part, comme pour tout $t \in [x, +\infty[$, $e^{-\lambda t}\dfrac{\cos t}{t} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, toujours par application du théorème VIII.5.3, on en déduit que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut aussi obtenir directement ce résultat en utilisant la majoration :

$$\left|\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,dt\right| \le \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda x}.$$

5) Posons : $g(x,\lambda) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\cos t}{t}\,dt$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $x > 0$.

Nous voulons maintenant dériver cette intégrale par rapport à λ.

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) = -e^{-\lambda t}\cos t$, est continue et bornée en valeur absolue sur $\mathbb{R}_+ \times [x, +\infty[$.

Comme pour tout $\lambda \ge 0$ l'application $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est décroissante sur $[x, +\infty[$, pour tous (X, Y), tels que $x < X < Y$, il existe un réel ξ, $X \le \xi \le Y$ tel que :

$$\left|\int_X^Y e^{-\lambda t}\cos t\,dt\right| = e^{-\lambda X}\left|\int_X^\xi \cos t\,dt\right| \le 2e^{-\lambda X},$$

par application du second théorème de la moyenne.

La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est uniforme sur tout intervalle $[\lambda_0, +\infty[$, $\lambda_0 > 0$.

On peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme (Théorème VIII.5.4). On en déduit que l'application $\lambda \mapsto g(x,\lambda)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $\lambda > 0$:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x,\lambda) = -\int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\cos t\,dt.$$

Nous pouvons facilement calculer cette intégrale, qui est la partie réelle de :

$$-\int_x^{+\infty} e^{(-\lambda+i)t}\,dt = -\left[\frac{e^{(-\lambda+i)t}}{(-\lambda+i)}\right]_x^{+\infty} = -\frac{e^{-\lambda x}(\cos x + i\sin x)}{\lambda - i} =$$

$$-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}(\lambda+i)(\cos x + i\sin x).$$

Nous obtenons :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}(\sin x - \lambda\cos x).$$

6) Nous pouvons déduire de 3),4) et 5) que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = [g(x,\lambda)]_0^{+\infty} = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Nous obtenons finalement l'égalité :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}(\lambda \cos x - \sin x)\,\mathrm{d}\lambda.$$

7) Posons pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = \log x + \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

Nous voulons déterminer sa limite en 0, que nous avons déjà notée $-L$.
D'après 6) :

$$\Phi(x) = \log x - \sin x \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda + \cos x \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Posons :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

On vérifie que :

$$0 \le I(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\pi}{2},$$

et donc que :

$$\sin x\, I(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0.$$

Posons pour tout $x > 0$:

$$J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{v\,\mathrm{e}^{-v}}{v^2+x^2}\,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left(v^2+x^2\right)\mathrm{e}^{-v}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \log\left(v^2+x^2\right)\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v =$$

$$= -\log(x) + K(x).$$

Nous obtenons pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = \log x(1-\cos x) - \sin x\, I(x) + \cos x\, K(x).$$

8) Montrons que :

$$K(x)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\log\left(v^2+x^2\right)e^{-v}dv \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\log(v)e^{-v}dv.$$

Nous en déduirons évidemment :

$$\Phi(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\log(v)e^{-v}dv.$$

Nous pouvons ici utiliser des majorations explicites. L'intégrale étant impropre au deux bornes, il est utile de traiter séparément les deux problèmes. Soit pour cela $a>0$ quelconque.

Au voisinage de 0.

$$0\le\int_0^a\left(\frac{1}{2}\log\left(v^2+x^2\right)-\log v\right)e^{-v}dv\le\int_0^a\left(\frac{1}{2}\log\left(v^2+x^2\right)-\log v\right)dv$$

$$=\left[v\left(\frac{1}{2}\log\left(v^2+x^2\right)-\log v\right)\right]_0^a-\int_0^a v\left(\frac{v}{v^2+x^2}-\frac{1}{v}\right)dv=$$

$$=\frac{a}{2}\log\left(\frac{a^2+x^2}{a^2}\right)+\int_0^a\frac{x^2}{v^2+x^2}dv=\frac{a}{2}\log\left(\frac{a^2+x^2}{a^2}\right)+x\,\mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{a}{x}\right).$$

Il est clair que la limite existe et est nulle quand x tend vers 0.

Au voisinage de la borne $+\infty$.

$$0\le\int_a^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(v^2+x^2\right)-\log v\right)e^{-v}dv=\int_a^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{x^2}{v^2}\right)\right)e^{-v}dv$$

$$\le\int_a^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{x^2}{v^2}e^{-v}dv=\frac{x^2}{2}\int_a^{+\infty}\frac{e^{-v}}{v^2}dv.$$

La limite, quand x tend vers 0, existe et est bien nulle.

9) Il reste à démontrer :

$$\int_0^{+\infty}\log(v)e^{-v}dv=-\gamma.$$

Démontrons d'abord pour tout $n>0$ l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt=\mathrm{Log}(n).$$

En effet, pour tout $x>0$:

$$\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-nt}}{t}dt=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_{nx}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=$$

$$=\int_x^{nx}\frac{e^{-t}}{t}dt=\int_x^{nx}\frac{dt}{t}-\int_x^{nx}\frac{1-e^{-t}}{t}dt=\mathrm{Log}(n)-\int_x^{nx}\frac{1-e^{-t}}{t}dt.$$

Comme la fonction $t\mapsto\dfrac{1-e^{-t}}{t}$ se prolonge par continuité en 0, on voit que :

$$\int_x^{nx}\frac{1-e^{-t}}{t}dt\underset{x\to 0}{\to}0.$$

On en déduit immédiatement l'égalité annoncée.

D'autre part pour tout $n>0$:

$$\int_0^{+\infty}e^{-nt}dt=\frac{1}{n},$$

on peut donc écrire pour tout n entier >0 :

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\mathrm{Log}(n)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}-\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\right)dt.$$

Nous obtenons :

$$\gamma_n=\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}\left(\frac{1-e^{-nt}}{1-e^{-t}}\right)-\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\right)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt-\int_0^{+\infty}e^{-nt}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt.$$

L'existence de ses intégrales ne pose pas de problème ; on vérifie en effet facilement que les fonctions $t\mapsto e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}\right)$ et $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}-\dfrac{1}{t}$, qui sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$, ont des limites finies en 0 et en $+\infty$, et sont donc bornées en valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$. Soit M un majorant sur $\mathbb{R}_+$ de la valeur absolue de la seconde ; on voit que :

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-nt}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt\right|\le\int_0^{+\infty}e^{-nt}M\,dt=\frac{M}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous obtenons donc l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt.$$

Pour tout $x > 0$ posons :

$$I(x) = \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt =$$

$$= -\text{Log}\left(1-e^{-x}\right) - \left[e^{-t}\text{Log}(t)\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} e^{-t}\text{Log}(t) dt =$$

$$= -\text{Log}\left(1-e^{-x}\right) + e^{-x}\text{Log}(x) - \int_x^{+\infty} e^{-t}\text{Log}(t) dt.$$

Or :

$$-\text{Log}\left(1-e^{-x}\right) + e^{-x}\text{Log}(x) = -\text{Log}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right) - \left(1-e^{-x}\right)\text{Log}(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0,$$

donc finalement :

$$\gamma = \lim_{x\to 0,\, x>0} I(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\text{Log}(t) dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 35 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx$.

a) Vérifier que $u_n = e^{-n}\left(1 + \dfrac{n}{1!} + \dfrac{n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{n^n}{n!}\right)$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \geq 0$.

c) Soit $f_n : x \mapsto e^{-x} \dfrac{x^n}{n!}$ et $v_n = \displaystyle\int_0^n f_n(x) dx$. Montrer que si $x \in [\,0, n\,]$, $\dfrac{f_n(x)}{f_n(2n-x)} = \left(e^{2t} \dfrac{1-t}{1+t}\right)^n$, avec $t = \dfrac{n-x}{n}$. En déduire que $v_n \leq \displaystyle\int_n^{2n} f_n(t) dt \leq u_n$, puis $u_n > \dfrac{1}{2}$ et donc $L \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

d) On pose $u_n - v_n = A_n + B_n$, avec $A_n = \int_n^{2n} (f_n(t) - f_n(2n-t))\mathrm{d}t$

et $B_n = \int_{2n}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$. Prouver : $B_n \le 2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que

$A_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$, avec $g_n(t) = \mathrm{e}^{-nt}(1+t)^n - \mathrm{e}^{nt}(1-t)^n$.

Prouver que $g'_n(t)$ s'annule en un point $t_n \in]0,1[$ unique racine de $t = \operatorname{th}\left(\frac{n}{n-1}t\right)$. En déduire un équivalent de t_n pour $n \to \infty$.

e) Majorer $\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t$ et en déduire enfin que $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure $L = \frac{1}{2}$. ■

a) Dérivons l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

Nous trouvons l'application :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) - \mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = -\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$u_n = \left[-\mathrm{e}^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]_n^{+\infty} = \mathrm{e}^{-n}\left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right).$$

b) En intégrant par parties, nous obtenons :

$$u_n = \left[\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_n^{+\infty} + \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}x =$$

$$u_{n+1} + \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or la fonction :

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{de dérivée :}$$

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\left[\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] = \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{(n+1)!}((n+1) - x),$$

est croissante sur l'intervalle $[\, n, n+1\,]$. Donc pour tout x dans ce

$$e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\geq e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{d'où : }\int_n^{n+1} e^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}x\geq e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous pouvons en déduire que pour tout n entier, $u_n \geq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est positive, elle a une limite $L \geq 0$.

c) On vérifie facilement l'identité proposée :

$$\frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)}=\frac{e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}}{e^{x-2n}\dfrac{(2n-x)^n}{n!}}=e^{2n-2x}\left(\frac{x}{2n-x}\right)^n=\left(e^{2\frac{n-x}{n}}\frac{x}{2n-x}\right)^n,$$

et si :

$$t=\frac{n-x}{n}\ (x\in[\,0,n\,]\text{ donc } t\in[0,1\,])\ \frac{1-t}{1+t}=\frac{n-n+x}{n+n-x}=\frac{x}{2n-x}\ ;$$

on obtient :

$$\frac{f_n(x)}{f_n(2n-x)}=\left(e^{2t}\frac{1-t}{1+t}\right)^n.$$

Sur l'intervalle $[\,0,1\,]$, la fonction $t\mapsto e^{2t}\dfrac{1-t}{1+t}$ est définie et continûment dérivable de dérivée $t\mapsto e^{2t}\left(\dfrac{-2}{(1+t)^2}+2\dfrac{1-t}{1+t}\right)=-\dfrac{2t^2}{(1+t)^2}e^{2t}$; elle est donc strictement décroissante, de la valeur 1 en 0, jusqu'à la valeur 0 en 1. On en déduit que pour tout $x\in[\,0,n\,]$, $f_n(x)\leq f_n(2n-x)$. Donc :

$$v_n=\int_0^n f_n(x)\mathrm{d}x\leq\int_0^n f_n(2n-x)\mathrm{d}x=\int_n^{2n} f_n(y)\mathrm{d}y<\int_n^{+\infty} f_n(y)\mathrm{d}y=u_n.$$

D'autre part, on remarque que :

$$u_n+v_n=\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\left[-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right]_0^{+\infty}=1.$$

Donc :

$$0\leq v_n=1-u_n<u_n \text{ soit encore } 1\geq u_n>\frac{1}{2}.$$

Nous pouvons en déduire que $1\geq L\geq\dfrac{1}{2}$.

d) On vérifie qu'en effet :

$$A_n+B_n=\int_n^{2n}\big(f_n(t)-f_n(2n-t)\big)\mathrm{d}t+\int_{2n}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t=$$

$$= \int_n^{2n} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_n^{2n} f_n(2n-t)\,\mathrm{d}t + \int_{2n}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_n^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{n} f_n(y)\,\mathrm{d}y = u_n - v_n .$$

Majorons $B_n = \displaystyle\int_{2n}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x$. En faisant le changement de variable $x = 2y$, on obtient :

$$B_n = \int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-2y}\frac{2^n y^n}{n!}2\mathrm{d}y = 2^{n+1}\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\frac{y^n}{n!}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.$$

Or pour tout $y \geq 0$, $\mathrm{e}^{-y}\dfrac{y^n}{n!} \leq \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{y} = 1$. Nous obtenons donc :

$$B_n \leq 2^{n+1}\int_n^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = 2^{n+1}\mathrm{e}^{-n} = 2\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Etudions maintenant A_n.

$$A_n = \int_n^{2n}\left(\mathrm{e}^{-x}\frac{x^n}{n!} - \mathrm{e}^{x-2n}\frac{(2n-x)^n}{n!}\right)\mathrm{d}x.$$

En faisant dans cette intégrale le changement de variable $t = \dfrac{x-n}{n}$, soit $x = n(t+1)$, nous obtenons :

$$A_n = \int_0^1\left(\mathrm{e}^{-n(t+1)}\frac{n^n(1+t)^n}{n!} - \mathrm{e}^{-n(1-t)}\frac{n^n(1-t)^n}{n!}\right)n\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\int_0^1\left(\mathrm{e}^{-nt}(1+t)^n - \mathrm{e}^{nt}(1-t)^n\right)\mathrm{d}t = \frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Etudions maintenant les variations de la fonction g_n sur l'intervalle $[\,0,1\,]$.

$$g_n'(t) = -n\mathrm{e}^{-nt}(1+t)^n + n\mathrm{e}^{-nt}(1+t)^{n-1} - n\mathrm{e}^{nt}(1-t)^n + n\mathrm{e}^{nt}(1-t)^{n-1}$$

$$= -n\mathrm{e}^{-nt}\,t(1+t)^{n-1} + n\mathrm{e}^{nt}\,t(1-t)^{n-1} = nt\left(\mathrm{e}^{nt}(1-t)^{n-1} - \mathrm{e}^{-nt}(1+t)^{n-1}\right)$$

Donc, sur $]\,0,1\,[$, $g'_n(t) = 0$, si, et seulement si :

$e^{-\frac{n}{n-1}t}(1+t)=e^{\frac{n}{n-1}t}(1-t)$ soit encore : $t\left[e^{\frac{n}{n-1}t}+e^{-\frac{n}{n-1}t}\right]=e^{\frac{n}{n-1}t}-e^{-\frac{n}{n-1}t}$,

soit enfin :

$$t=\operatorname{th}\left(\frac{n}{n-1}t\right).$$

Etudions la fonction $h(t)=\operatorname{th}\left(\frac{n}{n-1}t\right)-t$ sur $[0,1]$.

Elle est strictement concave comme la fonction th ; elle est nulle en 0 de dérivée $\frac{n}{n-1}-1=\frac{1}{n-1}>0$; sa valeur en 1 est < 0, car la fonction th ne prend que des valeurs < 1 ; elle n'est donc pas croissante et sa dérivée prend la valeur 0 en un réel $c\in\,]0,1[$; elle est donc strictement croissante et > 0 sur $]0,c]$, puis strictement décroissante sur $[c,1]$, de la valeur $h(c)>0$, jusqu'à la valeur $h(1)<0$; elle prend donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur 0 exactement une fois dans l'intervalle $]0,1]$, en un point que nous notons t_n.

En reprenant les calculs ci-dessus, on voit facilement que $g_n'(t)\geq 0$ si, et seulement si, $t\leq\operatorname{th}\left(\frac{n}{n-1}t\right)$, c'est-à-dire $t\leq t_n$. On en déduit que la fonction g_n est strictement croissante sur $[0,t_n]$, de la valeur $g_n(0)=0$ à la valeur $g_n(t_n)>0$, puis strictement décroissante jusqu'à la valeur $g_n(1)=\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Recherche d'un équivalent de t_n.

Posons $x_n=\frac{n}{n-1}t_n$, de telle sorte que $\operatorname{th}(x_n)=\frac{n-1}{n}x_n$, soit encore $x_n-\operatorname{th}(x_n)=\frac{1}{n}x_n$.

Comme $t_n<1$, il est clair que $x_n-\operatorname{th}(x_n)=\frac{1}{n}x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. La fonction $x\mapsto x-\operatorname{th}(x)$ étant strictement croissante continue, sa réciproque est continue ; on peut en déduire que $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. On peut alors affirmer :

$$\frac{1}{n}x_n=x_n-\operatorname{th}(x_n)\sim\frac{1}{3}x_n^{\,3},\text{ donc } x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}\text{ et } t_n=\frac{n-1}{n}x_n\sim\frac{n-1}{n}\sqrt{\frac{3}{n}}\sim\sqrt{\frac{3}{n}}.$$

e) Nous utiliserons la formule de Stirling : $n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (voir §IX.1).

On vérifie que la suite de fonctions $\left(\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n}g_n\right)$ converge simplement vers la fonction nulle ; en effet, pour tout t, $0<t\leq 1$:

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\,g_n(t)=\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\left(\left(\frac{1+t}{\mathrm{e}^{t}}\right)^{n}-\left(\frac{1-t}{\mathrm{e}^{-t}}\right)^{n}\right).$$

Comme :

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\sim\frac{n^{n+1}}{n^{n}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}\mathrm{e}^{-n}=\sqrt{\frac{n}{2\pi}},$$

et que :

$$0\leq\frac{1+t}{\mathrm{e}^{t}}<1 \text{ et } 0\leq\frac{1-t}{\mathrm{e}^{-t}}<1,$$

il est clair que :

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\,g_n(t)\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Nous pouvons aussi trouver un équivalent de la valeur maximum de g_n.

En t_n on a l'égalité :

$$\mathrm{e}^{-nt}(1+t)^{n-1}=\mathrm{e}^{nt}(1-t)^{n-1}.$$

Donc :

$$g_n(t_n)=\mathrm{e}^{-nt_n}(1+t_n)^{n}-\mathrm{e}^{nt_n}(1-t_n)^{n}=\mathrm{e}^{nt_n}(1+t_n)(1-t_n)^{n-1}-\mathrm{e}^{nt_n}(1-t_n)^{n}=$$

$$=\frac{2t_n}{1-t_n}\mathrm{e}^{nt_n}(1-t_n)^{n}.$$

On établit que :

$$n\big(t_n+\log(1-t_n)\big)\sim -n\frac{1}{2}t_n^{\,2}\sim -n\frac{1}{2}\frac{3}{n}\sim-\frac{3}{2},$$

et que donc :

$$g_n(t_n)\sim 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{n}},$$

d'où : $$\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\,g_n(t_n)\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi}}2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{n}}\sim 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

La suite de fonctions $\left(\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\,g_n\right)$ est donc uniformément bornée, de limite simple nulle ; en appliquant le théorème de convergence dominée (théorème VII.3.3), on en déduit que : $A_n=\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t\underset{n\to\infty}{\to}0.$

On peut aussi démontrer cela directement en utilisant les conditions particulières de problème.

Soit M un majorant uniforme de la suite de fonctions $\left(\frac{n^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-n}\,g_n\right)$. Pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $a, 0<a<1$ tel que $M\,a<\frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, comme $t_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, $0 < t_n < a$; nous pouvons alors majorer sur $[a,1]$ la fonction $\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n$ par sa valeur en a ; or $\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n(a) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. On peut donc trouver un entier $N' \geq N$, tel que pour tout entier $n > N'$, et tout $t \in [a,1]$, $0 \leq \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n(t) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n > N'$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n(t)\,dt = \int_0^a \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n(t)\,dt + \int_a^1 \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n} g_n(t)\,dt \leq$$

$$\leq Ma + (1-a)\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc :

$$A_n = \frac{n^{n+1}}{n!}e^{-n}\int_0^1 g_n(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Nous pouvons en déduire : $u_n - v_n = u_n - (1-u_n) = A_n + B_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$,

et par conséquent : $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$,

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 37 :

a) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{n=-k}^{+k} e^{-i\pi n t}$. Montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,dt = \int_{1/2}^1 \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,dt = \frac{1}{2}.$$

b) Soit g continue sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{m\to+\infty}\int_a^b g(x)\sin mx\,dx = 0$.

c) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1. On pose $S_k = \sum_{n=-k}^{+k}\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi n t}\,dt$. Montrer que

$$S_k = \int_0^1 f(t)\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,dt.$$

En prolongeant par continuité les fonctions $\left]0,\frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(0)}{\sin(\pi t)}$ et $\left[\frac{1}{2},1\right[\to \mathbb{R}, t \mapsto \dfrac{f(t)-f(1)}{\sin(\pi t)}$, calculer la limite de la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

d) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dérivable et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)+\frac{1}{2}f(p)=\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t\right).$$

Application :

a) Montrer la convergence des intégrales :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

$$\alpha=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x,\ \beta=\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x \text{ et } \gamma_p=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2i\pi px^2}\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi p(x^2-nx)}\mathrm{d}x=(-i)^{pn^2}\int_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{2i\pi pu^2}\mathrm{d}u.$$

En déduire $\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi p(x^2-nx)}\mathrm{d}x\right)$ en fonction de α, β et p.

c) En appliquant le résultat du d) à la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi\frac{t^2}{p}}$, calculer la somme de Gauss $G_p=\sum_{k=0}^{p-1}\mathrm{e}^{2i\pi\frac{k^2}{p}}$ pour tout entier $p \geq 1$, et déterminer explicitement les valeurs des intégrales de Fresnel α et β. ■

a) Posons $\sigma_k(t)=\sum_{n=-k}^{+k}\mathrm{e}^{-i\pi nt}=\mathrm{e}^{+i\pi kt}\sum_{m=0}^{2k}\mathrm{e}^{-i\pi mt}$.

Si $\mathrm{e}^{i\pi t} \neq 1$, c'est-à-dire $t \notin 2\mathbb{Z}$, on obtient :

$$\sigma_k(t)=\mathrm{e}^{+i\pi kt}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi(2k+1)t}-1}{\mathrm{e}^{-i\pi t}-1}=\mathrm{e}^{+i\pi kt}\frac{\mathrm{e}^{-i\pi(k+1/2)t}\left(\mathrm{e}^{-i\pi(k+1/2)t}-\mathrm{e}^{i\pi(k+1/2)t}\right)}{\mathrm{e}^{-i\pi 1/2t}\left(\mathrm{e}^{-i\pi 1/2t}-\mathrm{e}^{i\pi 1/2t}\right)}=$$

$$=\frac{\sin(\pi(k+1/2)t)}{\sin(\pi t/2)},$$

sinon, si $e^{i\pi t}=1$, la valeur de $\sigma_k(t)$ est $2k+1$.

Effectuons dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t$ le changement de variable $x=1-t$; nous obtenons :

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=\int_{1/2}^{1}\frac{\sin((2n+1)\pi(1-x))}{\sin(\pi(1-x))}\mathrm{d}x=\int_{1/2}^{1}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^1 e^{-2i\pi n t}\mathrm{d}t.$$

La seule intégrale non nulle est celle qui correspond à la valeur 0 de l'indice n. Nous obtenons donc :

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

Pour cette question a) uniquement, nous aurions aussi pu écrire :

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t-\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n-1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=2\int_0^{1/2}\cos(2n\pi t)\mathrm{d}t=0,$$

pour tout n entier >0, et donc :

$$\int_0^{1/2}\frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=\int_0^{1/2}\frac{\sin(\pi t)}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

b) La valeur moyenne de la fonction sin sur une période est $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=0$; nous avons démontré dans la résolution de l'exercice 1, §VII.8, que si la fonction g était bornée intégrable sur l'intervalle $[\,a,b\,]$:

$$\int_a^b g(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}0\times\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

c) $S_k = \sum_{n=-k}^{+k} \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt = \int_0^1 f(t) \sum_{n=-k}^{+k} e^{-2i\pi n t} dt = \int_0^1 f(t) \sigma_k(2t) dt.$

Pour tout $t \in \,]0,1[\,$, $\sigma_k(2t) = \dfrac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$;

et $\sigma_k(0) = 2k+1 = \lim_{t \to 0,\, t>0} \sigma_k(t)$, de même $\sigma_k(1) = 2k+1 = \lim_{t\to 1,\, t<1} \sigma_k(t)$; on en déduit :

$$S_k = \int_0^1 f(t) \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt.$$

Nous pouvons découper cette intégrale en deux et chercher les limites des deux parties .

$$\int_0^{1/2} f(t) \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt = \int_0^{1/2} \frac{f(t) - f(0)}{t} \frac{t}{\sin(\pi t)} \sin((2k+1)\pi t) dt +$$

$$+ f(0) \int_0^{1/2} \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt.$$

D'après le b) et le a), il est clair que :

$$\int_0^{1/2} f(t) \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} f(0).$$

De manière analogue, on prouve que :

$$\int_{1/2}^{1} f(t) \frac{\sin((2k+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2} f(1).$$

Nous pouvons en déduire :

$$S_k \underset{k\to\infty}{\to} \frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

d) Nous pouvons établir que pour tout entier $k > 0$:

$$u_k = \sum_{n=-k}^{+k} \int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t = \sum_{n=-k}^{+k} \sum_{h=0}^{p-1}\left(\int_h^{h+1} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \sum_{n=-k}^{+k} \sum_{h=0}^{p-1}\left(\int_0^1 f(x+h)\mathrm{e}^{-2i\pi n(x+h)}\mathrm{d}x\right) = \sum_{h=0}^{p-1} \sum_{n=-k}^{+k}\left(\int_0^1 f(x+h)\mathrm{e}^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \sum_{h=0}^{p-1} \int_0^1 f(x+h) \sum_{n=-k}^{+k} \mathrm{e}^{-2i\pi nx}\,\mathrm{d}x = \sum_{h=0}^{p-1} \int_0^1 f(x+h)\frac{\sin((2k+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

Comme f est dérivable, nous pouvons appliquer le résultat du c) à chaque fonction $x \mapsto f(x+h)$ (ou plus précisément aux parties réelles et imaginaires de ces fonctions) ; nous obtenons :

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} \sum_{h=0}^{p-1}\left(\frac{f(h)+f(h+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots f(p-1)+\frac{1}{2}f(p).$$

Application.

a) L'intégrale I est impropre en 0 mais convergente d'après la règle de Riemann : $\alpha = \frac{1}{2} < 1$; elle est semi-convergente au voisinage de la borne $+\infty$, car $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante de limite nulle au voisinage de $+\infty$ (voir exemple 13).

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $y = \sqrt{x}$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \cos(y^2)\mathrm{d}y = 2\alpha.$$

De même l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est convergente (pas de problème en 0) et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \sin(y^2)\mathrm{d}y = 2\beta.$$

Il est alors clair que l'intégrale γ_p est convergente et que :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2i\pi px^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos(2\pi px^2)\mathrm{d}x + i\int_0^{+\infty} \sin(2\pi px^2)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi p}}(\alpha + i\beta).$$

On peut remarquer l'égalité :

$$2\gamma_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi p x^2} dx.$$

b) On constate que :

$$\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - nx)} dx = \int_0^1 \exp\left(2i\pi p\left((x - n/2)^2 - n^2/4\right)\right) dx =$$

$$= \exp\left(-i\pi p n^2/2\right) \int_0^1 \exp\left(2i\pi p (n/2 - x)^2\right) dx \cdot$$

Comme $\exp\left(-i\pi p n^2/2\right) = (-i)^{pn^2}$, en effectuant dans l'intégrale le changement de variable $u = \frac{n}{2} - x$, on obtient :

$$\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - nx)} dx = (-i)^{pn^2} \int_{n/2-1}^{n/2} e^{2i\pi p u^2} du.$$

Calculons maintenant :

$$v_k = \sum_{n=-k}^{+k} \int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - nx)} dx = \sum_{n=-k}^{+k} (-i)^{pn^2} \int_{n/2-1}^{n/2} e^{2i\pi p u^2} du.$$

On remarque que si n est pair, $(-i)^{pn^2} = 1$, et que si n est impair, $n = 2m+1$, $(-i)^{pn^2} = (-i)^{p(4m^2+4m+1)} = (-i)^p$, indépendamment de m.

Posons $\varphi(u) = e^{2i\pi p u^2}$.

Dans le cas où k est pair, posons $k = 2h$.

$$v_k = \int_{-h-1}^{-h} \varphi(u) du + (-i)^p \int_{-h-1/2}^{-h+1/2} \varphi(u) du + \cdots + (-i)^p \int_{h-3/2}^{h-1/2} \varphi(u) du + \int_{h-1}^{h} \varphi(u) du =$$

$$= \int_{-h-1}^{h} \varphi(u) du + (-i)^p \int_{-h-1/2}^{h-1/2} \varphi(u) du.$$

Dans le cas où k est impair, posons $k = 2h - 1$; on trouve de manière analogue :

$$v_k = (-i)^p \int_{-h-1/2}^{-h+1/2} \varphi(u) du + \int_{-h}^{-h+1} \varphi(u) du + \cdots + \int_{h-2}^{h-1} \varphi(u) du + (-i)^p \int_{h-3/2}^{h-1/2} \varphi(u) du =$$

$$= \int_{-h}^{h-1} \varphi(u) du + (-i)^p \int_{-h-1/2}^{h-1/2} \varphi(u) du.$$

Nous pouvons en déduire que :

$$v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u + (-i)^p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 2\gamma_p\left(1+(-i)^p\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi p}}(\alpha+i\beta)\left(1+(-i)^p\right).$$

c) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi\frac{t^2}{p}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; on peut donc déduire du b) que :

$$\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)+\frac{1}{2}f(p) = \lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t\right).$$

On remarque ici que :

$$f(0)=f(p)=1\ ,$$

donc :

$$\frac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(p-1)+\frac{1}{2}f(p) = \sum_{k=0}^{p-1} f(k) = G_p.$$

D'autre part :

$$\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p \exp\left(2i\pi\left(\frac{t^2}{p}-nt\right)\right)\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variable $t = px$ dans ces intégrales, on obtient :

$$\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = p\sum_{n=-k}^{+k}\int_0^p \exp\left(2ip\pi\left(x^2-nx\right)\right)\mathrm{d}x = p\,v_k.$$

Nous obtenons en définitive :

$$G_p = \sum_{k=0}^{p-1}\exp\left(2i\pi\frac{k^2}{p}\right) = p\lim_{k\to\infty} v_k = 2p\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt{2\pi p}}\left(1+(-i)^p\right).$$

En appliquant cette formule pour $p = 1$, on trouve :

$$G_1 = 1 = 2\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt{2\pi}}(1-i), \text{ d'où } \alpha+i\beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\frac{1}{1-i} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i).$$

Donc :

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Nous en déduisons en retour que :

$$G_p = \frac{\sqrt{p}}{2}(1+i)\left(1+(-i)^p\right),$$

soit :

$$G_p = \sqrt{p}(1+i) \text{ si } p \equiv 0 \quad [4],$$
$$G_p = \sqrt{p} \text{ si } p \equiv 1 \quad [4],$$
$$G_p = 0 \text{ si } p \equiv 2 \quad [4],$$

$$G_p = \frac{\sqrt{p}}{2}(1+i)^2 = i\sqrt{p} \text{ si } p \equiv 3 \quad [4].$$

Nous pouvons aussi vérifier directement $G_2 = 1 - 1 = 0$.

§ VIII.4 *INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES : COMPLÉMENTS*

Exercice 1 a) :

> Etudier s'il est possible de donner un sens à l'intégrale :
> $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|\sin x|(1+e^x)}}. \blacksquare$$

Cet exercice est analogue à l'exemple 2 de §VIII.4. Nous utiliserons rapidement les mêmes arguments.

Pour tout k entier ≥ 0, l'intégrale :

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{\sqrt{|\sin x|(1+e^x)}} = \int_0^{\pi} \frac{dy}{\sqrt{\sin y(1+e^{y+k\pi})}},$$

est impropre au deux bornes, mais convergente d'après la règle de Riemann ($\alpha = \frac{1}{2}$).

Montrons maintenant que la série $\sum I_k$ est absolument convergente.

On peut utiliser la majoration :

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{dy}{\sqrt{\sin y(1+e^{y+k\pi})}} \leq \int_0^{\pi} \frac{dy}{\sqrt{\sin y(1+e^{k\pi})}} = \frac{1}{\sqrt{(1+e^{k\pi})}} \int_0^{\pi} \frac{dy}{\sqrt{\sin y}}.$$

Comme

$$\frac{1}{\sqrt{(1+e^{k\pi})}} \sim \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^k \text{ et } e^{-\frac{\pi}{2}} < 1,$$

on voit que la série $\sum I_k$ est absolument convergente.

La fonction à intégrer étant positive, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|\sin x|(1+e^x)}}$ a un sens.

Sa valeur est $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} I_k$.

§ VIII.5 *INTÉGRALES À PARAMÈTRES*

Exercice 2 :

> Soit, pour x réel > 0, $J(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t+x^2\sin^2 t}}$.
>
> a) Vérifier que $J(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}$.
>
> b) On pose $K(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}$. Montrer que :
>
> $$J(x)-K(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\mathrm{Log}\,2.$$
>
> Calculer $K(x)$. En déduire que $J(x)+\mathrm{Log}\,x\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}2\,\mathrm{Log}\,2$. ■

a) En effectuant dans l'intégrale $J(x)$ le changement de variable $u=\dfrac{\pi}{2}-t$, on obtient :

$$J(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t+x^2\sin^2 t}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\sin^2 u+x^2\cos^2 u}}.$$

b) Faisons apparaître la différence entre la fonction et la limite présumée :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t-(J(x)-K(x))=\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{\sqrt{\sin^2 t+x^2\cos^2 t}}\right)\mathrm{d}t.$$

On pourrait utiliser le théorème VIII.5.1, mais des moyens plus élémentaires et explicites suffisent ici.

Pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, en posant $S=\sin t$ et $C=\cos t$:

$$0\le\frac{1}{S}-\frac{1}{\sqrt{S^2+x^2C^2}}=\frac{\sqrt{S^2+x^2C^2}-S}{S\sqrt{S^2+x^2C^2}}=\frac{x^2C^2}{S\sqrt{S^2+x^2C^2}\left(S+\sqrt{S^2+x^2C^2}\right)}\le$$

$$\le\frac{x^2C^2}{S\sqrt{S^2}\sqrt{x^2C^2}}=x\frac{C}{S^2}.$$

Donc :

$$0 \le \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - (J(x) - K(x)) \le x \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto (1-\cos t)\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle $\left[\ 0, \dfrac{\pi}{2}\ \right]$; l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ existe bien . On en déduit finalement :

$$J(x) - K(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons cette limite :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t = \left[-2\,\mathrm{Log}(\cos(t/2))\right]_0^{\pi/2} = -2\,\mathrm{Log}(\cos(\pi/4))$$

$$= -2\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Log}\,2.$$

Calculons maintenant $K(x)$, en utilisant le changement de variable $u = \sin t$. On obtient :

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2\cos^2 t}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2 + x^2\left(1-u^2\right)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2 + \left(1-x^2\right)u^2}}.$$

Dans le cas où $x = 1$, $K(1) = 1$;

dans le cas où $x > 1$:

$$K(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2 - \left(x^2-1\right)u^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}u\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{Arc}\sin\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

dans le cas où $x < 1$:

$$K(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x^2+\left(1-x^2\right)u^2}}=\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Argsh}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}u\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Argsh}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Argsh}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Argch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On obtient encore dans ce cas la valeur :

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Log}\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

de telle sorte que :

$$K(x)+\operatorname{Log}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)+\operatorname{Log}(x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Log}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)-\operatorname{Log}(x)\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}\right).$$

On en déduit finalement :

$$K(x)+\operatorname{Log}x \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} \operatorname{Log}2.$$

Comme d'autre part :

$$J(x)-K(x) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} \operatorname{Log}2,$$

on voit que :

$$J(x)+\operatorname{Log}x \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 2\operatorname{Log}2.$$

Exercice 5 :

> Trouver $\lim\limits_{\lambda\to 0,\, \lambda>0} F(\lambda)$, avec $F(\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{t^2+\lambda}}\mathrm{d}t$. ■

Montrons que le théorème VIII.5.3 s'applique.

L'ensemble des paramètres est $\Lambda=\mathbb{R}_+^*$. Nous poserons pour tout $\lambda>0$ et $t\geq 0$:

$$f(\lambda,t)=\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{t^2+\lambda}}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, l' application $t \mapsto f(\lambda, t)$ est continue sur $[\,0, +\infty\,[$.

On obtient facilement la majoration, pour tout $\lambda > 0$ et $t > 0$:

$$0 \leq \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{t^2+\lambda}} \leq \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\left(1+t^2\right)\sqrt{t^2}} = \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)} = \varphi(t).$$

Cette majoration aussi vérifiée pour $t = 0$.

Comme :

$$\varphi(t) = \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)} \leq \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(\sqrt{t^2}\right)} \leq \frac{1}{\left(1+t^2\right)},$$

et que l'application φ est continue sur $[\,0, +\infty\,[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente ; on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(\lambda, t)\,\mathrm{d}t$ est normalement convergente.

Comme l'application φ est bornée sur $[\,0, +\infty\,[$ (continue et $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$), on en déduit que l'application f est bornée.

Enfin, pour tout $t \in [\,0, +\infty\,[$, $f(\lambda, t) \underset{\lambda \to 0,\, \lambda > 0}{\to} \varphi(t)$.

Les hypothèses du théorème VIII.5.3 sont vérifiées. On peut en déduire :

$$F(\lambda) \underset{\lambda \to 0,\, \lambda > 0}{\to} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\left(1+t^2\right)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons cette limite. Nous pouvons utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(u+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= \left[\mathrm{Log}\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_1^{+\infty} = \mathrm{Log}\,2.$$

En conclusion :

$$F(\lambda) \underset{\lambda \to 0,\, \lambda > 0}{\to} \mathrm{Log}\,2.$$

Exercice 12 :

> Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, $\mathrm{Re}(z) > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose :
>
> $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t - iz} \mathrm{d}t$. Etudier la continuité et la dérivabilité de F.
>
> Trouver une relation simple entre F et F', et en déduire $F(x) = 2i\pi \exp(-xz)$ pour tout $x > 0$. ■

Nous supposerons uniquement que les réels x et $\mathrm{Re}(z)$ ne sont pas nuls.

Pour éviter la difficulté de la semi-convergence de l'intégrale $F(x)$, nous pouvons à l'aide d'intégrations par parties nous ramener à des intégrales normalement convergentes (par rapport au paramètre x).

Montrons par récurrence sur p entier que pour tout $x \neq 0$:

$$F(x) = \frac{p!}{(ix)^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+1}} \mathrm{d}t = \frac{p!}{(ix)^p} G_p(x).$$

Plus précisément, montrons que l'intégrale donnant $F(x)$ converge si, et seulement l'intégrale $G_p(x)$ converge, les valeurs étant, s'il y a convergence, identiques.

Ce résultat est vrai pour $p = 0$. S'il est vrai pour p, en intégrant par parties, pour tous X et Y réels, $X < Y$, nous obtenons :

$$\int_X^Y \frac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+1}} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ixt}}{ix} \frac{1}{(t-iz)^{p+1}} \right]_X^Y + \frac{p+1}{ix} \int_X^Y \frac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+2}} \mathrm{d}t.$$

Comme :

$$\frac{e^{ixY}}{ix} \frac{1}{(Y-iz)^{p+1}} \underset{Y \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \frac{e^{ixX}}{ix} \frac{1}{(X-iz)^{p+1}} \underset{X \to -\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on voit que la convergence de l'intégrale $G_{p+1}(x)$ est équivalente à la convergence de l'intégrale $G_p(x)$, donc à la convergence de l'intégrale $F(x)$, et que, s'il y a convergence, on a l'égalité :

$$F(x) = \frac{p!}{(ix)^p} \frac{p+1}{ix} G_{p+1}(x) = \frac{(p+1)!}{(ix)^{p+1}} G_{p+1}(x).$$

La propriété est donc démontrée par récurrence pour tout p entier.

Il est évident que pour des valeurs ≥ 1 de l'entier p, la convergence des intégrales $G_p(x)$ est normale, puisque pour tout t réel et $x > 0$:

$$\left| \frac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+1}} \right| \leq \frac{1}{|t-iz|^{p+1}}.$$

Cette majoration prouve aussi que l'application à intégrer est majorée par rapport au paramètre x et à la variable d'intégration t. On en déduit que l'intégrale $G_p(x)$ dépend continûment du paramètre x (Théorème VIII.5.3). L'application F est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $f_p(x,t)=\dfrac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+1}}$, on voit que

$\left|\dfrac{\partial f_p}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\dfrac{it\,e^{ixt}}{(t-iz)^{p+1}}\right|=\dfrac{|t|}{|t-iz|^{p+1}}$. Pour des valeurs ≥ 2 de p, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f_p}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est normalement convergente par rapport au paramètre x ; on en déduit (théorème VIII.5.4) qu'on peut dériver sous le signe somme l'intégrale $G_p(x)$. L'application F est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Nous pouvons déduire de ce qui précède que pour $p \geq 1$, et tout $x \neq 0$:

$$G'_{p+1}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{it\,e^{ixt}}{(t-iz)^{p+2}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i(t-iz)e^{ixt}}{(t-iz)^{p+2}}\mathrm{d}t-z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{(t-iz)^{p+2}}\mathrm{d}t=$$

$$=iG_p(x)-zG_{p+1}(x).$$

Comme :

$$\frac{(ix)^{p+1}}{(p+1)!}F(x)=G_{p+1}(x),$$

on obtient en dérivant :

$$\frac{i(ix)^p}{p!}F(x)+\frac{(ix)^{p+1}}{(p+1)!}F'(x)=G'_{p+1}(x)=iG_p(x)-zG_{p+1}(x),$$

d'où finalement, pour tout $x \neq 0$:

$$F'(x)=-zF(x).$$

L'application $x \mapsto e^{xz}F(x)$ est donc dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$; elle est constante sur chacun de ses intervalles.

Posons $z=a+ib$, a et b réels, $a \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$:

$$e^{xz}F(x)=e^{xz}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixt}}{t-iz}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix(t-iz)}}{t-iz}\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix(t+b-ia)}}{t+b-ia}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix(u-ia)}}{u-ia}\mathrm{d}u=e^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixu}}{u-ia}\mathrm{d}u.$$

Soit encore en effectuant le changement de variable $v=-u$:

$$\mathrm{e}^{xz}F(x)=\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ixu}}{u-ia}\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ixv}}{v+ia}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{ixu}}{u-ia}-\frac{\mathrm{e}^{-ixu}}{u+ia}\right)\mathrm{d}u=$$

$$=i\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{ixu}}{u-ia}\right)\mathrm{d}u=i\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{ixu}(u+ia)}{u^2+a^2}\right)\mathrm{d}u=$$

$$=i\mathrm{e}^{ax}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u\sin(xu)+a\cos(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u.$$

Soit enfin en utilisant la parité des fonctions à intégrer :

$$\mathrm{e}^{xz}F(x)=2i\mathrm{e}^{ax}\int_{0}^{+\infty}\frac{u\sin(xu)+a\cos(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a\cos(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u$ est visiblement normalement convergente et on voit facilement que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a\cos(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u \underset{x\to 0,\,x\neq 0}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\frac{a}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\mathrm{sgn}(a)\frac{\pi}{2}$ ($\mathrm{sgn}(a)$ désigne le signe de a).

Montrons d'autre part que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{2}\ \text{(voir exemple 6),}$$

et :

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\underset{x\to 0,\,x<0}{\longrightarrow}-\int_0^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\mathrm{d}v=-\frac{\pi}{2}.$$

Nous pouvons utiliser une majoration explicite ; posons :

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xu)}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{u\sin(xu)}{u^2+a^2}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\sin(xu)\frac{a^2}{u\left(u^2+a^2\right)}\mathrm{d}u.$$

Nous obtenons :

$$|\varphi(x)|\leq\int_0^{+\infty}\frac{a^2|x|}{\left(u^2+a^2\right)}\mathrm{d}u=a|x|\frac{\pi}{2}\underset{x\to 0,\,x\neq 0}{\longrightarrow}0.$$

Le résultat annoncé s'en déduit, puisque :

$$\text{si } x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xu)}{u}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v\ ;$$

$$\text{si } x<0,\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin(xu)}{u}\mathrm{d}u=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v\ .$$

Comme l'application $x\mapsto \mathrm{e}^{xz}F(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, nous en déduisons facilement que :

$$\mathrm{e}^{xz}F(x)=i\pi\big(\operatorname{sgn}(x)+\operatorname{sgn}(a)\big).$$

Nous obtenons finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ixt}}{t-iz}\mathrm{d}t=i\pi\big(\operatorname{sgn}(x)+\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}(z))\big)\mathrm{e}^{-xz}.$$

Exercice 14 :

Soit $z\in\mathbb{C}$, tel que $\operatorname{Re}(z)\in\ ]0,1[$ et $\lambda\in\ ]-\pi,\pi[$.

a) Prouver la convergence de $f(z,\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{z-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{i\lambda}}\mathrm{d}t$.

b) Prouver que $G_z:\ ]-\pi,\pi[\to\mathbb{C},\ \lambda\mapsto f(z,\lambda)$ est dérivable. En déduire que $H(z,\lambda)=\mathrm{e}^{+i\lambda z}f(z,\lambda)$ ne dépend pas de λ, et prouver enfin que $f(z,\lambda)=\dfrac{\pi\mathrm{e}^{-i\lambda z}}{\sin\pi z}$.

c) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^z\,\mathrm{d}t}{1+2t\cos\lambda+t^2}=\frac{\pi}{\sin\lambda}\frac{\sin\lambda z}{\sin\pi z}$ et que si $a\neq 0$, avec $\operatorname{Arg}a\in\ ]-\pi,\pi[$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{z-1}\,\mathrm{d}t}{t+a}=\frac{\pi a^{z-1}}{\sin\pi z}$. ■

a) Posons $z=x+iy$, x et y réels, $0<x<1$. On constate que :

$$\left|\frac{t^{z-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{i\lambda}}\right|=\frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+2t\cos\lambda+t^2}}.$$

L'intégrale est absolument convergente au voisinage de la borne 0, car $1-x<1$, et absolument convergente au voisinage de la borne $+\infty$, car $2-x>1$.

b) Posons pour $\lambda \in \,]-\pi, \pi[$ et $t>0$, $\varphi(\lambda, t)=\dfrac{t^{z-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{i\lambda}}$. On calcule facilement :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)=-i t\, \mathrm{e}^{i \lambda} \frac{t^{z-1}}{\left(1+t\, \mathrm{e}^{i \lambda}\right)^{2}}.$$

Donc :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\right|=\frac{t^{x}}{\left(1+2 t \cos \lambda+t^{2}\right)}.$$

Traitons séparément les bornes 0 et $+\infty$ des intégrales.

Etudions la convergence des intégrales sur l'intervalle $[\,2,+\infty\,[$.

Nous pouvons ici utiliser la majoration :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\right|=\frac{t^{x}}{\left|1+t\, \mathrm{e}^{i \lambda}\right|^{2}}=\frac{t^{x}}{\left|\mathrm{e}^{-i \lambda}+t\right|^{2}} \leq \frac{t^{x}}{(t-1)^{2}}.$$

Cela prouve que la convergence est normale pour $\lambda \in \,]-\pi, \pi[$, et que les fonctions à intégrer sont uniformément bornées. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction :

$$\lambda \mapsto \int_{2}^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t\, \mathrm{e}^{i \lambda}} \mathrm{d} t \text{ est dérivable sur l'intervalle }]-\pi, \pi[.$$

Etudions maintenant la convergence des intégrales sur l'intervalle $]\,0,2\,]$.

On peut remarquer que les intégrales des dérivées partielles sont des intégrales propres. Soit $\alpha, 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, pour tout $t \in\,]0,2]$ et tout $\lambda \in [-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$, on a la majoration :

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(\lambda, t)\right|=\frac{t^{x}}{\left(1+2 t \cos \lambda+t^{2}\right)} \leq \frac{t^{x}}{\left(1-2 t \cos \alpha+t^{2}\right)}=\frac{t^{x}}{(t-\cos \alpha)^{2}+\sin ^{2} \alpha} \leq \frac{t^{x}}{\sin ^{2} \alpha}.$$

La convergence est donc normale sur l'intervalle $[-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$, et les fonctions à intégrer y sont uniformément majorées. Cela prouve que la fonction

$\lambda \mapsto \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{t^{z-1}}{1+t\, \mathrm{e}^{i \lambda}} \mathrm{d} t$ est dérivable sur l'intervalle $[-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$, pour toutes les valeurs de α, donc qu'elle est dérivable sur $]-\pi, \pi[$.

D'après ce qui précède, on obtient la dérivée en dérivant sous le signe somme, donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(z,\lambda) = -i\mathrm{e}^{i\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^z}{\left(1+t\mathrm{e}^{i\lambda}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

On peut intégrer par parties, en remarquant que la dérivée de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}$ est $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{i\lambda}}{\left(1+t\mathrm{e}^{i\lambda}\right)^2}$. Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(z,\lambda) = -i\mathrm{e}^{i\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{t^z}{\left(1+t\mathrm{e}^{i\lambda}\right)^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{it^z}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\right]_0^{+\infty} - i\int_0^{+\infty}\frac{zt^{z-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\mathrm{d}t.$$

Comme :

$$\left|\frac{it^z}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\right| = \frac{t^x}{\sqrt{1+2t\cos\lambda+t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \text{ car } x>0,$$

et :

$$\left|\frac{it^z}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\right| = \frac{t^x}{\sqrt{1+2t\cos\lambda+t^2}} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ car } x<1,$$

on en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(z,\lambda) = -i\int_0^{+\infty}\frac{zt^{z-1}}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\mathrm{d}t = -izf(z,\lambda).$$

La fonction : $\lambda \mapsto H(z,\lambda) = \mathrm{e}^{iz\lambda} f(z,\lambda)$ est donc de dérivée nulle sur $]-\pi,\pi[$, et y est constante.

On déduit en particulier de cela que :

$$\mathrm{e}^{iz\lambda} f(z,\lambda) = \mathrm{e}^{-iz\lambda} f(z,-\lambda),$$

et que par conséquent :

$$\begin{aligned}\sin\lambda z\, H(z,\lambda) &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iz\lambda}-\mathrm{e}^{-iz\lambda}\right)\mathrm{e}^{iz\lambda} f(z,\lambda) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iz\lambda}\mathrm{e}^{-iz\lambda} f(z,-\lambda) - \mathrm{e}^{-iz\lambda}\mathrm{e}^{iz\lambda} f(z,\lambda)\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(f(z,-\lambda)-f(z,\lambda)\right) = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} t^{z-1}\left(\frac{1}{1+t\mathrm{e}^{-i\lambda}}-\frac{1}{1+t\mathrm{e}^{i\lambda}}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On obtient encore :

$$\sin\lambda z\, H(z,\lambda) = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} t^{z-1}\frac{2it\sin\lambda}{1+2t\cos\lambda+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{t^z\sin\lambda}{1+2t\cos\lambda+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, en utilisant le changement de variable $t = u\sin\lambda - \cos\lambda$, dans le cas où $0<\lambda<\pi$,

$$\sin\lambda z\, H(z,\lambda) = \int_0^{+\infty}\frac{t^z\sin\lambda}{(t+\cos\lambda)^2+\sin^2\lambda}\,\mathrm{d}t = \int_{\operatorname{cotg}\lambda}^{+\infty}\frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^z\sin^2\lambda}{\sin^2\lambda(u^2+1)}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{\operatorname{cotg}\lambda}^{+\infty}\frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^z}{u^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Pour tout u réel, et $\lambda\in\,]0,\pi[$ posons $\varphi(\lambda,u)=0$ si $u\le\operatorname{cotg}(\lambda)$, et $\varphi(\lambda,u)=\dfrac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^z}{u^2+1}$, si $u>\operatorname{cotg}(\lambda)$; on obtient une fonction continue par rapport à u. D'après ce qui précède :

$$\sin\lambda z H(z,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda,u)\,\mathrm{d}u.$$

Montrons que la convergence de ces intégrales est normale pour $\lambda\in\,]0,\pi[$.
On constate que si $u>\operatorname{cotg}(\lambda)$:

$$|\varphi(\lambda,u)| = \frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^x}{u^2+1} \le \frac{(|u|+1)^x}{u^2+1}.$$

Cette inégalité est bien entendu vérifiée si $u\le\operatorname{cotg}(\lambda)$.

Puisque $0<x<1$, la convergence est donc normale aux bornes $+\infty$ et $-\infty$, et les fonctions à intégrer uniformément majorées.

On vérifie d'autre part que pour tout u fixé, $\varphi(\lambda,u)\underset{\lambda\to\pi}{\longrightarrow}\dfrac{1}{u^2+1}$.

En effet, pour u fixé, comme $\operatorname{cotg}\lambda\underset{\lambda\to\pi}{\longrightarrow}-\infty$, il existe λ_0, tel que pour tout λ, $\lambda_0<\lambda<\pi$, $\operatorname{cotg}\lambda<u$,

donc $\varphi(\lambda,u)=\dfrac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^z}{u^2+1}\underset{\lambda\to\pi}{\longrightarrow}\dfrac{1^z}{u^2+1}=\dfrac{1}{u^2+1}$.

On déduit de cela que :

$$\sin\lambda z H(z,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda,u)\,\mathrm{d}u \underset{\lambda\to\pi}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \pi.$$

Notons C la valeur constante de la fonction $\lambda\mapsto H(z,\lambda)=\mathrm{e}^{i\lambda z}f(z,\lambda)$ sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Comme :

$$\sin(\lambda z)C \underset{\lambda\to\pi}{\longrightarrow} \sin(\pi z)C = \pi,$$

nous en déduisons :

$$C = \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z,\lambda) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

donc :

$$f(z,\lambda) = \frac{\mathrm{e}^{-i\lambda z}\pi}{\sin \pi z}.$$

c) Nous avons déjà vu ci-dessus que :

$$\sin \lambda z \, H(z,\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{t^z \sin\lambda}{1+2t\cos\lambda + t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Nous pouvons en déduire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^z}{1+2t\cos\lambda+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sin\lambda}\sin\lambda z\,\frac{\pi}{\sin\pi z} = \frac{\pi}{\sin\lambda}\,\frac{\sin\lambda z}{\sin \pi z}.$$

Pour calculer l'intégrale proposée, notons
$a = \rho \mathrm{e}^{-i\lambda}$, $\lambda = -\mathrm{Arg}(a) \in \,]-\pi,\pi[$, et $\rho > 0$, de telle sorte que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}\,\mathrm{d}t}{t+a} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}\,\mathrm{d}t}{t+\rho\mathrm{e}^{-i\lambda}}.$$

En effectuant dans cette intégrale le changement de variable $t = \rho u$, nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}\,\mathrm{d}t}{t+a} = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{z-1}u^{z-1}\rho\,\mathrm{d}u}{\rho u + \rho\mathrm{e}^{-i\lambda}} = \rho^{z-1}\mathrm{e}^{i\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{u^{z-1}\,\mathrm{d}u}{1+u\mathrm{e}^{i\lambda}} =$$

$$= \rho^{z-1}\mathrm{e}^{i\lambda} f(z,\lambda) = \rho^{z-1}\mathrm{e}^{i\lambda}\frac{\pi}{\sin\pi z}\mathrm{e}^{-i\lambda z} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi z}\rho^{z-1}\mathrm{e}^{-i\lambda(z-1)} = \frac{\pi}{\sin\pi z}\left(\rho\mathrm{e}^{-i\lambda}\right)^{z-1} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\pi z}a^{z-1}.$$

ce qu'il fallait démontrer.

N.B. : On trouvera au §III.4 du livre 3 une définition de la notation a^{z-1}, a et z étant complexes (mais $a \notin \mathbb{R}_-$).

Exercice 19 :

‖ Soit ν un réel > 1.

a) Montrer que $F_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos t x}{\left(1+x^2\right)^\nu} \mathrm{d}x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et qu'on a :

$$\left(\forall t \in \mathbb{R}^*\right) \quad t F''_\nu(t) - 2(\nu-1)F'_\nu(t) - tF_\nu(t) = 0.$$

b) On suppose ν entier ≥ 2 et on admet que $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Préciser $F_\nu(0)$. Montrer que F_ν est $2\nu - 1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $F_\nu^{(2\nu-1)}(t)$ admet une limite quand $t \xrightarrow{>0} 0$.

c) Soit $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x \quad (t > 0)$. Prouver que Φ est dérivable, que $\Phi'(t) + \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t x}{x\left(1+x^2\right)} \mathrm{d}x$, enfin, que : $\Phi''(t) - \Phi(t) = 0$.

En déduire : $\Phi(t) = \pi \mathrm{e}^{-t}$.

d) Déduire du c) que $(\forall t > 0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1 - ix} \mathrm{d}x = 0$, puis, que

$$\left(\forall q \in \mathbb{N}^*\right) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1-ix)^q} \mathrm{d}x = 0.$$

e) Soit $J(t) = 2F_\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu} \mathrm{d}x$ avec ν entier ≥ 2 et $t > 0$.

Déduire du d) que :

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} J^{(k)}(t) = 0. \blacksquare$$

a) Posons pour $\nu > 1$ et tout t réel $f(t,x) = \frac{\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu}$. Cette fonction est indéfiniment dérivable par rapport à t. On constate :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{-x\sin(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = \frac{-x^2\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu},$$

de telle sorte que pour tout t réel :

$$|f(t,x)| \leq \frac{1}{\left(1+x^2\right)^\nu} \sim \frac{1}{x^{2\nu}}, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \frac{x}{\left(1+x^2\right)^\nu} \sim \frac{1}{x^{2\nu-1}} .$$

Comme $\nu > 1$, la convergence des intégrales est normale sur $\mathbb{R}$. Cela prouve que la fonction F_ν est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'on peut obtenir la dérivée en dérivant sous le signe somme.

Montrons que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)\,\mathrm{d}x$ sont uniformément convergentes quand le paramètre t varie dans un intervalle $[t_0, +\infty[$, où $t_0 > 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^\nu}$, a pour dérivée logarithmique

$$x \mapsto \frac{2}{x} - \frac{2\nu x}{\left(1+x^2\right)} = 2\frac{1-(\nu-1)x^2}{x\left(1+x^2\right)} \quad ;$$

elle est donc décroissante sur l'intervalle $\left[(\nu-1)^{-1/2}, +\infty\right[$. D'après le second théorème de la moyenne, si X et Y sont des réels tels que $(\nu-1)^{-1/2} < X < Y$, il existe un réel ξ, $X \leq \xi \leq Y$ tel que :

$$\int_X^Y \frac{x^2 \cos tx}{\left(1+x^2\right)^\nu}\mathrm{d}x = \frac{X^2}{\left(1+X^2\right)^\nu}\int_X^\xi \cos tx\,\mathrm{d}x,$$

d'où la majoration :

$$\left|\int_X^Y \frac{x^2 \cos tx}{\left(1+x^2\right)^\nu}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{t}\frac{X^2}{\left(1+X^2\right)^\nu} \leq \frac{2}{t_0}\frac{X^2}{\left(1+X^2\right)^\nu}.$$

On en déduit le résultat, puisque :

$$\frac{2}{t_0}\frac{X^2}{\left(1+X^2\right)^\nu} \underset{X \to +\infty}{\to} 0.$$

Cela prouve que la fonction F_ν est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'on obtient la dérivée seconde en dérivant deux fois sous le signe somme ; il en est de même sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque la fonction F_ν est paire.

On peut remarquer que si on suppose $\nu > \dfrac{3}{2}$, la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{-x^2 \cos(t\,x)}{\left(1+x^2\right)^\nu}\mathrm{d}x \ ,$$

est normale sur $\mathbb{R}$; dans ce cas, l'application F_ν est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On vérifie que pour tout t réel $\neq 0$:

$$t\left(F_\nu(t)-F''_\nu(t)\right)=\int_0^{+\infty}\frac{t\left(1+x^2\right)\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{t\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)^{\nu-1}}\mathrm{d}x.$$

Nous pouvons alors intégrer par parties :

$$t\left(F_\nu(t)-F''_\nu(t)\right)=\left[\frac{\sin(tx)}{\left(1+x^2\right)^{\nu-1}}\right]_{x=0}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2(\nu-1)x\sin(tx)}{\left(1+x^2\right)^{\nu-1}}\mathrm{d}x=$$

$$=-2(\nu-1)F'_\nu(t).$$

On obtient immédiatement l'égalité demandée.

On peut remarquer que cela implique que F_ν est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Les conditions du a) sont réunies puisque $\nu\geq 2$.

En utilisant le changement de variable $x=\operatorname{tg}\varphi,\quad \varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, nous obtenons :

$$F_\nu(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^\nu}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^{2(\nu-1)}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

On reconnaît une intégrale de Wallis qui est calculée dans l'exemple 3 du §VIII.2. On obtient :

$$F_\nu(0)=\frac{\pi}{2}\frac{(2\nu-2)!}{2^{2\nu-2}((\nu-1)!)^2}.$$

Remarquons que pour tout k entier et tout t réel :

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)=\frac{x^k\cos(tx+k\pi/2)}{\left(1+x^2\right)^\nu},$$

et que par conséquent :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)\right|\leq\frac{x^k}{\left(1+x^2\right)^\nu}\sim\frac{1}{x^{2\nu-k}}\ \text{(au voisinage de } +\infty).$$

Pour toutes les valeurs entières de k, $0\leq k\leq 2\nu-2$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t,x)\,\mathrm{d}x$ est normale sur $\mathbb{R}$, et les fonctions à intégrer sont uniformément bornées. On peut donc, d'après le théorème de dérivation
somme, dériver $2\nu-2$ fois sous le signe somme.

La dérivée partielle $\dfrac{\partial^{2\nu-1} f}{\partial t^{2\nu-1}}(t,x)=\dfrac{x^{2\nu-1}\cos(tx+(2\nu-1)\pi/2)}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}$ est aussi uniformément bornée. Montrons que la convergence de son intégrale est uniforme sur tout intervalle $[\,t_0,+\infty\,[,\ t_0>0$.

Nous voulons utiliser le second théorème de la moyenne. Etudions les variations de la fonction $x\mapsto\dfrac{x^{2\nu-1}}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée logarithmique est $\dfrac{2\nu-1}{x}-\dfrac{2\nu x}{1+x^2}=\dfrac{2\nu-1-x^2}{x\left(1+x^2\right)}$ et elle est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{2\nu-1},+\infty\right[$.

Pour tous réels X et Y, $\sqrt{2\nu-1}<X<Y$, et tout $t\geq t_0$, d'après le second théorème de la moyenne, on peut trouver un réel ξ, $X\leq\xi\leq Y$, tel que :

$$\int_X^Y\frac{\partial^{2\nu-1} f}{\partial t^{2\nu-1}}(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_X^Y\frac{x^{2\nu-1}\cos(tx+(2\nu-1)\pi/2)}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{X^{2\nu-1}}{\left(1+X^2\right)^{\nu}}\int_X^{\xi}\cos(tx+(2\nu-1)\pi/2)\,\mathrm{d}x,$$

donc : $\left|\displaystyle\int_X^Y\frac{\partial^{2\nu-1} f}{\partial t^{2\nu-1}}(t,x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\dfrac{2}{t}\dfrac{X^{2\nu-1}}{\left(1+X^2\right)^{\nu}}\leq\dfrac{2}{t_0}\dfrac{X^{2\nu-1}}{\left(1+X^2\right)^{\nu}}.$

Comme : $\dfrac{2}{t_0}\dfrac{X^{2\nu-1}}{\left(1+X^2\right)^{\nu}}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0,$

on en déduit que la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^{2\nu-1} f}{\partial t^{2\nu-1}}(t,x)\,\mathrm{d}x$ est uniforme quand t varie dans l'intervalle $[\,t_0,+\infty\,[$.

Ce qui précède montre que nous pouvons encore dériver une fois sous le signe somme, en tout $t>0$. On obtient finalement :

$$F_\nu^{(2\nu-1)}(t)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2\nu-1}\cos(tx+(2\nu-1)\pi/2)}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=(-1)^{\nu}\int_0^{+\infty}\frac{x^{2\nu-1}\sin(tx)}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}\,\mathrm{d}x.$$

Remarquons que d'après la remarque faite dans le a), les dérivées de F_ν à des ordres plus élevés existent bien, mais on ne peut pas les calculer en dérivant sous le signe somme !

En effectuant le changement de variable $u = tx, (t > 0)$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} \mathrm{d}x \, .$$

Donc :

$$\left| \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{x^{2\nu-1} \sin(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{2\nu-1}}{\left(1+x^2\right)^\nu} \right) \sin(tx) \mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{\left(1+x^2\right)^\nu - x^{2\nu}}{x\left(1+x^2\right)^\nu} \sin(tx) \mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{\left(1+x^2\right)^\nu - x^{2\nu}}{x\left(1+x^2\right)^\nu} tx \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq t \int_0^{+\infty} \frac{\left(1+x^2\right)^\nu - x^{2\nu}}{\left(1+x^2\right)^\nu} \mathrm{d}x \, .$$

L'intégrale utilisée est bien convergente, car en utilisant la formule du binôme de Newton nous obtenons :

$$\frac{\left(1+x^2\right)^\nu - x^{2\nu}}{\left(1+x^2\right)^\nu} \sim \frac{\nu x^{2\nu-2}}{\left(1+x^2\right)^\nu} \sim \frac{\nu}{x^2} \text{ (au voisinage de } +\infty).$$

On en déduit facilement :

$$F_\nu^{(2\nu-1)}(t) \underset{t \to 0,\, t>0}{\longrightarrow} (-1)^\nu \frac{\pi}{2}.$$

c) L'intégrale : $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} \mathrm{d}x \quad (t > 0)$ est pour tout t réel absolument convergente. Simplifions la en utilisant la parité :

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-ity}}{1+y^2}dy+\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{1+x^2}dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{1+x^2}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx.$$

Posons pour tout $t>0$ et $x\geq 0$: $g(t,x)=\dfrac{\cos(tx)}{1+x^2}$. On obtient : $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x)=\dfrac{-x\sin(tx)}{1+x^2}$. Comme la fonction $x\mapsto\dfrac{x}{1+x^2}$ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, de limite nulle quand x tend vers $+\infty$, et que les intégrales de $x\mapsto -\sin(tx)$, sont, sur tout intervalle compact inclus dans $\mathbb{R}_+$, majorées par $\dfrac{2}{t}$, on peut comme ci-dessus démontrer que la convergence des intégrales est uniforme sur tout intervalle $[t_0,+\infty[$, $t_0>0$. On peut en conséquence dériver sous le signe somme en tout $t>0$. On obtient :

$$\Phi'(t)=-2\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin(tx)}{1+x^2}dx.$$

Nous utiliserons comme à la fin du b) l'égalité :

$$\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}dx.$$

D'où :

$$\pi+\Phi'(t)=2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\sin(tx)dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}\sin(tx)dx.$$

Par parité nous obtenons le résultat demandé :

$$\pi+\Phi'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}dx.$$

Posons $h(t,x)=\dfrac{\sin(tx)}{x(1+x^2)}$, d'où $\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x)=\dfrac{\cos(tx)}{(1+x^2)}$. La convergence des intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial t}(t,x)dx$ est normale. On peut donc dériver sous le signe somme et obtenir pour tout $t>0$:

$$\Phi''(t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = \Phi(t).$$

On en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $t > 0$, $\Phi(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t + \mu\,\mathrm{e}^{-t}$.

Comme la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ est en fait normale pour t variant dans $\mathbb{R}$, on voit que :

$$\Phi(t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x \underset{t\to 0,\, t>0}{\longrightarrow} 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi \quad \text{ et } \lambda + \mu = \pi.$$

D'autre part :

$$\left|\pi + \Phi'(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|tx|}{|x|\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = t\,\pi,$$

d'où :

$$\Phi'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^t - \mu\,\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0,\, t>0}{\longrightarrow} -\pi \qquad \text{ et } \lambda - \mu = -\pi.$$

On en déduit finalement :

$$\lambda = 0,\ \mu = \pi, \text{ et pour tout } t > 0,\ \Phi(t) = \pi\,\mathrm{e}^{-t}.$$

d) Posons pour tout $t > 0$ $\Psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1-ix}\mathrm{d}x$. Nous pouvons simplifier cette expression en utilisant la parité :

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1-ix}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1-ix}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ity}}{1+iy}\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1-ix}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-itx}}{1+ix} + \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1-ix}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{-itx}}{1+ix}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\left(\cos(tx) - i\sin(tx)\right)\frac{(1-ix)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - x\sin(tx)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Nous obtenons donc :

$$\Psi(t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - x\sin(tx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Phi(t) + \Phi'(t) =$$

$$= \pi \mathrm{e}^{-t} - \pi \mathrm{e}^{-t} = 0.$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout entier $q > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1-ix)^q}\,\mathrm{d}x = 0$. Nous venons de voir que c'est vrai pour $q = 1$. Si c'est vrai pour $q \geq 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1-ix)^q}\,\mathrm{d}x = 0 = \left[\frac{\mathrm{e}^{itx}}{it}\frac{1}{(1-ix)^q}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{q}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1-ix)^{q+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{q}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1-ix)^{q+1}}\,\mathrm{d}x,$$

c'est donc vrai pour $q+1$.
La proposition est donc démontrée par récurrence.

e) On vérifie facilement :

$$J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ity}}{\left(1+y^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x = 2F_\nu(t).$$

On voit comme dans le a) qu'on peut dériver sous le signe somme ν fois, la convergence des différentes intégrales étant toujours normale. On obtient pour tout entier k, $0 \leq k \leq \nu$:

$$J^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(ix)^k\,\mathrm{e}^{itx}}{\left(1+x^2\right)^\nu}\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}J^{(k)}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(ix)^k}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}(1+ix)^{\nu}}{\left(1+x^2\right)^{\nu}}\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{(1-ix)^{\nu}}\mathrm{d}x=0,$$

d'après le d) ; ce qu'il fallait démontrer.

On peut utiliser la formule de Leibnitz pour dériver ν fois la fonction $Q(t)=J(t)e^t$. On obtient :

$$Q^{(\nu)}(t)=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}J^{(k)}(t)e^t=0.$$

L'application Q est donc un polynôme de degré au plus $\nu-1$, et $J(t)=Q(t)e^{-t}$.

Chapitre IX

SÉRIES NUMÉRIQUES

§ IX.1 COMPARAISON DE SÉRIES À TERMES POSITIFS

Exercice 5 :

> On donne $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et on pose $u_n = e^{-(\mathrm{Log}\, n)^\lambda} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
> a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge ssi $\lambda > 1$.
> b) Si $\lambda > 1$, étudier la rapidité de la convergence de la série $\sum u_n$. ■

a) Notons $u_{\lambda,n} = e^{-(\mathrm{Log}\, n)^\lambda} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. Pour un entier $n \geq 3$, l'application $\lambda \mapsto u_{\lambda,n}$ est décroissante.

Si $\lambda \leq 1$, pour tout $n \geq 3$, $u_{\lambda,n} \geq u_{1,n} = \dfrac{1}{n}$. La série $\sum\limits_n u_{\lambda,n}$ est donc divergente.

Si $\lambda > 1$, $(\mathrm{Log}\, n)^{\lambda-1} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$; il existe donc un entier $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, $(\mathrm{Log}\, n)^{\lambda-1} \geq 2$, donc $-(\mathrm{Log}\, n)^\lambda \leq -2\,\mathrm{Log}\, n$, soit encore $u_{\lambda,n} = e^{-(\mathrm{Log}\, n)^\lambda} \leq e^{-2\,\mathrm{Log}\, n} = \dfrac{1}{n^2}$. La série $\sum\limits_n u_{\lambda,n}$ est donc dans ce cas convergente.

b) On cherche ici un équivalent simple du reste de la série, c'est-à-dire de la suite (r_n) : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_{\lambda,k}$.

Si (v_n) est une suite de limite nulle telle que $v_{n-1} - v_n \sim u_{\lambda,n}$, alors la série $\sum (v_{n-1} - v_n)$ sera convergente, et la suite de ses restes sera équivalente à la suite (r_n) (Théorème IX.1.1). Or :

$$\sum_{k=n+1}^{N}(v_{k-1}-v_k)=v_n-v_N \underset{N\to\infty}{\to} v_n\text{, donc } \sum_{k=n+1}^{\infty}(v_{k-1}-v_k)=v_n \sim r_n.$$

Cherchons un équivalent simple de $u_{\lambda,n-1}-u_{\lambda,n}$; on trouve :

$$\mathrm{Log}\left(\frac{u_{\lambda,n-1}}{u_{\lambda,n}}\right)=(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda}-(\mathrm{Log}(n-1))^{\lambda}=(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda}-\left(\mathrm{Log}\,n+\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{\lambda}=$$

$$=(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda}\left(1-\left(1+\frac{\mathrm{Log}(1-1/n)}{\mathrm{Log}\,n}\right)^{\lambda}\right).$$

Or $\dfrac{\mathrm{Log}(1-1/n)}{\mathrm{Log}\,n}\sim-\dfrac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}$, donc $1-\left(1+\dfrac{\mathrm{Log}(1-1/n)}{\mathrm{Log}\,n}\right)^{\lambda}\sim\dfrac{\lambda}{n\,\mathrm{Log}\,n}$.

On en déduit :

$$w_n=\mathrm{Log}\left(\frac{u_{\lambda,n-1}}{u_{\lambda,n}}\right)\sim\frac{\lambda}{n}(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda-1}.$$

La suite (w_n) étant de limite nulle :

$$u_{\lambda,n-1}-u_{\lambda,n}=u_{\lambda,n}\left(e^{w_n}-1\right)\sim u_{\lambda,n}w_n\sim\frac{\lambda}{n}(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda-1}u_{\lambda,n}.$$

Cela nous suggère de chercher une suite (v_n) de la forme : $Cn^{\alpha}(\mathrm{Log}\,n)^{\beta}u_{\lambda,n}$, où $C>0$, et α et β sont des réels non nuls. On obtient :

$$\frac{v_{n-1}}{v_n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{Log}(n-1)}{\mathrm{Log}(n)}\right)^{\beta}\frac{u_{\lambda,n-1}}{u_{\lambda,n}}.$$

D'où : $\mathrm{Log}\left(\dfrac{v_{n-1}}{v_n}\right)=\alpha\,\mathrm{Log}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\beta\,\mathrm{Log}\left(1+\dfrac{\mathrm{Log}(1-1/n)}{\mathrm{Log}\,n}\right)+\mathrm{Log}\left(\dfrac{u_{\lambda,n-1}}{u_{\lambda,n}}\right).$

Le premier terme est équivalent à $-\alpha\dfrac{1}{n}$, le second à $-\beta\dfrac{1}{n\,\mathrm{Log}\,n}$, le troisième à $\lambda\dfrac{1}{n}(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda-1}$. Les deux premiers termes sont donc négligeables devant le troisième. Nous pouvons en déduire $t_n=\mathrm{Log}\left(\dfrac{v_{n-1}}{v_n}\right)\sim\lambda\dfrac{1}{n}(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda-1}$, puis $t_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et enfin :

$$v_{n-1}-v_n=v_n\left(e^{t_n}-1\right)\sim v_nt_n\sim\frac{\lambda}{n}(\mathrm{Log}\,n)^{\lambda-1}Cn^{\alpha}(\mathrm{Log}\,n)^{\beta}u_{\lambda,n}.$$

Il suffit donc de choisir $\alpha=1$, $\beta=1-\lambda$ et $C=\dfrac{1}{\lambda}$ pour obtenir $v_{n-1}-v_n\sim u_{\lambda,n}$.

On vérifie que
$$v_n = \frac{1}{\lambda}\frac{n}{(\text{Log}\,n)^{\lambda-1}}u_{\lambda,n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$
puisque par exemple, il existe un rang N, tel que pour tout $n > N$, $u_{\lambda,n} \leq \frac{1}{n^2}$.

En tenant compte de ce qui a été dit au début, on trouve finalement que :
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_{\lambda,k} \sim \frac{1}{\lambda}\frac{n}{(\text{Log}\,n)^{\lambda-1}}u_{\lambda,n}.$$
Nous voyons que : $\frac{r_n}{u_{\lambda,n}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, la série converge lentement.

Exercice 6 :

> Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum a_n$ converge et que $(\forall n)\quad a_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que, pour tout $x \in \,]0, S\,]$, il existe une suite (a_{n_k}) extraite de (a_n) telle que $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$. ■

Posons pour tout n entier ≥ 0, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

La suite (r_n) est décroissante puisque pour tout k entier ≥ 0, $a_k \geq 0$; comme $r_0 = S \geq x$ et $r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 < x$, l'ensemble des entiers n tels que $r_n \geq x$ est non vide et majoré ; soit alors n_0 son plus grand élément, de telle sorte que $r_{n_0} \geq x > r_{n_0+1}$, soit encore $a_{n_0} + r_{n_0+1} \geq x > r_{n_0+1}$.

Supposons avoir trouvé des entiers $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ tels que :
$$a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + r_{n_k} \geq x > a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + r_{n_k+1},$$
c'est-à-dire :
$$a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + a_{n_k} + r_{n_k+1} \geq x > a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + r_{n_k+1}.$$

La suite $u_n = a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + a_{n_k} + r_n$ est décroissante ; pour $n = n_k + 1$, $u_n \geq x$ et

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + a_{n_k} \leq a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + \sum_{i=n_k+1}^{\infty} a_i =$$
$$= a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}}$$

Nous définirons n_{k+1} comme le plus grand entier $n > n_k$ tel que $u_n \geq x$; de telle sorte que :

$$a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + a_{n_k} + r_{n_{k+1}} = u_{n_{k+1}} \geq x$$

$$\text{et} \quad x > u_{n_{k+1}+1} = a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + a_{n_k} + r_{n_{k+1}+1}.$$

On peut donc par récurrence définir une suite (n_k) strictement croissante d'entiers, telle que pour tout k :

$$a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + r_{n_k} \geq x > a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} + r_{n_k+1}.$$

Cela s'écrit aussi :

$$x - r_{n_k+1} > a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} \geq x - r_{n_k}.$$

Comme $r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, cela implique :

$$a_{n_0} + a_{n_1} + \cdots + a_{n_{k-1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x, \text{ ou encore } x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}.$$

Exercice 7f) :

> Montrer la convergence de la série suivante, et calculer sa somme :
> $$\sum \frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}) \blacksquare$$

On constate que :

$$n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta = (n + \cos\theta)^2 - 1 = (n + \cos\theta - 1)(n + \cos\theta + 1).$$

Supposons d'abord que $\cos\theta = 0$; les termes de la série sont définis pour $n \geq 2$. Pour tout N entier ≥ 2, nous obtenons :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}.$$

Donc la série est convergente et :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

Supposons maintenant que $\cos\theta \neq 0$, alors le terme de la série est bien défini pour toutes les valeurs de n entier ≥ 0, car $\cos\theta$ ne peut pas être entier.

Nous obtenons :

$$\frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{(n + \cos\theta - 1)(n + \cos\theta + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n + \cos\theta - 1)} - \frac{1}{(n + \cos\theta + 1)} \right).$$

Posons pour tout n entier $u_n = \dfrac{1}{(n + \cos\theta - 1)}$. On constate :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(u_n - u_{n+2}) = \frac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_{N+1} - u_{N+2}).$$

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on en déduit que la série est convergente et que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta} = \frac{1}{2}(u_0 + u_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta - 1} + \frac{1}{\cos\theta}\right).$$

Exercice 9c) :

> Indiquer la nature de la série de terme général
> $u_n = n^{-(\operatorname{Log} n)^\alpha}$ $\alpha > 0$. ■

Le réel $\alpha > 0$ étant fixé, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $(\operatorname{Log} n)^\alpha \geq 2$. Donc, pour tout $n \geq N$, $n^{(\operatorname{Log} n)^\alpha} \geq n^2$ et $u_n \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum u_n$ est donc convergente.

Nous aurions pu remarquer aussi que :
$u_n = \exp\left(-(\operatorname{Log} n)^\alpha \operatorname{Log} n\right) = \exp\left(-(\operatorname{Log} n)^{\alpha+1}\right)$. Nous avons déjà étudié ces séries dans l'exercice 5. En particulier, si (r_n) est la suite des restes, nous avons démontré que :

$$r_n \sim \frac{1}{\alpha+1} \frac{n}{(\operatorname{Log} n)^\alpha} u_n.$$

La série converge donc lentement.

Exercice 9h) :

> Indiquer la nature de la série de terme général
> $u_n = \operatorname{Argch}\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}}\right)$ $(\alpha > 0)$. ■

Cherchons une expression plus simple, et un équivalent simple, de la suite (u_n) qui est à valeurs > 0.

$$\operatorname{sh}^2(u_n) = e^{\frac{2}{n^\alpha}} - 1 \sim \frac{2}{n^\alpha},$$

donc : $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $u_n \sim \operatorname{sh} u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{\alpha/2}}$.

D'après la règle de Riemann, la série $\sum u_n$ est convergente si, et
$\alpha > 2$.

Exercice 12 :

> Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\sum \frac{1}{a_n}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge et que sa somme est $\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$. ■

La résolution de cet exercice est inspirée de la démonstration du théorème de Hardy (§IX.2 Exercice 6).

Soit n entier > 0. Comme l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, si $(\alpha_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ est une suite de n réels ≥ 0 telle que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$, et $(x_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ une suite de n réels > 0, on a l'inégalité de convexité :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{1}{x_i}.$$

Il faut utiliser cette inégalité en choisissant des coefficients convenables.

On peut poser ici, pour tout i entre 1 et n, $\alpha_i = \frac{2i}{n(n+1)}$, de telle sorte que $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$; on veut que $\alpha_i x_i = \frac{a_i}{n}$, posons pour cela $x_i = \frac{a_i}{n\alpha_i} = a_i\frac{(n+1)}{2i}$.

L'inégalité de convexité ci-dessus s'écrit (pour tout n entier > 0) :

$$b_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n(n+1)}\frac{2i}{a_i(n+1)}.$$

Soit N un entier > 0. On obtient :

$$\sum_{n=1}^{N}b_n \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n(n+1)^2 a_i} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{n=i}^{N}\frac{4i^2}{n(n+1)^2 a_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{n=i}^{N}\frac{2}{n(n+1)^2}\right)\frac{2i^2}{a_i}.$$

Or :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \geq \frac{2}{n(n+1)^2},$$

d'où : $\displaystyle\sum_{n=i}^{N}\frac{2}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \leq \frac{1}{i^2}.$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2}\frac{2i^2}{a_i} = 2\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_i}.$$

La série $\sum \frac{1}{a_n}$ étant convergente, la série $\sum b_n$ l'est, et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

§ IX.2 *RÈGLES USUELLES DE CONVERGENCE*

Exercice 4 :

> (règle de Kummer) : Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}_+$ et (u_n) une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose :
>
> $$(\forall n) \quad k_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}.$$
>
> a) Si $\liminf_{n\to\infty}(k_n) > 0$, la série $\sum u_n$ converge.
>
> b) Si la série $\sum \frac{1}{a_n}$ diverge (ce qui suppose $a_n > 0$ pour tout n) et si $k_n \leq 0$ pour n assez grand, alors la série $\sum u_n$ diverge. ■

a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé tel que $0 < \varepsilon < \liminf_{n\to\infty}(k_n)$; on sait qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $k_n \geq \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$(\forall n \geq N) \quad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq \varepsilon, \text{ soit } (\forall n \geq N) \quad a_{n+1} \leq a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varepsilon.$$

Démontrons par récurrence sur l'entier $k \geq 1$, l'inégalité suivante :

$$(\forall k \geq 1) \quad a_{N+k} \leq a_N \frac{u_N}{u_{N+k}} - \varepsilon \frac{u_{N+1}+\cdots+u_{N+k}}{u_{N+k}}.$$

Elle est vérifiée pour $k = 1$, et si elle est vérifiée pour k :

$$a_{N+k+1} \leq a_{N+k} \frac{u_{N+k}}{u_{N+k+1}} - \varepsilon \leq a_N \frac{u_N}{u_{N+k+1}} - \varepsilon \frac{u_{N+1}+\cdots+u_{N+k}}{u_{N+k+1}} - \varepsilon =$$

$$= a_N \frac{u_N}{u_{N+k+1}} - \varepsilon \frac{u_{N+1}+\cdots+u_{N+k+1}}{u_{N+k+1}},$$

donc elle est vérifiée pour $k+1$.

Cette inégalité est donc vérifiée pour tout entier $k \geq 1$.

Comme la suite (a_n) est positive, on en déduit :

$$(\forall k \geq 1) \quad a_N \frac{u_N}{u_{N+k}} \geq \varepsilon \frac{u_{N+1}+\cdots+u_{N+k}}{u_{N+k}}, \text{ soit } (\forall k \geq 1) \quad u_{N+1}+\cdots+u_{\ldots} \quad u_N$$

Il est alors clair que les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont majorées et que cette série est convergente.

b) D'après l'hypothèse, il existe un entier N tel que :

$$(\forall n \geq N) \quad a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0, \text{ soit } (\forall n \geq N) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1/a_{n+1}}{1/a_n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{a_n}$ est divergente, d'après la proposition IX.2.2, la série $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 6 :

> (théorème de Hardy) : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
>
> a) Prouver que si $u_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}$ $(n \geq 1)$, la série $\sum u_n$ converge aussi ; et que sa somme $U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vérifie $U \leq \mathrm{e} A$.
>
> *Indications* : Pour tout suite (c_i) de $\mathbb{R}_+^*$, si $b_n = (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1/n}$, établir : $u_n \leq \frac{b_n}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique.
>
> Puis, si la suite (c_i) est telle que la série $\sum \frac{b_n}{n}$ converge, poser $B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ et prouver : $\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} (B_n c_n) a_n$ pour $N \geq 1$. Enfin choisir (c_n) pour que la série $\sum \frac{b_n}{n}$ converge et $(\forall n)$ $B_n c_n \leq \mathrm{e}$ (il suffit de s'arranger pour que $(c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1/n} = \frac{1}{n+1}$).
>
> b) Soit $k > 0$ tel que pour toute série convergente (à termes ≥ 0) $\sum a_n$, on ait $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq kA$. Prendre $a_n = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq n \leq N$ et $a_n = 0$ pour $n > N$ ($N \in \mathbb{N}^*$ donné) et faire $N \to \infty$ pour prouver que $k \geq \mathrm{e}$. ■

a) L'inégalité arithmético-géométrique a été démontrée dans l'exemple 5 du §V.5.3. On peut de manière évidente l'utiliser sur des nombres ≥ 0.

Nous reprenons les notations introduites dans les indications.

On utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour démontrer :

$$\frac{u_n}{b_n}=\left(a_1c_1a_2c_2\cdots a_nc_n\right)^{1/n}\leq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\text{, d'où : }u_n\leq\frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{N}u_n\leq\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{b_n}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{n=i}^{N}\frac{b_n}{n}\right)a_ic_i.$$

Définissons comme suggéré la suite (c_i) en imposant :

$b_n=\left(c_1c_2\cdots c_n\right)^{-1/n}=\dfrac{1}{n+1}$. Cela équivaut à $c_1c_2\cdots c_n=(n+1)^n$ et $c_n=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ pour tout $n\geq 1$.

Alors $\dfrac{b_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, donc $\displaystyle\sum_{n=i}^{N}\frac{b_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{N+1}\leq\frac{1}{i}$.

L'inégalité ci-dessus s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{N}u_n\leq\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i}\frac{(i+1)^i}{i^{i-1}}a_i=\sum_{i=1}^{N}\left(1+\frac{1}{i}\right)^i a_i.$$

On sait que pour tout $i\geq 1$, $\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^i<\mathrm{e}$. On obtient donc finalement :

$$\sum_{n=1}^{N}u_n\leq\mathrm{e}\sum_{i=1}^{N}a_i.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n\leq\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

b) Soit N un entier >0 fixé. Posons comme indiqué $a_n=\dfrac{1}{n}$ si $n\leq N$ et $a_n=0$ si $n>N$. Posons aussi $A_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Pour tout entier n, si $n\leq N$, $u_n=\left(\dfrac{1}{1}\dfrac{1}{2}\cdots\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}=(n!)^{-1/n}$, et si $n>N$, $u_n=0$.

Si le réel k possède la propriété décrite par l'énoncé, alors pour tout entier $N\geq 1$:

$$U_N=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{N}(n!)^{-1/n}\leq k\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=k\,A_N.$$

Utilisons la formule de Stirling (§IX.1) :

$$n!=n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,v(n)\text{ où }v(n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.$$

Nous en déduisons :

$$(n!)^{-1/n} = \frac{e}{n}(2\pi n)^{-1/2n}(v(n))^{-1/n}.$$

On voit facilement que $(2\pi n)^{-1/2n}(v(n))^{-1/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $(n!)^{-1/n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, le théorème IX.1.1 nous permet d'affirmer que les suites des sommes partielles des deux séries sont équivalentes ; c'est-à-dire :

$$U_N = \sum_{n=1}^{N}(n!)^{-1/n} \underset{N\to\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}, \text{ soit } \frac{U_N}{A_N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e.$$

Il est donc clair que nécessairement $k \geq e$.

Exercice 7 :

> Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ converge.
>
> Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$
>
> converge. ■

Posons pour tout n entier ≥ 1, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Pour tout $n \geq 2$, nous obtenons :

$$n^2\left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = n^2\left(\frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right) =$$

$$= n^2 \frac{a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} \geq \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}.$$

Nous en déduisons que pour tout $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq u_1 + \sum_{n=2}^{N} n^2\left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{a_1} + \sum_{m=1}^{N-1}\frac{(m+1)^2}{S_m} - \sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n} =$$

$$= \frac{2}{a_1} + \sum_{m=1}^{N-1}\frac{(m+1)^2}{S_m} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{S_n} = \frac{2}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{2n+1}{S_n} - \frac{N^2}{S_N},$$

soit encore :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \frac{2}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1}\frac{2n+1}{S_n}.$$

La démonstration faite dans l'exercice 12 du §IX.1 nous permet d'affirmer que la série $\sum \frac{n}{S_n}$ est convergente. Comme la série $\sum \frac{1}{S_n}$ est convergente ($\frac{1}{S_n} \leq \frac{1}{a_n}$), on voit que les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont majorées, et que cette série est convergente.

§ IX.3 *COMPARAISON SÉRIES-INTÉGRALES*

Exercice 7 :

> Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ on pose :
> $\sigma_n(\alpha) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \operatorname{Log}^\alpha k}$. Etudier, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum a^{-\sigma_n(\alpha)}$. ■

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log}^\alpha x}$. On vérifie que $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \operatorname{Log}^\alpha x} = \operatorname{Log}(\operatorname{Log}(x))$ si $\alpha = 1$, et $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \operatorname{Log}^\alpha x} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\operatorname{Log}^{\alpha-1} x}$ si $\alpha \neq 1$.

L'application f étant décroissante à valeurs > 0, la série $\sum \frac{1}{k \operatorname{Log}^\alpha k}$ et l'intégrale $\int \frac{\mathrm{d}x}{x \operatorname{Log}^\alpha x}$ sont de même nature, donc convergentes si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{k \operatorname{Log}^\alpha k}$ est convergente ; il existe un réel L (> 0) tel que $\sigma_n(\alpha) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$ et $a^{-\sigma_n(\alpha)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a^{-L} > 0$. Dans ce cas, la série $\sum a^{-\sigma_n(\alpha)}$ est divergente.

Si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{k \operatorname{Log}^\alpha k}$ est divergente, $\sigma_n(\alpha) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $a^{-\sigma_n(\alpha)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

En posant, pour n entier ≥ 2, $u_n = a^{-\sigma_n(\alpha)}$, nous obtenons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{-\sigma_{n+1}(\alpha)}}{a^{-\sigma_n(\alpha)}} = a^{\sigma_n(\alpha) - \sigma_{n+1}(\alpha)} = a^{-\frac{1}{(n+1)\operatorname{Log}^\alpha (n+1)}} =$$

$$= \exp\left(-\frac{\operatorname{Log} a}{(n+1)\operatorname{Log}^\alpha (n+1)} \right).$$

Comme :

$$\frac{\operatorname{Log} a}{(n+1)\operatorname{Log}^\alpha (n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

on voit que :

$$\alpha_n = n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left(1-\exp\left(-\frac{\operatorname{Log} a}{(n+1)\operatorname{Log}^{\alpha}(n+1)}\right)\right)$$

$$\sim n\frac{\operatorname{Log} a}{(n+1)\operatorname{Log}^{\alpha}(n+1)} \sim \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log}^{\alpha}(n+1)}.$$

On en déduit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{\alpha_n}{n} \text{ et } \alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel (Théorème IX.2.3), la série $\sum u_n$ est divergente.

Nous aurions pu en fait ne pas discuter sur la valeur de α, le raisonnement ci-dessus s'appliquant dans les deux cas.

Exercice 2 :

> Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants :
>
> a) $u_n = \left[1-\left(\dfrac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^n\right]\dfrac{\operatorname{Log} n}{n^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$
>
> b) $u_n = \dfrac{1}{n\operatorname{Log} n} - \operatorname{Log}\left(\dfrac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}\right)$
>
> c) $u_n = -\dfrac{1}{\sum\limits_{k=2}^{n}\operatorname{Log}^{\alpha} k} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
>
> d) $u_n = \dfrac{\operatorname{Argsh}(n^{\alpha})}{\alpha\operatorname{Log} n} - 1 \quad (\alpha > 0)$
>
> e) $u_n = a^{n^{\lambda}}\operatorname{Log}^n n \quad (\lambda \in \mathbb{R}, a > 0)$
>
> f) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{\left(1+x^2|\sin x|\right)^{3/2}}$
>
> g) $u_n = \sqrt[3]{\operatorname{Log}(2n+1)} - \sqrt[3]{\operatorname{Log}(2n)}$
>
> h) $u_n = \left[\operatorname{tg}\dfrac{(n+1)\pi}{4n}\right]^{-n^{3/2}}.$

a) Définissons pour n entier > 0 :

$$v_n = \left(\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^n = \left(1+\frac{\operatorname{Log}(1+1/n)}{\operatorname{Log} n}\right)^{-n}, \text{ d'où :}$$

$$\text{Log}(v_n) = -n\,\text{Log}\left(1 + \frac{\text{Log}(1+1/n)}{\text{Log}\,n}\right).$$

En utilisant deux fois la propriété $\text{Log}(1+a_n) \sim a_n$ si $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, nous obtenons :

$$\text{Log}(v_n) \sim -n\frac{1}{n\,\text{Log}\,n} = -\frac{1}{\text{Log}\,n}.$$

Comme $\text{Log}(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$:

$$1 - v_n = 1 - \exp(\text{Log}\,v_n) \sim -\text{Log}\,v_n \sim \frac{1}{\text{Log}\,n}.$$

Nous en déduisons finalement que :

$$u_n \sim \frac{1}{\text{Log}\,n}\frac{\text{Log}\,n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série $\sum u_n$ est donc, d'après la règle de Riemann, convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.

b) Soit g la fonction telle que $\text{Log}\,x = x - \frac{x^2}{2}g(x)$ pour tout $x > 0$; on sait que $g(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$.

Posons pour n entier > 0 : $v_n = \dfrac{\text{Log}(1+1/n)}{\text{Log}\,n} \sim \dfrac{1}{n\,\text{Log}\,n}$.

Nous pouvons écrire :

$$u_n = \frac{1}{n\,\text{Log}\,n} - \text{Log}\left(\frac{\text{Log}(n+1)}{\text{Log}\,n}\right) = \frac{1}{n\,\text{Log}\,n} - \text{Log}\left(1 + \frac{\text{Log}(1+1/n)}{\text{Log}\,n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n\,\text{Log}\,n} - v_n + \frac{v_n^2}{2}g(v_n) = \frac{1}{n\,\text{Log}\,n} - \frac{\text{Log}(1+1/n)}{\text{Log}\,n} + \frac{v_n^2}{2}g(v_n) =$$

$$= \frac{1}{\text{Log}\,n}\frac{1}{2n^2}g\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{v_n^2}{2}g(v_n).$$

Comme :

$$\frac{1}{\text{Log}\,n}\frac{1}{2n^2}g\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2\,\text{Log}\,n} \quad \text{et} \quad \frac{v_n^2}{2}g(v_n) \sim \frac{1}{2n^2\,\text{Log}^2 n},$$

le deuxième terme est négligeable devant le premier ; nous en déduisons :

$$u_n \sim \frac{1}{2n^2\,\text{Log}\,n}.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

c) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $k\,\text{Log}^\alpha k \underset{k\to\infty}{\to} +\infty$, la série $\sum \text{Log}^\alpha k$ est donc toujours divergente et $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Dans le cas où $\alpha = 0$, $u_n = -\dfrac{1}{n-2}$ la série $\sum u_n$ est divergente.

Dans le cas où $\alpha < 0$, nous pourrions utiliser le théorème IX.3.2, mais pas dans le cas où $\alpha > 0$, la fonction f correspondante étant alors croissante. Procédons autrement .

Soit $v_n = n \operatorname{Log}^\alpha n \quad (n \geq 2)$. On vérifie que :

$$v_k - v_{k-1} = k \operatorname{Log}^\alpha k - (k-1)\operatorname{Log}^\alpha (k-1) = k \operatorname{Log}^\alpha k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(\frac{\operatorname{Log}(k-1)}{\operatorname{Log} k}\right)^\alpha\right) =$$

$$= k \operatorname{Log}^\alpha k \left(\frac{1}{k} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \left(\frac{\operatorname{Log}(k-1)}{\operatorname{Log} k}\right)^\alpha\right)\right).$$

Or :

$$1 - \left(\frac{\operatorname{Log}(k-1)}{\operatorname{Log} k}\right)^\alpha = 1 - \left(1 + \frac{\operatorname{Log}(1-1/k)}{\operatorname{Log} k}\right)^\alpha \sim -\alpha \frac{\operatorname{Log}(1-1/k)}{\operatorname{Log} k} \sim \frac{\alpha}{k \operatorname{Log} k},$$

est négligeable devant $\dfrac{1}{k}$, donc :

$$v_k - v_{k-1} \sim \operatorname{Log}^\alpha k.$$

Les séries étant à termes positifs et divergentes, les sommes partielles sont équivalentes, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=3}^{n} \operatorname{Log}^\alpha k \sim \sum_{k=3}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_2 \sim v_n \sim n \operatorname{Log}^\alpha n.$$

Nous en déduisons :

$$u_n \sim -\frac{1}{n \operatorname{Log}^\alpha n}.$$

La série $\sum u_n$ diverge évidemment si $\alpha < 0$, et d'après l'étude faite sur les séries de Bertrand (§IX.3), dans le cas où $\alpha > 0$, elle converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

d) Posons pour tout n entier > 0 :

$$v_n = \operatorname{Argsh}(n^\alpha) = \operatorname{Log}\left(n^\alpha + \sqrt{n^{2\alpha} + 1}\right) = \alpha \operatorname{Log} n + \operatorname{Log}\left(1 + \sqrt{1 + n^{-2\alpha}}\right).$$

D'où :

$$u_n = \frac{v_n}{\alpha \operatorname{Log} n} - 1 = \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \sqrt{1 + n^{-2\alpha}}\right)}{\alpha \operatorname{Log} n} \sim \frac{\operatorname{Log} 2}{\alpha \operatorname{Log} n}.$$

La série $\sum u_n$ est donc divergente.

e) Dans le cas où $a \geq 1$, pour tout n entier > 0, $a^{\left(n^\lambda\right)} \geq 1$, donc $u_n \geq \mathrm{Log}^n n$, la série $\sum u_n$ est évidemment divergente.

Supposons maintenant $0 < a < 1$, donc $\mathrm{Log}\, a < 0$.

Nous pouvons utiliser ici la règle de Cauchy ; en effet :

$$\mathrm{Log}\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \frac{1}{n} n^\lambda \,\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, n).$$

Dans le cas où $\lambda > 1$:

$$\mathrm{Log}\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \frac{1}{n} n^\lambda \,\mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ d'où } \sqrt[n]{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La série $\sum u_n$ est convergente.

Dans le cas où $\lambda = 1$:

$$\sqrt[n]{u_n} = a \,\mathrm{Log}(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est divergente.

Dans le cas où $\lambda < 1$:

$$\mathrm{Log}\left(\sqrt[n]{u_n}\right) = \frac{1}{n^{1-\lambda}} \mathrm{Log}\, a + \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La série $\sum u_n$ est divergente.

f) Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $x = y + n\pi$, nous obtenons :

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}y}{\left(1 + (y + n\pi)^2 \sin y\right)^{3/2}}.$$

Comme $\sin y \geq 0$, on peut majorer en remplaçant y par 0 ; on obtient :

$$0 \leq u_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}y}{\left(1 + n^2\pi^2 \sin y\right)^{3/2}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{\left(1 + n^2\pi^2 \sin y\right)^{3/2}}.$$

Nous pouvons encore majorer cette dernière intégrale en utilisant la minoration :

$$(\forall y \in [\,0, \pi/2]) \quad \frac{2}{\pi} y \leq \sin y \text{ (la fonction sin est concave sur } [\,0, \pi/2]).$$

Nous obtenons :

$$0 \le u_n = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{\left(1+2n^2\pi y\right)^{3/2}} = -\frac{2}{n^2\pi}\left[\left(1+2n^2\pi y\right)^{-1/2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left(1-\frac{1}{\left(1+n^2\pi^2\right)^{1/2}}\right) \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente.

g) Cherchons un équivalent simple de la suite (u_n).

$$u_n = \left(\mathrm{Log}(2n+1)\right)^{1/3} - \left(\mathrm{Log}(2n)\right)^{1/3} = \left(\mathrm{Log}(2n)+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right)^{1/3} - \left(\mathrm{Log}(2n)\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\mathrm{Log}(2n)\right)^{1/3}\left(\left(1+\frac{\mathrm{Log}(1+1/(2n))}{\mathrm{Log}(2n)}\right)^{1/3}-1\right).$$

Comme :

$$\frac{\mathrm{Log}(1+1/(2n))}{\mathrm{Log}(2n)} \sim \frac{1}{2n\,\mathrm{Log}(2n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

on voit que :

$$u_n \sim \left(\mathrm{Log}(2n)\right)^{1/3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2n\,\mathrm{Log}(2n)} \sim \frac{1}{6n\left(\mathrm{Log}(2n)\right)^{2/3}}.$$

Il s'agit d'une série de Bertrand, pour laquelle $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$, donc divergente.

h) Posons pour tout entier $n > 0$: $v_n = \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4n}$.

Nous pouvons écrire : $u_n = \left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4n}\right)\right)^{-n^{3/2}} = \left(\dfrac{1+v_n}{1-v_n}\right)^{-n^{3/2}}$,

d'où, comme $v_n \sim \dfrac{\pi}{4n}$:

$$\mathrm{Log}(u_n) = -n^{3/2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+v_n}{1-v_n}\right) \sim -2v_n n^{3/2} \sim -\frac{\pi}{2}\sqrt{n}.$$

On voit assez facilement que la série $\sum u_n$ est convergente ; par exemple en remarquant que :

$$\operatorname{Log}\left(n^2 u_n\right) = 2 \operatorname{Log} n + \operatorname{Log} u_n \sim -\frac{\pi}{2}\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\to} -\infty, \text{ d'où } n^2 u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Exercice 4 b) :

> Démontrer la relation suivante :
> $$\operatorname{Ent}\left(\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}}\right) = 2997. \blacksquare$$

Posons $N = 10^9$. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2/3}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons les inégalités :

$$1 + \int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} = 1 + \sum_{k=2}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} \le 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^{2/3}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2/3}},$$

et : $$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2/3}} = 1 + \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^{2/3}} \le 1 + \sum_{k=2}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}} = 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}.$$

Cette dernière inégalité étant, bien sûr, stricte, nous obtenons :

$$1 + 3\left((N+1)^{1/3} - 2^{1/3}\right) \le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2/3}} < 1 + 3\left(N^{1/3} - 1\right),$$

soit en minorant $N+1$ par $N = 10^9$:

$$1 + 3\left(1000 - 2^{1/3}\right) \le \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2/3}} < 1 + 3(1000 - 1) = 2998,$$

Le résultat sera acquis si $3 \cdot 2^{1/3} \le 4$, soit encore $27 \cdot 2 = 54 \le 64$, ce qui est vrai.

§ IX.4 *SÉRIES À TERMES QUELCONQUES*

Exercice 1 a) :

> Nature de la série $\sum u_n$ dans le cas $u_n = \dfrac{\sin \operatorname{Log} n}{n}$. $\blacksquare$

Montrons qu'il s'agit d'une série non convergente. Posons pour N entier ≥ 1, $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ fixé. Si k est entier > 0 et que $2k\pi + \alpha \le \operatorname{Log}(n) \le 2k\pi + \pi - \alpha$, alors $u_n \ge \dfrac{\sin\alpha}{n}$; posons $n_k = \operatorname{Ent}\left(e^{2k\pi+\alpha}\right)$ et $m_k = \operatorname{Ent}\left(e^{2k\pi+\pi-\alpha}\right)$; nous obtenons :

$$n_k \le m_k \text{ et } \sum_{n_k+1}^{m_k} u_n \ge \sin\alpha \times \left(\sum_{n_k+1}^{m_k} \frac{1}{n}\right).$$

De manière générale, si p et q sont des entiers, $p < q$,

$\displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{n} \ge \int_{p+1}^{q+1} \frac{dx}{x} = \operatorname{Log}\left(\frac{q+1}{p+1}\right)$, et cela reste vrai par convention si $p = q$.

Nous obtenons donc la minoration :

$$S_{m_k} - S_{n_k} \ge \sin\alpha \operatorname{Log}\left(\frac{m_k+1}{n_k+1}\right).$$

Il est clair que :

$$m_k \sim e^{2k\pi+\pi-\alpha} \text{ et } n_k \sim e^{2k\pi+\alpha}, \text{ donc } \frac{m_k+1}{n_k+1} \sim \frac{e^{2k\pi+\pi-\alpha}}{e^{2k\pi+\alpha}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{\pi-2\alpha}.$$

On obtient finalement que :

$$\sin\alpha \operatorname{Log}\left(\frac{m_k+1}{n_k+1}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sin\alpha \times (\pi - 2\alpha) > 0.$$

La suite des sommes partielles ne peut avoir de limite, car dans ce cas on aurait $S_{m_k} - S_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La série $\sum u_n$ n'est donc pas convergente.

Exercice 1 g) :

> Nature de la série $\sum u_n$ dans le cas $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\operatorname{Log} n}}$. ■

Posons pour n entier ≥ 2, $v_n = n + (-1)^n \dfrac{n}{\operatorname{Log} n} \sim n$.

Calculons la somme de deux termes successifs :

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \frac{1}{v_{2p}} - \frac{1}{v_{2p+1}} = \frac{v_{2p+1} - v_{2p}}{v_{2p+1}v_{2p}}.$$

Comme :

$$v_{2p+1} - v_{2p} = 2p+1 - \frac{2p+1}{\mathrm{Log}(2p+1)} - 2p - \frac{2p}{\mathrm{Log}\,2p} =$$

$$= 1 - \frac{2p+1}{\mathrm{Log}(2p+1)} - \frac{2p}{\mathrm{Log}\,2p},$$

on voit que :

$$v_{2p+1} - v_{2p} \sim -\frac{4p}{\mathrm{Log}\,2p}$$

d'où $\quad u_{2p+1} + u_{2p} \sim -\frac{4p}{\mathrm{Log}\,2p}\frac{1}{2p}\frac{1}{2p+1} \sim -\frac{1}{p\,\mathrm{Log}\,p}.$

La série $\sum\left(u_{2p+1} + u_{2p}\right)$ est une série de Bertrand divergente. La série $\sum u_n$ est donc divergente.

Exercice 1 h) :

> Nature de la série $\sum u_n$ dans le cas
>
> $u_n = \sin\left[\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{3\alpha}}\right] \quad (k > 0, \alpha > 0).$ ■

On vérifie ici que le terme général est de limite nulle.

Posons pour tout entier $n > 0$, $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{3\alpha}}$.

Calculons la somme de deux termes successifs :

$$u_{2p} + u_{2p+1} = \sin v_{2p} + \sin v_{2p+1} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{v_{2p} + v_{2p+1}}{2}\right)\cos\left(\frac{v_{2p} - v_{2p+1}}{2}\right) \sim \left(v_{2p} + v_{2p+1}\right).$$

Or :

$$v_{2p} + v_{2p+1} = \frac{1}{(2p)^\alpha} + \frac{k}{(2p)^{3\alpha}} - \frac{1}{(2p+1)^\alpha} + \frac{k}{(2p+1)^{3\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(2p)^\alpha} - \frac{1}{(2p+1)^\alpha} + k\left(\frac{1}{(2p)^{3\alpha}} + \frac{1}{(2p+1)^{3\alpha}}\right).$$

Ces deux termes sont toujours positifs.

Le premier terme est le terme général d'une série convergente :

$$\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{1}{(2p)^\alpha} - \frac{1}{(2p+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{(2N+1)^\alpha} \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{2^\alpha}.$$

Le second :

$$k\left(\frac{1}{(2p)^{3\alpha}}+\frac{1}{(2p+1)^{3\alpha}}\right)\sim\frac{2k}{(2p)^{3\alpha}},$$

est le terme général d'une série convergente si, et seulement si, $3\alpha > 1$.

La série à termes positifs $\sum\left(v_{2p}+v_{2p+1}\right)$ est donc convergente si, et seulement si, $3\alpha > 1$.

La série $\sum\left(u_{2p}+u_{2p+1}\right)$, dont les termes sont positifs à partir d'un certain rang, est convergente si, et seulement si, $3\alpha > 1$.

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on voit que la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $3\alpha > 1$.

Exercice 2 c) :

> Nature de la série $\sum u_n$ dans les cas .
>
> a) $u_n=\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}$ et b) $u_n=(-1)^n\exp\left(-\mathrm{Log}^{\alpha} n\right)\quad(\alpha>0)$. ■

a) Soit (a_p) une suite de réels telle que $a_p \underset{p\to\infty}{\downarrow} 0$, on sait que la série $\sum(-1)^p a_p$ est alternée et semi-convergente ; on peut donc bien définir pour n entier : $v_n=\sum_{p=n}^{\infty}(-1)^p a_p$ et alors $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Or pour tout n entier : $v_{2n}-v_{2n+2}=a_{2n}-a_{2n+1}\geq 0$, donc $v_{2n} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$, et pour tout n entier $v_{2n}\geq 0$. De manière analogue, pour tout n entier, $v_{2n-1}-v_{2n+1}=-a_{2n-1}+a_{2n}\leq 0$, donc $v_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\uparrow} 0$, et pour tout n entier, $v_{2n+1}\leq 0$. Pour tout n, les signes de v_n et de v_{n+1} sont donc opposés et par conséquent :

$$|v_n|\leq|v_{n+1}-v_n|=a_n.$$

Cette majoration ne nous permet pas de déterminer directement la nature de la série proposée ici, puisque la série $\sum\frac{1}{\sqrt{p+1}}$ est divergente ; mais nous pouvons effectuer , pour n entier > 0, la manipulation suivante :

$$u_n=\sum_{p=n}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}=\sum_{q=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{q=n}^{\infty}\frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\sum_{p=n}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}+\frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\sum_{p=n}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{p+1}}\right).$$

Le premier terme est le terme général d'une série semi-converg

$\sum u_n$ est donc convergente si, et seulement si, la série $\sum v_n$, où $v_n = \sum_{p=n}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p+1}}\right)$, l'est.

Nous pouvons maintenant poser pour p entier > 0 :

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p+1}} = \frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{\sqrt{p+1}\sqrt{p}} = \frac{1}{\left(\sqrt{p+1}+\sqrt{p}\right)\sqrt{p+1}\sqrt{p}}.$$

On vérifie que $a_p \underset{p\to\infty}{\downarrow} 0$, donc, d'après ce qui précède, pour tout n entier > 0 :

$$|v_n| \le a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Comme la série $\sum a_n$ est convergente, la série $\sum v_n$ est absolument convergente. Nous pouvons en déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

b) $u_n = (-1)^n \exp\left(-\mathrm{Log}^\alpha n\right) \quad (\alpha > 0)$.

La suite $v_n = \exp\left(-\mathrm{Log}^\alpha n\right)$ est positive décroissante de limite nulle. La série $\sum u_n$ est donc alternée, convergente (théorème IX.4.1).

Exercice 6 a) :

> Nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :
>
> a) $u_n = \sin \pi\left(n^\alpha + a^\alpha\right)^{1/\alpha} \quad (a > 0, \alpha > 0)$
>
> c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + \sin n\theta} \quad (\alpha > 0, \theta \in \mathbb{R})$. ■

a) Nous voulons utiliser le fait que π est une antipériode de la fonction sin.

Posons $v_n = \left(n^\alpha + a^\alpha\right)^{1/\alpha} - n = n\left(\left(1+\frac{a^\alpha}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} - 1\right) \sim n\frac{1}{\alpha} \times \frac{a^\alpha}{n^\alpha} \sim \frac{a^\alpha}{\alpha} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$,

de telle sorte que : $u_n = \sin(\pi v_n + \pi n) = (-1)^n \sin(\pi v_n)$.

Dans le cas où $\alpha > 2$, on voit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Dans le cas où $\alpha > 1$, montrons que la série $\sum u_n$ est alternée.

Posons pour $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}\left[\left(1+x^\alpha\right)^{1/\alpha} - 1\right]$. Cette fonction est croissante car $x \mapsto \left(1+x^\alpha\right)^{1/\alpha}$ est convexe (voir exemple 6 du §V.5 : inégalité de Hölder).

Or : $\sin(\pi v_n) = \sin\left(a\pi\varphi\left(\frac{a}{n}\right)\right)$; cette suite est donc décroissante, au moins à partir d'un certain rang. La série $\sum u_n$ est bien alternée, donc convergente.

Dans le cas où $\alpha = 1$, $u_n = \sin(\pi(n+a)) = (-1)^n \sin(\pi a)$; la série est visiblement convergente si, et seulement si, $a \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas où $0 < \alpha < 1$, montrons que la série $\sum u_n$ est divergente et que son terme général, $u_n = (-1)^n \sin(\pi v_n)$, ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'après l'étude préliminaire $v_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Montrons aussi que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
En effet :

$$v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^\alpha + a^\alpha\right)^{1/\alpha} - (n+1) - \left(n^\alpha + a^\alpha\right)^{1/\alpha} + n = n a_n,$$

où :

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha + \frac{a^\alpha}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} - \frac{1}{n}.$$

Posons :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha b_n}{n}, \text{ où } b_n \underset{n\to\infty}{\to} 1,$$

nous obtenons :

$$a_n = \left(1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha} + \frac{\alpha b_n}{n}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} - \frac{1}{n}.$$

En utilisant le théorème de Rolle, nous voyons que :

$$\left(1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha} + \frac{\alpha b_n}{n}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha} = \frac{\alpha b_n}{n} \times \frac{1}{\alpha}(c_n)^{(1/\alpha)-1},$$

où :

$$1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha} \le c_n \le 1 + \frac{a^\alpha}{n^\alpha} + \frac{\alpha b_n}{n}, \text{ donc } c_n \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Nous obtenons finalement :

$$v_{n+1} - v_n = b_n (c_n)^{(1/\alpha)-1} - 1 \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On démontre dans l'exercice 25b) du § V.4 que dans ces conditions, la suite $(\sin(\pi v_n))$ est partout dense dans l'intervalle $[-1,1]$. On démontre qu'en tout cas cette suite ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Notons, pour x réel, $A(x)$ l'entier le plus proche de x ($A(1/2) = 0$). Si

$\sin(\pi v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sin\big(\pi(v_n - A(v_n))\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où puisque $\left|\pi(v_n - A(v_n))\right| \le \dfrac{\pi}{2}$, en utilisant la fonction Arcsin, $v_n - A(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme $v_{n+1} - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, nous en déduisons $A(v_{n+1}) - A(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La suite d'entiers $(A(v_n))$ est donc stationnaire. Comme $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nous en déduisons $A(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Cela est contradictoire.

La série $\sum u_n$ n'est donc pas dans ce cas convergente.

c) Le nombre α étant donné, le terme $\dfrac{1}{n^\alpha + \sin n\theta}$ est défini pour n assez grand.

Si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n$ est évidemment absolument convergente. Nous supposerons dans la suite que $\alpha \le 1$.

Nous pouvons développer le terme de la série. Soit N un entier > 0 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \sin n\theta} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 + \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right)^k + \frac{\left(-\dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right)^N}{1 + \dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}}\right].$$

Prenons pour N l'entier tel que $(N+1)\alpha > 1 \ge N\alpha$, soit $N = \mathrm{Ent}(1/\alpha) \ge 1$; la série de terme général :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\frac{\left(-\dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right)^N}{1 + \dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}}\right] = \frac{(-1)^n}{n^{(N+1)\alpha}}\left[\frac{(-\sin n\theta)^N}{1 + \dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}}\right],$$

est visiblement absolument convergente. Les séries $\sum u_n$ et $\sum u'_n$, où :

$$u'_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right)^k\right] = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^{n-k}\sin^k n\theta}{n^{(k+1)\alpha}},$$

sont de même nature. Dans la suite, nous étudierons la seconde.

Posons pour k entier entre 0 et N-1, et pour tout n entier > 0 :

$$v_{k,n} = \frac{(-1)^{n-k}\sin^k n\theta}{n^{(k+1)\alpha}}.$$

Montrons que si $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, les sommes partielles de la série $\sum (-1)^{n-k}\sin^k n\theta$, sont uniformément majorées ; comme la suite $\left(\dfrac{1}{n^{(k+1)\alpha}}\right)$ est décroissante de limite nulle, nous pourrons en déduire, d'après

IX.4.2, que chaque série $\sum_n v_{k,n}$ est semi-convergente ; la série $\sum u_n$ sera alors convergente. Nous obtenons :

$$s_q = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \sin^k n\theta = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \frac{1}{(2\mathrm{i})^k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \frac{1}{(2\mathrm{i})^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \mathrm{e}^{(k-h)\mathrm{i}n\theta} (-1)^h \mathrm{e}^{-h\mathrm{i}n\theta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \frac{1}{(2\mathrm{i})^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^h \mathrm{e}^{(k-2h)\mathrm{i}n\theta} = \frac{1}{(2\mathrm{i})^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^h \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^n \mathrm{e}^{(k-2h)\mathrm{i}n\theta}.$$

Comme $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, il est clair que $-\mathrm{e}^{(k-2h)\mathrm{i}\theta}$ est toujours $\neq 1$ (même si $k-2h=0$). On peut effectuer les sommations :

$$s_q = \frac{1}{(2\mathrm{i})^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} (-1)^h \frac{1+(-1)^q \mathrm{e}^{(k-2h)\mathrm{i}q\theta}}{1+\mathrm{e}^{(k-2h)\mathrm{i}\theta}},$$

ce qui donne une majoration indépendante de q :

$$|s_q| \leq \frac{1}{2^k} \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} \frac{1}{\left|\cos\left((k/2-h)\theta\right)\right|}.$$

D'après ce qui précède, nous pouvons en déduire que dans le cas où $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, la série $\sum u_n$ est convergente.

Etudions maintenant le cas où $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$, p et q étant deux entiers premiers entre eux et $q > 0$.

1) Posons : $w_m = \sum_{n=2qm}^{2q(m+1)-1} u_n$, comme $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum w_m$ l'est . On a :

$$w_m = \sum_{n=2qm}^{2q(m+1)-1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \sin n\theta} = \sum_{r=0}^{2q-1} \frac{(-1)^{r+2qm}}{(2qm+r)^\alpha + \sin\left((2qm+r)\frac{p\pi}{q}\right)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{2q-1} \frac{(-1)^r}{(2qm+r)^\alpha + \sin\left(r\frac{p\pi}{q}\right)}.$$

2) Remplaçons cette série par la série plus simple de terme général :

$$w'_m = \sum_{r=0}^{2q-1} \frac{(-1)^r}{(2qm)^\alpha + \sin\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)}.$$

Montrons que la série $\sum\left(w_m - w'_m\right)$ est absolument convergente ; les séries $\sum w_m$ et $\sum w'_m$ seront alors de même nature, et de même nature que $\sum u_n$. On vérifie pour cela que :

$$w'_m - w_m = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \left(\frac{1}{(2qm)^\alpha + \sin\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)} - \frac{1}{(2qm+r)^\alpha + \sin\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)} \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{2q-1} (-1)^r \frac{(2qm+r)^\alpha - (2qm)^\alpha}{\left((2qm+r)^\alpha + \sin\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)\right)\left((2qm)^\alpha + \sin\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)\right)} \quad .$$

Comme :

$$(2qm+r)^\alpha - (2qm)^\alpha = (2qm)^\alpha\left(\left(1+\frac{r}{2qm}\right)^\alpha - 1\right) \sim \frac{\alpha r}{(2qm)^{1-\alpha}} \ (r>0),$$

on voit que :

$$\left(w'_m - w_m\right) \in O\left(\frac{1}{m^{1+\alpha}}\right).$$

Cela prouve bien que la série $\sum\left(w_m - w'_m\right)$ est absolument convergente.

3) Posons comme précédemment $N = \mathrm{Ent}(1/\alpha) \geq 1$; on démontre comme précédemment que la série $\sum w'_m$ est de même nature que la série de terme général :

$$w''_m = \sum_{r=0}^{2q-1} \frac{(-1)^r}{(2qm)^\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k \sin^k\left(r\dfrac{p\pi}{q}\right)}{(2qm)^{k\alpha}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(2qm)^{(k+1)\alpha}} \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k a_k}{(2qm)^{(k+1)\alpha}},$$

avec :

$$a_k = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right).$$

Précisons que $a_0 = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r = \dfrac{1-(-1)^{2q}}{2} = 0$ (le premier terme dans le développement de $\dfrac{1}{1+x}$ est 1).

4) Notons $w_{k,m} = \dfrac{1}{m^{(k+1)\alpha}}$. Pour tout $k \in \{0, \cdots, N-1\}$, comme $N\alpha \le 1 < (N+1)\alpha$, la série $\sum\limits_m w_{k,m}$ est divergente, et la suite de ses sommes partielles est équivalente à $\dfrac{1}{1-(k+1)\alpha} m^{1-(k+1)\alpha}$ si $(k+1)\alpha < 1$, $\mathrm{Log}\, m$ si $(k+1)\alpha = 1$ (§IX.3 exemple 2) ; on remarque que la suite des sommes partielles de $\sum\limits_m w_{k+1,m}$ est négligeable devant la suite des sommes partielles de $\sum\limits_m w_{k,m}$.
On déduit de cela que si les coefficients a_k, où $k \in \{0, \cdots, N-1\}$, ne sont pas tous nuls, la suite des sommes partielles de la série $\sum w''_m$ sera équivalente à $\dfrac{(-1)^{k_0} a_{k_0}}{(2q)^{(k_0+1)\alpha}} S_{k_0,m}$, k_0 étant le plus petit entier k entre 0 et N-1 tel que $a_k \neq 0$, et la suite $\left(S_{k_0,m}\right)$, la suite divergente des sommes partielles de la série $\sum\limits_m w_{k_0,m}$.
La série $\sum u_n$ sera donc convergente si, et seulement si, tous les coefficients a_k, où $k \in \{0, \cdots, N-1\}$, sont nuls. Il est utile de remarquer que ces coefficients ne dépendent que de p et q , c'est-à-dire en définitive de θ. Vue la définition de l'entier N, on peut encore exprimer cette condition sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \le \frac{1}{\alpha} - 1 \Rightarrow a_k = 0.$$

On peut par exemple tout de suite en déduire que si $\alpha = 1$, la série $\sum u_n$ est toujours convergente, puisque $a_0 = 0$; ce qui se vérifie d'ailleurs facilement directement.

5) Déterminons maintenant pour k entier > 0, la valeur des coefficients :

$$a_k = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right).$$

Utilisons les propriétés de la fonction sin :

$$a_k = \sum_{r=1}^{q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right) + \sum_{r=q+1}^{2q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} (-1)^r \sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right) + \sum_{s=1}^{q-1} (-1)^{2q-s} \sin^k\left((2q-s)\frac{p\pi}{q}\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{q-1} (-1)^r \left(\sin^k\left(r\frac{p\pi}{q}\right) + \sin^k\left(-r\frac{p\pi}{q}\right)\right).$$

On en déduit que si k est impair, $a_k = 0$.

Déterminons la valeur de : $a_{2k} = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \sin^{2k}\left(r\frac{p\pi}{q}\right)$.

$$a_{2k} = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \sin^{2k}\left(r\frac{p\pi}{q}\right) = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2k}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}}\right)^{2k}$$

$$= \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2k}}\left(\sum_{h=0}^{2k}\binom{2k}{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}(2k-h)}(-1)^h\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}h}\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r \frac{1}{(2\mathrm{i})^{2k}}\left(\sum_{h=0}^{2k}(-1)^h\binom{2k}{h}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}(k-h)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(-1)^k 2^{2k}}\sum_{h=0}^{2k}(-1)^h\binom{2k}{h}\left(\sum_{r=0}^{2q-1}(-1)^r\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}(k-h)}\right).$$

On voit que la somme $S_h = \sum_{r=0}^{2q-1} (-1)^r\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\frac{p\pi}{q}(k-h)}$ est nulle si $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{p\pi}{q}(k-h)} \neq -1$ et égale à $2q$ dans le cas contraire. Or :

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{p\pi}{q}(k-h)} = -1 \iff (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad 2p(k-h) = (1+2n)q.$$

Si l'entier q est impair, cela n'est jamais vérifié ; dans ce cas les coefficients a_k sont tous nuls.

Supposons q pair, $q = 2q_1$; comme p et q sont premiers entre eux, p est impair. La condition ci-dessus s'écrit :

$(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad p(k-h) = (1+2n)q_1$.

Comme p et q_1 sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, nécessairement p divise $1+2n$. La condition s'écrit donc :

$(\exists m \in \mathbb{Z}) \quad k-h = (1+2m)q_1$, soit $h \equiv k - q_1 \quad [q]$.

Cela nous donne :

$$a_{2k} = \frac{2q}{(-1)^k 2^{2k}} \sum_{\substack{h \equiv k-q_1 \; [2q_1] \\ 0 \le h \le 2k}} (-1)^h\binom{2k}{h} = \frac{2q(-1)^{q_1}}{2^{2k}} \sum_{\substack{h \equiv k-q_1 \; [q] \\ 0 \le h \le 2k}} \binom{2k}{h}.$$

Cette somme est donc nulle si, et seulement si, il n'y a aucun entier congru à $k-q_1$ modulo q, entre 0 et $2k$, c'est-à-dire si, et seulement si, il n'y a aucun multiple impair de q_1 entre $-k$ et $+k$; on voit facilement que cela équivaut à $k < q_1$.

Résumons ces résultats (pour tout k entier ≥ 0) :

$a_{2k+1} = 0$,

si q impair, $a_{2k} = 0$,

si q pair, $a_{2k} = 0$ si, et seulement si, $2k < q$.

On rappelle que $a_0 = 0$.

Si q est impair, tous les coefficients a_k sont nuls, si q est pair, l'indice du premier coefficient non nul est q. On vérifie d'ailleurs aisément que si q est pair :

$$a_q = \frac{2q(-1)^{q_1}}{2^q} \times 2.$$

6) En utilisant les résultats démontrés dans le 4) et dans le 5), nous pouvons conclure :

En notant : $\theta = \frac{p}{q}\pi$, p et q entiers premiers entre eux, $q > 0$.

Si q est impair, la série $\sum u_n$ est toujours convergente.

Si q est pair, la série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, $q > \frac{1}{\alpha} - 1$.

Exercice 11 :

Soit un réel $\alpha \in \,]0,1[$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\left|\sin\left(n^\alpha\right)\right|}{n}$ diverge.

b) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que :

$(\forall X > 0)$ $\left|\int_0^X \sin\left(x^\alpha\right) \mathrm{d}x\right| \leq A X^{1-\alpha}$, puis, qu'il existe $B > 0$ tel que

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $\left|\int_0^k \sin\left(x^\alpha\right)\mathrm{d}x - \sum_{p=0}^{k} \sin\left(p^\alpha\right)\right| \leq B k^\alpha$.

c) En déduire que si $\gamma > \operatorname{Max}(\alpha, 1-\alpha)$, la série $\sum \frac{\sin\left(n^\alpha\right)}{n^\gamma}$ converge. ■

a) Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tous n et k entiers, $k\pi + \varepsilon < n^\alpha \leq k\pi + \pi - \varepsilon$, équivaut à $n_k < n \leq m_k$, où $n_k = \operatorname{Ent}\left((k\pi + \varepsilon)^{1/\alpha}\right)$ et $m_k = \operatorname{Ent}\left((k\pi + \pi - \varepsilon)^{1/\alpha}\right)$.

Posons pour n entier > 0, $u_n = \frac{\left|\sin n^\alpha\right|}{n}$; il est clair que :

$$\sum_{n=1}^{m_k} u_n \geq \sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{n=n_h+1}^{m_h} u_n\right).$$

Or si $k\pi + \varepsilon < n^\alpha \leq k\pi + \pi - \varepsilon$, alors $u_n \geq \frac{\sin\varepsilon}{n}$, donc :

$$\sum_{n=1}^{m_k} u_n \geq \sin\varepsilon \sum_{h=0}^{k}\left(\sum_{n=n_h+1}^{m_h} \frac{1}{n}\right) \geq \sin\varepsilon \sum_{h=0}^{k}\left(\frac{m_h - n_h}{m_h}\right).$$

Posons pour h entier > 0 :

$$a_h = (h\pi + \pi - \varepsilon)^{1/\alpha} - (h\pi + \varepsilon)^{1/\alpha} = (h\pi)^{1/\alpha}\left(\left(1 + \frac{\pi - \varepsilon}{h\pi}\right)^{1/\alpha} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{h\pi}\right)^{1/\alpha}\right),$$

donc :

$$a_h \sim (h\pi)^{1/\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{\pi - 2\varepsilon}{h\pi} \sim \frac{\pi - 2\varepsilon}{\alpha}(h\pi)^{(1/\alpha)-1}.$$

Comme $a_h \underset{h\to\infty}{\to} +\infty$ et $a_h - 1 < m_h - n_h < a_h + 1$, on en déduit $(m_h - n_h) \sim a_h$.

De manière analogue, on voit facilement que :

$$m_h = \mathrm{Ent}\left((h\pi + \pi - \varepsilon)^{1/\alpha}\right) \sim (h\pi + \pi - \varepsilon)^{1/\alpha} \sim (h\pi)^{1/\alpha}.$$

Nous obtenons finalement :

$$\left(\frac{m_h - n_h}{m_h}\right) \sim \frac{\pi - 2\varepsilon}{\alpha\pi} \frac{1}{h}.$$

La série $\sum\left(\frac{m_h - n_h}{m_h}\right)$ est donc divergente. On déduit de ce qui précède que les sommes partielles $\sum_{n=1}^{m_k} u_n$ ne sont pas majorées ; la série $\sum u_n$ est donc divergente.

b) Effectuons le changement de variable $y = x^\alpha$:

$$I(X) = \int_0^X \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_0^{X^\alpha} \sin(y)\frac{1}{\alpha} y^{(1/\alpha)-1}\,\mathrm{d}y,$$

puis une intégration par parties :

$$\alpha I(X) = \left[(1 - \cos y)y^{(1/\alpha)-1}\right]_0^{X^\alpha} - \int_0^{X^\alpha} (1 - \cos y)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)y^{(1/\alpha)-2}\,\mathrm{d}y.$$

Il s'agit de la différence de deux termes positifs :

$$U(X) = \left(1 - \cos(X^\alpha)\right)\left(X^\alpha\right)^{(1/\alpha)-1} \leq 2X^{1-\alpha},$$

et :

$$V(X) = \int_0^{X^\alpha} (1 - \cos y)\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)y^{(1/\alpha)-2}\,\mathrm{d}y \leq 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_0^{X^\alpha} y^{(1/\alpha)-2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\left[y^{(1/\alpha)-1}\right]_0^{X^\alpha} = 2X^{1-\alpha}.$$

Nous en déduisons :

$$|I(X)| \leq \frac{2}{\alpha} X^{1-\alpha}.$$

Nous aurions pu aussi utiliser une variante de second théorème de la moyenne ; la fonction $y \mapsto y^{(1/\alpha)-1}$ étant croissante, il convient d'intervertir les rôles joués par les bornes ; on démontre l'existence d'un réel ξ, entre 0 et X tel que :

$$I(X) = \int_0^{X^\alpha} \sin(y) \frac{1}{\alpha} y^{(1/\alpha)-1} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha}\left(X^\alpha\right)^{(1/\alpha)-1} \int_\xi^{X^\alpha} \sin(y) \, \mathrm{d}y.$$

On obtient le même résultat.

Majorons maintenant :

$$u_k = \int_0^k \sin\left(x^\alpha\right) \mathrm{d}x - \sum_{p=1}^k \sin\left(p^\alpha\right) = \sum_{p=1}^k \left(\int_{p-1}^p \sin\left(x^\alpha\right) \mathrm{d}x - \sin\left(p^\alpha\right) \right) = \sum_{p=1}^k v_p,$$

où :

$$v_p = \int_{p-1}^p \left(\sin\left(x^\alpha\right) - \sin\left(p^\alpha\right)\right) \mathrm{d}x.$$

Sur l'intervalle $[\,x, p\,]$, nous pouvons appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sin\left(t^\alpha\right)$, de dérivée $t \mapsto \alpha \cos\left(t^\alpha\right) t^{\alpha-1}$. Cette dérivée étant majorée en valeur absolue sur l'intervalle $[\,x, p\,]$ par $\dfrac{\alpha}{x^{1-\alpha}}$, nous obtenons :

$$|v_p| \leq \alpha \int_{p-1}^p \frac{p-x}{x^{1-\alpha}} \mathrm{d}x \leq \alpha \int_{p-1}^p \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}}.$$

D'où pour tout k entier > 0 :

$$|u_k| \leq \sum_{p=1}^k |v_p| \leq \alpha \left(\sum_{p=1}^k \int_{p-1}^p \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}} \right) = \alpha \left(\int_0^k \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\alpha}} \right) = k^\alpha.$$

c) Posons pour k entier > 0 :

$$\sigma_k = \sum_{p=0}^k \sin\left(p^\alpha\right) = \sum_{p=1}^k \sin\left(p^\alpha\right).$$

D'après le b), pour tout $k > 0$:

$$|\sigma_k| \leq \frac{2}{\alpha} k^{1-\alpha} + k^\alpha \text{ (vrai aussi si } k = 0).$$

Comme suggéré, utilisons la transformation d'Abel ; si n entier > 0 :

$$\frac{\sin\left(k^\alpha\right)}{k^\gamma} = \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^\gamma} = \sigma_k \left(\frac{1}{k^\gamma} - \frac{1}{(k+1)^\gamma} \right) + \frac{\sigma_k}{(k+1)^\gamma} - \frac{\sigma_{k-1}}{k^{\cdot}}$$

Montrons que la série $\sum \sigma_k\left(\frac{1}{k^\gamma}-\frac{1}{(k+1)^\gamma}\right)$ est absolument convergente.

Nous observons que :

$$|\sigma_k|\left(\frac{1}{k^\gamma}-\frac{1}{(k+1)^\gamma}\right)=\frac{|\sigma_k|}{k^\gamma}\left(1-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\gamma}\right)\sim\frac{\gamma|\sigma_k|}{k^{\gamma+1}},$$

et d'après la majoration obtenue :

$$\frac{\gamma|\sigma_k|}{k^{\gamma+1}}\le\frac{2\gamma}{\alpha}\frac{k^{1-\alpha}}{k^{\gamma+1}}+\gamma\frac{k^\alpha}{k^{\gamma+1}}.$$

Comme $\gamma>\mathrm{Max}(\alpha,1-\alpha)$, la série $\sum\frac{\gamma|\sigma_k|}{k^{\gamma+1}}$ est absolument convergente. Il en est de même pour la série $\sum \sigma_k\left(\frac{1}{k^\gamma}-\frac{1}{(k+1)^\gamma}\right)$.

On remarque d'autre part que : $\frac{|\sigma_n|}{(n+1)^\gamma}\le\frac{|\sigma_n|}{n^\gamma}\le\frac{2}{\alpha}\frac{n^{1-\alpha}}{n^\gamma}+\frac{n^\alpha}{n^\gamma}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. La série $\sum\left(\frac{\sigma_n}{(n+1)^\gamma}-\frac{\sigma_{n-1}}{n^\gamma}\right)$ est donc convergente (calculer ses sommes partielles !).

La série $\sum\frac{\sin(n^\alpha)}{n^\gamma}$ est donc convergente.

Exercice 19 :

> Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$. On suppose cette suite convexe, c'est-à-dire telle que $(\forall n)\quad \lambda_n-2\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}\ge 0$.
>
> Montrer que $\forall x\in[0,\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin nx\ge 0$. ■

Le résultat étant évidemment vrai pour $x=0$, nous supposerons $0<x\le\pi$.

Posons pour n entier ≥ 0, $\mu_n=\lambda_n-\lambda_{n+1}$ et $v_n=\mu_n-\mu_{n+1}$. Comme la suite (λ_n) est décroissante, la suite (μ_n) est positive. Comme la suite (λ_n) est convexe, pour tout $n\ge 0$:

$$v_n=(\lambda_n-\lambda_{n+1})-(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2})=\lambda_n-2\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}\ge 0.$$

Posons d'autre part pour x réel et n entier ≥ 0 :

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\text{ et }B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(x).$$

Remarquons que pour tout x, $A_0(x)=0$ et $B_0(x)=0$.

Effectuons deux fois la transformation d'Abel ; pour N entier $(N \geq 3)$:

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \sin(nx)=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left(A_n(x)-A_{n-1}(x)\right)=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n A_n(x)-\sum_{n=1}^{N}\lambda_n A_{n-1}(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n A_n(x)-\sum_{n=0}^{N-1}\lambda_{n+1}A_n(x)=\lambda_N A_N(x)+\sum_{n=1}^{N-1}(\lambda_n-\lambda_{n+1})A_n(x)=$$

$$=\lambda_N A_N(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\mu_n A_n(x).$$

Puis :

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \sin(nx)=\lambda_N A_N(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\mu_n\left(B_n(x)-B_{n-1}(x)\right)=$$

$$=\lambda_N A_N(x)+\sum_{n=1}^{N-1}\mu_n B_n(x)-\sum_{n=0}^{N-2}\mu_{n+1}B_n(x)=$$

$$=\lambda_N A_N(x)+\mu_{N-1}B_{N-1}(x)+\sum_{n=1}^{N-2}\nu_n B_n(x).$$

Pour tout x, $0<x\leq\pi$, calculons maintenant :

$$A_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Pour x fixé, il s'agit d'une suite bornée.
On peut vérifier $A_1(x)=\sin x$.

Calculons aussi :

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(k+1)x}-1}{e^{ix}-1}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{e^{ix}-1}\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}-\frac{n+1}{e^{ix}-1}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{e^{ix}-1}\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}-\frac{n+1}{e^{ix}-1}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}\left(e^{i(n+1)x}-1\right)-(n+1)\left(e^{ix}-1\right)}{\left(e^{ix}-1\right)^2}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(\frac{\left(e^{i(n+1)x}-1\right)-(n+1)\left(1-e^{-ix}\right)}{\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)^2}\right)=\frac{(n+1)\sin x-\sin(n+1)x}{4\sin^2(x/2)}.$$

On peut vérifier $B_1(x) = A_0(x) + A_1(x) = \sin x$.

Montrons que pour tout x, $0 < x \leq \pi$, et n entier ≥ 0, $B_n(x) \geq 0$.
Comme :
$\sin(n+1)x - \sin(n-1)x = 2\sin x \cos nx \leq 2\sin x = (n+1)\sin x - (n-1)\sin x$,
on en déduit :
$$(n-1)\sin x - \sin(n-1)x \leq (n+1)\sin x - \sin(n+1)x \text{ , soit}$$
$B_{n-1}(x) \leq B_{n+1}(x)$.
Il suffit donc de constater que : $B_0(x) = 0 \geq 0$ et $B_1(x) = \sin x \geq 0$.

Reprenons maintenant l'égalité (pour $N \geq 3$ et pour tout x, $0 < x \leq \pi$) :
$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sin(nx) = \lambda_N A_N(x) + \mu_{N-1} B_{N-1}(x) + \sum_{n=1}^{N-2} \nu_n B_n(x).$$
D'après ce qui précède, et comme d'autre part les suites (μ_n) et (ν_n) sont positives :
$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \sin(nx) \geq \lambda_N A_N(x).$$
Or on a constaté que pour x fixé, la suite $(A_n(x))$ était bornée. Donc $\lambda_N A_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, que pour tout x, $0 < x \leq \pi$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin(nx) \geq 0.$$

Exercice 21 :

Nombres de Liouville.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique de degré $\nu \geq 2$. Montrer :
$$\exists c > 0 \mid \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\nu}.$$
b) Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ et une suite strictement croissante (b_n) de $\mathbb{N}^*$ telle que $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = +\infty$. Déduire de a) que le réel $\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-b_n}$ est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). Un nombre tel que Λ est appelé *nombre de Liouville*.
c) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a > 2$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ avec $(\forall i)\, b_{i+1} \geq 2 + b_i$, et $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = +\infty$. Soit

$\theta(b)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{-b_n}$. Utiliser le a) pour prouver que $\theta(b)$ est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). Montrer que $b \mapsto \theta(b)$ est injective et en déduire que l'ensemble des $\theta(b)$ quand b varie est non dénombrable, et même qu'il est équipotent à $\mathbb{R}$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrique de degré $v \geq 2$. Nature de la série $\sum \frac{a^n}{\sin(\pi n \alpha)}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$. ■

Soit P le polynôme minimal de α, de degré v. Il n'a pas de zéro rationnel. On peut supposer que ce polynôme est à coefficients entiers ; il ne sera bien sûr plus normalisé, mais alors on voit que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad q^v P\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}^*,$$

donc :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^v} \text{ soit : } \forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad \left|P(\alpha)-P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^v}.$$

Considérons le nombre $c=\inf_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} q^v\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|$, montrons que $c>0$.

Si $c=0$, on peut trouver une suite d'éléments de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, (p_n, q_n) telle que :

$$q_n^v\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Il est alors clair que $\frac{p_n}{q_n} \underset{n\to\infty}{\to} \alpha$; d'où la contradiction :

$$\frac{P(\alpha)-P\left(\frac{p_n}{q_n}\right)}{\alpha-\frac{p_n}{q_n}} \underset{n\to\infty}{\to} P'(\alpha) \text{ et } \frac{\left|P(\alpha)-P\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|}{\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|} \geq \frac{1}{q_n^v\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

On vérifie bien sûr :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \quad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^v}.$$

b) La série $\sum a^{-b_k}$ est bien sûr convergente puisque pour tout k entier, $b_k > k$ et $a \geq 2$.

Posons pour n entier > 0, $A_n=\sum_{k=1}^{n} a^{-b_k}$; ce sont des nombres rationnels.

Comme la suite (b_n) est croissante, on peut écrire :

$$\Lambda_n = \frac{1}{a^{b_1}} + \frac{1}{a^{b_2}} + \cdots + \frac{1}{a^{b_n}} = \frac{p_n}{a^{b_n}} = \frac{p_n}{q_n} \ (q_n = a^{b_n} \text{ et } p_n \text{ entiers}).$$

Majorons la différence avec la limite :

$$\Lambda - \Lambda_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{b_k}} = \frac{1}{a^{b_{n+1}}}\left(1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{a^{b_k - b_{n+1}}}\right).$$

Comme la suite (b_n) est strictement croissante on voit que $b_k - b_{n+1} \geq k - n - 1$, d'où :

$$0 < \Lambda - \Lambda_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{b_k}} \leq \frac{1}{a^{b_{n+1}}}\left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{a^h}\right) = \frac{a}{a-1}\frac{1}{a^{b_{n+1}}},$$

soit enfin, pour tout $n \geq 1$:

$$0 < \Lambda - \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{M}{q_{n+1}}, \text{ où } M = \frac{a}{a-1}.$$

Montrons que pour tout entier $\nu \geq 1$, le réel Λ ne peut pas être algébrique de degré ν.

Si Λ était algébrique de degré $\nu \geq 2$, d'après a), on pourrait trouver un nombre $c > 0$ tel que pour tout n entier :

$$\Lambda - \frac{p_n}{q_n} \geq \frac{c}{q_n^{\nu}}.$$

Si Λ était rationnel, $\Lambda = \dfrac{p}{q}$ (p et q entiers premiers entre eux, $q > 0$), on aurait :

$$\Lambda - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p\,q_n - q\,p_n}{q\,q_n} \geq \frac{1}{q\,q_n} = \frac{c}{q_n}, \text{ en posant ici } c = \frac{1}{q},$$

puisque le numérateur ne peut être qu'un entier > 0.

Dans les deux cas, on obtient pour tout n entier :

$$\frac{M}{q_{n+1}} \geq \frac{c}{q_n^{\nu}}, \text{ soit } \frac{q_{n+1}}{q_n^{\nu}} \leq \frac{M}{c}.$$

On observe que :

$$\frac{q_{n+1}}{q_n^{\nu}} = \frac{a^{b_{n+1}}}{a^{\nu b_n}} = a^{b_{n+1} - \nu b_n}.$$

La suite $(b_{n+1} - \nu b_n)$ est donc majorée ; or :

$$b_{n+1} - \nu b_n = b_n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - \nu\right) \geq \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - \nu\right),$$

cela contredit l'hypothèse $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = +\infty$.

Le nombre Λ, n'est donc pas algébrique.

c) La suite b étant pour l'instant fixée, posons pour tout n entier :

$$\theta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a^{b_k}} = \frac{p_n}{a^{b_n}} = \frac{p_n}{q_n},$$

le nombre p_n étant, comme dans le b), un entier relatif, puisque la suite b est croissante.

La série $\sum \frac{(-1)^k}{a^{b_k}}$ est alternée ; on sait que les suites extraites d'indices pairs et d'indices impairs, sont adjacentes. On peut vérifier plus précisément que :

$$\theta_{2n+2} - \theta_{2n} = \frac{1}{a^{b_{2n+2}}} - \frac{1}{a^{b_{2n+1}}} < 0, \text{ et } \theta_{2n+1} - \theta_{2n-1} = -\frac{1}{a^{b_{2n+1}}} + \frac{1}{a^{b_{2n}}} > 0,$$

ces suites sont donc strictement monotones. On vérifie aussi : $\theta_{2n} - \theta_{2n-1} = \frac{1}{a^{b_{2n}}} > 0$.

Le nombre θ est donc, pour tout n, *strictement* entre θ_{n+1} et θ_n ; d'où :

$$0 < \left| \theta - \frac{p_n}{a^{b_n}} \right| < \frac{1}{a^{b_{n+1}}}.$$

Si θ était algébrique de degré $\nu \geq 2$, il existerait un réel $c > 0$ tel que pour tout n entier :

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{c}{q_n^{\nu}}.$$

Si θ était rationnel, $\theta = \frac{p}{q}$ (p et q entiers premiers entre eux, $q > 0$), on aurait :

$$0 < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p\,q_n - q\,p_n}{q\,q_n} \right| ;$$

le numérateur est donc un entier $\neq 0$, et en posant $c = \frac{1}{q}$, nous obtenons :

$$\left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{c}{q_n}.$$

Dans les deux cas, on obtient pour tout n entier :

$$\frac{1}{a^{b_{n+1}}} > \frac{c}{a^{\nu b_n}}, \text{ soit } a^{b_{n+1} - \nu b_n} < \frac{1}{c}.$$

Les suites :

$$b_{n+1} - \nu b_n = b_n \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - \nu \right) \text{ et } \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - \nu \right),$$

devraient être majorées, ce qui contredit l'hypothèse faite sur b.

Le nombre $\theta(b)$ est donc bien transcendant.

Montrons maintenant que l'application $b \mapsto \theta(b)$ est injective.

Supposons $b \neq b'$. Soit p le plus petit entier n tel que $b_n \neq b'_n$. On peut supposer $b_p > b'_p$. On voit que :

$$\theta(b') - \theta(b) = (-1)^p\left(\eta(b') - \eta(b)\right),$$

où :

$$\eta(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{b_{k+p}}}, \text{ et } \eta(b') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{b'_{k+p}}}.$$

Montrons que $\eta(b') > \eta(b)$:

Les séries dont les sommes sont $\eta(b)$ et $\eta(b')$ sont (strictement) alternées ; on en déduit :

$$\eta(b') > \frac{1}{a^{b'_p}} - \frac{1}{a^{b'_{p+1}}} \text{ et } \eta(b) < \frac{1}{a^{b_p}}.$$

D'après l'énoncé $b'_{p+1} \geq b'_p + 2$, donc $\eta(b') > \dfrac{1}{a^{b'_p}} - \dfrac{1}{a^{b'_{p+1}}} \geq \dfrac{1}{a^{b'_p}} - \dfrac{1}{a^{b'_p+2}}$.

D'autre part $b_p \geq b'_p + 1$, donc $\dfrac{1}{a^{b'_p+1}} \geq \dfrac{1}{a^{b_p}} > \eta(b)$.

Il suffit donc de vérifier : $\dfrac{1}{a^{b'_p}} - \dfrac{1}{a^{b'_p+2}} \geq \dfrac{1}{a^{b'_p+1}}$, soit $a^2 - 1 \geq a$, ce qui est vrai pour tout entier $a \geq 2$.

Cela prouve que $\theta(b') \neq \theta(b)$.

L'application $b \mapsto \theta(b)$ est bien injective.

Montrons qu'on peut fabriquer une application injective de l'intervalle des réels $[0,1[$, vers l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites b vérifiant les conditions de l'énoncé.

A un réel $x \in [0,1[$ on peut d'abord faire correspondre de manière injective son développement décimal propre (a_n). A une telle suite faisons correspondre la suite d'entiers b définie par :

$$b_n = \prod_{k=0}^{n} (k+1)(a_k + 2).$$

Cette application est bien injective, car $a_0 = b_0 - 2$, et pour tout $n > 0$, $(n+1)(a_n + 2) = \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$. Il est facile de vérifier que $b \in \mathcal{B}$.

Le cardinal de $\mathcal{B}$ est donc au moins égal à celui de $\mathbb{R}$, et comme l'application $b \mapsto \theta(b)$ est injective de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$, il est au plus égal à celui de $\mathbb{R}$. Il y a donc égalité (théorème de Cantor-Bernstein).

d) Le nombre α n'étant pas rationnel, les termes de la série $\sum \frac{a^n}{\sin(\pi n \alpha)}$ sont définis si $n > 0$.

On vérifie que pour tout entier $n > 0$: $\frac{a^n}{|\sin(\pi n \alpha)|} \geq a^n$, et que par conséquent, si $a \geq 1$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série n'est pas convergente.

Nous supposerons dans la suite que $0 < a < 1$.

D'après le a), il existe un réel $c > 0$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\nu}$.

Soit un entier $q > 0$, notons p l'entier le plus proche de $q\alpha$, donc :

$$\frac{1}{2} \geq |q\alpha - p| \geq \frac{c}{q^{\nu-1}}.$$

Nous en déduisons :

$$|\sin(\pi q \alpha)| = |\sin(\pi(q\alpha - p))| \geq \sin\left(\frac{\pi c}{q^{\nu-1}}\right).$$

En utilisant l'inégalité $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$, vraie par convexité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, nous obtenons :

$$|\sin(\pi q \alpha)| \geq \frac{2c}{q^{\nu-1}}, \text{ soit } \frac{a^q}{|\sin(\pi q \alpha)|} \leq \frac{1}{2c} q^{\nu-1} a^q.$$

La série de terme général $u_n = \frac{1}{2c} n^{\nu-1} a^n$, est convergente d'après la règle de d'Alembert, puisque : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\nu-1} a \underset{n\to\infty}{\to} a < 1$. La série $\sum \frac{a^n}{\sin(\pi n \alpha)}$ est donc absolument convergente si $0 < a < 1$.

Exercice 23 :

> Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$. ■

Déterminons la parité de $\binom{n}{3}$. Le problème général de la détermination de la parité de $\binom{n}{p}$, a été résolu par Lucas (*Théorie des nombres*, tome 1 ; A. Blanchard, Paris 1961), voir aussi dans la *Revue de Mathématiques Spéciales*, décembre 1991, "Congruences des coefficients du binôme", par P. Delezoide.

Montrons ici élémentairement que cette parité ne dépend que c
l'entier n modulo 4.

Ecrivons $\binom{n}{3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=\dfrac{1}{6}P(n)$, où P est un polynôme à coefficients entiers. On en déduit que pour tout n entier, $P(n+4)-P(n)$ est divisible par 4, et que par conséquent l'entier $\dfrac{1}{6}P(n+4)-\dfrac{1}{6}P(n)$ est divisible par 2. La parité de $\binom{n}{3}$ ne dépend donc que de la classe de n modulo 4.

Comme le polynôme P est nul en 0, 1, 2, et que $\binom{3}{3}=1$, le nombre $\binom{n}{3}$ est impair si, et seulement si, n est congru à 3 modulo 4.

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on peut grouper les termes de la série 4 par 4. La série $\sum u_n$ est donc de même nature que la série $\sum v_p$ où $v_p=\dfrac{1}{4p}+\dfrac{1}{4p+1}+\dfrac{1}{4p+2}-\dfrac{1}{4p+3}\sim\dfrac{1}{2p}$. Les deux séries sont donc divergentes.

§ IX.6 *NOTIONS SUR LES PRODUITS INFINIS*

Exercice 1 :

> Soit un réel $x>1$. On définit la suite (q_n) par $q_1=x$ et $(\forall n\geq 1)\quad q_{n+1}=2q_n^2-1$. Montrer que $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{q_n}\right)$. ■

La relation $q_{n+1}=2q_n^2-1$, fait penser à l'identité $\mathrm{ch}(2t)=2\mathrm{ch}^2(t)-1$. Posons $x=\mathrm{ch}(2\beta)$ $(\beta>0)$; il est alors évident par récurrence que pour tout entier $n\geq 1$, $q_n=\mathrm{ch}(2^n\beta)$.

On constate d'autre part que pour tout t réel :

$$\frac{\mathrm{th}(t)}{\mathrm{th}(t/2)}=\frac{2}{1+\mathrm{th}^2(t/2)}=\frac{2\mathrm{ch}^2(t/2)}{\mathrm{ch}^2(t/2)+\mathrm{sh}^2(t/2)}=\frac{\mathrm{ch}(t)+1}{\mathrm{ch}(t)}=1+\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.$$

Donc pour tout n entier :

$$\frac{\mathrm{th}(2^n\beta)}{\mathrm{th}(2^{n-1}\beta)}=1+\frac{1}{\mathrm{ch}(2^n\beta)}=1+\frac{1}{q_n}.$$

Nous en déduisons que pour tout entier $N>0$:

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)=\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{th}(2^n\beta)}{\mathrm{th}(2^{n-1}\beta)}\right)=\frac{\mathrm{th}(2^N\beta)}{\mathrm{th}(\beta)}.$$

On voit que le produit est convergent et que :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)=\frac{1}{\operatorname{th}(\beta)}.$$

On vérifie enfin que :

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2\beta)+1}{\operatorname{ch}(2\beta)-1}}=\sqrt{\frac{2\operatorname{ch}^2(\beta)}{2\operatorname{sh}^2(\beta)}}=\frac{1}{\operatorname{th}(\beta)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right).$$

Exercice 3 f) :

> Etudier la nature du produit infini :
> $$\prod_{n\geq 1}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an^2}z^n\right),\quad a>0, |z|\neq e^a. \blacksquare$$

Posons pour n entier >1, $u_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an^2}$. On vérifie que :

$$\operatorname{Log}\left(u_n e^{an}\right)=an^2\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{n}\right)+an.$$

On voit facilement à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 que :

$$\operatorname{Log}\left(u_n e^{an}\right)\underset{n\to\infty}{\to}-\frac{a}{2} \text{ et donc que } u_n e^{an}\underset{n\to\infty}{\to}e^{-a/2}.$$

On en déduit finalement :

$$v_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{an^2}z^n\sim e^{-a/2}\left(e^{-a}z\right)^n.$$

Nous avons à étudier la nature du produit infini $\prod(1-v_n)$.

Si ce produit est convergent, alors $v_n\underset{n\to\infty}{\to}0$, donc $\left|e^{-a}z\right|<1$. Inversement, si $\left|e^{-a}z\right|<1$, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc le produit $\prod(1-v_n)$ est absolument convergent (théorème IX.6.2).

Exercice 3 h) :

> Etudier la nature du produit infini : $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. $\blacksquare$

On vérifie que $u_n=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\to}1$, on peut donc regrouper les facteurs deux par deux. La nature de ce produit infini est la même que la nature du produit infini :

$$\prod_{p\geq 1}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2p}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right)\right)=\prod_{p\geq 1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2p}}-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}-\frac{1}{\sqrt{2p}}\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right).$$

C'est-à-dire le produit infini $\prod\left(1-v_p\right)$ où :

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{2p}}\frac{1}{\sqrt{2p+1}}-\left(\frac{1}{\sqrt{2p}}-\frac{1}{\sqrt{2p+1}}\right).$$

Dans cette somme, le deuxième terme est équivalent à $\dfrac{1}{4p\sqrt{2p}}$, et est donc négligeable devant le premier. Nous obtenons : $v_p \sim \dfrac{1}{2p}$.

La série $\sum v_p$ est donc divergente, et les produits infinis $\prod\left(1-v_p\right)$ et $\prod_{n\geq 2}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ sont divergents.

Exercice 8 :

Soit q un entier ≥ 2.

a) Montrer qu'il existe un et un seul $(q-1)$-uplet $\left(b_2, b_3,\cdots, b_q\right)$ de réels, tels que :

$$\operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}+\frac{(-1)^{2n}b_2}{n^{2/q}}+\frac{(-1)^{3n}b_3}{n^{3/q}}+\cdots+\frac{(-1)^{qn}b_q}{n^{q/q}}\right)-\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}$$

$$\underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

b) En reprenant les notations du a), on pose :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}+\frac{(-1)^{2n}b_2}{n^{2/q}}+\frac{(-1)^{3n}b_3}{n^{3/q}}+\cdots+\frac{(-1)^{qn}b_q}{n^{q/q}}.$$

Montrer que le produit infini $\prod\left(1+u_n\right)$ converge alors que les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2$,..., $\sum u_n^{q-1}$ sont toutes divergentes.

c) Existe-t-il une série complexe $\sum u_n$ telle que le produit infini $\prod\left(1+u_n\right)$ converge, mais que toutes les séries $\sum u_n^p$ divergent, pour $p\in\mathbb{N}^*$? ■

a) Posons :

$$v_n=\operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}+\frac{(-1)^{2n}b_2}{n^{2/q}}+\frac{(-1)^{3n}b_3}{n^{3/q}}+\cdots+\frac{(-1)^{qn}b_q}{n^{q/q}}\right)-\frac{(-1)^n}{n^{1/q}},$$

$$v_n=\operatorname{Log}\left(1+u_n\right)-\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}.$$

On voit que $v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc $v_n \sim e^{v_n}-1 \sim \left((1+u_n)e^{\frac{-(-1)^n}{n^{1/q}}}-1\right)$, et comme $e^{\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, obtient finalement : $v_n \sim \left((1+u_n)-e^{\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}}\right)$.

On en déduit que la condition du a) peut s'exprimer sous la forme équivalente :

$$\left(1+u_n-e^{\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}}\right) \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

Or :

$$e^{\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}}-\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}+\frac{1}{2!}\frac{(-1)^{2n}}{n^{2/q}}+\cdots+\frac{1}{q!}\frac{(-1)^{qn}}{n^{q/q}}\right) \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

La condition du a) s'exprime donc sous la forme équivalente :

$$\left(b_2-\frac{1}{2!}\right)\frac{(-1)^{2n}}{n^{2/q}}+\cdots+\left(b_q-\frac{1}{q!}\right)\frac{(-1)^{qn}}{n^{q/q}} \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

Il est clair que cette condition est réalisée, si, et seulement si $b_2=\frac{1}{2!},\ldots,$ $b_q=\frac{1}{q!}$.

b) Reprenons l'égalité :

$$\text{Log}(1+u_n)=v_n+\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}, \text{ où } v_n \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

La série $\sum v_n$ est absolument convergente, et la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^{1/q}}$ est alternée, donc convergente. La série $\sum\text{Log}(1+u_n)$ est donc convergente et le produit infini est convergent, d'après la proposition IX.6.1.

Examinons la nature des séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2,\ldots,$ $\sum u_n^q$.

Séparons dans l'expression de u_n les termes positifs des termes négatifs, en posant :

$$a_n=\frac{1}{n^{1/q}}+\frac{1}{3!}\frac{1}{n^{3/q}}+\cdots \text{ et } b_n=\frac{1}{2!}\frac{1}{n^{2/q}}+\frac{1}{4!}\frac{1}{n^{4/q}}+\cdots,$$

de telle sorte que :

$$u_n = (-1)^n a_n + b_n.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont positives décroissantes de limite nulle, $a_n \sim \dfrac{1}{n^{1/q}}$ et $b_n \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^{2/q}}$.

Nous obtenons à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$u_n^k = \sum_{h=0}^{k} \binom{h}{k} (-1)^{hn} a_n^h b_n^{k-h} = \sum_{h \text{ pair}} \binom{h}{k} a_n^h b_n^{k-h} + (-1)^n \sum_{h \text{ impair}} \binom{h}{k} a_n^h b_n^{k-h} =$$

$$= x_n + (-1)^n y_n.$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont positives décroissantes de limites nulles. La série $\sum (-1)^n y_n$ est donc alternée et convergente. La nature de la série $\sum u_n^k$ est donc la même que la nature de la série $\sum x_n$.

On vérifie que si h est entier $0 \le h \le k$:

$$\binom{h}{k} a_n^h b_n^{k-h} \sim \binom{h}{k} \frac{1}{n^{h/q}} \frac{1}{2^{k-h}} \frac{1}{n^{2(k-h)/q}} \sim \frac{1}{2^{k-h}} \binom{h}{k} \frac{1}{n^{(2k-h)/q}}.$$

La suite $x_n = \displaystyle\sum_{\substack{h=0 \\ h \text{ pair}}}^{k} \binom{h}{k} a_n^h b_n^{k-h}$ est équivalente au terme prépondérant dans cette somme, c'est-à-dire celui qui correspond à la valeur maximale de h, pair et $\le k$.

Si k est pair, la valeur maximale de h est k, $x_n \sim \dfrac{1}{n^{k/q}}$; les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2, \ldots, \sum u_n^q$ sont donc toutes divergentes.

Si k est impair, la valeur maximale de h est $k-1$, donc : $x_n \sim \dfrac{k}{2} \dfrac{1}{n^{(k+1)/q}}$; les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2, \ldots, \sum u_n^{q-1}$ sont donc divergentes, mais la série $\sum u_n^q$ est convergente.

c) Soit (u_n) la suite réelle telle que pour tout $n > 1$, $\operatorname{Log}(1+u_n) = \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{Log} n}$. La série $\sum \operatorname{Log}(1+u_n)$ est convergente, donc le produit infini $\prod (1+u_n)$ est convergent.

Montrons que les séries $\sum u_n^k$, k entier ≥ 1, sont toutes divergentes.

On vérifie que :

$$u_n = e^{\frac{(-1)^n}{\operatorname{Log} n}} - 1 \sim \frac{(-1)^n}{\operatorname{Log} n}, \text{ donc } u_n^k \sim \frac{(-1)^{nk}}{(\operatorname{Log} n)^k}.$$

On voit que si k est pair, la série $\sum u_n^k$ est divergente.

Supposons k impair, et calculons un équivalent de la somme de deux termes successifs :

$$u_{2p}^k+u_{2p+1}^k=\left(e^{\frac{1}{\mathrm{Log}2p}}-1\right)^k+\left(e^{-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}}-1\right)^k=\left(e^{\frac{1}{\mathrm{Log}2p}}-1\right)^k-\left(1-e^{-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}}\right)^k.$$

Posons ici :

$$a_p=e^{\frac{1}{\mathrm{Log}2p}}-1 \text{ et } b_p=1-e^{-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}},$$

On voit que ces suites sont équivalentes :

$$a_p\sim\frac{1}{\mathrm{Log}2p} \text{ et } b_p\sim\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}\sim\frac{1}{\mathrm{Log}2p},$$

et que par conséquent :

$$\left(a_p^k-b_p^k\right)\sim\left(a_p-b_p\right)k\,a_p^{k-1} \text{ (on peut utiliser le théorème de Rolle)}$$

Déterminons un équivalent de $\left(a_p-b_p\right)$:

$$a_p-b_p=e^{\frac{1}{\mathrm{Log}2p}}+e^{-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}}-2=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Log}2p}-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}+\frac{1}{2}\frac{x_p}{(\mathrm{Log}2p)^2}+\frac{1}{2}\frac{y_p}{\left(\mathrm{Log}(2p+1)\right)^2},$$

où $x_p \underset{p\to\infty}{\to} 1$ et $y_p \underset{p\to\infty}{\to} 1$.

Comme :

$$\frac{1}{\mathrm{Log}2p}-\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}=\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}\left(\frac{\mathrm{Log}(2p+1)}{\mathrm{Log}2p}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{Log}(2p+1)}\left(\frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{2p}\right)}{\mathrm{Log}2p}\right)\sim\frac{1}{2p}\frac{1}{(\mathrm{Log}2p)^2},$$

on voit que ce terme est négligeable devant les deux autres.

On obtient finalement :

$$a_p-b_p\sim\frac{1}{(\mathrm{Log}2p)^2},$$

et donc :

$$u_{2p}^k+u_{2p+1}^k=a_p^k-b_p^k\sim\frac{k}{(\mathrm{Log}2p)^{k-1}}\frac{1}{(\mathrm{Log}2p)^2}\sim\frac{k}{(\mathrm{Log}2p)^{k+1}}.$$

La série $\sum\left(u_{2p}^k+u_{2p+1}^k\right)$ est donc divergente.

La série $\sum u_n^k$ est donc toujours divergente, ce qu'il fallait démo

Exercice 16 :

> Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$; on suppose les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2, \ldots, \sum u_n^q$ et $\sum |u_n|^{q+1}$ convergentes. Montrer que le produit infini $\prod (1+u_n)$ converge. ■

Supposons avoir démontré que si $\varphi_q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est l'application telle que pour tout z :

$$(1) \quad 1+z = \exp\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \cdots + \frac{(-1)^q}{q}z^q\right)\left(1+\varphi_q(z)\right),$$

alors $\varphi_q \in O\left(z^{q+1}\right)$ au voisinage de 0, c'est-à-dire :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \alpha > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+) \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| < \alpha \Rightarrow \left|\varphi_q(z)\right| \leq M|z|^{q+1}.$$

Pour tout n, on peut écrire :

$$(1+u_n) = \exp\left(u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^q}{q}u_n^q\right)\left(1+\varphi_q(u_n)\right),$$

donc :

$$\prod_{n=0}^{N}(1+u_n) = \exp\left(\sum_{n=0}^{N}u_n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}u_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^q}{q}\sum_{n=0}^{N}u_n^q\right)\prod_{n=0}^{N}\left(1+\varphi_q(u_n)\right).$$

Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il est clair que $\varphi_q(u_n) \underset{n\to\infty}{\in} O\left(|u_n|^{q+1}\right)$; la série $\sum \varphi_q(u_n)$ est donc absolument convergente et le produit infini $\prod\left(1+\varphi_q(u_n)\right)$ absolument convergent.

Admettons aussi que si (z_n) est une suite dans $\mathbb{C}$ de limite ζ, $e^{z_n} \underset{n\to\infty}{\to} e^{\zeta}$.

Il est alors clair que puisque les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2$, ..., $\sum u_n^q$ sont convergentes, le produit $\prod(1+u_n)$ est convergent.

Démontrons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et q entier ≥ 0 :

$$\left|\exp(z) - \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{q!}z^q\right)\right| \leq \frac{|z|^{q+1}}{(q+1)!}\exp(|z|).$$

En effet :

$$\exp(z) - \left(1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + \frac{1}{q!}z^q\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!},$$

et :

$$\left|\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|\le\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}=\exp(|z|)-\left(1+|z|+\frac{1}{2!}|z|^2+\cdots+\frac{1}{q!}|z|^q\right).$$

On obtient la majoration annoncée en appliquant la formule de Taylor à l'ordre q.

Nous en déduisons en particulier que :

$$|\exp(z)-\exp(\zeta)|=|\exp(\zeta)||\exp(z-\zeta)-1|\le|\exp(\zeta)|(\exp(|z-\zeta|)-1),$$

d'où la proposition :

> Si (z_n) est une suite dans $\mathbb{C}$ de limite ζ, $e^{z_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}e^{\zeta}$.

Introduisons pour q entier les polynômes :

$$P_q(X)=1+X+\frac{1}{2!}X^2+\cdots+\frac{1}{q!}X^q,\ Q_q(X)=X-\frac{1}{2}X^2+\cdots+\frac{(-1)^q}{q}X^q.$$

Du point de vue des fonctions de variable réelle, le polynôme $P_q\circ Q_q$ a même développement limité à l'ordre q que la fonction $\exp(\mathrm{Log}(1+x))=1+x$ au voisinage de 0. On peut donc écrire $P_q(Q_q(X))=1+X+X^{q+1}S_q(X)$.

Nous obtenons :

$$|\exp(Q_q(z))-P_q(Q_q(z))|\le\frac{|Q_q(z)|^{q+1}}{(q+1)!}\exp(|Q_q(z)|),$$

soit :

$$|\exp(Q_q(z))-1-z-z^{q+1}S_q(z)|\le\frac{|Q_q(z)|^{q+1}}{(q+1)!}\exp(|Q_q(z)|).$$

En tenant compte de l'égalité (1) :

$$|\varphi_q(z)\exp(Q_q(z))+z^{q+1}S_q(X)|\le\frac{|Q_q(z)|^{q+1}}{(q+1)!}\exp(|Q_q(z)|),$$

soit enfin :

$$|\varphi_q(z)|\le|\exp(-Q_q(z))|\left[\frac{|Q_q(z)|^{q+1}}{(q+1)!}\exp(|Q_q(z)|)+|z|^{q+1}|S_q(z)|\right].$$

On en déduit facilement le résultat :

$\varphi_q\in O\left(z^{q+1}\right)$ (au voisinage de 0).

§ IX.7 *NOTIONS SUR LES FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES*

Exercice 4 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, soit q_n le plus grand facteur premier de n ; si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{E}_k = \left\{n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2 \mid q_n = p_k\right\}$, où $(p_k)_{k\geq 1}$ désigne la suite strictement croissante des nombres premiers qui commence à $p_1 = 2$. Soit enfin $M_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\frac{1}{nq_n}\right)_{n\in \mathscr{E}_k}$ est sommable et que sa somme est $\frac{M_k}{p_k^2}$.

b) Montrer que la série $\sum \frac{M_k}{p_k^2}$ converge, et en déduire que la série $\sum \frac{1}{nq_n}$ converge et a pour somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{p_k^2}$. ■

a) On remarque que l'application : $(n_1, n_2, \cdots, n_k) \mapsto p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, est une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}^{k-1} \times \mathbb{N}^*$, et l'ensemble $\mathscr{E}_k$ (la dernière puissance doit être non nulle).

On constate d'autre part que si $n \in \mathscr{E}_k$, alors $\frac{1}{nq_n} = \frac{1}{p_k}\frac{1}{n}$.

La famille $\left(\frac{1}{nq_n}\right)_{n\in \mathscr{E}_k}$ est donc sommable, si, et seulement si, la famille $\left(\frac{1}{p_k p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}}\right)_{(n_1, n_2, \cdots, n_k)\in \mathbb{N}^{k-1}\times\mathbb{N}^*}$ l'est (propriété FS4 du §IX.7.).

Or cette famille est sommable de somme :

$$\frac{1}{p_k}\left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1}}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{n_2}}\right)\cdots\left(\sum_{n_{k-1}=0}^{\infty} \frac{1}{p_{k-1}^{n_{k-1}}}\right)\left(\sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}}\right),$$

(voir exemple 3 du IX.7).

La somme de cette famille est donc :

$$\frac{1}{p_k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right)\frac{1}{p_k}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right) = \frac{M_k}{p_k^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

b) Posons $u_k = \frac{M_k}{p_k^2}$, nous obtenons : $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p_{k+1}}}\frac{p_k^2}{p_{k+1}^2} = \frac{p_k^2}{p_{k+1}(p_{k+1}-1)}$.

D'où :

$$\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^2 = \frac{p_k^4}{p_{k+1}^2(p_{k+1}-1)^2}.$$

Or, si $k \geq 2$, $(p_{k+1}-1) \geq (p_k+1)$, donc :

$(p_{k+1}-1)(p_{k+1}-1) \geq (p_{k+1}-1)(p_k+1) \geq p_{k+1}p_k + (p_{k+1}-p_k-1) \geq p_{k+1}p_k$.

On obtient la majoration :

$$\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)^2 \leq \frac{p_k^4}{p_{k+1}^2 p_{k+1}p_k} = \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^3, \text{ soit encore } p_{k+1}^3 u_{k+1}^2 \leq p_k^3 u_k^2 \ (k \geq 2).$$

La suite $\left(p_k^3 u_k^2\right)$ est donc majorée.

On en déduit finalement $u_k \in O\left(\frac{1}{p_k^{3/2}}\right)$, et comme $p_k > k$, il est clair que la série $\sum u_k = \sum \frac{M_k}{p_k^2}$ est convergente.

Le théorème IX.7.5. nous permet d'affirmer que la série $\sum \frac{1}{nq_n}$ est convergente et :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{nq_n} = \sum_{n \in \bigcup_{k\geq 1}\mathscr{C}_k} \frac{1}{nq_n} = \sum_{k \geq 1}\left(\sum_{n \in \mathscr{C}_k} \frac{1}{nq_n}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{M_k}{p_k^2}.$$

Exercice 9 :

> Prouver les identités suivantes :
>
> a) $\sum_{q=2}^{\infty}(\zeta(q)-1) = 1$, ζ désignant la fonction dzéta de Riemann.
>
> b) Pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}_0(n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$, où $\mathscr{D}_0(n)$ désigne le nombre des diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. ■

a) Par définition $\zeta(n) - 1 = \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q^n}$.

Etudions la série double $\left(\dfrac{1}{q^n}\right)_{n\geq 2,\, q\geq 2}$.

Pour q fixé ≥ 2, la série en n est absolument convergente et :

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{q^n}=\frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{q}}\right)=\frac{1}{q(q-1)}=\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}.$$

La série en q obtenue est absolument convergente et :

$$\sum_{q=2}^{\infty}\left(\frac{1}{q-1}-\frac{1}{q}\right)=1.$$

D'après le théorème IX.7.5., la famille $\left(\dfrac{1}{q^n}\right)_{n\geq 2,\, q\geq 2}$ est sommable de somme 1.

Toujours d'après ce théorème, on peut affirmer que la famille $(\zeta(q)-1)_{q\geq 2}$ est sommable et que $\displaystyle\sum_{q=2}^{\infty}(\zeta(q)-1)=1$.

b) Montrons que si $|z|<1$ la série double $\left(z^{kd}\right)_{k\geq 1,\, d\geq 1}$ est sommable.

Pour k fixé, $k\geq 1$, la série $\sum |z|^{kd}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{d\geq 1}|z|^{kd}=\frac{|z|^k}{1-|z|^k}$; la série $\displaystyle\sum\frac{|z|^k}{1-|z|^k}$ est absolument convergente ; la famille $\displaystyle\sum_{k\geq 1,\, d\geq 1}|z|^{kd}$ est donc sommable (théorème IX.7.5). La famille $\sum z^{kd}$ est donc sommable (théorème IX.7.2). Il est clair que : $\displaystyle\sum_{k\geq 1,\, d\geq 1} z^{kd}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{1-z^k}$.

Considérons maintenant la bijection $(k,d)\mapsto(kd,d)$ entre l'ensemble $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ et l'ensemble $E=\{(n,d),\, n\in\mathbb{N}^* \text{ et } d \mid n\}$.

La famille $\left(z^n\right)_{(n,d)\in E}$ est sommable (propriété FS4) et :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{1-z^k}=\sum_{k\geq 1,\, d\geq 1} z^{kd}=\sum_{(n,d)\in E} z^n=\sum_{n>0}\left(\sum_{d\mid n} z^n\right)=$$

$$=\sum_{n>0}\operatorname{card}\left(\{d\in\mathbb{N}^*,\, d\mid n\}\right)z^n=\sum_{n>0}\mathcal{D}_0(n)z^n.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre X

TOPOLOGIE, ESPACES MÉTRIQUES, ESPACES NORMÉS

§ X.1 *DISTANCES ET NORMES*

Exercice 3 :

> Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. La norme uniforme de E est notée ν.
> Pour $g \in E$ soit $N_g : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \nu(fg)$.
> a) C.N.S. sur g pour que N_g soit une norme.
> b) g étant choisie pour que N_g soit une norme, comparer N_g et ν ; donner une C.N.S. pour que N_g et ν soient équivalentes. ■

a) Montrons que N_g est une norme si, et seulement si, l'ensemble des zéros de g est d'intérieur vide relativement à l'intervalle $[0,1]$. Nous noterons : $S = \{x \in [0,1], g(x) = 0\}$.

L'application N_g est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifie visiblement l'inégalité triangulaire et est positivement homogène ; c'est donc une norme si, et seulement si, elle vérifie la propriété de séparation, soit :

$$(\forall f \in E), \quad \nu(fg) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Supposons que S soit d'intérieur vide.

Soit f un élément de E telle que $\nu(fg) = 0$, donc $fg = 0$; alors l'ensemble $\{x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$ un ouvert de $[0,1]$ inclus dans S, donc dans l'intérieur de S ; cet ensemble est donc vide, et f est identiquement nulle.

L'application N_g est donc dans ce cas une norme.

Supposons que l'ensemble S ne soit pas d'intérieur vide dans $[0,1]$.

Il contient alors un intervalle fermé $[a,b]$, où $0 \leq a < b \leq 1$; soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continue non identiquement nulle et nulle à l'extérieur de l'intervalle $[a,b]$, par exemple l'application définie par :
$f(x) = \sup((x-a)(b-x), 0)$, il est clair que $\nu(fg) = 0$ et $f \neq 0$. Donc dans ce cas, N_g n'est pas une norme.

L'équivalence est donc démontrée.

b) La norme ν est toujours plus fine que la norme N_g, en effet, pour tout f élément de E : $N_g(f) = \nu(fg) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)g(x)| \leq \nu(g)\nu(f)$.

Les deux normes sont donc équivalentes si, et seulement si, la norme N_g est plus fine que la norme ν. Montrons que c'est le cas si, et seulement si, la fonction g ne prend pas la valeur 0.

Supposons que g ne prenne pas la valeur 0.

Nous pouvons utiliser la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$, définie et continue sur $[0,1]$. Si f est un élément de E : $\nu(f) = \nu\left(g \times f \times \dfrac{1}{g}\right) \leq \nu\left(\dfrac{1}{g}\right)\nu(gf) = \nu\left(\dfrac{1}{g}\right)N_g(f)$.

Les deux normes sont donc équivalentes.

Supposons que g prenne la valeur 0 en $x_0 \in [0,1]$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 dans $[0,1]$, tel que pour tout élément x de V, $|g(x)| \leq \varepsilon$. On peut supposer que ce voisinage V est un intervalle fermé $[a,b]$, où $0 \leq a < b \leq 1$; soit comme dans le a) une application non nulle f, élément de E, nulle à l'extérieur de $[a,b]$; on voit que :

$$N_g(f) = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)f(x)| = \sup_{x \in [a,b]} \big(|g(x)||f(x)|\big) \leq \varepsilon\, \nu(f).$$

Les deux normes ne peuvent donc dans ce cas être équivalentes.

Cela termine la démonstration.

Exercice 9 :

(Notion de jauge) : soit E un $\mathbb{R}$-ev non nul. On appelle tonneau de E toute partie V de E vérifiant les propriétés suivantes :

(T_1) V est convexe, i.e.

$\forall (x,y) \in V^2, \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in V$.

(T_2) V est absorbante, i.e. $\forall x \in E \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda x \in V$.

(T_3) V est symétrique, i.e. $(\forall x \in V) \quad -x \in V$.

(T_4) V ne contient aucune droite vectorielle.

a) Soit ν une norme de E. Montrer que tout ensemble symétrique et convexe V tel que $\mathrm{B}(0_E,1) \subset V \subset \tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ est un tonneau.

b) Soit V un tonneau de E. On définit $\nu : E \to \mathbb{R}_+$ ainsi : $\nu(0_E) = 0$ et si $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\nu(x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \lambda x \in V} \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Vérifier que ν est bien définie, montrer que ν est une norme sur E ; préciser les boules unités ouverte et fermée de cette norme (ν est appelée la jauge du tonneau V). ■

a) L'ensemble V étant symétrique et convexe, il reste seulement à démontrer qu'il vérifie les propriétés (T_2) : V est absorbante, et (T_4) : V ne contient aucune droite vectorielle. Cette dernière propriété est évidemment vérifiée puisque V est borné.

Montrons que V est absorbante. Soit x élément de E, on peut toujours trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda\, v(x) = v(\lambda x) < 1$, et alors $\lambda x \in \mathrm{B}(0_E, 1) \subset V$; ce qu'il fallait démontrer.

b) Justifions la définition de v.

Si x est un élément non nul de E. Considérons $\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in V\}$; il est clair qu'il s'agit d'une partie convexe de $\mathbb{R}$, puisque V est convexe, symétrique comme V , qui n'est pas $\mathbb{R}$ (T_4), et qui contient des réels non nuls (T_2) ; il s'agit donc d'un intervalle borné de la forme $[-a, +a]$ ou $]-a, +a[$, où $a > 0$.
On voit que $v(x) = \dfrac{1}{a}$.

Montrons que v est une norme.

Propriété de séparation : par définition, si $x \neq 0$, $v(x) = \dfrac{1}{a} > 0$.

Montrons que v est positivement homogène :

Soit $x \neq 0$ dans E, si $\alpha > 0$, alors $\dfrac{1}{\lambda} x \in V$ où $\lambda > 0$, équivaut à $\dfrac{1}{\lambda\alpha}\alpha x \in V$; il est donc clair que $v(\alpha x) = \alpha\, v(x)$.

Comme d'autre part V est symétrique, on voit que pour tout x dans E , $v(x) = v(-x)$; donc pour tout α réel , $v(\alpha x) = v(|\alpha| x) = |\alpha|\, v(x)$.

Montrons que l'inégalité triangulaire est vérifiée.

Soient x et y non nuls dans E (sinon $v(x+y) = v(x) + v(y)$). Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver des réels > 0, λ et μ tels que :

$$v(x) \leq \frac{1}{\lambda} < v(x) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \lambda x \in V \;,\; v(y) \leq \frac{1}{\mu} < v(y) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \mu y \in V.$$

Soit z l'élément de E tel que :

$$x + y = \frac{1}{\lambda}\lambda x + \frac{1}{\mu}\mu y = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right) z.$$

Cet élément de E est barycentre à coefficients > 0 de deux éléments de V ; comme V est convexe, il est dans V. Comme :

$$z = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}\right)}(x+y) \in V,$$

nous en déduisons :

$$v(x+y) \leq \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < v(x) + v(y) + \varepsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons finalement :

$$v(x+y) \leq v(x) + v(y),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Montrons que pour la norme v ainsi définie : $\mathrm{B}(0_E,1) \subset V \subset \tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$.

Si $x \in V \setminus \{0_E\}$, $1 \cdot x \in V$, donc $v(x) \leq 1$. Nous en déduisons $V \subset \tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$.

Si $v(x) < 1$ $(x \neq 0_E)$, on peut trouver $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{1}{\lambda} < 1$ et $\lambda x \in V$; l'ensemble $\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in V\}$, qui on le sait d'après a) est un intervalle contenant 0, contient le réel $\lambda > 1$, donc aussi 1 ; on en déduit $x \in V$. Nous en déduisons $\mathrm{B}(0_E,1) \subset V$.

On voit aussi que pour x donné non nul,

$$\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in \mathrm{B}(0_E,1)\} = \left]-\frac{1}{v(x)}, \frac{1}{v(x)}\right[,$$

et :

$$\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in \tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)\} = \left[-\frac{1}{v(x)}, \frac{1}{v(x)}\right],$$

l'ensemble $\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in V\}$ étant lui, soit l'intervalle ouvert, soit l'intervalle fermé, suivant les valeurs de x.

On ne peut guère dire plus du rapport qu'il y a entre les boules pour la norme v et le tonneau V dont v est la jauge. Soit en effet une partie V' symétrique convexe telle que $\mathrm{B}(0_E,1) \subset V' \subset \tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$, donc un tonneau d'après le a), montrons que la jauge v' de V' est identique à la norme v.

On voit en effet que :

$$\mathrm{B}_v(0_E,1) \subset V' \subset \tilde{\mathrm{B}}_v(0_E,1) \text{ et } \mathrm{B}_{v'}(0_E,1) \subset V' \subset \tilde{\mathrm{B}}_{v'}(0_E,1),$$

donc :

$$\mathrm{B}_v(0_E,1) \subset \tilde{\mathrm{B}}_{v'}(0_E,1) \text{ et } \mathrm{B}_{v'}(0_E,1) \subset \tilde{\mathrm{B}}_v(0_E,1).$$

Pour x non nul donné :

$$\{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in \mathrm{B}_v(0_E,1)\} = \left]-\frac{1}{v(x)}, \frac{1}{v(x)}\right[\subset$$

$$\subset \{\mu \in \mathbb{R}, \mu x \in \tilde{\mathrm{B}}_{v'}(0_E,1)\} = \left[-\frac{1}{v'(x)}, \frac{1}{v'(x)}\right],$$

donc $\dfrac{1}{v(x)} \leq \dfrac{1}{v'(x)}$; de même $\dfrac{1}{v'(x)} \leq \dfrac{1}{v(x)}$, donc : $v(x) = v'(x)$.

Exercice 11 :

(Théorème de Hahn-Banach en dimension finie) : On
$\mathbb{R}$-ev E. Une fonction $p : E \to \mathbb{R}$ est dite sous-linéaire

$\forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ et
$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times E, p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$.
a) Montrer que si p est une fonction sous-linéaire du $\mathbb{R}$-ev E dans $\mathbb{R}$, on a $p(0_E)=0$ et $(\forall x \in E), -p(-x) \leq p(x)$.
b) On suppose le $\mathbb{R}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$. On donne $p : E \to \mathbb{R}$ sous-linéaire, un sous-$\mathbb{R}$-ev F_0 de E, et une forme linéaire f_0 sur F_0 majorée sur F_0 par p. Démontrer la proposition suivante :
(HB) Il existe $f \in E^*$ prolongeant f_0 et majorée par p sur E. ■

a) On vérifie que $p(0_E) = p(0 \cdot 0_E) = 0 \times p(0_E) = 0$,
et par conséquent, pour tout x élément de E :

$$0 = p(0_E) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x), \text{ d'où } -p(-x) \leq p(x).$$

b) Si $F_0 \neq E$, soit $z_1 \notin F_0$; notons $F_1 = F_0 \oplus \mathbb{R} z_1$. On peut étendre la forme linéaire f_0 définie sur F_0, en une forme linéaire f_1 définie sur F_1, en fixant sa valeur en z_1 ; nous noterons C cette valeur. Montrons qu'on peut trouver un réel C telle que l'extension obtenue soit majorée par p sur F_1.

Cette condition étant réalisée sur F_0, il faut et il suffit que :

$$(\forall \lambda > 0)(\forall x \in F_0),\ f_1(x + \lambda z_1) = f_0(x) + \lambda C \leq p(x + \lambda z_1),$$

et : $(\forall \lambda > 0)(\forall x \in F_0),\ f_1(x - \lambda z_1) = f_0(x) - \lambda C \leq p(x - \lambda z_1)$.

L'application p vérifiant la relation : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times E, p(\lambda x) = \lambda\, p(x)$ et f_0 étant linéaire, nous pouvons diviser par le scalaire $\lambda > 0$; ces conditions sur C sont donc équivalentes à la condition :

$$(\forall y \in F_0), f_0(y) + C \leq p(y + z_1), \text{ et } (\forall y \in F_0),\ f_0(y) - C \leq p(y - z_1).$$

Soit encore :

$$(\forall y \in F_0), f_0(y) - p(y - z_1) \leq C \leq p(y + z_1) - f_0(y).$$

L'existence d'une telle constante C est équivalente à la condition :

(1) $\left(\forall (y,z) \in {F_0}^2\right), f_0(y) - p(y - z_1) \leq p(z + z_1) - f_0(z)$.

En effet la condition (1) est nécessaire, et si elle est réalisée on a bien sûr :

$$A = \sup_{y \in F_0} \left(f_0(y) - p(y - z_1)\right) \leq \inf_{z \in F_0} \left(p(z + z_1) - f_0(z)\right) = B \ ;$$

on peut alors choisir pour C n'importe quelle valeur entre A et B.

La condition (1) équivaut encore à la condition :

(2) $\left(\forall (y,z) \in {F_0}^2\right), f_0(y+z) \leq p(y - z_1) + p(z + z_1)$.

Or :

$$\left(\forall (y,z) \in {F_0}^2\right), f_0(y+z) \leq p(y+z) = p(y - z_1 + z + z_1) \leq p(y - z_1) + p(z + z_1).$$

Les conditions (2) et (1) sont donc vérifiées.

On peut donc trouver une constante C , telle que la forme linéaire f_1 définie sur $F_1 = F_0 \oplus \mathbb{R} z_1$ par $f_1(x + \lambda z_1) = f_0(x) + \lambda C$, soit majorée par

Il est clair qu'on peut itérer ce procédé d'extension tant que le sous-espace F n'est pas E ; comme l'espace E est de dimension finie, il suffira de procéder à $\operatorname{codim}(F)$ extensions successives, à partir de l'espace initial, pour obtenir une extension de la forme linéaire qui soit encore majorée par p.

Exercice 12 :

> Soit E la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, munie de la norme uniforme ν. On donne un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\Phi : E \to E$. Montrer que Φ est isométrique, i.e. $(\forall f \in E) \quad \nu(\Phi(f)) = \nu(f)$. ∎

Si f et g sont des éléments de E, nous noterons : $f \leq g$ la relation :

$$(\forall x \in [0,1]) \quad f(x) \leq g(x).$$

L'application constante de valeur 1, élément unité de l'algèbre E, sera notée 1.

Soit f un élément de E ne prenant que des valeurs ≥ 0, la fonction $\sqrt{f}$ est aussi élément de E , donc : $\Phi(f) = \Phi\left(\left(\sqrt{f}\right)^2\right) = \left(\Phi\left(\sqrt{f}\right)\right)^2 \geq 0$.

Nous pouvons en déduire que Φ est croissante, c'est-à-dire : si f et g sont des éléments de E tels que $f \leq g$, alors $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.

En effet, si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$, donc $\Phi(g) - \Phi(f) = \Phi(g - f) \geq 0$, donc $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.

Soit f un élément de E, nous pouvons écrire :

$$-\nu(f) \cdot 1 \leq f \leq \nu(f) \cdot 1$$

d'où, comme Φ est croissante, linéaire, et vérifie $\Phi(1) = 1$:

$$-\nu(f) \cdot 1 = \Phi(-\nu(f) \cdot 1) \leq \Phi(f) \leq \Phi(\nu(f) \cdot 1) = \nu(f) \cdot 1.$$

Nous déduisons de cet encadrement :

$$\nu(\Phi(f)) \leq \nu(f).$$

L'application Φ étant un isomorphisme d'algèbre, nous pouvons utiliser l'isomorphisme réciproque Φ^{-1}. Nous en déduisons que pour tout élément g de E :

$$\nu\left(\Phi^{-1}(g)\right) \leq \nu(g),$$

donc pour tout élément f de E :

$$\nu(f) \leq \nu(\Phi(f)).$$

Nous pouvons en déduire le résultat recherché, c'est-à-dire : $\nu(\Phi(f)) = \nu(f)$, pour tout élément f de E.

§ X.2 *TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE*

Exercice 1 :

> Un espace métrique (E,d) est dit séparable ssi il admet au moins une partie dénombrable partout dense (i.e. rencontrant tout ouvert non vide). Pour un espace métrique (E,d), montrer l'équivalence entre (1) (E,d) est séparable et (2) la topologie de (E,d) admet au moins une base dénombrable. ■

Nous supposerons que l'ensemble E n'est pas fini.

Supposons que (E,d) soit séparable. Soit D une partie dénombrable partout dense. Montrons que la famille : $\mathcal{B}=\left(\mathrm{B}\left(x,2^{-n}\right)\right)_{(x,n)\in D\times\mathbb{N}}$, est une base, évidemment dénombrable, de la topologie de (E,d). Montrons qu'un ouvert O est réunion des éléments de la famille $\mathcal{B}$ qu'il contient, c'est-à-dire :

$$O=\bigcup_{(x,n)\in\Omega}\mathrm{B}\left(x,2^{-n}\right),\text{ où }\Omega=\left\{(x,n)\in D\times\mathbb{N},\quad \mathrm{B}\left(x,2^{-n}\right)\subset O\right\}.$$

Il est évident que : $\displaystyle\bigcup_{(x,n)\in\Omega}\mathrm{B}\left(x,2^{-n}\right)\subset O$.

Montrons l'inclusion opposée.

Si y est un élément de l'ouvert O, on peut trouver un entier $p>0$, tel que $\mathrm{B}\left(y,2^{-p}\right)\subset O$; la boule ouverte $\mathrm{B}\left(y,2^{-p-1}\right)$ coupe l'ensemble partout dense D en au moins un point x ; on voit que $y\in\mathrm{B}\left(x,2^{-p-1}\right)\subset\mathrm{B}\left(y,2^{-p}\right)\subset O$; donc $(x,p+1)\in\Omega$ et $y\in\displaystyle\bigcup_{(x,n)\in\Omega}\mathrm{B}\left(x,2^{-n}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que la topologie de (E,d) admette au moins une base dénombrable, $\mathcal{B}=(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit alors une partie dénombrable D (ou finie) qui rencontre chacun des O_n non vides. Cette partie D rencontrera évidemment chaque ouvert non vide de la topologie de E, c'est donc une partie partout dense. Elle ne peut pas être finie, sinon elle serait fermée et identique à E, qui serait alors fini ; elle est donc dénombrable partout dense.

Exercice 2 :

> a) Soit $E=\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-ev des suites bornées de réels muni de la norme uniforme. Montrer que E n'est pas séparable (cf. exercice 1).
> b) Montrer que les espaces métriques suivants sont séparables :
> b$_1$) $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme (cf. proposition VII.1.3)

b₂) $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme en moyenne d'ordre p (cf. §VII.8)

b₃) $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de la norme $N_1 : u = (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. ■

a) Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $E = \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Nous pouvons définir une suite σ, élément de E, par :

$$\sigma(n) = 0 \text{ si } |s_n(n)| \geq 1 \text{ et } \sigma(n) = 2 \text{ si } |s_n(n)| < 1,$$

de telle sorte que pour tout n entier, $|\sigma(n) - s_n(n)| \geq 1$.

On voit alors que si ν est la norme de la convergence uniforme, pour tout n entier $\nu(\sigma - s_n) \geq 1$. La suite σ n'est donc pas adhérente à l'ensemble des termes de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$; cette suite ne peut pas être partout dense.

L'espace métrique $E = \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, n'est donc pas séparable.

b₁) Nous noterons ν la norme de la convergence uniforme dans E.

Pour n et m entiers > 0, soit $A_{n,m}$, l'ensemble des éléments φ de $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, dont la restriction à chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, où $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, est affine, et telle que pour tout i entre 0 et n, $m\varphi\left(\frac{i}{n}\right) \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble $A_{n,m}$ est dénombrable ; donc l'ensemble $A = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} A_{n,m}$ est dénombrable. Montrons que A est partout dense pour la norme de la convergence uniforme dans E.

Soit f élément de E. L'application f est continue, donc uniformément continue. Soit alors un réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in [0,1]^2, \quad |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soient n et m entiers tel que $\frac{1}{n} < \alpha$ et $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{6}$, montrons qu'on peut trouver un élément φ de $A_{n,m}$ tel que $\nu(f - \varphi) < \varepsilon$.

Pour i entier, $0 \leq i \leq n$, posons $a_i = \mathrm{Ent}\left(mf\left(\frac{i}{n}\right)\right)$, et soit φ l'application continue, dont la restriction à chaque intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, où $i \in \{0, \cdots, n-1\}$, est affine, et telle que pour tout i entre 1 et n, $\varphi\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{a_i}{m}$. L'application φ est bien un élément de $A_{n,m}$.

De plus, si x est dans l'intervalle $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, de longueur $< \alpha$, nous obtenons les majorations :

$$\left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \ \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right| < \frac{1}{m}, \ \left|f\left(\frac{i+1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| < \frac{1}{m},$$

donc :

$$\left|\varphi\left(\frac{i}{n}\right) - \varphi\left(\frac{i+1}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2}{m} \text{ et } \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2}{m} \ ;$$

or :

$$\left|f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ d'où : } |f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nous avons donc vérifié que $\nu(f - \varphi) < \varepsilon$.

L'ensemble A est donc bien partout dense dans E muni de la norme ν.

b₂) L'ensemble dénombrable A défini ci-dessus est aussi partout dense pour la norme en moyenne d'ordre p puisque si f est dans E :

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leq \nu(f).$$

b₃) Pour n et m entiers > 0, notons $A_{n,m}$ l'ensemble des suites $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$(\forall p \geq n) \quad u_p = 0 \text{ et } (\forall p < n) \quad m u_p \in \mathbb{Z}.$$

On voit facilement que les ensembles $A_{n,m}$ sont des parties dénombrables de $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$; leur réunion, $A = \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} A_{n,m}$, est donc une partie dénombrable de E ; montrons que c'est une partie partout dense pour la norme $N_1 : u = (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Soit s un élément de E, la série $\sum s_p$ est donc absolument convergente. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n > 0$ tel que $\sum_{p=n}^{\infty} |s_p| < \frac{\varepsilon}{2}$; soit m un entier > 0 tel que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2n}$, et soit u l'élément de $A_{n,m}$ défini par :

$$\forall p \in \{0, \cdots, n-1\}, \quad u_p = \frac{1}{m}\mathrm{Ent}(m s_p), \text{ et } \forall p \geq n, \quad u_p = 0.$$

On voit que :

$$\forall p \in \{0,\cdots,n-1\}, \quad \left|s_p - u_p\right| < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Donc :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left|s_p - u_p\right| = \sum_{p=0}^{n-1}\left|s_p - u_p\right| + \sum_{p=n}^{\infty}\left|s_p\right| < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nous avons prouvé que pour tout élément s de E et pour tout $\varepsilon > 0$, on pouvait trouver un élément u de A tel que $N_1(s-u) < \varepsilon$. L'ensemble A est donc bien partout dense, ce qu'il fallait démontrer.

§ X.3 *SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES*

Exercice 1a)c) et d) :

> Soit A et B deux parties d'un espace topologique T. Montrer :
> a) $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$.
> c) $\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B) = \text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B) \cup (\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B))$.
> d) $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A))) = \text{Fr}(\text{Fr}(A))$. ■

a) Montrons d'abord que l'application $A \mapsto \text{Adh}(A)$, est croissante : si $A \subset B$, $\text{Adh}(B)$ est un fermé contenant B donc A ; il contient donc $\text{Adh}(A)$ (proposition X.3.1).

Montrons l'égalité : $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$, par double inclusion.

L'ensemble $\text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$ est un fermé (union de deux fermés) contenant $A \cup B$; il contient donc $\text{Adh}(A \cup B)$.

Inversement :

$$A \subset A \cup B, \text{ donc } \text{Adh}(A) \subset \text{Adh}(A \cup B).$$

De même :

$$\text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B), \text{ donc } \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B) \subset \text{Adh}(A \cup B).$$

Il y a donc bien égalité.

c) Nous raisonnerons encore par double inclusion.

Montrons que $\text{Fr}(A \cup B) \cup \text{Fr}(A \cap B) \cup (\text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$.

1) Vérifions d'abord que : $\text{Fr}(A \cap B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$. En effet :

$$\text{Fr}(A \cap B) = \text{Adh}(A \cap B) \cap \text{Adh}((T \setminus A) \cup (T \setminus B)).$$

D'après le a) :

$$\text{Fr}(A \cap B) = \text{Adh}(A \cap B) \cap (\text{Adh}(T \setminus A) \cup \text{Adh}(T \setminus B)) =$$

$$= (\text{Adh}(A \cap B) \cap \text{Adh}(T \setminus A)) \cup (\text{Adh}(A \cap B) \cap \text{Ad}$$

$$\subset \big(\mathrm{Adh}(A) \cap \mathrm{Adh}(T \setminus A)\big) \cup \big(\mathrm{Adh}(B) \cap \mathrm{Adh}(T \setminus B)\big) =$$
$$= \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$

2) Il est évident que pour toute partie A de T, $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(T \setminus A)$, donc :
$$\mathrm{Fr}(A \cup B) = \mathrm{Fr}(T \setminus (A \cup B)) = \mathrm{Fr}((T \setminus A) \cap (T \setminus B)).$$
D'après ce qui précède :
$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subset \mathrm{Fr}(T \setminus A) \cup \mathrm{Fr}(T \setminus B) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$

3) Nous en déduisons l'inclusion :
$$\mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)\big) \subset \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B).$$

Montrons maintenant l'inclusion opposée, c'est-à-dire :
$$\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)\big) = C.$$

Si x est élément de $\mathrm{Fr}(A)$,
– soit il est aussi élément de $\mathrm{Fr}(B)$, auquel cas il est bien sûr élément de C ;
– soit il n'est pas élément de $\mathrm{Fr}(B)$; dans ce cas :
  – soit il est intérieur à B :
    il a alors un voisinage V_0 inclus dans B ; si V est un quelconque de ses voisinages, V rencontre $T \setminus A$, donc $T \setminus (A \cap B)$, et $V \cap V_0$ rencontre A en un élément de B, donc V rencontre $A \cap B$; donc $x \in \mathrm{Fr}(A \cap B)$;
  – soit il est intérieur à $T \setminus B$:
    de manière analogue, on démontre alors que
    $x \in \mathrm{Fr}((T \setminus A) \cap (T \setminus B)) = \mathrm{Fr}(T \setminus (A \cup B)) = \mathrm{Fr}(A \cup B)$;
Dans tous les cas, il est élément de C ; donc $\mathrm{Fr}(A) \subset C$.
De manière analogue, on montrerait : $\mathrm{Fr}(B) \subset C$.
Nous avons donc démontré l'inclusion :
$$\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) \subset \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)\big) = C.$$

Il y a donc égalité.

d) Soit F un fermé quelconque.
1) Il est clair que $\mathrm{Fr}(F) \subset F$, donc $T \setminus \mathrm{Fr}(F) \supset T \setminus F$, donc :
$$\mathrm{Adh}\big((T \setminus \mathrm{Fr}(F))\big) \supset \mathrm{Adh}((T \setminus F)) \supset \mathrm{Fr}(F).$$
2) En remarquant que $\mathrm{Fr}(F) = \mathrm{Adh}(\mathrm{Fr}(F))$, et d'après 1) :
$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F) \cap \mathrm{Adh}(T \setminus \mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F).$$
Si A est une partie quelconque, $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé ; on peut donc affirmer :
$$\mathrm{Fr}\big(\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))\big) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)).$$

Exercice 3 :

> Soit X un ensemble et $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ une application telle que
> 1) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$; 2) $\varphi \circ \varphi = \varphi$;
> 3) $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(X))^2 \quad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$;
> 4) $(\forall A \in \mathcal{P}(X)) \quad A \subset \varphi(A)$. Montrer qu'il existe une et une seule topologie sur X telle que pour cette topologie, φ soit l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$. ■

On vérifie facilement (voir Exercice 1a) en particulier) que si T est une topologie, l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$ vérifie les propriétés 1), 2) , 3) et 4).

Supposons que φ soit une application vérifiant ces propriétés.

Si T est une topologie telle que φ soit l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$, l'ensemble des fermés pour la topologie T est l'image par φ de $\mathcal{P}(X)$; il y a donc unicité de la topologie T.

Vérifions qu'inversement, l'ensemble des parties dont le complémentaire est dans l'image par φ de $\mathcal{P}(X)$, est une topologie pour laquelle φ est l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$.

Montrons que c'est une topologie ; il suffit pour cela de vérifier les axiomes des fermés sur l'image par φ de $\mathcal{P}(X)$, que nous noterons $\mathcal{F}$.

Deux remarques préliminaires :

– la propriété 3) implique que l'application φ est croissante : si $A \subset B$, alors $\varphi(B) = \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$, donc $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

– si la propriété 2) est vérifiée, l'image par φ de $\mathcal{P}(X)$, notée $\mathcal{F}$, est aussi l'ensemble des parties de X qui sont invariantes par φ.

1) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$, donc $\varnothing \in \mathcal{F}$.

2) $X \subset \varphi(X) \subset X$, donc $\varphi(X) = X$, donc $X \in \mathcal{F}$.

3) Si A et B sont des éléments de $\mathcal{F}$, $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B) = A \cup B$, donc $A \cup B \in \mathcal{F}$.

4) Si $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{F}$ d'intersection A.

$(\forall F \in \mathcal{A}) \quad A \subset F$, donc $(\forall F \in \mathcal{A}) \quad \varphi(A) \subset \varphi(F) = F$, donc $\varphi(A) \subset A$;

comme $A \subset \varphi(A)$, on voit que : $A = \varphi(A)$, donc $A \in \mathcal{F}$.

Montrons maintenant que l'application φ est identique à l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$ (pour cette topologie).

Soit A une partie quelconque de X ; comme par définition $\varphi(A)$ est un fermé, $A \subset \mathrm{Adh}(A) \subset \varphi(A)$. Comme $\mathrm{Adh}(A)$ est un fermé, il est inv donc $\varphi(A) \subset \varphi(\text{Adh}(A)) = \text{Adh}(A)$. Nous avons donc démontré : $\varphi(A) = \text{Adh}(A)$.

Exercice 9 :

> Soit E un K-evn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), E non vide. On note B (resp. $\tilde{B}$) la boule unité ouverte (resp. fermée) de E. Montrer :
>
> $B = \text{Int}(\text{Adh}(B))$; $\tilde{B} = \text{Adh}(B)$; $\text{Fr}(B) = \text{Fr}(\tilde{B}) = S(0_E, 1)$.
>
> Montrer que ces propriétés peuvent être en défaut dans des espaces métriques généraux. ■

Nous noterons ν la norme sur E.

Montrons d'abord que $S(0_E, 1)$ est inclus dans l'adhérence de la boule ouverte et dans l'adhérence du complémentaire de la boule fermée. Soit en effet un réel $\varepsilon > 0$, et x un élément de $S(0_E, 1)$; l'élément $y = (1 - \varepsilon/2)x$ est dans B et $\nu(x - y) < \varepsilon$; l'élément $z = (1 + \varepsilon/2)x$, n'est pas dans $\tilde{B}$ et $\nu(x - z) < \varepsilon$.

Nous pouvons donc dire aussi que $S(0_E, 1)$ est disjointe de l'intérieur de $\tilde{B}$.

La boule B est un ouvert inclus dans $\tilde{B}$, donc $B \subset \text{Int}(\tilde{B}) \subset \tilde{B}$; mais comme $\text{Int}(\tilde{B})$ est disjointe de $S(0_E, 1) = \tilde{B} \setminus B$, on en déduit que $\text{Int}(\tilde{B}) = B$.

Comme $\tilde{B}$ est un fermé, $B \subset \text{Adh}(B) \subset \tilde{B}$, donc
$B \subset \text{Int}(\text{Adh}(B)) \subset \text{Int}(\tilde{B}) = B$, donc $\text{Int}(\text{Adh}(B)) = B$.

Comme $S(0_E, 1) \subset \text{Adh}(B)$, $\tilde{B} = B \cup S(0_E, 1) \subset \text{Adh}(B)$, donc $\tilde{B} = \text{Adh}(B)$.

Comme $E \setminus B$ est un fermé, nous pouvons écrire :

$$\text{Fr}(B) = \text{Adh}(B) \cap (E \setminus B) = \tilde{B} \setminus B = S(0_E, 1).$$

Comme $\tilde{B}$ est un fermé :

$$\text{Fr}(\tilde{B}) = \tilde{B} \cap \text{Adh}(E \setminus \tilde{B}) = \tilde{B} \setminus \text{Int}(\tilde{B}) = \tilde{B} \setminus B = S(0_E, 1).$$

Montrons qu'on définit sur E une distance en posant, pour tout x et y éléments de E :

$$d(x, y) = \inf(\nu(x - y), 1).$$

C'est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, plus précisément à valeurs dans $[0, 1]$, et nous pouvons remarquer que si $d(x, y) < 1$, alors $d(x, y) = \nu(x, y)$.

Séparation :

si $d(x, y) = 0$, alors nécessairement $\nu(x, y) = 0$, donc $x = y$.

Inégalité triangulaire :
– si $d(x, y)=1$ ou si $d(y, z)=1$, alors $d(x, z)\leq 1\leq d(x, y)+d(y, z)$,
– sinon, $d(x, z)\leq v(x-z)\leq v(x-y)+v(y-z)=d(x, y)+d(y, z)$.

La distance d est *topologiquement équivalente* à la distance $(x, y)\mapsto v(x-y)$. On vérifie facilement que ces deux distances définissent la même topologie. L'adhérence, l'intérieur, la frontière d'une partie, sont les mêmes pour les deux distances.

Déterminons les boules et sphères de rayon 1 pour la distance d.

$$B_d(0_E,1)=\{x\in E, d(x,y)<1\} \text{ et } \tilde{B}_d(0_E,1)=\{x\in E, d(x,y)\leq 1\}.$$

D'après les remarques faites ci-dessus, $B_d(0_E,1)=B$ et $\tilde{B}_d(0_E,1)=E$.

Donc :

$$\mathrm{Int}\big(\tilde{B}_d(0_E,1)\big)=E,\ \mathrm{Adh}\big(B_d(0_E,1)\big)=\tilde{B},$$

$$\mathrm{Fr}\big(B_d(0_E,1)\big)=\mathrm{Fr}(B)=S(0_E,1) \text{ et } \mathrm{Fr}\big(\tilde{B}_d(0_E,1)\big)=\mathrm{Fr}(E)=\varnothing.$$

Pour le rayon 2 par exemple, nous obtenons : $B_d(0_E,2)=\tilde{B}_d(0_E,2)=E$.

§ X.4 *LIMITES*

Exercice 6 :

Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$. Pour chaque couple (J,ε), où J est une partie finie de $[0,1]$ et ε un réel > 0, on pose
$V_{\varepsilon,J}=\{f\in E\mid \forall x\in J, |f(x)|\leq\varepsilon\}$.
On note $\mathcal{B}_0$ l'ensemble des parties V de E telles qu'il existe ε réel > 0 et J partie finie non vide de $[0,1]$ vérifiant $V_{\varepsilon,J}\subset V$. Pour toutes parties A et B de E, on note comme à l'accoutumée $A+B$ l'ensemble $\{c\in E, \exists(a,b)\in A\times B\mid c=a+b\}$. Si A est un singleton $\{a\}$, on écrit de préférence $a+B$ au lieu de $\{a\}+B$.
a) Montrer qu'il existe sur E une et une seule topologie telle que, pour toute $f\in E$, l'ensemble des voisinages de f soit $\{f+V, V\in\mathcal{B}_0\}$. Vérifier que pour cette topologie, les applications $E\times E\to E, (f,g)\mapsto f+g$ et $\mathbb{R}\times E\to E, (\lambda,f)\mapsto\lambda f$ sont continues. Ci-dessous E sera équipé de cette topologie.
b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $f\in E$. Vérifier que pour que la suite (f_n) converge vers f pour la topologie ci-dessus, il faut et il suffit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$ (cf. §VII.1) (pour cette raison, la topologie ainsi définie sur E s'ap
de la convergence simple).

c) Montrer que 0 n'admet dans E aucune base dénombrable de voisinages. En déduire que la topologie de E n'est associée à aucune distance.

d) Soit (f_n) la suite définie dans E par $(\forall x \in [0,1])$ $f_n(x) = \sin nx$. Montrer qu'aucune suite extraite de (f_n) ne converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Indication : utiliser les intégrales $\int_0^1 \sin^2 nx \, \mathrm{d}x$. ■

La notion de continuité sera introduite au chapitre suivant : § X.5.

a) Un ouvert étant une partie voisinage de tous ses éléments, l'unicité d'une telle topologie ne fait aucun doute.

Etablissons d'abord quelques propriétés de l'ensemble non vide $\mathcal{B}_0$. Nous noterons 0 la fonction identiquement nulle.

1) $(\forall V \in \mathcal{B}_0) \quad 0 \in V$

2) toute partie contenant un élément de $\mathcal{B}_0$ est élément de $\mathcal{B}_0$.

3) l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}_0$ est élément de $\mathcal{B}_0$.

Les deux premières propriétés sont très faciles à établir. Démontrons la troisième.

Soient V_1 et V_2 deux éléments de $\mathcal{B}_0$; il existe donc des réels ε_1 et $\varepsilon_2 > 0$, et des parties finies J_1 et J_2 non vides de $[0,1]$ telles que $V_{\varepsilon_1, J_1} \subset V_1$ et $V_{\varepsilon_2, J_2} \subset V_2$; posons $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, donc $\varepsilon > 0$, et $J = J_1 \cup J_2$, partie finie de $[0,1]$. Les éléments de $V_{\varepsilon, J}$ sont majorés par ε sur J, donc a fortiori par ε_1 sur J_1 et par ε_2 sur J_2 ; cela signifie que $V_{\varepsilon, J} \subset V_{\varepsilon_1, J_1} \cap V_{\varepsilon_2, J_2} \subset V_1 \cap V_2$; donc $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}_0$.

Notons maintenant $\mathcal{B}_f = \{f + V, V \in \mathcal{B}_0\}$; cette notation est cohérente avec la signification initiale $\mathcal{B}_0$.

Nous pouvons vérifier, bien que cela ne soit pas indispensable ici, la propriété suivante :

– si f et g sont distinctes, on peut trouver une partie élément de $\mathcal{B}_f$ et une partie élément de $\mathcal{B}_g$ qui sont disjointes.

Si les fonctions f et g sont différentes, il existe au moins un élément x de $[0,1]$ tel que $f(x) \neq g(x)$; soit ε réel tel que $0 < 2\varepsilon < |f(x) - g(x)|$; les parties $f + V_{\varepsilon, \{x\}}$ et $g + V_{\varepsilon, \{x\}}$ sont disjointes, car si une fonction h était un élément commun, on aurait $|f(x) - h(x)| \leq \varepsilon$ et $|g(x) - h(x)| \leq \varepsilon$, ce qui est en contradiction avec $2\varepsilon < |f(x) - g(x)|$.

Il est clair que pour chaque fonction f, l'ensemble $\mathcal{B}_f$ possède les propriétés :

V1) $(\forall V \in \mathcal{B}_f) \quad f \in V$.

V2) toute partie contenant un élément de $\mathcal{B}_f$ est élément de $\mathcal{B}_f$.

V3) l'intersection de deux éléments de $\mathcal{B}_f$ est élément de $\mathcal{B}_f$.

De plus on vérifie que :

V4) pour tout $V \in \mathcal{B}_f$, il existe $U \in \mathcal{B}_f, U \subset V$, telle que $\forall g \in U$, $U \in \mathcal{B}_g$.

Soit en effet $V \in \mathcal{B}_f$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une partie finie J de $[0,1]$ tels que $\left(f + V_{\varepsilon, J}\right) \subset V$. Posons $U = \left\{g \in E, \forall x \in J, \left|f(x) - g(x)\right| < \varepsilon\right\}$; il est clair que $U \subset V$ et $U \in \mathcal{B}_f$, car $\left(f + V_{\varepsilon/2, J}\right) \subset U$. Soit $g \in U$, posons $\alpha = \sup_{x \in J}(\left| f(x) - g(x)\right|)$; comme J est finie, $\alpha < \varepsilon$; on voit alors que $\left(g + V_{(\varepsilon-\alpha)/2}, J\right) \subset U$, car $\alpha + (\varepsilon - \alpha)/2 < \varepsilon$, donc $U \in \mathcal{B}_g$.

On reconnaît ici les axiomes des voisinages (définition X.2.3).

Vérifions maintenant que l'ensemble T des parties O de E telles que $\forall f \in O$, $O \in \mathcal{B}_f$, est une topologie.

1) L'ensemble E et l'ensemble vide sont éléments de T.

2) Soient O_1 et O_2 deux éléments de T, montrons que $O_1 \cap O_2$ est élément de T.

Pour tout f élément de $O_1 \cap O_2$, $O_1 \in \mathcal{B}_f$ et $O_2 \in \mathcal{B}_f$, donc $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{B}_f$. Donc : $O_1 \cap O_2 \in T$.

3) Soit $\mathbb{O}$ une partie de T et U sa réunion. Si f est élément quelconque de U, il existe un élément O de $\mathbb{O}$ tel que $f \in O$; donc $O \in \mathcal{B}_f$, a fortiori $U \in \mathcal{B}_f$; donc $U \in T$.

Vérifions que l'ensemble des voisinages de f pour cette topologie est bien $\mathcal{B}_f$.

Si V est un voisinage de f pour la topologie T, alors il existe un ouvert O tel que $f \in O \subset V$, donc $O \in \mathcal{B}_f$, et a fortiori $V \in \mathcal{B}_f$.

Si $V \in \mathcal{B}_f$, d'après la propriété V4), il existe une partie $U \in \mathcal{B}_f, U \subset V$, telle que $\forall g \in U$, $U \in \mathcal{B}_g$; autrement dit, il existe un élément U, tel que $f \in U \subset V$, qui est un ouvert de la topologie T. Donc V est un voisinage de f, ce qu'il fallait démontrer.

Fin du a) et b)

Démontrons maintenant le résultat suivant : Soit $(\Lambda, \mathcal{T})$ un espace topologique et une application $\varphi : \Lambda \to E$, l'ensemble E étant muni de la topologie T ; cette application est continue, si, et seulement si, pour tout x dans $[0,1]$, l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)(x)$, de $(\Lambda, \mathcal{T})$vers $\mathbb{R}$, est continue.

Supposons que φ soit continue.

Pour x fixé dans $[0,1]$, l'application $f \mapsto f(x)$ est continue en en effet, pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{f \in E, |f(x) - f_0(x)| \leq \varepsilon\}$ est $f_0 + V_{\varepsilon, \{x\}}$, qui est un voisinage de f_0. Comme $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est continue, par composition $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)(x)$ est continue.

Supposons que pour tout x dans $[0,1]$, l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)(x)$, de $(\Lambda, \mathcal{T})$ vers $\mathbb{R}$, soit continue, et montrons que l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est continue en tout λ_0. Soit V un voisinage quelconque de $\varphi(\lambda_0)$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ et une partie finie J de $[0,1]$, tels que $\varphi(\lambda_0) + V_{\varepsilon, J} \subset V$. Pour tout élément x de J, l'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)(x)$ est continue en λ_0, et il existe donc un voisinage U_x de λ_0 dans l'espace topologique $(\Lambda, \mathcal{T})$, tel que $\forall \lambda \in U_x$, $|\varphi(\lambda)(x) - \varphi(\lambda_0)(x)| \leq \varepsilon$. Comme J est finie, l'intersection $U = \bigcap_{x \in J} U_x$ est un voisinage de λ_0, tel que $\forall \lambda \in U$, $\varphi(\lambda) \in \varphi(\lambda_0) + V_{\varepsilon, J} \subset V$. L'application $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$ est donc bien continue en tout λ_0 élément de Λ.

Nous pourrions démontrer de manière analogue que si (f_n) est une suite d'éléments de E, elle converge vers la fonction f au sens de la topologie T, si, et seulement si, pour tout élément x de l'intervalle $[0,1]$, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} f(x)$, c'est-à-dire si, et seulement si, la suite (f_n) converge simplement vers f.

Nous pouvons en déduire que les applications $E \times E \to E$, $(f, g) \mapsto f + g$ et $\mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ sont continues. En effet, pour tout élément x de l'intervalle $[0,1]$, les applications $(f, g) \mapsto f$ et $f \mapsto f(x)$ étant continues, l'application à valeurs réelles, $(f, g) \mapsto f(x)$ est continue ; de même l'application $(f, g) \mapsto g(x)$, à valeur réelles, est continue ; la somme de ces deux applications est donc continue ; d'après ce qui précède, l'application $(f, g) \mapsto f + g$ est donc continue.

On procéderait de manière analogue pour démontrer que l'application $\mathbb{R} \times E \to E$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ est continue.

c) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de voisinages de 0, c'est-à-dire de $\mathcal{B}_0$.

Pour tout entier n, il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ et une partie finie J de $[0,1]$, tels que $V_{\varepsilon, J} \subset V_n$. On peut donc trouver une suite (ε_n) de réels > 0, et une suite (J_n) de parties finies de $[0,1]$, telles que pour tout entier n, $V_{\varepsilon_n, J_n} \subset V_n$. Notons $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, c'est une partie dénombrable de $[0,1]$; on peut donc trouver un élément x de $[0,1]$, qui n'est pas dans D. Montrons que $V_{1,\{x\}}$, qui est un voisinage de 0, ne contient aucun des V_n : en effet, l'entier n étant donné, on peut trouver par exemple un polynôme P, qui est nul sur la partie finie J_n et qui prend en x une valeur > 1 ; on voit alors que $P \in V_{\varepsilon_n, J_n} \subset V_n$, mais $P \notin V_{1,\{x\}}$; cela entraîne que V_n n'est pas inclus dans $V_{1,\{x\}}$.

Aucune famille dénombrable de voisinages de 0 ne peut donc être une base de voisinages de 0.

La topologie de la convergence simple sur E n'est donc pas métrisable.

d) Justifions d'abord que $\int_0^1 \sin^2 nx \,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}$.

C'est une conséquence de ce qui a été démontré dans l'exercice 1 du §VII.8 : l'application $t \mapsto \sin^2 t$ est π-périodique, de valeur moyenne :
$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, donc :

$$\int_0^1 1 \times \sin^2 nx \,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Si une suite extraite $\left(f_{n_k}\right)$ convergeait simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, comme c'est une suite uniformément bornée, une conséquence du théorème de convergence dominée (théorème VII.3.3) serait $\int_0^1 f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$; cela est évidemment impossible. La suite (f_n) n'a donc pas de suite extraite simplement convergente vers 0.

§ X.5 *CONTINUITÉ*

Exercice 1 :

> Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
> (1) f est continue ;
> (2) pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
> (3) pour toute partie B de F, $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right)$;
> (4) pour toute partie B de F, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$. ■

Supposons f vérifie la propriété (1) i.e. f continue. Soit A une partie quelconque de E ; pour toute partie B de F, si $f(A) \subset B$ alors $A \subset f^{-1}$

fermée, comme f est continue, $f^{-1}(B)$ est un fermé de E, donc $\overline{A} \subset f^{-1}(B)$, soit encore $f(\overline{A}) \subset B$; cela est vrai en particulier pour $B = \overline{f(A)}$.

Donc (1) implique (2).

Supposons que f vérifie la propriété (2), et démontrons que f vérifie la propriété (4).

Soit B une partie quelconque de F, comme (2) est vrai, $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B}$, soit encore $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Donc (2) implique (4).

Par dualité il est assez clair que les propriétés (3) et (4) sont équivalentes ; montrons seulement que (4) implique (3). Supposons que f vérifie la propriété (4) ; soit B une partie quelconque de F, nous pouvons écrire :

$$E \setminus f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) = f^{-1}(F \setminus \mathrm{Int}(B)) = f^{-1}\left(\overline{F \setminus B}\right) \ ;$$

comme (4) est vérifié :

$$f^{-1}\left(\overline{F \setminus B}\right) \supset \overline{f^{-1}(F \setminus B)} = \overline{E \setminus f^{-1}(B)} = E \setminus \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right) \ ;$$

nous en déduisons :

$$f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right).$$

Donc (4) implique (3).

Montrons maintenant que (3) implique (1).

Supposons que l'application f vérifie la propriété (3) ; soit O un ouvert de F, puisque (3) est vrai, $f^{-1}(O) = f^{-1}(\mathrm{Int}(O)) \subset \mathrm{Int}\left(f^{-1}(O)\right)$; il y a donc égalité et $f^{-1}(O)$ est par conséquent un ouvert. L'application f est donc continue, c'est-à-dire vérifie la propriété (1).

Donc (3) implique (1).

Les propriétés (1), (2), (3) et (4) sont donc équivalentes.

Exercice 6 :

Un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$ est dit sans trou ssi $\mathrm{card}(E) \geq 2$ et $\left(\forall (a,b) \in E^2\right)\ (a < b) \Rightarrow (\exists z \in E \mid a < z < b)$.

a) Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, sans trou, et dénombrable. Prouver qu'il existe une bijection croissante de E sur l'un des quatre intervalles de $\mathbb{Q}$ d'extrémités 0 et 1.

b) Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, sans trou et dénombrable. Montrer que E admet des parties non vides et majorées sans borne supérieure dans E.

c) Soit D et D' deux parties de $\mathbb{R}$ équipotentes et partout denses, et supposons trouvée une bijection $\varphi : D \to D'$ croissante. Prouver que φ est un homéomorphisme de D sur D'.

d) Soit D et D' deux parties de $\mathbb{R}$ partout denses et dénombrables. Montrer qu'il existe une bijection croissante de D sur D

que D et D' sont homéomorphes, donc homéomorphes à $\mathbb{Q}$ usuel. ■

a) Préliminaire.

Supposons avoir démontré que deux ensembles totalement ordonnés sans trou et dénombrables, qui n'ont ni plus grand élément ni plus petit élément, sont isomorphes. Un ensemble ordonné sans trou dénombrable qui n'a ni plus grand élément ni plus petit élément sera alors isomorphe à $(]0,1[\cap\mathbb{Q},\leq)$. Si l'ensemble totalement ordonné sans trou dénombrable $(E,\leq)$ a un plus grand élément M, mais pas de plus petit élément, alors l'ensemble ordonné $(E\setminus\{M\},\leq)$ est totalement ordonné, sans trou dénombrable, et n'a ni plus petit élément, ni plus grand élément : sinon, il y aurait un trou entre le plus grand élément de $E\setminus\{M\}$ et M ; il est donc isomorphe à $(]0,1[\cap\mathbb{Q},\leq)$, et on voit que $(E,\leq)$ est isomorphe à $(]0,1]\cap\mathbb{Q},\leq)$. En procédant de manière analogue dans les autres cas, on démontre que tout ensemble totalement ordonné sans trou et dénombrable, est isomorphe à l'un des quatre ensembles ordonnés : $(]0,1[\cap\mathbb{Q},\leq)$, $(]0,1]\cap\mathbb{Q},\leq)$, $([0,1[\cap\mathbb{Q},\leq)$, $([0,1]\cap\mathbb{Q},\leq)$.

Démontrons maintenant que deux ensembles totalement ordonnés sans trou dénombrables qui n'ont ni plus grand élément ni plus petit élément sont isomorphes. Comme les deux ensembles sont dénombrables, nous pouvons supposer qu'ils sont tous les deux égaux à l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$. Nous sommes donc ramenés à démontrer la proposition suivante : si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont deux ordres totaux sur $\mathbb{N}$, sans trou et pour lesquels $\mathbb{N}$ n'a ni plus grand élément ni plus petit élément, ils sont isomorphes. Nous noterons comme d'habitude $\leq$ l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$.

1) Terminologie et notations.

Si $(E,\leq)$ est un ensemble totalement ordonné fini, E de cardinal k, il existe une et une seule bijection strictement croissante $\{1,\cdots,k\}\to E$; cette bijection sera appelée numérotation croissante (pour l'ordre $\leq$), des éléments de E . Deux ensembles finis totalement ordonnés de même cardinal sont donc isomorphes, et d'une seule manière. Nous utiliserons implicitement cette propriété en parlant de : l'isomorphisme entre deux ensembles totalement ordonnés finis de même cardinal.

Si E est une partie finie de $\mathbb{N}$, nous noterons $l(E)$ la "première lacune de E", c'est-à-dire :

$$l(E)=\inf(\mathbb{N}\setminus E).$$

Nous noterons $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (E,F) de parties finies de $\mathbb{N}$ de même cardinal.

2) Le lemme fondamental d'extension.

> Si $(E,F)\in \mathscr{E}$, et si $i\in \mathbb{N}\backslash E$, il existe un entier j, $j\notin F$, tel que l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E\cup\{i\},\leq_1)$ et $(F\cup\{j\},\leq_2)$ soit une extension de l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E,\leq_1)$ et $(F,\leq_2)$. Nous avons bien sûr le même résultat en intervertissant les rôles joués par E et F.

Si E et F sont vides c'est évident. Sinon, supposons que $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ soit la numérotation croissante de $(E,\leq_1)$, et $(y_1,y_2,\cdots,y_k)$ celle de $(F,\leq_2)$. Si $i<_1 x_1$, comme $\mathbb{N}$ n'a pas de plus petit élément pour l'ordre $\leq_2$, on pourra choisir pour j un entier tel que $j<_2 y_1$. Si $x_k<_1 i$, comme $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément pour l'ordre $\leq_2$, on pourra choisir pour j un entier tel que $y_k<_2 j$. S'il existe un entier h entre 1 et $k-1$ tel que $x_h<_1 i<_1 x_{h+1}$, comme il n'y pas de trou pour l'ordre $\leq_2$ entre y_h et y_{h+1}, on pourra choisir pour j un entier tel que $y_h<_2 j<_2 y_{h+1}$. Dans les trois cas, on voit facilement que l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E\cup\{i\},\leq_1)$ et $(F\cup\{j\},\leq_2)$, est une extension de l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E,\leq_1)$ et $(F,\leq_2)$.

3) La transformation à itérer T sur l'ensemble $\mathscr{E}$.

Si $(E,F)\in\mathscr{E}$, nous lui faisons correspondre le couple $(E_1,F_1)=(E\cup\{l(E)\},F\cup\{j\})$ où l'entier j est le premier entier (non élément de F) tel que l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E\cup\{l(E)\},\leq_1)$ et $(F\cup\{j\},\leq_2)$ soit une extension de l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E,\leq_1)$ et $(F,\leq_2)$. Nous voyons que $(E_1,F_1)\in\mathscr{E}$, que $E\subset E_1$ et $l(E)<l(E_1)$, et que $F\subset F_1$, donc $l(F)\leq l(F_1)$.

Puis au couple (E_1,F_1) nous faisons correspondre le couple $(E_2,F_2)=T((E,F))$, défini de la manière suivante : $(E_2,F_2)=(E_1\cup\{i\},F_1\cup\{l(F_1)\})$, où l'entier i est le premier entier non élément de E_1 tel que l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E_1\cup\{i\},\leq_1)$ et $(F_1\cup\{l(F_1)\},\leq_2)$ soit une extension de l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E_1,\leq_1)$ et $(F_1,\leq_2)$. Nous voyons que $T((E,F))=(E_2,F_2)\in\mathscr{E}$, que $F_1\subset F_2$ et $l(F_1)<l(F_2)$, et que $E_1\subset E_2$, donc $l(E_1)\leq l(E_2)$.

En conclusion, si nous notons $(E',F')=T((E,F))$, nous observons les propriétés suivantes :

- $E\subset E'$, $l(E)<l(E')$ et $F\subset F'$, $l(F)<l(F')$,
- l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E',\leq_1)$ e

une extension de l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E, \leq_1)$ et $(F, \leq_2)$.

4) On itère la transformation T pour construire l'isomorphisme.

Soit pour tout n entier $(E_n, F_n) = T^n((\varnothing, \varnothing))$. Il est clair que les suites (E_n) et (F_n) sont croissantes pour l'inclusion, et que les suites $(l(E_n))$ et $(l(F_n))$ sont strictement croissantes pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$; nous voyons alors que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, puisque pour tout entier m, il existe un entier n tel que $m < l(E_n)$ et $m < l(F_n)$. De plus, si nous notons φ_n l'isomorphisme entre les ensembles ordonnés $(E_n, \leq_1)$ et $(F_n, \leq_2)$, pour tous entiers n et m tels que $m \geq n$, l'isomorphisme φ_n est la restriction de l'isomorphisme φ_m. Définissons les applications φ et ψ $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante :

Si i est un entier, posons : $\varphi(i) = \varphi_n(i)$, où n est un entier tel que $i \in E_n$.

Si j est un entier, posons : $\psi(j) = \varphi_n^{-1}(j)$, où n est un entier tel que $j \in F_n$.

Vérifions que ces applications sont réciproques l'une de l'autre :

Si $i \in \mathbb{N}$ et n est tel que $i \in E_n$, $\varphi(i) = \varphi_n(i) \in F_n$, donc $\psi(\varphi(i)) = \varphi_n^{-1}(\varphi_n(i)) = i$.

Si $j \in \mathbb{N}$ et n est tel que $j \in F_n$, $\psi(j) = \varphi_n^{-1}(j) \in E_n$, donc $\varphi(\psi(j)) = \varphi_n(\varphi_n^{-1}(j)) = j$.

Vérifions que $\varphi : (\mathbb{N}, \leq_1) \to (\mathbb{N}, \leq_2)$ est strictement croissante :

Si i et j sont entiers et $i <_1 j$, il existe un entier n tel que $i \in E_n$ et $j \in E_n$; alors $\varphi(i) = \varphi_n(i) <_2 \varphi_n(j) = \varphi(j)$, puisque l'application $\varphi_n : (E_n, \leq_1) \to (F_n, \leq_2)$ est strictement croissante.

Les ensembles totalement ordonnés $(\mathbb{N}, \leq_1)$ et $(\mathbb{N}, \leq_2)$ sont donc isomorphes, ce qu'il fallait démontrer.

b) Comme l'ordre sur E et l'ordre sur les intervalles de $\mathbb{Q}$ extrémités 0 et 1 sont totaux, une bijection strictement croissante de $(E, \leq)$ vers l'un de ces quatre ensembles ordonnés est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Il suffit donc de démontrer que dans ces quatre ensembles ordonnés, il existe des parties non vides majorées qui n'ont pas de borne supérieure. Or dans ces quatre parties, l'ensemble des éléments $< \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ convient visiblement. La proposition est donc démontrée.

c) La bijection φ étant croissante, elle est strictement croissante.

Montrons d'abord que φ est continue en tout $x_0 \in D$.

Comme la partie D est partout dense, l'ensemble $D \cap]-\infty, x_0[$ n'est pas vide, et sur cet ensemble, l'application φ est majorée par $\varphi(x_0)$; nous pouvons donc considérer le réel $a(x_0) = \sup\limits_{x \in D, x<x_0} \varphi(x)$. Nous avons bien sûr l'inégalité $a(x_0) \leq \varphi(x_0)$; démontrons que : $a(x_0) = \varphi(x_0)$.

S'il y avait inégalité stricte, comme l'ensemble D' est partout dense, on pourrait trouver un élément y de D' tel que $a(x_0) < y < \varphi(x_0)$; comme φ est surjective strictement croissante, il existerait un élément x de D tel que $y = \varphi(x)$ et nécessairement $x < x_0$; cela contredirait $a(x_0) < y = \varphi(x)$.

Nous pourrions démontrer de même que : $\varphi(x_0) = \inf\limits_{x \in D, x>x_0} \varphi(x)$.

Soit maintenant un réel $\varepsilon > 0$, comme :

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \sup_{x \in D, x<x_0} \varphi(x) = \inf_{x \in D, x>x_0} \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

on peut trouver des éléments x_1 et x_2 de D tels que $x_1 < x_0 < x_2$ et :

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

On a donc l'encadrement :

$$(\forall x \in D \cap [x_1, x_2]) \quad \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Il est clair que cela prouve la continuité de φ en x_0.

La réciproque de φ étant une bijection croissante entre deux parties partout denses de $\mathbb{R}$, c'est une application continue d'après ce qui précède.

Nous pouvons en déduire que φ est un homéomorphisme.

d) Il est clair qu'une partie partout dense dans $\mathbb{R}$ est, munie de son ordre naturel, est un ensemble ordonné sans trou. De plus, une telle partie de $\mathbb{R}$ n'a ni plus grand élément, ni plus petit élément. Si elle est dénombrable, d'après le a), elle est isomorphe en tant qu'ensemble ordonné à un des quatre intervalles de $\mathbb{Q}$ d'extrémités 0 et 1 ; cela ne peut évidemment être que $]0,1[\cap \mathbb{Q}$.

Deux parties dénombrables partout denses de $\mathbb{R}$ sont donc isomorphes entre elles en tant qu'ensembles ordonnés ; d'après c), une bijection strictement croissante entre ces deux parties est un homéomorphisme. On en déduit que deux parties dénombrables partout denses dans $\mathbb{R}$ sont homéomorphes (donc à l'une d'elles : $\mathbb{Q}$).

Exercice 10 :

On donne trois entiers m, n, r avec $1 \leq r < m \leq n$. Soit $\mathscr{E}_r$ l'ensemble des matrices de rang r dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{F}_r$ l'ensemble des matrices de rang $\leq r$.

a) Montrer que $\operatorname{Adh}(\mathscr{E}_r) = \mathscr{F}_r$ (dans l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{mn}$ usuel).

> b) On munit $\mathscr{E}_r$ de la topologie induite par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que tout point de $\mathscr{E}_r$ admet un voisinage ouvert dans $\mathscr{E}_r$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{r(m+n-r)}$. ■

a) Montrons d'abord que $\mathscr{F}_r$ est un fermé. Une matrice M élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est de rang $\leq r$ si, et seulement si, toutes ses sous-matrices carrés de dimension $r+1$ sont singulières, c'est-à-dire de déterminant nul.

Si I est une partie de $\{1, \cdots, m\}$, et J de $\{1, \cdots, n\}$, de cardinaux $r+1$, soit $p_{I,J}$ l'application qui à M élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ fait correspondre sa sous-matrice associée aux parties I et J. C'est une application linéaire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{r+1,r+1}(\mathbb{R})$, donc continue. Comme l'application : $N \mapsto \det N$ de $\mathcal{M}_{r+1,r+1}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ est continue, les applications $M \mapsto \det\big(p_{I,J}(M)\big)$ sont toutes continues. Comme $\mathscr{F}_r$ est l'intersection des ensembles fermés :

$$F_{I,J} = \Big\{ M \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid \det\big(p_{I,J}(M)\big) = 0 \Big\},$$

où le couple (I, J) décrit l'ensemble $\mathscr{P}_{r+1}(\{1,\cdots,m\}) \times \mathscr{P}_{r+1}(\{1,\cdots,n\})$, l'ensemble $\mathscr{F}_r$ est un fermé.

Comme $\mathscr{E}_r \subset \mathscr{F}_r$, on déduit de ce qui précède que $\mathrm{Adh}(\mathscr{E}_r) \subset \mathscr{F}_r$. Pour démontrer l'égalité, il nous suffit que démontrer par exemple que toute matrice de rang $k < r$ est limite d'une suite de matrices de rang r.

Soit M une matrice élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, de rang $k < r$; on sait qu'il existe deux matrices carrés inversibles, $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = PJ_{m,n,k}Q$, où $J_{m,n,k} = \big(a_{i,j}\big)_{(i,j) \in \{1,\cdots,m\} \times \{1,\cdots,n\}}$ est l'élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que : $a_{i,j} = 0$ sauf si $1 \leq i = j \leq k$, auquel cas $a_{i,j} = 1$.

Pour p entier > 0, soit $R_p = J_{m,n,k} + \dfrac{1}{p}\big(J_{m,n,r} - J_{m,n,k}\big)$. Il est clair que pour tout p, la matrice R_p est de rang r, et que $R_p \underset{p\to\infty}{\to} J_{m,n,k}$. Les matrices $M_p = P\,R_p\,Q$ sont toutes de rang r et $M_p \underset{p\to\infty}{\to} M$. Nous pouvons en déduire que $\mathrm{Adh}(\mathscr{E}_r) = \mathscr{F}_r$.

b) Soit M une matrice de rang r, nous pouvons comme dans le a) écrire : $M = PJ_{m,n,r}Q$, où P et Q sont des matrices carrées inversibles ; pour montrer que M a un voisinage ouvert dans $\mathscr{E}_r$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{r(m+n-r)}$, il nous suffira de le démontrer pour la matrice $J_{m,n,r}$. L'application linéaire bijective $N \mapsto PNQ$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, se restreint en un homéomorphisme de $\mathscr{E}_r$ sur lui-même, et transformera le voisinage ouvert de $J_{m,n,r}$ dans $\mathscr{E}_r$ en un voisinage ouvert de M dans $\mathscr{E}_r$.

Considérons l'ensemble V des éléments de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont la sous-matrice constituée par les r premières lignes et les r premières colonnes est inversible. Avec les notations introduites dans le a), nous pouvons écrire :

$$V = \left\{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\,;\ \det\left(p_{R,R}(M)\right) \neq 0\right\},\text{ où } R = \{1, \cdots, r\}.$$

Sous cette forme, il est évident que V est un voisinage ouvert de $J_{m,n,r}$ *dans* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, donc $V \cap \mathscr{E}_r$ est un voisinage de $J_{m,n,r}$ dans $\mathscr{E}_r$.

Nous utiliserons ci-dessous la notation par blocs des matrices.

Analyse : nous précisons ci-dessous l'ensemble $V \cap \mathscr{E}_r$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de rang r dont la sous-matrice constituée par les r premières lignes et les r premières colonnes est inversible.

Soit M un élément de $V \cap \mathscr{E}_r$ que nous écrivons :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

où :

$$A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R}),\ B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{R}) \text{ et } D \in \mathcal{M}_{m-r,n-r}(\mathbb{R}).$$

Comme la matrice M est exactement de rang r, les colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$. Il existe donc une matrice $T \in \mathcal{M}_{r,n-r}$ telle que : $B = AT$ et $D = CT$. La matrice M est donc de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} A & AT \\ C & CT \end{bmatrix}.$$

Inversement, une telle matrice est bien un élément de $V \cap \mathscr{E}_r$.

Avec les notations initiales, nous voyons que : $T = A^{-1}B$.

Synthèse :

Nous venons en fait d'établir que l'application :

$$(A, C, T) \mapsto \begin{bmatrix} A & AT \\ C & CT \end{bmatrix},$$

dont l'ensemble de départ est $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, est à valeurs dans $V \cap \mathscr{E}_r$ et y est surjective. Elle est bien sûr injective ; il s'agit donc d'une bijection dont la bijection réciproque est :

$$M \mapsto \left(A, C, A^{-1}B\right).$$

L'application qui à deux matrices composables fait correspondre leur produit étant bilinéaire et continue, et l'application qui à une matrice fait correspondre son inverse étant continue (on peut utiliser la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det}$

est la transposée de la comatrice de M), il est clair que l'application décrite ici est un homéomorphisme.

Le voisinage $V \cap \mathscr{E}_r$ de $J_{m,n,r}$ dans $\mathscr{E}_r$ est donc homéomorphe à l'espace $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$; $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ étant un ouvert de $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, puisque c'est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ de déterminant non nul, on en déduit que $V \cap \mathscr{E}_r$ est homéomorphe à un ouvert de $\mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, donc homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^q$, où $q = r^2 + (m-r)r + r(n-r) = r(m+n-r)$.

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 11 :

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique ; le groupe $\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}$ est identifié à l'ensemble $\left\{ (c,s) \in \mathbb{R}^2 \mid c^2 + s^2 = 1 \right\}$. On donne des réels r et R tels que $0 < r < R$; soit $\Phi : \mathbb{U}\times\mathbb{U} \to \mathbb{R}^3$, $(c, s, \gamma, \sigma) \mapsto ((R+rc)\gamma, (R+rc)\sigma, rs)$ et soit $T = \mathrm{Im}(\Phi)$ (tore).

a) Vérifier que Φ est injective ; elle définit donc $\varphi : \mathbb{U}\times\mathbb{U} \to T$ bijective ; on notera $\psi = \varphi^{<-1>}$.

b) Expliciter ψ. Montrer alors que φ est un homéomorphisme de $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$ sur T.

c) Montrer que T est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2\left(R^2+r^2\right)\left(x^2+y^2\right) + 2\left(R^2-r^2\right)z^2 + \left(R^2-r^2\right)^2 = 0.$$

En déduire que T est fermé dans $\mathbb{R}^3$.

d) Soit $\theta \in \,]0,1[$ et $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{U}\times\mathbb{U}$, $t \mapsto \left(e^{2i\pi t}, e^{2i\pi\theta t}\right)$. Montrer que, pour que $\mathrm{Im}(f_\theta)$ soit partout dense dans $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$, il faut et il suffit que $\theta \notin \mathbb{Q}$. Lorsque $\theta \notin \mathbb{Q}$, vérifier que f_θ est injective et continue : définit-elle un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$? Lorsque $\theta \in \mathbb{Q}$, montrer que f_θ permet de définir une bijection du groupe quotient $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$ (où $\theta = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux), et à partir de là un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$. ■

a) et b) Nous pouvons démontrer que φ est injective en cherchant une expression de sa réciproque ψ. Supposons que

$$(x, y, z) = ((R+rc)\gamma, (R+rc)\sigma, rs), \text{ où } (c, s, \gamma, \sigma) \in \mathbb{U}$$

Comme $0 < r < R$ et $|c| \leq 1$, $R + rc > 0$; comme $\gamma^2 + \sigma^2 = 1$, on voit que :

$$R + rc = \sqrt{x^2 + y^2}\text{, soit } c = \frac{1}{r}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)\text{, et } s = \frac{1}{r}z.$$

Nous obtenons aussi :

$$\gamma = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sigma = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Cela prouve l'injectivité de φ et donne une expression de sa réciproque ψ :

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{1}{r}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right), \frac{1}{r}z, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

On constate d'autre part que si $(x, y, z) \in T$, alors $\sqrt{x^2 + y^2} \geq R - r > 0$.

L'application :

$$(c, s, \gamma, \sigma) \mapsto ((R + rc)\gamma, (R + rc)\sigma, rs),$$

de $\mathbb{R}^4$ (ou $\mathbb{C}^2$) vers $\mathbb{R}^3$ est continue, sa restriction à $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ pour l'espace de départ, et à T pour l'espace d'arrivée, est donc continue ; donc φ est continue.

L'application :

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{r}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right), \frac{1}{r}z, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

définie sur l'ouvert $O = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \neq (0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, est continue en tant qu'application de O dans $\mathbb{R}^4$. Sa restriction à T pour l'ensemble de départ, est continue et est par définition à valeurs dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$; sa restriction à $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ pour l'ensemble d'arrivée est donc continue ; l'application ψ est donc continue.

La bijection φ entre $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ et T est donc un homéomorphisme.

c) Si (x, y, z) est dans le tore et est l'image de (c, s, γ, σ) élément de $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, alors :

(1) $\quad \dfrac{1}{r^2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}z^2 = c^2 + s^2 = 1,$

soit en développant :

(2) $\quad x^2 + y^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + R^2 + z^2 = r^2,$

soit encore :

(3) $\quad 2R\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2,$

et en élevant au carré :

(4) $\quad 4R^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(R^2 - r^2)(x^2 + y^2 + z^2) + (R^2 - r^2)^2,$

soit enfin :

(5) $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-2\left(R^2+r^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2\left(R^2-r^2\right)z^2+\left(R^2-r^2\right)^2=0.$

Inversement, si l'égalité (5) est vérifiée, l'égalité (4) l'est aussi, donc aussi l'égalité (3), soit aussi (2) et finalement :

$$\frac{1}{r^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2+\frac{1}{r^2}z^2=1.$$

Posons alors $\gamma=\frac{1}{r}\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)$ et $\sigma=\frac{1}{r}z$, de telle sorte que $(\gamma,\sigma)\in\mathbb{U}$.

Nous constatons que $\sqrt{x^2+y^2}\geq R-r>0$, nous pouvons donc aussi poser : $c=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $s=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, de telle sorte que $(c,s)\in\mathbb{U}$. On voit alors que : $(x,y,z)=\varphi(c,s,\gamma,\sigma)\in T$.

Le tore T est donc l'ensemble des éléments de $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation (5).

Le fait que T puisse être défini par une telle équation prouve que c'est un fermé de $\mathbb{R}^3$, car c'est l'image réciproque par une application continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$.

Nous pourrions dire aussi que comme $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$ est un espace compact, T est aussi compact, puisqu'il lui est homéomorphe, donc fermé dans $\mathbb{R}^3$ (voir §XI.1).

d) L'application f_θ est évidemment dans tous les cas continue.

Supposons que $\theta\notin\mathbb{Q}$ et montrons que $\mathrm{Im}(f_\theta)$ est partout dense dans $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$.

Soit $(u,v)\in\mathbb{U}\times\mathbb{U}$, posons $u=\mathrm{e}^{2i\pi\alpha}$ et $v=\mathrm{e}^{2i\pi\beta}$, où α et β sont des réels. Comme θ est irrationnel, on sait que le sous-groupe additif $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est partout dense ; il existe donc deux suites d'entiers relatifs, (h_n) et (k_n) telles que $k_n-\theta h_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\beta-\theta\alpha$. Posons $t_n=\alpha-h_n$; on vérifie que pour tout n entier, $\mathrm{e}^{2i\pi t_n}=\mathrm{e}^{2i\pi(\alpha-h_n)}=u$ et que :

$$\mathrm{e}^{2i\pi\theta t_n}=v\,\mathrm{e}^{2i\pi(\theta(\alpha-h_n)-\beta+k_n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}v,\text{ donc : }f_\theta(t_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}(u,v).$$

Cela prouve bien que $f_\theta(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$.

Montrons aussi que dans ce cas, l'application f_θ est injective.

On voit que f_θ est un homomorphisme de groupes, de $(\mathbb{R},+)$ vers $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$ muni de la multiplication ; il suffit de vérifier que son noyau est réduit à $\{0\}$. Or si $\mathrm{e}^{2i\pi t}=1$, et $\mathrm{e}^{2i\pi\theta t}=1$, les réels t et θt sont tous les deux entiers, ce qui n'est possible, puisque θ est irrationnel, que s'ils sont tous l
L'homomorphisme f_θ est donc bien injectif.

L'application f_θ est donc bijective et continue de $\mathbb{R}$ vers $f_\theta(\mathbb{R})$; nous allons montrer que ce n'est pas un homéomorphisme. Intuitivement si c'était le cas, un élément de $f_\theta(\mathbb{R})$ aurait, comme les éléments de $\mathbb{R}$, des voisinages connexes (dans l'espace topologique $f_\theta(\mathbb{R})$) (voir §XI.3) ; or il est évident "géométriquement" que ce n'est pas le cas, un voisinage d'un élément de $f_\theta(\mathbb{R})$, dans $f_\theta(\mathbb{R})$, étant l'intersection d'un voisinage du point dans $\mathbb{R}^3$, avec $f_\theta(\mathbb{R})$. La méthode que nous allons employer semble un peu différente. Si la réciproque de f_θ était continue en $f_\theta(a)$, toute suite (t_n) de réels telle que $f_\theta(t_n) \underset{n\to\infty}{\to} f_\theta(a)$, serait de limite a. Montrons qu'on peut trouver des suites (t_n) qui ne respectent pas cette condition.

Comme le sous-groupe additif $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ est partout dense, le réel 0 en est un point d'accumulation ; on peut donc trouver deux suites d'entiers relatifs, (h_n) et (k_n) telles que $k_n+\theta h_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\quad k_n+\theta h_n \neq 0$. Pour tout n entier, posons $t_n = a+h_n$; nous vérifions que : $e^{2i\pi t_n}=e^{2i\pi a}$ et $e^{2i\pi\theta t_n}=e^{2i\pi\theta(a+h_n)}=e^{2i\pi\theta a}e^{2i\pi(\theta h_n+k_n)}\underset{n\to\infty}{\to}e^{2i\pi\theta a}$, donc $f_\theta(t_n)\underset{n\to\infty}{\to} f_\theta(a)$.

Montrons que $t_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ est faux. Sinon $h_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et $k_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$; comme il s'agit de suites d'entiers relatifs, elles seraient constantes et nulles à partir d'un certain rang ; cela contredit l'hypothèse : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad k_n+\theta h_n\neq 0$.

L'application f_θ n'est donc pas un homéomorphisme.

Supposons maintenant que $\theta=\dfrac{p}{q}$, $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux.

Montrons d'abord que $f_\theta(\mathbb{R})$ n'est pas partout dense.

On voit que $f_\theta(\mathbb{R})\subset\left\{(u,v)\in\mathbb{U}\times\mathbb{U}\,;\,u^p=v^q\right\}$ (nous montrerons plus loin qu'il y a en fait égalité) ; comme cet ensemble est fermé, mais évidemment strictement inclus dans $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$, l'ensemble $f_\theta(\mathbb{R})$ ne peut pas être partout dense dans $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$.

L'application f_θ est toujours un homomorphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ vers $\mathbb{U}\times\mathbb{U}$ muni de la multiplication ; déterminons son noyau. Le réel t est dans le noyau de f_θ si, et seulement si, $e^{2i\pi t}=1$ et $e^{2i\pi\theta t}=1$; donc si, et seulement si, t et $\theta t=\dfrac{p}{q}t$ sont des entiers relatifs ; comme $q\times(\theta t)=pt$ et que q et p sont premiers entre eux, le lemme de Gauss permet d'affirmer que t est un multiple entier de q, ce qui est évidemment une condition suffisante pour que t soit dans le noyau de f_θ. Le noyau de l'homomorphisme de groupe f_θ est donc le sous-groupe additif $q\mathbb{Z}$ de $(\mathbb{R},+)$. On sait qu'alors les groupes $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ et $f_\theta(\mathbb{R})$, sont isomorphes.

Il est à peu près évident que $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}$ sont des groupes isomorphes, mais démontrons directement que $\mathbb{U}$ et $f_\theta(\mathbb{R})$ sont des groupes isomorphes, et en même temps, munis de leurs structures topologiques, des espaces topologiques homéomorphes. Nous utiliserons pour cela l'application :

$$h : z \mapsto \left(z^q, z^p\right), \ \mathbb{U} \to \mathbb{U} \times \mathbb{U}.$$

C'est évidemment un homomorphisme de groupes, qui est une application continue.

Si t est un réel quelconque, on voit que $f_\theta(t) = h\left(\mathrm{e}^{2i\pi\frac{t}{q}}\right)$; comme $t \mapsto \mathrm{e}^{2i\pi\frac{t}{q}}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ vers $\mathbb{U}$, on en déduit : $h(\mathbb{U}) = f_\theta(\mathbb{R})$.

Montrons que h est un homomorphisme injectif en caractérisant sa réciproque.

Comme les entiers p et q sont premiers entre eux, on sait qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que $ap + bq = 1$ (identité de Bézout) ; si $\left(z^q, z^p\right) = (u, v)$, alors nous pouvons retrouver z en écrivant : $z = z^{ap+bq} = \left(z^p\right)^a \left(z^q\right)^b = u^b v^a$. Cela prouve que l'homomorphisme h est injectif, et que sa réciproque est la restriction à $h(\mathbb{U}) = f_\theta(\mathbb{R})$ de l'application $(u, v) \mapsto u^b v^a$, de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{C}^*$; cette réciproque est continue, et h est donc un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ vers $h(\mathbb{U}) = f_\theta(\mathbb{R})$. Ce qu'il fallait démontrer.

Terminons en démontrant l'égalité : $f_\theta(\mathbb{R}) = \left\{(u, v) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U} \,;\, u^p = v^q\right\}$.

D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que si $(u, v) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ et $u^p = v^q$, alors il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $u = z^q$ et $v = z^p$. En reprenant les notations introduites ci-dessus, il suffit de vérifier que $z = u^b\, v^a$ convient. Or $\left(u^b\, v^a\right)^q = u^{bq}\left(v^q\right)^a = u^{bq}\left(u^p\right)^a = u^{ap+bq} = u$ et de manière analogue, $\left(u^b\, v^a\right)^p = v$.

Le sous-groupe $f_\theta(\mathbb{R})$ est donc aussi le noyau de l'homomorphisme de groupes $(u, v) \mapsto u^p v^{-q}$, $\mathbb{U} \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{U}$.

§ X.6 *CONTINUITÉ DANS LES EVN*

Exercice 1 :

> Soient E et F deux K-evn et $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$ ($K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$). On suppose que pour toute suite $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E tendant vers 0_E, la suite $\left(u\left(x_n\right)\right)$ est bornée. Montrer que u es

Nous noterons v la norme sur le K-evn E.

Soit (y_n) une suite quelconque dans E telle que $y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Posons $x_n = y_n$ si $y_n = 0$, et $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{v(y_n)}} y_n$ sinon. On vérifie que pour tout n, $v(x_n) = \sqrt{v(y_n)}$, donc $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$; la suite $(u(x_n))$ est donc bornée. Or pour tout n entier $u(y_n) = u\left(\sqrt{v(y_n)}\, x_n\right) = \sqrt{v(y_n)}\, u(x_n)$, donc $u(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

L'application linéaire u est donc continue en 0_E, donc continue (théorème X.6.3).

Exercice 2 :

> Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On donne une partie A de $\mathbb{R}$ non vide et bornée. Si $P \in E$, soit $\mathcal{N}_A(P) = \sup_{x\in A} |P(x)|$.
>
> a) Vérifier que $\mathcal{N}_A(P) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $P \in E$, et que $\mathcal{N}_A$ est une semi-norme sur E. C.N.S. sur A pour que $\mathcal{N}_A$ soit une norme ?
>
> b) On suppose $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, A et B bornées et non vides telles que $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_B$ soient des normes sur E. Comparer ces normes.
>
> c) Si $a \in \mathbb{R}$, soit $\delta_a : E \mapsto \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a)$ ($\delta_a \in E^*$). On choisit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et bornée pour que $\mathcal{N}_A$ soit une norme de E ; C.N.S. sur $a \in \mathbb{R}$ pour que δ_a soit continue ? Si c'est le cas, donner $|||\delta_a|||$ associée à $\mathcal{N}_A$. ■

a) Sans utiliser aucun théorème de topologie, il est clair qu'une fonction polynomiale est bornée sur une partie bornée de $\mathbb{R}$; cela prouve que $\mathcal{N}_A(P)$ existe et est un réel ≥ 0.

Si λ est un réel quelconque et P un polynôme :

$$\mathcal{N}_A(\lambda P) = \sup_{x\in A} |\lambda P(x)| = \sup_{x\in A} |\lambda| |P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in A} |\lambda P(x)| = |\lambda| \mathcal{N}_A(P).$$

Nous en déduisons que $\mathcal{N}_A$ est positivement homogène.

Si P et Q sont des polynômes, pour tout x dans A :

$$|P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq \mathcal{N}_A(P) + \mathcal{N}_A(Q),$$

donc :

$$\mathcal{N}_A(P+Q) = \sup_{x\in A} |P(x)+Q(x)| \leq \mathcal{N}_A(P) + \mathcal{N}_A(Q).$$

L'application $\mathcal{N}_A$ est donc une semi-norme.

Il est évident que $\mathcal{N}_A$ est une norme si, et seulement si, la partie A est infinie.

Nous pouvons remarquer que comme les polynômes sont des applications continues, pour toute partie bornée A et tout polynôme P, $\mathcal{N}_A($[illegible]
Nous pourrons dans la suite nous ramener au cas où la partie A est

b) Montrons que les normes $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_B$ sont équivalentes si, et seulement si, $\overline{A}=\overline{B}$ (et dans ce cas elles sont égales). D'après la remarque précédente, on peut supposer les parties A et B compactes.

Supposons qu'il existe un réel a tel que $a\in A$ et $a\notin B$.

Soit M un réel > 0, assez grand pour que $A\cup B\subset[a-M,a+M]$ (A et B sont bornées), et ε un réel > 0 tel que $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\cap B=\varnothing$ (on suppose B fermée).

Posons pour n entier et x réel : $P_n(x)=\left(M^2-(x-a)^2\right)^n$; P_n élément de E.

On voit que P_n ne prend sur A que des valeurs ≥ 0, la valeur maximale étant atteinte en a et valant M^{2n} ; donc $\mathcal{N}_A(P_n)=M^{2n}$. De manière analogue, $P_n$ne prend sur B que des valeurs ≥ 0, ces valeurs étant majorées par $\left(M^2-\varepsilon^2\right)^n$.

Nous en déduisons :

$$\frac{\mathcal{N}_B(P_n)}{\mathcal{N}_A(P_n)}\leq\frac{\left(M^2-\varepsilon^2\right)^n}{M^{2n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Cela implique que le rapport $\dfrac{\mathcal{N}_A}{\mathcal{N}_B}$, n'est pas borné, c'est-à-dire que la norme $\mathcal{N}_B$ n'est pas plus fine que la norme $\mathcal{N}_A$.

De même, s'il existe un élément $b\in B\setminus A$, alors la norme $\mathcal{N}_A$ n'est pas plus fine que la norme $\mathcal{N}_B$.

Nous pouvons en déduire que les normes $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_B$ sont équivalentes si, et seulement si, les parties A et B (supposées compactes et infinies) sont égales.

c) Nous pouvons encore nous ramener au cas où la partie A est compacte (et infinie).

Montrons que la forme linéaire δ_a sur E est continue si, et seulement si, $a\in A$.

Nous considérerons un réel $M>0$ assez grand pour que
$A\subset[-M+a,a+M]$.

Si $a\in A$, pour tout polynôme P :

$$|\delta_a(P)|=|P(a)|\leq\sup_{x\in A}|P(x)|=\mathcal{N}_A(P),$$

donc δ_a est continue et $|||\delta_a|||\leq 1$. Montrons que $|||\delta_a|||=1$.

Posons pour tout x réel $P(x)=M^2-(x-a)^2$; nous voyons comme dans ce qui précède que $\mathcal{N}_A(P)=M^2$, donc $\mathcal{N}_A(P)=M^2=P(a)=\delta_a(P)>0$. Nous en déduisons que $|||\delta_a|||\geq 1$, donc que $|||\delta_a|||=1$.

Si $a\notin A$, soit un réel $\varepsilon>0$ tel que $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\cap A=\varnothing$. Considérons comme dans le b) la suite de polynômes (P_n), définis par

$P_n(x) = \left(M^2 - (x-a)^2\right)^n$ pour tout n entier et x réel. On voit que pour tout n entier : $\mathcal{N}_A(P_n) \le \left(M^2 - \varepsilon^2\right)^n$ et $\delta_a(P_n) = M^{2n}$, donc $\dfrac{\delta_a(P_n)}{\mathcal{N}_A(P_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La forme linéaire δ_a n'est donc pas dans ce cas continue.

Exercice 8 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \ge 1$. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|||\ .\ |||$ associée à la norme donnée $\|\ .\ \|$ de E.
> a) Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est un projecteur non nul de E, montrer que $|||u||| \ge 1$.
> b) Soit L un sous-$\mathbb{R}$-ev non nul fixé de E et soit $\mathcal{P}_L$ l'ensemble des projecteurs de E d'image L. On pose $\omega(L,E) = \inf\limits_{u \in \mathcal{P}_L} \left(|||u|||\right)$.
> b₁) Chercher un exemple où $\omega(L,E) > 1$.
> b₂) On suppose E euclidien. Montrer qu'un projecteur u non nul est orthogonal ssi $|||u||| = 1$. Montrer que $\omega(L,E) = 1$ et qu'il existe alors un et un seul $u \in \mathcal{P}_L$ tel que $|||u||| = 1$. ■

a) Puisque u est un projecteur non nul de E, on peut trouver un vecteur x non nul dans son image, donc invariant par u. Par conséquent :

$$\|x\| = \|u(x)\| \le |||u|||\,\|x\|, \text{ donc } |||u||| \ge 1.$$

b) D'après ce qui précède, il est clair que $\omega(L,E) \ge 1$.

b₂) Etudions d'abord le cas où l'espace E est euclidien. On démontrera que dans ce cas $\omega(L,E) = 1$.

Montrons qu'un projecteur u non nul est orthogonal ssi $|||u||| = 1$.

Si u est un projecteur orthogonal non nul, pour tout x élément de E,

$$x = u(x) + (x - u(x)) .$$

Les deux termes de cette somme étant orthogonaux, on voit que :

$$\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|x - u(x)\|^2 \ge \|u(x)\|^2 \ ;$$

donc $|||u||| \le 1$, et comme $|||u||| \ge 1$ puisque u est un projecteur non nul, nous en déduisons $|||u||| = 1$.

Soit u un projecteur tel que $|||u||| = 1$. Notons $L = \mathrm{Im}(u)$ et $A = \mathrm{Ker}(u)$.

Pour tout élément x orthogonal à A :

$$\|u(x)\|^2 = \|x + (u(x) - x)\|^2 = \|x\|^2 + \|(u(x) - x)\|^2 \le \|x\|^2,$$

donc : $u(x) = x$, soit $x \in L$.

Nous en déduisons $A^\perp \subset L$, et comme $\dim\left(A^\perp\right) = \mathrm{codim}(A) = \dim(L)$, $A^\perp = L$. Le projecteur u , est donc le projecteur sur $A^\perp$ parallèlen donc un projecteur orthogonal.

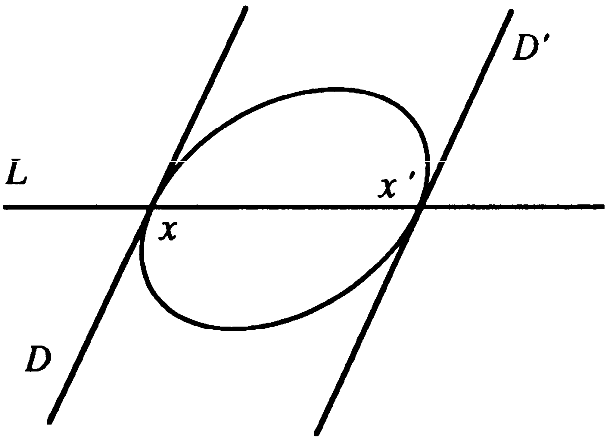
Le sous-espace L étant non nul, le projecteur orthogonal u_L, d'image L, est non nul et, d'après ce qui précède, $|||u_L|||=1$, et c'est le seul qui possède cette propriété.

Nous voyons aussi que dans ce cas $\omega(L,E)=\inf_{u\in\mathcal{P}_L}(|||u|||)\leq 1$, donc $\omega(L,E)=1$.

b₁) Nous devons chercher un evn (non euclidien) de dimension finie E et un sous espace non nul L de E, tels qu'il existe un nombre $k>1$, tel que pour tout projecteur u d'image L, $|||u|||\geq k$.

Cela implique en particulier que la boule $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ n'est stable par aucun projecteur d'image L.

Cela est impossible en dimension 2. Voici une explication qui n'a pas valeur démonstrative, mais qui suffit pour dissuader de chercher un contre-exemple en dimension 2. En effet, dans ce cas, le sous-espace L ne peut être qu'une droite, et son intersection avec $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ est un segment ; notons x et x' ses extrémités, symétriques par rapport à 0_E. L'ensemble $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ est une partie convexe fermée et x est sur sa frontière ; on sait qu'alors (ou on devine, ou on peut même démontrer !) qu'il existe une droite affine D passant par x qui découpe le plan en deux demi-plans dont l'un (fermé) contient $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$. La droite symétrique D' passe par x', et on voit que $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ est incluse dans la bande du plan délimitée par D et D'. Il est alors clair que la boule $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$ est stable par la projection sur L parallèlement à la direction de D. Cela implique $\omega(L,E)=1$. On peut de même voir qu'il est inutile de chercher un exemple où $\dim(L)=1$.



Voici un exemple. On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\nu(x,y,z)=\sup(|x|,|y|,|x-y+z|)$, et on choisit comme sous-espace L le sous-espace d'équation $z=0$.

On peut caractériser les projections d'image L par le vecteur de leur noyau dont la troisième coordonnée est 1. Notons $u_{\alpha,\beta}$ la projection sur L parallèlement au vecteur $(\alpha,\beta,1)$. On obtient facilement :

$$u_{\alpha,\beta}(x,y,z)=(x-\alpha z,y-\beta z,0).$$

On vérifie que les vecteurs $\nu_1=(1,1,1)$, $\nu_2=(-1,-1,1)$, et $\nu_3=(-1,1,1)$, sont de norme 1 (ce sont des points extrémaux de $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,1)$). Don

$$|||u_{\alpha,\beta}||| \geq \sup\Big(v\big(u_{\alpha,\beta}(v_1)\big),\ v\big(u_{\alpha,\beta}(v_2)\big),\ v\big(u_{\alpha,\beta}(v_3)\big)\Big).$$

On calcule facilement :

$u_{\alpha,\beta}(v_1) = (1-\alpha, 1-\beta, 0)$ et $v\big(u_{\alpha,\beta}(v_1)\big) = \sup(|1-\alpha|, |1-\beta|, |\beta-\alpha|)$;

$u_{\alpha,\beta}(v_2) = (-1-\alpha, -1-\beta, 0)$ et $v\big(u_{\alpha,\beta}(v_2)\big) = \sup(|1+\alpha|, |1+\beta|, |\beta-\alpha|)$;

$u_{\alpha,\beta}(v_3) = (-1-\alpha, 1-\beta, 0)$ et $v\big(u_{\alpha,\beta}(v_3)\big) = \sup(|1+\alpha|, |1-\beta|, |\beta-\alpha-2|)$.

Donc :

$$|||u_{\alpha,\beta}||| \geq \varphi(\alpha,\beta),$$

où :

$$\varphi(\alpha,\beta) = \sup(|1-\alpha|, |1+\alpha|, |1-\beta|, |1+\beta|, |\beta-\alpha|, |\beta-\alpha-2|).$$

Il nous faut maintenant prouver que :

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \varphi(\alpha,\beta) > 1.$$

Il est clair que si $|\alpha| \geq 1$, alors $\varphi(\alpha,\beta) \geq 2$, et de même, si $|\beta| \geq 1$, $\varphi(\alpha,\beta) \geq 2$; nous pouvons donc nous limiter à étudier :

$$k = \inf_{(\alpha,\beta)\in[-1,1]^2} \varphi(\alpha,\beta).$$

En supposant $|\alpha| \leq 1$ et $|\beta| \leq 1$, nous obtenons :

$$\varphi(\alpha,\beta) = \sup(1-\alpha, 1+\alpha, 1-\beta, 1+\beta, \beta-\alpha, \alpha-\beta, 2-\beta+\alpha).$$

Comme :

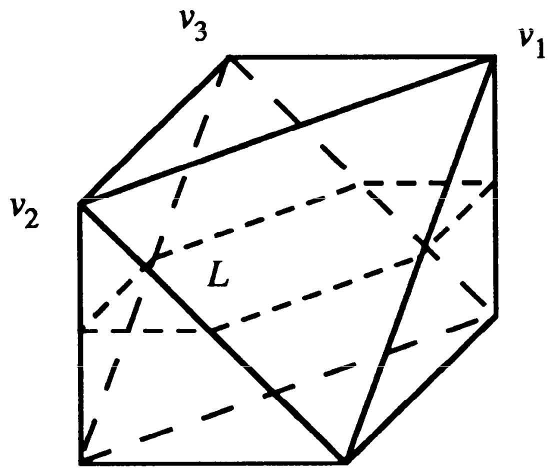
$2-\beta+\alpha = 1+\alpha+1-\beta \geq 1-\beta \geq \alpha-\beta$, $2-\beta+\alpha \geq 1+\alpha$ et $1-\alpha \geq \beta-\alpha$,

nous pouvons écrire :

$$\varphi(\alpha,\beta) = \sup(1-\alpha, 1+\beta, 2-\beta+\alpha).$$

Pour α fixé, la valeur minimum de $\sup(1+\beta, 2-\beta+\alpha)$ est obtenue pour la valeur β telle que $1+\beta = 2-\beta+\alpha$, soit $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$(on vérifie $-1 \leq \beta \leq 1$), la valeur minimum étant $\dfrac{3+\alpha}{2}$. La valeur minimum de $\sup\left(1-\alpha, \dfrac{3+\alpha}{2}\right)$ est obtenue pour la valeur de α telle que $1-\alpha = \dfrac{3+\alpha}{2}$, soit $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ (donc $\beta = \dfrac{1}{3}$) la valeur minimum étant $\dfrac{4}{3}$.

Nous pouvons en déduire que $k = \inf\limits_{(\alpha,\beta)\in[-1,1]^2} \varphi(\alpha,\beta) = \dfrac{4}{3} > 1$. Ce qu'il fallait démontrer.


v_3
v_1
v_2
L

Chapitre XI

COMPACITÉ, COMPLÉTUDE, CONNEXITÉ

§ XI.1 *ESPACES COMPACTS*

Exercice 2 :

> Soit E un espace topologique et $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une suite de E.
>
> a) Si la suite (u_n) converge dans E vers $l \in E$, l'ensemble $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}} \cup \{l\}$ est un compact de E.
>
> b) On suppose (E, d) métrique, et que pour un compact non vide L de E, on ait $d(u_n, L) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des valeurs d'adhérence de (u_n) est contenu dans L et que $\mathscr{A} \cup \{u_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ est compact. ■

a) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E qui recouvre l'ensemble $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}} \cup \{l\}$. L'un de ces ouverts contient la limite l ; soit $j \in I$ tel que $l \in O_j$. Comme $u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$, il existe un rang N tel que : $\forall n \geq N,\ u_n \in O_j$. Pour tout entier $n < N$, on peut trouver un indice $i_n \in I$ tel que $u_n \in O_{i_n}$; avec ces notations, on voit que : $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}} \cup \{l\} \subset O_{i_0} \cup O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_{N-1}} \cup O_j$.

On a donc extrait du recouvrement $(O_i)_{i\in I}$, un sous-recouvrement fini.

L'ensemble $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}} \cup \{l\}$ est donc bien compact.

b) Soit l une valeur d'adhérence de la suite (u_n), puisque la topologie de E est métrisable, c'est la limite d'une suite extraite (u_{n_k}) . Comme $d(u_{n_k}, L) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, on en déduit $d(l, L) = 0$, donc $l \in L$, puisque L est fermé (proposition X.3.2.). Donc $\mathscr{A} \subset L$.

Il ressort clairement de la définition X.4.4 de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite, que $\mathcal{A}$ est une partie fermée. On en déduit que l'ensemble $\mathcal{A}$ est compact (théorème XI.1.1.).

Montrons que l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide.

Comme l'ensemble L est compact, pour tout n entier, il existe un élément $x_n \in L$ tel que $d(u_n, L) = d(u_n, x_n)$. La suite (x_n) a des valeurs d'adhérence ; soit l l'une d'entre elles, c'est la limite d'une suite extraite $\left(x_{n_k}\right)$; comme $d\left(u_{n_k}, x_{n_k}\right) = d\left(u_{n_k}, L\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, on voit que $u_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} l$; on obtient ainsi une valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Supposons qu'un ouvert O de (E, d) contienne l'ensemble $\mathcal{A}$, et montrons que $\{ n \in \mathbb{N}, u_n \notin O \}$ est fini. Supposons le contraire, on peut alors trouver une suite extraite $\left(u_{n_k}\right)$ dont aucun terme n'est dans l'ouvert O. En procédant comme ci-dessus, on voit que cette suite a au moins une valeur d'adhérence l. Comme $E \setminus O$ est un fermé, $l \in E \setminus O$. Or l est aussi une valeur d'adhérence de la suite (u_n), donc $l \in \mathcal{A}$. Il y a contradiction puisque $\mathcal{A} \subset O$. Nous pouvons maintenant conclure.

Supposons que $(O_i)_{i\in I}$ soit une famille d'ouverts de E qui recouvre l'ensemble $\mathcal{A} \cup \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Comme l'ensemble $\mathcal{A}$ est compact, on peut le recouvrir par une sous-famille finie $(O_i)_{i\in J}$ (J partie finie de I). Posons $O = \bigcup_{i\in J} O_i$; c'est un ouvert qui contient $\mathcal{A}$, donc d'après ce qui précède, l'ensemble $\{ n \in \mathbb{N}, u_n \notin O \}$ est fini. Il est alors clair qu'en procédant comme dans le a) on peut extraire de $(O_i)_{i\in I}$ un sous-recouvrement fini.

Exercice 4 :

> Soit (E, d) un espace métrique compact. On donne dans E une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante pour l'inclusion, de compacts non vides ; soit $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que $\operatorname{diam}(A_n) \underset{n\to\infty}{\downarrow} \operatorname{diam}(A)$. ■

Il est clair que la suite $(\operatorname{diam}(A_n))$ est décroissante et minorée par $\operatorname{diam}(A)$; elle est donc convergente vers une limite L et $L \geq \operatorname{diam}(A)$.

D'une manière générale, si K est un partie compacte non vide de (E, d), l'ensemble $K \times K$ est une partie compacte de $E \times E$, muni d'une distance produit (théorème XI.1.5.). D'autre part, l'application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est continue puisque, pour tout x_0 et y_0 dans E, on a l'inégalité

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0).$$

Cette application atteint donc sur $K \times K$ son maximum qui est par définition $\mathrm{diam}(K)$.

Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout n entier, $a_n \in A_n$, $b_n \in A_n$ et $d(a_n, b_n) = \mathrm{diam}(A_n)$. Ces suites sont à valeurs dans le compact A_0 et on peut donc extraire de la suite (a_n, b_n) une suite convergente (a_{n_k}, b_{n_k}) ; montrons que si (a, b) est sa limite, a et b sont éléments de A.

Pour n entier fixé, pour tout $k \geq n$, on a aussi $n_k \geq n$, donc $a_{n_k} \in A_n$; comme A_n est fermé, on voit que $a \in A_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, on en déduit $a \in A$. Il en est de même pour b.

Donc comme :

$$d(a_{n_k}, b_{n_k}) = \mathrm{diam}(A_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} d(a, b) = L,$$

on en déduit $L \leq \mathrm{diam}(A)$.

Il y a donc égalité, c'est-à-dire $L = \mathrm{diam}(A)$.

Exercice 5 :

> Soit (E, d) un espace métrique compact et (A_n) une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides de E. Soit $\varphi : E \to E$ continue. Montrer : $\varphi\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$. ■

Notons $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Puisque pour tout n entier, $A \subset A_n$, donc $\varphi(A) \subset \varphi(A_n)$, on en déduit l'inclusion : $\varphi(A) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

Montrons l'inclusion opposée.

Soit y un élément de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$; pour tout entier n il existe un élément $x \in A_n$ tel que $y = \varphi(x)$; il existe donc une suite (x_n) telle que pour tout n entier $x_n \in A_n$ et $y = \varphi(x_n)$. Comme l'espace E est compact, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente (x_{n_k}) ; notons x sa limite.

Pour n entier fixé, si $k \geq n$ alors $n_k \geq n$, donc $x_{n_k} \in A_n$; comme A_n est un fermé, on en déduit $x \in A_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n on voit que $x \in A$.

Comme l'application φ est continue en x :

$$y = \varphi\left(x_{n_k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x),$$

donc $y = \varphi(x)$, et $y \in \varphi(A)$.

Nous avons donc démontré l'inclusion : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n) \subset \varphi(A)$.

Il y a donc bien égalité.

Exercice 8 :

> Soit X un espace topologique compact non vide. On se propose d'étudier les idéaux maximaux de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ des fonctions continues : $X \to \mathbb{R}$ (i.e. les idéaux $\mathfrak{M}$ de l'anneau $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ tels que $\mathfrak{M} \neq \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ et que les seuls idéaux $\mathcal{N}$ contenant $\mathfrak{M}$ soient $\mathfrak{M}$ et $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.
>
> a) Soit $a \in X$; l'ensemble $\mathfrak{M}_a = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R}) \mid f(a) = 0 \right\}$ est un idéal maximal, et l'anneau quotient (cf. tome 1, §VII.7) $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})/\mathfrak{M}_a$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.
>
> b) Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.
>
> On pose $\mathcal{V}(\mathfrak{M}) = \left\{ x \in X \mid \forall f \in \mathfrak{M}, f(x) = 0 \right\}$. Prouver que $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ est un fermé non vide de X. En déduire : les seuls idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ sont ceux définis au a).
>
> c) Montrer que si X est métrisable, l'application $a \mapsto \mathfrak{M}_a$ (définie sur X) est injective. ■

a) L'application $a \mapsto f(a)$, de $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$, est un homomorphisme d'anneaux surjectif (les fonctions constantes sont continues) dont le noyau est l'idéal $\mathfrak{M}_a$; l'anneau quotient $\mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})/\mathfrak{M}_a$ est donc isomorphe au corps $\mathbb{R}$ et est donc lui-même un corps. On sait qu'alors l'idéal $\mathfrak{M}_a$ est maximal.

b) Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{V}(\mathfrak{M}) = \bigcap_{f\in\mathfrak{M}} f^{-1}(\{0\}).$$

Il s'agit de l'intersection d'une famille de fermés, donc d'un fermé ; le fait que $\mathcal{M}$ est maximal n'intervient pas ici.

Montrons que si $\mathfrak{M}$ est un idéal tel que $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ est vide, alors $\mathfrak{M} = \mathscr{C}^0(X,\mathbb{R})$.

Si $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ est vide, alors pour tout élément x de X, on peut trouver une application continue f, élément de $\mathfrak{M}$, telle que $f(x) \neq 0$, et donc un voisinage ouvert V sur lequel f ne prend pas la valeur 0. Il existe donc une fam d'éléments de $\mathfrak{M}$, et une famille $(V_x)_{x \in X}$ d'ouverts de X telles que, pour tout x dans X, V_x est un voisinage ouvert de x et l'application f_x ne prend pas la valeur 0 sur V_x. La famille d'ouverts $(V_x)_{x \in X}$ étant un recouvrement du compact X , on peut en extraire un sous-recouvrement fini ; il existe donc une partie finie F de X telle que $X = \bigcup_{x \in F} V_x$.

On voit alors que l'application :

$$g = \sum_{x \in F} f_x^2,$$

est un élément de l'idéal $\mathfrak{M}$ qui ne prend pas la valeur 0 sur X. L'application $1 = \frac{1}{g} \times g$ est donc aussi un élément de l'idéal $\mathfrak{M}$; cela prouve que $\mathfrak{M} = \mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$.

On peut évidemment en déduire que si $\mathfrak{M}$ est maximal, $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$ n'est pas vide. Soit alors un élément a de $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$, il est clair que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_a$; comme $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_a$ sont maximaux, cela n'est possible que si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a$. Les idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$ sont donc les idéaux $\mathfrak{M}_a$, où a est un élément quelconque de X.

c) Puisque X est ici supposé métrisable, il existe une distance d qui définit la topologie de X.

Si a et b sont des éléments distincts de X, les idéaux $\mathfrak{M}_a$ et $\mathfrak{M}_b$ sont distincts, puisque l'application $x \mapsto d(x, a)$ est élément de $\mathfrak{M}_a$ mais pas de $\mathfrak{M}_b$; d'où l'injectivité demandée.

Exercice 15 :

> Montrer qu'un espace métrique compact infini ne peut être que dénombrable, ou équipotent à une partie de $\mathbb{R}$. S'il est sans point isolé, il ne peut pas être dénombrable. ■

a) Soit n un entier > 0, la famille $\left(\mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)_{x \in X}$ est un recouvrement de l'espace métrique compact (X, d) par des ouverts ; on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie finie X_n de X telle que $X = \bigcup_{x \in X_n} \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Notons D l'union de ces parties finies ; c'est une partie au plus dénombrable de X .

Montrons que D est partout dense (on dira que X est séparable : voir §X.2 exercice 1).

Soit y un élément de X et un réel $\varepsilon > 0$; on peut trouver un entier $n > 0$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$; comme $X = \bigcup_{x \in X_n} \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$, il existe un élément x de X_n, donc de D, tel que $y \in \mathrm{B}\left(x, \frac{1}{n}\right)$; on vérifie que $d(y,x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Cela prouve que D est partout dense.

Comme on suppose ici que X est infini, la partie D partout dense ne peut pas être finie (une partie finie est fermée) ; elle est donc dénombrable. On peut donc supposer que D est l'image d'une suite injective $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tout élément y de X est limite d'une suite d'éléments de D ; pour tout y dans X, il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y$. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ soit convergente, et $L : \mathscr{C} \to X$, $\varphi \mapsto \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)}$. D'après ce qui précède, l'application L est surjective ; nous pouvons en déduire $\operatorname{card}(X) \le \operatorname{card}(\mathscr{C}) \le \operatorname{card}\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)$.

Comme les applications $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont caractérisées par leur graphe, on obtient : $\operatorname{card}\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right) \le \operatorname{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$; comme l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, $\operatorname{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})) = \operatorname{card}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$; on sait que ce cardinal est le cardinal de $\mathbb{R}$ (voir Algèbre tome 1, §II.4). Nous en déduisons : $\operatorname{card}(X) \le \operatorname{card}(\mathbb{R})$. Il existe donc une injection de X dans $\mathbb{R}$ et X est par conséquent équipotent à une partie de $\mathbb{R}$.

b) Supposons que X soit dénombrable, image de la suite injective $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et sans point isolé. Pour tout n entier l'ensemble $O_n = X \setminus \{x_n\}$ est un ouvert de X, puisque les singletons sont fermés, mais c'est un ouvert partout dense car x_n n'est pas isolé. On vérifie que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est vide. Cela est impossible, car l'espace X est un espace de Baire, et que dans un espace de Baire l'intersection d'une suite d'ouverts partout denses est partout dense, donc non vide. Voir la résolution de l'exercice 20 du §XI.2.

Exercice 16 :

> Soit A un espace topologique, B un espace topologique compact et $f : A \to B$ telle que
>
> 1) $(\exists p \in \mathbb{N}),\ p \ge 2 \mid \forall y \in B, \operatorname{card}\left(f^{-1}(y)\right) = p$.
>
> 2) Pour tout y élément de A, il existe un voisinage V_y (

un voisinage W_y de $f(y)$ dans B tels que $f(V_y) \subset W_y$ et tels que la restriction de f de V_y vers W_y est un homéomorphisme.
Montrer que A est compact. ■

Démontrons la proposition élémentaire suivante, que nous utiliserons implicitement dans la suite :

Soit X un espace topologique, $x \in X$ et V un voisinage de x dans X. Les voisinages de x dans le sous-espace topologique V sont les voisinages de x dans X qui sont inclus dans V.

Si W est un voisinage de x dans X qui est inclus dans V, il est alors sa propre trace sur V, donc aussi voisinage de x dans V.

Inversement, si U est un voisinage de x dans V, il s'écrit $U = V \cap W$, où W est un voisinage de x dans X ; comme V est un voisinage de x dans X, U est aussi un voisinage de x dans X.

Démontrons le lemme suivant :

Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont n éléments d'un espace topologique séparé, il existe des voisinages V_1 de x_1, V_2 de x_2, ..., V_n de x_n deux à deux disjoints.

Démontrons cette propriété par récurrence sur $n \geq 2$.

C'est vrai pour $n = 2$, puisque l'espace est séparé. Supposons la propriété vraie pour n. Si $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$ sont distincts, il existe des voisinages V_1 de x_1, V_2 de x_2, ..., V_n de x_n deux à deux disjoints. D'autre part, pour tout i entre 1 et n, il existe un voisinage U_i de x_i et un voisinage W_i de x_{n+1} disjoints. Soit $W = \bigcap\limits_{1 \leq i \leq n} W_i$, c'est un voisinage de x_{n+1} disjoint de tous les voisinages U_i.
On voit facilement que les voisinages $V_1 \cap U_1$ de x_1, $V_2 \cap U_2$ de x_2, ..., $V_n \cap U_n$ de x_n et W de x_{n+1}, sont deux à deux disjoints. La proposition est donc vraie à l'ordre $n+1$.

La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$.

D'après la propriété précédente, tout élément y de A a un voisinage U_y tel que pour tout z dans B, si $f^{-1}(\{z\}) = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$, les voisinages U_{y_i}, pour i variant de 1 à p, soient deux à deux disjoints.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par une famille d'ouverts. Montrons qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

Comme $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A, pour tout y dans A, il existe un indice $i \in I$ tel que $y \in O_i$; il existe donc une famille $(i_y)_{y \in A}$ telle que pour tout y dans A, $y \in O_{i_y}$.

Pour tout y dans A, l'ensemble $V_y' = V_y \cap U_y \cap O_{i_y}$ est un voisinage de y dans l'espace V_y. Posons $W_y' = f(V_y') \subset f(V_y) = W_y$; puisque la restriction f_y de f à V_y au départ, et W_y à l'arrivée, est un homéomorphisme, cet ensemble W_y' est un voisinage de $f(y)$ dans W_y, donc dans B.

Pour un élément z de B, notons $f^{-1}(\{z\}) = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$ et posons $\omega_z = \bigcap_{1\le i\le p} W_{y_i}'$. La famille d'ouverts $(\mathrm{Int}(\omega_z))_{z\in B}$ est un recouvrement de B par des ouverts de B (z est intérieur à ω_z), on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie finie F de B telle que $B = \bigcup_{z\in F} \omega_z$.

Introduisons les ensembles $G = \{y \in A, f(y) \in F\}$ et $J = \{i_y, y \in G\}$; ces ensembles sont évidemment finis. Montrons que la sous-famille $(O_i)_{i\in J}$ recouvre A.

Soit a un élément quelconque de A ; $f(a) \in B$, donc on peut trouver un élément z de F tel que $f(a) \in \omega_z$.

Notons $f^{-1}(\{z\}) = \{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$; par définition $\omega_z = \bigcap_{1\le i\le p} W_{y_i}' = \bigcap_{1\le i\le p} f(V_{y_i}')$. L'élément $f(a)$ a donc un et un seul antécédent dans chacun des ensembles V_{y_i}' $(i \in \{1, \cdots, p\})$. Or ces ensembles sont par construction deux à deux disjoints ; on obtient donc ainsi exactement p antécédents, donc *tous* les antécédents de $f(a)$. En particulier, a est dans l'un des ensembles V_{y_i}' $(i \in \{1, \cdots, p\})$. Or l'élément y_i est dans G ; il existe donc un élément y de G tel que $a \in V_y'$. Comme $V_y' = V_y \cap U_y \cap O_{i_y} \subset O_{i_y}$, on voit que $a \in \bigcup_{i\in J} O_i$.

L'espace topologique A est donc compact.

Le lecteur pourra se représenter la situation dans deux cas bien différents.

1) $A = B \times \{1, 2, \cdots, p\}$, l'application f étant la projection sur la première composante et l'ensemble $\{1, 2, \cdots, p\}$ étant muni de la topologie discrète.

2) $A = B = \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, l'application f étant $z \mapsto z^p$.

Exercice 18 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. On donne un voisinage compact R de 0_E, muni de la topologie des normes. Soit
> $L=\{u\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E) \mid u(R)\subset R\}$.
> a) Montrer que L est une partie compacte de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
> b) Si $f\in L$, prouver que $|\det(f)|\leq 1$. ■

a) Montrons que L est une partie fermée et bornée de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de L. Posons : $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$, où v est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. Pour tout élément x de R, $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v(x)$, car l'application $u\mapsto u(x)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ vers E est linéaire, donc continue. Comme pour tout entier n, $u_n(x)\in R$ et que R est fermée, on voit que $v(x)\in R$. Donc $v(R)\subset R$, et $v\in L$. La partie L est donc fermée.

Comme R est un voisinage compact de 0_E, il existe des réels $\varepsilon>0$ et $M>0$ tels que $\tilde{\mathrm{B}}(0_E,\varepsilon)\subset R\subset \tilde{\mathrm{B}}(0_E,M)$. Notons ν la norme utilisée dans E. Soit u un élément de L.

Pour un élément x non nul de E, $\dfrac{\varepsilon}{\nu(x)}x\in \tilde{\mathrm{B}}(0_E,\varepsilon)\subset R$, donc $u\left(\dfrac{\varepsilon}{\nu(x)}x\right)\in R\subset\tilde{\mathrm{B}}(0_E,M)$, soit $\nu\left(u\left(\dfrac{\varepsilon}{\nu(x)}x\right)\right)=\dfrac{\varepsilon}{\nu(x)}\nu(u(x))\leq M$. On en déduit finalement $\nu(u(x))\leq\dfrac{M}{\varepsilon}\nu(x)$ (cette inégalité est aussi vraie pour $x=0$) ; donc $|||u|||\leq\dfrac{M}{\varepsilon}$.

La partie L étant fermée est bornée dans un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, elle est compacte.

b) Comme l'application $L\to\mathbb{R}_+$, $u\mapsto|\det(u)|$ est continue et que L est compact, cette application est bornée. Or si u est un élément de L, on voit que $\{u^k, k\in\mathbb{N}\}\subset L$; nous en déduisons que l'ensemble $\{|\det(u^k)|, k\in\mathbb{N}\}$, égal à l'ensemble $\{|\det(u)|^k, k\in\mathbb{N}\}$, est borné. Il est alors clair que $|\det(u)|\leq 1$.

Exercice 23 :

> Soit (E,d) un espace métrique compact. On suppose que l'ensemble E' des points d'accumulation de E est dénoml
> que E est dénombrable. ■

(voir aussi §III.3 exercice 7).

Pour tout réel $\varepsilon > 0$ posons :

$$A_\varepsilon = \{x \in E, \forall y \in E' \ \ d(x, y) \geq \varepsilon\}.$$

On peut remarquer que cet ensemble est fermé, car c'est l'intersection d'une famille de fermés ; il n'est constitué que de points isolés dans E. S'il était infini, il aurait au moins un point d'accumulation a (théorème XI.1.4 remarque 3) ; ce point d'accumulation a de A_ε, serait dans A_ε, et serait évidemment aussi point d'accumulation de E. Cela est impossible. L'ensemble A_ε est donc fini.

Si x est un élément de $E \setminus E'$, alors il est isolé dans E, il existe donc un entier $n > 0$ tel que la boule ouverte $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ soit réduite au singleton $\{x\}$; elle ne contient donc a fortiori aucun point d'accumulation de E. Donc $x \in A_{1/n}$.

Nous en déduisons finalement :

$$E = E' \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{1/n}.$$

L'ensemble E est donc dénombrable.

N.B. Si x est isolé, le singleton $\{x\}$ est un ouvert (ici une boule ouverte) ; l'ensemble des points isolés est donc un ouvert, et l'ensemble des points d'accumulation un fermé.

Exercice 33 :

> Soit un espace métrique (E, d), un espace topologique T, et $f : E \to T$ une application injective qui transforme tout compact de E en un compact de T. Montrer que f est continue. ■

Soit F un fermé de T ; montrons que l'ensemble $f^{-1}(F)$ est séquentiellement fermé dans (E, d), donc fermé. Nous pourrons en déduire que f est continue.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléments de $f^{-1}(F)$; notons a sa limite. Pour tout n entier l'ensemble $X_k = \{x_n, n \geq k\} \cup \{a\}$ est compact (voir exercice 2).

D'après l'hypothèse, l'ensemble $Y_k = f(X_k) = \{f(x_n), n \geq k\} \cup \{f(a)\}$ est aussi compact.

La suite $(Y_k \cap F)$ est une suite décroissante de compacts non vides, donc d'intersection non vide. Or l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{f(x_n), n \geq k\}$ est vide, car f est injective. Il ne reste donc que $f(a)$ qui puisse être dans l'intersection de la famille $(Y_k \cap F)$. Donc $f(a) \in F$, soit encore $a \in f^{-1}(F)$, ce qu'il fallai

Exercice 34 :

(Ensembles absorbants) : Soit E un $\mathbb{R}$-evn non nul. Un ensemble A de E est dit absorbant ssi

$(\forall x \in E)$, $\exists \rho \in \mathbb{R}_+^*$ | $(\forall \lambda \in [-\rho, \rho])$, $\lambda x \in A$.

a) Si E est de dimension finie, montrer que toute partie A de E à la fois convexe et absorbante, est un voisinage de 0_E. (Utiliser l'exercice 9 du §X.1). Montrer par un exemple que si A n'est pas convexe, elle peut être absorbante sans être un voisinage de 0_E.

b) Donner un exemple, avec E de dimension infinie, de partie A de E à la fois convexe et absorbante, et qui ne soit pas voisinage de 0_E. ■

Nous utiliserons comme conseillé l'exercice 9 du § X.1.

Remarquons que nous pouvons exprimer la propriété absorbant sous la manière plus géométrique suivante : toute droite vectorielle D coupe A suivant un voisinage de 0_E dans D.

Nous pouvons en déduire par exemple que tout convexe ouvert C qui contient 0_E est absorbant puisque l'intersection de C avec une droite D est un intervalle ouvert de D contenant 0_E.

On voit aussi que l'intersection de deux ensembles absorbants est absorbant.

a) Si A est une partie absorbante convexe, l'ensemble $A \cap (-A)$ est évidemment une partie convexe comme intersection de deux convexes, absorbante et symétrique. L'ensemble $A' = A \cap (-A) \cap \mathrm{B}(0_E, 1)$ est convexe, toujours absorbant, et ne contient aucune droite ; c'est donc un tonneau. La norme de jauge de ce tonneau est équivalente à la norme initiale utilisée dans E (cf. exercice 9 du § X.1). Si nous notons ν cette norme, on sait que $\mathrm{B}_\nu(0_E, 1) \subset A'$. L'ensemble A' est donc (pour ν et pour toutes les normes) un voisinage de 0_E. Nous pouvons en déduire que A, qui contient A', est un voisinage de 0_E, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que si E n'est pas de dimension finie, le raisonnement utilisé ci-dessus prouve l'existence d'une norme pour laquelle A est un voisinage de 0_E.

Soit dans $\mathbb{R}^2$ la partie $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \le 0 \text{ ou } x > y^2\right\}$. La droite "verticale", d'équation $x = 0$ et la droite "horizontale" d'équation $y = 0$ sont incluses dans A ; la droite de pente $p \neq 0$ coupe A suivant $\left\{(x, px), x < \dfrac{1}{p^2}\right\}$. Toute droite D coupe donc A suivant un voisinage de 0_E, dans D ; l'ensemble A est donc absorbant. Mais A n'est pas un voisinage de 0_E, puisque pour tout réel $y \neq 0$, le point $\left(\dfrac{y^2}{2}, y\right)$ n'est pas dans A.

b) Soit ν une norme sur le $\mathbb{R}$-espace E. La boule ouverte $\mathrm{B}_\nu(0_E,1)$ est convexe et absorbante d'après ce qui a été dit en introduction. C'est un voisinage de 0_E pour la norme N si, et seulement si, on peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que : $\mathrm{B}_N(0_E,\varepsilon) \subset \mathrm{B}_\nu(0_E,1)$; donc si, et seulement si, la norme N est plus fine que la norme ν.

On pourra trouver dans la résolution de l'exercice 3, § X.1, et dans la résolution de l'exercice 2, §X.6., des exemples de couples de normes, dont l'une n'est pas plus fine que l'autre ; on en déduira l'existence d'ensembles absorbants convexes, non voisinages de 0_E.

Exercice 35 :

> (Fonctions convexes) : Soit Ω un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-evn non nul E. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite convexe ssi
> $\left(\forall (x,y,\lambda) \in \Omega\times\Omega\times[0,1]\right) \quad f(\lambda y + (1-\lambda)x) \le \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)$.
> Dans ce qui suit, on suppose E de dimension finie ≥ 2, on donne l'ouvert convexe Ω de E, avec $0_E \in \Omega$, et la fonction convexe $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On se propose de montrer que f est nécessairement continue en 0_E. On pourra procéder ainsi :
> a) Soit ε réel > 0, et posons $\mathscr{C}_\varepsilon = f^{-1}\left(\left]-\infty, \varepsilon + f(0_E)\right[\right)$. Montrer que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est convexe et absorbant dans E ; en déduire que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est un voisinage de 0_E (cf. exercice 34).
> b) Utiliser le théorème de Hahn-Banach (exercice 11, §X.1) pour obtenir des minorations de f au voisinage de 0_E. ■

a) Montrons que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est un convexe.

Supposons que x et y soient éléments de $\mathscr{C}_\varepsilon$ et λ réel élément de l'intervalle $]0,1[$; alors :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) < \lambda(\varepsilon + f(0_E)) + (1-\lambda)(\varepsilon + f(0_E)) = \varepsilon + f(0_E),$$

donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathscr{C}_\varepsilon$. L'ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$ est donc convexe.

Montrons que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est absorbant.

Si D est une droite vectorielle, la restriction de f à $\Omega \cap D$ est une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert de D contenant 0_E. On sait que les fonctions numériques convexes, définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, sont continues ; c'est vrai en particulier pour la restriction de f à $\Omega \cap D$; elle est donc continue en 0_E. Comme l'intervalle $\left]-\infty, \varepsilon + f(0_E)\right[$ est un voisinage de $f(0_E)$ dans $\mathbb{R}$, son image réciproque par la restriction de f à $\Omega \cap D$ est un voisinage de 0_E dans $\Omega \cap D$. Cette image réciproque est évidemment $\mathscr{C}_\varepsilon \cap D$, qui est donc un voisinage de 0_E dans $\Omega \cap D$. L'ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$ est donc absorbant.

L'espace E étant de dimension finie, nous pouvons en déduire que l'ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$ est un voisinage de 0_E (cf. exercice précédent 34).

b) Un vecteur v de E étant fixé, considérons l'application : $t \mapsto f(tv)$, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. C'est une application convexe ; on sait qu'alors elle est dérivable à droite en 0. Posons pour tout élément v de E : $p(v) = \lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{1}{t}\big(f(tv) - f(0_E)\big)$.

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}\big(f(tv) - f(0_E)\big)$ est croissante, on en déduit que pour tout élément v de Ω, $f(v) \geq f(0_E) + p(v)$.

Montrons que maintenant que l'application p est convexe. Pour tous u et v éléments de $\mathscr{C}_\varepsilon$, pour tout réel λ élément de l'intervalle $[0,1]$, et pour $t > 0$ voisin de 0, plus précisément appartenant à un intervalle I voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I,\ (tu \in \Omega) \text{ et } (tv \in \Omega),$$

nous avons la majoration :

$$\frac{1}{t}\big(f(t(\lambda u + (1-\lambda)v)) - f(0_E)\big) \leq \frac{\lambda}{t}\big(f(tu) - f(0_E)\big) + \frac{(1-\lambda)}{t}\big(f(tv) - f(0_E)\big),$$

donc en passant à la limite quand t tend vers 0 , $t > 0$:

$$p(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda\, p(u) + (1-\lambda) p(v).$$

D'autre part, pour tout élément v de E et tout réel $\lambda > 0$:

$$p(\lambda v) = \lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{1}{t}\big(f(t\lambda v) - f(0_E)\big) = \lim_{\theta \to 0,\, \theta>0} \frac{\lambda}{\theta}\big(f(\theta v) - f(0_E)\big) = \lambda\, p(v).$$

Nous en déduisons que pour tous vecteurs u et v de E :

$$p(u+v) = 2p\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq 2\frac{p(u)+p(v)}{2} = p(u) + p(v).$$

L'application p est donc sous-linéaire. Nous avons démontré dans la résolution de l'exercice 11 du §X.1 (théorème de Hahn-Banach) qu'il existait alors une forme linéaire φ minorant p . D'où :

$$(\forall v \in \Omega) \quad f(v) \geq f(0_E) + \varphi(v).$$

Comme la forme linéaire φ est continue en 0_E, l'ensemble $\{v \in \Omega,\ \varphi(v) > -\varepsilon\}$ est un voisinage de 0_E. A fortiori l'ensemble $\{v \in \Omega,\ f(v) > f(0_E) - \varepsilon\}$ est un voisinage de 0_E.

Conclusion :

Nous pouvons déduire du a) et du b) que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble :

$$\{v \in \Omega,\ \varepsilon + f(0_E) > f(v) > f(0_E) - \varepsilon\}$$

est un voisinage de 0_E, comme intersection de deux voisinages de 0_E. L'application f est donc continue en 0_E.

De manière générale, une application convexe définie sur un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie est continue en tout point, donc continue.

§ XI.2 *ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS*

Exercice 5 :

> Pour $(x,y)\in \mathbb{N}^2$, on pose $d(x,y)=0$ si $x=y$ et
> $d(x,y)=\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-|x-y|}$ si $x\neq y$.
>
> a) Vérifier que $(\mathbb{N},d)$ est un espace métrique complet, définissant sur $\mathbb{N}$ la topologie discrète.
>
> b) Pour $n\in \mathbb{N}^*$, soit $B_n=\tilde{\mathrm{B}}\left(n,\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-2n}\right)$; montrer que la suite de boules fermées admet une suite extraite décroissante pour l'inclusion et d'intersection vide. Quelle conclusion en tire-t-on ? ■

a) Montrons que d est une distance.

Pour tous n et m entiers, $d(n,m)$ est bien un réel ≥ 0, $d(n,m)=d(m,n)$, et si $n\neq m$, $d(n,m)\geq \dfrac{1}{2}>0$. Vérifions l'inégalité triangulaire : soient p, q, r entiers, s'ils ne sont pas distincts, l'inégalité :

$$d(p,r)\leq d(p,q)+d(q,r),$$

est évidente. Dans le cas contraire :

$$d(p,r)=\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-|p-r|}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}}\leq 1\leq\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-|p-q|}+\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-|q-r|}=d(p,q)+d(q,r).$$

Comme pour tout n entier, $\mathrm{B}_d\left(n,\dfrac{1}{2}\right)=\{n\}$, la distance d définit sur $\mathbb{N}$ la topologie discrète.

Si (u_n) est une suite de Cauchy pour la distance d, on obtient :

$$\exists N,\quad \forall n\geq N, \forall m\geq N,\quad d(u_n,u_m)<\frac{1}{2}.$$

D'après ce qui précède, on voit que la suite (u_n) est nécessairement constante à partir du rang N, donc convergente pour la topologie discrète. L'espace métrique $(\mathbb{N},d)$ est donc complet.

b) Déterminons la boule $B_n=\tilde{\mathrm{B}}\left(n,\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-2n}\right)$; l'entier m est dans B_n si, et seulement si $n=m$ ou $\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-|m-n|}\leq\dfrac{1}{2}+\mathrm{e}^{-2n}$, soit encore $|m-n|\geq 2n$. Donc $B_n=\{n\}\cup[3n,\infty[$. On en déduit que pour tout n entier, $B_{3n}\subset B_n$, et donc que la suite $\left(B_{3^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Si $3^k>n$, alors $n\notin B_{3^k}$, donc l'intersection de cette suite de boules fermées est vide.

Cela prouve que dans le théorème XI.2.4., l'hypothèse $\operatorname{diam}(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ est indispensable.

Exercice 6 :

> Soit E un K-evn de Banach ($K = \mathbb{R}$, ou $K = \mathbb{C}$). On donne une suite (B_n) de boules fermées de E, décroissante pour l'inclusion ; posons pour tout n entier $B_n = \tilde{\mathrm{B}}(x_n, r_n)$, on suppose que $r_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} a$, $a > 0$.
> Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$.
> Comparer ce résultat avec celui de l'exercice 5. ■

Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Nous noterons ν la norme sur E.
Si n et m sont entiers, $m > n$, en supposant $x_n \neq x_m$, posons :

$$y = x_m - \lambda(x_n - x_m), \text{ où } \lambda = \frac{r_m}{\nu(x_n - x_m)} \ ;$$

on voit que :

$$y \in B_m \subset B_n, \text{ d'où : } \nu(x_n - y) = (1+\lambda)\nu(x_n - x_m) \leq r_n.$$

Nous en déduisons :

$$\nu(x_n - x_m) + r_m \leq r_n, \text{ soit } \nu(x_n - x_m) \leq r_n - r_m.$$

Cette inégalité aussi est vérifiée, si $x_n = x_m$.

La suite (r_n) est convergente, donc de Cauchy ; la suite (x_n) est donc de Cauchy, et par conséquent convergente.

Soit l la limite de la suite (x_n). Pour tout entier n fixé, si $m \geq n$, $x_m \in B_n$; comme la boule B_n est fermée, on en déduit $l \in B_n$. Ceci étant vrai pour tout entier n, $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. L'intersection de cette famille n'est donc pas vide.

Nous vérifions encore une fois que les espaces vectoriels normés ont des propriétés particulières par rapport aux espaces métriques en général (voir aussi exercice 9, § X.3).

Exercice 20 :

> (Espaces de Baire) : Soit A une partie d'un espace topologique E. On dit que A est rare ssi $\operatorname{Int}(\operatorname{Adh}(A)) = \varnothing$, et que A est maigre ssi A est union au plus dénombrable d'ensembles rares.
> a) Montrer que les conditions (I) et (II) sont équivalentes :
> (I) Pour toute famille dénombrable $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts denses de E, l'ensemble $\bigcap_{i\in I} \Omega_i$ est dense dans E.

> (II) Toute partie maigre de E est d'intérieur vide.
> Si ces conditions sont réalisées, on dit que E est un espace de Baire.
> b) Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'ouverts denses d'un espace de Baire E, alors $\bigcap_{i\in I}\Omega_i$ est un espace de Baire.
> c) Si un espace E est localement compact (i.e. tout point admet au moins un voisinage compact), alors c'est un espace de Baire.
> d) Soit (E,d) un espace métrique complet. Montrer que E est un espace de Baire.
> e) Soit (F_n) une suite de fermés d'un espace de Baire E telle que $\bigcup_n F_n = E$. Prouver que $\bigcup_n \mathrm{Int}(F_n)$ est dense dans E. ■

Etablissons d'abord quelques propriétés élémentaires.

1) Nous pouvons remarquer que l'intersection de deux ouverts partout denses est un ouvert partout dense . En effet, on sait que si A et B sont deux parties de E, et A ouverte, $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$, ceci tenant au fait qu'intuitivement on ne peut pas s'approcher d'un élément de A sans entrer dans A. Si de plus A et B sont partout denses, alors $A\cap B$ le sera aussi. Rappelons que l'inclusion $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ peut très bien, dans d'autres circonstances, être stricte.

2) Puisque les fonctions Adh et Int sont croissantes pour l'inclusion, on voit que toute partie d'une partie rare est rare. On se gardera à ce propos de croire que les singletons sont tous rares, en effet $\mathrm{Int}(\{x\})$ est vide si, et seulement si, $E\setminus\{x\}$ est partout dense, c'est-à-dire si, et seulement si, x est point d'accumulation. Les parties rares ne contiennent donc aucun point isolé de E.

Nous pouvons transformer légèrement la définition de partie maigre. Montrons qu'une partie M est maigre si, et seulement si, elle est *incluse* dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.

En effet, si M est maigre, on peut trouver une famille (A_n) de parties rares telles que $M=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$; alors $M\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Adh}(A_n)$, la famille $(\mathrm{Adh}(A_n))$ est une famille de fermés d'intérieurs vides, dont la réunion contient M.

Si inversement $M\subset\bigcup_n F_n$ où les F_n sont des fermés d'intérieurs vides, donc rares, alors $M=\bigcup_n(M\cap F_n)$. Les parties $M\cap F_n$ sont rares, car incluses dans des parties rares.

Il est alors clair que toute partie d'une partie maigre est maigre.

3) Comme la réunion de deux ensembles dénombrables est dén[illegible] voit que la réunion de deux parties maigres est encore maigre.

4) Les propriétés *rare* et *maigre* ne sont pas intrinsèques. Par exemple, un hyperplan (non nul) dans un espace de dimension finie est rare et maigre dans l'espace, mais ni rare ni maigre relativement à lui même.

Cependant, on peut établir que si $R \subset F \subset E$ et que R est rare (resp. maigre) relativement à F, alors R est rare (resp. maigre) relativement à E. En effet :

Supposons que R ne soit pas rare relativement à E, c'est-à-dire $\mathrm{Int}_E(\mathrm{Adh}_E(R)) \neq \varnothing$. Il existe donc un ouvert non vide O de E tel que $O \subset \mathrm{Adh}_E(R)$. Alors $O = O \cap \overline{R} \subset \overline{O \cap R}$ (adhérences dans E) ; les ensembles $O \cap R$ et a fortiori $O \cap F$ ne sont donc pas vides et :

$$O \cap F \subset \mathrm{Adh}_E(R) \cap F = \mathrm{Adh}_F(R).$$

L'ensemble $O \cap F$ est un ouvert non vide de F inclus dans $\mathrm{Adh}_F(R)$. Nous en déduisons que l'ensemble R n'est pas rare relativement à F.

Il est clair alors que si M est maigre par rapport à F, il est maigre par rapport à E.

5) On peut aussi établir que si $R \subset F \subset E$, l'ensemble F étant *ouvert*, si R est rare (resp. maigre) relativement à E, il est rare (resp. maigre) relativement à F. En effet :

Si R n'est pas rare relativement à F, il existe un ouvert non vide U de F tel que :

$$U \subset \mathrm{Adh}_F(R) = \mathrm{Adh}_E(R) \cap F \subset \mathrm{Adh}_E(R) \ ;$$

comme F est un ouvert de E, U est aussi un ouvert non vide de E inclus dans $\mathrm{Adh}_E(R)$. L'ensemble R n'est donc pas rare dans E.

Il est alors clair que si M est maigre relativement à E, il l'est relativement à F.

a) D'après ce qui a été dit ci-dessus (point 2)), toute partie maigre est d'intérieur vide si, et seulement si, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide. En prenant les complémentaires, nous obtenons la proposition : toute intersection dénombrable d'ouverts partout denses est partout dense.

b) Soit O une partie ouverte de E espace de Baire. D'après ce qui a été dit dans les remarques préliminaires (point 4)), si M est une partie maigre relativement à O, c'est une partie maigre relativement à E ; elle est donc d'intérieur vide, relativement à E. Si elle n'était pas d'intérieur vide relativement à O, M contiendrait un ouvert non vide U de O ; comme O est un ouvert de E, l'ensemble U serait un ouvert non vide de E inclus dans M , ce qui est exclu. L'espace O est donc un espace de Baire.

Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts denses. Posons $F = \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, et montrons que c'est un espace de Baire.

Si M est maigre relativement à F, d'après les préliminaires (point 4)), il est maigre relativement à E. L'ensemble $E \setminus F$ est aussi maigre, donc est maigre relativement à E (point 3)). Comme E est un espace de Baire, $M \cup (E \setminus F)$ est d'intérieur vide (relativement à E).

Supposons que M ne soit pas d'intérieur vide relativement à F, il existe alors un ouvert non vide U de F inclus dans M. Or U est la trace sur F d'un ouvert non vide O de E, c'est-à-dire : $U = O \cap F$. Nous en déduisons :

$$O = (O \cap F) \cup (O \cap (E \setminus F)) \subset U \cup (E \setminus F) \subset M \cup (E \setminus F).$$

Cela contredit le fait que $M \cup (E \setminus F)$ est d'intérieur vide relativement à E. Nous pouvons en déduire que M est d'intérieur vide relativement à F.

L'espace F est donc un espace de Baire.

c) Justifions d'abord la propriété suivante : si E est localement compact, tout élément x de E a une base de voisinages compacts.

Soit $x \in E$, il a un voisinage compact V. Soit U un voisinage ouvert quelconque de x, l'ensemble $V \setminus U$ est l'intersection d'une partie compacte et d'une partie fermée, c'est une partie compacte ; elle ne contient pas x. On prouve alors facilement en utilisant la compacité de $V \setminus U$ qu'il existe deux ouverts de E, W et O disjoints, tels que $x \in W$ et $V \setminus U \subset O$ (cf. exercice 1 du §XI.1). L'ensemble $E \setminus O$ est un fermé qui contient W, c'est donc un voisinage de x. L'ensemble $V \cap (E \setminus O) = V \setminus O$ est un voisinage compact de x, disjoint de $V \setminus U$, donc inclus dans U.

Supposons maintenant l'espace E localement compact ; soit (O_n) une suite d'ouverts partout denses. Nous voulons démontrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est partout dense, c'est-à-dire que pour tout x dans E et pour tout voisinage V de x, $V \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \neq \varnothing$. Comme l'intersection d'un nombre fini d'ouverts partout denses est un ouvert partout dense (point 1)), nous pouvons supposer que la suite (O_n) est décroissante pour l'inclusion. Pour la commodité de l'exposition, nous supposerons que $O_0 = E$. D'autre part, d'après ce qui précède, nous pouvons supposer que V est compact, donc compact d'intérieur non vide.

Supposons avoir trouvé une suite décroissante $(V_n)_{n \in \{0, \cdots, p\}}$ de compacts d'intérieurs non vides, tous inclus dans V et tels que $(\forall i \in \{0, \cdots, p\})\ \ V_i \subset O_i$; c'est vrai pour $p = 0$ en posant $V_0 = V$. Soit U_p un ouvert non vide inclus dans V_p, l'ensemble $U_p \cap O_{p+1}$ est un ouvert non vide car O_{p+1} est un ouvert partout dense dans E. Soit y l'un de ses éléments, comme $U_p \cap O_{p+1}$ est voisinage de y, il contient un voisinage compact de y, V_{p+1}. L'ensemble V_{p+1} est bien un compact d'intérieur non vide inclus dans V_p et dans O_{p+1}. On peut donc trouver une suite décroissante (V_n) de compacts d'intérieurs non vides tels que pour tout n entier, $V_n \subset O_n$. On sait qu'alors

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ n'est pas vide, et ce compact est évidemment inclus dans $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.
Cela prouve que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ n'est pas vide.

L'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est donc partout dense, ce qu'il fallait démontrer.

d) L'espace (E, d) étant ici un espace métrique complet nous utiliserons une démonstration analogue à la démonstration du c) : nous remplacerons la suite décroissante de compacts d'intérieurs non vides par une suite décroissante de parties fermées bornées d'intérieurs non vides, dont les diamètres tendent vers 0 ; on sait qu'une telle suite a une intersection non vide (théorème XI.2.4.). Nous pouvons remplacer l'argument de compacité locale par la propriété suivante :

Pour tout x élément de E, pour tout V voisinage de x, et pour tout ε réel > 0, il existe un voisinage fermé borné de x de diamètre $\leq \varepsilon$, inclus dans V.

C'est évident, il suffit d'utiliser une boule fermée de centre x et de rayon assez petit.

Comme dans le c), nous supposerons que la suite (O_n) d'ouverts partout denses est décroissante et que $O_0 = E$. Nous pouvons remplacer de même le voisinage initial V de x par un voisinage fermé borné (d'intérieur non vide par conséquent), de diamètre ≤ 1. Supposons avoir trouvé une suite décroissante $(V_n)_{n\in\{0,\cdots,p\}}$ de parties fermées bornées d'intérieurs non vides, toutes incluses dans V, telles que pour tout i entier entre 0 et p, $V_i \subset O_i$ et $\operatorname{diam}(V_i) \leq 2^{-i}$, ce qui est vrai pour $p = 0$ en posant $V_0 = V$. Soit U_p un ouvert non vide inclus dans V_p, l'ensemble $U_p \cap O_{p+1}$ est un ouvert non vide car O_{p+1} est un ouvert partout dense dans E. Soit y l'un de ses éléments, comme $U_p \cap O_{p+1}$ est voisinage de y, il contient un voisinage fermé borné de diamètre $\leq 2^{-p-1}$; on peut donc trouver une partie fermée bornée V_{p+1}, d'intérieur non vide, incluse dans V_p et dans O_{p+1}, dont le diamètre est $\leq 2^{-p-1}$. On peut donc trouver une suite décroissante de parties fermées et bornées, toutes incluses dans V, telles que pour tout n entier, $V_n \subset O_n$, et dont les diamètres tendent vers 0. On sait qu'alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est un singleton, donc non vide. Cela prouve que $V \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ n'est pas vide.

L'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est donc partout dense, ce qu'il fallait démontrer.

e) Montrons que dans les conditions de l'énoncé, $\bigcup_n \operatorname{Int}(F_n)$ coupe tout ouvert non vide O.

Si les ensembles $F_n \cap O$ étaient tous rares relativement à O, l'ensemble $\bigcup_n (F_n \cap O) = O$ serait maigre relativement à O. Comme O est un espace de Baire (cf. b)), il serait d'intérieur vide relativement à O ; O serait donc vide. L'un des $F_n \cap O$ n'est donc pas rare relativement à O. Il existe donc un entier n et un ouvert non vide U de O (donc de E, inclus dans O), tels que $U \subset \mathrm{Adh}_O(F_n \cap O) \subset \mathrm{Adh}_E(F_n \cap O) \subset \mathrm{Adh}_E(F_n) = F_n$, et $U \subset O$, donc $U \subset \mathrm{Int}_E(F_n) \cap O$.

On en déduit que l'ouvert $\bigcup_n \mathrm{Int}(F_n)$ coupe tout ouvert non vide et est par conséquent partout dense dans E.

Exercice 21 :

> Utiliser les résultats de l'exercice 20 pour résoudre les questions suivantes :
>
> a) Soit (x_n) une suite réelle telle que $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad d(ax_n, \mathbb{Z}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, prouver que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
>
> b) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue telle que $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad f(nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
>
> c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ (a < b)$. On considère $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall x \in [a, b]) \ \exists n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale (théorème de Corominas). ■

a) Soit un réel fixé ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Pour tout entier p, posons :

$$F_p = \{a \in \mathbb{R}, \ (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p) \ d(ax_n, \mathbb{Z}) \leq \varepsilon\}.$$

L'application $x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ étant continue, l'ensemble F_p est intersection d'une famille de fermés, donc est fermé.

D'après l'hypothèse, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un entier p tel que $\forall n \geq p \ \ d(ax_n, \mathbb{Z}) \leq \varepsilon$. Cela signifie que : $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} F_p = \mathbb{R}$.

L'espace $\mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, étant un espace métrique complet, c'est un espace de Baire. Nous pouvons en déduire que l'ouvert $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{Int}(F_p)$ est partout dense dans $\mathbb{R}$, donc a fortiori non vide. Il existe donc un entier p et deux réels u et v, tels que $u < v$ et $[u, v] \subset \mathrm{Int}(F_p) \subset F_p$.

Pour tout n entier $\geq p$, tous les éléments de l'intervalle fermé I_n d'extrémités ux_n et vx_n sont à une distance de l'ensemble $\mathbb{Z}$ moindre

$I_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k-\varepsilon, k+\varepsilon]$. Ces intervalles étant disjoints ($\varepsilon < 1/2$), l'intervalle I_n est inclus dans l'un d'eux. Il existe donc un entier relatif k_n tel que $I_n \subset [k_n - \varepsilon, k_n + \varepsilon]$ (ceci pour tout $n \geq p$).

On remarque que $d(ux_n, \mathbb{Z}) = |ux_n - k_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et que $d(vx_n, \mathbb{Z}) = |vx_n - k_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

On en déduit $|vx_n - ux_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, et donc finalement $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

b) Soit un réel $\varepsilon > 0$. Posons $F_p = \{x \in \mathbb{R}_+^*, (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p)\ |f(nx)| \leq \varepsilon\}$; l'application f étant continue, cet ensemble est un fermé (intersection d'une famille de fermés) de $\mathbb{R}_+^*$. D'après l'hypothèse, pour tout x réel > 0 on peut trouver un entier p tel que $\forall n \geq p,\ |f(nx)| \leq \varepsilon$, autrement dit, $\bigcup_p F_p = \mathbb{R}_+^*$.

L'espace $\mathbb{R}_+^*$ étant un ouvert d'un espace métrique complet, est un ouvert d'un espace de Baire, donc est lui-même un espace de Baire. L'ensemble $\bigcup_p \mathrm{Int}_{\mathbb{R}_+^*}(F_p)$ est donc partout dense dans $\mathbb{R}_+^*$, et a fortiori non vide. Il existe donc un entier p, et deux réels u et v, tels que $0 < u < v$ et $[u, v] \subset F_p$.

Posons $G_p = \bigcup_{n \geq p} [nu, nv]$, on voit que $\forall y \in G_p,\ |f(y)| \leq \varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à prouver que G_p est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.

Posons $I_n = [nu, nv]$; si $(n+1)u \leq nv$, soit $n \geq \dfrac{u}{v-u}$, les intervalles I_n et I_{n+1} se coupent. Si N est un entier tel que $N \geq p$ et $N \geq \dfrac{u}{v-u}$, il est clair que $G_N = \bigcup_{n \geq N} I_n$ est un intervalle non borné inclus dans G_p. L'ensemble G_p est donc bien un voisinage de $+\infty$.

Nous avons démontré que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existait un voisinage V de $+\infty$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall y \in V,\ |f(y)| \leq \varepsilon$. C'est-à-dire $f(y) \underset{y\to+\infty}{\to} 0$.

c) Théorème de Corominas. Nous noterons $E = [a, b]$, c'est un espace métrique complet, donc un espace de Baire.

1.1) Pour tout n entier, posons $T_n = \{x \in E,\ f^{(n)}(x) = 0\}$, puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, c'est un fermé de E. D'après l'hypothèse, $\bigcup_n T_n = E$; comme E est un espace de Baire, nous pouvons en déduire que l'ensemble $U = \bigcup_n \mathrm{Int}_E(T_n)$ est un ouvert partout dense dans E.

On peut remarquer ici que si x est intérieur à T_n relativement à E, la fonction $f^{(n)}$ est identiquement nulle sur un intervalle I voisinage de x relativement à E, et par conséquent la fonction $f^{(n+1)}$ est identiquement nulle sur I. On peut en déduire que x est aussi intérieur à T_{n+1} relativement à E. La suite $(\mathrm{Int}_E(T_n))$ est donc une suite croissante d'ouverts de E.

1.2) Pour tout x élément de U, il existe un entier n tel que $x \in \mathrm{Int}_E(T_n)$, et donc un intervalle I voisinage de x dans E sur lequel f coïncide avec un polynôme de degré $< n$. Considérons l'application $x \mapsto P_x$, $U \to \mathbb{R}[X]$, qui à x élément de U fait correspondre le polynôme qui coïncide avec f au voisinage de x dans E ; cette application est localement constante sur U et par conséquent constante sur chaque intervalle inclus dans U. C'est une propriété générale des connexes et en particulier des intervalles. Pour chaque intervalle inclus dans U, il existe donc un polynôme qui coïncide avec f sur cet intervalle.

Si $U = E$, alors f est polynomiale sur E. Montrons par l'absurde qu'il ne peut pas en être autrement.

2.1) Notons $L = E \setminus U$, ensemble que nous supposons non vide ; c'est un fermé de E. Montrons que tous les éléments de L sont points d'accumulation de L. En effet, si un élément l de L était isolé, il existerait un réel $\alpha > 0$, tel que les intervalles $]l-\alpha, l[\cap[a,b]$ et $]l, l+\alpha[\cap[a,b]$ soient inclus dans U. Si l n'est ni a, ni b, ces deux intervalles sont non vides. L'application f coïncide alors avec un polynôme P sur le premier et Q sur le second. Les dérivées à tous ordres des polynômes P et Q , et de f coïncident en l. Les polynômes P et Q sont donc identiques (formule de Taylor en l). Si n est (ou majore) le degré de ce polynôme, l'application $f^{(n+1)}$ est identiquement nulle sur $]l-\alpha, l+\alpha[\cap[a,b]$, cela implique que $l \in \mathrm{Int}_E(T_{n+1}) \subset U$, ce qui est contradictoire. Si l est l'une des bornes a ou b, par exemple a, l'application f coïncide avec le polynôme Q sur $]a, a+\alpha[\cap[a,b]$ donc sur $[a, a+\alpha[\cap[a,b]$; si n est le degré de Q, on vérifie que $f^{(n+1)}$ est identiquement nulle sur le voisinage $[a, a+\alpha[\cap[a,b]$ de a dans E, et donc que $a \in U$, ce qui contredit l'hypothèse.

2.2) L'ensemble L est un fermé de E, espace métrique complet , c'est donc un espace métrique complet, donc un espace de Baire.

Posons pour tout n entier $L_n = L \cap T_n$, c'est un fermé de L puisque T_n est un fermé de E. Comme $E = \bigcup_n T_n$, on voit que $L = \bigcup_n L_n$; puisque L est un espace de Baire, l'ensemble $\bigcup_n \mathrm{Int}_L(L_n)$ est un ouvert partout dense relativement à L, donc non vide. Il existe donc un entier n tel que $\mathrm{Int}_L(L_n) \neq \varnothing$. Soit z un élément de $\mathrm{Int}_L(L_n)$, l'ensemble $\mathrm{Int}_L(L_n)$ est un voisinage de z dans L, il est donc la trace sur L d'un voisinage V de z dans E. Il existe donc un intervalle J voisinage ouvert (relativement à E) de z dans E , tel que $A = J \cap L \subset L_n$ (A est non vide car c'est un voisinage de z dans L).

2.3) D'après 2.1) tout élément z de A est point d'accumulation d'éléments de L. Si (t_k) est une suite strictement monotone d'éléments de L qui converge vers z, comme $J \cap L$ est un voisinage de z dans L, il existe un rang N tel que $(\forall k \geq N)\ t_k \in J \cap L \subset L_n$. On peut donc supposer que la suite (t_k) est à valeurs dans L_n. En appliquant le lemme de Rolle entre t_k et t_{k+1}, on voit qu'il existe un élément u_k de T_{n+1} strictement entre t_k et t_{k+1}. La suite (u_k) converge de manière strictement monotone vers z ; l'élément z est donc dans T_{n+1}, et est point d'accumulation de T_{n+1}. On en déduit de même que pour tout entier $m \geq n$, z est élément de T_m et point d'accumulation de T_m.

2.4) L'ensemble $J \cap U$ est un ouvert de E. Si $z \in J \cap U$, on appellera composante connexe de z dans $J \cap U$, l'union des intervalles contenant z, inclus dans $J \cap U$. C'est un intervalle et on voit que ses bornes sont bornes de J ou éléments de $L \cap J = A$. Mais chaque composante connexe a au moins une borne qui est dans A, sinon $L \cap J$ serait vide. La fonction f est polynomiale sur chaque composante connexe de $J \cap U$; montrons qu'elle coïncide sur cette composante connexe avec un polynôme degré $< n$ (éventuellement nul), en effet, dans le cas contraire, si p était le degré de ce polynôme, $p \geq n$, la fonction $f^{(p)}$ serait constante non nulle sur la composante connexe, donc non nulle aux bornes de la composante connexe, dont l'une est élément de A ; cela contredirait le point 2.3). La fonction $f^{(n)}$ est donc nulle en tout élément de J, qu'il soit élément de $A = J \cap L \subset L_n$, ou de U ; donc $J \subset T_n$, et comme J est ouvert relativement à E, $J \subset \mathrm{Int}_E(T_n) \subset U$; cela contredit $L \cap J$ non vide.

3) L'ensemble L est donc vide, et la conclusion donnée à la fin du 1) s'applique : f est polynomiale sur E.

§ XI.3 *CONNEXITÉ*

Exercice 6 :

a) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points qui ont coordonnée irrationnelle est connexe.

> b) Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple très simple de parties A et B homéomorphes telles que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ soit connexe et $\mathbb{R}^2 \setminus B$ ne le soit pas. ■

a) Notons E l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ dont une des coordonnées est irrationnelle. Prouvons que E est connexe par arcs, en montrant qu'on peut relier tout élément de E à l'élément particulier $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ par une ligne brisée incluse dans E.

Si $(x, y) \in E$ et si x est irrationnel, on peut utiliser la ligne brisée constituée du segment d'origine $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et d'extrémité $(x, \sqrt{2})$, et du segment d'origine $(x, \sqrt{2})$ et d'extrémité (x, y).

Si $(x, y) \in E$ et si y est irrationnel, on peut utiliser la ligne brisée constituée du segment d'origine $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et d'extrémité $(\sqrt{2}, y)$ et du segment d'origine $(\sqrt{2}, y)$ et d'extrémité (x, y).

b) Les sous-espaces $A =]0,1[\times \{0\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes. Il est facile de voir que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe par arcs. La partie $\mathbb{R}^2 \setminus B$ ne l'est pas, car l'image de $\mathbb{R}^2 \setminus B$ par l'application continue $(x, y) \mapsto y$, de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, est $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe (ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$).

Exercice 7 :

> Soit (E, d) un espace métrique compact tel que :
> $$(\forall x \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+^*) \quad \mathrm{Adh}(\mathrm{B}(x, r)) = \tilde{\mathrm{B}}(x, r).$$
> Montrer que toute boule ouverte de (E, d) est connexe. ■

Supposons que $\mathrm{B}(x, r) = A \cup B$ où A et B sont des fermés disjoints non vides de $\mathrm{B}(x, r)$, et $x \in A$. Soit x_1 un élément de B, posons $r_1 = d(x, x_1)$, de telle sorte que $r_1 < r$. Posons $K = B \cap \tilde{\mathrm{B}}(x, r_1)$. Comme $\tilde{\mathrm{B}}(x, r_1)$ est une partie compacte de E incluse dans $\mathrm{B}(x, r)$, donc une partie compacte de $\mathrm{B}(x, r)$, et que B est une partie fermée de $\mathrm{B}(x, r)$, la partie K est une partie compacte (propriété intrinsèque), non vide puisque $x_1 \in K$. L'application continue $z \mapsto d(x, z)$, $K \to \mathbb{R}$, est minorée et atteint son minimum r_2, en $x_2 \in B \cap \tilde{\mathrm{B}}(x, r_1) = K$; donc $x_2 \neq x$ et $0 < r_2 \leq r_1 < r$. La boule ouverte $\mathrm{B}(x, r_2)$, qui est incluse dans $\tilde{\mathrm{B}}(x, r_1)$ et ne contient aucun élément de K, est nécessairement incluse dans A.
D'après l'hypothèse :

(1) $\quad \mathrm{Adh}_E(\mathrm{B}(x, r_2)) \cap \mathrm{B}(x, r) = \tilde{\mathrm{B}}(x, r_2) \cap \mathrm{B}(x, r) = \tilde{\mathrm{B}}(x, r_2)$.

Comme la partie A est une partie fermée de $\mathrm{B}(x, r)$ contenant [illegible] contient l'adhérence dans $\mathrm{B}(x,r)$ de $\mathrm{B}(x,r_2)$, c'est-à-dire, d'après (1), $\tilde{\mathrm{B}}(x,r_2)$; donc $x_2 \in A$, ce qui est contradictoire, puisque $x_2 \in B$ et $A \cap B = \varnothing$

La boule $\mathrm{B}(x,r)$ est donc connexe.

Comme l'adhérence d'une partie connexe est connexe, les boules fermées sont aussi connexes.

Exercice 10 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 2$. Soit $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces affines de E de codimension ≥ 2. Montrer que l'ensemble $R = E \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \right)$ est connexe par arcs. ■

Montrons que deux éléments de R peuvent toujours être reliés par une ligne brisée constituée de deux segments de droite ; cela démontrera que R est connexe par arcs.

Nous utiliserons ici quelques propriétés élémentaires de géométrie affine, et le théorème de Baire (§ XI.2 exercice 20).

Soient a et b éléments de R. Pour tout k entier, soit H_k un hyperplan affine qui contient a, et soit F_k $(a \notin F_k)$ sous-espace affine de codimension ≥ 2 ; soit de même L_k un hyperplan affine qui contient b et F_k. Un hyperplan affine H de E est fermé car on peut le définir par une équation affine, et il est d'intérieur vide car une droite D dont la direction n'est pas incluse dans celle de H, le coupe suivant un seul point ; c'est donc une partie *rare*.

L'ensemble $M = \left(\bigcup H_k\right) \cup \left(\bigcup L_k\right)$, réunion dénombrable de parties rares, est donc une partie *maigre* de E. Comme E est un espace métrique complet, c'est un espace de Baire ; la partie M est donc d'intérieur vide, et son complémentaire est partout dense dans E, donc certainement non vide. On peut donc trouver un élément c de E qui n'est pas dans M (on peut même trouver un tel élément dans tout voisinage de a).

Le segment de droite S, d'origine a et d'extrémité c, ne peut couper l'un des sous-espaces F_k : sinon soit d un élément de $S \cap F_k$, a et d sont des éléments distincts de H_k, donc $S \subset H_k$, d'où $c \in H_k$, ce qui est exclu. Le segment S est donc inclus dans R. On démontre de même que le segment S' d'origine c et d'extrémité b est inclus dans R. On a donc bien démontré l'existence d'une ligne brisée qui relie a et b en restant dans R, ce qu'il fallait démontrer.

Pour préparer l'exercice suivant, remarquons qu'on peut trouver une telle ligne brisée dans tout convexe ouvert O qui contient a et b : il suffit de c
c dans une boule ouverte de centre a, incluse dans O.

Exercice 11 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 2$ et U un domaine de E. Si $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces affines de E de codimension ≥ 2, alors $R = U \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \right)$ est connexe par arcs. ■

D'après la remarque faite à la fin de la résolution de l'exercice précédent, la proposition est vraie dans le cas où U est un convexe ouvert.

Remarquons aussi que l'ensemble R est partout dense dans U. En effet, l'ensemble $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$, union dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides (donc rares), est maigre. D'après le théorème de Baire, il est d'intérieur vide relativement à E. Son complémentaire dans E est partout dense dans E. Comme U est ouvert, l'ensemble R est partout dense dans U.

Soit a un élément de R, et soit C l'ensemble des éléments de R qui peuvent être reliés à a par une ligne brisée incluse dans R. Montrons que l'adhérence de C dans U, que nous notons D, est aussi un ouvert de U, donc égal à U (elle contient a donc n'est pas vide, et U est connexe).

Soit $x_0 \in D$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, \alpha) \subset U$, la boule ouverte $O = \mathrm{B}(x_0, \alpha)$ étant un voisinage de x_0 dans U, contient un élément a' de C. Pour tout élément x de O, et tout voisinage V de x dans U, l'ensemble $V \cap O$ coupe R en au moins un élément b (R est partout dense dans U). Les éléments b et a' peuvent être reliés dans le convexe ouvert O par une ligne brisée incluse dans R ; on peut donc relier b et a par une ligne brisée incluse dans R , donc $b \in C$. Nous avons donc démontré que tout élément x de O était aussi élément de $D = \mathrm{Adh}_U(C)$. Cela prouve que D est un ouvert de U. Nous pouvons en déduire comme annoncé que C est partout dense dans U.

Soit alors un élément $x_0 \in R$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\mathrm{B}(x_0, \alpha) \subset U$. La boule ouverte $O = \mathrm{B}(x_0, \alpha)$ étant un voisinage de x_0 dans U, contient un élément a' de C. Comme O est un convexe ouvert, il existe une ligne brisée incluse dans $O \cap R$ qui relie x_0 et a'. Il existe donc une ligne brisée qui relie x_0 et a, donc $x_0 \in C$. Nous en déduisons $C = R$.

L'ensemble R est donc connexe par arcs.

Exercice 12 :

> Soit X un espace topologique connexe et F un fermé (
> est connexe, montrer que F est connexe. ■

Supposons que $F = A \cup B$ avec A et B fermés de F disjoints ; comme F est une partie fermée, $\mathrm{Fr}(F) \subset F$, d'où :

$$\mathrm{Fr}(F) = (\mathrm{Fr}(F) \cap A) \cup (\mathrm{Fr}(F) \cap B).$$

Les parties $\mathrm{Fr}(F) \cap A$ et $\mathrm{Fr}(F) \cap B$ de $\mathrm{Fr}(F)$ sont des fermés de $\mathrm{Fr}(F)$ disjoints ; comme $\mathrm{Fr}(F)$ est connexe, l'une d'elles est vide. Supposons par exemple que $\mathrm{Fr}(F) \cap A = \varnothing$, alors A est une partie de F disjointe de $\mathrm{Fr}(F) = \mathrm{Adh}(F) \cap (E \setminus \mathrm{Int}(F)) = F \setminus \mathrm{Int}(F)$, donc incluse dans $\mathrm{Int}(F)$. Comme A est un partie fermée de F, et que F est une partie fermée de X, la partie A est un fermé de X ; mais comme A est une partie ouverte de F, c'est une partie ouverte de $\mathrm{Int}(F)$, donc une partie ouverte de X (puisque $\mathrm{Int}(F)$ est une partie ouverte de X). La partie A de X étant à la fois ouverte et fermée dans X , espace connexe, est donc vide, ou égale à X. Dans le deuxième cas, $F = X$ et $B = \varnothing$. L'une des parties A ou B est donc vide.

L'ensemble F est donc connexe.

Exercice 13 :

> Dans un espace topologique E, soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts connexes non vides décroissante pour l'inclusion. Montrer que $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n$ est non vide, compact et connexe. ■

On sait que l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides est un compact non vide. Il reste donc à montrer qu'il s'agit d'un connexe.

Supposons que $L = A \cup B$ où A et B sont des parties fermées de L disjointes. Comme L est un compact, les parties A et B sont compactes. Il existe donc deux ouverts de E, U et V disjoints, tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (cf. §XI.1 exercice 1). L'ensemble $F = E \setminus (U \cup V)$ est un fermé de E ; la famille $(F \cap L_n)$ est donc une suite décroissante pour l'inclusion, de parties compactes d'intersection $F \cap L = \varnothing$. Il existe donc un entier n tel que $F \cap L_n = \varnothing$, soit encore $L_n \subset U \cup V$. Nous pouvons alors écrire $L_n = (L_n \cap U) \cup (L_n \cap V)$. La partie connexe L_n est donc réunion disjointe de deux parties, $L_n \cap U$ et $L_n \cap V$, qui sont des ouverts relativement à L_n ; l'une d'elles est donc vide. Si par exemple $L_n \cap U = \varnothing$, alors comme $A \subset L_n \cap U$, la partie A est vide. L'une des parties A ou B est donc vide.

L'ensemble L est donc connexe.

L'hypothèse de compacité est indispensable ; il suffit pour le voir de considérer la suite des intervalles $L_n = [\, n, +\infty [$ de $\mathbb{R}$, dont l'intersection est vide.

Exercice 14 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $p \geq 1$. On donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E bornée, telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0_E$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est non vide, compact et connexe. ■

Comme la suite (u_n) est bornée et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, elle a au moins une valeur d'adhérence. Soit C une partie fermée et bornée de E (donc compacte) qui contient tous les termes de la suite (u_n). L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est une partie fermée non vide incluse dans C, donc compacte et non vide. Il reste donc à montrer qu'il s'agit d'une partie connexe. Notons K l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n), et d la distance (provenant d'une norme) sur E.

Supposons que $K = A \cup B$ où A et B sont des parties fermées, disjointes, non vides, de K. Comme K est un compact, les parties A et B sont compactes. Posons :

$$\alpha = d(A,B) = \inf_{x\in A,\, y\in B} d(x,y) = \inf_{x\in A} d(x,B) = \inf_{y\in B} d(A,y).$$

Comme A et B sont compactes (non vides), et que l'application $(x,y) \mapsto d(x,y)$, $A\times B \to \mathbb{R}$ est continue, sa valeur minimum sur le compact $A\times B$ est atteinte, donc $\alpha > 0$.

L'ensemble $\{n \in \mathbb{N}, d(K,u_n) \geq \alpha/3\}$ est fini, sinon la suite (u_n) aurait une valeur d'adhérence l telle que $d(K,l) \geq \alpha/3$, ce qui est exclu.

Comme d'autre part $d(u_n,u_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut trouver un entier N tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N)\ \ d(K,u_n) < \alpha/3 \text{ et } d(u_n,u_{n+1}) < \alpha/3.$$

Il est clair que $d(K,u_n) = d(A\cup B,u_n) = \inf(d(A,u_n), d(B,u_n))$. Supposons par exemple que $d(A,u_N) < \alpha/3$, alors $d(A,u_{N+1}) < 2\alpha/3$. Il est impossible que $d(B,u_{N+1}) < \alpha/3$, cela contredirait $d(A,B) = \alpha$, mais comme $d(K,u_{N+1}) < \alpha/3$, cela prouve que $d(A,u_{N+1}) < \alpha/3$. On voit par récurrence que dans ce cas :$(\forall n \geq N)\ \ d(A,u_n) < \alpha/3$. De même, si $d(B,u_N) < \alpha/3$, alors $(\forall n \geq N)\ \ d(B,u_n) < \alpha/3$. Dans le premier cas, les valeurs d'adhérence de la suite (u_n) sont toutes dans A, dans le second toutes dans B. L'une des parties A ou B est donc vide ; cela contredit l'hypothèse initiale (A et B non vides, qui nous a permis de définir $d(A,B)$).

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est donc cor

Exercice 23 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. On note
> $$\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) = \{ M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0 \}.$$
> a) Montrer que $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe connexe par arcs de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (on utilisera la décomposition d'une matrice $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en produit de matrices de transvections et de dilatations (cf. Tome 1, Chap. XI) pour joindre par un chemin continu $M \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ à I_n.
> b) En déduire quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; vérifier que ce sont des ouverts de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.
> c) Montrer par la même méthode que $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs, ce qui a déjà été proposé autrement dans l'exercice 16. ■

Soit K un corps commutatif qui est dans la suite le corps $\mathbb{R}$, ou le corps $\mathbb{C}$. Notons comme dans le Tome 1, Chap. XI, $E_{i,j}$, où i et j sont deux entiers entre 1 et n, la matrice carrée élément de $\mathcal{M}_n(K)$ dont tous les termes sont nuls sauf le terme de ligne i et de colonne j qui vaut 1. On sait que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}^2}$ est une base du K-ev $\mathcal{M}_n(K)$. Notons aussi $D_n(\lambda)$, où $\lambda \in K^*$, la matrice $\sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i} + \lambda E_{n,n}$. Les matrices $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, où i et j sont des entiers distincts entre 1 et n, et $\lambda \in K^*$, sont les matrices de transvection. On démontre dans le théorème XI.5.1 du Tome 1 que tout élément M de $\mathrm{GL}(n,K)$ peut s'écrire sous la forme :

$$M = D_n(\lambda) T_1 T_2 \cdots T_r,$$

où $\lambda \in K^*$ et où $T_1, T_2, \cdots, T_r$ sont des matrices de transvection. Comme les matrices de transvection sont de déterminant égal à 1, et que $\det(D_n(\lambda)) = \lambda$, on voit que nécessairement $\lambda = \det(M)$.

Soit M un élément de $\mathrm{GL}(n,K)$, montrons qu'on peut joindre par un chemin continu inclus dans $\mathrm{GL}(n,K)$, la matrice M à la matrice $D_n(\det(M))$.

Soit M un élément de $\mathrm{GL}(n,K)$, qui s'écrit :

$$M = D_n(\det(M)) T_1 T_2 \cdots T_r,$$

où $T_1, T_2, \cdots, T_r$ sont des matrices de transvection. Pour tout t réel entre 0 et 1, notons :

$$M(t) = D_n(\det(M))\left(I_n + t(T_1 - I_n)\right)\left(I_n + t(T_2 - I_n)\right)\cdots\left(I_n + t(T_r - I_n)\right).$$

L'application $t \mapsto M(t)$ est continue et $\det(M(t))$ est visiblement constant, égal à $\det(M)$. On vérifie que $M(0) = D_n(\det(M))$ et $M(1) = M$.

a) Soit M un élément de $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, d'après ce qui précède, on peut joindre M à $D_n(\det(M))$ par un chemin continu dans $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$.

L'application $t \mapsto D_n(t\det(M)+(1-t))$, définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, est un chemin continu d'origine I_n et d'extrémité $D_n(\det(M))$, qui reste dans $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$.

Nous pouvons en déduire que $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

b) Notons :

$$\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})=\left\{M\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(M)<0\right\}.$$

En utilisant la même méthode que ci-dessus, on voit que tout élément de $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ peut être joint par un chemin continu dans $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ à $D_n(-1)$. L'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a donc au plus deux composantes connexes, celle de $I_n=D_n(1)$ et celle de $D_n(-1)$. Or l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe : l'image de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ par l'application continue $M\mapsto\det(M)$ est $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ (ce n'est pas un intervalle). L'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a donc exactement deux composantes connexes, qui sont aussi connexes par arcs.

Comme l'application $M\mapsto\det(M)$ est continue, l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$, qui est $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$, et l'image réciproque de $\mathbb{R}_-^*$, qui est $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$, sont des ouverts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) Tout élément M de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ peut être joint par un chemin continu dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ à $D_n(\det(M))$. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, il est clair qu'on peut joindre par un chemin continu dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, la matrice $D_n(\lambda)$, où $\lambda\in\mathbb{C}^*$, à $D_n(1)=I_n$. L'espace $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est donc connexe par arcs.

Exercice 28 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et Ω un ouvert de E. Montrer que l'ensemble des composantes connexes de Ω est au plus dénombrable.
> Ce résultat demeure-t-il vrai si E n'est pas supposé de dimension finie ? ■

Supposons uniquement que E soit un $\mathbb{R}$-evn. Tout point x de E a une base de voisinages connexes : les boules ouvertes de centre x. Si $x\in\Omega$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que $B(x,\alpha)\subset\Omega$, comme $B(x,\alpha)$ est connexe, la composante connexe de x contient cette boule ouverte. Les composantes connexes de Ω sont donc ouvertes, relativement à E, et ouvertes et fermées relativement à Ω.

Supposons que l'espace E soit séparable, il existe alors dans F [illegible] dénombrable partout dense. La partie D coupe toute composante co l'ensemble des composantes connexes de Ω est donc au plus dénombrable. C'est le cas si E est de dimension finie : l'ensemble des points à coordonnées rationnelles dans une base fixée de E est dénombrable partout dense. Cela répond à la première question.

Le lecteur pourra se référer, pour la notion de séparabilité, aux exercices 1 et 2 du § X.2.

Supposons qu'on puisse trouver dans l'espace E une famille non dénombrable $(B_i)_{i\in I}$ de boules ouvertes disjointes. Montrons que l'ouvert $\Omega = \bigcup_{i\in I} B_i$ a pour composantes connexes les boules ouvertes B_i et a donc un ensemble non dénombrable de composantes connexes.

Si C est la composante connexe contenant B_{i_0}, les ensembles $C\cap B_{i_0}$ et $C\cap\left(\bigcup_{i\neq i_0} B_i\right)$ sont des ouverts de C qui sont complémentaires dans C. Comme C est connexe, l'un d'eux est vide ; c'est évidemment $C\cap\left(\bigcup_{i\neq i_0} B_i\right)$. Donc $C = B_{i_0}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il ne reste plus, pour répondre à la deuxième question, qu'à exhiber (dans un espace non séparable) une famille non dénombrable de boules ouvertes disjointes.

Prenons pour espace E l'espace des suites bornées à valeurs réelles, muni de la norme uniforme. Soit I l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$; si $s\in I$, notons $B_s = \mathrm{B}(s,1/2)$. Montrons que les boules ouvertes $(B_s)_{s\in I}$ sont disjointes. Si s et s' sont deux suites distinctes éléments de I, il existe un entier p tel que $s(p)\neq s'(p)$, donc $|s(p)-s'(p)|=1$. Pour toute suite bornée σ, il est impossible qu'à la fois $|s(p)-\sigma(p)|<1/2$ et $|s'(p)-\sigma(p)|<1/2$. Les boules ouvertes B_s et $B_{s'}$ sont donc disjointes. L'ensemble I n'est pas dénombrable, il est équipotent à l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, donc équipotent à $\mathbb{R}$.

Cela répond à la deuxième question.

§ XI.4 *SÉRIES DANS UN EVN*

Exercice 7 :

Soit L le compact $[0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$. On donne $f : L\to\mathbb{R}$ continue telle que $\underset{x\in L}{\mathrm{Max}}(|f(x)|)<1$. On note E le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{C}^0([0,1$

v_∞ est la norme uniforme. Soit $\Phi : E \to E$ ainsi définie : si $h \in E$,

$$(\forall t \in [0,1]) \ \ (\Phi(h))(t) = h(t) + \int_0^1 f(t,u)h(u)\mathrm{d}u.$$

a) Justifier que Φ est bien définie.

b) Montrer que Φ est un homéomorphisme de E sur E.

a) Pour tout $h \in E$ et tout $t \in [0,1]$ fixés, l'application $u \mapsto f(t,u)h(u)$, $[0,1] \to \mathbb{R}$, est continue, donc $(\Phi(h))(t)$ existe. Comme l'application f est continue et bornée, le théorème VIII.5.1. (continuité d'une intégrale simple dépendant d'un paramètre) nous permet d'affirmer que pour tout $h \in E$, $\Phi(h)$ est continue. L'application Φ est donc bien à valeurs dans E.

Nous pouvons remarquer que Φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de E dans E.

b) Nous pouvons écrire $\Phi = Id + \Psi$, où l'application linéaire Ψ est ainsi définie : si $h \in E$,

$$(\forall t \in [0,1]) \ \ (\Psi(h))(t) = \int_0^1 f(t,u)h(u)\mathrm{d}u.$$

Notons $M = \operatorname*{Max}_{x \in L}(|f(x)|) < 1$, et montrons que Ψ est linéaire continue, de norme $\leq M$.

Pour tout $t \in [0,1]$, et tout $h \in E$:

$$\left|\int_0^1 f(t,u)h(u)\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^1 M\, v_\infty(h)\mathrm{d}u = M\, v_\infty(h),$$

donc $v_\infty(\Psi(h)) \leq M\, v_\infty(h)$. L'application linéaire Ψ est donc continue de norme $\leq M$. L'application linéaire $\Phi = Id + \Psi$ est donc continue.

Nous savons que l'espace E est un espace de Banach (§ XI.2 exemple 4). L'algèbre des endomorphismes linéaires continus de E , $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$, muni de la norme $|||.|||$, est une algèbre normée (théorème X.6.4.), et il découle du théorème XII.1.4 que c'est une algèbre de Banach. On voit alors que la série $\sum_0^\infty (-1)^n \Psi^n$ est absolument convergente dans $(\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E),\ |||.|||\ )$, puisque $|||\Psi||| < 1$. La somme de cette série est visiblement l'inverse de $\Phi = Id + \Psi$.

L'application linéaire continue Φ est donc bijective et sa réciproque est continue. C'est un homéomorphisme linéaire.

§ XI.5 *DÉRIVATION DES FONCTIONS À VALEURS DANS UN K-EVN*

Exercice 2 :

On donne $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une application continue $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui est en même temps un homomorphisme de groupes, i.e. $\left(\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2\right)\ \Phi(t+u) = \Phi(t)\Phi(u)$.

On note $\Phi(t) = \left[a_{i,j}(t)\right]_{(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tous réels t_1, t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[\int_{t_1}^{t_2} a_{i,j}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_{(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2}.$$

a) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ t \mapsto \int_0^t \Phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ est dérivable et $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = \Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour t assez petit et $t \neq 0$, $F(t) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

b) On choisit α réel > 0 tel que $F(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, montrer que :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \ \Phi(t) = \left(F(\alpha)^{-1}\right)\left(F(t+\alpha) - F(t)\right)\ ;$$

en déduire que Φ est dérivable.

c) On pose $M_0 = \Phi'(0)$. Prouver :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \ \Phi'(t) = M_0\,\Phi(t) = \Phi(t) M_0.$$

En considérant $f(t) = \Phi(t)\exp(-t M_0)$, en déduire $(\forall t)\ \ \Phi(t) = \exp(t M_0)$. ■

a) Le théorème X I.5.2 nous permet de dériver coordonnée par coordonnée dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application F est donc bien dérivable de dérivée Φ. On obtient en particulier $F'(0) = \Phi(0) = I_n$; donc, puisque $F(0) = 0$, $\frac{1}{t}F(t) \underset{t \to 0,\, t \neq 0}{\longrightarrow} I_n$.

Comme l'application $M \mapsto \det(M)$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$, est continue,

$$\det\left(\frac{1}{t}F(t)\right) \underset{t \to 0,\, t \neq 0}{\longrightarrow} \det(I_n) = 1.$$

Nous en déduisons qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $(\forall t, 0 < |t| < \varepsilon)\ \det\left(\frac{1}{t}F(t)\right) > 0$, donc $(\forall t, 0 < |t| < \alpha)\ F(t) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

b) Pour tout t réel, en dérivant par rapport à u la fonction :

$$g(u) = F(t+u) - F(u)\Phi(t),$$

(dérivation d'un produit : théorème X I.5.1, le deuxième facteur étant ici constant) on trouve :

$$g'(u) = \Phi(t+u) - \Phi(u)\Phi(t) = 0.$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$, (toutes ses coordonnées ont une dérivée nulle donc sont constantes sur $\mathbb{R}$) égale à sa valeur en 0. Nous en déduisons :

$$\left(\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2\right)\ F(t+u) - F(u)\Phi(t) = F(t),$$

et en particulier :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ F(t+\alpha) - F(t) = F(\alpha)\Phi(t).$$

Nous en déduisons :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ \Phi(t) = \left(F(\alpha)^{-1}\right)\left(F(t+\alpha) - F(t)\right).$$

Comme F est dérivable, l'application $t \mapsto \Phi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (théorème X I.5.1).

c) Pour tout t réel fixé, en dérivant par rapport à u l'identité :

$$(\forall u \in \mathbb{R})\ \Phi(t+u) = \Phi(t)\Phi(u) = \Phi(u)\Phi(t),$$

nous obtenons :

$$(\forall u \in \mathbb{R})\ \Phi'(t+u) = \Phi(t)\Phi'(u) = \Phi'(u)\Phi(t).$$

En particulier pour $u = 0$, et pour tout t réel :

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\Phi'(0) = \Phi'(0)\Phi(t).$$

En utilisant le théorème X I.5.7 qui nous permet de dériver l'exponentielle, nous obtenons :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\ f'(t) = \Phi'(t)\exp(-tM_0) - \Phi(t)M_0\exp(-tM_0) =$$

$$= \Phi'(t)\exp(-tM_0) - \Phi'(t)\exp(-tM_0) = 0\,\cdot$$

L'application f est donc constante sur $\mathbb{R}$; sa valeur est $f(0) = \Phi(0)\exp(0M_0) = I_n$. On voit donc que :

$(\forall t \in \mathbb{R})\ f(t) = \Phi(t)\exp(-tM_0) = I_n$, d'où $(\forall t \in \mathbb{R})\ \Phi(t) = \exp(tM_0)$.

Exercice 3 :

> Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geq 1$. On donne une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ telle que, pour tout réel t, $f(t)$ possède n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$, $(\lambda_i(t))_{1\leq i\leq n}$, telles que $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \cdots < \lambda_n(t)$.
>
> a) Montrer que chaque fonction $\lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
>
> b) Montrer qu'il existe n fonctions $V_1, V_2, \cdots, V_n : \mathbb{R} \to E$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que, pour tout réel t, $V_i(t)$ soit un vecteur propre de $f(t)$ pour la valeur propre $\lambda_i(t)$. ■

a) Soit $M_t = \left[a_{i,j}(t)\right]_{(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2}$ la matrice de $f(t)$ dans une base fixe $\mathcal{B}$ de E.

Posons :

$$A_{i,j}(t,X) = a_{i,j}(t) \text{ si } i \neq j \text{ et } A_{i,i}(t,X) = a_{i,i}(t) - X.$$

Nous pouvons considérer qu'il s'agit de polynômes en X, à coefficients dans l'anneau des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$.

Le polynôme caractéristique de $f(t)$ est :

$$P_t(X) = \det(M_t - X I_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{\sigma(i),i}(t,X).$$

On voit qu'il s'agit d'un polynôme à coefficients dans l'anneau des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$.

Nous pouvons donc écrire :

$$P_t(X) = b_0(t) + b_1(t) X + \cdots + b_{n-1}(t) X^{n-1} + (-1)^n X^n,$$

où les fonctions $\left(b_j\right)_{j \in \{0,\cdots,n-1\}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. Nous poserons aussi $b_n(t) = (-1)^n$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, démontrons la continuité des fonctions (λ_i) en t_0.

Soit un réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver des réels, $(u_i)_{i \in \{1,\cdots,n\}}$ et $(v_i)_{i \in \{1,\cdots,n\}}$ tels que :

$$u_1 < \lambda_1(t_0) < v_1 < u_2 < \lambda_1(t_0) < \cdots < u_n < \lambda_n(t_0) < v_n,$$

et :

$$(\forall i, 1 \leq i \leq n) \;\; \lambda_i(t_0) - \varepsilon < u_i < \lambda_i(t_0) < v_i < \lambda_i(t_0) + \varepsilon.$$

Les n zéros de $P_{t_0}(X)$ étant tous simples, pour tout i entre 1 et n, les réels $P_{t_0}(u_i)$ et $P_{t_0}(v_i)$ sont non nuls et de signes opposés. Comme les fonctions $t \mapsto P_t(u_i)$ et $t \mapsto P_t(v_i)$ sont continues, il existe un voisinage V de t_0 sur lequel ces fonctions ne prennent pas la valeur 0 et gardent un signe fixe. Donc pour tout i entre 1 et n, et pour tout t dans V, les réels $P_t(u_i)$ et $P_t(v_i)$ sont non nuls de signes opposés ; il existe donc au moins un zéro du polynôme $P_t(X)$ dans chaque intervalle $\left]u_i, v_i\right[$. Ces n intervalles étant disjoints, on obtient ainsi au moins n zéros réels ; mais comme le polynôme $P_t(X)$ est de degré n, on en obtient exactement n. Le polynôme $P_t(X)$ a donc exactement un zéro dans chacun des intervalles $\left]u_i, v_i\right[$. On en déduit que pour tout $t \in V$:

$$u_1 < \lambda_1(t) < v_1 < u_2 < \lambda_2(t) < v_2 < \cdots < u_n < \lambda_n(t) < v_n,$$

donc pour tout $t \in V$, et tout i entre 1 et n : $\left|\lambda_i(t) - \lambda_i(t_0)\right| < \varepsilon$.

Les fonctions (λ_i) sont donc continues en t_0.

Démontrons maintenant la dérivabilité des fonctions (λ_i) en t_0 et calculons leurs dérivées.

Par définition, pour tout i entre 1 et n :

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(t)\lambda_i^j(t) = 0 = \sum_{j=0}^{n} b_j(t_0)\lambda_i^j(t_0).$$

Nous pouvons écrire cela sous la forme :

$$\sum_{j=0}^{n}\big(b_j(t)-b_j(t_0)\big)\lambda_i^j(t) = -\sum_{j=0}^{n} b_j(t_0)\big(\lambda_i^j(t)-\lambda_i^j(t_0)\big) =$$

$$= -\big(\lambda_i(t)-\lambda_i(t_0)\big)\sum_{j=1}^{n} b_j(t_0)\left(\sum_{h=0}^{j-1}\lambda_i^h(t)\lambda_i^{j-h-1}(t_0)\right).$$

La fonction :

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t_0)\left(\sum_{h=0}^{j-1}\lambda_i^h(t)\lambda_i^{j-h-1}(t_0)\right),$$

est continue et :

$$F(t_0) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t_0)\, j\,\lambda_i^{j-1}(t_0) = P_{t_0}'\big(\lambda_i(t_0)\big),$$

est un réel non nul car $\lambda_i(t_0)$ est zéro simple de $P_{t_0}(X)$. Nous pouvons donc écrire dans un voisinage épointé de t_0 :

$$\frac{\lambda_i(t)-\lambda_i(t_0)}{t-t_0} = \frac{-1}{F(t)}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{b_j(t)-b_j(t_0)}{t-t_0}\right)\lambda_i^j(t),$$

donc :

$$\frac{\lambda_i(t)-\lambda_i(t_0)}{t-t_0} \underset{t\to t_0,\, t\neq t_0}{\longrightarrow} \frac{-1}{P_{t_0}'\big(\lambda_i(t_0)\big)}\sum_{j=0}^{n} b_j'(t_0)\lambda_i^j(t_0).$$

Nous en déduisons que la fonction λ_i est dérivable et qu'en tout t réel :

$$(1)\qquad \lambda_i'(t) = \frac{-1}{P_t'\big(\lambda_i(t)\big)}\sum_{j=0}^{n} b_j'(t)\lambda_i^j(t) = -\frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_j'(t)\lambda_i^j(t)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(t)\, j\,\lambda_i^{j-1}(t)}.$$

Il est donc clair que la fonction λ_i est de classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons avoir démontré que les fonctions λ_i, pour i variant de 1 à n sont de classe $\mathscr{C}^h$, où $1 \le h < k$. Comme les fonctions b_j' dans la formule (1) sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, donc de classe $\mathscr{C}^h$, toutes les fonctions qui entrent dans le membre de droite de cette égalité sont de classe $\mathscr{C}^h$; cela prouve que les fonctions λ_i' sont de classe $\mathscr{C}^h$. Les fonctions λ_i sont donc de classe $\mathscr{C}^{h+1}$. Nous pouvons en déduire que les fonctions λ_i, pour i variant de 1 à n, sont de cla

b) Montrons que si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a n valeurs propres distinctes, et si λ est l'une d'elles, la matrice complémentaire de $M-\lambda I_n$ (transposée de la comatrice cf. Tome 1 § XIII.4) est de rang 1, et la droite engendrée par ses vecteurs colonne est E_λ, l'espace propre de M correspondant à la valeur propre λ.

Comme :

$$(M-\lambda I_n)\,{}^t\mathrm{Com}(M-\lambda I_n)=\det(M-\lambda I_n)=0,$$

on voit que les colonnes de la matrice ${}^t\mathrm{Com}(M-\lambda I_n)$ sont dans l'espace propre E_λ associé à la valeur propre λ.

Puisque M a n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ses espaces propres sont tous des droites vectorielles. En particulier E_λ est une droite. Nous pouvons en déduire que la matrice ${}^t\mathrm{Com}(M-\lambda I_n)$ est nulle ou de rang égal à 1.

L'application $V\mapsto(M-\lambda I_n)V$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ a pour noyau le sous-espace E_λ de dimension 1 ; le rang de la matrice $M-\lambda I_n$ est donc $n-1$. Cette matrice a donc au moins un mineur non nul, et par conséquent ${}^t\mathrm{Com}(M-\lambda I_n)$ n'est pas nulle.

La matrice ${}^t\mathrm{Com}(M-\lambda I_n)$ est donc de rang 1, et l'espace engendré par ses vecteurs colonne est E_λ, ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons appliquer ici ce résultat.

Fixons un entier i entre 1 et n. La matrice ${}^t\mathrm{Com}(M_t-\lambda_i(t)I_n)$ est de rang 1, et la droite $D_{i,t}$ engendrée par ses vecteurs-colonne est le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda_i(t)$ de M_t. Comme la fonction λ_i est de classe $\mathscr{C}^k$, on voit que les coefficients de la matrice ${}^t\mathrm{Com}(M_t-\lambda_i(t)I_n)$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Notons $C_1(t),C_2(t),\cdots,C_n(t)$ la famille des vecteurs colonne de cette matrice ; les fonctions $t\mapsto C_j(t)$, $\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont de classe $\mathscr{C}^k$.

En tout t_0 réel, l'une au moins des fonctions C_j n'est pas nulle. Pour j entier entre 1 et n notons $O_j=\{t\in\mathbb{R},C_j(t)\neq 0\}$, c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\bigcup_{j=1}^{n}O_j=\mathbb{R}$.

Soit ν la norme euclidienne naturelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout j entre 1 et n définissons sur O_j la fonction $u_j(t)=\dfrac{1}{\nu(C_j(t))}C_j(t)=\dfrac{1}{\sqrt{C_j(t)\times C_j(t)}}C_j(t)$. Cette fonction est visiblement de classe $\mathscr{C}^k$, elle est à valeur dans la sphère S de centre 0 et de rayon 1, et pour tout $t\in O_j$, $u_j(t)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_i(t)$.

Montrons qu'on peut recoller ces différentes solutions locales, en les multipliant éventuellement par -1, pour obtenir une solution sur $\mathbb{R}$.

Choisissons un vecteur $U_0 \in S$, tel que $M_0 U_0 = \lambda_i(0) U_0$. Si I est un intervalle ouvert contenant 0, notons $\mathcal{R}_I$ l'ensemble des applications $t \mapsto U(t)$ de classe $\mathscr{C}^k$, définies sur I, à valeurs dans S, telles que $(\forall t \in I)\ M_t U(t) = \lambda_i(t) U(t)$ et $U(0) = U_0$. Soit X l'ensemble des réels x tels qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et x, pour lequel $\mathcal{R}_I \neq \varnothing$. Il est évident d'après la définition que X est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'autre part, d'après ce qui précède, X est un voisinage de 0, et n'est donc pas vide.

Montrons que X est aussi un fermé. Soit x adhérent à X ; l'un des ouverts O_j contient x et il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[\subset O_j$. L'intervalle $I_\alpha =]x-\alpha, x+\alpha[$ coupe X en un réel y. Par définition il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et y et une application $t \mapsto U(t)$, élément de $\mathcal{R}_I$. L'ensemble $I_\alpha \cap I$ est un intervalle ouvert non vide car il contient y. Pour tout t dans cet intervalle, les vecteurs unitaires $U(t)$ et $u_j(t)$ sont vecteurs propres de M_t pour la valeur propre $\lambda_i(t)$ donc égaux ou opposés. On peut donc définir une fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$, $I_\alpha \cap I \to \{-1, 1\}$ telle que $(\forall t \in I_\alpha \cap I)\ U(t) = \varepsilon(t) u_j(t)$. La fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$ est continue : on peut écrire par exemple : $\varepsilon(t) = U(t) \times u_j(t)$ (le symbole $\times$ représente le produit scalaire canonique dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$). Elle est donc constante ; notons ε sa valeur .

Nous pouvons définir sur l'intervalle ouvert $I_\alpha \cup I$ une fonction $t \mapsto U_1(t)$, élément de $\mathcal{R}_{I_\alpha \cup I}$, en posant :

$$U_1(t) = U(t) \text{ si } t \in I \text{ et } U_1(t) = \varepsilon u_j(t) \text{ si } t \in I_\alpha,$$

les deux définitions étant cohérentes sur $I_\alpha \cap I$. Comme $x \in I_\alpha \cup I$, on voit que $x \in X$. L'ensemble X est donc bien fermé.

Comme $\mathbb{R}$ est connexe, nous pouvons en déduire que $X = \mathbb{R}$.

Soit maintenant un réel x et (I_1, U_1), (I_2, U_2) deux couples d'un intervalle ouvert I contenant 0 et x, et d'une fonction $U \in \mathcal{R}_I$. Pour tout t dans $I_1 \cap I_2$, intervalle qui contient 0, les vecteurs unitaires $U_1(t)$ et $U_2(t)$ sont égaux ou opposés ; la fonction $t \mapsto U_1(t) \times U_2(t)$, $I_1 \cap I_2 \to \{-1, 1\}$, est continue donc constante, et égale à sa valeur en 0, c'est-à-dire 1. Les fonctions U_1 et U_2 coïncident donc sur $I_1 \cap I_2$, et en particulier en x.

A tout réel x on peut donc faire correspondre le vecteur unitaire $W_i(x)$, vecteur propre de M_x pour la valeur propre $\lambda_i(x)$, qui est la valeur commune de toutes les fonctions $U \in \mathcal{R}_I$, où I est un intervalle ouvert contenant 0 et x. Pour tout réel x, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et x sur lequel la fonction W_i coïncide avec une fonction $U \in \mathcal{R}_I$, qui est de classe $\mathscr{C}^k$; la fonction W_i est donc de classe $\mathscr{C}^k$.

Soit pour tout x réel le vecteur $V_i(x)$ dont le vecteur colonne dans la base $\mathcal{B}$ est $W_i(x)$. L'application $x \mapsto V_i(x)$, $\mathbb{R} \to E$, est de classe $\mathcal{C}^k$ et pour tout x réel, $V_i(x)$ est un vecteur propre de $f(x)$ pour la valeur propre $\lambda_i(x)$. Nous pouvons bien sûr trouver une telle application pour toutes les valeurs de i de 1 jusqu'à n, ce qui répond à la question posée.

Chapitre XII

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

§ XII.1 *GÉNÉRALITÉS*

Exercice 2 :

> On donne $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n):[0,1]\to\mathbb{R}$ donnée par :
>
> $$(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall t\in[0,1])\ f_n(t)=\int_0^t f(x^n)\,\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Pour tout $t\in[0,1]$, nous obtenons la majoration :

$$|f_n(t)-f(0)t|=\left|\int_0^t\big(f(x^n)-f(0)\big)\mathrm{d}x\right|\le\int_0^t\left|f(x^n)-f(0)\right|\mathrm{d}x\le$$

$$\le\int_0^1\left|f(x^n)-f(0)\right|\mathrm{d}x=I_n.$$

Soit M un majorant de la valeur absolue de f sur l'intervalle $[0,1]$; la suite de fonctions continues $g_n:x\mapsto\left|f(x^n)-f(0)\right|$ est uniformément majorée sur $[0,1]$ par $2M$ et converge simplement vers la fonction qui est nulle sur $[0,1[$ et égale à $|f(1)-f(0)|$ en 1. D'après le théorème de convergence dominée, $I_n\underset{n\to\infty}{\to}0$. Nous pouvons en déduire que la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction $t\mapsto f(0)t$.

Exercice 5 :

> Soit X un ensemble infini, et soit H un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension finie du $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. On donne une suite (f_n) d'éléments de H qui converge simplement sur X vers $f:X\to\mathbb{R}$. Prouve

> élément de H et que la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f. ■

Soit p la dimension de H (nous supposerons $p \geq 1$). Pour x élément de X notons δ_x la forme linéaire sur H : $f \mapsto f(x)$. Montrons par récurrence que pour tout entier k entre 1 et p, on peut trouver une famille $x_1, x_2, \cdots, x_k$ d'éléments de X telle que les formes linéaires $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_k}$ soient linéairement indépendantes.

C'est vrai pour $k = 1$, car H contient une fonction non identiquement nulle. Supposons la propriété vraie pour $k < p$, et choisissons dans X des éléments $x_1, x_2, \cdots, x_k$ tels que les formes linéaires $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_k}$ soient linéairement indépendantes. Si pour tout x dans X la forme linéaire δ_x était combinaison linéaire des formes $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_k}$, il existerait des scalaires $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_k(x)$ tels que :

$$\delta_x = \lambda_1(x)\,\delta_{x_1} + \lambda_2(x)\,\delta_{x_2} + \cdots + \lambda_k(x)\,\delta_{x_k},$$

c'est-à-dire, pour tout f dans H :

$$f(x) = f(x_1)\lambda_1(x) + f(x_2)\lambda_2(x) + \cdots + f(x_k)\lambda_k(x).$$

L'espace H serait donc inclus dans un espace de dimension au plus k, celui engendré par les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Il existe donc un élément x_{k+1} de X tel que les formes linéaires $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_{k+1}}$ soient linéairement indépendantes.

La proposition est donc démontrée par récurrence.

Choisissons des éléments $x_1, x_2, \cdots, x_p$ de X tels que les formes linéaires $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \cdots, \delta_{x_p}$ soient linéairement indépendantes, donc forment une base du dual de H. Ce sont les formes linéaires coordonnées dans une certaine base $\mathcal{B}$ de H.

Si (f_n) est une suite d'éléments de H qui converge simplement, alors les suites $f_n(x_i) = \delta_{x_i}(f_n)$, qui sont les suites des coordonnées des fonctions f_n dans la base $\mathcal{B}$, sont convergentes. La suite (f_n) est donc convergente dans le $\mathbb{R}$-ev de dimension finie H .

Notons f sa limite, dans cet espace H, et montrons que f est aussi la limite simple de la suite (f_n). Pour tout x élément de X, il existe des scalaires $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_p(x)$ tels que :

$$\delta_x = \lambda_1(x)\,\delta_{x_1} + \lambda_2(x)\,\delta_{x_2} + \cdots + \lambda_p(x)\,\delta_{x_p},$$

d'où pour tout n entier :

$$f_n(x) = f_n(x_1)\lambda_1(x) + f_n(x_2)\lambda_2(x) + \cdots + f_n(x_p)\lambda_p(x).$$

Nous en déduisons :

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_1)\lambda_1(x) + f(x_2)\lambda_2(x) + \cdots + f(x_p)\lambda_p(x) = f($$

ce qu'il fallait démontrer. La limite simple f de la suite (f_n) est donc un élément de H.

Nous avons vu que la suite (f_n) convergeait vers f dans l'espace de dimension finie H, c'est-à-dire pour toutes les normes (équivalentes entre elles) du $\mathbb{R}$-ev H ; la suite (f_n) converge donc en particulier pour la norme de la convergence uniforme vers f.

Nous en déduisons que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 8 :

> Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) de fonctions : $[0,1] \to \mathbb{R}$ telle que : f_0 est constante de valeur 1, et
> $$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]) \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t. \blacksquare$$

Posons pour tout n entier $g_n = f_{n+1} - f_n$. On voit que pour tout $x \in [0,1]$, $g_0(x) = x$, et que la suite (g_n) est définie par la récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]) \quad g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t.$$

Si g_n est positive, alors g_{n+1} est croissante, donc positive sur $[0,1]$. Comme g_0 est positive, on voit par récurrence que pour tout n entier, g_n est positive et croissante (vrai pour $n = 0$).

Nous en déduisons, pour tout $x \in [0,1]$, la majoration suivante :

$$0 \leq g_{n+1}(x) = \int_0^x g_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t \leq \int_0^x g_n(1/4)\, \mathrm{d}t = x\, g_n(1/4),$$

car $0 \leq t - t^2 = t(1-t) \leq 1/4$ pour tout $t \in [0,1]$.

On obtient pour tout n entier :

$$g_{n+1}(1/4) \leq 1/4\, g_n(1/4),$$

d'où :

$$g_n(1/4) \leq (1/4)^n g_0(1/4) = (1/4)^{n+1}.$$

Donc en définitive pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout n entier :

$$0 \leq g_{n+1}(x) \leq x\, g_n(1/4) = (1/4)^{n+1}.$$

La série de fonctions $\sum g_n$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[0,1]$, et comme pour tout n entier $f_{n+1} = 1 + g_0 + g_1 + \cdots + g_n$, la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[0,1]$ (théorème XII.4.1).

§ XII.2 *CONTINUITÉ ET LIMITES UNIFORMES*

Exercice 2 :

> Soit (E, d)un espace métrique complet et (F, δ) un espace métrique, tous deux non vides. On donne une suite (f_n) de fonctions continues : $E \to F$ qui converge simplement sur E vers $f : E \to F$.
> a) Pour n, p entiers $p \geq 1$, soit :
> $$A_{n,p} = \left\{ x \in E \mid \forall q \geq n, \forall r \geq n, d\big(f_q(x), f_r(x)\big) \leq \frac{1}{p} \right\}.$$
> Prouver : $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ l'ensemble $\Omega_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}\big(A_{n,p}\big)$ est un ouvert dense de E (utiliser l'exercice 20 du § XI.2). En déduire : $D = \bigcap_p \Omega_p$ est une partie dense de E (cf. ibid.) et vérifier que tout point $x \in D$ est point de continuité de f.
> b) Application : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans I. ■

a) Comme la suite (f_n) est simplement convergente sur E, pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy ; pour tout entier $p \geq 1$, on peut donc trouver un entier n tel que :

$$\forall q \geq n, \forall r \geq n, d\big(f_q(x), f_r(x)\big) \leq \frac{1}{p}, \text{ c'est-à-dire : } x \in A_{n,p}.$$

Nous en déduisons que pour tout entier $p \geq 1$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n,p} = E$.

Les fonctions f_n étant continues, les ensembles $A_{n,p}$ sont intersections de familles de fermés , donc fermés. D'après le résultat démontré dans l'exercice 20 e) du § XI.2, l'ouvert $\Omega_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}\big(A_{n,p}\big)$ est partout dense.

Comme l'espace E est un espace de Baire, l'ensemble $D = \bigcap_{p \geq 1} \Omega_p$ est partout dense.

Soit $x_0 \in D$, montrons que la limite simple f de la suite (f_n) est continue en x_0.

Soit un réel $\varepsilon > 0$, choisissons un entier p tel que $\frac{1}{p} < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme $x_0 \in \Omega_p$, x_0 est intérieur à l'un des ensembles $A_{n,p}$, il existe donc un entier n et un réel $\alpha > 0$ tels que $\mathrm{B}(x_0, \alpha) \subset A_{n,p}$, donc a fortiori :

$$\forall x \in E, d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow \left(\forall q \geq n, \forall r \geq n, d\big(f_q(x), f_r(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

En faisant tendre r vers l'infini, et en prenant $q = n$, nous obtenons :

$$\forall x \in E, d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow \left(d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

L'application f_n étant continue en x_0, il existe un réel $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, d(x, x_0) < \beta \Rightarrow \left(d\big(f_n(x), f_n(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Nous pouvons en déduire que si $x \in \mathrm{B}\big(x_0, \inf(\alpha, \beta)\big)$, alors :

$$d\big(f(x), f(x_0)\big) \leq d\big(f(x), f_n(x)\big) + d\big(f_n(x), f_n(x_0)\big) + d\big(f_n(x_0), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Cela prouve que f est continue en x_0.

b) Supposons que x_0 soit un élément intérieur à l'intervalle I. Il existe trois éléments a, b et c de I tels que $a < x_0 < b < c$. Nous poserons $\delta = c - b$.

Considérons pour n entier > 0 la fonction : $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{f\left(x + \frac{\delta}{n}\right) - f(x)}{\frac{\delta}{n}}$;

elle est définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, espace métrique complet.

La suite (φ_n) converge simplement vers la restriction à $[a, b]$ de la fonction f'. D'après le a), l'ensemble des points de continuité de $f'_{|[a,b]}$ est partout dense dans $[a, b]$. Nous pouvons en déduire qu'il existe dans $[a, b]$ une suite (t_k) telle que $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, et telle que pour tout k, $f'_{|[a,b]}$ est continue en t_k. Comme $x_0 \in \,]a, b[$, il existe un rang N tel que pour tout $k \geq N$, $t_k \in \,]a, b[$; il est alors clair que l'application f' est continue en t_k, pour $k \geq N$.

Le réel x_0 est donc adhérent à l'ensemble des points de continuité de l'application f'.

Pour résoudre le problème aux bornes de I nous pouvons procéder comme suit.

Notons C l'ensemble des points de continuité de f' ; $\mathrm{Adh}_I(C) \supset \mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(I)$, donc $\mathrm{Adh}_I(C) \supset \mathrm{Adh}_I\big(\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(I)\big)$; comme $\mathrm{Adh}_I\big(\mathrm{Int}_{\mathbb{R}}(I)\big) = I$, nous en déduisons $\mathrm{Adh}_I(C) = I$.

Exercice 4 :

> Soit (X, d) un espace métrique compact non vide, et E le K-ev $\mathscr{C}^0(X, K)$. Une partie H de E est dite équicontinue ss
> $\varepsilon > 0$:

$\exists \alpha > 0 \mid \forall f \in H \;\; \forall (x, y) \in X^2 \;\; d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

a) S'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $H \subset \mathrm{Lip}_C(X, K)$ alors H est équicontinue.

b) Donc, si $X = [a, b]$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$) et si H est formé de fonctions dérivables pour lesquelles
$\exists C \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall f \in H) \;\; \forall x \in [a, b] \;\; |f'(x)| \leq C$, alors H est équicontinue.

c) Soit H une partie équicontinue de E ; on donne une suite (f_n) dans H qui converge simplement sur X vers $f : X \to K$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur X vers f.

d) Si H est une partie compacte de E pour la norme uniforme ν_∞, alors H est équicontinue.

e) Si H est une partie équicontinue de E, alors $\mathrm{Adh}(H)$ (pour ν_∞) est équicontinue.

f) Soit H une partie de E équicontinue, bornée et fermée pour ν_∞. Montrer que H est compacte dans (E, ν_∞). ■

a) Si f est dans H, elle est C-lipschitzienne sur X , donc :

$$\forall (x, y) \in X^2 \;\; |f(x) - f(y)| \leq C\, d(x, y).$$

En supposant $C > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\forall f \in H \;\; \forall (x, y) \in X^2 \;\; d(x, y) \leq \varepsilon / C \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

La partie H est donc équicontinue.

b) S'il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$(\forall f \in H) \;\; \forall x \in [a, b] \;\; |f'(x)| \leq C,$$

il est clair d'après le théorème des accroissement finis que $H \subset \mathrm{Lip}_C(X, K)$, et donc que H est équicontinue (en utilisant a)).

c) Soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in H \;\; \forall (x, y) \in X^2 \;\; d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3,$$

d'où puisque la suite (f_n) est dans H :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall (x, y) \in X^2 \;\; d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon/3.$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, nous en déduisons :

$$\forall (x, y) \in X^2 \;\; d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3.$$

La limite simple f de la suite (f_n) est donc uniformément continue sur X.

La famille de boules ouvertes $(\mathrm{B}(x, \alpha))_{x \in X}$ est un recouvrement par des ouverts de l'espace métrique compact X ; on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie finie F de X telle que : $\bigcup_{x \in F} \mathrm{B}(x, \alpha) = X$.

Pour tout élément x de F, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$; comme F est fini, il est clair qu'on peut trouver un entier N tel que pour tout élément x de F :

$$(\forall n \geq N) \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Soit maintenant un élément quelconque y de X, et n un entier $\geq N$; on peut trouver un élément x de F tel que $d(x, y) < \alpha$. On obtient la majoration :

$$|f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

La suite (f_n) converge donc uniformément sur X vers la fonction f.

d) Soit un réel $\varepsilon > 0$, la famille de boules ouvertes $\left(\mathrm{B}_{\nu_\infty}(f, \varepsilon/3)\right)_{f \in H}$ est un recouvrement de H par des ouverts de (E, ν_∞). Comme on a supposé H compacte, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie finie L de H telle que : $\bigcup_{f \in L} \mathrm{B}_{\nu_\infty}(f, \varepsilon/3) = H$. Chaque application f élément de L est continue, donc uniformément continue sur le compact X (théorème de Heine) ; L étant fini, on voit facilement que :

$$\exists \alpha > 0 \mid \forall f \in L \ \ \forall (x, y) \in X^2 \ \ d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/3.$$

Cela revient à dire qu'un ensemble fini d'applications uniformément continues est équicontinu .

Soit maintenant une application g élément de H, il existe une application f élément de L telle que $\nu_\infty(f - g) < \varepsilon/3$. Pour tous éléments $(x, y) \in X^2$ tels que $d(x, y) < \alpha$, nous obtenons :

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

La partie H est donc équicontinue.

e) Comme H est équicontinue, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in H \ \ \forall (x, y) \in X^2 \ \ d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Si $g \in \mathrm{Adh}_{\nu_\infty}(H)$, alors il existe une suite (f_n) d'éléments de H qui converge uniformément (et donc simplement) sur X vers g. On voit comme dans le c) que :

$$\left(\forall (x, y) \in X^2\right) d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

La partie $\mathrm{Adh}_{\nu_\infty}(H)$ est donc équicontinue.

f) Montrons que sous les hypothèses de l'énoncé, la partie H vérifie l'axiome de Bolzano-Weierstrass, cela démontrera qu'elle est compacte.

Soit (f_n) une suite d'éléments de H. Comme la partie H est bornée pour la norme ν_∞, nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une suite d'applications continues $X \to [-M, M]$, où M est un réel >0.

Nous avons démontré dans l'exercice 15 du § XI.1 que tout espace métrique compact possédait une partie finie ou dénombrable partout dense ; soit D l'une d'elles dans X.

Nous avons démontré dans l'exercice 11 du § VII.1 que si (f_n) était une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, on pouvait en extraire une suite simplement convergente sur $\mathbb{Q}$, par le procédé dit "diagonal". Nous pouvons facilement généraliser cette proposition de la manière suivante :

Procédé diagonal.

> Si (f_n) est une suite d'applications d'un ensemble fini ou dénombrable D vers un espace métrique compact , on peut extraire de la suite (f_n) une suite simplement convergente sur D.

Soit alors (n_p) une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $(g_p)=(f_{n_p})$ soit simplement convergente sur D. Montrons que la suite (g_p) est uniformément de Cauchy sur X.

Soit un réel $\varepsilon>0$, la partie H étant équicontinue, il existe un réel $\alpha>0$ tel que :

$$\forall f\in H\ \ \forall(x,y)\in X^2\ \ d(x,y)\le\alpha\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon/3,$$

d'où :

$$\forall p\in\mathbb{N}\ \ \forall(x,y)\in X^2\ \ d(x,y)\le\alpha\Rightarrow|g_p(x)-g_p(y)|\le\varepsilon/3.$$

La famille $(\mathrm{B}(x,\alpha))_{x\in D}$ est un recouvrement par des ouverts du compact X ; on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe par conséquent une partie finie F de D telle que $\bigcup_{x\in F}\mathrm{B}(x,\alpha)=X$.

Les suites $(g_p(x))$, où $x\in F$, sont toutes de Cauchy ; comme elles sont en nombre fini, il existe un entier N tel que, pour tout $x\in F$, pour tous q et r entiers tels que $q\ge N$ et $r\ge N$ on ait :

$$d(g_q(x),g_r(x))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit y un élément quelconque de X, il existe $x\in F$, tel que $d(x,y)<\alpha$. Pour tous q et r entiers tels que $q\ge N$ et $r\ge N$ on a :

$$d(g_q(y),g_r(y))\le d(g_q(y),g_q(x))+d(g_q(x),g_r(x))+d(g_r(x),g_r(y))<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

La suite (g_p) est donc uniformément de Cauchy sur X. Elle converge donc uniformément sur X vers une application $g:X\to[-M,M]$. La suite (f_{n_p}) converge donc uniformément sur X vers la fonction g, qui est élément de H puisque H est supposée fermée.

La partie H vérifie l'axiome de Bolzano-Weierstrass et est donc c

Exercice 5 :

> Soit (X, d) un espace métrique compact non vide. On munit $\mathcal{B}(X, X)$ de la distance uniforme δ_∞. Soit G l'ensemble des bijections isométriques : $X \to X$. Vérifier que G est un sous-groupe de $\mathcal{S}_X$, puis, que G est une partie compacte de $(\mathcal{B}(X, X), \delta_\infty)$. ■

L'identité est une bijection isométrique.

Supposons que f et g soient des bijections isométriques de X dans X, alors $f \circ g^{-1}$ est une isométrie, en effet, pour tous x et y dans X :

$$d\big(f\big(g^{-1}(x)\big), f\big(g^{-1}(y)\big)\big) = d\big(g^{-1}(x), g^{-1}(y)\big) = d\big(g\big(g^{-1}(x)\big), g\big(g^{-1}(y)\big)\big) = d(x, y).$$

L'ensemble G est donc un sous-groupe de $\mathcal{S}_X$.

Soit (f_n) une suite de bijections isométriques ; montrons qu'on peut en extraire une suite convergente dans G.

Nous avons démontré dans l'exercice 15 du § XI.1 que tout espace métrique compact possédait une partie finie ou dénombrable partout dense ; soit D l'une d'elles dans X.

Nous avons démontré dans l'exercice 11 du § VII.1 que si (f_n) était une suite d'applications de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$, on pouvait en extraire une suite simplement convergente sur $\mathbb{Q}$, par le procédé dit "diagonal". Nous pouvons facilement généraliser cette proposition de la manière suivante :

Procédé diagonal.

> Si (f_n) est une suite d'applications d'un ensemble fini ou dénombrable D vers un espace métrique compact K, on peut extraire de la suite (f_n) une suite simplement convergente.

Soit (n_p) une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $(g_p) = (f_{n_p})$ soit simplement convergente sur D. Montrons que la suite (g_p) est uniformément de Cauchy sur X.

Soit un réel $\varepsilon > 0$, la famille $(\mathrm{B}(x, \varepsilon/3))_{x \in D}$ est un recouvrement par des ouverts de X dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il existe donc une partie finie I_ε de D telle que $\displaystyle\bigcup_{x \in I_\varepsilon} \mathrm{B}(x, \varepsilon/3) = X$.

Les suites $(g_p(x))$, où $x \in I_\varepsilon$, sont toutes de Cauchy ; comme elles sont en nombre fini, il existe un entier N tel que, pour tout $x \in I_\varepsilon$, pour tous q et r entiers tels que $q \geq N$ et $r \geq N$ on ait :

$$d\big(g_q(x), g_r(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit y un élément quelconque de X, il existe $x \in I_\varepsilon$, tel que

Pour tous q et r entiers tels que $q \geq N$ et $r \geq N$ on a :

$$d(g_q(y), g_r(y)) \leq d(g_q(y), g_q(x)) + d(g_q(x), g_r(x)) + d(g_r(x), g_r(y)) =$$

$$= d(y, x) + d(g_q(x), g_r(x)) + d(x, y) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

La suite (g_p) est donc uniformément de Cauchy, et converge donc uniformément sur X vers une application $g : X \to X$.

Comme les applications g_p sont des isométries, il est clair que leur limite uniforme est une isométrie, donc aussi injective, et continue ; mais il est moins évident que ce soit une surjection.

Soit un élément y dans X, considérons la suite $(g^n(y))$; comme X est compact, il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que la suite $(g^{n_k}(y))$ soit convergente. Nous en déduisons $d(g^{n_{k+1}}(y), g^{n_k}(y)) \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Mais comme :

$$d(g^{n_{k+1}}(y), g^{n_k}(y)) = d(g^{n_{k+1}-n_k}(y), y),$$

et que $n_{k+1} - n_k \geq 1$, nous voyons que $y \in \operatorname{Adh}(g(X))$. L'application g étant continue et X étant compact, l'ensemble $g(X)$ est une partie compacte, donc fermée de X ; donc $y \in g(X)$.

L'application g est donc bien une bijection isométrique.

Nous avons démontré que de toute suite (f_n) d'éléments de G, on pouvait extraire une suite convergente vers un élément de G. Le sous-espace métrique G de $(\mathcal{B}(X, X), \delta_\infty)$ est donc compact.

§ XII.3 *DÉRIVATION ET PASSAGE À LA LIMITE*

Exercice 3 :

> Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Désignons par E le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \nu_\infty)$, où ν_∞ est la norme uniforme. Soit F un sous-$\mathbb{R}$-ev de E inclus dans $\mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que si F est fermé dans E, alors F est de dimension finie. ■

1) Montrons que l'application linéaire $D : f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel normé (F, ν_∞) vers l'espace vectoriel normé E, est continue. Il suffit pour cela de montrer qu'elle est continue en au moins un élément de F, car elle sera alors, par translation, continue en 0_F, et par conséquent sur F (théorème X.6.3).

On sait que l'espace vectoriel E muni de la norme ν_∞ est

Banach ; comme F est un sous-espace fermé de E (pour la norme ν_∞), il est lui-même un espace de Banach (théorème XI.2.2). Nous pouvons donc appliquer le résultat de l'exercice 2 du § XII.2 : si D est limite simple d'une suite d'applications (linéaires) continues, alors l'ensemble des points de continuité de D contient une intersection dénombrable d'ouverts partout denses, donc est partout dense dans l'espace de Baire F (donc non vide). Cela prouvera que D est continue en au moins un élément de F, donc sur F d'après la première remarque.

2) L'idée est évidemment d'utiliser les fonctions
$x \mapsto \dfrac{n}{b-a}\left(f\left(x+\dfrac{b-a}{n}\right)-f(x)\right)$; mais il y a une difficulté à résoudre du côté de la borne b . On peut procéder de la manière suivante.

Soit L l'application qui à f élément de F fait correspondre l'application $L(f)$ définie par :

$L(f)(x)=f(x)$ si $x\in[a,b]$, et $L(f)(x)=2f(b)-f(2b-x)$ si $x\in[b,b+b-a]$.

Pour tout f élément de F, on reconnaît que le graphe de $L(f)$ s'obtient en prolongeant le graphe de f par symétrie autour du point $(b,f(b))$; on voit donc que l'application $L(f)$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$: $[a,2b-a]\to\mathbb{R}$. On peut considérer que l'application L est une application linéaire de l'espace vectoriel normé (F,ν_∞), la norme ν_∞ étant relative à l'intervalle $[a,b]$, dans l'espace $E_1=\left(\mathscr{C}^0([a,2b-a],\mathbb{R}),\nu_{1,\infty}\right)$, la norme $\nu_{1,\infty}$ étant relative à l'intervalle $[a,2b-a]$. On vérifie facilement que : $\nu_{1,\infty}(L(f))\le 3\nu_\infty(f)$; l'application linéaire L est donc continue.

3) Pour tout n entier > 0, soit l'application $\Delta_n : F\to E$, qui à f élément de F fait correspondre l'application définie pour tout $x\in[a,b]$ par :

$$\Delta_n(f)(x)=\frac{n}{b-a}\left(L(f)\left(x+\frac{b-a}{n}\right)-f(x)\right).$$

Il est clair que pour tout f élément de F, l'application $\Delta_n(f)$ est bien définie et continue (et même de classe $\mathscr{C}^1$) sur l'intervalle $[a,b]$. L'application Δ_n est linéaire ; on peut considérer que son espace de départ est l'espace vectoriel normé (F,ν_∞), et que son espace d'arrivée est l'espace vectoriel normé E. On vérifie facilement que :

$$(\forall f\in F)\qquad \nu_\infty(\Delta_n(f))\le\frac{n}{b-a}\left(\nu_{1,\infty}(L(f))+\nu_\infty(f)\right)\le 4\frac{n}{b-a}\,\nu_\infty(f).$$

L'application linéaire Δ_n est donc, pour tout n entier > 0, continue.

4) Montrons maintenant que la suite d'applications linéaires $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers l'application linéaire D, c'est-à-dire que

$$(\forall f\in F)\qquad \Delta_n(f)\underset{n\to\infty}{\to} D(f)=f',$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme utilisée dans l'espace d'arrivée E, c'est-à-dire au sens de la convergence uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.

Comme la fonction $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $L(f)'$ est uniformément continue sur l'intervalle $[a,b+b-a]$.

Soit un réel $\varepsilon>0$, il existe un réel $\alpha>0$ tel que :

$$\left(\forall(x,x')\in[a,b+b-a]^2\right)\qquad |x-x'|<\alpha\Rightarrow\left|L(f)'(x)-L(f)'(x')\right|<\varepsilon.$$

Soit un entier N tel que $\dfrac{b-a}{N}<\alpha$; pour tout entier $n\geq N$ et pour tout $x\in[a,b]$, en appliquant à $L(f)$ le théorème de Rolle, on obtient facilement :

$$\left|\frac{L(f)\left(x+\dfrac{b-a}{n}\right)-L(f)(x)}{\dfrac{b-a}{n}}-L(f)'(x)\right|<\varepsilon\ ;$$

comme les fonctions $L(f)'$ et f' coïncident sur $[a,b]$, on voit que pour tout entier $n\geq N$, $\nu_\infty(\Delta_n(f)-f')<\varepsilon$.

La suite $(\Delta_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc uniformément sur $[a,b]$ vers f'.

5) Nous pouvons déduire de ce qui précède que l'application linéaire D, de l'espace vectoriel normé (F,ν_∞) vers l'espace vectoriel normé E, est continue.

Il existe donc une constante C telle que :

$$(\forall f\in F)\ \ \nu_\infty(f')\leq C\,\nu_\infty(f).$$

Soit B la boule fermée de centre 0_F et de rayon 1 pour la norme ν_∞ dans F. C'est une partie équicontinue de E d'après l'exercice 4 b) du § XII.2 ; comme elle est bornée et fermée dans F, donc dans E puisque F est un sous-espace fermé de E, d'après le f) de cet exercice, elle est compacte. Le théorème de Riesz (théorème XI.1.8) nous permet d'affirmer que F est de dimension finie.

Exercice 5 :

Soit $E_i=\mathscr{C}^i([0,1],\mathbb{R})$. Notant ν_∞ la norme uniforme, on définit sur E_i la norme $p_i: f\mapsto\displaystyle\sum_{j=0}^{i}\nu_\infty\left(f^{(j)}\right)$.

a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans (E_1,p_1). Montrer qu'on peut en extraire une suite convergeant dans (E_0,p_0).

b$_1$) Prouver :

$(\forall\varepsilon>0)\ \left(\exists C\in\mathbb{R}_+^*\right)\ |\ (\forall u\in E_2)\ \ \nu_\infty(u')\leq\varepsilon\,\nu_\infty(u''$ [illegible]

> b$_2$) Soit $a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. Montrer que si $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie l'équation différentielle :
> $$(\forall t \in \mathbb{R}) \ \ u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_0(t)u(t) = 0,$$
> et si u est bornée, alors u' et u'' sont bornées. ■

a) Nous utiliserons la résolution de l'exercice 4 du § XII.2.

Soit C un réel ≥ 0 tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ v_\infty(f_n) + v_\infty\left(f_n'\right) \leq C.$$

Nous pouvons déduire du b) de l'exercice 4 du § XII.2, que l'ensemble $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie équicontinue de l'espace (E_0, p_0). C'est aussi une partie bornée (par C). Nous pouvons déduire du e) et du f) qu'elle est relativement compacte pour la norme $p_0 = v_\infty$. On peut donc extraire de la suite (f_n) une suite convergente dans (E_0, p_0).

b$_1$) Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Nous utiliserons dans cette partie la notation : $v_{[a,b]}(f) = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$, pour toute fonction numérique bornée sur $[a, b]$.

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, d'après la formule de Taylor à l'ordre 2, pour tous x et y éléments de $[a, b]$ distincts , il existe un réel z entre x et y tel que :

$$u(y) - u(x) - (y - x)u'(x) = \frac{(y-x)^2}{2} u''(z),$$

d'où :

$$|u'(x)| \leq \frac{|y-x|}{2} v_{[a,b]}(u'') + \frac{2}{|y-x|} v_{[a,b]}(u).$$

Soit un réel $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \inf((b-a)/2, 2\varepsilon)$. Pour tout élément x de l'intervalle $[a, b]$, il existe un élément $y \in [a, b]$ tel que $|y - x| = \eta$. Nous obtenons :

$$|u'(x)| = \frac{\eta}{2} v_{[a,b]}(u'') + \frac{2}{\eta} v_{[a,b]}(u) \leq \varepsilon \, v_{[a,b]}(u'') + \frac{2}{\eta} v_{[a,b]}(u),$$

d'où :

$$v_{[a,b]}(u') \leq \varepsilon \, v_{[a,b]}(u'') + \frac{2}{\eta} v_{[a,b]}(u).$$

b$_2$) Soient A_0 et A_1 des majorants > 0 des fonctions continues bornées $|a_0|$ et $|a_1|$ sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons appliquer les résultats de la partie b$_1$) sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $\dfrac{b-a}{2} > \dfrac{1}{A_1}$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2A_1}$, on trouve $\eta = \inf\left(\dfrac{b-a}{2}, 2\varepsilon\right) = \dfrac{1}{A}$. Nous en déduisons :

$$v_{[a,b]}(u') \le \frac{1}{2A_1} v_{[a,b]}(u'') + 2A_1\, v_{[a,b]}(u).$$

Comme u vérifie l'équation différentielle, nous pouvons utiliser la majoration :

$$v_{[a,b]}(u'') \le A_1\, v_{[a,b]}(u') + A_0\, v_{[a,b]}(u).$$

Nous voyons que :

$$v_{[a,b]}(u') \le \frac{1}{2A_1}\left(A_1\, v_{[a,b]}(u') + A_0\, v_{[a,b]}(u)\right) + 2A_1\, v_{[a,b]}(u),$$

et par conséquent :

$$v_{[a,b]}(u') \le 2\left(\frac{A_0}{2A_1} + 2A_1\right) v_{[a,b]}(u).$$

Comme cette majoration est vraie sur tout intervalle de longueur minorée par $\frac{2}{A_1}$, et que la fonction u est bornée sur $\mathbb{R}$, la fonction u', et bien sûr d'après ce qui précède la fonction u'', sont donc majorées sur $\mathbb{R}$. Nous obtenons les majorations :

$$v_\infty(u') \le \left(\frac{A_0}{A_1} + 4A_1\right) v_\infty(u) \text{ et } v_\infty(u'') \le \left(2A_0 + 4A_1^2\right) v_\infty(u).$$

§ XII.4 *SÉRIES DE FONCTIONS, PRODUITS INFINIS DE FONCTIONS*

Exercice 1 :

a)Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 2 - \mathrm{e} - \int_0^1 \mathrm{e}^t \operatorname{Log} t \, \mathrm{d}t.$$

b) Prouver les égalités :

$$\int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ et } \int_0^1 x^x\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}. \blacksquare$$

a) Considérons la famille de réels $(a_{m,k})_{(m,k)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$, où $a_{m,k} = \dfrac{k!}{(m+1+k)!}$. On constate l'égalité :

$$a_{m,k} = \frac{k!}{(m+1+k)!} = \frac{1}{m}\left(\frac{k!}{(m+k)!} - \frac{(k+1)!}{(m+1+k)!}\right).$$

Nous en déduisons que pour tout m entier ≥ 1 fixé, la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k}$ est convergente et $s_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k} = \frac{1}{m} \times \frac{1}{(m+1)!}$. La série $\sum_{k=1}^{\infty} s_m$ est visiblement convergente, donc la famille $\left(a_{m,k}\right)_{(m,k)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable. Calculons sa somme de deux manières différentes.

Pour un entier $n \geq 1$ donné, posons $E_n = \left\{(m,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid m+k = n+1\right\}$. On voit que la famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un partage de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et que :

$$\sum_{(m,k)\in E_n} a_{m,k} = \sum_{m+k=n+1} a_{m,k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+2)!} = u_n.$$

La série $\sum u_n$ est donc convergente et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{(m,k)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} a_{m,k} = \sum_{m=1}^{\infty} s_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \times \frac{1}{(m+1)!}.$$

Cette somme s'écrit encore :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\frac{1}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} \times \frac{1}{m!}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} \times \frac{1}{m!}\right) - (\mathrm{e}-2).$$

Il reste à prouver que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m} \times \frac{1}{m!}\right) = -\int_0^1 \mathrm{e}^t \operatorname{Log} t \,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0\ ,1]$ et N entier > 0, la formule de Taylor nous donne l'encadrement :

$$0 \leq \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} \leq \frac{t^N}{N!}\mathrm{e}^t \leq \frac{t^N}{N!}\mathrm{e}.$$

D'autre part pour tout k entier ≥ 0 :

$$\int_0^1 \frac{t^k}{k!} \operatorname{Log} t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\operatorname{Log} t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{(k+1)(k+1)!}.$$

Nous pouvons en déduire que pour tout N entier > 0 :

$$0 \leq -\int_0^1 \mathrm{e}^t \operatorname{Log} t \,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)(k+1)!} \leq \frac{\mathrm{e}}{(N+1)(N+1)!},$$

et donc que :

$$-\int_0^1 e^t \operatorname{Log} t \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \times m!}.$$

Nous obtenons finalement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \int_0^1 e^t(-\operatorname{Log} t)\, dt - (e-2).$$

b) Démontrons l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

L'intégrale est bien convergente car $x^{-x} = \exp(-x \operatorname{Log} x) \underset{x \to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 1$. En utilisant comme dans le a) l'encadrement : $\displaystyle 0 \le e^t - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} \le \frac{t^N}{N!} e^t$, vrai pour tout $t \ge 0$ et N entier > 0, nous obtenons pour tout $x \in \,]0\,,1]$:

$$0 \le x^{-x} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-x \operatorname{Log} x)^k}{k!} \le \frac{(-x \operatorname{Log} x)^N}{N!} x^{-x}.$$

On établit très facilement que sur l'intervalle $]0\,,1]$ la fonction $x \mapsto -x \operatorname{Log} x$ est positive et majorée par $\dfrac{1}{e}$; d'où pour tout $x \in \,]0\,,1]$:

$$(1) \quad 0 \le x^{-x} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-x \operatorname{Log} x)^k}{k!} \le \frac{(-x \operatorname{Log} x)^N}{N!} \exp\left(e^{-1}\right).$$

Calculons pour n et m entiers les intégrales $\displaystyle I_{n,m} = \int_0^1 x^n (-\operatorname{Log} x)^m \, dx$.

On voit que pour $m > 0$:

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (-\operatorname{Log} x)^m \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (-\operatorname{Log} x)^m \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{m}{x} \times (-\operatorname{Log} x)^{m-1} \, dx =$$

$$\frac{m}{n+1} I_{n,m-1},$$

donc par une récurrence immédiate :

$$I_{n,m} = \frac{m}{n+1} I_{n,m-1} = \frac{m(m-1)}{(n+1)^2} I_{n,m-2} = \cdots = \frac{m!}{(n+1)^m} I_{n,0} = \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

Nous en déduisons en particulier que pour tout k entier :

$$\int_0^1 x^k (-\operatorname{Log} x)^k \, dx = I_{k,k} = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}.$$

En utilisant l'encadrement (1), nous obtenons :

$$0 \le \int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \le \frac{1}{(N+1)^{N+1}} \exp\left(\mathrm{e}^{-1}\right),$$

et finalement :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}.$$

Démontrons maintenant l'égalité $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Le raisonnement est analogue. En utilisant la formule de Taylor, on obtient pour tout $t \le 0$ et N entier > 0 :

$$\left| \mathrm{e}^t - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!} \right| \le \frac{|t|^N}{N!} \mathrm{e}^0 = \frac{|t|^N}{N!},$$

donc pour tout $x \in \,]0\,,1]$:

$$(2) \qquad \left| x^x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(x \operatorname{Log} x)^k}{k!} \right| \le \frac{(-x \operatorname{Log} x)^N}{N!},$$

d'où :

$$\left| \int_0^1 x^{+x}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} \right| \le \frac{1}{(N+1)^{N+1}},$$

et finalement :

$$\int_0^1 x^{+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^m}.$$

Exercice 8d) :

> Etudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x^{\left(n^\beta\right)}$ $(n \ge 1)$ ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$). ■

1) Etudions d'abord la convergence simple.

La série $\sum u_n(0)$ est évidemment toujours absolument convergente puisque ses termes sont nuls.

Supposons $0 < x < 1$, posons : $v_n(x) = \operatorname{Log}(|u_n(x)|) = \alpha \operatorname{Log} n + n^\beta \operatorname{Log} x$.

– si $\beta > 0$, $\operatorname{Log}\left(\left|n^2 u_n(x)\right|\right) = (\alpha+2)\operatorname{Log} n + n^\beta \operatorname{Log} x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$

$u_n(x) \in o\left(n^{-2}\right)$ et la série est absolument convergente ;

– si $\beta = 0$, $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x$, la série est convergente si, et seulement si, $\alpha < 0$: si $\alpha \geq 0$, le terme général ne tend pas vers 0, et si $\alpha < 0$ la série est alternée donc convergente ;

– si $\beta < 0$, alors $u_n(x) \sim (-1)^n n^\alpha$, la série est divergente si $\alpha \geq 0$, et si $\alpha < 0$, on voit que la suite $(v_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang :

$$v_n(x) - v_{n+1}(x) = -\alpha \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(n^\beta - (n+1)^\beta\right) \operatorname{Log} x \quad ;$$

le premier terme est équivalent à $-\alpha \dfrac{1}{n}$, le second à

$-\beta n^{\beta-1} \operatorname{Log} x \in o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, donc :

$$v_n(x) - v_{n+1}(x) \sim -\alpha \frac{1}{n} \quad ;$$

la série $\sum u_n(x)$ est donc à partir d'un certain rang alternée, et donc convergente.

La série $\sum u_n(1)$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 0$.

Supposons $x > 1$ et posons $v_n(x) = \operatorname{Log}(|u_n(x)|) = \alpha \operatorname{Log} n + n^\beta \operatorname{Log} x$.

– si $\beta > 0$, $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $|u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et la série est divergente ;

– si $\beta = 0$, $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x$, la série est convergente si, et seulement si, $\alpha < 0$;

– si $\beta < 0$, alors $u_n(x) \sim (-1)^n n^\alpha$, la série est divergente si $\alpha \geq 0$, et si $\alpha < 0$, on voit que la suite $(v_n(x))$ est décroissante :

$$v_n(x) - v_{n+1}(x) = -\alpha \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(n^\beta - (n+1)^\beta\right) \operatorname{Log} x > 0 \quad ;$$

la série $\sum u_n(x)$ est alternée et donc convergente.

Récapitulons en discutant suivant les valeurs de α et de β :

1. si $\beta > 0$,
   1.1 si $\alpha \geq 0$:
   l'ensemble de convergence simple est : $[0,1[$;
   1.2 si $\alpha < 0$:
   l'ensemble de convergence simple est : $[0,1]$;
2. si $\beta = 0$,
   2.1 si $\alpha \geq 0$:

l'ensemble de convergence simple est : $\{0\}$;
2.2 si $\alpha < 0$:
l'ensemble de convergence simple est : $\mathbb{R}_+$;
3. si $\beta < 0$,
3.1 si $\alpha \geq 0$:
l'ensemble de convergence simple est : $\{0\}$;
3.2 si $\alpha < 0$:
l'ensemble de convergence simple est : $\mathbb{R}_+$;

2) Etudions la convergence uniforme sur certaines parties de $\mathbb{R}$.

Nous étudierons la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur des parties fermées de $\mathbb{R}$, incluses dans l'ensemble de convergence simple. En effet, si la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur la partie P de $\mathbb{R}_+$, elle vérifie sur cette partie le critère de Cauchy uniforme. Comme les fonctions u_n sont continues, on voit facilement que la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $\overline{P}$, par prolongement des inégalités ; elle est donc uniformément convergente, et simplement convergente, sur $\overline{P}$.

Comme pour tous α, β réels, $u_n(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, la suite (u_n) n'est uniformément majorée sur aucun intervalle de la forme $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, donc ne tend pas uniformément vers 0. La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ n'est donc uniforme sur aucun intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$.

Discutons suivant les signes de α et de β :
Cas 1.1, $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$.

Soit un réel a, $0 < a < 1$; comme la fonction $x \mapsto |u_n(x)| = n^\alpha x^{n^\beta}$ est croissante, nous obtenons : $(\forall x \in [0, a])$ $|u_n(x)| \leq |u_n(a)|$. Or la série $\sum u_n(a)$ est absolument convergente ; il y a donc convergence normale, donc uniforme, sur tout intervalle $[0, a]$, où $0 < a < 1$.

Cas 1.2, $\beta > 0$, $\alpha < 0$.

Montrons que la série est uniformément convergente sur l'intervalle $[0, 1]$. Posons pour $x \in [0, 1]$ et p entier : $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n(x)$, ce qui est justifié puisque la série est simplement convergente sur l'intervalle $[0, 1]$. Nous obtenons :

$$R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=p}^{\infty} u_{n+1}(x) = u_{p+1}(x) + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{1}{2} u_{p+1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(u_n(x) + u_{n+1}(x)\right).$$

Sur l'intervalle $[0,1]$, $\left|u_p(x)\right| = p^{\alpha} x^{\left(p^{\beta}\right)} \leq p^{\alpha}$, et $p^{\alpha} \underset{p\to\infty}{\to} 0$; la suite $\left(u_p\right)$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers 0. Il nous reste donc à démontrer que la suite :

$$S_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(u_n(x) + u_{n+1}(x)\right) = \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \left(n^{\alpha} x^{n^{\beta}} - (n+1)^{\alpha} x^{(n+1)^{\beta}}\right),$$

converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,1]$.

Etudions la fonction $\varphi_n : x \mapsto n^{\alpha} x^{n^{\beta}} - (n+1)^{\alpha} x^{(n+1)^{\beta}}$. Sa valeur en 0 est 0, et sa valeur en 1 est > 0. Sa dérivée sur l'intervalle $]0,1]$ est la fonction :

$$x \mapsto n^{\alpha+\beta} x^{n^{\beta}-1} - (n+1)^{\alpha+\beta} x^{(n+1)^{\beta}-1},$$

dont le signe est celui de :

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+\beta} x^{(n+1)^{\beta} - n^{\beta}}.$$

– si $\alpha + \beta \leq 0$, on voit que φ_n est croissante et majorée par $\varphi_n(1) = n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}$. Dans ce cas :

$$\left|S_p(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha}\right) = (p+1)^{\alpha},$$

la suite $\left(S_p\right)$ converge donc uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,1]$.

– si $\alpha + \beta > 0$, la fonction φ_n est d'abord croissante, puis décroissante ; elle est donc toujours positive et sa valeur maximum est atteinte en le réel x_n tel que :

$$n^{\alpha+\beta} x_n^{n^{\beta}} = (n+1)^{\alpha+\beta} x_n^{(n+1)^{\beta}}.$$

La valeur maximum vaut donc :

$$M_n = \left(n^{\alpha} - (n+1)^{\alpha} \frac{n^{\alpha+\beta}}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right) x_n^{n^{\beta}} = n^{\alpha}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right) x_n^{n^{\beta}}.$$

Par conséquent,

$$0 < M_n \leq n^{\alpha}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right) \sim \frac{\beta}{n^{1-\alpha}}.$$

La série de fonctions $\sum (-1)^n \varphi_n$ est donc normalement cor l'intervalle $[0,1]$. La suite de fonctions (S_p) converge donc uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0,1]$, ce qu'il fallait démontrer.

Cas 2.2, $\beta = 0$, $\alpha < 0$.

Dans ce cas, $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x$. Comme la série $\sum (-1)^n n^\alpha$ est convergente, il est clair que la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle borné dans $\mathbb{R}_+$.

Cas 3.2, $\beta < 0$, $\alpha < 0$.

Montrons que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est uniforme sur tout intervalle $[0, a]$, où $a > 1$. Nous procéderons comme dans le cas 1.2, en reprenant les mêmes notations, mais maintenant sur l'intervalle $[0, a]$. Reprenons l'égalité :

$$R_p(x) = \frac{1}{2} u_{p+1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(u_n(x) + u_{n+1}(x)\right).$$

Sur l'intervalle $[0, a]$, $\left|u_p(x)\right| = p^\alpha x^{\left(p^\beta\right)} \le p^\alpha a^{\left(p^\beta\right)}$, et

$p^\alpha a^{\left(p^\beta\right)} \underset{p\to\infty}{\to} 0$; la suite (u_p) converge donc uniformément vers 0. Il nous reste donc à démontrer que la suite :

$$S_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(u_n(x) + u_{n+1}(x)\right) = \sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \left(n^\alpha x^{n^\beta} - (n+1)^\alpha x^{(n+1)^\beta}\right),$$

converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, a]$.

Etudions la fonction $\varphi_n : x \mapsto n^\alpha x^{n^\beta} - (n+1)^\alpha x^{(n+1)^\beta}$. Sa valeur en 0 est 0, et sa valeur en 1 est > 0. Sa dérivée sur l'intervalle $]0, a]$ est la fonction :

$$x \mapsto n^{\alpha+\beta} x^{n^\beta - 1} - (n+1)^{\alpha+\beta} x^{(n+1)^\beta - 1},$$

dont le signe est celui de :

$$x^{n^\beta - (n+1)^\beta} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+\beta} \quad (\text{ici } \alpha + \beta < 0\ ).$$

La fonction φ_n est d'abord décroissante (et négative), puis croissante ; comme $\varphi_n(1) > 0$, la valeur minimum (négative) de φ_n est atteinte en le réel x_n, $0 < x_n < 1$, tel que :

$$n^{\alpha+\beta} x_n^{n^\beta} = (n+1)^{\alpha+\beta} x_n^{(n+1)^\beta}.$$

La valeur minimum vaut donc :

$$m_n = \left(n^\alpha - (n+1)^\alpha \frac{n^{\alpha+\beta}}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right) x_n^{n^\beta} = n^\alpha \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right) x_n^{n^\beta}.$$

Par conséquent,

$$0 < -m_n \leq n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} - 1\right) \sim \frac{-\beta}{n^{1-\alpha}}.$$

La série $\sum -m_n$ est donc convergente.

La valeur maximum de φ_n est $M_n = \varphi_n(a) = n^\alpha a^{n^\beta} - (n+1)^\alpha a^{(n+1)^\beta}$.

La série $\sum M_n$ est convergente puisque $n^\alpha a^{n^\beta} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Nous obtenons :

$$\left|S_p(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty}\left|\varphi_n(x)\right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty}(M_n - m_n).$$

Comme la série $\sum(M_n - m_n)$ est convergente, la suite de fonctions (S_p) converge uniformément vers 0 sur l'intervalle $[0, a]$, ce qu'il fallait démontrer.

3) Etudions la convergence normale.

Il ne peut y avoir convergence normale sur une partie P de $\mathbb{R}_+$ que s'il y a convergence normale sur $\overline{P}$, donc convergence uniforme, et en tout point convergence absolue, sur $\overline{P}$.

Discutons suivant le signe de β :

Cas 1, $\beta > 0$.

– si $\alpha < -1$, comme pour tout $x \in [0,1]$, $\left|u_n(x)\right| \leq n^\alpha$, la convergence est normale sur l'intervalle $[0,1]$.

– si $-1 \leq \alpha$, comme la série $\sum u_n(1) = \sum(-1)^n n^\alpha$ est divergente ou n'est pas absolument convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ ne peut être normalement convergente sur un intervalle $[a, 1[$, où $0 < a < 1$. Mais comme les fonctions $x \mapsto |u_n(x)|$ sont croissantes, et que, dans ce cas, la série est en tout $x \in [0, 1[$ absolument convergente, on voit que la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur tout intervalle $[0, a]$, où $0 < a < 1$.

Cas 2, $\beta = 0$.

Dans ce cas, $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x$;

– si $\alpha < -1$, la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur tout intervalle borné dans $\mathbb{R}_+$;

– si $-1 \leq \alpha$, la série $\sum u_n$ n'est normalement convergente que sur le singleton $\{0\}$.

Cas 3, $\beta < 0$.

Soit a un réel > 1.

– si $\alpha < -1$, comme pour tout $x \in [0, a]$, $|u_n(x)| \le n^\alpha a^{n^\beta} \sim n^\alpha$, la convergence est normale sur l'intervalle $[0, a]$.

– si $-1 \le \alpha$, comme pour tout $x > 0$, $u_n(x) \sim (-1)^n n^\alpha$, la série $\sum u_n(x)$ n'est absolument convergente que pour $x = 0$; la série de fonctions $\sum u_n$ n'est normalement convergente que sur le singleton $\{0\}$.

Exercice 9) :

> On donne α réel > 0. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n^\alpha x)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$. ■

Notons pour tout $x > 0$ et n entier $u_n(x) = \exp(-n^\alpha x)$. On vérifie qu'il s'agit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que pour tout k entier, $u_n^{(k)}(x) = (-1)^k n^{k\alpha} \exp(-n^\alpha x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, ces fonctions étant décroissantes, on voit que :

$$\forall x \ge \varepsilon,\ \left|u_n^{(k)}(x)\right| \le n^{k\alpha} \exp(-n^\alpha \varepsilon).$$

Il est clair que $n^2 n^{k\alpha} \exp(-n^\alpha \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Nous en déduisons que pour tout entier k la série $\sum n^{k\alpha} \exp(-n^\alpha \varepsilon)$ est convergente, et que la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ est normalement convergente sur l'intervalle $[\varepsilon, +\infty[$.

On en déduit facilement, en appliquant le théorème XII.3.1 à la suite des sommes partielles, et aux suites des dérivées successives de ces sommes partielles, que la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$, et que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Cette propriété étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum u_n$ est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 10) :

> Donner un exemple de suite (u_n) de fonctions : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continues, telles que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais que la convergence ne soit normale sur aucun intervalle non trivial. ■

1) Quelques outils.

Soit dans $\mathbb{R}$ l'ensemble C des carrés des entiers naturels ; la fonction $x \mapsto d(x, C)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \sup(1-2t, 0)$, fonction continue ; posons pour tout x réel $\psi(x) = \varphi(d(x, C))$; on voit facilement que s'il existe un entier k tel que $k^2 - 1/2 < x < k^2 + 1/2$, alors $\psi(x) = 1 - 2\left|x - k^2\right|$, et sinon $\psi(x) = 0$. On remarque que la fonction ψ est continue, que ses valeurs sont comprises entre 0 et 1, et que sa valeur est 1 uniquement sur les carrés d'entiers.

Soit enfin une fonction $f : \mathbb{R} \to [1, 2]$, supposée continue et strictement croissante.

2) Le contre-exemple.

Considérons la suite de fonctions (u_n), définies pour tout n entier > 0 et x réel par $u_n(x) = \dfrac{\psi(nf(x))}{n}$; montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, mais n'est normalement convergente sur aucun intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

3) La série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Posons pour x réel et p entier, $S_p(x) = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} \dfrac{\psi(nf(x))}{n}$. Si dans cette somme le terme d'indice n n'est pas nul, c'est qu'il existe un entier k, tel que $k^2 - 1/2 < nf(x) < k^2 + 1/2$; donc $k^2 > nf(x) - 1/2 \geq (p+1)f(x) - 1/2 > p$ (car $f(x) \geq 1$). Pour un entier k donné, $k > \sqrt{p}$, il y a au plus un entier $n \geq (p+1)$ tel que $k^2 - 1/2 < nf(x) < k^2 + 1/2$, soit encore $\dfrac{k^2 - 1/2}{f(x)} < n < \dfrac{k^2 + 1/2}{f(x)}$, puisque $f(x) \geq 1$; et le terme d'indice n correspondant est majoré par $\dfrac{1}{n} < \dfrac{f(x)}{k^2 - 1/2} \leq \dfrac{2}{k^2 - 1/2}$ (car $f(x) \leq 2$) . Nous en déduisons la majoration : $S_p(x) \leq \sum\limits_{k > \sqrt{p}}^{\infty} \dfrac{2}{k^2 - 1/2}$.

La suite de fonctions (S_p) est donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers 0, et la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

4) Montrons que la convergence n'est normale sur aucun intervalle $[a, b]$, $a < b$.

Soit n entier, si $\sqrt{nf(b)} - \sqrt{nf(a)} \geq 1$, il existe un entier k tel que $\sqrt{nf(a)} \leq k < \sqrt{nf(b)}$, soit encore $nf(a) \leq k^2 < nf(b)$; il existe alors un réel $x \in [a, b]$ tel que $nf(x) = k^2$, donc $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$; on en déduit que $\sup\limits_{x \in [a, b]} u_n(x) = \dfrac{1}{n}$.

Nous voyons donc que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad n \geq \frac{1}{\left(\sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}\right)^2} \Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} u_n(x) = \frac{1}{n}.$$

La convergence n'est donc pas normale sur l'intervalle $[a, b]$.

Sans entrer dans les méandres des considérations qui ont conduit à ce contre-exemple, on peut remarquer que la suite de fonctions (u_n) devait converger uniformément vers 0, ce qui est assuré par le fait que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 12) :

> (constante d'Euler) : A partir de : $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$, démontrer que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\zeta(k) - 1}{k}\right)$ (Euler). ■

Pour tout x réel tel que $|x| < 1$, on sait que :

$$\mathrm{Log}(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}, \text{ soit encore } x + \mathrm{Log}(1-x) = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k}.$$

Nous pouvons utiliser cette égalité en remplaçant x par $\frac{1}{n}$, où n est un entier $\geq$ 2. D'où :

$$\gamma = 1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kn^k}\right).$$

La famille $\left(\frac{1}{kn^k}\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2,\, n \geq 2,\, k \geq 2}$, famille de réels positifs, est donc sommable. En intervertissant l'ordre des sommations (théorème IX.7.4, et IX.7.5.) on obtient :

$$\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}(\zeta(k) - 1)\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 16) :

> Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin\left(2^{n^2}x\right)$ est définie et continue, mais qu'elle n'est dérivable en aucun point. ■

Pour tout n entier, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{1}{2^n}\sin\left(2^{n^2}x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et comme :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ |u_n(x)| \leq \frac{1}{2^n},$$

on voit que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$, est normale sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel quelconque et $\varepsilon = 1$ ou -1. Pour tout p entier ≥ 1 posons :

$$\delta_{\varepsilon,p} = f\left(x + \varepsilon 2^{-p^2}\frac{\pi}{2}\right) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sin 2^{n^2}\left(x+\varepsilon 2^{-p^2}\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2^{n^2}x\right).$$

Si n est un entier $> p$, $2^{n^2}2^{-p^2}\frac{\pi}{2} = 2^{n^2-(p+1)^2}2^{2p+1}\frac{\pi}{2}$ $= 2^{n^2-(p+1)^2} \times 2^{2p-1} \times 2\pi$; dans la somme ci-dessus les termes d'indices $n > p$ sont donc nuls. On obtient donc :

$$\delta_{\varepsilon,p} = \sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2^n}\left(\sin 2^{n^2}\left(x+\varepsilon 2^{-p^2}\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2^{n^2}x\right),$$

soit encore :

$$\delta_{\varepsilon,p} = \varepsilon\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{2}\sin\left(2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2^{n^2}x + \varepsilon 2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4}\right).$$

Isolons dans cette somme le dernier terme en posant :

$$a_{\varepsilon,p} = \frac{1}{2^{p+1}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2^{p^2}x + \varepsilon\frac{\pi}{4}\right),$$

et

$$b_{\varepsilon,p} = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2^{n+1}}\sin\left(2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2^{n^2}x + \varepsilon 2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4}\right).$$

Nous obtenons :

$$\left|b_{\varepsilon,p}\right| \leq \sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2^{n+1}}\sin\left(2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4}\right) \leq \sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2^{n+1}}2^{n^2-p^2}\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{1}{2^{p^2-n^2+n+1}}.$$

La suite $n \mapsto p^2 - n^2 + n + 1$ ($n \geq 1$) est injective strictement décroissante, elle prend ses valeurs entre p^2+1 et $p^2-(p-1)^2+(p-1)+1 = 3p-1$. Les 3 premières valeurs prises à partir de $n = 0$ sont p^2+1, p^2+1, p^2-1. Donc :

$$\left|b_{\varepsilon,p}\right| \leq \frac{\pi}{4}\left(\sum_{k=3p-1}^{p^2-1}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{p^2+1}} + \frac{1}{2^{p^2+1}}\right) \leq \frac{\pi}{4}\left(\sum_{k=3p-1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right) = \frac{\pi}{2^{3p}}.$$

Cette majoration peut paraître dans son principe grossière, mais il faut voir que le premier terme de la somme est $\frac{\pi}{2^{3p+1}}$; on ne peut donc pratiquement espérer mieux, ni plus efficace.

D'autre part nous constatons que :

$$a_{-1,p}=\frac{1}{2^{p+1}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2^{p^2}x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2^{p+1}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2^{p^2}x+\frac{\pi}{4}\right),$$

et que donc :

$$a_{-1,p}^2+a_{1,p}^2=\frac{1}{2^{2p+3}}.$$

Nous en déduisons que :

$$\delta_{1,p}^2+\delta_{-1,p}^2=\frac{1}{2^{2p+3}}+2\left(a_{1,p}b_{1,p}+a_{-1,p}b_{-1,p}\right)+b_{1,p}^2+b_{-1,p}^2=$$

$$=\frac{1}{2^{2p+3}}+v_p.$$

On obtient facilement la majoration :

$$\left|v_p\right|\le 4\left(\frac{1}{2^{p+1}\sqrt{2}}\frac{\pi}{2^{3p}}\right)+2\frac{\pi^2}{2^{6p}}\ ;$$

on en déduit que $v_p\in o\left(\frac{1}{2^{2p+3}}\right)$ et que par conséquent $\delta_{1,p}^2(x)+\delta_{-1,p}^2(x)\sim\frac{1}{2^{2p+3}}$.

Si f était dérivable en x, on aurait :

$$\frac{\delta_{\varepsilon,p}(x)}{\varepsilon 2^{-p^2}\frac{\pi}{2}}\underset{p\to\infty}{\to}f'(x),$$

or :

$$\frac{\delta_{1,p}^2(x)+\delta_{-1,p}^2(x)}{2^{-2p^2}\frac{\pi^2}{4}}\sim\frac{4}{\pi^2}2^{2p^2-2p-3}\underset{p\to\infty}{\to}+\infty.$$

L'application f n'est donc pas dérivable en x, et ceci pour tout x réel.

§ XII.5 *EXEMPLES ET APPLICATIONS*

Exercice 2) :

> Démontrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^n}{1-t^n}\underset{t\to1,\,t<1}{\sim}\frac{\pi^2}{6(1-t)^2}$. ■

Il est clair que pour tout réel t tel que $0<t<1$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^n}{1-t^n}$ est absolument convergente (on peut utiliser la règle de d'Alembert). Notons $f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^n}{1-t^n}$.

On sait que pour tout réel x, tel que $|x|<1$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$; nous pouvons en déduire que pour tout réel $t\in[0,1[$:

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}nt^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^{nk}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{h=1}^{\infty}nt^{nh}\right).$$

La famille de réels ≥ 0, $\left(nt^{nh}\right)_{(n,\,h)\in\,\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$, est donc sommable (théorème IX.7.5), et en intervertissant l'ordre des sommations nous obtenons :

$$f(t)=\sum_{h=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{nh}\right)=\sum_{h=1}^{\infty}t^h\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\left(t^h\right)^{n-1}\right).$$

Or pour tout x réel tel que $|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, donc pour tout réel $t\in[0,1[$:

$$f(t)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{t^h}{\left(1-t^h\right)^2},\text{ soit encore : }(1-t)^2f(t)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{t^h}{\left(1+t+t^2+\cdots+t^{h-1}\right)^2}.$$

Montrons que les fonctions : $\varphi_h:t\mapsto\dfrac{t^h}{\left(1+t+t^2+\cdots+t^{h-1}\right)^2}$ $(h\geq 1)$ sont croissantes sur l'intervalle fermé $[0,1]$.

Nous utiliserons le fait que les fonctions $\psi_k:t\mapsto t^k+\dfrac{1}{t^k}$, où k est un entier $>$ 0, sont décroissantes et >0 sur $]0,1]$ ($\psi_k'(t)=k\dfrac{t^{2k}-1}{t^{k+1}}$).

Si h est pair, $h=2p$, nous pouvons écrire :

$$\varphi_{2p}(t)=\frac{t^{2p}}{\left(1+t+\cdots+t^{2p-1}\right)^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{t^p}+\dfrac{1}{t^{p-1}}+\cdots+\dfrac{1}{t}+1+t+\cdots+t^{p-1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{t^p}+\psi_{p-1}(t)+\cdots+\psi_1(t)+1\right)}.$$

Si h est impair, $h=2p+1$, nous obtenons :

$$\varphi_{2p+1}(t)=\frac{t^{2p+1}}{\left(1+t+\cdots+t^{2p}\right)^2}=\frac{t}{\left(\dfrac{1}{t^p}+\dfrac{1}{t^{p-1}}+\cdots+\dfrac{1}{t}+1+t+\cdots+t^p\right)}=$$

$$=\frac{t}{\left(\psi_p(t)+\psi_{p-1}(t)+\cdots+\psi_1(t)+1\right)}.$$

Dans les deux cas il est, sous cette forme, évident que la fonction
sante.

Nous en déduisons que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le \varphi_h(t) \le \varphi_h(1) = \dfrac{1}{h^2}$, et que par conséquent la série de fonctions $\sum_{h\ge 1} \varphi_h$ est normalement convergente sur l'intervalle $[0,1]$. Sa somme est donc continue sur l'intervalle $[0,1]$. Nous voyons alors que :

$$(1-t)^2 f(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(t) \underset{t\to 1,\, t<1}{\longrightarrow} \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(1) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5) :

> Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right) \underset{t\to 0,\, t>0}{\sim} \frac{-\pi^2}{6t}$. ■

Pour tout $t > 0$, $-\mathrm{Log}\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-nt} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n$; la série $\sum_{n=1}^{\infty} -\mathrm{Log}\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right)$ est donc convergente. Posons $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\mathrm{Log}\left(1-\mathrm{e}^{-nt}\right)$ (il est plus pratique de manipuler une série de termes positifs).

On sait que pour tout réel x tel que $|x| < 1$, $-\mathrm{Log}(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$, donc :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\mathrm{e}^{-nt}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathrm{e}^{-nkt}.$$

La famille de réels ≥ 0, $\left(\dfrac{1}{k}\mathrm{e}^{-nkt}\right)_{(n,k)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$, est donc, pour tout $t > 0$, sommable ; en intervertissant l'ordre des sommations nous obtenons :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-kt}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{1-\mathrm{e}^{-kt}}, \text{ d'où : } t\, f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{kt}{\mathrm{e}^{kt}-1}.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant convexe, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$(et > 0) ; nous voyons alors que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ si $x > 0$ et $\varphi(0) = 1$, est continue, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et > 0 .

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout k entier ≥ 1, $0 \le \dfrac{1}{k^2}\varphi(kt) \le \dfrac{1}{k^2}$; nous en déduisons que la série de fonctions $\sum_{k\ge 1} \dfrac{1}{k^2}\varphi(kt)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$; sa somme est par conséquent continue. Nous voyons alors q

$$t\,f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\varphi(kt)\underset{t\to 0,\,t>0}{\longrightarrow}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\varphi(0)=\frac{\pi^2}{6},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9) :

> (théorème de Borel) : a) Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nulle hors de $]0,1[$ égale à $\exp\left(\frac{1}{x\,(x-1)}\right)$ sur $]0,1[$. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si $I=\int_0^1\varphi$, la fonction $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{I}\int_0^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à 1 sur $[1,+\infty[$.
>
> b) Utiliser le a) pour construire une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, égale à 1 sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, à 0 hors de $[-1,1]$. Dans ce qui suit u est ainsi choisie.
>
> c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. Si $a_n=0$, on pose $r_n=1$; si $a_n\neq 0$, on pose : $r_n=\mathrm{Min}\left(1,\frac{1}{4|a_n|^{2/n}}\right)$. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\,u\left(\frac{x}{r_n}\right)$ est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-1,1]$, et que $(\forall n)\ f^{(n)}(0)=a_n$. ■

a) Pour tout $x\in\ ]0,1[$ nous pouvons écrire :

$$\varphi(x)=\exp\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{1-x}\right).$$

Posons : $\psi(x)=\exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x>0$ et $\psi(x)=0$ si $x\leq 0$, nous voyons que pour tout x réel $\varphi(x)=\psi(x)\,\psi(1-x)$. Il suffit donc de démontrer que la fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Ce problème a été résolu dans un cadre plus général lors de la résolution de l'exercice 2 du § VI.3. Posons $g(x)=\frac{1}{x}$ pour $x>0$, fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous avions mis en évidence les conditions suffisantes suivantes pour que ψ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

(1) $g(x)\underset{x\to 0,\,x>0}{\longrightarrow}+\infty$;

(2) pour tout entier $k > 0$ et tout réel $\lambda > 0$,
$$g^{(k)}(x)\exp(-\lambda\, g(x)) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0.$$

La première condition est bien réalisée ; la deuxième s'écrit :

pour tout entier $k > 0$ et tout réel $\lambda > 0$, $\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\exp\left(-\dfrac{\lambda}{x}\right) \underset{x\to 0,\, x>0}{\longrightarrow} 0$,

ce qui est un résultat bien connu.

Les fonctions ψ et φ sont donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Il est clair que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$u(x) = \varphi(2x+2)\varphi(2-2x),$$
convient.

c) Posons pour tout x réel et n entier $v_n(x) = \dfrac{a_n}{n!}x^n u\left(\dfrac{x}{r_n}\right)$. Les fonctions v_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Pour montrer que la fonction f existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que les séries $\sum v_n^{(k)}$ sont, pour tout k entier, uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.

Notons M_k un majorant de $\left|u^{(k)}\right|$ sur l'intervalle $[-1,1]$; comme u est nulle hors de $[-1,1]$, c'est aussi un majorant de $\left|u^{(k)}\right|$ sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Leibnitz, nous obtenons pour tout x réel et pour tous k et n entiers (on supposera $n \geq k$) :
$$v_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\frac{n!}{(n-h)!}x^{n-h}\,\frac{1}{r_n^{k-h}}\,u^{(k-h)}\left(\frac{x}{r_n}\right).$$

Puisque $u^{(k-h)}\left(\dfrac{x}{r_n}\right)$ est nul si $|x| \geq r_n$, nous en déduisons que pour tout x réel : $\left|x^{n-h}\,u^{(k-h)}\left(\dfrac{x}{r_n}\right)\right| \leq r_n^{n-h}M_{k-h}$,

d'où la majoration :
$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{|a_n|}{n!}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{r_n^{n-h}}{r_n^{k-h}}M_{k-h},$$

soit encore :
$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{|a_n|}{(n-k)!}r_n^{n-k}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\frac{(n-k)!}{(n-h)!}M_{k-h} \leq$$
$$\leq \frac{|a_n|}{(n-k)!}r_n^{n-k}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}M_{k-h} = \frac{|a_n|}{(n-k)!}r_n^{n-k}\,B_k,$$

où : $B_k = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} M_{k-h}$.

Si $|a_n| \geq 2^{-n}$, alors $\dfrac{1}{4|a_n|^{2/n}} \leq 1$, donc $r_n = \dfrac{1}{4|a_n|^{2/n}}$, et pour tout x réel :

$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{|a_n|}{(n-k)!}\frac{1}{4^{n-k}}\frac{1}{|a_n|^{2(n-k)/n}}B_k = \frac{B_k}{(n-k)!4^{n-k}|a_n|^{1-\frac{2k}{n}}} \leq$$

$$\leq \frac{B_k}{(n-k)!4^{n-k}2^{-n\left(1-\frac{2k}{n}\right)}} = \frac{B_k}{(n-k)!\,2^n}.$$

Si $a_n = 0$ ou $|a_n| \leq 2^{-n}$, alors $r_n = 1$ et on obtient aussi :

$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{B_k}{(n-k)!\,2^n}.$$

Ces majorations étant vérifiées pour tout x réel et n entier, $n \geq k$, les séries de fonctions $\sum v_n^{(k)}$ ($k \geq 0$) sont toutes normalement convergentes sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons en déduire que la fonction f existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, pour tout k entier , $f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(k)}(0)$.

Nous remarquons que $u(0) = 1$, et que pour tout p entier > 0, $u^{(p)}(0) = 0$, puisque u est constante sur un voisinage de 0.

Si $n > k$, alors :

$$v_n^{(k)}(0) = \frac{a_n}{n!}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\frac{n!}{(n-h)!}0^{n-h}\frac{1}{r_n^{k-h}}u^{(k-h)}(0) \ ;$$

dans cette somme, seul le terme d'indice k pourrait être non nul, mais il est nul ; donc $v_n^{(k)}(0) = 0$.

Si $n = k$, en utilisant le même raisonnement on trouve :

$$v_k^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}\binom{k}{k}\frac{k!}{(k-k)!}\frac{1}{r_k^{k-k}}u(0) = a_k.$$

Si $n < k$, alors pour tout x réel :

$$v_n^{(k)}(x) = \frac{a_n}{n!}\sum_{h=0}^{n}\binom{k}{h}\frac{n!}{(n-h)!}x^{n-h}\frac{1}{r_n^{k-h}}u^{(k-h)}\left(\frac{x}{r_n}\right) \ ;$$

comme $k-h$ est toujours > 0, tous les termes sont nuls en 0, donc : $v_n^{(k)}(0) = 0$.

On voit alors que pour tout k entier :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(k)}(0) = a_k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 10) :

> Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à 0 hors de $[-1,1]$, et égale à $\exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)$ sur $]-1,1[$. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que son support est $[-1,1]$. Pour tout intervalle ouvert borné $J =]a,b[$ de $\mathbb{R}$ ($a<b$), on pose :
>
> $$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_J(x) = \varphi\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right).$$
>
> Vérifier que f_J est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Quel est son support ? Soit maintenant un compact L de $\mathbb{R}$, et un réel $A>0$ tel que $L \subset\ ]-A,A[$. On suppose que l'ouvert $]-A,A[\setminus L$ admet une infinité de composantes connexes, qu'on numérote $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n la demi-longueur de J_n.
>
> Montrer que la fonction $g :]-A,A[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda_n}} f_{J_n}(x)$
>
> est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que l'ensemble de ses zéros est exactement L. ■

Pour tout $x \in\ ]-1,1[$, nous remarquons que :

$$\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) = \exp\left(\frac{-1}{2(1+x)} + \frac{-1}{2(1-x)}\right) = \exp\left(\frac{-1}{2(1+x)}\right)\exp\left(\frac{-1}{2(1-x)}\right).$$

En posant comme dans l'exercice 9 : $\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x>0$ et $\psi(x)=0$ si $x \le 0$, nous voyons que pour tout x réel $\varphi(x) = \psi(2(x+1))\,\psi(2(1-x))$. La fonction ψ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (cf. exercice 9), la fonction φ l'est aussi.

Il est clair que $\varphi(x) \neq 0$, si, et seulement si, $x \in\ ]-1,1[$; le support de φ est donc $[-1,1]$ (par définition le support de f est $\mathrm{Adh}(\{x, f(x) \neq 0\})$).

Pour tout intervalle ouvert borné $J =]a,b[$, il est clair que f_J est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de support l'intervalle fermé $[a,b]$.

Posons pour tout n entier et pour tout x réel : $v_n(x) = \frac{1}{2^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda_n}} f_{J_n}(x)$; pour tout n la fonction v_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $g = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Pour montrer que g existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de démontrer que pour tout k entier la série $\sum_n v_n^{(k)}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Notons M_k un majorant de $\left|\varphi^{(k)}\right|$ sur l'intervalle $[-1,1]$; comme φ est nulle hors de $[-1,1]$, c'est aussi un majorant de $\left|\varphi^{(k)}\right|$ sur $\mathbb{R}$.

Notons aussi pour tout n entier $\mu_n = \dfrac{b_n + a_n}{2}$; avec cette notation, pour tout x réel et tout n entier : $v_n(x) = \dfrac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{\lambda_n}} \varphi\left(\dfrac{x-\mu_n}{\lambda_n}\right)$, d'où pour tout k entier :

$$v_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{-\frac{1}{\lambda_n}} \frac{1}{\lambda_n^k} \varphi^{(k)}\left(\frac{x-\mu_n}{\lambda_n}\right).$$

Nous obtenons donc la majoration :

$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^n} \frac{1}{\lambda_n^k} e^{-\frac{1}{\lambda_n}} M_k.$$

Or la fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$, $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, est continue de limite nulle à l'infini, donc majorée sur $\mathbb{R}_+$. Une étude rapide permet d'obtenir la majoration :

$$(\forall t \geq 0) \ \ t^k e^{-t} \leq k^k e^{-k}.$$

Donc pour tous k et n entiers, et pour tout x réel :

$$\left|v_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^n} k^k e^{-k} M_k.$$

La série $\sum\limits_n v_n^{(k)}$ est donc pour tout k normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons en déduire que la fonction g existe et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions v_n étant toutes à valeurs ≥ 0, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x) = 0$ si, et seulement si, pour tout entier n, $v_n(x) = 0$; donc $g(x) = 0$ si, et seulement si, pour tout n, $f_{J_n}(x) = 0$, soit encore $x \notin \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n =]-A, A[\setminus L$. L'ensemble des zéros réels de la fonction g est donc $]-\infty, -A] \cup L \cup [A, +\infty[$; l'ensemble des zéros de sa restriction à $]-A, A[$ est donc L.

Exercice 12) :

> Soit a réel > 0 et $f : [0, a] \to \mathbb{C}$ continue.
>
> a) Prouver :
>
> $$(\forall t \in [0,a]) \ \int_0^t f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^a e^{-uk(x-t)} f(x)\,dx.$$
>
> b) On suppose $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N} \ \left|\int_0^a e^{nx} f(x)\,dx\right| \leq M$.
>
> Montrer que $f = 0$.

c) Soit A réel > 1 et $g : [1, A] \to \mathbb{C}$ continue. On suppose :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \left| \int_1^A x^n g(x) \mathrm{d}x \right| \leq M .$$

Montrer que $g = 0$. ■

a) Etablissons d'abord pour tout $t \in [0, a]$ et u réel ≥ 0, l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^a \mathrm{e}^{-uk(x-t)} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^a \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x .$$

Les réels t et u étant fixés, pour tout entier N :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^a \mathrm{e}^{-uk(x-t)} f(x) \mathrm{d}x = \int_0^a \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \mathrm{e}^{-uk(x-t)} \right) f(x) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^a \left(1 - \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(-\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right)^k}{k!} \right) f(x) \mathrm{d}x$$

Nous pouvons ici utiliser la majoration explicite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall N \in \mathbb{N} \ \left| \mathrm{e}^{-x} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-x)^n}{n!} \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \mathrm{e}^{|x|} \text{ (formule de Taylor).}$$

D'où :

$$\left| \int_0^a \left(1 - \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(-\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right)^k}{k!} \right) f(x) \mathrm{d}x - \int_0^a \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_0^a \frac{\mathrm{e}^{-u(N+1)(x-t)}}{(N+1)!} \exp\left(\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right) |f(x)| \mathrm{d}x$$

Comme $|x - t| \leq a$, et $u \geq 0$, nous pouvons encore majorer cette intégrale par :

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{ua}\right)^{N+1}}{(N+1)!} \int_0^a \exp\left(\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right) |f(x)| \mathrm{d}x .$$

Ce majorant ayant pour limite 0 quand N tend vers l'infini, nous pouvons en déduire :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^a \mathrm{e}^{-uk(x-t)} f(x) \mathrm{d}x \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^a \left(1 - \exp\left(-\mathrm{e}^{-u(x-t)}\right)\right) f(x) \mathrm{d}x ,$$

d'où la convergence de la série et l'égalité annoncée.

Le réel t étant fixé, $t \in [0, a]$, et x variant dans l'intervalle $[0, a]$

– si $x > t$, alors $-u(x-t) \underset{u \to +\infty}{\to} -\infty$, donc $e^{-u(x-t)} \underset{u \to +\infty}{\to} 0$, et $1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right) \underset{u \to +\infty}{\to} 0$.

– si $x < t$, alors $-u(x-t) \underset{u \to +\infty}{\to} +\infty$, donc $e^{-u(x-t)} \underset{u \to +\infty}{\to} +\infty$, et $1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right) \underset{u \to +\infty}{\to} 1$.

– si $x = t$, alors $1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right) \underset{u \to +\infty}{\to} 1 - e^{-1}$.

Le réel t étant toujours fixé, la famille de fonctions $(\varphi_u)_{u \in \mathbb{R}_+}$, où pour tout $x \in [0, a]$: $\varphi_u(x) = \left(1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right)\right) f(x)$, converge donc simplement, quand u tend vers $+\infty$, vers la fonction φ définie par $\varphi(x) = 0$ si $x > t$, $\varphi(x) = f(x)$ si $x < t$, et $\varphi(t) = \left(1 - e^{-1}\right) f(x)$. D'autre part, pour tout $x \in [0, a]$ et $u \in \mathbb{R}_+$:

$$|\varphi_u(x)| = \left(1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right)\right) |f(x)| \leq |f(x)| \leq \sup_{x \in [0,a]} |f(x)|.$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ou plus précisément le théorème VIII.5.1, pour obtenir :

$$\int_0^a \left(1 - \exp\left(-e^{-u(x-t)}\right)\right) f(x) \, dx \underset{u \to +\infty}{\to} \int_0^a \varphi(x) \, dx = \int_0^t f(x) \, dx.$$

Cela termine la démonstration du a).

b) Effectuons dans les intégrales le changement de variable $y = a - x$, nous obtenons pour tout n entier :

$$\int_0^a e^{nx} f(x) \, dx = \int_0^a e^{n(a-y)} f(a-y) \, dy = e^{na} \int_0^a e^{-ny} f(a-y) \, dy.$$

Nous pouvons alors déduire de l'hypothèse que pour tout n entier :

$$\left| \int_0^a e^{-ny} f(a-y) \, dy \right| \leq M e^{-na}.$$

Posons pour tout $x \in [0, a]$, $g(x) = f(a-x)$; la fonction g est continue.

Pour tous n et k entiers, et $t \in [0, a]$, nous voyons que :

$$\left| \int_0^a e^{-nk(x-t)} g(x) \, dx \right| = \left| e^{nkt} \int_0^a e^{-nkx} g(x) \, dx \right| \leq e^{nkt} M e^{-nka} = M e^{-nk(a-t)}.$$

Nous en déduisons que pour tout n entier, et $t \in [0, a]$:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^a \mathrm{e}^{-nk(x-t)}\,g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M\,\mathrm{e}^{-nk(a-t)}}{k!} = M\left(\exp\left(\mathrm{e}^{-n(a-t)}\right)-1\right),$$

d'où, pour tout $t \in [0, a[$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^a \mathrm{e}^{-nk(x-t)}\,g(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

D'après le a), nous pouvons en déduire que pour tout $t \in [0, a[$:

$$\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction continue g est donc nulle sur l'intervalle $[0, a]$, et il en est de même pour la fonction f.

c) Effectuons dans les intégrales le changement de variable $x = \mathrm{e}^z$; nous obtenons :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|\int_0^{\mathrm{Log}\,A} \mathrm{e}^{nz}\,g\left(\mathrm{e}^z\right)\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z\right| \le M,$$

soit encore :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|\int_0^{\mathrm{Log}\,A} \mathrm{e}^{(n+1)z}\,g\left(\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}z\right| \le M.$$

On en déduit facilement que :

$$(\exists M' \in \mathbb{R}_+) \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ \left|\int_0^{\mathrm{Log}\,A} \mathrm{e}^{nz}\,g\left(\mathrm{e}^z\right)\mathrm{d}z\right| \le M'.$$

Il est donc clair que la fonction continue $z \mapsto g\left(\mathrm{e}^z\right)$, $[0, \mathrm{Log}\,A] \to \mathbb{C}$, vérifie les hypothèses du b), et est donc nulle sur l'intervalle $[0, \mathrm{Log}\,A]$. La fonction g est donc identiquement nulle sur l'intervalle $[1, A]$.

BIBLIOGRAPHIE

CAMPBELL R., *Intégrales eulériennes*, Dunod, 1966.

CARTAN H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann, 1961.

CASANOVA G., *Les séries mathématiques*, P.U.F., coll. «Que sais-je ?».

CHOQUET G., *Cours d'analyse*, T2. *Topologie*, Masson, 1969.

COX D.A., *The arithmetic geometric mean of Gauss*. «L'Enseignement Mathématique», T 30, 1984, pp. 275-330.

DENJOY A., *Sur les fonctions dérivées sommables*, Ann. Scient. de l'École Normale, 1917.

DEHEUVELS P., *L'intégrale*, P.U.F., coll. «Que Sais-je ?», 1985.

DIEUDONNÉ J., *Calcul infinitésimal*, Hermann, 1980.

GELFOND A.O., *Transcendantal and algebraic numbers*, trad. anglaise, Dover, 1960.

HARDY G.H., LITTLEWOOD G., POLYA G., *Inequalities*, Cambridge Un. Press.

KURATOWSKI K., *Topology*, T 1 et 2, trad. anglaise, Academic Press.

LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration*, Gauthier-Villars, éd. 1926.

LELONG-FERRAND J., COMBES M., *Problèmes d'analyse*, Dunod, 1967.

LEVEQUE W.J., Topics in number theory, Addison Wesley.

RIESZ F., NAGY B., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, 1952.

SCHWARTZ L., *Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1980.

SIEGEL C.L., *Topics in complex-function theory*, Wiley, 1961.

TITCHMARSH E.G., *The theory of functions*, Oxford, Un. Press.

VALIRON G., *Théorie des fonctions*, Masson, 1966.

VERDIER J.L., *Énoncé de l'épreuve de math* 6 h *du concours d'entrée à l'ENS Ulm, Option M'* (Session 1969).

J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

Exercices résolus d'analyse du cours de mathématiques - 2

Ce recueil contient 260 exercices résolus choisis parmi les énoncés les plus représentatifs du cours d'analyse.

Très détaillées et de niveau varié, les solutions ont été rédigées avec le souci constant d'approfondir les notions abordées et d'élargir la portée des exercices.

Dans la lignée du cours avec lequel il forme un ensemble sans égal (J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, *cours de mathématiques*, tome 2, *analyse*), ce recueil est un outil de travail complet et vivant qui ouvre la voie aux résultats concrets et pratiques.

L'ensemble comportera 4 volumes :

- *Exercices résolus d'analyse,* 1993 ;
- *Exercices résolus d'algèbre*, 1994, à paraître ;
- *Exercices résolus d'analyse* (compléments), 1995, à paraître ;
- *Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie*, 1996, à paraître.

9 782100 014712

Code 041471
ISBN 2 10 001471 4

DUNOD