

M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

**Exercices résolus
d'algèbre bilinéaire
et géométrie
du cours
de mathématiques - 4**

DUNOD



Toutes les matières, tous les niveaux...

**Exercices résolus
d'algèbre bilinéaire
et géométrie
du cours
de mathématiques - 4**

Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de mathématiques - 4

J.M. Arnaudière

Maître de conférences
Université Paris VI

P. Delezoide

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Buffon, Paris

H. Fraysse

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales
au Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

DUNOD

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établisse-

ments d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation

du Centre français d'exploitation du droit de copie (**CFC**, 3 rue Hautefeuille, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 1996
ISBN 2 10 003102 3

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code relative à la reproduction par reprographie.

En hommage à Charles Hermite et à Michel Chasles

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

CHAPITRE I	Formes bilinéaires, formes quadratiques	1
§ I.1	Formes bilinéaires, exercices 3, 6	1
§ I.2	Formes bilinéaires en dimension finie, exercices 1, 2, 4, 6	3
§ I.3	Formes quadratiques, exercices 1, 3	6
§ I.4	Orthogonalité pour les formes bilinéaires, exercices 2, 5, 6, 8	8
§ I.5	Classification des formes bilinéaires, exercices 1, 3, 6, 8, 10, 14	15
§ I.6	Algorithme de Gauss, exercices 1, 2	24
§ I.7	Automorphismes d'une forme quadratique, exercices 1, 2	31
CHAPITRE II	Espaces euclidiens	33
§ II.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz et conséquences, exercices 1, 6, 7	33
§ II.2	Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel, exercices 2, 3, 8, 9	37
§ II.3	Familles orthonormales, exercices 1, 3, 4, 5, 6, 16	40
§ II.4	Première étude des groupes orthogonaux, exercices 4, 6, 9, 10	52
§ II.5	Produit mixte et produit vectoriel, exercices 3, 4, 8	61
CHAPITRE III	Endomorphismes des espaces euclidiens	67
§ III.1	Généralités d'un groupe euclidien, exercices 4, 7, 11	67
§ III.2	Adjoint d'un endomorphisme, exercices 3, 7	73
§ III.3	Diagonalisation des endomorphismes symétriques, exercices 1, 4, 5, 7, 14, 16, 18	75
§ III.4	Endomorphismes normaux d'un espace euclidien, exercices 1, 4	90

CHAPITRE IV Formes hermitiennes, espaces hermitiens

§ IV.1	Formes sesquilinéaires hermitiennes, exercices 1, 4	92
§ IV.2	Formes hermitiennes en dimension finie, exercices 2, 5, 8, 9	94
§ IV.3	Espaces préhilbertiens, exercices 3, 6, 11	99
§ IV.4	Matrices unitaires, groupes unitaires en dimension finie, exercices 2, 3, 4, 10, 14	103
§ IV.5	Adjoint d'un endomorphisme, exercices 3, 14, 15, 17, 18, 23, 24, 28	110
CHAPITRE V	Notions de géométrie affine	131
§ V.1	Espaces affines, exercice 1	131
§ V.2	Applications affines, groupe affine, exercices 1, 3, 4	131
§ V.3	Sous-espaces affines, exercices 1, 4	135
§ V.4	Barycentres, exercices 1, 3, 9	138
§ V.5	Applications affines remarquables, exercices 2, 3, 7	143
§ V.6	Convexité, exercices 3, 7, 8	146
§ V.7	Géométrie affine en dimension 2 ou 3, exercices 1, 3, 5, 9	152
CHAPITRE VI	Espaces affines euclidiens	158
§ VI.1	Généralités ; isométries, exercices 2, 5	158
§ VI.2	Structure des isométries, exercices 2, 4, 6	165
§ VI.3	Exemples de groupes d'isométries, exercices 1, 2, 6	172
§ VI.4	Angles, exercices 1, 5	176
§ VI.5	Distances, droites et plans, exercices 1, 4	179
§ VI.6	Similitudes, exercice 2	183
§ VI.7	Cercles, sphères, exercices 4, 6, 7	185
CHAPITRE VII	Courbes en géométrie affine	191
§ VII.1	Courbes paramétrées, exercices 1, 2, 4, 7, 8	191
§ VII.2	\mathcal{C}^k -équivalence des courbes paramétrées, exercices 1, 2, 5	203
§ VII.3	Contact, exercices 1, 2, 6	212
§ VII.4	Etude locale affine des courbes paramétrées, exercices 1, 3	217
§ VII.5	Exemples et applications, exercices 1, 3, 4	220
CHAPITRE VIII	Enveloppes de droites d'un plan affine	

§ VIII.1	Familles de droites à un paramètre, exercices 1, 2, 3	234
§ VIII.2	Point caractéristique, enveloppe, exercices 1, 3, 4	241
§ VIII.3	Exemples d'enveloppes de droites, exercices 1, 2, 3, 11	246
CHAPITRE IX	Courbes en géométrie euclidienne	255
§ IX.1	Fonctions angulaires, exercices 2, 3, 6e), 7c), 9	255
§ IX.2	Longueur d'une courbe, exercices 1, 3, 6	265
§ IX.3	Abscisses curvilignes, courbure, exercices 3, 5	267
§ IX.4	Courbure des courbes planes, exercices 1, 2, 3, 4, 5, 8, 18	271
§ IX.5	Courbes planes définies par leur courbure algébrique, exercices 1, 2, 5	290
§ IX.6	Développées, parallèles, développantes, exercices 1, 2, 7	297
CHAPITRE X	Notions élémentaires sur les coniques	305
§ X.1	Polynômes de degré 2 sur \mathbb{C} , exercice 2	305
§ X.2	Zéros d'un polynôme de degré 2 sur \mathbb{C} , exercices 1, 2b), 3, 6	307
§ X.3	Intersection avec une droite, exercices 1, 4, 7	314
§ X.4	Coniques en géométrie euclidienne, exercices 2, 3, 6, 11, 14, 18, 22, 27, 30	320
CHAPITRE XI	Notions élémentaires sur les surfaces	348
§ XI.1	Surfaces paramétrées, exercices 2, 4, 7, 9	348
§ XI.2	Etude géométrique des plans tangents, exercices 1, 2	355
§ XI.3	Cylindres, cônes, surfaces réglées, exercices 1, 3, 6, 9, 11	359
§ XI.4	Surfaces de révolution, exercices 1, 3, 6	366
CHAPITRE XII	Notions élémentaires sur les quadriques	373
§ XII.1	Fonctions polynomiales de degré 2 sur \mathbb{C} , exercice 2	373
§ XII.2	Zéros d'une fonction $f \in \mathcal{P}_2$, exercices 1, 2, 4, 7	374
§ XII.3	Quadriques, droites et plans, exercices 3, 4, 6, 9	380
§ XII.4	Quadriques en géométrie euclidienne, exercices 2, 3, 9, 12, 18	388
§ XII.5	Quelques problèmes classiques sur les quadriques, exercices 1, 3, 5, 11, 14, 15	398

INTRODUCTION

Nous présentons ici le dernier de la série de quatre livres d'exercices corrigés correspondant au *Cours de Mathématiques* de J. M. Arnaudière et H. Fraysse, un pour chaque tome.

Dans ces livres de cours, nous avons sélectionné environ un exercice sur cinq, en variant les niveaux, mais surtout en les choisissant aussi représentatifs que possible. Nous avons aussi donné la réponse à un assez grand nombre des exercices les plus ardues. Toutefois, nous n'avons pas classé les questions par ordre de difficulté, car un tel classement comporterait une trop grande part de subjectivité. Chacun sait que bien souvent, les énigmes sont loin d'être résolues par ceux que l'on attend, et qu'inversement, ce ne sont pas toujours ceux que l'on aurait cru qui "sèchent"... donc, au lecteur d'apprécier le prix de son effort !

Pour chaque exercice, nous avons tenu à donner une solution très développée, en l'ouvrant au maximum sur son environnement mathématique ; car il est bien plus bénéfique à tous égards d'étudier un exercice en relation avec cet environnement que l'exercice pour lui-même, isolément. Le rôle de l'association d'idées en mathématiques est bien connu. Le grand mathématicien Hadamard disait que pour résoudre une question épineuse, après avoir bien "séché" sur elle il faut l'abandonner, puis "penser à côté". Les exercices de mathématiques évoquent l'art des illusionnistes : un spectateur passif pourrait s'extasier toute sa vie devant ces tours de magie sans jamais en percer le secret. De même, un "bachoteur" naïf pourrait lire des centaines d'exercices de mathématiques sans augmenter sa capacité à en résoudre de nouveaux, s'il n'essayait de comprendre un peu ce qui se passe dans les coulisses, c'est-à-dire de bien situer la question dans son environnement. L'idéal serait d'apprendre à en composer de nouveaux, ou même plus simplement à en présenter de connus sous un jour original, qui les rende méconnaissables au spectateur passif...

Nous avons voulu la plus grande rigueur dans la rédaction des solutions, au moins autant que pour les livres de cours. Le résultat, nous l'espérons, est un outil de travail de fond, pour les préparations de longue haleine, qui au-delà du souci immédiat de la réussite à tel ou tel concours, préserve le plus large contact avec la science.

Il va de soi que nous remercions d'avance ceux de nos lecteurs qui voudront bien nous faire part de leurs remarques et suggestions.

Nous remercions vivement les Éditions Dunod, et tout particulièrement Gisèle Maïus, d'avoir entrepris la publication de ces ouvrages, qui s'imposaient pour donner leur pleine efficacité aux quatre livres de cours.

Chapitre I

FORMES BILINÉAIRES, FORMES QUADRATIQUES

§ I.1 FORMES BILINÉAIRES

Exercice 3 :

Soit E le \mathbb{R} -ev $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $\alpha \in E$, B_α désigne l'élément de $S_2(E)$ défini par :

$$(\forall (f, g) \in E^2) \quad B_\alpha(f, g) = \int_0^1 \alpha f g.$$

a) Donner une CNS portant sur α pour que B_α soit non dégénérée.

b) On choisit α pour que B_α soit non dégénérée. Soit \mathcal{P} le sous- \mathbb{R} -ev de E formé des fonctions *polynomiales* : $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{P}^\perp = \{0\}$. ■

a) Notons $Z_\alpha = \{x \in [0, 1] \mid \alpha(x) = 0\}$. Montrons que la forme bilinéaire B_α est non dégénérée si, et seulement si, Z_α ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

Supposons $]a, b[\subset Z_\alpha$, où $a < b$. Soit $f \in E$ non nulle, dont le support est inclus dans $]a, b[$ (l'existence d'une telle fonction est claire). La fonction αf étant identiquement nulle, l'application $g \mapsto B_\alpha(f, g)$ est identiquement nulle sur E , bien que f ne soit pas nulle. On voit donc que, dans ce cas, la forme bilinéaire B_α est dégénérée.

Supposons maintenant que Z_α ne contienne aucun intervalle ouvert non vide. Soit $f \in E$ telle que l'application $g \mapsto B_\alpha(f, g)$ soit nulle sur E . En particulier :

$$\int_0^1 \alpha f \alpha f = 0,$$

d'où, puisque α et f sont continues, $\alpha^2 f^2 = 0$. En utilisant l'hypothèse, on voit que tout $a \in [0, 1]$ est limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d

$[0, 1] \setminus Z_\alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha(x_n) \neq 0$, donc $f(x_n) = 0$. Nous en déduisons :

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in [0, 1]$, la fonction f est nulle. La forme bilinéaire B_α est donc dans ce cas non dégénérée.

La forme bilinéaire B_α est donc non dégénérée si, et seulement si, l'ensemble des zéros de α ne contient aucun intervalle ouvert non vide (i.e. est d'intérieur vide).

b) Soit $f \in \mathcal{P}^\perp$, c'est-à-dire telle que pour toute fonction polynomiale P sur $[0, 1]$, on ait :

$$\int_0^1 \alpha f P = 0.$$

Soit $g \in E$, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass (Tome 2, Théorème XII.5.2), il existe une suite de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$, notée ici $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge uniformément vers g . Il est clair que la suite $(\alpha f P_n)$ converge uniformément vers $\alpha f g$, et que par conséquent :

$$\int_0^1 \alpha f g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \alpha f P_n = 0.$$

La forme bilinéaire B_α étant supposée non dégénérée, nous en déduisons $f = 0$. On a donc l'égalité $\mathcal{P}^\perp = \{0\}$.

Exercice 6 :

|| Soit E et F deux K -ev quelconques et $f \in \text{BL}(E, F; K)$ qui permet de définir la f -orthogonalité. Soit H un sous- K -ev de E et L un sous- K -ev de F . Montrer :

$$(\perp(H^\perp))^\perp = H^\perp \text{ et : } \perp((\perp L)^\perp) = \perp L. \blacksquare$$

Soit A un sous- K -espace de E , et $x \in A$. Pour tout $y \in A^\perp$, on a $f(x, y) = 0$, et par conséquent $x \in \perp(A^\perp)$. On voit donc que $A \subset \perp(A^\perp)$. On démontrerait de même que pour tout sous- K -espace B de F , $B \subset (\perp B)^\perp$.

Remarquons que si A et A' sont deux sous- K -espaces de E tel que $A \subset A'$, alors $A^\perp \supset A'^\perp$. De même, si B et B' sont deux sous- K -espaces de F tels que $B \subset B'$, alors $\perp B \supset \perp B'$.

Soit H un sous- K -espace de E , puisque $H \subset \perp(H^\perp)$, on en déduit l'inclusion : $(\perp(H^\perp))^\perp \subset H^\perp$; mais on a aussi l'inclusion : $H^\perp \subset (\perp(H^\perp))^\perp$; on a donc l'égalité $H^\perp = (\perp(H^\perp))^\perp$.

On démontrerait de manière analogue l'égalité ${}^\perp(({}^\perp L)^\perp) = {}^\perp L$ pour tout sous- K -espace L de F .

§ I.2 FORMES BILINÉAIRES EN DIMENSION FINIE

Exercice 1 :

|| Soit E un K -ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in S_2(E) \cup \Lambda_2^*(E)$.
 || Montrer que, pour tout sous- K -ev H de E , on a : $(H^\perp)^\perp =$
 || $H + E^\perp$ (pour la f -orthogonalité). ■

Soient E et F deux K -ev de dimension finie, et $f \in \text{BL}(E, F; K)$. Les notions d'orthogonalité envisagées ci-dessous seront relatives à la forme bilinéaire f .

Soit B un sous- K -ev de F . Un élément $x \in E$ est dans ${}^\perp B$ si, et seulement si, pour tout $y \in B$, $f(x, y) = I_f(x)(y) = 0$, soit si, et seulement si, $I_f(x) \in B^0$ (orthogonal de B dans F^*). On a donc l'égalité :

$${}^\perp B = I_f^{-1}(B^0).$$

Soit H un sous- K -ev de E , d'après la proposition I.1.1 on a l'égalité :

$$H^\perp = {}^0(I_f(H)),$$

et d'après ce qui précède :

$${}^\perp(H^\perp) = I_f^{-1}((H^\perp)^0) \quad \text{et} \quad (H^\perp)^0 = ({}^0(I_f(H)))^0.$$

Comme F est de dimension finie, on a :

$$({}^0(I_f(H)))^0 = I_f(H),$$

et par conséquent :

$${}^\perp(H^\perp) = I_f^{-1}(I_f(H)) = H + \text{Ker}(I_f) = H + {}^\perp F.$$

Dans le cas où $E = F$, et où f est symétrique ou alternée, l'orthogonal à droite et l'orthogonal à gauche d'un sous- K -ev H de E coïncident. On a donc l'égalité :

$$(H^\perp)^\perp = H + E^\perp.$$

Exercice 2 :

|| Soit E et F deux K -ev de même dimension finie

|| donne une forme bilinéaire *non dégénérée* $f \in \text{BL}_2(E, F; K)$.
 || Montrer que, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , il existe
 || une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de F telle que :
 || $(\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad f(e_i, e'_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). ■

Comme f est non dégénérée, l'application $I_f : E \rightarrow F^*$ est un isomorphisme linéaire. Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a par définition l'égalité :

$$I_f(e_i)(e'_j) = f(e_i, e'_j) .$$

La base \mathcal{B}' vérifie donc la condition de l'énoncé si, et seulement si :

$$(1) \quad (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad I_f(e_i)(e'_j) = \delta_{i,j} .$$

Cette condition (1) est vérifiée si, et seulement si, la base $(I_f(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ (base de F^*) est la base duale de la base \mathcal{B}' . On sait qu'il existe une et une seule base de F vérifiant cette condition.

Exercice 4 :

|| Soit E et F deux K -ev de dimension finie, $n = \dim_K(E)$, $p =$
 || $\dim_K(F)$, et $f \in \text{BL}(E, F; K)$. On considère la f -orthogonalité.
 || Soit H un sous- K -ev de E et $g = f|_{H \times F}$. Montrer :
 || $\dim({}^\perp(H^\perp)) = n - \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$. ■

Vue la définition de g , il est clair que l'application $I_g : H \rightarrow F^*$, est la restriction à H de l'application $I_f : E \rightarrow F^*$. On a donc l'égalité :

$$\text{Ker}(I_g) = \text{Ker}(I_f) \cap H .$$

Nous en déduisons l'égalité des dimensions :

$$(1) \quad \dim H - \text{rg}(g) = \dim(\text{Ker}(I_f) \cap H) .$$

On obtient :

$$\dim(\text{Ker}(I_f) \cap H) = \dim(\text{Ker}(I_f)) + \dim H - \dim(\text{Ker}(I_f) + H) .$$

Mais comme (cf. exercice 1) :

$${}^\perp(H^\perp) = \text{Ker}(I_f) + H = {}^\perp F + H ,$$

il vient :

$$(2) \quad \dim(\text{Ker}(I_f) \cap H) = \dim E - \text{rg}(f) + \dim H - \dim({}^\perp(H^\perp))$$

En comparant les égalités (1) et (2), on obtient finalement :

$$\dim({}^\perp(H^\perp)) = \dim E - \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) .$$

Exercice 6 :

Soit E et F deux K -ev de même dimension finie $n \geq 1$, et $f \in \operatorname{BL}(E, F; K)$. On considère la fonction $D_f : E^n \times F^n \rightarrow K$,
 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \det \left([f(x_i, y_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right)$.

a) Montrer que D_f est multilinéaire sur $E^n \times F^n$, et qu'elle est alternée en chacun des groupes de variables (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) .

b) Soit $u \in \operatorname{Hom}_K(E)$ et $v \in \operatorname{Hom}_K(F)$. Démontrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$, on a l'égalité :

$$D_f((u(x_1), \dots, u(x_n)), (v(y_1), \dots, v(y_n))) = \\ = \det(u) \det(v) D_f(x, y) . \blacksquare$$

a) Soit $\mathcal{B}_1 = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_2 = (b_1, \dots, b_n)$ une base de F . La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sera notée Ω . Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$. Posons pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$x_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} a_i \quad \text{et} \quad y_j = \sum_{i=1}^n \mu_{i,j} b_i .$$

On notera $L = [\lambda_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $M = [\mu_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. On remarque que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ le scalaire :

$$f(x_i, y_j) = \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \lambda_{h,i} f(a_h, b_k) \mu_{k,j} ,$$

est le terme d'indices (i, j) de la matrice ${}^t L \Omega M$. On a donc l'égalité :

$$D_f(x, y) = \det({}^t L) \det(\Omega) \det(M) = \\ = \det_{\mathcal{B}_1}(x_1, \dots, x_n) \det(\Omega) \det_{\mathcal{B}_2}(y_1, \dots, y_n) .$$

Il est alors clair que D_f est multilinéaire sur $E^n \times F^n$, et qu'elle est alternée en chacun des groupes de variables (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) .

b) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$, on a :

$$\begin{aligned} D_f((u(x_1), \dots, u(x_n)), (v(y_1), \dots, v(y_n))) &= \\ &= \det_{\mathcal{B}_1}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \det(\Omega) \det_{\mathcal{B}_2}(v(y_1), \dots, v(y_n)) = \\ &= \det(u) \det_{\mathcal{B}_1}(x_1, \dots, x_n) \det(\Omega) \det(v) \det_{\mathcal{B}_2}(y_1, \dots, y_n) = \\ &= \det(u) D_f(x, y) \det(v), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

§ I.3 FORMES QUADRATIQUES

Exercice 1 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \Phi \text{ la forme quadratique sur } K^n \text{ définie dans la} \\ \text{base canonique } \mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n) \text{ par :} \\ \\ \Phi(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (x_i - x_j)^2, \text{ pour tout } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in K^n, \\ \\ \text{où les } a_{i,j} \in K \text{ sont donnés. Calculer la matrice } \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\Phi). \blacksquare \end{array} \right.$$

Posons pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\omega_{i,j} = a_{i,j} \text{ si } i < j,$$

$$\omega_{i,j} = 0 \text{ si } i = j,$$

$$\text{et } \omega_{i,j} = a_{j,i} \text{ si } j < i.$$

La matrice $\Omega = [\omega_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est évidemment symétrique. On voit que pour tout $x \in K^n$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} (x_i - x_j)^2,$$

d'où :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} x_i^2 - \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} x_j^2.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ notons s_i la somme des éléments de la colonne i de la matrice Ω ; c'est aussi la somme de la ligne i de Ω . On peut remarquer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$s_i = \sum_{j=1}^n \omega_{i,j} = \sum_{j < i} a_{i,j} + \sum_{j > i} a_{j,i}.$$

Avec cette notation on obtient, pour tout $x \in K^n$:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i x_i^2 - \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n s_j x_j^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n s_i x_i^2 - \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \omega_{i,j} x_i x_j .\end{aligned}$$

D'où :

$$\text{Mat}_{\mathbb{Q}}(\Phi) = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) - \Omega .$$

Le terme (i, j) de $\text{Mat}_{\mathbb{Q}}(\Phi)$ est donc $-a_{i,j}$ si $1 \leq i < j \leq n$, s_i si $1 \leq i = j \leq n$, et $-a_{j,i}$ si $1 \leq j < i \leq n$.

Exercice 3 :

Soit n et p des entiers tels que $3 \leq p \leq n$, et des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de K^* .

a) Démontrer que le polynôme homogène $\Phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i^2$ est

irréductible dans $K[X_1, \dots, X_n]$.

b) Soit $\Psi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2$. Montrer que, pour que Ψ soit non irréductible dans $K[X_1, X_2]$, il faut et il suffit qu'il existe $\rho \in K^*$ tel que $\lambda_2/\lambda_1 = -\rho^2$. ■

a) Supposons que le polynôme homogène Φ ne soit pas irréductible. Il existe alors deux polynômes P et Q , non constants, tels que $\Phi = PQ$. Ces polynômes sont nécessairement de degré total 1. Ecrivons $P = a + P_1$, où $a \in K$ et P_1 est un polynôme homogène de degré 1, et de même $Q = b + Q_1$. On a $\Phi = ab + aQ_1 + bP_1 + P_1Q_1$, d'où : $0 = ab$, $0 = aQ_1 + bP_1$, et $\Phi = P_1Q_1$ (unicité des composantes homogènes). On en déduit facilement $a = b = 0$. On a donc :

$$\Phi = P_1Q_1 = PQ .$$

Notons φ la fonction polynomiale associée à Φ , p la fonction associée à P et q la fonction associée à Q ; φ est une forme quadratique, p et q sont des formes linéaires, et on a, pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = p(x)q(x)$. La forme polaire de Φ est la forme bilinéaire f :

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2} (p(x)q(y) + p(y)q(x)) .$$

Il est donc clair que $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Sing}(f)$, d'où $\text{rg}(f) \leq 2$; nous obtenons donc une contradiction avec l'hypothèse qui implique

$\text{rg}(\Phi) = p \geq 3$. Le polynôme Φ est donc irréductible. Le lecteur remarquera que si le corps K est de caractéristique 2, alors :

$$X_1^2 + \dots + X_p^2 = (X_1 + \dots + X_p)^2.$$

b) La condition est évidemment suffisante, puisque si $\lambda_2 = -\rho^2 \lambda_1$, alors

$$\Psi = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = \lambda_1 (X_1^2 - \rho^2 X_2^2) = \lambda_1 (X_1 - \rho X_2)(X_1 + \rho X_2).$$

Montrons que la condition est nécessaire.

Supposons que le polynôme Ψ soit non irréductible, d'après le a), il existe $(a, b, c, d) \in K^4$ tel que :

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = (a X_1 + b X_2)(c X_1 + d X_2),$$

ce qui équivaut aux égalités :

$$\lambda_1 = a c ; \quad 0 = a d + b c ; \quad \lambda_2 = b d.$$

Comme $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, les scalaires a , b , c et d sont nécessairement tous non nuls. On a :

$$\frac{a}{b} = -\frac{c}{d},$$

donc :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a c}{b d} = -\left(\frac{c}{d}\right)^2.$$

La condition de l'énoncé est donc bien nécessaire.

§ I.4 ORTHOGONALITÉ POUR LES FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES OU ALTERNÉES

Exercice 2 :

Soit K un corps algébriquement clos et Φ une forme quadratique sur un K -ev de dimension finie $n \geq 2$. Soit Γ le cône isotrope de Φ . Montrer que si Φ est de rang ≥ 2 , alors Γ n'est contenu dans aucun hyperplan de E . ■

Nous noterons p le rang de la forme quadratique Φ . D'après le Théorème I.4.2, et en appliquant la méthode utilisée dans la Proposition I.4.3, on voit qu'il existe dans E une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

$$\left(\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \right) \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2.$$

Supposons que Γ soit inclus dans un hyperplan H . Il existe alors $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $e_i \notin H$, et comme e_i n'est pas isotrope, on a $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme $p \geq 2$, on peut trouver $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $j \neq i$. Notons P le plan engendré par les vecteurs e_i et e_j ; il n'est pas inclus dans H , donc coupe H suivant une droite D . L'ensemble des vecteurs isotropes pour Φ qui sont dans P , est donc inclus dans D . Ceci est impossible; en effet, si $r \in K$ est tel que $r^2 = -1$, les vecteurs $e_i + r e_j$ et $e_i - r e_j$ sont isotropes, dans P , et linéairement indépendants.

Le cône isotrope de Φ n'est donc inclus dans aucun hyperplan.

Exercice 5 :

Soit E un K -ev de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in S_2(E)$, non dégénérée. Soit \tilde{f} sa forme duale. On note Φ la forme quadratique associée à f et $\tilde{\Phi}$ celle associée à \tilde{f} .

Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\tilde{\Phi}(\varphi) \neq 0$. On pose $\varepsilon_n = I_f^{-1}(\varphi)$.

Soit $\gamma = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ une base de $H = \text{Ker}(\varphi)$. On note $\Psi = \Phi|_H$. Vérifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est une base de E et qu'on a :

$$\text{Discr}_\gamma(\Psi) = \frac{\text{Discr}_{\mathcal{B}}(\Phi)}{\tilde{\Phi}(\varphi)} . \blacksquare$$

Par définition de ε_n , pour tout $x \in E$ on a l'égalité :

$$f(x, \varepsilon_n) = \varphi(x) .$$

On voit donc que pour tout $x \in H$, $f(x, \varepsilon_n) = 0$. D'autre part, par définition, pour toutes formes linéaires ψ et ψ' sur E , on a :

$$\tilde{f}(\psi, \psi') = f(I_f^{-1}(\psi), I_f^{-1}(\psi')) .$$

Donc :

$$\tilde{\Phi}(\varphi) = \Phi(I_f^{-1}(\varphi)) = \Phi(\varepsilon_n) = f(\varepsilon_n, \varepsilon_n) = \varphi(\varepsilon_n) \quad (\neq 0) .$$

Le vecteur ε_n n'est donc pas dans l'hyperplan H , et $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ est bien une base de E . Soit Ω' la matrice dans γ de la forme bilinéaire induite par f sur H ; cette matrice est aussi la matrice dans la base γ de la forme quadratique Ψ . D'après ce qui précède, la matrice Ω de f dans la base \mathcal{B} , qui est aussi la matrice de la forme quadratique Φ dans la base \mathcal{B} , est de la forme :

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} \Omega' & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\Phi}(\varphi) \end{array} \right] .$$

On a donc l'égalité :

$$\tilde{\Phi}(\varphi) \operatorname{Discr}_{\gamma}(\Psi) = \operatorname{Discr}_{\mathfrak{B}}(\Phi) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 6 :

Soit $M = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit Φ la forme quadratique sur \mathbb{R}^n de matrice M dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{R}^n .

a) Montrer que, pour que Φ soit *définie positive* (cf. définition V.7.2 du Tome 3 du cours), il faut et il suffit que les *mineurs principaux* de M soient tous > 0 .

b) On suppose maintenant que tous les mineurs de M centrés sur la diagonale principale (i.e. tous les $\Delta_{P,P}(M)$ avec $P \subset \llbracket 1,n \rrbracket$) sont dans \mathbb{R}^+ . Montrer que Φ est *positive*.

La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? ■

La base canonique de \mathbb{R}^n sera notée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. La forme polaire de la forme quadratique Φ sera notée f .

a) Soit $p \in \llbracket 1,n \rrbracket$. Notons E_p le sous- \mathbb{R} -espace engendré par la famille $\mathcal{C}_p = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, et Φ_p la forme quadratique induite par Φ sur E_p . Supposons que la forme quadratique Φ soit définie positive; il est alors clair que Φ_p est définie positive. D'après le Théorème I.4.2, il existe une base $\mathfrak{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E_p , dans laquelle la matrice de Φ_p soit diagonale, donc égale à $\operatorname{Diag}(\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_p))$. Le discriminant de Φ dans la base \mathfrak{B} est donc $\Phi(e_1) \dots \Phi(e_p) > 0$. D'après la formule (8) du § I.2, le discriminant de Φ_p est > 0 dans toute base de E_p , et en particulier dans la base \mathcal{C}_p . Nous en déduisons $D_p = \det(M_p) > 0$, où D_p est le mineur principal de M correspondant aux p premières lignes et aux p premières colonnes.

Réciproquement, supposons que pour tout $p \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $D_p = \det(M_p) \neq 0$. Montrons qu'il existe alors une base Φ -orthogonale (a_1, \dots, a_n) , telle que pour tout $p \in \llbracket 1,n \rrbracket$, (a_1, \dots, a_p) soit une base de E_p , la matrice de passage de \mathcal{C}_p vers (a_1, \dots, a_p) étant trigonale supérieure de coefficients diagonaux égaux à 1, et $\Phi(a_p) = D_p/D_{p-1}$ (on convient $D_0 = 1$).

On prend $a_1 = \varepsilon_1$; on a bien $\Phi(a_1) = D_1 = D_1/D_0$. Supposons avoir trouvé des vecteurs (a_1, \dots, a_p) qui conviennent. Si $p < n$, on peut poser :

$$a_{p+1} = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p + \varepsilon_{p+1} ,$$

où les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont tels que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on ait :

$$0 = f(a_{p+1}, a_i) = \lambda_i \Phi(a_i) + f(\varepsilon_{p+1}, a_i) = \lambda_i D_i / D_{i-1} + f(\varepsilon_{p+1}, a_i),$$

soit :

$$\lambda_i = -\frac{D_{i-1}}{D_i} f(\varepsilon_{p+1}, a_i).$$

Il est clair que la famille (a_1, \dots, a_{p+1}) est alors une base Φ -orthogonale de E_{p+1} , la matrice de passage de la base \mathcal{C}_{p+1} vers la base (a_1, \dots, a_{p+1}) étant trigonale supérieure, de coefficients diagonaux égaux à 1 ; notons P_{p+1} cette matrice de passage. Le discriminant de Φ_{p+1} est le même dans les bases \mathcal{C}_{p+1} et (a_1, \dots, a_{p+1}) puisque $\det(P_{p+1}) = 1$; ce discriminant est donc :

$$D_{p+1} = \Phi(a_1) \dots \Phi(a_p) \Phi(a_{p+1}) = D_p \Phi(a_{p+1}),$$

d'où $\Phi(a_{p+1}) = D_{p+1} / D_p$.

On peut donc bien trouver une base (a_1, \dots, a_n) de \mathbb{R}^n vérifiant les conditions énoncées ci-dessus.

En particulier, si tous les mineurs principaux D_p , où $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont > 0 , ce qui précède démontre qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle la matrice de Φ soit diagonale, de coefficients diagonaux > 0 . La forme quadratique Φ est donc dans ce cas définie positive.

b) Soit Ψ une forme quadratique positive sur un \mathbb{R} -ev E de dimension $p > 0$. D'après le Théorème I.4.2, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E qui soit Ψ -orthogonale. Le discriminant Ψ dans la base \mathcal{B} est $\Psi(e_1) \dots \Psi(e_p) \geq 0$. D'après la formule (8) du § I.2, le discriminant de Ψ est ≥ 0 dans toute base de E .

Pour toute partie P de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal $p > 0$, soit $E_P = \text{Vect}((\varepsilon_i)_{i \in P})$, et i_P l'injection strictement croissante $\llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow P$. Soit Φ une forme quadratique positive sur \mathbb{R}^n , de matrice M dans la base canonique, et pour $P \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, Φ_P la forme quadratique induite par Φ sur E_P ; il est clair que Φ_P est positive, et que par conséquent son discriminant dans la base ordonnée $(\varepsilon_{i_P(j)})_{j \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, qui est le mineur $\Delta_{P,P}$ de la matrice M , est ≥ 0 . La réciproque de la propriété énoncée dans le b) est donc vraie.

Pour établir la partie directe, démontrons le lemme suivant :

Lemme :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } K \text{ un corps, } m \in \mathbb{N}^*, \text{ et } M \in \mathfrak{M}_m(K). \text{ Pour tout} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in K^m, \text{ on a l'égalité :} \\ \det(M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket} \Delta_{P,P} \prod \lambda_i. \end{array} \right.$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{où pour toute partie } P \subset \llbracket 1, m \rrbracket, \Delta_{P,P} \text{ désigne le mineur cor-} \\ \text{respondant au couple } (P, P) \text{ de parties de } \llbracket 1, m \rrbracket \text{ si } P \neq \emptyset, \text{ et} \\ \Delta_{\emptyset, \emptyset} = 1. \blacksquare \end{array} \right.$$

Posons $M = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2}$. On a :

$$\det(M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^m (a_{\sigma(i), i} + \lambda_i \delta_{\sigma(i), i}) .$$

En développant chacun des produits on obtient :

$$\begin{aligned} \det(M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) &= \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket} \left(\prod_{i \in P} a_{\sigma(i), i} \right) \left(\prod_{i \notin P} \lambda_i \delta_{\sigma(i), i} \right) = \\ &= \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i \in P} a_{\sigma(i), i} \right) \left(\prod_{i \notin P} \lambda_i \delta_{\sigma(i), i} \right) . \end{aligned}$$

Le terme correspondant à $P = \llbracket 1, m \rrbracket$ est $\det(M)$; le terme correspondant à $P = \emptyset$ est le produit $\lambda_1 \dots \lambda_m$. Le terme de la somme intérieure est nul si σ n'est pas l'extension à $\llbracket 1, m \rrbracket$ d'une permutation de P (par l'identité hors de P) ; si $s \in \mathfrak{S}_P$, et σ est l'extension à $\llbracket 1, m \rrbracket$ de s , alors $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(s)$. On a donc l'égalité :

$$\det(M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket} \sum_{s \in \mathfrak{S}_P} \varepsilon(s) \left(\prod_{i \in P} a_{s(i), i} \right) \left(\prod_{i \notin P} \lambda_i \right) .$$

On voit facilement que pour tout $P \subset \llbracket 1, m \rrbracket$, $P \neq \emptyset$, on a :

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}_P} \varepsilon(s) \prod_{i \in P} a_{s(i), i} = \Delta_{P,P} ,$$

c'est-à-dire le mineur de M correspondant au couple (P, P) de parties de $\llbracket 1, m \rrbracket$. On a donc bien l'égalité :

$$\det(M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket} \Delta_{P,P} \prod_{i \notin P} \lambda_i ,$$

en convenant $\Delta_{\emptyset, \emptyset} = 1$.

Fin du Lemme.

Soit maintenant une forme quadratique Φ sur \mathbb{R}^n , de matrice M dans la base canonique. On suppose que tous les mineurs $\Delta_{P,P}$ de

$\llbracket 1, n \rrbracket$, sont ≥ 0 . D'après le lemme, pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, le mineur principal correspondant à m dans la matrice $M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est :

$$\lambda_1 \dots \lambda_m + \sum_{P \subset \llbracket 1, m \rrbracket, P \neq \emptyset} \Delta_{P,P} \prod_{i \notin P} \lambda_i > 0.$$

D'après le a), nous en déduisons que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la forme quadratique dont la matrice est $M + \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dans la base canonique, est définie positive. On voit donc que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on a $\Phi(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$, et que par conséquent, $\Phi(x) \geq 0$. Nous en déduisons finalement que la forme quadratique Φ est positive, ce qu'il fallait démontrer.

Le lecteur remarquera qu'il aurait été insuffisant de supposer que tous les mineurs *principaux* de M soient ≥ 0 , comme le montre l'exemple :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 8 :

Soit Φ la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ du \mathbb{R} -ev \mathbb{R}^3 par :

$$\Phi(x) = 12x_1^2 + 52x_2^2 + 12x_3^2 + 40x_2x_3 + 12x_3x_1 + 48x_1x_2,$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Trouver tous les plans vectoriels H de \mathbb{R}^3 tels que $\Phi|_H$ soit définie positive. ■

La forme polaire de la forme quadratique Φ sera noté f . La matrice de la forme quadratique Φ dans la base canonique est :

$$M = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 24 & 52 & 20 \\ 6 & 20 & 12 \end{bmatrix}.$$

On trouve que les mineurs principaux de M valent 12, 48, -336. D'après ce qui a été démontré dans l'exercice 6, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dans laquelle la matrice de Φ soit la matrice $\text{Diag}(12, 48/12, -336/48) = \text{Diag}(12, 4, -7)$, la matrice de passage étant trigonale supérieure de coefficients diagonaux égaux à 1. La forme quadratique Φ est donc non dégénérée, mais ni définie positive, ni définie négative. Son discriminant dans toute base de \mathbb{R}^3 est < 0 .

Soit H un plan dans \mathbb{R}^3 ; comme Φ n'est pas dégénérée, il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$, tel que :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, u) = 0\} .$$

Si u est Φ -isotrope, alors $u \in H$, $\Phi|_H(u) = 0$, donc $\Phi|_H$ n'est pas définie positive.

Si u n'est pas Φ -isotrope, alors $u \notin H$, et pour toute base (e_1, e_2) de H , (e_1, e_2, u) est une base de \mathbb{R}^3 . On voit facilement comme dans l'exercice 5 que :

$$\text{Discr}_{(e_1, e_2)}(\Phi|_H) \Phi(u) = \text{Discr}_{(e_1, e_2, u)}(\Phi) < 0 .$$

Si $\Phi(u) > 0$, dans toute base de H le discriminant de $\Phi|_H$ est < 0 , et $\Phi|_H$ n'est pas définie positive ou définie négative.

Si $\Phi(u) < 0$, dans toute base de H le discriminant de $\Phi|_H$ est > 0 ; la forme quadratique $\Phi|_H$ peut être définie positive ou définie négative, mais la deuxième éventualité est à exclure, car la forme Φ serait alors définie négative.

On voit donc que $\Phi|_H$ est définie positive si, et seulement si, $\Phi(u) < 0$.

Soit H le plan d'équation $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ tel que :

$$M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} ;$$

on a $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, u) = 0\}$. La condition $\Phi(u) < 0$ s'écrit, en tenant compte du fait que la matrice M est symétrique :

$$(1) \quad [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] M^{-1} M M^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] M^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} < 0 .$$

Soit \widetilde{M} la matrice adjointe de M . On a $\widetilde{M} = \det(M) M^{-1}$, et comme $\det(M) < 0$, on voit que la condition (1) peut s'écrire :

$$[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3] \widetilde{M} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} > 0 .$$

On trouve facilement :

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 224 & -168 & 168 \\ -168 & 108 & -96 \\ 168 & -96 & 48 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 56 & -42 & 42 \\ -42 & 27 & -24 \\ 42 & -24 & 12 \end{bmatrix} .$$

Si H est le plan d'équation $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , la forme quadratique $\Phi|_H$ est donc définie positive si, et seulement si :

$$56 \lambda_1^2 + 27 \lambda_2^2 + 12 \lambda_3^2 - 48 \lambda_2 \lambda_3 + 84 \lambda_3 \lambda_1 - 84 \lambda_1 \lambda_2 > 0 .$$

§ I.5 CLASSIFICATION DES FORMES BILINÉAIRES

Exercice 1 :

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une forme quadratique Φ de signature (r, s) . Soit deux sous-espaces F' et F'' de E tels que $E = F' \oplus F''$ (pour la Φ -orthogonalité), et notons (r', s') (resp. (r'', s'')) la signature de $\Phi|_{F'}$ (resp. $\Phi|_{F''}$). Montrer que $(r, s) = (r' + r'', s' + s'')$. ■

Nous supposons que les sous-espaces F' et F'' sont non nuls. On posera $\dim F' = p$. Il existe une base $\Phi|_{F'}$ -orthogonale de F' , et une base $\Phi|_{F''}$ -orthogonale de F'' . Comme les espaces F' et F'' sont Φ -orthogonaux, on obtient par concaténation une base Φ -orthogonale (e_1, \dots, e_n) de E telle que (e_1, \dots, e_p) soit une base $\Phi|_{F'}$ -orthogonale de F' et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base $\Phi|_{F''}$ -orthogonale de F'' . On a par définition :

$$r' = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid \Phi(e_i) > 0\}) ,$$

et :

$$r'' = \text{Card}(\{i \in \llbracket p+1, n \rrbracket \mid \Phi(e_i) > 0\}) .$$

On a donc :

$$r' + r'' = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \Phi(e_i) > 0\}) = r .$$

On démontre de même $s' + s'' = s$.

Exercice 3 :

Donner la signature de la forme quadratique $M \mapsto \text{Tr}(M^2)$ sur le \mathbb{R} -ev $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Soit Q cette forme quadratique. Comme pour tout $(M, N) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))^2$ on a $\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM)$, il est clair que la forme polaire de Q est la forme bilinéaire $(M, N) \mapsto \text{Tr}(MN)$.

On remarque que pour toute $M = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Tr}(M^t M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} a_{i,j}^2 ,$$

puisque pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, le terme d'indices (j,i) de la matrice ${}^t M$ est $a_{i,j}$. Il est donc clair que Q induit sur le sous- \mathbb{R} -ev $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ une forme quadratique définie positive, et sur le sous- \mathbb{R} -ev $\mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})$ une forme quadratique définie négative. De plus, si $M \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})$ on a :

$$\mathrm{Tr}(M N) = \mathrm{Tr}({}^t(M N)) = \mathrm{Tr}({}^t N {}^t M) = -\mathrm{Tr}(N M) = -\mathrm{Tr}(M N) ,$$

d'où $\mathrm{Tr}(M N) = 0$. Les sous- \mathbb{R} -ev $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $\mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})$ sont donc supplémentaires orthogonaux pour la forme quadratique Q . Nous en déduisons que la signature de Q est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Exercice 6 :

Soit n un entier ≥ 2 et $A = [a_{i,j}] \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$. Soit Φ la forme quadratique sur \mathbb{R}^n de matrice A dans la base canonique \mathcal{C} . On suppose tous les mineurs principaux de A non nuls. On les note : $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, avec $\Delta_i = \det(M_{\llbracket 1,i \rrbracket, \llbracket 1,i \rrbracket}(A))$. Montrer que la signature de Φ est (p, q) , où p désigne le nombre de termes > 0 dans la suite $(\Delta_1, \Delta_1/\Delta_2, \dots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$, et où $q = n - p$. ■

Nous avons démontré dans le a) de l'exercice 6 du § I.4, que dans les conditions de l'énoncé, il existe une base $\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^n telle que la matrice de la forme quadratique Φ dans la base \mathcal{B} soit la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\Delta_1, \Delta_1/\Delta_2, \dots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$. Si (r, s) est la signature de Φ il est clair que r est le nombre de termes > 0 , et s le nombre de termes < 0 , dans la suite $(\Delta_1, \Delta_1/\Delta_2, \dots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$. On a bien sûr $r + s = n$ puisque la forme quadratique Φ est non dégénérée.

Exercice 8 :

Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie $n \geq 2$, de norme notée $\|\cdot\|$. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + q = n$, soit $\mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques de signature (p, q) sur E . On note $\mathrm{Quadr}^*(E) = \bigcup_{p+q=n} \mathrm{Quadr}_{p,q}(E)$.

a) Prouver que la fonction :

$$\nu : \text{Quadr}(E) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto \max_{x \in E, \|x\|=1} |\Phi(x)|,$$

est une norme. Prouver que $\text{Quadr}^*(E)$ est un ouvert dense du \mathbb{R} -ev $\text{Quadr}(E)$.

b) On fixe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p + q = n$. Soit $\Phi_0 \in \text{Quadr}_{p,q}(E)$. Montrer qu'on peut trouver deux sous- \mathbb{R} -ev F et G de E tels que $G \oplus F = E$, $\dim F = p$, $\dim G = q$, et que $\Phi_0|_F$ soit définie positive ainsi que $(-\Phi_0)|_G$.

Ayant ainsi choisi F et G , montrer : toutes les $\Phi \in \text{Quadr}(E)$ assez voisines de Φ_0 sont telles que $\Phi|_F$ et $(-\Phi)|_G$ soient définies positives. En déduire que $\text{Quadr}_{p,q}(E)$ est ouvert dans $\text{Quadr}(E)$.

c) Montrer que chaque ouvert $\text{Quadr}_{p,q}(E)$ est connexe.

En déduire que les $(\text{Quadr}_{p,q}(E))$ sont les composantes connexes de $\text{Quadr}^*(E)$. ■

a) Il est très facile de vérifier que l'application ν est une norme. On remarquera que pour tout $\Phi \in \text{Quadr}(E)$ et tout $x \in E$:

$$|\Phi(x)| \leq \nu(\Phi) \|x\|^2.$$

L'ensemble $\text{Quadr}(E)$ étant un \mathbb{R} -ev de dimension finie, la norme ν est équivalente à toutes les autres normes sur cet espace. Dans ce qui suit $\text{Quadr}(E)$ est muni de sa topologie de \mathbb{R} -ev de dimension finie.

On voit que $\text{Quadr}^*(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées sur E . Soit \mathcal{B} une base de E ; l'application qui à une forme quadratique fait correspondre son discriminant dans la base \mathcal{B} est une application continue, car polynomiale ; $\text{Quadr}^*(E)$ est l'ensemble des formes quadratiques dont le discriminant dans \mathcal{B} est $\neq 0$, c'est donc un ouvert de $\text{Quadr}(E)$.

Montrons que $\text{Quadr}^*(E)$ est un ouvert dense de $\text{Quadr}(E)$. Soit Φ une forme quadratique sur E et \mathcal{B} une base dans laquelle la matrice de Φ soit de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + t).$$

On a peut-être $P(0) = 0$, mais alors 0 est un zéro isolé du polynôme P . Il existe donc toujours un réel $\alpha > 0$ tel que $(\forall t \in]0, \alpha]) \quad P(t) \neq 0$.

tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit Φ_p la forme quadratique dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice diagonale $\text{Diag}(\lambda_1 + \alpha/p, \dots, \lambda_n + \alpha/p)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la forme quadratique Φ_p est non dégénérée, car de discriminant $P(\alpha/p) \neq 0$, et on voit que $\Phi_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \Phi$. L'ouvert $\text{Quadr}^*(E)$ est donc partout dense dans $\text{Quadr}(E)$.

b) Montrons d'abord que $\text{Quadr}_{n,0}(E)$, ensemble des formes quadratiques définies positives sur E , est un ouvert de $\text{Quadr}(E)$. Nous pouvons pour cela utiliser la norme ν introduite dans le a). Soit Φ_0 une forme quadratique sur E , définie positive. L'application $x \mapsto \sqrt{\Phi_0(x)}$, est une norme euclidienne sur E , équivalente à la norme $\|\cdot\|$. Il existe donc un réel $m > 0$, tel que pour tout $x \in E$, $\Phi_0(x) \geq m \|x\|^2$. Si Φ est une forme quadratique telle que $\nu(\Phi - \Phi_0) < m$, on voit que pour tout $x \in E, x \neq 0$:

$$|\Phi(x) - \Phi_0(x)| < m \|x\|^2 \quad \text{d'où} \quad \Phi(x) > \Phi_0(x) - m \|x\|^2 \geq 0.$$

La boule ouverte pour la norme ν , de centre Φ_0 et de rayon m , est donc incluse dans $\text{Quadr}_{n,0}(E)$. L'ensemble $\text{Quadr}_{n,0}(E)$ étant voisinage de chacun de ses points, c'est un ouvert de $\text{Quadr}(E)$.

Soit maintenant $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $p + q = n$, et $\Phi_0 \in \text{Quadr}_{p,q}(E)$. Il existe, par définition de la signature, une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ de E dans laquelle la matrice de Φ_0 soit une matrice diagonale de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, \dots, -\lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$. Il est clair que les formes quadratiques $\Phi_0|_F$ où $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, et $(-\Phi_0)|_G$, où $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$, sont définies positives. Les applications qui à $\Phi \in \text{Quadr}(E)$ font respectivement correspondre $\Phi|_F \in \text{Quadr}(F)$, et $(-\Phi)|_G \in \text{Quadr}(G)$, sont continues car linéaires. D'après le début de ce b), l'ensemble des formes quadratiques sur F définies positives est un ouvert de $\text{Quadr}(F)$; de même l'ensemble des formes quadratiques sur G définies positives est un ouvert de $\text{Quadr}(G)$. On voit donc que l'ensemble des formes quadratiques Φ sur E telles que $\Phi|_F$, et $(-\Phi)|_G$ soient définies positives, est l'intersection de deux ouverts de $\text{Quadr}(E)$ (images réciproques d'ouverts par des applications linéaires), donc un ouvert de $\text{Quadr}(E)$, évidemment inclus dans $\text{Quadr}_{p,q}(E)$, et contenant Φ_0 . L'ensemble $\text{Quadr}_{p,q}(E)$ est donc un ouvert de $\text{Quadr}(E)$, car c'est un voisinage de chacun de ses points.

c) Nous supposons connu le fait que l'ensemble $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est un ouvert connexe du \mathbb{R} -ev de dimension finie $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ (cf. Exercice 23 §XI.3 du Tome 2). Fixons $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p + q = n$.

Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; nous noterons Θ l'application qui à une forme quadratique Φ sur E fait correspondre sa matrice

\mathcal{B}_0 . Soit $\Delta_{p,q}$ la matrice diagonale dont les p premiers éléments diagonaux sont 1, et les q suivants -1 . Soit $\Phi \in \text{Quadr}_{p,q}(E)$; on sait qu'il existe une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de Φ est $\Delta_{p,q}$; on peut supposer que cette base est de même orientation que \mathcal{B}_0 : il suffit de multiplier, si nécessaire, l'un des vecteurs de la base \mathcal{B} par -1 ; si $P \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est la matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}_0 , la matrice de Φ dans la base \mathcal{B}_0 est ${}^t P \Delta_{p,q} P$; on a donc $\Phi = \Theta^{-1} ({}^t P \Delta_{p,q} P)$. Inversement, si $P \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$, la forme quadratique $\Phi = \Theta^{-1} ({}^t P \Delta_{p,q} P)$ est un élément de $\text{Quadr}_{p,q}(E)$. L'ensemble $\text{Quadr}_{p,q}(E)$, image de la partie connexe $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ par l'application continue $P \mapsto \Theta^{-1} ({}^t P \Delta_{p,q} P)$, $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Quadr}(E)$, est donc connexe, ce qu'il fallait démontrer.

Les ensembles ouverts connexes $(\text{Quadr}_{p,q}(E))$, où $(p, q) \in \mathbb{N}$, $p + q = n$, forment une partition de $\text{Quadr}^*(E)$; montrons que ce sont les composantes connexes de $\text{Quadr}^*(E)$. De manière générale, démontrons le lemme suivant :

Lemme :

|| Soit T un espace topologique et $(O_i)_{i \in I}$ une partition de T en ouverts connexes. Les O_i , où $i \in I$, sont les composantes connexes de T . ■

La famille $(O_i)_{i \in I}$ est un partage de T en ouverts, mais aussi en fermés puisque :

$$(\forall i \in I) \quad O_i = \bigcap_{j \neq i} \complement O_j .$$

Soit \mathcal{C} un connexe non vide, $\mathcal{C} \subset T$, pour tout $i \in I$ l'ensemble $\mathcal{C} \cap O_i$ est un ouvert et un fermé de \mathcal{C} ; comme \mathcal{C} est un connexe non vide, exactement l'un de ces ensembles est non vide, et c'est \mathcal{C} . Nous en déduisons que \mathcal{C} est inclus dans exactement l'un des ensembles O_i , où $i \in I$. Les ensembles O_i , où $i \in I$, sont donc bien les composantes connexes de T . Fin du lemme.

Nous pouvons déduire du lemme ci-dessus que les ensembles $(\text{Quadr}_{p,q}(E))$, où $(p, q) \in \mathbb{N}$, $p + q = n$, sont les composantes connexes de $\text{Quadr}^*(E)$

Exercice 10 :

|| Trouver la signature des formes quadratiques définies sur \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) par les formules suivantes :

a) $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} (\sin(i+j)\theta) x_i x_j$, où $\theta \in \mathbb{R}$

b) $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} (i+j-1) x_i x_j$

$$\begin{aligned}
 & \left\| \begin{aligned}
 c) \quad x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \text{Min}(i, j) x_i x_j \\
 d) \quad x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2, \text{ où les } a_i \text{ sont} \\
 &\text{donnés dans } \mathbb{R} \\
 e) \quad x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \frac{1}{1 + |i - j|} x_i x_j . \blacksquare
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

La forme quadratique sera notée Φ .

a) On a pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x) &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (\sin i\theta) x_i (\cos j\theta) x_j + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (\cos i\theta) x_i (\sin j\theta) x_j = \\
 &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \sin(i\theta) x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \cos(j\theta) x_j \right) .
 \end{aligned}$$

Notons :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \sin(i\theta) x_i \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^n \cos(i\theta) x_i ,$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'égalité :

$$\Phi(x) = 2 \varphi(x) \psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \psi(x))^2 - \frac{1}{2}(\varphi(x) - \psi(x))^2 .$$

Si les formes linéaires φ et ψ sont linéairement indépendantes, la signature de Φ est donc $(1, 1)$ (voir réduction en carrés). Si $\theta \in \pi \mathbb{Z}$, alors $\varphi = 0$, donc $\Phi = 0$. Si $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$, alors :

$$\det \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} = \sin \theta \neq 0 ,$$

donc les formes linéaires φ et ψ sont linéairement indépendantes et la signature de la forme quadratique Φ est $(1, 1)$.

b) On vérifie que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$ij - (i-1)(j-1) = i + j - 1 .$$

On a donc ici l'égalité :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} i j x_i x_j - \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (i-1)(j-1) x_i x_j = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n i x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n (i-1) x_i \right)^2.\end{aligned}$$

Les formes linéaires :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n i x_i \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^n (i-1) x_i,$$

étant linéairement indépendantes ($n \geq 2$), la signature de la forme quadratique Φ est $(1, 1)$ (voir réduction en carrés).

c) Le calcul pour les valeurs $n = 2$ et $n = 3$ incite à vérifier que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_j \right)^2.$$

Pour démontrer cela, on peut remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{n \geq j \geq i, n \geq k \geq i} x_j x_k = \sum_{(j,k) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \left(\sum_{i \leq j \text{ et } i \leq k} 1 \right) x_j x_k.$$

Or pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \text{ et } 1 \leq i \leq k} 1 = \text{Min}(j, k).$$

Nous en déduisons comme prévu que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_j \right)^2.$$

Les formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\varphi_i(x) = \sum_{j=i}^n x_j$ étant linéairement indépendantes, la signature de la forme quadratique Φ est $(n, 0)$.

d) Si $(a_1, \dots, a_n) = 0$, alors la signature de Φ est $(0, n)$; nous excluons ce cas dans la suite.

Soit $d = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Munissons l'espace \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique; il existe une base orthonormale dans laquelle la dernière forme linéaire coordonnée soit :

$$x'_n = \frac{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n}{d};$$

il suffit pour cela que le dernier vecteur de la base soit le vecteur unitaire :

$$e'_n = \frac{1}{d}(a_1, \dots, a_n).$$

Dans une telle base, si les coordonnées sont notées (x'_1, \dots, x'_n) , la forme quadratique Φ s'exprime sous la forme :

$$\Phi(x) = d^2 x_n'^2 - \sum_{i=1}^n x_i'^2 = (d^2 - 1) x_n'^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i'^2.$$

La signature de la forme quadratique Φ est donc $(1, n-1)$ si $d > 1$, $(0, n-1)$ si $d = 1$, et $(0, n)$ si $d < 1$.

e) On remarque ici que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{1 + |i - j|} = \int_0^1 t^{|i-j|} dt.$$

La résolution de l'exercice 14 prouve que la forme quadratique Φ est définie positive et que sa signature est par conséquent $(n, 0)$.

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n(t) = [s_{i,j}(t)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une matrice symétrique ($S_n(t) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$) dépendant continûment du paramètre $t \in [0, 1]$. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$ la forme quadratique $Q_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de matrice $S_n(t)$ dans la base canonique est positive (resp. définie positive). Prouver que la forme quadratique $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^1 \left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} s_{i,j}(t) x_i x_j \right) dt$$

est positive (resp. définie positive).

|| Appliquer à $s_{i,j}(t) = t^{|i-j|}$. ■

On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\Phi(x) = \int_0^1 Q_t(x) dt .$$

Supposons que pour tout $t \in [0, 1]$ la forme quadratique Q_t soit positive. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application continue $t \mapsto Q_t(x)$, $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs ≥ 0 . On en déduit :

$$\Phi(x) = \int_0^1 Q_t(x) dt \geq 0 .$$

La forme quadratique Φ est donc positive.

Supposons $\Phi(x) = 0$; comme l'application $t \mapsto Q_t(x)$ est continue et positive, on a nécessairement $(\forall t \in [0, 1]) Q_t(x) = 0$; s'il existe $t \in [0, 1]$ tel que la forme quadratique Q_t soit définie et positive, alors on aura nécessairement $x = 0$. La forme quadratique Q_t étant pour tout $t \in [0, 1]$ positive, il suffit que pour au moins une valeur de $t \in [0, 1]$ elle soit définie positive, pour que Φ soit aussi définie positive.

Notons, pour $t \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(t)$ le déterminant de la matrice $S_n(t) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ dont le terme (i, j) est $t^{|i-j|}$. On a :

$$D_n(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & t^{n-2} & t^{n-1} \\ t & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & t^2 \\ t^{n-2} & & \ddots & 1 & t \\ t^{n-1} & t^{n-2} & \dots & t & 1 \end{bmatrix} .$$

En retranchant à la dernière colonne l'avant dernière multipliée par t on voit qu'on a la relation de récurrence $D_n(t) = (1 - t^2) D_{n-1}(t)$. Comme $D_1(t) = 1$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$:

$$D_n(t) = (1 - t^2)^{n-1} .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in [0, 1[$, les mineurs principaux de la matrice $S_n(t)$ sont tous > 0 . Nous pouvons en déduire, en utilisant les résultats de l'exercice 6a) du § I.4, que pour tout $t \in [0, 1[$, la forme quadratique Q_t est définie positive. D'autre part la forme quadratique Q_1 est positive :

$$Q_1(x) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 .$$

Soit $S_n \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, la matrice symétrique qui a pour terme (i, j) , où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le réel :

$$\int_0^1 t^{|i-j|} dt = \frac{1}{1 + |i-j|} .$$

Ce qui précède démontre que la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est S_n , est définie positive.

§ I.6 ALGORITHME DE GAUSS

Exercice 1 :

Effectuer une réduction de Gauss des formes quadratiques suivantes :

a) $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \alpha - 2zx \cos \beta - 2xy \cos \gamma$, $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

d) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 - bx_4^2 + 2ax_1x_2 - 2(a-1)x_1x_4 + 2x_3x_4$, $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

f) $(x, y, z, t) \mapsto yz + zx + xy + \mu(x + y + z)t + \lambda t^2$, $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. ■

La forme quadratique sera notée Φ .

a) Nous appliquerons ici l'algorithme de Gauss. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\Phi(x, y, z) = (z - y \cos \alpha - x \cos \beta)^2 + \varphi(x, y) ,$$

où :

$$\varphi(x, y) = (1 - \cos^2 \alpha) y^2 + (1 - \cos^2 \beta) x^2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma) xy .$$

Si $\sin \alpha \neq 0$, alors :

$$\varphi(x, y) = \sin^2 \alpha \left(y - \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{1 - \cos^2 \alpha} x \right)^2 + \lambda x^2 ,$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \cos^2 \beta - \frac{(\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma)^2}{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \alpha} . \end{aligned}$$

Si $\sin \alpha = 0$, alors $\cos \alpha = \varepsilon_\alpha \in \{-1, 1\}$ et :

$$\varphi(x, y) = (1 - \cos^2 \beta) x^2 - 2(\varepsilon_\alpha \cos \beta + \cos \gamma) x y .$$

Si $\sin \beta \neq 0$, alors :

$$\varphi(x, y) = \sin^2 \beta \left(x - \frac{\varepsilon_\alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin^2 \beta} y \right)^2 + \mu y^2 ,$$

où :

$$\mu = -\frac{(\varepsilon_\alpha \cos \beta + \cos \gamma)^2}{\sin^2 \beta} .$$

Si $\sin \beta = 0$, alors $\cos \beta = \varepsilon_\beta \in \{-1, 1\}$ et :

$$\varphi(x, y) = -(\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \cos \gamma) \left(\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{2} \right) .$$

Pour obtenir une réduction de Φ en carrés il faut supprimer des expressions obtenues les termes affectés du coefficient nul.

d) Nous appliquerons l'algorithme de Gauss, mais en choisissant l'ordre des variables de façon à éviter une discussion sur les valeurs des paramètres. On obtient les égalités suivantes, vraies pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4)^2 + x_1^2 + a x_2^2 - (b+1) x_4^2 + 2a x_1 x_2 - 2(a-1) x_1 x_4 .$$

On "élimine" ainsi la variable x_3 . On obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= (x_3 + x_4)^2 + a(x_2 + x_1)^2 + (1-a)x_1^2 - (b+1)x_4^2 - 2(a-1)x_1 x_4 . \end{aligned}$$

On "élimine" ainsi la variable x_2 . On procède de même pour x_1 , ce qui nous donne finalement la réduction en carrés suivante :

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= (x_3 + x_4)^2 + a(x_2 + x_1)^2 + (1-a)(x_1 + x_4)^2 + (a-b-2)x_4^2 . \end{aligned}$$

On vérifie que les formes linéaires $x_3 + x_4$, $x_2 + x_1$, $x_1 + x_4$ et x_4 sont linéairement indépendantes. Suivant les valeurs de a et de b , pour obtenir une réduction de Φ en carrés, il faut supprimer dans les expressions obtenues les termes affectés du coefficient nul.

f) On peut appliquer le deuxième cas de la méthode de Gauss avec x et y car il n'y a pas de terme en x^2 ni en y^2 . On obtient pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ l'égalité :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= xy + x(z + \mu t) + y(z + \mu t) + \mu z t + \lambda t^2 = \\ &= (x + z + \mu t)(y + z + \mu t) - z^2 - \mu z t + (\lambda - \mu^2) \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\Phi(x, y, z, t) = \left(z + \mu t + \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{4} - \left(z + \frac{\mu}{2} t\right)^2 + \nu t^2,$$

où :

$$\nu = \lambda - \frac{3}{4} \mu^2.$$

Il convient, pour obtenir une décomposition de Φ en carrés, de supprimer le dernier terme si $\nu = 0$.

Exercice 2 :

Effectuer une réduction de Gauss pour les formes quadratiques suivantes :

$$a) (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

$$b) (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} \frac{1}{i+j} x_i x_j, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$c) (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1, \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Préciser la signature pour n entier ≥ 2 . ■

a) Soient a et b réels tels que $a > b > 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$; notons $q_{a,b,n}$ la forme quadratique :

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Précisons que :

$$q_{a,b,1}(x_1) = a x_1^2.$$

Appliquons la méthode de Gauss à $q_{a,b,n}$ en partant de x_1 (on suppose $n \geq 2$). Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned} q_{a,b,n}(x_1, \dots, x_n) &= a x_1^2 + 2b x_1 \sum_{i=2}^n x_i + a \sum_{i=2}^n x_i^2 + 2b \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \\ &= a \left(x_1 + \frac{b}{a} \sum_{i=2}^n x_i \right)^2 - \frac{b^2}{a} \left(\sum_{i=2}^n x_i \right)^2 + a \sum_{i=2}^n x_i^2 + 2b \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \\ &= a \left(x_1 + \frac{b}{a} \sum_{i=2}^n x_i \right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \sum_{i=2}^n x_i^2 + 2 \left(b - \frac{b^2}{a} \right) \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_i x_j. \end{aligned}$$

Nous en déduisons la formule de récurrence :

$$q_{a,b,n}(x_1, \dots, x_n) = a \left(x_1 + \frac{b}{a} \sum_{i=2}^n x_i \right)^2 + q_{a',b',n-1}(x_2, \dots, x_n) ,$$

où :

$$a' = a - \frac{b^2}{a} > b' = b - \frac{b^2}{a} > 0 .$$

Cette égalité nous permet d'obtenir une décomposition en carrés de la forme quadratique $q_{a,b,n}$, où $a > b > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe en effet des uniques réels a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n , tels que $a_1 = a$, $b_1 = b$, et :

$$(\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket) \quad a_{i+1} = a_i - \frac{b_i^2}{a_i} \quad b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^2}{a_i} .$$

D'après ce qui précède, ces suites sont bien définies, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i > b_i > 0$, et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$q_{a,b,n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(x_i + \frac{b_i}{a_i} \sum_{j=i+1}^n x_j \right)^2 + a_n x_n^2 .$$

Calculons plus précisément les réels a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n . On vérifie que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i b_i - b_i^2} = \frac{a_i + b_i}{b_i} = 1 + \frac{a_i}{b_i} .$$

On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\frac{a_i}{b_i} = i - 1 + \frac{a}{b} ,$$

d'où pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$b_{i+1} = b_i \left(1 - \frac{b_i}{a_i} \right) = b_i \left(\frac{i-2+a/b}{i-1+a/b} \right) .$$

Le produit $b_i (i-2+a/b)$ est donc constant et vaut $b(a/b-1) = a-b$. Nous en déduisons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$b_i = \frac{a-b}{i-2+a/b} \quad a_i = (a-b) \frac{i-1+a/b}{i-2+a/b} .$$

Dans le cas particulier de l'exercice proposé, nous avons $a = 1$ et $b = 1/2$. Dans ce cas, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$b_i = \frac{1}{2i} \quad a_i = \frac{i+1}{2i} \quad \frac{b_i}{a_i} = \frac{1}{i+1} ,$$

d'où la décomposition en carrés :

$$q_{1,1/2,n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{2i} \left(x_i + \frac{1}{i+1} \sum_{j=i+1}^n x_j \right)^2 + \frac{n+1}{2n} x_n^2.$$

b) Soit $M = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$, et q la forme quadratique de matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Supposons $a_{n,n} \neq 0$ et appliquons la méthode de Gauss en partant de x_n . On obtient pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ l'égalité :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a_{n,n} x_n^2 + 2 x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} x_i + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket^2} a_{i,j} x_i x_j = \\ &= a_{n,n} \left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{n,i}}{a_{n,n}} x_i \right)^2 - \frac{1}{a_{n,n}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} x_i \right)^2 + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket^2} a_{i,j} x_i x_j = \\ &= \frac{1}{a_{n,n}} \left(\sum_{i=1}^n a_{n,i} x_i \right)^2 + \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket^2} a'_{i,j} x_i x_j, \end{aligned}$$

où pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket^2$:

$$a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{n,i} a_{n,j}}{a_{n,n}}.$$

Si $a'_{n-1,n-1} \neq 0$ on peut itérer cette méthode, etc.

Dans le cas de l'exercice, on a au départ :

$$(\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2) \quad a_{i,j} = a_{i,j}^{(0)} = \frac{1}{i+j},$$

d'où pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket^2$:

$$\begin{aligned} a'_{i,j} = a_{i,j}^{(1)} &= \frac{1}{i+j} - \frac{2n}{(i+n)(j+n)} = \frac{(i+n)(j+n) - 2n(i+j)}{(i+j)(i+n)(j+n)} = \\ &= \frac{(n-i)(n-j)}{(i+j)(i+n)(j+n)}. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $i \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket$:

$$a_{n-1,i}^{(1)} = \frac{n-i}{(2n-1)(n+i)(n-1+i)} \quad \text{et} \quad a_{n-1,n-1}^{(1)} = \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

On peut donc, si $n \geq 2$ itérer la méthode. En effectuant quelques calculs, on trouve des égalités que nous allons démontrer ci-dessous par récurrence. Supposons avoir effectué p transformations ($p < n$) et avoir obtenu les égalités :

$$(1) \quad (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n-p \rrbracket) \quad a_{i,j}^{(p)} = \frac{1}{i+j} \frac{\binom{n-i}{p} \binom{n-j}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{n+j}{p}},$$

ce qui est vrai pour $p = 0$ et $p = 1$. En particulier pour tout $i \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$:

$$a_{n-p,i}^{(p)} = \frac{1}{n-p+i} \frac{\binom{n-i}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{2n-p}{p}} \quad \text{et} \quad a_{n-p,n-p}^{(p)} = \frac{1}{2(n-p)} \frac{1}{\binom{2n-p}{p}} \neq 0.$$

Si $p+1 < n$ on peut donc itérer la méthode, et on obtient, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n-p-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(p+1)} &= \frac{1}{i+j} \frac{\binom{n-i}{p} \binom{n-j}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{n+j}{p}} - \\ &\quad - \frac{1}{n-p+i} \frac{\binom{n-i}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{2n-p}{p}} \frac{1}{n-p+j} \frac{\binom{n-j}{p}}{\binom{n+j}{p} \binom{2n-p}{p}} 2(n-p) \binom{2n-p}{p}^2 = \\ &= \frac{1}{i+j} \frac{\binom{n-i}{p} \binom{n-j}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{n+j}{p}} \left[1 - \frac{2(n-p)(i+j)}{(n-p+i)(n-p+j)} \right] = \\ &= \frac{1}{i+j} \frac{\binom{n-i}{p} \binom{n-j}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{n+j}{p}} \frac{(n-p-i)(n-p-j)}{(n-p+i)(n-p+j)}. \end{aligned}$$

On trouve facilement :

$$a_{i,j}^{(p+1)} = \frac{1}{i+j} \frac{\binom{n-i}{p+1} \binom{n-j}{p+1}}{\binom{n+i}{p+1} \binom{n+j}{p+1}}.$$

Ceci démontre que les égalités (1) sont vraies pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et qu'on peut itérer $n-1$ fois la méthode pour obtenir une décomposition en carrés de la forme quadratique initiale. Avec les notations introduites ci-dessus, on obtient pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'égalité :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n-p,n-p}^{(p)}} \left(\sum_{i=1}^{n-p} a_{n-p,i}^{(p)} x_i \right)^2.$$

Rappelons que pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$, on a :

$$a_{n-p,i}^{(p)} = \frac{1}{n-p+i} \frac{\binom{n-i}{p}}{\binom{n+i}{p} \binom{2n-p}{p}} \quad \text{et} \quad a_{n-p,n-p}^{(p)} = \frac{1}{2(n-p)} \frac{1}{\binom{2n-p}{p}}.$$

On a donc pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ l'égalité :

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{p=0}^{n-1} 2(n-p) \left(\sum_{i=1}^{n-p} \frac{1}{n-p+i} \frac{\binom{n-i}{p}}{\binom{n+i}{p}} x_i \right)^2.$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, soit $q_{n,\varepsilon}$ la forme quadratique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} + x_{n-1} x_n + \varepsilon x_n x_1$. Précisons que si $n = 2$, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$q_{2,\varepsilon}(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \varepsilon x_2 x_1.$$

On voit donc que $q_{2,-1} = 0$, et que $q_{2,1}$ est de signature $(1, 1)$, puisque :

$$q_{2,1}(x_1, x_2) = 2 x_1 x_2 = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2} (x_1 - x_2)^2.$$

Pour $n = 3$, on a pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$:

$$q_{3,\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \varepsilon x_3 x_1.$$

En appliquant le deuxième cas de la méthode de Gauss nous obtenons, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ l'égalité :

$$(1) \quad q_{3,\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + \varepsilon x_1)(x_3 + x_1) - \varepsilon x_1^2.$$

Nous en déduisons :

$$q_{3,1}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_3 - x_2}{2} \right)^2 - x_1^2,$$

et :

$$q_{3,-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)^2 + x_1^2 - \left(x_1 + \frac{x_3 - x_3}{2} \right)^2.$$

La signature de $q_{3,1}$ est donc égale à $(1, 2)$ et celle de $q_{3,-1}$ à $(2, 1)$.

Pour $n \geq 2$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, notons $(a_{n,\varepsilon}, b_{n,\varepsilon})$ la signature de la forme quadratique $q_{n,\varepsilon}$. Si $n \geq 4$, on peut appliquer la méthode de Gauss à la forme quadratique $q_{n,\varepsilon}$. On obtient pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ l'égalité :

$$\begin{aligned} q_{n,\varepsilon}(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= x_1 x_2 + \dots + x_{n-3} x_{n-2} - \varepsilon x_1 x_{n-2} + (x_{n-1} + \varepsilon x_1)(x_n + x_{n-2}) = \\ &= q_{n-2,-\varepsilon}(x_1, \dots, x_{n-2}) + (x_{n-1} + \varepsilon x_1)(x_n + x_{n-2}). \quad (2) \end{aligned}$$

Cette égalité est encore vraie pour $n = 3$ si on pose par convention $q_{1,\varepsilon}(x_1) = \varepsilon x_1^2$ (cf. égalité (1)). A l'aide de cette relation de récurrence, on obtient, pour tout $p \geq 2$ l'égalité :

$$\begin{aligned} q_{2p,\varepsilon}(x_1, \dots, x_{2p}) &= \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} (x_{2p-2k-1} + (-1)^k \varepsilon x_1) (x_{2p-2k} + x_{2p-2k-2}) + q_{2,(-1)^{p-1}\varepsilon}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

et pour tout $p \geq 1$ l'égalité :

$$\begin{aligned} q_{2p+1,\varepsilon}(x_1, \dots, x_{2p+1}) &= \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (x_{2p-2k} + (-1)^k \varepsilon x_1) (x_{2p+1-2k} + x_{2p-1-2k}) + (-1)^p \varepsilon x_1^2. \end{aligned}$$

Ces égalités permettent de trouver des décompositions de Gauss des formes quadratiques $q_{n,\varepsilon}$, et d'obtenir leurs signatures. On trouve que si $n = 2p$, si p est pair, $(a_{n,1}, b_{n,1}) = (p-1, p-1)$, si p est impair $(a_{n,1}, b_{n,1}) = (p, p)$; et si $n = 2p+1$, si p est pair $(a_{n,1}, b_{n,1}) = (p+1, p)$, si p est impair $(a_{n,1}, b_{n,1}) = (p, p+1)$.

§ I.7 AUTOMORPHISMES D'UNE FORME QUADRATIQUE

Exercice 1 :

|| Soit E un K -ev de dimension 2 et Φ une forme quadratique non dégénérée sur E . Pour $u \in \mathbf{SO}(\Phi)$ donnée, étudier la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E qui est Φ -orthogonale. En déduire que $\mathbf{SO}(\Phi)$ est abélien. ■

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base Φ -orthogonale de E ; la matrice de Φ dans cette base sera notée $\Delta = \text{Diag}(\lambda, \mu)$, λ et μ étant deux réels $\neq 0$ puisque Φ est non dégénérée. Un endomorphisme u de E , de matrice M dans la base \mathcal{B} , est un élément de $\mathbf{SO}(\Phi)$ si, et seulement si (cf. Théorème I.7.1) :

$$(1) \quad {}^t M \Delta M = \Delta \quad \text{et} \quad \det M = 1.$$

Si $\det M = 1$ alors $M^{-1} = \widetilde{M}$ (matrice adjointe). Les conditions (1) équivalent donc aux conditions suivantes :

$$(2) \quad {}^t M \Delta = \Delta \widetilde{M} \quad \text{et} \quad \det M = 1.$$

Posons :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

les conditions (2) s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1.$$

On voit facilement que ces conditions s'écrivent :

$$a = d, \quad \lambda b = -\mu c, \quad \text{et} \quad ad - bc = 1.$$

En posant $b = -\mu t$ et $c = \lambda t$, où $t \in K$, on voit que M est la matrice dans la base \mathcal{B} d'un élément de $\mathbf{SO}(\Phi)$ si, et seulement si, il existe $(a, t) \in K^2$ tel que :

$$M = \begin{bmatrix} a & -\mu t \\ \lambda t & a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a^2 + \lambda \mu t^2 = 1.$$

Soit φ l'endomorphisme de E tel que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}.$$

On voit que $\mathbf{SO}(\Phi)$ est l'ensemble des endomorphismes de déterminant 1 dans la sous-algèbre de $\text{Hom}_K(E)$ engendrée par Id_E et φ ; comme cette sous-algèbre est commutative, on en déduit que le groupe $\mathbf{SO}(\Phi)$ est abélien.

Exercice 2 :

Soit E un K -ev de dimension $n \geq 1$, Φ une forme quadratique non dégénérée sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base Φ -orthogonale de E . On donne $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1_K, 1_K\}^n$ et on note u l'élément de $\text{GL}_K(E)$ de matrice $\text{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ dans \mathcal{B} . Prouver que $u \in \mathbf{O}(\Phi)$. En déduire $[\mathbf{O}(\Phi) : \mathbf{SO}(\Phi)] = 2$.
■

Soit M la matrice diagonale de u dans la base \mathcal{B} . D'après le Théorème I.7.1, u est un automorphisme de Φ si, et seulement si :

$${}^t M A M = A,$$

où A désigne la matrice diagonale de Φ dans la base \mathcal{B} . Comme deux matrices diagonales commutent entre elles, et que ${}^t M M = M^2 = I_n$, cette égalité est vérifiée ; on a donc bien $u \in \mathbf{O}(\Phi)$. En prenant $\varepsilon_1 = -1$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \varepsilon_i = 1$, on obtient un endomorphisme $u \in \mathbf{O}(\Phi)$ tel que $\det u = -1$, qui n'est donc pas dans $\mathbf{SO}(\Phi)$. L'indice du sous-groupe $\mathbf{SO}(\Phi)$ dans le groupe $\mathbf{O}(\Phi)$ n'est donc pas 1 mais 2 (voir Corollaire 1 du Théorème I.7.1), ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre II

ESPACES EUCLIDIENS

§ II.1 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ ET CONSÉQUENCES

Exercice 1 :

Soit f une forme bilinéaire symétrique *positive* sur un \mathbb{R} -ev E , et ν la semi-norme associée. On note F le \mathbb{R} -ev quotient $E/\text{Sing}(f)$, et $\varpi : E \rightarrow F$ l'application canonique.

a) Montrer qu'il existe une et une seule application $s : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall (x, y) \in E^2) \quad s(\varpi(x), \varpi(y)) = f(x, y)$.

b) Prouver que s est un produit scalaire sur F .

c) On prend $E = \mathcal{L}_B([a, b], \mathbb{R})$, où a et b sont deux réels donnés, $a < b$, et $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto \int_a^b u v$. Déterminer $\text{Sing}(f)$. Montrer ensuite que (F, s) n'est pas hilbertien. ■

a) L'unicité d'une telle application est évidente puisque ϖ est surjective. Soit S un supplémentaire du sous-espace $\text{Sing}(f)$, et φ la restriction de ϖ à S . On sait que φ est un isomorphisme de K -espaces, entre S et l'espace quotient F . Montrons que l'application $s : F \times F \rightarrow K$, $(u, v) \mapsto f(\varphi^{-1}(u), \varphi^{-1}(v))$ convient. Comme φ^{-1} est linéaire, et que f est bilinéaire, il est clair qu'il s'agit d'une application bilinéaire. D'autre part la propriété : $s(\varpi(x), \varpi(y)) = f(x, y)$ est vraie par définition pour tout $(x, y) \in S^2$. Montrons qu'elle est aussi vérifiée pour tout $(x, y) \in E^2$. Soit $(x, y) \in E^2$; posons $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$, où $(x', x'') \in S \times \text{Sing}(f)$ et $(y', y'') \in S \times \text{Sing}(f)$. En utilisant le fait que $\text{Sing}(f)$ est le noyau de ϖ et que c'est l'espace singulier de f , on obtient :

$$f(x, y) = f(x' + x'', y' + y'') = f(x', y') = s(\varpi(x'), \varpi(y')) = f(\varpi(x), \varpi(y)) .$$

Il existe donc bien sur F une et une seule forme bilinéaire s vérifiant la propriété de l'énoncé.

b) Montrons que s est non dégénérée. Soit $u \in F$ tel que pour tout $v \in F$, $s(u, v) = 0$. Soit $x \in E$ tel que $\varpi(x) = u$; pour tout $y \in E$ on a :

$$f(x, y) = s(\varpi(x), \varpi(y)) = s(u, \varpi(y)) = 0 ,$$

d'où $x \in \text{Sing}(f)$ et $u = \varpi(x) = 0$. La forme bilinéaire non dégénérée s est évidemment positive comme f ; elle est donc définie positive (Corollaire 1 du Théorème II.1.1).

c) La forme quadratique Φ associée à f est ici positive; d'après le Corollaire 1 du Théorème II.1.1, l'espace singulier de f est aussi le cône isotrope de Φ ; c'est donc l'ensemble des $u \in \mathcal{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ telles que $\int_a^b u^2 = 0$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions numériques u , bornées sur $[a, b]$, telles que $\{x \in [a, b]; u(x) \neq 0\}$ est négligeable (Théorèmes VII.4.3 et VII.4.4 du Tome 2 du cours).

Montrons que (F, s) n'est pas un espace complet. Supposons pour simplifier $a = 0$ et $b = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ soit $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g_n(x) = 0$ si $0 \leq x < 1/n$ et $g_n(x) = x^{-1/4}$ si $1/n \leq x \leq 1$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in \mathcal{L}_B([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$, $m < n$, on a :

$$\begin{aligned} s(\varpi(g_n) - \varpi(g_m), \varpi(g_n) - \varpi(g_m)) &= f(g_n - g_m, g_n - g_m) = \\ &= \int_0^1 (g_n - g_m)^2 = \int_{1/n}^{1/m} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{m}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{m}} . \end{aligned}$$

On voit donc que la suite $(\varpi(g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans l'espace vectoriel préhilbertien (F, s) . Supposons que cette suite soit convergente dans (F, s) ; il existe alors une fonction $h \in \mathcal{L}_B([0, 1], \mathbb{R})$ telle que :

$$s(\varpi(g_n) - \varpi(h), \varpi(g_n) - \varpi(h)) = \int_0^1 (g_n - h)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Or :

$$\int_0^1 (g_n - h)^2 = \int_0^{1/n} h^2(x) dx + \int_{1/n}^1 \left(x^{-1/4} - h(x)\right)^2 dx .$$

Comme h est bornée, l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(x^{-1/4} - h(x)\right)^2 dx ,$$

est convergente au sens des intégrales généralisées. On a donc :

$$\int_0^1 (g_n - h)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I = \int_0^1 \left(x^{-1/4} - h(x)\right)^2 dx > 0$$

car sinon, la fonction h coïnciderait avec la fonction $x \mapsto x^{-1/4}$ sur l'intervalle $]0, 1]$, et ne serait pas bornée; cela contredit $\int_0^1 (g_n - h)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

La suite de Cauchy $(\varpi(g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas convergente dans l'espace préhilbertien (F, s) . Cet espace n'est donc pas complet.

Exercice 6 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel non nul.

a) Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $H_x = \{y \in E \mid (x | y) = 0\}$. Montrer que H_x est un hyperplan fermé de E , qui ne contient pas x .

b) On suppose que la boule unité $\tilde{\mathbf{B}} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\} = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ de E est compacte. Soit $L = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1) \setminus \mathbf{B}(0_E, 1/2) = \{x \in E \mid 1/2 \leq \|x\| \leq 1\}$. Montrer que L est un compact de E . A l'aide de a), prouver qu'il existe un nombre fini d'hyperplans H_1, \dots, H_p ($p \in \mathbb{N}^*$) fermés tels que $L \cap \left(\bigcap_{i=1}^p H_i\right) = \emptyset$.

En déduire que E est de dimension finie. ■

a) Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, H_x est le noyau de la forme linéaire $y \mapsto (x | y)$ continue (Proposition II.1.1) et non nulle puisque $(x | x) > 0$. C'est donc un hyperplan fermé de l'espace préhilbertien E .

b) La norme $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ étant une application continue $E \rightarrow \mathbb{R}$, il est clair que L est une partie fermée de l'espace préhilbertien E ; comme elle est incluse dans une partie compacte, c'est une partie compacte de E . Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, $\complement_E H_x$ est une partie ouverte de E , et $(\complement_E H_x)_{x \neq 0}$ est un recouvrement de $E \setminus \{0_E\}$, (pour tout $x \neq 0$, $x \in \complement_E H_x$). La famille $(\complement_E H_x)_{x \neq 0}$ est donc un recouvrement par des ouverts de la partie compacte L ($0_E \notin L$), dont on peut extraire un sous-recouvrement fini. Il existe par conséquent des éléments x_1, \dots, x_p non nuls de E tels que $L \subset \bigcup_{i=1}^p \complement_E H_{x_i}$,

c'est-à-dire $L \cap \left(\bigcap_{i=1}^p H_{x_i}\right) = \emptyset$. Si le sous-espace $\bigcap_{i=1}^p H_{x_i}$ n'était pas nul il contiendrait un élément de norme comprise entre $1/2$ et 1 , c'est-à-dire un élément de L . Le sous-espace $\bigcap_{i=1}^p H_{x_i}$ est donc nul. Pour $x \in E$ notons φ_x la forme linéaire $y \mapsto (x | y)$. D'après ce qui précède l'application linéaire $E \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (\varphi_{x_1}(x), \dots, \varphi_{x_p}(x))$ est injective. L'espace E est donc de dimension finie ($\leq p$).

Exercice 7 :

|| Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}_+ telle que $(\forall b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ la série $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que nécessairement $a \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. ■

Rappelons que si $p > 1$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que la série $\sum |a_n|^p$ soit convergente est noté $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$; on sait que c'est un sous- \mathbb{R} -ev (inégalité de Minkowsky) du \mathbb{R} -ev des suites réelles. Montrons que si p et q sont des réels > 0 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans \mathbb{R}_+ telle que pour toute suite $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ la série $\sum a_n b_n$ est convergente, alors $a \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme :

|| Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}_+ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$; on suppose $\alpha_0 > 0$. Pour tout $p > 1$ la série $\sum \frac{\alpha_n}{S_n^p}$ est convergente. ■

On constate que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et > 0 . D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta \in [S_{n-1}, S_n]$ tel que :

$$S_{n-1}^{1-p} - S_n^{1-p} = (p-1)(S_n - S_{n-1})\theta^{-p},$$

et par conséquent :

$$\frac{\alpha_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{\theta^p} = \frac{1}{p-1} (S_{n-1}^{1-p} - S_n^{1-p}).$$

Nous en déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{S_k^p} \leq \frac{\alpha_0}{S_0^p} + \frac{1}{p-1} (S_0^{1-p} - S_n^{1-p}) \leq \frac{p}{p-1} \frac{1}{\alpha_0^{p-1}},$$

ce qui prouve la convergence de la série $\sum \frac{\alpha_n}{S_n^p}$. Fin du lemme.

Reprenons la démonstration principale. On peut supposer $a \neq 0$; soit n_0 tel que $a_{n_0} \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $\alpha_n = a_{n_0+n}^p$, et $S_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$.

D'après le lemme, la série $\sum \frac{\alpha_n}{S_n^q}$ est convergente ; la suite $\left(\frac{\alpha_n^{1/q}}{S_n} \right)$ est donc élément de l'espace $l^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\alpha_n^{1/q}}{S_n} = \frac{a_{n_0+n}^{p/q}}{S_n} = \frac{a_{n_0+n}^{p-1}}{S_n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons $b_n = 0$ si $n < n_0$ et $b_n = \frac{a_n^{p-1}}{S_{n-n_0}}$ si $n \geq n_0$.

Il est clair que la suite (b_n) est élément de $l^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et que par conséquent, d'après l'hypothèse, la série $\sum a_n b_n$ est convergente. Pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$a_n b_n = \frac{a_n^p}{S_{n-n_0}} = \frac{a_n^p}{\sum_{k=n_0}^n a_k^p}.$$

Soit $N \geq n_0$ tel que $\sum_{k=N}^{\infty} a_k b_k \leq 1/2$. Pour tout $n \geq N$ on a :

$$\frac{1}{2} \geq \frac{a_N^p}{a_{n_0}^p + \dots + a_N^p} + \dots + \frac{a_n^p}{a_{n_0}^p + \dots + a_n^p} \geq \frac{a_N^p + \dots + a_n^p}{a_{n_0}^p + \dots + a_n^p}.$$

Nous en déduisons :

$$a_{n_0}^p + \dots + a_{N-1}^p + a_N^p + \dots + a_n^p \geq 2(a_N^p + \dots + a_n^p),$$

d'où :

$$a_N^p + \dots + a_n^p \leq a_{n_0}^p + \dots + a_{N-1}^p.$$

Cette majoration prouve que la série $\sum a_n^p$ est convergente, c'est-à-dire que $a \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Cette proposition est en particulier vraie si $p = q = 2$, ce qu'il fallait démontrer.

§ II.2 ORTHOGONALITÉ DANS UN ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

Exercice 2 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } E \text{ le } \mathbb{R}\text{-ev } \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire } (u, v) \mapsto \int_0^1 u v. \text{ On donne } c \in]0, 1[, \text{ et on note } \alpha \text{ la forme linéaire} \\ E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \int_0^c u. \\ \text{a) Vérifier que } \alpha \text{ est continue.} \\ \text{b) Montrer que } H = \text{Ker}(\alpha) \text{ est un hyperplan fermé de } E, \text{ mais} \\ \text{que } H^\perp = \{0\}. \blacksquare \end{array} \right.$$

a) Pour tout $u \in E$ on a l'égalité :

$$\alpha(u) = \int_0^1 \chi_{[0, c]}(t) u(t) dt.$$

D'après l'inégalité de Schwarz :

$$|\alpha(u)| \leq \left(\int_0^1 \chi_{[0,c]} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 u^2 \right)^{1/2} = \sqrt{c} \|u\| .$$

La forme linéaire α est donc continue.

b) Comme la forme linéaire α est continue (et non nulle) son noyau H est un hyperplan fermé. Montrons $H^\perp = \{0\}$. Soit $v \in H^\perp$, c'est-à-dire $v \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 u v = 0$ pour tout $u \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant $\int_0^c u = 0$. Soit φ une fonction auxiliaire continue sur $[0,1]$, nulle sur $[0,c]$ et > 0 sur $]c,1]$. On peut prendre $u = v \varphi$; on a donc $\int_0^1 v^2 \varphi = 0$, et par conséquent $v = 0$ sur $[c,1]$. Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^c (v - \lambda) = 0$. D'après l'hypothèse :

$$\int_0^1 (v - \lambda) v = 0 \quad \text{d'où} \quad \int_0^c (v - \lambda) v = 0 .$$

Comme $\int_0^c (v - \lambda) = 0$, on voit que $\int_0^c (v - \lambda)^2 = 0$ et par conséquent que $v = \lambda$ sur $[0,c]$; mais puisque v est nulle sur $[c,1]$, on en déduit $\lambda = 0$, et $v = 0$ sur $[0,1]$. Nous avons donc démontré $H^\perp = \{0\}$.

Exercice 3 :

- a) Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel et H un sous- \mathbb{R} -ev de E de *codimension* finie. Prouver que H est facteur direct préhilbertien ssi $H^{\perp\perp} = H$.
- b) On prend $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2$: $(f | g) = \int_0^1 f g$. Soit H le sous- \mathbb{R} -ev de E formé des fonctions $f \in E$ telles que $f|_{[0,1/2]} = 0$. Déterminer H^\perp . Vérifier que $H^{\perp\perp} = H$, et que cependant H n'est pas facteur direct préhilbertien. ■

a) On sait que si H est facteur direct préhilbertien, alors $H^{\perp\perp} = H$ (cf. Définition II.2.1). Supposons réciproquement $H^{\perp\perp} = H$ et H de codimension finie. Comme $H \cap H^\perp = \{0\}$, on voit que H^\perp est un sous- \mathbb{R} -ev de dimension finie (H^\perp est inclus dans un supplémentaire de H). Nous en déduisons que H^\perp est un facteur direct préhilbertien (Théorème II.2.6). Puisque $H^{\perp\perp} = H$ on a :

$$H^\perp \oplus H^{\perp\perp} = H^\perp \oplus H = E .$$

Le sous- \mathbb{R} -ev H est donc un facteur direct préhilbertien.

b) Montrons que $H^\perp = \{g \in E \mid g|_{[1/2,1]} = 0\}$. Il est clair que si $g|_{[1/2,1]} = 0$, pour toute f telle que $f|_{[0,1/2]} = 0$ on a $\int_0^1 f g = 0$, d'où $g \in H^\perp$. Réciproquement, soit $g \in H^\perp$; il existe une fonction auxiliaire $\varphi \in E$ telle que $\varphi = 0$ sur $[0, 1/2]$ et $\varphi > 0$ sur $]1/2, 1]$; on a $\varphi g \in H$, donc $\int_0^1 \varphi g^2 = \int_{1/2}^1 \varphi g^2 = 0$; nous en déduisons $\varphi g^2 = 0$ sur $]1/2, 1]$, d'où $g = 0$ sur $]1/2, 1]$, et enfin (par continuité) $g|_{[1/2,1]} = 0$. En procédant de manière analogue, on prouverait $H^{\perp\perp} = \{g \in E \mid g|_{[0,1/2]} = 0\} = H$. Cependant $H + H^\perp \neq E$, puisque toute fonction élément de $H + H^\perp$ est nulle en $1/2$.

L'hypothèse $H^{\perp\perp} = H$ n'est donc pas suffisante pour que H soit un facteur direct préhilbertien.

Exercice 8 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel de dimension infinie, et p un entier ≥ 1 . On note $\mathcal{G}_p(E)$ l'ensemble des sous- \mathbb{R} -ev de dimension p de E , et, pour chaque $V \in \mathcal{G}_p(E)$, on note s_V la symétrie orthogonale autour de V^\perp . Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $(\forall V \in \mathcal{G}_p(E)) \quad u \circ s_V = s_V \circ u$. Prouver que u est une homothétie. ■

Si V est un sous- \mathbb{R} -ev de dimension finie p , on sait que c'est un facteur direct préhilbertien (Théorème II.2.6), et qu'il existe par conséquent une symétrie orthogonale autour de V (cf. Définition II.2.3).

Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $(\forall V \in \mathcal{G}_p(E)) \quad u \circ s_V = s_V \circ u$. Pour tout sous- \mathbb{R} -ev V de dimension p , si $x \in V$ on a :

$$u(x) = u(s_V(x)) = s_V(u(x)) \quad \text{d'où} \quad u(x) \in V.$$

Les sous- \mathbb{R} -ev de E de dimension p sont donc tous stables par u .

Soit $x \in E \setminus \{0\}$; comme E n'est pas de dimension finie il existe des vecteurs e_1, \dots, e_p tels que la famille (e_1, \dots, e_p, x) soit libre (il suffirait de supposer que E est de dimension infinie, ou finie mais $> p$). Notons F le sous- \mathbb{R} -ev engendré par cette famille; pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ l'hyperplan de F d'équation $x_i = 0$ dans la base (e_1, \dots, e_p, x) , est de dimension p , et est donc stable par u ; l'intersection de ces p hyperplans de F est évidemment la droite $\mathbb{R}x$, qui est donc stable par u . Toute droite de E est donc stable par u .

On sait qu'alors u est nécessairement une homothétie.

Exercice 9 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E , d'images respectives F et G . Montrer $p \circ q = q \circ p$ si, et seulement si, les sous-espaces $(F \cap G)^\perp \cap F$ et $(F \cap G)^\perp \cap G$ sont orthogonaux. ■

Posons $F_1 = (F \cap G)^\perp \cap F$ et $G_1 = (F \cap G)^\perp \cap G$, p_1 le projecteur orthogonal d'image F_1 , g_1 le projecteur orthogonal d'image G_1 , et r le projecteur orthogonal d'image $F \cap G$. L'espace F_1 est le supplémentaire orthogonal de $F \cap G$ dans l'espace euclidien F , on a donc $F_1 \oplus (F \cap G) = F$; nous en déduisons : $p_1 + r = p$ (puisque $p_1 + r$ est l'identité sur F et est nul sur l'orthogonal de F qui est inclus dans celui de F_1 et celui de $F \cap G$). De manière analogue, $q_1 + r = q$. Comme $p_1 \circ r = r \circ p_1 = 0$ et $q_1 \circ r = r \circ q_1 = 0$, on a :

$$p \circ q - q \circ p = (p_1 + r) \circ (q_1 + r) - (q_1 + r) \circ (p_1 + r) = p_1 \circ q_1 - q_1 \circ p_1.$$

On voit donc que les projecteurs p et q commutent si, et seulement si, les projecteurs p_1 et q_1 commutent. C'est le cas si les sous-espaces F_1 et G_1 sont orthogonaux : on a alors $p_1 \circ q_1 = q_1 \circ p_1 = 0$. Réciproquement, si $p_1 \circ q_1 = q_1 \circ p_1$, pour tout $x \in F_1$, on a $p_1(q_1(x)) = q_1(x)$, et par conséquent $q_1(x) \in F_1$, d'où $q_1(x) \in F_1 \cap G_1 = \{0\}$, d'où $x \in G_1^\perp$. On voit donc que si $p_1 \circ q_1 = q_1 \circ p_1$, alors $F_1 \subset G_1^\perp$, c'est-à-dire F_1 et G_1 sont orthogonaux.

Nous avons donc bien démontré que les projecteurs p et q commutent si, et seulement si, les sous-espaces $(F \cap G)^\perp \cap F$ et $(F \cap G)^\perp \cap G$ sont orthogonaux.

§ II.3 FAMILLES ORTHONORMALES

Exercice 1 :

Soit n un entier ≥ 3 . On munit le \mathbb{R} -ev $E = \mathbb{R}^n$ de la structure euclidienne canonique, et on note H le sous- \mathbb{R} -ev Δ^\perp , où $\Delta = \mathbb{R}u$, avec $u = e_1 + e_2 + \dots + e_n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désignant la base canonique de E . On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^n : $W_k = \sum_{j=1}^n w_{k,j} e_j$, avec $1 \leq k \leq n-1$, définis par :

pour $1 \leq k < n/2$,

$$(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad w_{k,j} = \sqrt{\frac{2}{n}} \sin\left(\frac{2k(j-1)\pi}{n}\right),$$

pour $n/2 < k \leq n-1$,

$$\left\| \begin{array}{l} (\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad w_{k,j} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos \left(\frac{2k(j-1)\pi}{n} \right) ; \\ \text{enfin si } n \text{ est pair, pour } k = n/2 : \\ (\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad w_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \left(\frac{2k(j-1)\pi}{n} \right) . \\ \text{Montrer que } (W_k)_{k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket} \text{ est une base orthonormale de } H . \blacksquare \end{array} \right.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$ notons :

$$u_p = \sum_{j=1}^n \cos \left(\frac{2p(j-1)\pi}{n} \right) \quad \text{et} \quad v_p = \sum_{j=1}^n \sin \left(\frac{2p(j-1)\pi}{n} \right) .$$

On a :

$$u_p + i v_p = \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(i \frac{2pk\pi}{n} \right) .$$

Cette somme est nulle si, et seulement si, $n \nmid p$, et vaut n sinon. On voit donc que v_p est toujours 0, et que $u_p = 0$ sauf si $n \mid p$ auquel cas $u_p = n$.

Vérifions d'abord que les vecteurs de la famille sont unitaires. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a l'égalité :

$$\sum_{j=1}^n \cos^2 \left(\frac{2p(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} u_{2p} + \frac{n}{2} .$$

D'après ce qui précède, cette somme vaut $n/2$ si $1 \leq p < n$ et $p \neq n/2$, et n si $p = n/2$ (ce qui est possible si n est pair). Comme pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, on voit que pour tout p entier $1 \leq p < n/2$, on a :

$$\sum_{j=1}^n \sin^2 \left(\frac{2p(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} .$$

Les vecteurs W_1, \dots, W_{n-1} sont donc bien unitaires.

Soient h et k entiers relatifs, considérons la somme :

$$A_{h,k} = \sum_{j=1}^n \cos \left(\frac{2k(j-1)\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{2h(j-1)\pi}{n} \right) = \frac{u_{h+k} + u_{k-h}}{2} .$$

Si $n/2 \leq h < k \leq n-1$, alors $n < h+k < 2n$ et $0 < k-h < n$, donc $A_{h,k} = 0$. Les vecteurs W_k , où $n/2 \leq k \leq n-1$, sont donc orthogonaux deux à deux.

Posons pour h et k entiers :

$$B_{h,k} = \sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{2k(j-1)\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2h(j-1)\pi}{n}\right) = \frac{u_{k-h} - u_{k+h}}{2}.$$

Si $1 \leq h < k < n/2$ alors $0 < h+k < n$ et $0 < k-h < n$ donc $B_{h,k} = 0$. Les vecteurs W_k , où $1 \leq k < n/2$, sont donc orthogonaux deux à deux.

Considérons pour h et k entiers la somme :

$$C_{h,k} = \sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{2k(j-1)\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2h(j-1)\pi}{n}\right) = \frac{v_{k+h} - v_{k-h}}{2}.$$

On a donc pour tout h et k entiers $C_{h,k} = 0$. Pour tout h et k tels que $1 \leq h < n/2$ et $n/2 \leq k \leq n-1$, W_h est donc orthogonal à W_k .

Vérifions enfin que les vecteurs W_1, \dots, W_{n-1} sont bien dans H , c'est-à-dire orthogonaux à $u = e_1 + \dots + e_n$. Pour tout k tel que $n/2 \leq k \leq n-1$:

$$\sum_{j=1}^n \cos\left(\frac{2k(j-1)\pi}{n}\right) = u_k = 0 ;$$

pour tout k tel que $1 \leq k < n/2$:

$$\sum_{j=1}^n \sin\left(\frac{2k(j-1)\pi}{n}\right) = v_k = 0.$$

La famille (W_1, \dots, W_{n-1}) est donc bien une base orthonormale de H .

Exercice 3 :

|| Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel de dimension infinie.
 || On suppose qu'il y a dans E une famille $(e_i)_{i \in I}$ orthonormale
 || et totale. Montrer que E est séparable si, et seulement si, I est
 || dénombrable. ■

Supposons que I soit dénombrable ; on peut alors supposer $I = \mathbb{N}^*$. Soit $E_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$; le sous-espace préhilbertien E_n est de dimension finie, donc séparable ; il existe par conséquent une partie dénombrable P_n de E_n qui soit partout dense (pour toutes les normes sur E_n et en particulier la norme euclidienne induite). La famille $(e_i)_{i \in I}$ étant totale, il est clair que la partie dénombrable $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} P_n$ est partout dense dans l'espace préhilbertien E . L'espace préhilbertien E est donc séparable.

Supposons E séparable ; soit P une partie dénombrable de E et partout dense. On vérifie que pour tout $(i, j) \in I^2$, $i \neq j$, on a $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Posons pour tout $i \in I$:

$$O_i = \mathbf{B}(e_i, \sqrt{2}/2) .$$

D'après la remarque précédente, la famille $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts deux à deux disjoints ; en choisissant pour tout $i \in I$ un élément de P qui est dans O_i , on obtient une injection de I dans P . L'ensemble I est donc nécessairement dénombrable.

Exercice 4 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) ($n \in \mathbb{N}^*$) une suite libre dans E . Pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit M_p la matrice $[(e_i | e_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$ et $G_p = \det(M_p) = G(e_1, \dots, e_p)$. Pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, soit $\Delta_{j,p}$ le cofacteur de $(e_j | e_p)$ dans M_p . On notera $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ l'orthonormalisée de la famille libre (e_1, \dots, e_n) . Démontrer :

$$(\forall p \in \llbracket 2, n \rrbracket) \quad \varepsilon_p = \sum_{j=1}^p \frac{\Delta_{j,p}}{\sqrt{G_{p-1} G_p}} e_j . \blacksquare$$

Pour $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ posons :

$$v_p = \sum_{j=1}^p \frac{\Delta_{j,p}}{G_{p-1}} e_j .$$

On remarque que $\Delta_{p,p} = G_{p-1}$; le dernier scalaire dans la combinaison linéaire est donc 1. D'autre part pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ on a :

$$(v_p | e_i) = \sum_{j=1}^p \frac{\Delta_{j,p}}{G_{p-1}} (e_j | e_i) = 0 ,$$

car la somme :

$$\sum_{j=1}^p \Delta_{j,p} (e_j | e_i) ,$$

est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans M_p la dernière colonne par la colonne d'indice $i < p$. Le vecteur v_p est donc orthogonal aux vecteurs e_1, \dots, e_{p-1} . On trouve aussi que :

$$(v_p | e_p) = \sum_{j=1}^p \frac{\Delta_{j,p} (e_j | e_p)}{G_{p-1}} = \frac{G_p}{G_{p-1}} .$$

Il est clair qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que :

$$v_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \varepsilon_i + e_p .$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, v_p est orthogonal à ε_i ; nous en déduisons :

$$(v_p | \varepsilon_i) = \lambda_i + (e_p | \varepsilon_i) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = -(e_p | \varepsilon_i) ,$$

et par conséquent :

$$v_p = e_p - \sum_{j=1}^{p-1} (e_p | \varepsilon_j) \varepsilon_j .$$

D'après le Corollaire 1 du Théorème II.3.4 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt), on a :

$$\varepsilon_p = \frac{1}{\|v_p\|} v_p .$$

Calculons $\|v_p\|$. Comme v_p est orthogonal aux vecteurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$, on a :

$$(v_p | v_p) = (v_p | e_p) = \frac{G_p}{G_{p-1}} .$$

Nous obtenons donc :

$$\varepsilon_p = \sqrt{\frac{G_{p-1}}{G_p}} \sum_{j=1}^p \frac{\Delta_{j,p}}{G_{p-1}} e_j = \frac{1}{\sqrt{G_{p-1} G_p}} \sum_{j=1}^p \Delta_{j,p} e_j .$$

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a = (a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx .$$

a) Montrer que f admet un *minimum* μ , atteint en un point unique de \mathbb{R}^n , et calculer ce minimum.

b) On considère l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot | \cdot))$, où E est le \mathbb{R} -ev $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $(f, g) \in E^2$, $(f | g) = \int_0^1 f g$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit e_k la fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^k$. Prouver que si on note $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ l'orthonormalisée de la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un réel λ_k tel que :

$$H_k(t) = \lambda_k \frac{d^k}{dt^k} (t^k (1-t)^k) ,$$

$H_k(0)$ et λ_k étant à préciser.

c) Soit E_n le sous- \mathbb{R} -ev de E égal à $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ et $\mathcal{H}_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Prouver $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = \mathbb{R}g$, où $g = \sum_{k=0}^n b_k X^k$,

les b_k étant définis par la condition :

$$\frac{(X-1)\dots(X-n)}{(X+1)\dots(X+n+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{X+k+1}.$$

Retrouver ainsi $\mu = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \blacksquare$

a) Soit dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 PQ$. Il est clair que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(a_1, \dots, a_n)$ est le carré de la distance du polynôme -1 à l'élément $a_1 X + \dots + a_n X^n$ de E . La fonction f atteint donc un minimum en un point et un seul : la projection orthogonale de -1 sur le sous- \mathbb{R} -ev $\text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$, et la valeur minimale de f est le carré de la distance de -1 (ou de $+1$) à ce sous- \mathbb{R} -ev. D'après le Théorème II.3.5, cette valeur minimale est :

$$d^2 = \frac{G(1, X, X^2, \dots, X^n)}{G(X, X^2, \dots, X^n)}.$$

Le numérateur est le déterminant de la matrice $M \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le terme de ligne i et de colonne j est $1/(i+j-1)$. Le dénominateur est le déterminant de la matrice $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme de ligne i et de colonne j est $1/(i+j+1)$. Ces deux déterminants sont des déterminants de Cauchy. On démontre dans la résolution de l'exercice 26 du § XIII.5 du Tome 1 du cours l'égalité :

$$\det \left(\left[\frac{1}{a_i + b_j} \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2} \right) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2} (a_i + b_j)}.$$

Nous en déduisons, en posant $m = n+1$, et pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $a_i = i$ et $b_i = i-1$:

$$G(1, X, X^2, \dots, X^n) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j-i) \right)^2}{\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2} (i+j-1)} = \frac{\left(\prod_{0 \leq i < j \leq n} (j-i) \right)^2}{\prod_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} (i+j+1)},$$

et en posant $m = n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ $a_i = i$ et $b_i = i+1$:

$$G(X, X^2, \dots, X^n) = \frac{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) \right)^2}{\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (i+j+1)}.$$

On obtient donc :

$$\mu = d^2 = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} .$$

b) Posons pour h et k entiers, tels que $0 \leq h < k$:

$$P_{h,k} = \frac{d^h}{dt^h} (t^k (t-1)^k) .$$

On constate que 0 et 1 sont zéros du polynôme $P_{h,k}$, à l'ordre $k-h > 0$. Nous en déduisons que pour tout polynôme P , si $0 < h \leq k$:

$$(P_{h,k} | P) = \int_0^1 P_{h,k} P = [P_{h-1,k} P]_0^1 - \int_0^1 P_{h-1,k} P' = - \int_0^1 P_{h-1,k} P' ,$$

puisque $0 < k-h+1$. On voit alors facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout polynôme P :

$$(1) \quad (P_{k,k} | P) = (-1)^k \int_0^1 P_{0,k} P^{(k)} = \int_0^1 t^k (1-t)^k P^{(k)}(t) dt .$$

Ceci démontre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P_{k,k}$ est orthogonal aux polynômes e_0, e_1, \dots, e_{k-1} , dont la dérivée d'ordre k est nulle. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Q_k = \frac{k!}{(2k)!} P_{k,k} ,$$

de telle sorte que Q_k est réduit de degré k (sa coordonnée sur e_k est donc 1). Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$H_k = \frac{1}{\|Q_k\|} Q_k .$$

D'après (1) :

$$(P_{k,k} | P_{k,k}) = \int_0^1 t^k (1-t)^k P_{k,k}^{(k)}(t) dt = (2k)! \int_0^1 t^k (1-t)^k dt .$$

On reconnaît une intégrale eulérienne de première espèce ; on a :

$$(P_{k,k} | P_{k,k}) = (2k)! \frac{k! k!}{(2k+1)!} = \frac{(k!)^2}{2k+1} ,$$

d'où :

$$\|Q_k\| = \frac{k!}{(2k)!} \sqrt{(P_{k,k} | P_{k,k})} = \frac{(k!)^2}{(2k)! \sqrt{2k+1}} .$$

Nous obtenons donc :

$$H_k = \frac{(2k)! \sqrt{2k+1}}{(k!)^2} \frac{k!}{(2k)!} P_{k,k} = \frac{\sqrt{2k+1}}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^k (t-1)^k) .$$

En utilisant la formule de Leibnitz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{\sqrt{2k+1}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{k!}{(k-i)!} t^{k-i} \frac{k!}{i!} (t-1)^i = \\ &= \sqrt{2k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 t^{k-i} (t-1)^i . \end{aligned}$$

D'où en particulier :

$$H_k(0) = (-1)^k \sqrt{2k+1} .$$

c) Le sous-espace $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$ étant de dimension 1, c'est $\mathbb{R}g$ si, et seulement si, g est un polynôme non nul orthogonal aux polynômes e_1, \dots, e_n . On voit facilement que ces conditions d'orthogonalité s'écrivent :

$$(1) \quad (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad \sum_{k=0}^n b_k \frac{1}{k+i+1} = 0 .$$

Posons :

$$\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{X+k+1} = \frac{P}{(X+1) \dots (X+n+1)} ,$$

où P est un polynôme de degré $\leq n$. Les conditions (1) sont équivalentes aux conditions : $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad P(i) = 0$. Comme P est de degré $\leq n$, cela équivaut à la condition $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad P = \lambda(X-1) \dots (X-n)$. Une des solutions non nulles pour g est donc le polynôme $\sum_{k=0}^n b_k X^k$, où (b_0, \dots, b_n) est tel que :

$$(2) \quad R = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{X+k+1} = \frac{(X-1) \dots (X-n)}{(X+1) \dots (X+n+1)} .$$

Comme $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = \mathbb{R}g$, la distance du polynôme 1 au sous-espace \mathcal{H}_n dans l'espace euclidien E_n est :

$$d = \frac{|(1 | g)|}{\sqrt{(g | g)}} .$$

On obtient (cf. égalité (2)) :

$$(g | 1) = \sum_{k=0}^n b_k (e_k | 1) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} = R(0) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(n+1)}$$

et :

$$(g | g) = \sum_{k=0}^n b_k (g | e_k) = b_0 (g | e_0) = b_0 (g | 1) .$$

En utilisant la formule des résidus (le pôle -1 de R est simple) on obtient :

$$b_0 = \frac{(-1-1) \dots (-1-n)}{(-1+2) \dots (-1+n+1)} = (-1)^n (n+1) .$$

On remarque que g est unitaire, et on obtient :

$$d = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \mu = d^2 = \frac{1}{(n+1)^2} .$$

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a = (a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx .$$

a) Montrer que f admet un *minimum* μ , atteint en un point unique de \mathbb{R}^n , et calculer ce minimum. On pourra munir le \mathbb{R} -ev E des applications polynomiales $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, du produit scalaire :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx .$$

b) Soit $e_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit E_n le sous- \mathbb{R} -ev égal à $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ de l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot | \cdot))$ indiqué en a), et $\mathcal{H}_n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Considérons la suite $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes, définie par $H_0 = 1$ et, pour $k \geq 1$,

$$H_k(X) = (X+1) \dots (X+k) .$$

Soit $(b_k)_{k \in [0, n]}$ définie par :

$$(X-1) \dots (X-n) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(X) .$$

Démontrer que le polynôme $g = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ dirige la droite vectorielle $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$. Utiliser ce résultat pour retrouver la valeur de μ . ■

a) Considérons l'espace euclidien $(E_n, (\cdot | \cdot))$, où $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E_n^2$:

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx .$$

On voit que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ le réel $f(a_1, \dots, a_n)$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme $a_1 X + \dots + a_n X^n$ au polynôme -1 . La fonction f atteint donc au point (a_1, \dots, a_n) tel que le polynôme $a_1 X + \dots + a_n X^n$ soit la projection orthogonale de -1 sur le sous-espace $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$, et uniquement en ce point, sa valeur minimale μ , qui est le carré de la distance d du polynôme -1 au sous-espace $\text{Vect}(X, \dots, X^n)$. D'après le Théorème II.3.5 on a :

$$\mu = d^2 = \frac{G(-1, X, X^2, \dots, X^n)}{G(X, X^2, \dots, X^n)} = \frac{G(1, X, X^2, \dots, X^n)}{G(X, X^2, \dots, X^n)}.$$

Un calcul facile d'intégrations par parties nous donne pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{i+j} dx = (i+j)!.$$

Nous en déduisons :

$$\mu = \frac{\det \begin{bmatrix} 0! & 1! & \dots & \dots & n! \\ 1! & 2! & \dots & \dots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \dots & \dots & (2n)! \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2! & 3! & \dots & (n+1)! \\ 3! & 4! & \dots & (n+2)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n+1)! & (n+2)! & \dots & (2n)! \end{bmatrix}}.$$

Calculons le numérateur N .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on peut diviser la ligne i par $(i-1)!$. On obtient :

$$N = 0! 1! \dots n! \det \left[\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!} \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}.$$

Posons $Q_1 = 1$ et pour tout $j > 1$:

$$Q_j = (X + j - 1)(X + j - 2) \dots (X + 1).$$

On vérifie que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, si $j > 1$:

$$Q_j(i-1) = (i+j-2)(i+j-3) \dots i = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!},$$

ce qui est encore vrai si $j = 1$. D'après le résultat démontré dans la résolution de l'exercice 5 du § XIII.5 du Tome 1 du cours, on a :

$$N = 0! 1! \dots n! V_{n+1}(0, 1, \dots, n) \det_{\mathcal{B}_{n+1}}(Q_1, \dots, Q_{n+1})$$

où \mathcal{B}_{n+1} est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et V_{n+1} désigne un déterminant de Vandermonde. La matrice des polynômes Q_1, \dots, Q_{n+1} dans \mathcal{B}_{n+1} étant trigonale supérieure de coefficients diagonaux 1, nous obtenons :

$$N = 0! 1! \dots n! V_{n+1}(0, 1, \dots, n) = 0! 1! \dots n! 1! 2! \dots n! = (1! \dots n!)^2 .$$

Calculons de manière analogue le dénominateur D .

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ nous pouvons diviser la ligne i du déterminant par $(i+1)!$. On obtient :

$$D = 2! 3! \dots (n+1)! \det \left[\frac{(i+j)!}{(i+1)!} \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} .$$

On vérifie que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $j > 1$:

$$Q_j(i+1) = (i+j)(i+j-1) \dots (i+2) = \frac{(i+j)!}{(i+1)!} ,$$

ce qui est encore vrai si $j = 1$. Nous en déduisons comme dans le calcul de N :

$$\begin{aligned} D &= 2! 3! \dots (n+1)! V_n(2, 3, \dots, n+1) \det_{\mathcal{B}_n}(Q_1, \dots, Q_n) = \\ &= 2! 3! \dots (n+1)! 1! 2! \dots (n-1)! . \end{aligned}$$

Nous en déduisons finalement :

$$\mu = d^2 = \frac{N}{D} = \frac{(1! \dots n!)^2}{2! 3! \dots (n+1)! 1! 2! \dots (n-1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} .$$

b) Nous remplacerons les fonctions polynomiales de l'énoncé par des polynômes, en utilisant les mêmes notations.

L'espace $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$ étant de dimension 1, c'est $\mathbb{R}g$ si, et seulement si, le polynôme g est un polynôme non nul orthogonal aux polynômes X, X^2, \dots, X^n . Ces conditions d'orthogonalité s'écrivent :

$$(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad 0 = (g \mid X^i) = \sum_{k=0}^n b_k (k+i)! = i! \sum_{k=0}^n b_k (i+k) \dots (i+1) ,$$

soit encore :

$$(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad \sum_{k=0}^n b_k H_k(i) = 0 .$$

Ces conditions sont satisfaites puisque par hypothèse :

$$(X-1)\dots(X-n) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(X) .$$

Le polynôme g , qui est non nul, dirige donc le sous-espace $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$.

Comme dans l'exercice précédent on a :

$$d = \frac{|(g|1)|}{\sqrt{(g|g)}} .$$

On obtient :

$$(g|1) = \sum_{k=0}^n b_k k! = \sum_{k=0}^n b_k H_k(0) = (-1)\dots(-n) = (-1)^n n! ,$$

et :

$$(g|g) = \sum_{k=0}^n b_k (g|X^k) = b_0 (g|1) .$$

En remplaçant X par -1 dans l'identité :

$$(X-1)\dots(X-n) = \sum_{k=0}^n b_k H_k(X) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k (X+1)\dots(X+k) ,$$

on obtient :

$$b_0 = (-2)\dots(-1-n) = (-1)^n (n+1)! .$$

Nous en déduisons :

$$d^2 = \frac{(g|1)^2}{(g|g)} = \frac{(g|1)}{b_0} = \frac{1}{n+1} ,$$

ce qui confirme le résultat trouvé dans le a).

Exercice 16 :

|| Soit E un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_p) une suite de E telle que $p \geq 2$ et $(e_i | e_j) < 0$ pour $1 \leq i < j \leq p$. Montrer que toute sous-suite à $p-1$ termes de cette suite est libre. ■

Supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ soit tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0$. On a :

$$0 = \left\| \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^2 \|e_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \lambda_i \lambda_j (e_i | e_j)$$

Pour tout (i, j) tel que $i \neq j$, $(e_i | e_j) < 0$, donc :

$$\lambda_i \lambda_j (e_i | e_j) \geq |\lambda_i| |\lambda_j| (e_i | e_j) .$$

Nous en déduisons :

$$0 \geq \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|^2 \|e_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} |\lambda_i| |\lambda_j| (e_i | e_j) = \left\| \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \right\|^2 \geq 0 ,$$

et par conséquent $\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0$. On remarque alors que puisque pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $|\lambda_k| (e_k | e_p) \leq 0$, l'égalité :

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k \mid e_p \right) = \sum_{k=1}^p |\lambda_k| (e_k | e_p) ,$$

n'est possible que si pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $|\lambda_k| (e_k | e_p) = 0$, et donc puisque $(e_k | e_p) < 0$, $|\lambda_k| = 0$.

La famille (e_1, \dots, e_{p-1}) est donc libre. Il en de même pour les autres sous-familles de $p-1$ termes de la famille (e_1, \dots, e_p) .

§ II.4 PREMIÈRE ÉTUDE DES GROUPES ORTHOGONAUX

Exercice 4 :

|| Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Trouver tous les couples d'involutions orthogonales u et v de E tels que $u \circ v = v \circ u$. ■

Soient u l'involution orthogonale autour du sous-espace F et v l'involution orthogonale autour du sous-espace G . On a $u = 2p_F - \text{Id}_E$ et $v = 2p_G - \text{Id}_E$, où p_F et p_G désignent respectivement les projections orthogonales sur F et sur G . Il est clair que u et v commutent si, et seulement si, les projecteurs p_F et p_G commutent. D'après l'exercice 9 du § II.2, p_F et p_G commutent si, et seulement si, les sous-espaces $(F \cap G)^\perp \cap F$ et $(F \cap G)^\perp \cap G$ sont orthogonaux.

Exercice 6 :

|| Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $g(\theta) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$

reconnait $g(\theta) = \frac{1}{n+1} U_n(\cos \theta)$, où U_n est le polynôme de Tchebychev de seconde espèce d'ordre n .

a) Prouver que si $z = e^{i\theta}$, on a :

$$U_n(\cos \theta) = e^{-in\theta} (1 + z^2 + \dots + z^{2n})$$

et en déduire :

$$(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2) \quad \sum_{\nu=0}^n g\left(u - \frac{\nu\pi}{n+1}\right) g\left(\frac{\nu\pi}{n+1} - v\right) = g(u - v).$$

b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, on pose $S_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Si $\alpha \neq 0$, soit $S_\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1})$ tel que pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $S_\alpha(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$ où pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$y_q = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^n \frac{\sin \alpha \pi}{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}(q-p+\alpha)\right)} x_p.$$

Montrer : $(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad S_\beta \circ S_\alpha = S_{\alpha+\beta}$.

Prouver enfin que, pour la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^{n+1} , chaque S_α est *orthogonal*.

c) Montrer : $\exists f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+1}) \mid (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad S_\alpha = \exp(\alpha f)$.
Calculer f . ■

a) Si $z = e^{i\theta}$ est différent de 1 ou de -1, on a :

$$\begin{aligned} U_n(\cos \theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{z^{(n+1)} - z^{-(n+1)}}{z - z^{-1}} = z^{-n} \frac{z^{2(n+1)} - 1}{z^2 - 1} = \\ &= z^{-n} (1 + z^2 + \dots + z^{2n}) = e^{-in\theta} (1 + z^2 + \dots + z^{2n}). \end{aligned}$$

Nous considérerons dans la suite que la définition de g est :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad g(\theta) = \frac{1}{n+1} e^{-in\theta} (1 + e^{2i\theta} + \dots + e^{2ni\theta}) = \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^n e^{(2h-n)i\theta}.$$

Remarquons que la fonction g est paire.

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n g\left(u - \frac{\nu\pi}{n+1}\right) g\left(\frac{\nu\pi}{n+1} - v\right) &= \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\nu \in \llbracket 0, n \rrbracket} \sum_{(h, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} e^{(2h-n)i\left(u - \frac{\nu\pi}{n+1}\right)} e^{(2k-n)i\left(\frac{\nu\pi}{n+1} - v\right)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{(h, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \sum_{\nu \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i\left[(2h-n)\left(u - \frac{\nu\pi}{n+1}\right) + (2k-n)\left(\frac{\nu\pi}{n+1} - v\right)\right]}, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n g\left(u - \frac{\nu \pi}{n+1}\right) g\left(\frac{\nu \pi}{n+1} - \beta\right) &= \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{(h,k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} e^{i((2h-n)u - (2k-n)v)} \left(\sum_{\nu=0}^n e^{2i \frac{\nu(k-h)\pi}{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Si $(h, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, et que $h \neq k$ alors :

$$\sum_{\nu=0}^n e^{2i \frac{\nu(k-h)\pi}{n+1}} = \frac{e^{2i(h-k)\pi} - 1}{e^{2i \frac{(k-h)\pi}{n+1}} - 1} = 0,$$

et si $h = k$ cette somme vaut $n+1$; par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n g\left(u - \frac{\nu \pi}{n+1}\right) g\left(\frac{\nu \pi}{n+1} - v\right) &= \frac{1}{(n+1)} \sum_{h \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i((2h-n)u - (2h-n)v)} = \\ (1) \quad &= \frac{1}{(n+1)} \sum_{h \in \llbracket 0, n \rrbracket} e^{i(2h-n)(u-v)} = g(u-v). \end{aligned}$$

b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, en posant :

$$\theta = \frac{\pi}{n+1} (q - p + \alpha),$$

on a $\sin(n+1)\theta = \sin(\alpha\pi + (q-p)\pi) = (-1)^{q-p} \sin \alpha\pi$. Nous considérerons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour tout (x_0, \dots, x_n) , $S_\alpha(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$, où pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$y_q = \sum_{p=0}^n (-1)^{q-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (q - p + \alpha)\right) x_p.$$

Montrons qu'avec cette définition on a $S_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

On vérifie que si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ mais que $(n+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors $g(\theta) = 0$; c'est le cas si $\theta = \frac{\pi}{n+1} (q - p)$, où $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ et $p \neq q$. D'autre part $g(0) = 1$.

On a donc pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $S_0(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$ où pour tout $q \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$y_q = (-1)^{q-q} g(0) x_q = x_q,$$

et par conséquent $S_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Introduisons les notations :

$S_\alpha(x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)$ et $S_\beta(y_0, \dots, y_n) = (z_0, \dots, z_n)$. Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a :

$$\begin{aligned} z_r &= \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^{r-q} g\left(\frac{\pi}{n+1} (r-q+\beta)\right) \left(\sum_{p=0}^n (-1)^{q-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (q-p+\alpha)\right) x_p \right) \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^{r-p} \left(\sum_{\nu=0}^n g\left(\frac{\pi}{n+1} (r-\nu+\beta)\right) g\left(\frac{\pi}{n+1} (\nu-p+\alpha)\right) \right) x_p . \end{aligned}$$

En appliquant l'égalité (1) avec $u = \frac{\pi}{n+1} (r+\beta)$ et $v = \frac{\pi}{n+1} (p-\alpha)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} z_r &= \sum_{p=0}^n (-1)^{r-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (r+\beta) + \frac{\pi}{n+1} (\alpha-p)\right) x_p = \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^{r-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (r-p+\alpha+\beta)\right) x_p . \end{aligned}$$

On voit donc que $(z_0, \dots, z_n) = S_{\alpha+\beta}(x_0, \dots, x_n)$. En conclusion, $S_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$, et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $S_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta+\alpha}$. Nous en déduisons en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, S_α est inversible d'inverse $S_{-\alpha}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le terme de ligne $q+1$ et de colonne $p+1$ de la matrice de S_α dans la base canonique est :

$$(-1)^{q-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (q-p+\alpha)\right) .$$

Comme la fonction g est paire on a :

$$(-1)^{q-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (q-p+\alpha)\right) = (-1)^{p-q} g\left(\frac{\pi}{n+1} (p-q-\alpha)\right) ,$$

qui est le terme de ligne $p+1$ et de colonne $q+1$ de la matrice de $S_{-\alpha}$. On a donc pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'égalité :

$$S_\alpha^* = S_{-\alpha} = S_\alpha^{-1} ,$$

ce qui signifie que S_α est orthogonal.

c) En procédant comme dans l'exercice 7 du § IX.4 du Tome 3, on démontre que si φ est un homomorphisme de groupes continu $\mathbb{R} \rightarrow$

alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = \exp(\alpha f)$, où $f = \frac{d\varphi}{d\alpha}(0)$. Nous pouvons appliquer ici ces résultats à l'homomorphisme $\alpha \mapsto S_\alpha$, qui est clairement continu (puisque l'application g est continue). Remarquons aussi que puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, S_α est orthogonal, alors f est antisymétrique (et $S_\alpha \in \mathbf{SO}(\mathbb{R}^{n+1})$). En effet, soit M_α la matrice de S_α dans la base canonique et P celle de f ; pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a ${}^t M_\alpha M_\alpha = I_{n+1}$; en dérivant en 0 on obtient :

$${}^t P \circ I_{n+1} + {}^t I_{n+1} \circ P = 0 ,$$

donc P est antisymétrique. Pour tout $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, posons :

$$s_{p,q}(\alpha) = (-1)^{q-p} g\left(\frac{\pi}{n+1} (q-p+\alpha)\right) ;$$

c'est le terme de ligne $q+1$ et de colonne $p+1$ de la matrice M_α . Pour $p \neq q$, si α est suffisamment voisin de 0, mais $\neq 0$, on a :

$$\frac{s_{p,q}(\alpha) - s_{p,q}(0)}{\alpha} = \frac{1}{n+1} \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{n+1}(q-p+\alpha)\right)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{n+1}}{\sin\left(\frac{\pi}{n+1}(q-p)\right)} .$$

On obtient ainsi le terme de ligne $q+1$ et de colonne $p+1$ de la matrice P de f ; si $p = q$ ce terme est nul puisque P est antisymétrique.

Exercice 9 :

- a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer $\exp(\theta J)$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$ une matrice antisymétrique d'ordre n sur \mathbb{R} . Démontrer : $\exp(A) \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. L'application $\text{Asym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, $A \mapsto \exp(A)$ est-elle injective?
- c) Utiliser le théorème d'inversion locale (cf. Tome 3, Théorème VI.2.1) pour montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un voisinage ouvert V de I_n dans $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ tels que $\exp : U \rightarrow V$, $M \mapsto \exp(M)$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme, et démontrer que ce \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme transforme $\text{Asym}(n, \mathbb{R}) \cap U$ en $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) \cap V$ pourvu que U et V soient assez petits.
- d) En utilisant des *translations* de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ du type $\tau_S : M \mapsto MS$ (où $S \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$), déduire de c) que $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est une *sous-variété* de classe \mathcal{C}^∞ (cf. définition VI.3.1 du Tome 3 du cours) et de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. ■

a) On peut évidemment appliquer la définition, c'est-à-dire :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad \exp(\theta J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} J^n .$$

On trouve que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\exp(\theta J) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

On peut aussi démontrer ce résultat en remarquant que l'application :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) , \quad \theta \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} ,$$

est le seul homomorphisme de groupes continu, $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \circ)$, dont la dérivée en 0 soit la matrice J (cf. exercice 7 du § IX.4 du Tome 3).

b) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ il est clair que $\exp({}^t A) = {}^t \exp(A)$; si A est antisymétrique, alors ${}^t \exp(A) = \exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$. La matrice $\exp(A)$ est donc orthogonale. D'autre part, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, on sait que $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$; si A est antisymétrique, elle est de trace nulle, et par conséquent $\det(\exp(A)) = 1$. Pour toute matrice antisymétrique A , $\exp(A)$ est donc orthogonale directe.

L'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est évidemment pas injective, comme le prouve le a).

c) La différentielle en 0 de la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de classe \mathcal{C}^∞ , est l'identité. D'après le Théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U_1 de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et un voisinage V_1 de $I_n = \exp(0)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tels que $\exp(U_1) = V_1$, et $\exp|_{U_1}^{V_1}$ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme ; on remarque que nécessairement $\exp(U_1) = V_1 \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Notons provisoirement T l'application $M \mapsto -{}^t M$. Posons $U = U_1 \cap T(U_1)$ et $V = \exp(U)$. On voit que U est un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est stable par T , que V est un voisinage de I_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\exp|_U^V$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme. Montrons que la fonction \exp établit une bijection entre $U \cap \mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})$, qui est un voisinage de 0 dans $\mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})$, et $V \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, qui est un voisinage de I_n dans $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. D'après ce qui précède on a :

$$\exp(U \cap \mathrm{Asym}(n, \mathbb{R})) \subset V \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R}) .$$

Soit $P \in V \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$; d'après ce qui précède il existe une unique matrice $M \in U$ telle que $\exp(M) = P$, donc $\exp(-{}^t M) = ({}^t P)^{-1} = P = \exp(M)$, puisque P est orthogonale ; comme U est stable par T on a $-{}^t M \in U$ et puisque la fonction \exp est injective sur U , nous en déduisons $M = -{}^t M$, d'où $M \in U \cap \text{Asym}(n, \mathbb{R})$. Tout élément de $V \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ ayant un, et un seul, antécédant par \exp dans $M \in U \cap \text{Asym}(n, \mathbb{R})$, cela signifie que l'application \exp établit une bijection entre ces deux ensembles ; cette bijection est un homéomorphisme car elle est induite par un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

Si U' est un voisinage de 0 inclus dans U , et que $V' = \exp(U')$, il est clair que la fonction \exp établit un homéomorphisme entre $U' \cap \text{Asym}(n, \mathbb{R})$ et $V' \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. De même, si V' est un voisinage de I_n inclus dans V et que $U' = \exp^{-1}(V') \cap U$, la fonction \exp établit un homéomorphisme entre $U' \cap \text{Asym}(n, \mathbb{R})$ et $V' \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. On peut donc choisir " U aussi petit qu'on veut", ou choisir " V aussi petit qu'on veut", mais évidemment pas les deux indépendamment.

d) Nous reprenons les notations du c). Soit $P \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$; l'application $M \mapsto \exp(M)P$ induit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme entre U , voisinage de 0 dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et $\tau_P(V)$, voisinage de P dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$; nous noterons Φ_P ce difféomorphisme (entre ouverts de \mathbb{R} -ev). On remarque que $\Phi_P(0) = P$, que $\text{Asym}(n, \mathbb{R})$ est un sous- \mathbb{R} -ev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $p = n(n-1)/2$, et que $\Phi_P(U \cap \text{Asym}(n, \mathbb{R})) = \tau_P(V) \cap \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. En considérant pour tout $P \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ le difféomorphisme $\Psi_P = \Phi_P^{-1}$, et en utilisant un système de coordonnées linéaires pour définir $\text{Asym}(n, \mathbb{R})$, on voit que la partie $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait la définition VI.3.1 du Tome 3 du cours ; c'est donc une sous-variété de dimension $p = n(n-1)/2$.

Exercice 10 :

On donne $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $A \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$. Vérifier que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles. Prouver que $\Omega = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, que $\Omega + I_n$ est inversible et que $A = (I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega) = (I_n - \Omega)(I_n + \Omega)^{-1}$.

b) Réciproquement, soit $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ telle que $I_n + \Omega \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Prouver que $A = (I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega) \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$ et que $\Omega = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

c) Soit \mathcal{U} l'ensemble des matrices de la forme $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ où $A \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$. Montrer que, relativement à $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, l'ensemble \mathcal{U} est une partie ouverte, dense et connexe, et que l'application (dite de Cayley) :

|| $\text{Asym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{U}, A \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1},$
 est un *plongement* (cf. Tome 3 du cours, définition VI.3.3). ■

a) Supposons $AX = \varepsilon X$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Comme A est antisymétrique on a $\varepsilon {}^tX = {}^tX {}^tA = -{}^tX A$. Nous en déduisons $\varepsilon {}^tX X = -{}^tX A X = -\varepsilon {}^tX X$, d'où ${}^tX X = 0$; comme X est un vecteur colonne de nombres réels, ce n'est possible que si $X = 0$. Les réels -1 et $+1$ ne peuvent donc être valeurs propres d'un endomorphisme de matrice A . Nous en déduisons que les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles.

On remarque que :

$${}^t\Omega = (I_n + {}^tA)^{-1}(I_n - {}^tA) = (I_n - A)^{-1}(I_n + A),$$

et que :

$$\Omega^{-1} = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}.$$

En multipliant les deux termes de l'égalité $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$ à droite et à gauche par $(I_n - A)^{-1}$, on obtient $(I_n + A)(I_n - A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$. Nous en déduisons ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$, c'est-à-dire $\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$. D'autre part :

$$\det(\Omega) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\det({}^t(I_n + A))}{\det(I_n + A)} = 1,$$

donc $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$.

On obtient :

$$\Omega + I_n = ((I_n - A) + (I_n + A))(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1}.$$

La matrice $\Omega + I_n$ est donc inversible, et :

$$(I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega) = \frac{1}{2}((I_n + A) - (I_n + A)(I_n + A)^{-1}(I_n - A)) = A.$$

On démontre comme ci-dessus pour A , que les matrices $I_n - \Omega$ et $(I_n + \Omega)^{-1}$ commutent entre elles.

b) On vérifie :

$$\begin{aligned} {}^tA &= (I_n + {}^t\Omega)^{-1}(I_n - {}^t\Omega) = (I_n + \Omega^{-1})^{-1}(I_n - \Omega^{-1}) = \\ &= (I_n + \Omega^{-1})^{-1}\Omega^{-1}(\Omega - I_n) = (\Omega + I_n)^{-1}(\Omega - I_n) : \end{aligned}$$

La matrice A est donc antisymétrique. Nous obtenons aussi :

$$I_n + A = (I_n + \Omega)^{-1}((I_n + \Omega) + (I_n - \Omega)) = 2(I_n + \Omega)^{-1},$$

et par conséquent :

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n - (\Omega + I_n)^{-1}(I_n - \Omega))(I_n + \Omega) = \Omega.$$

Il peut sembler curieux que seule l'hypothèse $\Omega \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ soit utilisée. En fait si Ω est indirecte, elle admet toujours la valeur propre -1 (cf. § III), et $\Omega + I_n$ ne peut pas être inversible.

c) Notons Φ l'application de Cayley :

$$\text{Asym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1},$$

dont l'image est par définition \mathcal{U} , et Φ_1 l'application $\text{Asym}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{U}$ induite par Φ . D'après a) et b), l'application Φ_1 est une bijection entre $\text{Asym}(n, \mathbb{R})$ et l'ensemble des $\Omega \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre. L'ensemble image \mathcal{U} , intersection de $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ et de l'ouvert $\text{GL}(n, \mathbb{R}) - I_n$ est donc un ouvert relatif de $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$. D'autre part, comme pour toute matrice $A \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$ la matrice $I_n + A$ est inversible, il est clair que l'application Φ est de classe \mathcal{C}^∞ . Son image \mathcal{U} , est connexe puisque $\text{Asym}(n, \mathbb{R})$ l'est. Pour prouver qu'il s'agit d'un plongement, il suffit donc de prouver que Φ_1 est un homéomorphisme (cf. cours Tome 3 Théorème VI.3.2) ; c'est clair d'après ce qui précède, car Φ_1^{-1} est l'application $\Omega \mapsto (I_n + \Omega)^{-1}(I_n - \Omega)$, définie et continue sur l'ouvert relatif \mathcal{U} . Montrons enfin que \mathcal{U} est partout dense dans $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, d'après le Corollaire 1 du Théorème III.1.1, il existe une matrice orthogonale Q et des matrices carrés (N_1, \dots, N_p) telles que $P = Q^{-1} \text{Diag}(N_1, \dots, N_p) Q$, toutes les matrices N_i étant de la forme :

$$N_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix},$$

où $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$, sauf au plus une de la forme $-I_h$ ($h \in \mathbb{N}^*$) et au plus une de la forme I_k ($k \in \mathbb{N}^*$). S'il n'y a aucune matrice de la forme $-I_h$, alors $P \in \mathcal{U}$. S'il y a une matrice de la forme $-I_h$, comme le déterminant de P est $+1$, c'est que h est pair. La matrice $-I_h$ peut donc s'écrire sous la forme $\text{Diag}(J, \dots, J)$ où :

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nous sommes donc ramenés à démontrer que la matrice $J \in \mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices éléments de $\mathbf{SO}(2, \mathbb{R})$ qui n'ont pas la valeur propre -1 . Il suffit de prendre des matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

en faisant tendre θ vers π , θ restant dans l'intervalle $]0, \pi[$. Toute matrice $P \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ est donc limite d'une suite d'éléments de \mathcal{U} , ce qu'il fallait démontrer.

§ II.5 PRODUIT MIXTE ET PRODUIT VECTORIEL

Exercice 3 :

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 2$. On donne x_1, \dots, x_{n-1} éléments de E linéairement indépendants. On note $H = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $v = x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_{n-1}$.

a) Vérifier que $v \in H^\perp$.

b) On oriente H . Vérifier qu'il existe $\vec{v} \in H^\perp$ unique tel que $\|\vec{v}\| = 1$ et que, pour toute base orthonormale directe (e_1, \dots, e_{n-1}) de H , la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{v})$ est directe.

Prouver alors : $x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = [x_1, \dots, x_{n-1}] \vec{v}$, en désignant par $[x_1, \dots, x_{n-1}]$ le produit mixte des x_i dans l'espace euclidien orienté H .

c) Dédire de b) et de l'exercice 2 ci-dessus :

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1} \quad G(x_1, \dots, x_{n-1}) = \|x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}\|^2.$$

Pour $n = 3$ retrouver l'identité de Lagrange (3). ■

a) b) Soit $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in H^{n-1}$, pour tout $x \in E$ on a :

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} \mid x) = [u_1, \dots, u_{n-1}, x].$$

Comme H est de dimension $n - 1$, on voit que ce produit mixte est nul pour tout $x \in H$. Nous en déduisons que pour tout $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in H^{n-1}$, $u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} \in H^\perp$. Choisissons un vecteur unitaire $\vec{v}_1 \in H^\perp$, et posons pour tout $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in H^{n-1}$:

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} = \varphi(u_1, \dots, u_{n-1}) \vec{v}_1.$$

L'application $(u_1, \dots, u_{n-1}) \mapsto \varphi(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une forme $(n-1)$ -linéaire alternée sur l'espace H qui est de dimension $n - 1$. Soit $(a_1, \dots$

base orthonormale directe de H ; la famille $(a_1, \dots, a_{n-1}, \vec{v}_1)$ est une base orthonormale de E et par conséquent :

$$\varphi(a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \mid \vec{v}_1) = [a_1, \dots, a_{n-1}, \vec{v}_1] = \varepsilon \in \{-1, 1\} .$$

La forme $(n-1)$ -linéaire alternée $\varepsilon \varphi$, sur H de dimension $n-1$, dont la valeur sur une base orthonormale directe est 1, est nécessairement le produit mixte de l'espace euclidien orienté H . On a donc, pour tout $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in H^{n-1}$:

$$(1) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} = [u_1, \dots, u_{n-1}] \varepsilon \vec{v}_1 .$$

Posons $\vec{v} = \varepsilon \vec{v}_1$. Pour toute base orthonormale directe (e_1, \dots, e_{n-1}) de H , la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{v})$ de E est orthonormale, et comme :

$$[e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{v}] = (e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} \mid \vec{v}) = [e_1, \dots, e_{n-1}] (\vec{v} \mid \vec{v}) = 1 ,$$

il s'agit d'une base directe. Le vecteur \vec{v} est évidemment le seul vecteur unitaire de la droite H^\perp vérifiant cette condition. La relation (1) s'écrit :

$$(2) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_{n-1} = [u_1, \dots, u_{n-1}] \vec{v} ,$$

pour tout $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in H^{n-1}$.

c) Soit $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in E^{n-1}$; on peut trouver un hyperplan H tel que $(\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket) \ x_i \in H$; on peut alors orienter H et en appliquant l'égalité (2) on obtient :

$$G(x_1, \dots, x_{n-1}) = [x_1, \dots, x_{n-1}]^2 = \|x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1}\|^2 ,$$

le produit mixte étant relatif à l'espace euclidien orienté H . En particulier pour $n=3$, on trouve que pour tout $(u, v) \in E^2$:

$$\det \begin{bmatrix} (u \mid u) & (u \mid v) \\ (v \mid u) & (v \mid v) \end{bmatrix} = \|u \wedge v\|^2 ,$$

ce qui est l'identité de Lagrange.

Exercice 4 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On donne $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, où $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .
Pour toute partie $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, soit ϖ_J la projection orthogonale de E sur $V_J = \text{Vect}((e_i)_{i \in J})$. Montrer :

$$\| \quad G(x_1, \dots, x_p) = \sum_{J \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{card}(J)=p} G(\varpi_J(x_1), \dots, \varpi_J(x_p)) . \blacksquare$$

Soit $\Lambda = [\lambda_{i,j}] \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice des vecteurs (x_1, \dots, x_p) dans la base \mathcal{B} . On a par définition, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$x_i = \sum_{h=1}^n \lambda_{h,i} e_h .$$

Comme \mathcal{B} est orthonormale, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ on a :

$$(x_i | x_j) = \sum_{h=1}^n \lambda_{h,i} \lambda_{h,j} .$$

On remarque que $(x_i | x_j)$ est le terme (i, j) de la matrice ${}^t \Lambda \Lambda$. On a donc l'égalité :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det({}^t \Lambda \Lambda) .$$

Remarquons que cette égalité est également vraie si $n = p$ et que dans ce cas on obtient (comme dans l'exercice 2) :

$$(1) \quad G(x_1, \dots, x_n) = (\det \Lambda)^2 .$$

Nous sommes ramenés à l'égalité démontrée dans la résolution de l'exercice 23b) du Tome 1 du cours, en remplaçant p par m et Λ par ${}^t M$. La formule démontrée est :

$$\det(M {}^t M) = \sum_{P \in \mathcal{P}_m(\llbracket 1, n \rrbracket)} (\Delta_{\llbracket 1, m \rrbracket, P}(M))^2 .$$

Comme ici $m = p$ et $M = {}^t \Lambda$, nous obtenons :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \det({}^t \Lambda \Lambda) = \sum_{J \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} (\Delta_{J, \llbracket 1, p \rrbracket}(\Lambda))^2 .$$

Pour $J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ donnée de cardinal p , soit $\varphi_J : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow J$ l'injection croissante. Par définition, le déterminant $\Delta_{J, \llbracket 1, p \rrbracket}(\Lambda)$ est le déterminant de la matrice carrée élément de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ dont le terme (i, j) , pour $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, est $\lambda_{\varphi_J(i), j}$; ce réel est aussi le terme (i, j) de la matrice des vecteurs $(\varpi_J(x_1), \dots, \varpi_J(x_p))$ dans la base orthonormale $(e_{\varphi_J(1)}, \dots, e_{\varphi_J(p)})$ du sous-espace V_J . En appliquant l'égalité (1) dans le sous espace V_J de dimension p , on obtient :

$$(\Delta_{J, \llbracket 1, p \rrbracket}(\Lambda))^2 = G(\varpi_J(x_1), \dots, \varpi_J(x_p)) .$$

Nous en déduisons :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \sum_{J \in \mathcal{P}_p(\llbracket 1, n \rrbracket)} (\Delta_{J, \llbracket 1, p \rrbracket}(\Lambda))^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 8 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et (x_1, \dots, x_n) une base de E . On note $H_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ pour $1 \leq k \leq n$ et $H_0 = \{0\}$.

a) On pose $y_1 = x_1$; pour $1 \leq k \leq n$, soit y_k la projection orthogonale de x_k sur H_{k-1}^\perp . Avec la notation des déterminants de Gram (cf. fin du § II.3), démontrer :

$$(\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket) \quad G(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_p) \times \prod_{j=p+1}^n \|y_j\|^2 .$$

En déduire :

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_p) \times \prod_{p+1 \leq j \leq n} \|x_j\|^2$$

(généralisation de l'inégalité de Hadamard).

b) Démontrer que $\prod_{j=p+1}^n \|y_j\|^2 \leq G(x_{p+1}, \dots, x_n)$, d'où l'inégalité plus fine :

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_p) \times G(x_{p+1}, \dots, x_n) .$$

Dans quel cas cette inégalité est-elle une égalité ? ■

a) Pour tout $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\|y_p\|^2$ est le carré de la distance de x_p au sous-espace H_{p-1} . D'après le Théorème II.3.5 on a donc :

$$G(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = G(x_1, \dots, x_{p-1}) \|y_p\|^2 .$$

Pour $p = 1$ on a $x_1 = y_1$ d'où $G(x_1) = \|y_1\|^2$. On voit facilement par récurrence que pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$G(x_1, \dots, x_p) = \prod_{j=1}^p \|y_j\|^2 ,$$

et par conséquent :

$$(1) \quad G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \|y_j\|^2 = G(x_1, \dots, x_p) \prod_{j=p+1}^n \|y_j\|^2$$

Pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, comme y_p est la projection orthogonale de x_p sur le sous-espace H_{p-1}^\perp (y compris si $p = 0$), on a $\|y_p\| \leq \|x_p\|$. Nous pouvons donc déduire de l'égalité (1) l'inégalité :

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq G(x_1, \dots, x_p) \prod_{j=p+1}^n \|x_j\|^2.$$

b) Nous supposons dans ce qui suit que p est fixé, $p \leq n - 1$. On pose $K_p = \{0\}$ et pour $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$ $K_j = \text{Vect}(x_{p+1}, \dots, x_j)$. Pour $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on note z_j la projection orthogonale de x_j sur K_{j-1}^\perp ; en particulier $z_{p+1} = x_{p+1}$. En procédant comme dans le a), on trouve que pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$:

$$G(x_{p+1}, \dots, x_n) = \prod_{j=p+1}^n \|z_j\|^2.$$

On remarque que pour tout $j \in \llbracket p, n \rrbracket$, on a $K_j \subset H_j$, d'où $H_j^\perp \subset K_j^\perp$; d'après le théorème des 3 perpendiculaires, y_j est la projection orthogonale de z_j sur H_j^\perp , et par conséquent $\|y_j\| \leq \|z_j\|$. On a donc l'inégalité :

$$G(x_{p+1}, \dots, x_n) = \prod_{j=p+1}^n \|z_j\| \geq \prod_{j=p+1}^n \|y_j\|.$$

De cette inégalité et de a) nous déduisons :

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= G(x_1, \dots, x_p) \times \prod_{j=p+1}^n \|y_j\|^2 \leq G(x_1, \dots, x_p) \times G(x_{p+1}, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Montrons qu'il y a égalité dans cette inégalité si, et seulement si, $K_n = H_p^\perp$, c'est-à-dire $(\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket p+1, n \rrbracket) \quad (x_i \mid x_j) = 0$. On voit facilement que cette condition est suffisante : si elle est réalisée, la matrice de Gram des vecteurs (x_1, \dots, x_n) est la matrice composée de deux blocs diagonaux qui sont, la matrice de Gram des vecteurs (x_1, \dots, x_p) , et la matrice de Gram des vecteurs (x_{p+1}, \dots, x_n) . On a donc bien dans ce cas l'égalité :

$$(3) \quad G(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_p) G(x_{p+1}, \dots, x_n).$$

Supposons que l'égalité (3) soit vérifiée. La famille (x_1, \dots, x_n) étant libre, on a $G(x_1, \dots, x_n) > 0$, et par conséquent $(\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad \|y_j\| > 0$ (cf. (1)). Il ne peut donc y avoir égalité dans l'inégalité (2) que si pour tout $j \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, on a $\|z_j\| = \|y_j\|$, ce qui équivaut à $z_j = y_j$

est la projection orthogonale de z_j sur H_{j-1}^\perp . Montrons par récurrence sur $j \in \llbracket p, n \rrbracket$, que pour tout $j \in \llbracket p, n \rrbracket$ on a l'inclusion $K_j \subset H_p^\perp$. Cette inclusion est vraie pour $j = p$, car $K_p = \{0\}$. Supposons-la vraie pour $j-1$ où $j \in \llbracket p+1, n-1 \rrbracket$, comme $y_j = z_j$, on a $x_j \in K_{j-1} + H_{j-1}^\perp \subset H_p^\perp$, car $K_{j-1} \subset H_p^\perp$, et $H_p \subset H_{j-1}$; donc $K_j = K_{j-1} + \mathbb{R}x_j \subset H_p^\perp$. L'inclusion est donc vraie pour tout $j \in \llbracket p, n \rrbracket$, et en particulier pour n ; comme les sous-espaces K_n et H_p sont supplémentaires, il sont supplémentaires orthogonaux, ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre III

ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

§ III.1 GÉNÉRATIONS D'UN GROUPE EUCLIDIEN

Exercice 4 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et u et v des éléments de $\mathbf{O}(E)$.

a) Montrer que u et v sont conjugués dans $\mathbf{O}(E)$ ssi $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

b) On suppose u et v directs et $\chi_u(X) = \chi_v(X)$. Peut-on conclure que u et v sont conjugués dans $\mathbf{SO}(E)$?

Soit $\mathcal{C}_u = \{w \in \mathbf{SO}(E) \mid \chi_w(X) = \chi_u(X)\}$. Vérifier que \mathcal{C}_u est union d'un nombre fini de classes de conjugaison de $\mathbf{SO}(E)$; préciser ce nombre. ■

a) Si u et v sont conjugués dans $\mathbf{O}(E)$, alors $\chi_u(X) = \chi_v(X)$. Montrons que la réciproque est vraie.

D'après le Théorème III.1.1, u est somme directe orthogonale de Id_{N_+} , de Id_{N_-} , où $N_+ = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $N_- = \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$, et d'une famille finie de rotations planes. Si f est une rotation du plan euclidien P , qui n'est ni Id_P ni $-\text{Id}_P$, il existe une base orthonormale (\vec{i}, \vec{j}) du plan P , et un réel $\theta \in]0, \pi[$ tel que :

$$\text{Mat}_{(\vec{i}, \vec{j})} f = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R(\theta).$$

Il existe donc une base orthonormale \mathcal{B} , dans laquelle la matrice de u soit de la forme :

$$\text{Diag}(I_h, R(\theta_1), \dots, R(\theta_p), -I_k),$$

le premier bloc I_h ou le dernier $-I_k$ étant éventuellement absents, où $h \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, et $0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_p < \pi$ (on a $h +$

On conviendra que si I_h est absent, alors $h = 0$, et que si $-I_k$ est absent, alors $k = 0$. Le polynôme caractéristique de u est alors :

$$\chi_u(X) = (X - 1)^h (X + 1)^k \prod_{i=1}^p (X^2 - 2 \cos \theta_i X + 1) .$$

Il existe de même $h' \in \mathbb{N}$, $k' \in \mathbb{N}$, $p' \in \mathbb{N}^*$, une suite $(\theta'_1, \dots, \theta'_{p'})$ croissante dans $]0, \pi[$, $(h' + 2p' + k' = n)$, et une base orthonormale \mathcal{B}' de E , tels que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \text{Diag}(I_{h'}, R(\theta'_1), \dots, R(\theta'_{p'}), -I_{k'})$. Le polynôme caractéristique de v est alors :

$$\chi_v(X) = (X - 1)^{h'} (X + 1)^{k'} \prod_{i=1}^{p'} (X^2 - 2 \cos \theta'_i X + 1) .$$

Si $\chi_u(X) = \chi_v(X)$, alors $h' = h$, $k' = k$, donc $p' = p$, et les suites décroissantes $(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_p)$ et $(\cos \theta'_1, \dots, \cos \theta'_p)$ coïncident ; la fonction \cos étant injective sur $]0, \pi[$, nous en déduisons que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\theta_i = \theta'_i$, puis $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$. Soit $f \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ qui transforme la base \mathcal{B} en la base \mathcal{B}' . Comme \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont orthonormales, f est une isométrie de E . On voit facilement que $u = f^{-1} \circ v \circ f$; les isométries u et v , qui ont même polynôme caractéristique, sont donc conjuguées dans le groupe $\mathbf{O}(E)$.

b) Intuitivement la réponse est non, car dans la démonstration précédente il n'y a pas de raison qu'on puisse choisir des bases orthonormales \mathcal{B} et \mathcal{B}' de même orientation. Plus précisément, on peut constater que dans un plan euclidien orienté P , les rotations d'angle θ et $-\theta$, où $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$, ont même polynôme caractéristique, et ne sont pas conjuguées dans $\mathbf{SO}(P)$: comme $\mathbf{SO}(P)$ est abélien, les classes de conjugaison sont réduites à un élément.

Soit $u \in \mathbf{SO}(E)$ et $v \in \mathcal{C}_u$. D'après a) :

$$\exists f \in \mathbf{O}(E) \mid v = f \circ u \circ f^{-1} ;$$

v est donc dans la classe de conjugaison de u dans le groupe $\mathbf{O}(E)$. Réciproquement, si $\exists f \in \mathbf{O}(E) \mid v = f \circ u \circ f^{-1}$, v est direct et $\chi_v(X) = \chi_u(X)$. L'ensemble \mathcal{C}_u est donc la classe de conjugaison de u dans $\mathbf{O}(E)$. Pour $u \in \mathbf{SO}(E)$, notons $\mathcal{C}_{+,u}$ la classe de conjugaison de u dans le groupe $\mathbf{SO}(E)$. Choisissons une isométrie indirecte φ quelconque. Si $v \in \mathcal{C}_u$, il existe $f \in \mathbf{O}(E)$ tel que $v = f \circ u \circ f^{-1}$; si f est directe, alors $v \in \mathcal{C}_{+,u}$; sinon :

$$v = f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f^{-1} ,$$

et comme $f \circ \varphi$ est directe, $v \in \mathcal{C}_{+, \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi}$. Nous en déduisons l'inclusion $\mathcal{C}_u \subset \mathcal{C}_{+,u} \cup \mathcal{C}_{+, \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi}$, et évidemment l'égalité puisque \mathcal{C}

$\mathcal{C}_{+, \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi} \subset \mathcal{C}_u$. On voit donc que \mathcal{C}_u est réunion d'une ou de deux classes de conjugaisons dans le groupe $\mathbf{SO}(E)$. S'il n'y a qu'une seule classe, il existe une isométrie directe f telle que $f \circ u \circ f^{-1} = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$; dans ce cas l'isométrie indirecte $\varphi^{-1} \circ f$ commute avec u . Inversement, s'il existe une isométrie indirecte φ qui commute avec u , les classes $\mathcal{C}_{+, \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi}$ et $\mathcal{C}_{+, u}$ sont identiques. On peut donc conclure que \mathcal{C}_u est une classe de conjugaison dans $\mathbf{SO}(E)$ si, et seulement si, il existe une isométrie indirecte qui commute avec u .

Pour $u \in \mathbf{O}(E)$ on note :

$$N_{+, u} = \{x \in E \mid u(x) = x\} \quad \text{et} \quad N_{-, u} = \{x \in E \mid u(x) = -x\}.$$

Montrons qu'il existe une isométrie indirecte qui commute avec u si, et seulement si, $N_{-, u} \oplus N_{+, u} \neq \{0\}$, c'est-à-dire si, et seulement si, u a des vecteurs propres.

Si u a un vecteur propre x , il est clair que u commute avec la symétrie orthogonale autour de l'orthogonal de x (prendre une base comme dans a)) Supposons réciproquement qu'il existe une isométrie indirecte φ , qui commute avec u . Remarquons que si $f \in \mathbf{O}(E)$, alors (cf. Théorème III.1.1) :

$$\det(f) = (-1)^k \quad \text{où} \quad k = \dim(N_{-, f}).$$

Nous en déduisons que $N_{-, \varphi}$ est de dimension impaire (donc > 0) ; comme φ commute avec u , $N_{-, \varphi}$ est stable par u ; soit u' l'isométrie induite par u sur $N_{-, \varphi}$; d'après le Théorème III.1.1 la dimension de l'espace $N_{-, u'} \oplus N_{+, u'}$ a la même parité que la dimension de $N_{-, \varphi}$, ici impaire ; l'espace $N_{-, u'} \oplus N_{+, u'}$, et a fortiori l'espace $N_{-, u} \oplus N_{+, u}$, est donc non nul.

En conclusion, si $u \in \mathbf{SO}(E)$, la classe de conjugaison de u dans $\mathbf{O}(E)$ est réunion d'une ou de deux classes de conjugaison dans $\mathbf{SO}(E)$, d'une seule si, et seulement si, u a des vecteurs propres.

Exercice 7 :

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

a) Montrer : $A \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ ssi dans $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - X^2 + \lambda, \text{ avec } \lambda \in [0, 4/27].$$

b) La condition du a) étant réalisée, donner l'axe et un angle de la rotation que représente A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 euclidien orienté canonique. ■

a) La condition $A \in \mathbf{O}(3, \mathbb{R})$ s'écrit :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{et} \quad ab + ca + bc = 0.$$

La condition $\det(A) = 1$ s'écrit (règle de Sarrus) :

$$\det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1.$$

En notant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les fonctions polynomiales symétriques élémentaires en (a, b, c) , on peut écrire ces conditions sous la forme :

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - 3\sigma_3 = 1,$$

soit encore :

$$\sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1^3 = 1,$$

et finalement :

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 0.$$

On a donc $A \in \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ si, et seulement si, a, b, c sont des réels tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - X^2 + \lambda.$$

On voit facilement que si $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^3 - X^2 + \lambda$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si, $\lambda \in [0, 4/27]$.

b) On remarque :

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (a + b + c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'axe de la rotation que représente A dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est donc dirigé par le vecteur $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Le cosinus de l'angle de la rotation est tel que $3a = 2 \cos \theta + 1$. En prenant un vecteur x qui n'est pas sur l'axe, l'axe étant dirigé par v , le signe de $\sin \theta$ est le même que celui du produit mixte :

$$[x, u(x), v].$$

En prenant $x = \varepsilon_1$, on trouve :

$$[x, u(x), v] = \det \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} = c - b.$$

On peut remarquer que les triplets (a, b, c) solutions sont les triplets tels que $a + b + c = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ce sont donc les points du cercle

au triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. L'isométrie dont la matrice est A est la rotation dont l'axe est dirigé par le vecteur $(1, 1, 1)$, et qui transforme $(1, 0, 0)$ en (a, b, c) .

Exercice 11 :

- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.
- a) Trouver le centre de $\mathbf{O}(E)$ et celui de $\mathbf{SO}(E)$.
 - b) Montrer que si $n \geq 3$ le groupe des commutateurs de $\mathbf{SO}(E)$, groupe que l'on note $[\mathbf{SO}(E), \mathbf{SO}(E)]$ et qui est engendré par les $u \circ v \circ u^{-1} \circ v^{-1}$ pour u et v parcourant $\mathbf{SO}(E)$, est égal à $\mathbf{SO}(E)$. ■

Lemme :

- Soit E un espace euclidien, V un sous-espace de E et u une isométrie de E . On a :
- $$u(V^\perp) = u(V)^\perp. \blacksquare$$

Si $y = u(x)$, où $x \in V^\perp$, pour tout $x' \in V$ on a :

$$(y | u(x')) = (u(x) | u(x')) = (x | x') = 0,$$

donc $y \in (u(V))^\perp$. Cela signifie $u(V^\perp) \subset (u(V))^\perp$, et il y a égalité dans cette inclusion, car les dimensions de ces deux sous-espaces sont identiques.

Lemme :

- Soit E un espace euclidien. Pour H sous-espace de E , on note s_H la symétrie orthogonale autour du sous-espace H . Si u est une isométrie de E , alors pour tout sous-espace H de E :
- $$u \circ s_H \circ u^{-1} = s_{u(H)}. \blacksquare$$

Si $y \in u(H)$, on peut écrire $y = u(x)$ où $x \in H$, et $u \circ s_H \circ u^{-1}(y) = u(y) = x$. Si $y \in u(H)^\perp = u(H^\perp)$ (premier lemme), on peut trouver $x \in H^\perp$ tel que $y = u(x)$, et $u \circ s_H \circ u^{-1}(y) = u \circ s_H(x) = -u(x) = -y$. L'application linéaire $u \circ s_H \circ u^{-1}$ est donc identique à $s_{u(H)}$. Fin du lemme.

a) Soit $f \in \mathbf{O}(E)$ qui commute avec toute autre isométrie. En particulier, f commute avec toute symétrie orthogonale, donc pour tout sous-espace H de E , on a (cf. lemme 2) :

$$f \circ s_H \circ f^{-1} = s_{f(H)} = s_H \quad \text{d'où} \quad f(H) = H.$$

En particulier, les droites de E sont stables par f . On sait que cela implique que f est une homothétie, et par conséquent soit Id_E , soit $-\text{Id}_E$. Réciproquement, ces deux applications linéaires sont des isométries qui commutent avec toutes les autres. Le centre de $\mathbf{O}(E)$ est donc le sous-groupe $\{\text{Id}_E, -\text{Id}_E\}$.

Si $n = 2$, le groupe $\mathbf{SO}(E)$ est abélien, donc égal à son centre. Nous supposons dans ce qui suit $n \geq 3$.

Soit $f \in \mathbf{O}(E)$ qui commute avec toutes les isométries directes de E . En procédant comme ci-dessus, on prouve que tout sous-espace de codimension paire est stable par f .

Si l'espace E est de dimension impaire, les droites sont des sous-espaces de codimension paire et sont donc stables par f ; on en déduit comme ci-dessus que f est soit Id_E , soit $-\text{Id}_E$, la deuxième isométrie étant indirecte.

Si l'espace E est de dimension paire, les plans sont de codimension paire et sont donc stables par f . Soit $D = \mathbb{R}x$, où $x \neq 0$. Comme $n \geq 3$, on peut trouver des vecteurs y et z dans E tels que (x, y, z) soit libre. On peut écrire :

$$D = (\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}y) \cap (\mathbb{R}x \oplus \mathbb{R}z).$$

La droite D , intersection de deux plans stables par f , est donc stable par f . Ici encore, les droites sont stables par f et par conséquent f est nécessairement soit Id_E , soit $-\text{Id}_E$, isométries toutes les deux directes.

On arrive à la conclusion suivante : si E est de dimension impaire, le centre de $\mathbf{SO}(E)$ ne contient que Id_E ; si $\dim E = 2$, le groupe $\mathbf{SO}(E)$ est abélien, égal à son centre; si E est de dimension paire ≥ 4 , le centre de $\mathbf{SO}(E)$ est le sous-groupe $\{\text{Id}_E, -\text{Id}_E\}$.

b) Le lecteur remarquera que si $n = 2$ ou $n = 1$, le groupe $\mathbf{SO}(E)$ est abélien et par conséquent $[\mathbf{SO}(E), \mathbf{SO}(E)] = \{\text{Id}_E\}$. Nous supposons dans la suite $n \geq 3$.

Montrons que si E est de dimension 3, tout retournement est un commutateur. L'idée est que le composé des retournements autour de deux droites orthogonales est le retournement autour de leur perpendiculaire commune, et que deux retournements sont conjugués. Précisément, soit D une droite engendrée par un vecteur unitaire x . On peut trouver y et z dans E tels que (x, y, z) soit une base orthonormale. On note v le retournement autour de $\mathbb{R}y$, et u la rotation d'axe $\mathbb{R}x$ qui transforme $\mathbb{R}y$ en $\mathbb{R}z$. D'après le lemme 2, $u \circ v \circ u^{-1}$ est le retournement autour de $\mathbb{R}z$. Le commutateur $u \circ v \circ u^{-1} \circ v^{-1}$ est donc le composé du retournement autour de $\mathbb{R}y$ et du retournement autour de $\mathbb{R}z$; il s'agit du retournement autour de $\mathbb{R}x = D$.

Montrons que ce résultat s'étend au cas où $\dim E \geq 3$. Soit V un sous-espace de codimension 2 et f le retournement autour de V . O

V , $x \neq 0$, ce qui est possible car $\dim V \geq 1$; on note U le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{R}x$ dans V et P le supplémentaire orthogonal de V dans E . On a :

$$E = V \oplus P = U \oplus \mathbb{R}x \oplus P = U \oplus V_1 ,$$

où :

$$V_1 = \mathbb{R}x \oplus P .$$

Le sous-espace V_1 est stable par f , et l'isométrie f_1 induite par f sur ce sous-espace est le retournement, dans le sous-espace V_1 de dimension 3, autour de la droite $\mathbb{R}x$. D'après ce qui précède, il existe des isométries directes u_1 et v_1 de l'espace euclidien V_1 telles que $f_1 = u_1 \circ v_1 \circ u_1^{-1} \circ v_1^{-1}$. Il est clair que si on pose $u = \text{Id}_U \oplus u_1$ et $v = \text{Id}_U \oplus v_1$, on obtient des isométries directes de E telles que $f = u \circ v \circ u^{-1} \circ v^{-1}$.

Toute isométrie directe étant composée de retournements (Théorème III.1.3), toute isométrie directe est composée de commutateurs. On a donc l'égalité $[\text{SO}(E), \text{SO}(E)] = \text{SO}(E)$.

§ III.2 ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME

Exercice 3 :

(Théorème de Fisher-Cochran). Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On considère des formes quadratiques Φ_1, \dots, Φ_p sur E ($p \in \llbracket 1, n \rrbracket$) de rangs respectifs r_1, \dots, r_p , telles que $n = \sum_{k=1}^p r_k$, et que $(\forall x \in E) \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \Phi_k(x)$.

Soit u_k l'opérateur associé à Φ_k .

a) Prouver : $\sum_{k=1}^p u_k = \text{Id}_E$.

b) Prouver $E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Im}(u_k)$.

c) Pour $x \in E$ et $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, vérifier $u_k(x) = \sum_{i=1}^p u_i \circ u_k(x)$; en déduire que les u_k sont des projecteurs et que $u_k \circ u_l = 0$ pour $k \neq l$.

d) En déduire que $E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Im}(u_k)$. Conclure. ■

a) L'opérateur associé au carré scalaire $q : x \mapsto \|x\|^2$ est Id_E . Comme $q = \sum_{k=1}^p \Phi_k$, on en déduit $\text{Id}_E = \sum_{k=1}^p u_k$.

b) D'après a), on a :

$$E = \sum_{k=1}^p \text{Im}(u_k) .$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le rang de u_k est le rang de la forme quadratique Φ_k , c'est-à-dire r_k . Comme $n = \dim E = \sum_{k=1}^p r_k = \sum_{k=1}^p \dim(\text{Im}(u_k))$ nous en déduisons que la somme est directe (cf. Exercice 1 du § XI.3 du Tome 1 du cours), c'est-à-dire :

$$(1) \quad E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Im}(u_k) .$$

c) Comme $\sum_{i=1}^p u_i = \text{Id}_E$, pour tout $x \in E$ et tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$u_k(x) = \left(\sum_{i=1}^p u_i \right) \circ u_k(x) = \sum_{i=1}^p u_i \circ u_k(x) .$$

Par unicité des composantes dans la somme directe (1), nous en déduisons :

$$(\forall i \neq k) \quad u_i \circ u_k(x) = 0 \quad \text{et} \quad u_k(x) = u_k \circ u_k(x) .$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, les endomorphismes u_k , où $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont des projecteurs, et pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $h \neq k$, $u_h \circ u_k = 0$.

d) Les endomorphismes u_k , où $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont des projecteurs symétriques, puisqu'associés à des formes quadratiques, donc orthogonaux (Proposition III.2.6). Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $(h, k) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $h \neq k$, on a :

$$(u_h(x) \mid u_k(y)) = (x \mid u_h^* \circ u_k(y)) = (x \mid u_h \circ u_k(y)) = 0 .$$

Les sous-espaces $\text{Im}(u_k)$, où $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, sont donc orthogonaux deux à deux. Nous pouvons écrire :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \text{Im}(u_k) .$$

Remarquons pour conclure que puisque u_k est le projecteur orthogonal sur $\text{Im}(u_k)$, la forme quadratique induite par Φ_k sur $\text{Im}(u_k)$ est le carré scalaire sur $\text{Im}(u_k)$. L'égalité :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \Phi_k(x) ,$$

est donc en fait l'égalité :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 .$$

Exercice 7 :

- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et u un projecteur de E . On munit $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $\| \cdot \|$ associée à la norme $\| \cdot \|$ de E .
- a) Montrer que si $\|u\| \leq 1$, alors u est un projecteur orthogonal.
- b) Si v est un autre projecteur de E et si $\|u - v\| < 1$, prouver que u et v ont même rang. ■

a) Si $\|u\| \leq 1$, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $x \in \text{Im}(u)$ et $y \in \text{Ker}(u)$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité :

$$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|u(x + \lambda y)\|^2 = \|x\|^2 .$$

Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geq \|x\|^2 .$$

La fonction $\lambda \mapsto \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \lambda^2 \|y\|^2$ admet donc en 0 un minimum absolu, ce qui implique que sa dérivée en 0, qui est $2(x | y)$, est nulle. Nous en déduisons que les sous-espaces $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont orthogonaux ; le projecteur u est donc orthogonal.

b) Si $x \in \text{Im}(v)$, et $x \neq 0$, alors :

$$\|u(x) - x\| = \|u(x) - v(x)\| \leq \|u - v\| \|x\| < \|x\| \quad \text{donc} \quad u(x) \neq 0 .$$

On a donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$, ce qui implique :

$$\dim \text{Ker}(u) + \text{rg}(v) \leq \dim E \quad \text{d'où} \quad \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u) .$$

Les projecteurs u et v jouant des rôles symétriques, on a aussi $\text{rg}(u) \leq \text{rg}(v)$, d'où $\text{rg}(v) = \text{rg}(u)$, ce qu'il fallait démontrer.

§ III.3 DIAGONALISATION DES ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

Exercice 1 :

Soit $u \in \text{Sym}(E)$, où E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

a) Si $p \in \mathbb{N}^*$ est impair, il existe $v \in \text{Sym}(E)$ unique tel que $v^p = u$.

b) Si $p \in \mathbb{N}^*$ est pair, existe-t-il $v \in \text{Sym}(E)$ tel que $v^p = u$?

En supposant que u est positif, prouver qu'il existe $v \in \text{Sym}(E)$ positif unique tel que $v^p = u$. ■

a) Démontrons l'existence de v . D'après le Théorème III.3.1 il existe une base orthonormale \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Comme p est un entier > 0 impair, il existe des réels μ_1, \dots, μ_n tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i^p = \lambda_i$. On voit alors que l'endomorphisme symétrique v dont la matrice dans la base orthonormale \mathcal{B} est $\text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ est tel que $v^p = u$.

Montrons maintenant l'unicité de v . Supposons que v soit un endomorphisme symétrique tel que $v^p = u$. Comme v est symétrique, il existe des réels μ_1, \dots, μ_k distincts, et des sous-espaces E_1, \dots, E_k tels que $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$, et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $x \in E_i$, $v(x) = \mu_i x$. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + \dots + x_k$, où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_i \in E_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^k \mu_i^p x_i$. L'application $\mu \mapsto \mu^p$ étant injective, les réels μ_1^p, \dots, μ_k^p sont distincts. Il est alors facile de voir que les valeurs propres de u sont μ_1^p, \dots, μ_k^p et que les espaces propres de u sont exactement ceux de v . Ceci démontre que v est déterminé par u .

b) On suppose maintenant p pair.

Supposons qu'il existe $v \in \text{Sym}(E)$ tel que $v^p = u$. Comme v est symétrique, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et une famille de réels (μ_1, \dots, μ_n) , telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Comme $v^p = u$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \text{Diag}(\mu_1^p, \dots, \mu_n^p)$. On remarque que puisque p est pair, les réels μ_1^p, \dots, μ_n^p sont tous ≥ 0 et que par conséquent l'endomorphisme symétrique u est nécessairement positif.

Montrons réciproquement, que si u est symétrique et positif, il existe $v \in \text{Sym}(E)$ tel que $v^p = u$, et que v est unique s'il est positif. La méthode est analogue à celle utilisée dans le a).

Démontrons l'existence de v . Comme u est symétrique et positif, il existe une base orthonormale \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Il existe des réels μ_1, \dots, μ_n tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i^p = \lambda_i$. On voit alors que l'endomorphisme symétrique v tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ est tel que $v^p = u$. Comme on peut supposer $(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) \mu_i \geq 0$, on voit qu'on peut trouver v symétrique et positif.

Montrons maintenant l'unicité de v , supposé positif. Comme v est symétrique et positif, il existe des réels positifs μ_1, \dots, μ_k distincts, et des sous-espaces E_1, \dots, E_k tels que $E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$, et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $x \in E_i$, $v(x) = \mu_i x$. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + \dots + x_k$, où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_i \in E_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^k \mu_i^p x_i$. L'application $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\mu \mapsto \mu^p$ étant injective, les réels μ_1^p, \dots, μ_k^p sont distincts. Il est alors facile de voir que les valeurs propres de u sont μ_1^p, \dots, μ_k^p et que les espaces propres de u sont exactement ceux de v . Ceci démontre que v est déterminé par u , donc unique.

Exercice 4 :

- Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. On donne deux projecteurs orthogonaux f et g de E .
- Prouver que $f \circ g$ est diagonalisable.
 - Prouver : pour que l'ensemble des valeurs propres de $f \circ g$ soit contenu dans $\{0, 1\}$, il faut et il suffit que $f \circ g$ soit un projecteur orthogonal, ce qui équivaut à : $f \circ g = g \circ f$. ■

Notations : Si E est un K -ev et f un endomorphisme de E , pour $\lambda \in K$ nous noterons $N_{f, \lambda} = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Spec}(f)$.

a) Notons F l'image de f et G l'image de g , et posons $h = (g \circ f)|_G^G$. Pour tout $(x, y) \in G^2$ on a :

$$\begin{aligned} (h(x) | y) &= (g(f(x)) | y) = (f(x) | g(y)) = (f(x) | y) = \\ &= (x | f(y)) = (g(x) | f(y)) = (x | g(f(y))) = (x | h(y)) . \end{aligned}$$

L'endomorphisme h du sous-espace euclidien G est donc symétrique, et par conséquent diagonalisable. Nous en déduisons en particulier :

$$\text{Im}(h) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(h) \setminus \{0\}} N_{h, \lambda} .$$

Soit λ une valeur propre non nulle de h ; si $x \in N_{h,\lambda} \setminus \{0\}$, alors $g \circ f(x) = \lambda x$; on voit donc que λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$, et que $N_{h,\lambda} \subset N_{g \circ f,\lambda}$. Inversement soit λ une valeur propre non nulle de $g \circ f$; si $x \in N_{g \circ f,\lambda} \setminus \{0\}$, alors $g \circ f(x) = \lambda x$, donc $x \in G$; on voit donc que λ est une valeur propre non nulle de h , et que $N_{g \circ f,\lambda} \subset N_{h,\lambda}$. En conclusion, $\text{Spec}(g \circ f) \setminus \{0\} = \text{Spec}(h) \setminus \{0\}$, et pour toute valeur propre commune non nulle λ , $N_{h,\lambda} = N_{g \circ f,\lambda}$.

Comparons maintenant les espaces $N_{h,0} = \text{Ker}(h)$ et $N_{g \circ f,0} = \text{Ker}(g \circ f)$. Si $x \in \text{Ker}(h)$ (donc $x \in G$), alors :

$$(f(x) | f(x)) = (x | f^2(x)) = (g(x) | f(x)) = (x | g(f(x))) = 0 ,$$

donc $f(x) = 0$. Il est alors clair que $\text{Ker}(h) = F^\perp \cap G$. D'autre part, on voit facilement que $\text{Ker}(f \circ g) = (F^\perp \cap G) \oplus G^\perp$. Comme $(f \circ g)^* = g \circ f$, nous en déduisons :

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) = \dim \text{Ker}(f \circ g) = \dim \text{Ker}(h) + \dim G^\perp .$$

Comme h est diagonalisable, on a l'égalité :

$$\dim G = \dim N_{h,0} + \sum_{\lambda \in \text{Spec}(h) \setminus \{0\}} \dim N_{h,\lambda} .$$

Nous en déduisons :

$$\dim N_{g \circ f,0} + \sum_{\lambda \in \text{Spec}(g \circ f) \setminus \{0\}} \dim N_{g \circ f,\lambda} = \dim G^\perp + \dim G = \dim E .$$

Cela prouve que $g \circ f$ est diagonalisable ; il en est évidemment de même pour $f \circ g$.

b) Supposons $\text{Spec}(f \circ g) \subset \{0, 1\}$; comme $f \circ g$ est diagonalisable, cela implique que $f \circ g$ est un projecteur ; la réciproque étant évidente, ces deux propriétés sont équivalentes. On remarque comme ci-dessus que $(f \circ g)^* = g \circ f$, et par conséquent que $f \circ g$ est un projecteur si, et seulement si, $g \circ f$ en est un. Les quatre propriétés $\text{Spec}(f \circ g) \subset \{0, 1\}$, $f \circ g$ projecteur, $\text{Spec}(g \circ f) \subset \{0, 1\}$, $g \circ f$ projecteur, sont donc équivalentes.

Supposons que $f \circ g$ soit un projecteur ; pour tout $x \in \text{Im}(f \circ g)$, puisque f et g sont des projecteurs orthogonaux on a les inégalités :

$$\|x\|^2 = \|f \circ g(x)\|^2 \leq \|g(x)\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Il y a donc égalité dans ces inégalités, ce qui implique, puisque f et g sont des projecteurs orthogonaux, $f(g(x)) = g(x) = x$, d'où $x \in$

$x \in \text{Im}(f)$. Comme réciproquement, pour tout $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$ on a $f(g(x)) = x$, nous en déduisons :

$$\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) .$$

Soit maintenant $y \in \text{Ker}(f \circ g)$. Pour tout $x \in \text{Im}(f \circ g)$ on a :

$$0 = (f \circ g(y) \mid x) = (g(y) \mid f(x)) = (g(y) \mid x) = (y \mid g(x)) = (y \mid x) .$$

Le projecteur $f \circ g$ est donc orthogonal, et c'est le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$. D'après ce qui précède, il en est de même pour $g \circ f$ qui est un projecteur. Nous en déduisons que dans ce cas, $f \circ g = g \circ f$ puisqu'il s'agit du projecteur orthogonal sur $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$. Réciproquement, si $f \circ g = g \circ f$, comme $(f \circ g)^2 = f^2 \circ g^2 = f \circ g$, $f \circ g$ est un projecteur.

En conclusion, les sept propriétés suivantes sont équivalentes :

- | | |
|--|--|
| 1.1) $\text{Spec}(f \circ g) \subset \{0, 1\}$ | 2.1) $\text{Spec}(g \circ f) \subset \{0, 1\}$, |
| 1.2) $f \circ g$ projecteur | 2.2) $g \circ f$ projecteur, |
| 1.3) $f \circ g$ projecteur orthogonal
sur $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$ | 2.3) $g \circ f$ projecteur orthogonal
sur $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)$ |

$$3) \quad f \circ g = g \circ f .$$

Exercice 5 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et Q une forme quadratique sur E d'opérateur symétrique associé u . Montrer : pour qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs isotropes de Q , il faut et il suffit que $\text{Tr}(u) = 0$. Si c'est le cas, trouver toutes les bases orthonormales qui conviennent. ■

On sait que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a donc :

$$\text{Tr}(u) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(Q)) = \sum_{i=1}^n Q(e_i) .$$

Ce nombre ne dépend pas de la base orthonormale \mathcal{B} , nous le noterons $\text{Tr}_E(Q)$.

Supposons que H et K soient des sous espaces supplémentaires orthogonaux dans E , non nuls. En concaténant une base orthonormale de H et une base orthonormale de K , on obtient une base orthonormale de E . Il est donc clair que :

$$\text{Tr}_E(Q) = \text{Tr}_H(Q|_H) + \text{Tr}_K(Q|_K) .$$

S'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs isotropes de Q , alors :

$$\mathrm{Tr}_E(Q) = \sum_{i=1}^n Q(e_i) = 0.$$

Montrons que la réciproque est vraie. en donnant un procédé qui permet de trouver toutes les bases orthonormales $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E qui conviennent. On peut, et on doit, prendre pour e_1 un vecteur unitaire isotrope. Supposons avoir trouvé une suite (e_1, \dots, e_k) , où $k < n$, de vecteurs isotropes unitaires et deux à deux orthogonaux. Pour que la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ soit constituée de vecteurs unitaires isotropes et deux à deux orthogonaux, il faut et il suffit que e_{k+1} soit un vecteur unitaire isotrope dans le sous-espace $K = H^\perp$, où $H = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_k$. Comme :

$$0 = \mathrm{Tr}_E(Q) = \mathrm{Tr}_H(Q|_H) + \mathrm{Tr}_K(Q|_K) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}_H(Q|_H) = 0,$$

nous en déduisons :

$$\mathrm{Tr}_K(Q|_K) = 0.$$

Si $Q|_K$ n'avait pas de vecteurs isotropes, elle serait définie positive ou définie négative et on aurait $\mathrm{Tr}_K(Q|_K) \neq 0$. Le cône isotrope de $Q|_K$ n'étant pas réduit à $\{0\}$, son intersection avec la sphère unité de K n'est pas vide, ce qui démontre l'existence d'un vecteur e_{k+1} vérifiant les conditions. En itérant ce procédé jusqu'à obtenir une famille de n vecteurs unitaires isotropes et deux à deux orthogonaux, on obtient toutes les bases orthogonales constituées de vecteurs isotropes pour Q .

Exercice 7 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, et \vec{v} un vecteur unitaire de E , d'hyperplan orthogonal H . On donne une forme quadratique Φ sur E , d'opérateur associé u ; on note v l'opérateur associé, dans l'espace euclidien H , à la forme quadratique $\Psi = \Phi|_H$. Que dire de l'application $\mathrm{Sym}(E) \rightarrow \mathrm{Sym}(H)$, $u \mapsto v$?

a) Φ étant désormais fixée, soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ définie par $f(x) = u(x) - (u(\vec{v}) | x) \vec{v} - (\vec{v} | x) u(\vec{v})$ pour $x \in E$. Vérifier que f est symétrique et que $f|_H^H = v$.

b) On note \tilde{u} l'opérateur qui, dans une base ordonnée arbitraire, a pour matrice la matrice adjointe de celle de u . Montrer que \tilde{u} ne dépend pas de la base choisie.

b1) Démontrer que $\det(v) = (\tilde{u}(\vec{v}) | \vec{v})$ en utilisant une base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que telle que

déduire que :

$$\det(f) = -(\tilde{u}(\vec{v}) \mid \vec{v}) \Phi(\vec{v}) = -(\tilde{u}(\vec{v}) \mid \vec{v}) \times (u(\vec{v}) \mid \vec{v}) .$$

b2) Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $u_t = u - t \text{Id}_E$, prouver que :

$$(1) \quad \chi_v(t) = (\tilde{u}_t(\vec{v}) \mid \vec{v}) , \text{ et}$$

$$(2) \quad \chi_f(t) = -(\tilde{u}_t(\vec{v}) \mid \vec{v}) \times ((u(\vec{v}) \mid \vec{v}) + t) .$$

c) Si on pose :

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X^n - I_1(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n I_n(u)) , \text{ et}$$

$$\chi_v(X) = (-1)^{n-1} (X^{n-1} - I_1(v) X^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1}(v)) ,$$

en supposant $n \geq 3$, prouver en particulier :

$$I_1(v) = I_1(u) - (u(\vec{v}) \mid \vec{v}) \text{ et}$$

$$I_2(v) = I_2(u) - I_1(u) \times (u(\vec{v}) \mid \vec{v}) + \|u(\vec{v})\|^2 . \blacksquare$$

L'application $\Phi \mapsto \Psi = \Phi|_H$ est linéaire surjective ; l'application $u \mapsto v$ est donc linéaire surjective.

a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$(f(x) \mid y) = (u(x) \mid y) - (u(\vec{v}) \mid x) \times (\vec{v} \mid y) - (u(\vec{v}) \mid y) \times (\vec{v} \mid x) .$$

L'endomorphisme u étant symétrique, cette expression est symétrique par rapport à x et y ; l'endomorphisme f est donc symétrique. On remarque :

$$f(\vec{v}) = -(u(\vec{v}) \mid \vec{v}) \vec{v} .$$

Le vecteur \vec{v} est un vecteur propre de l'endomorphisme symétrique f ; nous en déduisons que $(\mathbb{R} \vec{v})^\perp = H$ est stable par f . Soit $f_1 = f|_H^H$; c'est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien H , et en utilisant la définition de f , on trouve que pour tout $x \in H$:

$$(f_1(x) \mid x) = (f(x) \mid x) = (u(x) \mid x) = \Phi(x) = \Psi(x) .$$

On voit que l'endomorphisme symétrique f_1 de l'espace euclidien H est associé à la forme quadratique Ψ ; on a donc par définition $f_1 = f|_H^H = v$.

b) Pour toute base ordonnée \mathcal{B} , et tout $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, notons (provisoirement) $\tilde{u}_{\mathcal{B}}$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est l'adjointe de celle de u dans cette même base. Pour \mathcal{B} fixée, l'application $u \mapsto \tilde{u}_{\mathcal{B}}$ est polynomiale, donc continue. Si u est inversible, et que M est sa matrice dans une base \mathcal{B} , comme :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \widetilde{M} ,$$

on a $\tilde{u}_{\mathcal{B}} = \det(u) u^{-1}$, qui ne dépend pas de \mathcal{B} . L'ensemble des endomorphismes inversibles étant partout dense dans $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, on voit que pour tout $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $\tilde{u}_{\mathcal{B}}$ ne dépend pas de \mathcal{B} . En conséquence, pour tout $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, nous noterons \tilde{u} l'endomorphisme dont la matrice dans toute base ordonnée \mathcal{B} est l'adjointe de celle de u .

b1) Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale telle que $\varepsilon_n = \vec{v}$; on voit que $\mathcal{B}_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est une base orthonormale de l'espace euclidien H . Posons $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v)$ et $\lambda = (u(\vec{v}) | \vec{v}) = \Phi(\vec{v})$; la matrice M de u (ou de Φ) dans la base \mathcal{B} s'écrit :

$$(1) \quad M = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & V \\ \hline {}^tV & \lambda \end{array} \right],$$

où $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède, on a aussi :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left[\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & -\lambda \end{array} \right].$$

Le déterminant de la matrice $M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\Psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(v)$ (la base \mathcal{B}_1 est orthonormale), est le cofacteur d'indices (n, n) dans la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$; c'est aussi le coefficient d'indices (n, n) de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{u})$; comme la base \mathcal{B} est orthonormale, ce coefficient est le produit scalaire $(\tilde{u}(\varepsilon_n) | \varepsilon_n)$. En conclusion :

$$\det(v) = (\tilde{u}(\varepsilon_n) | \varepsilon_n) = (\tilde{u}(\vec{v}) | \vec{v}) \quad \text{et} \quad \det(f) = -(\tilde{u}(\vec{v}) | \vec{v}) (u(\vec{v}) | \vec{v}).$$

b2) Pour $t \in \mathbb{R}$, notons $M_t = M - t I_n$ et $u_t = u - t \text{Id}_E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\chi_v(t) = \det(M_1 - t I_{n-1}) = \widetilde{M}_t(n, n) = (\tilde{u}_t(\varepsilon_n) | \varepsilon_n) = (\tilde{u}_t(\vec{v}) | \vec{v}),$$

et :

$$\chi_f(t) = -\chi_v(t) (\lambda + t) = -\chi_v(t) ((u(\vec{v}) | \vec{v}) + t).$$

c) On sait que $I_1(u) = \text{Tr}(u)$ et $I_1(v) = \text{Tr}(v)$. D'après l'égalité (1), on a : $I_1(u) = I_1(v) + (u(\vec{v}) | \vec{v})$.

Les endomorphismes u , v étant symétriques, il sont diagonalisables. Il est dans ce cas évident que, en notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une suite complète des valeurs propres de u :

$$2 I_2(u) = 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = (\text{Tr}(u))^2 - \text{Tr}(u^2).$$

Il en est bien sûr de même pour v . Un calcul facile de produit par blocs (cf. notations de la formule (1)) nous donne :

$$\text{Tr}(u^2) = \text{Tr}(M_1^2 + V^t V) + ({}^t V V + \lambda^2).$$

Si (v_1, \dots, v_{n-1}) sont les composantes du vecteur colonne V , on voit que $u(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varepsilon_i + \lambda \vec{v}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, le coefficient d'indices (i, i) de la matrice $V^t V$ est v_i^2 . On a donc l'égalité :

$$\text{Tr}(u^2) = \text{Tr}(v^2) + \lambda^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = \text{Tr}(v^2) + 2 \|u(\vec{v})\|^2 - (u(\vec{v}) | \vec{v})^2.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} 2 I_2(v) &= (\text{Tr}(v))^2 - \text{Tr}(v^2) = \\ &= (I_1(u) - (u(\vec{v}) | \vec{v}))^2 - \text{Tr}(u^2) + 2 \|u(\vec{v})\|^2 - (u(\vec{v}) | \vec{v})^2 = \\ &= 2 I_2(u) - 2 I_1(u) (u(\vec{v}) | \vec{v}) + 2 \|u(\vec{v})\|^2, \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$I_2(v) = I_2(u) - I_1(u) (u(\vec{v}) | \vec{v}) + \|u(\vec{v})\|^2.$$

Exercice 14 :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

a) On donne $u \in \text{Sym}(E)$, u défini positif. Montrer qu'il existe un unique $v \in \text{Sym}(E)$ tel que $\exp(v) = u$. On notera $\text{Log}(u)$ cet élément v .

b) Soit $\text{Sym}_+^*(E)$ le cône des $u \in \text{Sym}(E)$ qui sont définis positifs, dont on vérifiera qu'il est ouvert dans $\text{Sym}(E)$.

b1) Pour u et v dans $\text{Sym}_+^*(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, prouver que $\text{Log}(u \circ v) = \text{Log}(u) + \text{Log}(v)$.

b2) On munit $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $\|\cdot\|$ associée à la norme $\|\cdot\|$ de E . Prouver que si $u \in \text{Sym}(E)$ vérifie $\|u\| < 1$, alors

$$\text{Id}_E + u \in \text{Sym}_+^*(E), \text{ et } \text{Log}(\text{Id}_E + u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k.$$

c) Prouver que l'application $\text{Sym}(E) \rightarrow \text{Sym}_+^*(E)$, $u \mapsto \exp(u)$ est un homéomorphisme. ■

Dans cet exercice, nous considérerons comme connu le fait que si u est un endomorphisme symétrique de E euclidien, alors $\|u\|$ est la plus grande des valeurs absolues des valeurs propres de u .

a) Montrons l'existence de v . Comme u est symétrique défini positif, il existe une base orthonormale \mathcal{B} , et une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels tous > 0 , telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Il est clair que l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base orthonormale \mathcal{B} est $\text{Diag}(\text{Log} \lambda_1, \dots, \text{Log} \lambda_n)$ convient.

Montrons maintenant l'unicité de v . Supposons que v soit un endomorphisme symétrique tel que $\exp v = u$. Comme v est symétrique, il existe des réels μ_1, \dots, μ_k distincts, et des sous-espaces E_1, \dots, E_k tels que

$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i$, et pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, pour tout $x \in E_i$, $v(x) = \mu_i x$. Soit $x \in E$, on peut écrire $x = x_1 + \dots + x_k$, où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_i \in E_i$.

On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^k \exp(\mu_i) x_i$. L'application $\mu \mapsto \exp(\mu)$ étant injective,

les réels $\exp(\mu_1), \dots, \exp(\mu_k)$ sont distincts. Il est alors facile de voir que les valeurs propres de u sont $\exp(\mu_1), \dots, \exp(\mu_k)$ et que les espaces propres de u sont exactement ceux de v . Ceci démontre que v est déterminé par u , donc unique.

b) L'application $\text{Sym}(E) \rightarrow \text{Quadr}(E)$, qui à un endomorphisme symétrique u fait correspondre la forme quadratique associée à u , est un isomorphisme linéaire et un homéomorphisme. Comme l'ensemble des formes quadratiques définies positives est un ouvert de $\text{Quadr}(E)$ (cf. § I.5 exercice 8), nous en déduisons que l'ensemble des endomorphismes symétriques définis et positifs est un ouvert de $\text{Sym}(E)$.

b1) Comme les endomorphismes symétriques u et v commutent, il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ soient diagonales (cf. exercice 10). Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v) = \text{Diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n)$, donc :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Log}(u \circ v)) &= \text{Diag}(\text{Log}(\lambda_1 \mu_1), \dots, \text{Log}(\lambda_n \mu_n)) = \\ &= \text{Diag}(\text{Log} \lambda_1, \dots, \text{Log} \lambda_n) + \text{Diag}(\text{Log} \mu_1, \dots, \text{Log} \mu_n) = \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Log} u) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Log} v). \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\text{Log}(u \circ v) = \text{Log} u + \text{Log} v.$$

b2) Pour tout $x \in E$ on a :

$$(x | x + u(x)) = \|x\|^2 - (x | u(x)) \geq \|x\|^2 - \|x\| \|u(x)\| \geq \|x\|^2 (1 - \|u\|) .$$

Il est donc clair que si $\|u\| < 1$, alors l'endomorphisme symétrique $\text{Id}_E + u$ est défini et positif.

Soit \mathcal{B} une base orthonormale dans laquelle la matrice de u soit diagonale. Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; d'après l'hypothèse, il est clair que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda_i| < 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Log}(\text{Id}_E + u)) &= \text{Diag}(\text{Log}(1 + \lambda_1), \dots, \text{Log}(1 + \lambda_n)) = \\ &= \text{Diag}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \lambda_n^k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) . \end{aligned}$$

L'application $v \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ étant un isomorphisme linéaire et un homéomorphisme, nous en déduisons l'égalité :

$$\text{Log}(\text{Id}_E + u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k .$$

c) Supposons que $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de $\text{Sym}_+^*(E)$ telle que $v_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v$, où $v \in \text{Sym}_+^*(E)$. Montrons qu'alors $\text{Log}(v_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Log}(v)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de v_k , qui sont > 0 , sont majorées par $\|v_k\|$; comme la suite (v_k) est convergente, nous pouvons en déduire que les valeurs propres des (v_k) sont majorées ; il existe donc un réel $b > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de v_k soient majorées par b . En considérant les endomorphismes symétriques v_k^{-1} , on démontre de manière analogue qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de v_k soient minorées par a . Les valeurs propres des endomorphismes symétriques $\text{Log}(v_k)$ sont donc toutes dans l'intervalle $[\text{Log } a, \text{Log } b]$. Nous en déduisons que la suite $(\| \text{Log}(v_k) \|)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée. Pour montrer que la suite $(\text{Log}(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\text{Log}(v)$, il suffit de démontrer que toute suite extraite convergente de cette suite converge vers $\text{Log}(v)$. Or si $(\text{Log}(v_{k_p}))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite convergente de la suite $(\text{Log}(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$, si on suppose $\text{Log}(v_{k_p}) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} w$, alors $v_{k_i} = \exp(\text{Log}(v_{k_p})) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} \exp(w)$, donc $\exp(w) = v$, et par conséquent $w = \text{Log}(v)$. Nous en déduisons comme prévu que la suite $(\text{Log}(v_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $\text{Log}(v)$. Ceci étant vrai pour toute suite convergente $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\text{Sym}_+^*(E)$, nous

que l'application $\text{Log} : \text{Sym}_+^*(E) \rightarrow \text{Log}(E)$ est continue. L'application $\text{Sym}(E) \rightarrow \text{Sym}_+^*(E)$, $u \mapsto \exp(u)$ est donc un homéomorphisme.

Exercice 16 (*Décomposition polaire*) :

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

a) Soit $u \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ et $v = u^* \circ u$: v est donc autoadjoint défini positif (cf. exemple 1). Soit w l'unique endomorphisme autoadjoint positif de E tel que $w^2 = v$ (cf. exercice 1). Montrer que $\rho = u \circ w^{-1} \in \mathbf{O}(E)$; puis prouver, en notant $\text{Sym}_+^*(E)$ le cône des $u \in \text{Sym}(E)$ qui sont définis positifs, que l'application $\mathbf{O}(E) \times \text{Sym}_+^*(E) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ est bijective. Prouver que c'est même un homéomorphisme.

b) Etudier de même l'application $\text{Sym}_+^*(E) \times \mathbf{O}(E) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w \circ \rho$.

c) Soit $\text{Sym}_+(E)$ l'ensemble des $u \in \text{Sym}(E)$ qui sont positifs. Montrer que l'application $\mathbf{O}(E) \times \text{Sym}_+(E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ est surjective. Est-elle injective ?

Etudier de même l'application $\text{Sym}_+(E) \times \mathbf{O}(E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w \circ \rho$.

d) Soit $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Dédurre du a) qu'il existe $U \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, $V \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, D diagonale à termes diagonaux > 0 , telles que $M = U D V$. Discuter l'unicité du triplet (U, V, D) . Etudier l'extension de la propriété à des matrices quelconques $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ■

Notation : Pour v autoadjoint positif, l'unique endomorphisme autoadjoint positif w tel que $w^2 = v$ sera noté $v^{1/2}$.

a) En tenant compte du fait que $w = (u^* \circ u)^{1/2}$ est symétrique, on a l'égalité :

$$\rho^* \circ \rho = w^{-1} \circ u^* \circ u \circ w^{-1} = w^{-1} \circ v \circ w^{-1} = w^{-1} \circ w^2 \circ w^{-1} = \text{Id}_E.$$

Nous en déduisons $\rho = u \circ w^{-1} \in \mathbf{O}(E)$; on a donc l'égalité $u = \rho \circ w$, où $\rho \in \mathbf{O}(E)$ et $w \in \text{Sym}_+^*(E)$. Cette décomposition (polaire) est unique, car si $u = \rho \circ w$, où $\rho \in \mathbf{O}(E)$ et $w \in \text{Sym}_+^*(E)$, alors $u^* \circ u = w \circ \rho^* \circ \rho \circ w = w^2$, ce qui détermine w (cf. exercice 1), et par conséquent le couple (ρ, w) .

En résumé, on obtient ici la décomposition $u = \rho \circ w$, où $w = (u^* \circ u)^{1/2} \in \text{Sym}_+^*(E)$ et $\rho = u \circ w^{-1} \in \mathbf{O}(E)$.

L'application $\mathbf{O}(E) \times \text{Sym}_+^*(E) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ est bien sûr continue car restriction d'une application bilinéaire. Pour montrer que l'application réciproque $u \mapsto (\rho, w)$ est continue, il suffit de montrer que l'application $\text{Sym}_+^*(E) \rightarrow \text{Sym}_+^*(E)$, $v \mapsto w$, où $w^2 = v$, est continue. D'après l'exercice 14, on peut écrire :

$$w = \exp \left(\frac{1}{2} \text{Log}(v) \right),$$

où $\exp : \text{Sym}(E) \rightarrow \text{Sym}_+^*(E)$ et $\text{Log} : \text{Sym}_+^*(E) \rightarrow \text{Sym}(E)$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre. L'application $u \mapsto w$, où $w^2 = u^* \circ u$, est donc bien continue.

b) Notons Φ l'application précédemment introduite et Ψ l'application $\text{Sym}_+^*(E) \times \mathbf{O}(E) \rightarrow \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w \circ \rho$. On vérifie que pour tout $(w, \rho) \in \text{Sym}_+^*(E) \times \mathbf{O}(E)$ on a :

$$(\Psi(w, \rho))^* = (w \circ \rho)^* = \rho^* w = \Phi(\rho^*, w) = \Phi(\rho^{-1}, w),$$

d'où :

$$\Psi(w, \rho) = (\Phi(\rho^*, w))^*.$$

L'application Ψ est donc comme Φ un homéomorphisme.

On obtient ici la décomposition $u = w_1 \circ \rho_1$, où $w_1 = (u \circ u^*)^{1/2} \in \text{Sym}_+^*(E)$ et $\rho_1 = w_1^{-1} \circ u \in \mathbf{O}(E)$.

c) Cherchons des conditions nécessaires que doit vérifier le couple $(\rho, w) \in \mathbf{O}(E) \times \text{Sym}_+^*(E)$ pour que $u = \rho \circ w$. On a d'abord $u^* \circ u = w \circ \rho^* \circ \rho \circ w = w^2$; d'après l'exercice 1, cela détermine w de manière unique en fonction de u . Puisque w est symétrique, on a $E = \text{Im } w \oplus \text{Ker } w$; l'application $\varphi = w|_{\text{Im } w}^{\text{Im } w}$ est donc bijective. Notons ψ l'application linéaire $\text{Im } w \rightarrow E$ qui coïncide sur $\text{Im } w$ avec φ^{-1} ; on a : $u \circ \psi = \rho|_{\text{Im } w}$. Enfin, ρ étant orthogonal, $\rho(\text{Im } w^\perp) = (\rho(\text{Im } w))^\perp = (\text{Im } u)^\perp$; la restriction de ρ au sous-espace $(\text{Im } w)^\perp$ est donc une isométrie d'image $(\text{Im } u)^\perp$.

Montrons que ces conditions nécessaires sont suffisantes, et qu'il existe bien des couples (ρ, w) vérifiant ces conditions. Comme nous l'avons déjà remarqué, il existe un unique $w \in \text{Sym}_+^*(E)$ tel que $u^* \circ u = w^2$. On vérifie que $u^* \circ u$ a même noyau que u , et que w ; les sous-espaces $\text{Im } u$ et $\text{Im } w$ ont donc même dimension. Nous en déduisons qu'il existe des isométries $(\text{Im } w)^\perp \rightarrow (\text{Im } u)^\perp$; pour toute isométrie $\theta : (\text{Im } w)^\perp \rightarrow (\text{Im } u)^\perp$, il existe une unique application linéaire ρ qui coïncide sur $\text{Im } w$ avec $u \circ \psi$ (cf. ci-dessus) et avec θ sur $(\text{Im } w)^\perp$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \|\rho(w(x))\|^2 &= \|u(x)\|^2 = (u(x) | u(x)) = (x | u^*(u(x))) = \\ &= (x | w^2(x)) = (w(x) | w(x)) = \|w(x)\|^2 \end{aligned}$$

donc pour tout $y \in \text{Im } w$, $\|\rho(y)\| = \|y\|$. De même, pour tout $x \in (\text{Im } w)^\perp$, $\|\rho(x)\| = \|x\|$. Enfin, pour tout $y \in \text{Im } w$ et tout $x \in (\text{Im } w)^\perp$, $\rho(y) \in \text{Im } u$ et $\rho(x) \in (\text{Im } u)^\perp$, d'où $(\rho(y) | \rho(x)) = 0$. L'application ρ est donc une isométrie $E \rightarrow E$. Enfin l'égalité $u(x) = \rho(w(x))$, est vérifiée si $x \in \text{Im } w$, et comme $(\text{Im } w)^\perp = \text{Ker } w = \text{Ker } u$, elle est vérifiée pour tout $x \in (\text{Im } w)^\perp$. L'égalité $u(x) = \rho(w(x))$ est donc vraie pour tout $x \in E$.

En conclusion, w est unique, et ρ est déterminé par le choix d'une isométrie $\theta : \text{Ker } u \rightarrow (\text{Im } u)^\perp$. L'application $\mathbf{O}(E) \times \text{Sym}_+(E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $(\rho, w) \mapsto \rho \circ w$ est donc surjective, mais non injective. En utilisant la même méthode que dans le b), on voit qu'il en est de même pour l'application $\text{Sym}_+(E) \times \mathbf{O}(E) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $(w, \rho) \mapsto w \circ \rho$.

d) D'après a), il existe $R \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique définie positive, telles que $M = RW$. La matrice W étant symétrique définie positive, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont tous > 0 . Il existe donc une matrice $V \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ telle que $W = V^{-1}DV$, d'où $M = RV^{-1}DV$. On obtient la décomposition demandée en posant $U = RV^{-1}$.

Si $n \geq 2$, il n'y a pas unicité pour plusieurs raisons. D'abord, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et I_σ est la matrice associée à cette permutation, on a $I_\sigma \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, et $M = UI_\sigma^{-1}(I_\sigma D I_\sigma^{-1})I_\sigma V$, et la matrice $(I_\sigma D I_\sigma^{-1})$ est diagonale de coefficients diagonaux > 0 . On peut remarquer cependant que :

$$M^* M = V^* D U^* U D V = V^{-1} D^2 V.$$

La matrice diagonale D^2 est donc unique à une permutation près de ses coefficients diagonaux, qui forment une suite complète des valeurs propres de $M^* M$. Il est en de même pour D . On peut maintenant se demander si, ayant une décomposition $M = UDV$, il peut exister des décompositions $M = U'DV'$. L'égalité $UDV = U'DV'$ équivaut à l'égalité $V' = D^{-1}U'^{-1}UDV$; la matrice $U' \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ étant fixée, le couple (U', V') convient si, et seulement si, $V' \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, soit si, et seulement si, la matrice $D^{-1}U'^{-1}UD$ est orthogonale. Cette condition s'écrit :

$$D^{-1}U'^{-1}U'D = DU^{-1}U'D^{-1} \quad \text{soit} \quad U^{-1}U'D^2 = D^2U^{-1}U'.$$

Les solutions pour U' sont de la forme $U' = UC$, où C est une matrice orthogonale qui commute avec D^2 . De manière générale, les endomorphismes qui commutent avec un endomorphisme diagonalisable f sont les endomorphismes qui laissent stables les sous espaces propres de f ; comme les matrices D^2 et $D = (D^2)^{1/2}$ sont diagonalisables et ont les mêmes sous-espaces propres (cf. exercice 1), la matrice C commute avec D^2 si, et seulement si, elle commute avec D . Si $U' = UC$, où C est

orthogonale qui commute avec D , alors $M = U D V = U' D V'$ si, et seulement si, $V' = D^{-1} C^{-1} U^{-1} U D V = C^{-1} V$. Les décompositions possibles, la matrice D étant fixée, sont donc celles de la forme :

$$M = U' D V' \quad \text{où} \quad (U', V') = (U C, C^{-1} V),$$

C étant une matrice orthogonale qui commute avec D .

Supposons que D soit sous la forme $D = \text{Diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k})$, où $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des valeurs propres de D distinctes, et n_1, \dots, n_k les multiplicités de ces valeurs propres, ce qu'on peut toujours supposer d'après la première remarque. Les matrices orthogonales C qui commutent avec D sont de la forme $\text{Diag}(C_1, \dots, C_k)$, où pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $C_i \in \mathbf{O}(n_i, \mathbb{R})$. On peut ainsi déterminer toutes les décompositions possibles de $M \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Si M n'est plus supposée inversible, en procédant comme ci-dessus on peut prouver l'existence de deux matrices orthogonales U et V , et d'une matrice diagonale D à coefficients ≥ 0 telles que $M = U D V$.

Exercice 18 :

|| Soit E un espace euclidien de dimension $2n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On donne deux sous- \mathbb{R} -ev de E , soit F et G , tous les deux de dimension n et tels que $E = F \oplus G$. Démontrer qu'il existe $u \in \mathbf{O}(E)$ tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$. ■

1) Si $\varphi : F \rightarrow G$ est une isométrie, on note f_φ l'endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $f_\varphi(x) = \varphi(p_F(x)) + \varphi^{-1}(p_G(x))$, où p_F et p_G désignent respectivement la projection sur F et la projection sur G dans la somme directe $E = F \oplus G$. Il est clair que f_φ est une involution telle que $f_\varphi(F) = G$ et $f_\varphi(G) = F$. Cette involution est un endomorphisme orthogonal de l'espace euclidien E si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in F \times G$ on a $\|\varphi(x) + \varphi^{-1}(y)\| = \|x + y\|$, soit si, et seulement si, pour tout $(x, x') \in F^2$, $\|\varphi(x) + x'\| = \|x + \varphi(x')\|$; cette condition s'écrit :

$$(1) \quad \|\varphi(x)\|^2 + 2(\varphi(x) | x') + \|x'\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | \varphi(x')) + \|\varphi(x')\|^2;$$

L'application φ étant une isométrie de F dans G , l'égalité (1) est vraie si, et seulement si, $(\varphi(x) | x') = (x | \varphi(x'))$. Considérons sur F la forme bilinéaire $B : (x, x') \mapsto (\varphi(x) | x')$; d'après ce qui précède, f_φ est un endomorphisme orthogonal si, et seulement si, la forme B est symétrique.

2) Soit $\varphi_0 : F \rightarrow G$ une isométrie (il en existe puisque $\dim F = \dim G$), et soit ψ_0 l'endomorphisme de F tel que pour tout (x, x')

$(\psi_0(x) \mid x') = (\varphi_0(x) \mid x')$; d'après l'exercice 16 (décomposition polaire), il existe un endomorphisme orthogonal ρ , et un endomorphisme symétrique w , de l'espace euclidien F , tels que $\psi_0 = w \circ \rho$. On vérifie alors que pour tout $(x, x') \in F^2$:

$$(\varphi_0(\rho^{-1}(x)) \mid x') = (\psi_0(\rho^{-1}(x)) \mid x') = (w(x) \mid x') .$$

L'endomorphisme w de F étant symétrique, la forme bilinéaire $(x, x') \mapsto (\varphi_0(\rho^{-1}(x)) \mid x')$, définie sur F , est symétrique. D'après 1), l'endomorphisme $u = f_{\varphi_0 \circ \rho^{-1}}$ est un endomorphisme orthogonal involutif de E tel que $u(F) = G$ et $u(G) = F$.

§ III.4 ENDOMORPHISMES NORMAUX D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Exercice 1 :

|| Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Démontrer que le normalisateur de \mathcal{N} dans $\text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, c'est-à-dire le groupe $\{u \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E) \mid \forall v \in \mathcal{O}(E) \ u \circ v \circ u^{-1} \in \mathcal{O}(E)\}$ est le groupe $\vec{\mathcal{P}}(E)$ des similitudes vectorielles de E . ■

Supposons $u \in \mathcal{N}$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in (\mathbb{R}x)^\perp$; on note $H = (\mathbb{R}x)^\perp$, S_H la symétrie orthogonale par rapport à H et $S = u \circ S_H \circ u^{-1}$, qui est par hypothèse une isométrie. On observe que :

$$\begin{aligned} (u(x) \mid u(y)) &= (S(u(x)) \mid S(u(y))) = \\ &= (u(S_H(x)) \mid u(S_H(y))) = (u(-x) \mid u(y)) = -(u(x) \mid u(y)) , \end{aligned}$$

d'où $(u(x) \mid u(y)) = 0$. L'application linéaire u "transforme donc tout angle droit en un angle droit". L'image d'une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E est donc une base orthogonale ; d'autre part, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, comme les vecteurs $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux, les vecteurs $u(e_i - e_j) = u(e_i) - u(e_j)$ et $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j)$ sont aussi orthogonaux ; on en déduit $\|u(e_i)\|^2 = \|u(e_j)\|^2$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est l'inverse de la norme commune des vecteurs e_i , où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on voit que la famille $(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n))$ est une base orthonormale de E . L'application λu est donc un endomorphisme orthogonal de E , et l'endomorphisme u une similitude.

Toute similitude étant évidemment dans \mathcal{N} , nous en déduisons $\mathcal{N} = \vec{\mathcal{P}}(E)$.

Exercice 4 :

|| Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$

|| composantes connexes de l'ensemble des *automorphismes* normaux de E . ■

Soit $N \subset \text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ l'ensemble des automorphismes normaux de E . L'application $\det : N \rightarrow \mathbb{R}^*$ est continue et son image est \mathbb{R}^* (puisque $n \geq 1$) qui n'est pas connexe. Nous en déduisons que N n'est pas connexe, et a par conséquent au moins 2 composantes connexes. Montrons que N a exactement 2 composantes connexes.

Soit u un automorphisme normal de E . D'après le Théorème III.4.3, il existe deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux F et G stables par u , tels que $u|_F^F$ n'ait pas de valeurs propres réelles < 0 , et $u|_G^G$ n'ait pas de valeurs propres réelles > 0 ; cette décomposition n'est en général pas unique, et l'un des espaces F ou G peut être nul. Soit S_F la symétrie orthogonale autour de F . On voit facilement que u commute avec S_F . Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ l'endomorphisme $(1 - \alpha)u + \alpha S_F$ commute avec son adjoint, et est par conséquent un endomorphisme normal. Montrons qu'il s'agit d'un automorphisme; nous pouvons supposer $\alpha \in]0, 1[$. Soit $x = y + z$, où $(y, z) \in F \times G$, tel que $(1 - \alpha)u(x) + \alpha S_F(x) = 0$; comme F et G sont stables par u , nous en déduisons :

$$(1 - \alpha)u(y) + \alpha y = 0 \quad \text{et} \quad (1 - \alpha)u(z) - \alpha z = 0 ;$$

comme $u|_F^F$ n'a pas de valeurs propres réelles < 0 , $y = 0$, et comme $u|_G^G$ n'a pas de valeurs propres > 0 , $z = 0$; finalement $x = y + z = 0$. Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ l'endomorphisme $(1 - \alpha)u + \alpha S_F$ est donc un automorphisme normal. L'application $\alpha \mapsto (1 - \alpha)u + \alpha S_F$ étant continue, nous en déduisons que u et S_F sont dans la même composante connexe de N . Le groupe $\text{SO}(E)$ étant connexe par arcs (Théorème II.4.9) la symétrie S_F est dans la même composante connexe de $\text{O}(E) \subset N$ que, soit l'identité si $\text{codim} F (= \dim G)$ est paire, soit une réflexion quelconque, si $\text{codim} F$ est impaire. L'ensemble N a donc deux composantes connexes, celle de Id_E qui est l'ensemble $\{u \in N \mid \det(u) > 0\}$, et l'ensemble $\{u \in N \mid \det(u) < 0\}$ qui contient toutes les réflexions.

Chapitre IV

FORMES HERMITIENNES, ESPACES HERMITIENS

§ IV.1 FORMES SESQUILINÉAIRES HERMITIENNES

Exercice 1 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } Q(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n \in \mathbb{C}[X]. \text{ On} \\ \text{pose } M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|. \text{ Montrer que } M \geq 1 ; \text{ puis prouver que} \\ M = 1 \text{ ssi } b_1 = \dots = b_n = 0. \blacksquare \end{array} \right.$$

Considérons sur le \mathbb{C} -ev $E = \mathbb{C}_n[X]$ la forme sesquilinéaire hermitienne h :

$$(P, Q) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta}) d\theta.$$

On vérifie facilement que la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E est orthonormale pour h . On a donc pour tout $P = b_n + b_{n-1}X + \dots + b_0X^n \in E$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = |b_0|^2 + \dots + |b_n|^2.$$

Pour $Q = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n$, on a donc :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})|^2 d\theta = 1 + |b_1|^2 + \dots + |b_n|^2,$$

et en posant $M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$:

$$1 + |b_1|^2 + \dots + |b_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M^2 d\theta = M^2.$$

Nous en déduisons $M \geq 1$, et si $M = 1$, alors $b_1 = \dots = b_n = 0$. Réciproquement, si $b_1 = \dots = b_n = 0$, alors $Q(X) = X^n$ et on a bien $\sup_{|z|=1} |Q(z)| = 1$.

Exercice 4 :

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension > 1 .

a) Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ tel que :

$$(\forall x \in E \setminus \{0\}) \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, u(x) = \lambda x.$$

Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid u = \lambda \text{Id}_E$.

b) On suppose de plus que E est de dimension finie et on donne $v \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(E_{(\mathbb{R})})$ qui ne soit pas une homothétie du \mathbb{C} -ev E . Dédurre du a) qu'il existe une forme quadratique hermitienne Q sur E telle que $Q \circ v \neq Q$. En déduire le groupe

$$\bigcap_{Q \in \text{Quadrat}_H(E)} \mathbf{O}(Q). \blacksquare$$

a) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ notons $\lambda(x)$ le complexe tel que $u(x) = \lambda(x)x$. Si (x, y) est libre dans le \mathbb{C} -ev E , alors $x + y \neq 0$, et :

$$u(x + y) = \lambda(x + y)(x + y) = u(x) + u(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y,$$

d'où $\lambda(x) = \lambda(x + y) = \lambda(y)$. Si (x, y) est liée, on peut, puisque $\dim E > 1$, trouver $z \in E \setminus \{0\}$ tel que (x, z) et (y, z) soient libres dans le \mathbb{C} -ev E ; on a donc $\lambda(x) = \lambda(z) = \lambda(y)$. La fonction λ , définie sur $E \setminus \{0\}$ est donc constante; si $\lambda \in \mathbb{C}$ est sa valeur constante, pour tout $x \in E$, y compris si $x = 0$, on a $u(x) = \lambda x$. En conclusion : $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid u = \lambda \text{Id}_E$.

Le lecteur remarquera que cette propriété n'est pas vérifiée si E est de dimension 1.

b) Puisque v n'est pas une homothétie du \mathbb{C} -ev E , il existe d'après a) un vecteur $x \neq 0$ tel que $(x, v(x))$ soit libre dans le \mathbb{C} -ev E . Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ du \mathbb{C} -ev E telle que $e_1 = x$ et $e_2 = v(x)$. Soit Q la forme quadratique hermitienne dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\text{Diag}(1, 0, \dots, 0)$. On a $Q(x) = 1 \neq Q(v(x)) = 0$, donc $v \notin \mathbf{O}(Q)$. Nous en déduisons, en notant \mathcal{H} le groupe des homothéties de E :

$$\bigcap_{Q \in \text{Quadrat}_H(E)} \mathbf{O}(Q) \subset \mathcal{H}.$$

Soit maintenant $v = \lambda \text{Id}_E$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pour toute forme quadratique hermitienne Q de forme polaire h , on a :

$$(\forall x \in E) \quad Q(v(x)) = Q(\lambda x) = h(\lambda x, \lambda x) = \bar{\lambda}\lambda h(x, x) = |\lambda|^2 Q(x).$$

Comme il existe des formes quadratiques hermitiennes non nulles, on voit que v est dans l'intersection des groupes $\mathbf{O}(Q)$, où $Q \in \text{Quadrat}_H(E)$ si, et seulement si, $\lambda \in \mathbb{U}$.

En conclusion :

$$\bigcap_{Q \in \text{Quadrat}_H(E)} \mathbf{O}(Q) = \{\lambda \text{Id}_E, \lambda \in \mathbb{U}\} .$$

Ce groupe est donc isomorphe au groupe \mathbb{U} .

§ IV.2 FORMES HERMITIENNES EN DIMENSION FINIE

Exercice 2 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Avec les notations de la relation (8), démontrer que :} \\ \text{Discr}_\beta(u) = |\text{Discr}_\beta(h)|^2 . \blacksquare \end{array} \right.$$

En utilisant les notations du Corollaire 2 du Théorème IV.2.1, il s'agit de montrer que si $U \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $V \in \text{Asym}(n, \mathbb{R})$, alors :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} U & -V \\ \hline V & U \end{array} \right] = |\det(U + iV)|^2 .$$

On peut remarquer l'égalité :

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & iI_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} U & -V \\ \hline V & U \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c|c} I_n & -iI_n \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} U + iV & 0 \\ \hline V & U - iV \end{array} \right] ,$$

d'où nous déduisons :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} U & -V \\ \hline V & U \end{array} \right] = \det(U + iV) \det(U - iV) .$$

Puisque U et V sont à coefficients réels, $\det(U + iV)$ et $\det(U - iV)$ sont conjugués, et par conséquent :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} U & -V \\ \hline V & U \end{array} \right] = |\det(U + iV)|^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5 :

$$\left\| \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } A = [a_{k,l}] \in \mathcal{H}er(n, \mathbb{C}) \text{ positive (c} \right.$$

et telle que $a_{k,l} \neq 0$ pour tous k et l . Montrer que, pour que la matrice $B = [1/a_{k,l}]$ soit positive, il faut et il suffit que A soit de rang 1. ■

Supposons que A et B soient toutes les deux positives.

Soit p le rang de A et q le rang de B ; $p \geq 1$ et $q \geq 1$, puisque A et B sont non nulles; on notera α et β les formes quadratiques hermitiennes associées dans le \mathbb{C} -ev \mathbb{C}^n . Comme α est positive et de rang p , il existe des formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ telles que :

$$(\forall x \in E) \quad \alpha(x) = \overline{\varphi_1(x)} \varphi_1(x) + \dots + \overline{\varphi_p(x)} \varphi_p(x) .$$

Il existe de même des formes linéaires linéairement indépendantes ψ_1, \dots, ψ_q telles que :

$$(\forall x \in E) \quad \beta(x) = \overline{\psi_1(x)} \psi_1(x) + \dots + \overline{\psi_q(x)} \psi_q(x) .$$

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique du dual de \mathbb{C}^n ; posons pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$\varphi_i = \sum_{h=1}^n \lambda_{i,h} \varepsilon_h \quad \text{et} \quad \psi_j = \sum_{h=1}^n \mu_{j,h} \varepsilon_h .$$

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \overline{\lambda_{i,h}} \lambda_{i,k} \overline{x_h} x_k .$$

Par identification nous en déduisons :

$$(\forall (h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad a_{h,k} = \sum_{i=1}^p \overline{\lambda_{i,h}} \lambda_{i,k} ,$$

et de même :

$$(\forall (h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad b_{h,k} = 1/a_{h,k} = \sum_{j=1}^q \overline{\mu_{j,h}} \mu_{j,k} .$$

Nous obtenons finalement les égalités :

$$(1) \quad (\forall (h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket} \overline{\lambda_{i,h}} \lambda_{i,k} \overline{\mu_{j,h}} \mu_{j,k} = 1 .$$

Pour tout $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $M_h = [\lambda_{i,h} \mu_{j,h}]_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket}$, matrice élément de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Munissons l'espace $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de la structure hermitienne

laquelle la base canonique est orthonormale. En utilisant ce produit scalaire et cette notation, les égalités (1) s'écrivent :

$$(\forall (h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad (M_h \mid M_k) = 1 .$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (\forall (h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2) \quad (M_h - M_k \mid M_h - M_k) &= \\ &= (M_h \mid M_h) - (M_h \mid M_k) - (M_k \mid M_h) + (M_k \mid M_k) = 0 . \end{aligned}$$

Nous en déduisons $M_1 = \dots = M_n$, et cette matrice est de norme 1. Notons $[\nu_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket}$ cette matrice. On a :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket \times \llbracket 1,q \rrbracket} \overline{\nu_{i,j}} \nu_{i,j} = 1 ,$$

et :

$$(\forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket) \quad \lambda_{i,h} \mu_{j,h} = \nu_{i,j} .$$

Soit $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ tel que $\nu_{i_0, j_0} \neq 0$. On a donc pour tout $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_{i_0, h} \neq 0$ et $\mu_{j_0, h} \neq 0$. Pour $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ quelconque, si on avait $\nu_{i_0, j} = 0$, on aurait $\lambda_{i_0, h} \mu_{j, h} = 0$, d'où $\mu_{j, h} = 0$, pour tout $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et par conséquent $\psi_j = 0$, ce qui est exclu ; on a donc pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\nu_{i_0, j} \neq 0$. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\varphi_i \neq 0$, on en déduit de manière analogue, que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, $\nu_{i,j} \neq 0$. Les complexes $\lambda_{i,h}$ et $\mu_{j,h}$, où $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, sont donc tous non nuls. Nous en déduisons en particulier que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$(\forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad \lambda_{i,h} = \nu_{i,1} \frac{1}{\mu_{1,h}} \quad \text{ou encore} \quad \varphi_i = \nu_{i,1} \sum_{h=1}^n \frac{1}{\mu_{1,h}} \varepsilon_h .$$

Cela implique que les formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ soient toutes dans une même droite vectorielle ; comme par hypothèse la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre, ce n'est possible que si $p = 1$. On démontre de manière analogue $q = 1$. Les matrices A et B sont donc nécessairement de rang 1, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant que A soit hermitienne de rang 1. Comme A est de rang 1, il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls, et des complexes μ_1, \dots, μ_n non tous nuls, tels que pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $a_{h,k} = \lambda_h \mu_k$. La matrice A étant hermitienne, pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $\overline{\lambda_h} \mu_k = \lambda_k \mu_h$. Soit $h_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_{h_0} \neq 0$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mu_k = \frac{\overline{\mu_{h_0}}}{\lambda_{h_0}} \overline{\lambda_k} .$$

Les familles (μ_1, \dots, μ_n) et $(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$ sont donc proportionnelles, et le rapport de proportionnalité qui est :

$$\frac{\mu_{h_0}}{\lambda_{h_0}} = \frac{\overline{\mu_{h_0}}}{\lambda_{h_0}},$$

est réel. En conclusion, il existe un réel $t \neq 0$ et des complexes non tous nuls μ_1, \dots, μ_n , tels que pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{h,k} = t \overline{\mu_h} \mu_k$. Si de plus A est positive, les termes diagonaux étant positifs, on a $t \in \mathbb{R}_+^*$. Si de plus pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{h,k} \neq 0$, alors $(\forall h \in \llbracket 1, n \rrbracket) \mu_h \neq 0$. Dans ce cas, pour tout $(h, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$b_{h,k} = \frac{1}{a_{h,k}} = \frac{1}{t} \frac{1}{\overline{\mu_h}} \frac{1}{\mu_k}.$$

En notant de nouveau β la forme quadratique hermitienne sur \mathbb{C}^n de matrice B dans la base canonique, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\beta(x) = \frac{1}{t} \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \frac{\overline{x_h}}{\overline{\mu_h}} \frac{x_k}{\mu_k} = \frac{1}{t} \left| \sum_{h=1}^n \frac{x_h}{\mu_h} \right|^2 \geq 0.$$

La matrice B est donc hermitienne positive.

Exercice 8 :

- Soit n un entier ≥ 2 et Q la forme quadratique hermitienne :
- $$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}, (z_1, \dots, z_n) \mapsto \sum_{1 \leq k < l \leq n} |z_k - z_l|^2.$$
- a) Quelle est la signature de Q ?
- b) Donner la matrice de Q dans la base canonique. ■

a) La forme quadratique hermitienne Q est évidemment positive. Soit h la forme hermitienne associée. D'après le Corollaire 1 du Théorème IV.3.1, l'espace singulier de h est le cône isotrope de h et de Q . On a donc :

$$\text{Sing}(h) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 = \dots = z_n\}.$$

L'espace singulier de h est une droite, ce qui prouve que h est de rang $n-1$. La signature de Q est donc $(n-1, 0)$.

b) Pour tout $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ on a :

$$\begin{aligned} Q(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2} \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \overline{(z_h - z_k)} (z_h - z_k) = \\ &= \frac{n}{2} \sum_{h=1}^n \overline{z_h} z_h + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^n \overline{z_k} z_k - \frac{1}{2} \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \overline{z_h} z_k - \frac{1}{2} \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \overline{z_k} z_h = \\ &= n \sum_{h=1}^n |z_h|^2 - \sum_{(h,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \overline{z_h} z_k . \end{aligned}$$

La matrice de Q et de h est donc $nI_n - J$, où la matrice J est la matrice dont tous les coefficients sont 1 ; les termes diagonaux de cette matrice sont $n - 1$ et les termes non diagonaux sont 1 .

Exercice 9 :

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension $n \geq 2$ et h une forme hermitienne sur E de signature (p, q) . On note \mathcal{G}_+ (resp. \mathcal{G}_-) l'ensemble des sous- \mathbb{C} -ev F de E tels que $h|_{F \times F}$ soit définie positive (resp. définie négative).

a) Montrer : pour tout $V \in \mathcal{G}_+$ (resp. $V \in \mathcal{G}_-$), on a : $\dim(V) \leq p$ (resp. $\dim V \leq q$), et il existe $W \in \mathcal{G}_+$ (resp. $W \in \mathcal{G}_-$) tel que $\dim(W) = p$ (resp. $\dim W = q$).

b) Soit $V \in \mathcal{G}_+$ tel que $\dim(V) = p$. Prouver qu'il existe $W \in \mathcal{G}_-$ tel que $\dim(W) = q$ et $E = V \oplus W \oplus \text{Sing}(f)$, avec $V \perp W$. ■

Nous utiliserons le résultat suivant, qui se démontre facilement à l'aide de la définition de la signature :

Lemme :

Soit h une forme hermitienne sur le \mathbb{C} -ev E de dimension finie $n \geq 1$, et deux sous-espaces F et F' h -orthogonaux tels que $E = F \oplus F'$. Si (p, q) est la signature de $h|_{F \times F}$ et (p', q') la signature de $h|_{F' \times F'}$, la signature de h est $(p + p', q + q')$. ■

a) Supposons $V \in \mathcal{G}_+$. La forme hermitienne $h|_{V \times V}$ est par définition définie positive ; le sous-espace V est a fortiori non-isotrope pour h , et par conséquent (Corollaire 1 du Théorème IV.2.2), on a $E = V \oplus V^\perp$ (orthogonal relativement à h). Posons $r = \dim(V)$; la signature de $h|_{V \times V}$ est $(r, 0)$, et par conséquent la signature de h est (p, q) , où $p \geq r$ e

Lemme). De même, pour tout $W \in \mathcal{G}_-$, on a $\dim(W) \leq q$.

L'existence de $V \in \mathcal{G}_+$ de dimension p et de $W \in \mathcal{G}_-$ de dimension q , est une conséquence immédiate de la définition de la signature de h .

b) Soit $V \in \mathcal{G}_+$ de dimension p ; on voit comme ci-dessus que $E = V \oplus V^\perp$ (orthogonal relativement à h). D'après le lemme, la signature de $h|_{V^\perp \times V^\perp}$ est $(0, q)$. En appliquant le a) à $h|_{V^\perp \times V^\perp}$, on prouve qu'il existe un sous-espace W de V^\perp , tel que $\dim W = q$, et tel que h soit définie et négative sur W . Si S est l'orthogonal de W dans V^\perp (pour $h|_{V^\perp \times V^\perp}$), la signature de $h|_{S \times S}$ est $(0, 0)$; h est donc nulle sur $S \times S$. On a $E = V \oplus W \oplus S$ et le sous-espace S est orthogonal (pour h) à V , à W , et à lui-même; on a donc $S \subset \text{Sing}(h)$, et comme $\dim(S) = n - p - q = \text{rg}(h)$, on a $S = \text{Sing}(h)$. En résumé, on a démontré l'existence d'un sous-espace $W \in \mathcal{G}_-$ tel que $\dim(W) = q$, et tel que :

$$E = V \oplus W \oplus \text{Sing}(h) .$$

§ IV.3 ESPACES PRÉHILBERTIENS

Exercice 3 :

Soit E un \mathbb{C} -espace hermitien de dimension $n \geq 1$ et $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$.

a) Prouver qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise u .

b) Soit $\mathcal{U} \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que $\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2 \quad u \circ v = v \circ u$. Prouver qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise chaque $u \in \mathcal{U}$. ■

a) Montrons la propriété par récurrence sur n . Elle est évidemment vraie pour $n = 1$. Supposons cette propriété vraie avec l'entier n ($n \geq 1$). Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, où E est un espace hermitien de dimension $n + 1$. L'adjoint de u , noté u^* (cf. IV.5), admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur propre x qu'on peut supposer de norme 1. L'hyperplan $H = (\mathbb{C}x)^\perp$ est stable par u ; en effet, si $(y | x) = 0$, alors $(u(y) | x) = (y | u^*(x)) = \lambda (y | x) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à l'endomorphisme $u|_H^H$ de l'espace hermitien H , il existe une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) de H dans laquelle la matrice de $u|_H^H$ soit trigonale supérieure. Il est alors clair que la famille (e_1, \dots, e_n, x) est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est trigonale s

b) Démontrons d'abord par récurrence sur $n \geq 1$, que les éléments d'un ensemble d'endomorphismes permutables d'un \mathbb{C} -ev de dimension $\leq n$ admettent au moins un vecteur propre commun. Cette propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie avec l'entier n ($n \geq 1$). Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension $n + 1$, et soit \mathcal{U} un ensemble d'endomorphismes de E deux à deux permutables. Si les éléments de \mathcal{U} sont tous de la forme λId_E , où $\lambda \in \mathbb{C}$, tout élément de E est vecteur propre commun. Dans le cas contraire, soit $u \in \mathcal{U}$ qui ne soit pas de la forme λId_E , où $\lambda \in \mathbb{C}$. Cet endomorphisme du \mathbb{C} -ev E a au moins une valeur propre λ , et le sous-ev propre $E' = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$, de dimension $\leq n$, est stable par tous les $v \in \mathcal{U}$ car ces endomorphismes commutent avec u . Les endomorphismes induits sur E' par les $v \in \mathcal{U}$ commutent entre eux; d'après l'hypothèse de récurrence, ils ont un vecteur propre commun $x \in E'$. Il est clair que x est un vecteur propre commun pour les $v \in \mathcal{U}$. Cela achève cette première démonstration.

Démontrons maintenant par récurrence sur $n \geq 1$ que si \mathcal{U} est un ensemble d'endomorphismes deux à deux permutables d'un espace hermitien E de dimension n , il existe une base orthogonale qui trigonalise tous les éléments de \mathcal{U} . Cette propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons cette propriété vraie avec l'entier n ($n \geq 1$). Soit E un espace hermitien de dimension $n + 1$ et \mathcal{U} un ensemble d'endomorphismes de E deux à deux permutables. Les endomorphismes u^* , où $u \in \mathcal{U}$ sont aussi deux à deux permutables; d'après ce qui précède, il ont un vecteur propre commun x , qu'on peut supposer de norme 1. L'hyperplan $H = (\mathbb{C}x)^\perp$ est stable par les $u \in \mathcal{U}$ (cf. a)). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de H qui trigonalise tous les endomorphismes induits sur H par les $u \in \mathcal{U}$. Il est clair que la famille (e_1, \dots, e_n, x) est une base orthonormale de E qui trigonalise tous les $u \in \mathcal{U}$. Cela termine cette démonstration par récurrence.

Exercice 6 :

|| Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A et B deux éléments de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$
 || toutes deux positives (resp. définies positives). Montrer que
 || $\text{Tr}(AB) \geq 0$ (resp. $\text{Tr}(AB) > 0$) en utilisant l'exercice 4 du §
 || IV.2. ■

D'après l'exercice 4 du § IV.2, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\in \text{GL}(n, \mathbb{C})$) telle que $A = M^* M$; il existe de même une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\in \text{GL}(n, \mathbb{C})$) telle que $B = N^* N$. On a $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}((M^* M N^*) N) = \text{Tr}(N(M^* M N^*))$. Posons $P = M N^*$

$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(P^*P)$. Si $P = [\lambda_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$, on a :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_{j,i}} \lambda_{j,i} \geq 0.$$

Si A et B sont définies positives, les matrices M et N sont régulières, donc P est régulière, et non nulle. On a donc dans ce cas $\text{Tr}(AB) > 0$.

Exercice 11 :

Soit E un espace préhilbertien, et $(a, b, c, d) \in E^4$. Montrer :

$$\|a - c\| \cdot \|b - d\| \leq \|a - b\| \cdot \|c - d\| + \|b - c\| \cdot \|a - d\|.$$

Quand y a-t-il égalité ? ■

a) En posant $b_1 = b - a$, $c_1 = c - a$ et $d_1 = d - a$, nous sommes ramenés à démontrer que l'inégalité :

$$\|c_1\| \|b_1 - d_1\| \leq \|b_1\| \|c_1 - d_1\| + \|b_1 - c_1\| \|d_1\|,$$

est vraie pour tout $(b_1, c_1, d_1) \in E^3$. L'inégalité étant vérifiée si $b_1 = 0$, ou si $d_1 = 0$ (il y a d'ailleurs dans ces cas égalité), ou si $c_1 = 0$, nous pouvons supposer que b_1 , c_1 et d_1 sont non nuls. Posons :

$$b_2 = \frac{1}{\|b_1\|^2} b_1, \quad c_2 = \frac{1}{\|c_1\|^2} c_1, \quad d_2 = \frac{1}{\|d_1\|^2} d_1.$$

On remarque que si u et v sont des vecteurs unitaires dans E , et λ et μ des réels :

$$\begin{aligned} \|\lambda u + \mu v\|^2 &= (\lambda u + \mu v | \lambda u + \mu v) = \\ &= \lambda^2 + \lambda \mu ((u | v) + (v | u)) + \mu^2 = \|\mu u + \lambda v\|^2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \|b_2 - d_2\| &= \left\| \frac{1}{\|b_1\|} \frac{b_1}{\|b_1\|} - \frac{1}{\|d_1\|} \frac{d_1}{\|d_1\|} \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\|d_1\|} \frac{b_1}{\|b_1\|} - \frac{1}{\|b_1\|} \frac{d_1}{\|d_1\|} \right\| = \frac{\|b_1 - d_1\|}{\|b_1\| \|d_1\|}, \end{aligned}$$

et les deux autres égalités analogues :

$$\|c_2 - d_2\| = \frac{\|c_1 - d_1\|}{\|c_1\| \|d_1\|}, \quad \|b_2 - c_2\| = \frac{\|b_1 - c_1\|}{\|b_1\| \|c_1\|}.$$

L'inégalité triangulaire :

$$\|b_2 - d_2\| = \|b_2 - c_2 + c_2 - d_2\| \leq \|b_2 - c_2\| + \|c_2 - d_2\| ,$$

s'écrit donc :

$$\frac{\|b_1 - d_1\|}{\|b_1\| \|d_1\|} \leq \frac{\|b_1 - c_1\|}{\|b_1\| \|c_1\|} + \frac{\|c_1 - d_1\|}{\|c_1\| \|d_1\|} .$$

En multipliant cette inégalité par le produit $\|b_1\| \|c_1\| \|d_1\|$, nous obtenons l'inégalité à démontrer :

$$\|c_1\| \|b_1 - d_1\| \leq \|d_1\| \|b_1 - c_1\| + \|b_1\| \|c_1 - d_1\| .$$

b) Discutons maintenant du cas d'égalité.

Si $a = c$. Le second membre de l'inégalité est alors $2 \|a - b\| \|a - d\|$, et il n'y a égalité que si $a = c = b$ ou $a = c = d$.

De manière analogue, si $b = d$, il n'y a égalité que si $b = d = a$ ou $b = d = c$. Supposons $a \neq c$ et $b \neq d$. On vérifie facilement que si $a = b$ ou $a = d$, ou si $c = b$ ou $c = d$, il y a égalité. En conclusion, si les vecteurs (a, b, c, d) ne sont pas deux à deux distincts, il y a égalité si, et seulement si, l'une des 4 égalités $a = b$, $a = d$, $c = b$, $c = d$ (sur les 6 égalités possibles) est vérifiée.

Supposons maintenant a, b, c, d distincts. D'après le a), il y a égalité dans l'inégalité si, et seulement si, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$\|b_2 - d_2\| = \|b_2 - c_2 + c_2 - d_2\| \leq \|b_2 - c_2\| + \|c_2 - d_2\| ,$$

soit si, et seulement si (cf. Corollaire 2 du Théorème IV.3.1), les vecteurs $b_2 - c_2$ et $c_2 - d_2$ sont \mathbb{R}_+ -colinéaires. Pour la structure de \mathbb{R} -espace affine sur E , cette condition s'écrit $c_2 \in [b_2, d_2]$ (segment). Cette condition ne peut être réalisée que si les vecteurs a, b, c, d sont dans un même plan affine P . Dans ce plan P les points $a + b_2$, $a + c_2$, $a + d_2$ sont les inverses des points b , c et d dans l'inversion de pôle a et de puissance 1. Le point c_2 est sur la droite affine passant par b_2 et d_2 si, et seulement si, les points b, c, d sont sur un cercle de P passant par a , ou sur une droite passant par a ; la condition supplémentaire $c_2 \in [b_2, d_2]$ est vérifiée si, et seulement si, dans le premier cas le point c n'est pas du même côté que a par rapport à la droite passant par b et d , dans le deuxième cas a et c ne sont pas tous les deux dans le segment $[b, d]$ ou tous les deux à l'extérieur de ce segment. En conclusion, dans le cas où a, b, c, d sont distincts, il y a égalité si, et seulement si, pour la structure de \mathbb{R} -espace affine de E :

- soit les points a, b, c, d sont alignés et a et c ne sont pas tous les deux dans le segment $[b, d]$ ou tous les deux à l'extérieur de ce segment ;
- soit les points a, b, c, d sont cocycliques et $[a, b] \cup [b, c] \cup [c, d] \cup [d, a]$ est la frontière de l'enveloppe convexe de $\{a, b, c, d\}$.

le quadrilatère (a, b, c, d) est convexe.

N.B. dans ce dernier cas il s'agit de l'égalité de Ptolémée.

§ IV.4 MATRICES UNITAIRES, GROUPES UNITAIRES EN DIMENSION FINIE

Exercice 2 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } E \text{ un espace hermitien de dimension } n \geq 1. \text{ On donne } u \\ \text{et } v \text{ dans } \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E). \text{ Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :} \\ \text{(I) } \exists \omega \in \mathbf{U}(E) \mid v = \omega \circ u \\ \text{(II) } (\forall x \in E) \quad \|u(x)\| = \|v(x)\|. \blacksquare \end{array} \right.$$

L'implication $(I) \Rightarrow (II)$ est évidente. Montrons $(II) \Rightarrow (I)$. Supposons que (II) soit vraie. Il est clair que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(v)$, d'où $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$; il existe par conséquent une isométrie $\psi : (\text{Im}(u))^{\perp} \rightarrow (\text{Im}(v))^{\perp}$. Posons $S = (\text{Ker}(u))^{\perp}$, on sait que comme S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$, l'application $u_1 = u|_S^{\text{Im}(u)}$ est une bijection linéaire.

Soit ω l'application linéaire telle que pour tout $z \in (\text{Im}(u))^{\perp}$, $\omega(z) = \psi(z)$, et pour tout $y \in \text{Im}(u)$, $\omega(y) = v(u_1^{-1}(y))$. Si $x \in (\text{Ker}(u))^{\perp}$, $\omega(u(x)) = \omega(u_1(x)) = v(x)$, et si $x \in \text{Ker}(u) = \text{Ker}(v)$, $\omega(u(x)) = 0 = v(x)$; on a donc $v = \omega \circ u$.

Vérifions maintenant que ω est isométrique. Si $y \in \text{Im}(u)$ il existe $x \in (\text{Ker}(u))^{\perp}$ tel que $y = u(x) = u_1(x)$; on a donc $\omega(y) = \omega(u_1(x)) = v(x)$, et par conséquent $\|\omega(y)\| = \|v(x)\| = \|u(x)\| = \|y\|$. Si $z \in (\text{Im}(u))^{\perp}$, $\|\omega(z)\| = \|\psi(z)\| = \|z\|$ puisque ψ est isométrique. On remarque aussi que pour tout $y \in \text{Im}(u)$ et tout $z \in (\text{Im}(u))^{\perp}$, $(y \mid z) = 0$ et $(\omega(y) \mid \omega(z)) = 0$, puisque $\omega(y) \in \text{Im}(v)$ et $\omega(z) \in (\text{Im}(v))^{\perp}$. Pour tout $y \in \text{Im}(u)$ et tout $z \in (\text{Im}(u))^{\perp}$ on a donc :

$$\begin{aligned} \|\omega(y+z)\|^2 &= \|\omega(y) + \omega(z)\|^2 = \|\omega(y)\|^2 + \|\omega(z)\|^2 = \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2. \end{aligned}$$

L'application ω est donc bien une isométrie. La propriété (II) est donc vraie si la propriété (I) l'est, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } E \text{ un espace hermitien de dimension } n \geq 1. \\ \text{a) Soit } G \text{ un sous-groupe compact de } \text{GL}_{\mathbb{C}}(E). \text{ Si } u \in G, \\ \text{montrer que toutes ses valeurs propres sont dans } \mathbb{U} \end{array} \right.$$

que tout élément de G est diagonalisable.

b) Soit alors $u \in \mathbf{U}(E)$. Montrer que u est diagonalisable, puis, que les sous- \mathbb{C} -ev propres de u sont deux à deux orthogonaux (voir aussi § IV.5). Vérifier que $\mathbf{U}(E)$ est l'ensemble des

$$\bigoplus_{k=1}^p \lambda_k \text{Id}_{E_k}, \text{ avec } \bigoplus_{k=1}^p E_k = E \text{ et } (\forall k) \lambda_k \in \mathbb{U}. \blacksquare$$

a) Le groupe G étant compact, il est borné ; soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in G$, $\|v\| \leq M$. Soit λ une valeur propre de u , et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$; on peut supposer $\|x\| = 1$. On a $|\lambda| = \|u(x)\| \leq \|u\| \leq M$. Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}$, λ^k est une valeur propre de $u^k \in G$, on en déduit de manière analogue :

$$(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad |\lambda|^k \leq M.$$

Ce n'est possible que si $|\lambda| = 1$, c'est-à-dire si $\lambda \in \mathbb{U}$.

Soit $u \in G$; on sait qu'il existe un endomorphisme diagonalisable u_1 qui a le même polynôme caractéristique que u , et un endomorphisme nilpotent v qui commute avec u_1 , tels que $u = u_1 + v$. Soit $x \in \text{Ker}(v^2)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme u_1 et v commutent, on a l'égalité :

$$(1) \quad u^k(x) = (u_1 + v)^k(x) = u_1^k(x) + k u_1^{k-1}(v(x)) = u_1^{k-1}(u_1(x) + k v(x)).$$

L'endomorphisme u_1 est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont dans \mathbb{U} ; il existe donc une base \mathcal{B} telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1)$ soit de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \in \mathbb{U}$. Soit h la forme hermitienne dont la matrice dans la base \mathcal{B} est la matrice I_n ; l'endomorphisme u_1 est une isométrie pour h ; notons $\|\cdot\|_1$ la norme associée à h et $\|\cdot\|_1$ la norme associée dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$; soit aussi $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $v \in G$, $\|v\|_1 \leq M_1$. D'après l'égalité (1), pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a l'inégalité :

$$M_1 \|x\|_1 \geq \|u^k(x)\|_1 \geq k \|v(x)\|_1 - \|x\|_1,$$

ce qui n'est possible que si $v(x) = 0$. On a donc $\text{Ker}(v^2) = \text{Ker}(v)$, et comme v est nilpotent, $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(v^2) = \dots = E$, c'est-à-dire $v = 0$. L'endomorphisme u est donc diagonalisable.

b) D'après le Corollaire 1 du Théorème IV.4.3, le groupe $\mathbf{U}(E)$ est compact ; ses éléments sont donc diagonalisables (cf. a)). Soit $u \in \mathbf{U}(E)$, montrons que ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Soient λ et μ deux valeurs propres de u , distinctes. Si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, alors :

$$(x | y) = (u(x) | u(y)) = (\lambda x | \mu y) = \bar{\lambda} \mu (x | y).$$

Comme $\lambda \in \mathbb{U}$, $\bar{\lambda}\mu = \mu/\lambda \neq 1$, donc $(x | y) = 0$. Nous en déduisons que les espaces propres $E_{\lambda,u}$ et $E_{\mu,u}$ sont orthogonaux, ce qu'il fallait démontrer.

L'espace E est donc somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u . Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ est l'ensemble des valeurs propres de u distinctes, en notant E_k l'espace propre relatif à la valeur propre λ_k , pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k \quad \text{et} \quad u = \bigoplus_{k=1}^p \lambda_k \text{Id}_{E_k}.$$

Inversement, si E est somme directe orthogonale de la famille $(E_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, et que $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ est une famille d'éléments de \mathbb{U} , d'après la proposition IV.4.3, l'endomorphisme $u = \bigoplus_{k=1}^p \lambda_k \text{Id}_{E_k}$ est isométrique.

Le groupe $\mathbf{U}(E)$ est donc bien l'ensemble de ces endomorphismes.

Exercice 4 :

|| Sur un \mathbb{C} -ev E de dimension finie $n \geq 1$, trouver les couples de structures hermitiennes pour lesquelles le groupe unitaire associé est le même. ■

Soient h_1 et h_2 deux formes hermitiennes définies positives sur E telles que les isométries pour h_1 soient les mêmes que les isométries pour h_2 . Montrons que si x et y sont des éléments de E tels que $h_1(x, y) = 0$, alors $h_2(x, y) = 0$; on peut supposer $x \neq 0$. Soit S la symétrie orthogonale pour h_1 par rapport à la droite $\mathbb{C}x$; c'est une isométrie pour h_1 , donc aussi pour h_2 . Nous en déduisons :

$$h_2(x, y) = h_2(S(x), S(y)) = h_2(x, -y),$$

donc $h_2(x, y) = 0$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale pour h_1 ; d'après ce qui précède, c'est une base orthogonale pour h_2 . De plus pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, les vecteurs $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux pour h_1 , donc aussi pour h_2 , et par conséquent :

$$h_2(e_i - e_j, e_i + e_j) = h_2(e_i, e_i) - h_2(e_j, e_j) = 0.$$

La matrice de h_2 dans la base (e_1, \dots, e_n) est de la forme λI_n , où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, puisque $\lambda = h_2(e_1, e_1) > 0$. Nous en déduisons $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad h_2 = \lambda h_1$.

Réciproquement si h est une forme hermitienne définie positive, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la forme λh est aussi hermitienne définie positive, et les groupes $\mathbf{U}_h(E)$ et $\mathbf{U}_{\lambda h}(E)$ sont identiques.

Exercice 10 :

Soit n un entier ≥ 2 . On donne une fonction $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ continue, et on considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad Y'(t) = A(t) \cdot Y(t)$$

où la fonction inconnue Y est à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (voir Tome 3 § IX.5). On munit le \mathbb{C} -ev $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de sa structure hermitienne canonique. On note \mathcal{S} le \mathbb{C} -ev des \mathbb{R}_+ -solutions de (\mathcal{E}) . On sait que \mathcal{S} est de dimension n . On suppose que pour tout $X \in \mathcal{S}$, l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ a une limite quand t tend vers $+\infty$, limite notée $L(X)$. Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

$$(I) \quad \exists X \in \mathcal{S} \setminus \{0\} \mid L(X) = 0$$

$$(II) \quad \operatorname{Re} \left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(u)) \, du \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty. \blacksquare$$

Pour tout $X \in \mathcal{S}$, on a $(X(t) \mid X(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} L^2(X)$. En utilisant la formule de restitution (égalité (4) du § IV.1), on voit que pour tout $(X, Y) \in \mathcal{S}^2$, la fonction $t \mapsto (X(t) \mid Y(t))$, définie sur \mathbb{R}_+ , admet une limite quand t tend vers $+\infty$; notons $h(X, Y)$ cette limite. Il est clair que l'application $h : \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme hermitienne positive; la propriété (I) est équivalente à la propriété :

(III) h n'est pas définie positive,

ou encore, puisque h est positive, à la propriété :

(IV) h est dégénérée.

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, et $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ la base de \mathcal{S} telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $X_k(0) = \varepsilon_k$. D'après le § IV.3 et l'exercice 1 du IV.3, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$G(X_1(t), \dots, X_n(t)) = |\det_{\beta}(X_1(t), \dots, X_n(t))|^2.$$

D'après la formule d'Abel (Tome 3, Théorème IX.5.3), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ l'égalité :

$$\det_{\beta}(X_1(t), \dots, X_n(t)) = \exp \left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(\tau)) \, d\tau \right),$$

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} G(X_1(t), \dots, X_n(t)) &= \left| \exp \left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(\tau)) \, d\tau \right) \right|^2 = \\ &= \exp \left(2 \operatorname{Re} \left(\int_0^t \operatorname{Tr}(A(\tau)) \, d\tau \right) \right). \end{aligned}$$

On voit que :

$$\det \left([(X_i(t) \mid X_j(t))]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \det \left([h(X_i, X_j)]_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \right) ,$$

ce qui s'écrit :

$$G(X_1(t), \dots, X_n(t)) = \exp \left(2 \operatorname{Re} \left(\int_0^t \operatorname{Tr} (A(\tau)) \, d\tau \right) \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Discr}_{\mathcal{B}}(h) .$$

Nous en déduisons que la fonction :

$$t \mapsto \operatorname{Re} \left(\int_0^t \operatorname{Tr} (A(\tau)) \, d\tau \right) ,$$

a toujours une limite finie ou $-\infty$ quand t tend vers $+\infty$, et que cette limite est $-\infty$ si, et seulement si, h est dégénérée ; ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 14 :

Soit E un \mathbb{C} -ev de dimension $n \geq 1$. A toute base ordonnée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , on associe le sous-groupe $T_{\mathcal{B}}$ du groupe $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, formé des $u \in \operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit de la forme $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{U}^n$. Les groupes $T_{\mathcal{B}}$ ainsi obtenus en faisant varier \mathcal{B} seront appelés les n -tores de E .

a) Vérifier que tout n -tore de E est un sous-groupe abélien compact de $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, et que deux n -tores sont conjugués dans $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

b) Soit \mathcal{U} une partie non vide de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables et deux à deux permutables. Montrer qu'il existe une base de E qui diagonalise chaque $u \in \mathcal{U}$.

c) Soit G un sous-groupe compact et abélien de $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$. En utilisant le résultat b) ci-dessus et les résultats de l'exercice 3, montrer que G est contenu dans un n -tore de E . Quels sont les sous-groupes compacts et abéliens de $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ maximaux pour l'inclusion ?

d) On suppose maintenant E hermitien. Déterminer les sous-groupes abéliens de $\mathbf{U}(E)$. Quels sont les sous-groupes abéliens finis de $\mathbf{U}(E)$?

e) On revient aux hypothèses du début. Un sous-groupe G de $\operatorname{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ sera dit *pré-unitaire* ssi il existe une str

|| tienne de E telle que G soit égal au groupe unitaire de cette structure.

|| Trouver tous les sous-groupes pré-unitaires de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ contenant un n -tore donné de E . ■

a) L'application qui, à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{U}^n$ fait correspondre l'élément de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, est une application continue, et en même temps un homomorphisme injectif de groupes, du groupe \mathbb{U}^n muni de sa structure de groupe produit cartésien, vers le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ muni de la composition ; son image, qui est par définition le sous-groupe $T_{\mathcal{B}}$, est donc un sous-groupe abélien du groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$; il est compact car le groupe \mathbb{U}^n est compact.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases ordonnées de E . Il existe un endomorphisme $f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = e'_k$. Montrons que la conjugaison $u \mapsto f \circ u \circ f^{-1}$, transforme le groupe $T_{\mathcal{B}}$ en le groupe $T_{\mathcal{B}'}$. En effet, si $u \in T_{\mathcal{B}}$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{U}$ tel que :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad u(e_k) = \lambda_k e_k ;$$

d'où :

$$(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \quad f \circ u \circ f^{-1}(e'_k) = \lambda_k e'_k .$$

Réciproquement, si $f \circ u \circ f^{-1} \in T_{\mathcal{B}'}$, on démontre de manière analogue $u \in T_{\mathcal{B}}$. Les sous-groupes $T_{\mathcal{B}}$ et $T_{\mathcal{B}'}$ sont donc conjugués dans le groupe $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

b) Ce résultat a été démontré dans la résolution de l'exercice 4 du Tome 1 § XV.5.

c) Si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$, d'après l'exercice 3, ses éléments sont tous diagonalisables et les valeurs propres d'un élément de G sont dans \mathbb{U} ; si on suppose de plus que G est abélien, d'après le b), il existe une base \mathcal{B} telle que la matrice de chaque $u \in G$ dans la base \mathcal{B} soit diagonale, les coefficients diagonaux étant toujours dans \mathbb{U} . On voit donc que le sous-groupe G est un sous-groupe du n -tore $T_{\mathcal{B}}$.

Si G est un sous-groupe compact et abélien, il est inclus dans l'un des n -tores $T_{\mathcal{B}}$, où \mathcal{B} est une base ordonnée de E ; il ne peut donc être maximal que s'il est l'un des ces n -tores.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base ordonnée, montrons que le sous-groupe $T_{\mathcal{B}}$ un sous-groupe compact et abélien maximal (c'est bien un sous-groupe compact et abélien d'après a)). Soit G un sous-groupe compact et a

$T_{\mathcal{B}} \subset G$. Considérons un élément $v \in T_{\mathcal{B}}$ dont la matrice dans \mathcal{B} est de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont n éléments de \mathbb{U} distincts. Les espaces propres de v sont les droites $\mathbb{C}e_k$, où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $u \in G$, u et v commutent, donc les sous-espaces $\mathbb{C}e_k$, où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont stables par u . L'endomorphisme u est par conséquent diagonalisable dans la base \mathcal{B} , et comme ses valeurs propres sont dans \mathbb{U} (cf. exercice 3), on a $u \in T_{\mathcal{B}}$. Nous en déduisons $G \subset T_{\mathcal{B}}$, d'où $G = T_{\mathcal{B}}$. Le sous-groupe $T_{\mathcal{B}}$ est donc bien compact et abélien maximal.

En conclusion, les n -tores sont les sous-groupes compacts et abéliens maximaux.

d) Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, que si E est un espace hermitien de dimension n , et \mathcal{U} un ensemble d'isométries deux à deux permutables de E , il existe une base orthonormale de E qui diagonalise tous les éléments de \mathcal{U} . Cette propriété est vraie si $n = 1$. Supposons cette propriété vraie pour l'entier n avec $n \geq 1$. Soit E un espace hermitien de dimension $n + 1$, et $\mathcal{U} \subset \mathbf{U}(E)$ dont les éléments sont deux à deux permutables. Les éléments de \mathcal{U} ont un vecteur propre commun x que nous pouvons supposer de norme 1 (cf. §IV.3 exercice 3b)); comme ce sont des isométries, l'hyperplan $H = \mathbb{C}x^\perp$ est stable par tous les éléments de \mathcal{U} ; d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à l'espace hermitien H , il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de H qui diagonalise toutes les isométries induites sur H par les $u \in \mathcal{U}$. Il est clair que la famille (e_1, \dots, e_n, x) est une base orthonormale de E qui diagonalise tous les éléments de \mathcal{U} . La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$. Cela termine la démonstration par récurrence.

Nous en déduisons que si G est un sous-groupe abélien de $\mathbf{U}(E)$, il existe une base orthonormale de E telle que $G \subset T_{\mathcal{B}}$. Réciproquement, si \mathcal{B} est une base orthonormale de E , il est clair que $T_{\mathcal{B}} \subset \mathbf{U}(E)$. Les sous-groupes abéliens de $\mathbf{U}(E)$ sont donc les sous-groupes des n -tores $T_{\mathcal{B}}$, où \mathcal{B} est une base orthonormale.

Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathbf{U}(E)$; d'après ce qui précède, il existe une base orthonormale \mathcal{B} de l'espace hermitien E , telle que $G \subset T_{\mathcal{B}}$. Soit p l'exposant de ce groupe abélien fini; les valeurs propres des éléments de G sont toutes dans le sous-groupe $\mathbb{U}_p = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^p = 1\}$ de \mathbb{U} . Inversement, soit \mathcal{B} une base orthonormale de E , et $p \in \mathbb{N}^*$; considérons l'ensemble $T_{\mathcal{B},p}$ des isométries dont la matrice dans \mathcal{B} est diagonale, et dont les valeurs propres sont dans \mathbb{U}_p ; il est clair que $T_{\mathcal{B},p}$ est un sous-groupe abélien fini de $\mathbf{U}(E)$, isomorphe au groupe \mathbb{U}_p^n . Les sous-groupes abéliens finis de $\mathbf{U}(E)$ sont donc les sous-groupes des groupes finis $T_{\mathcal{B},p}$, où \mathcal{B} est une base orthonormale de E et $p \in \mathbb{N}^*$.

e) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base ordonnée de E . Le sous-groupe G de $\text{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ est un sous-groupe pré-unitaire contenant le n -tore $T_{\mathcal{B}}$ si, et seulement si, il existe sur E une forme hermitienne définie positive h telle que $T_{\mathcal{B}} \subset G = \mathbf{O}_h(E)$. Si c'est le cas, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, pour tout $\lambda_i \in \mathbb{U}$ et tout $\lambda_j \in \mathbb{U}$:

$$h(\lambda_i e_i, \lambda_j e_j) = \overline{\lambda_i} \lambda_j h(e_i, e_j) = h(e_i, e_j) .$$

En particulier, en prenant $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a $\overline{\lambda_i} \lambda_j = \lambda_j / \lambda_i \neq 1$, et par conséquent $h(e_i, e_j) = 0$; la matrice de h dans la base \mathcal{B} est donc nécessairement diagonale de coefficients diagonaux réels > 0 . Supposons réciproquement que la matrice de h dans la base \mathcal{B} est diagonale à coefficients diagonaux réels > 0 ; la matrice dans \mathcal{B} de tout élément de $T_{\mathcal{B}}$ commute alors avec la matrice de h dans la base \mathcal{B} , et par conséquent, tout élément de $T_{\mathcal{B}}$ est isométrique pour h (cf. Théorème IV.4.3).

En résumé, les sous-groupes pré-unitaires contenant le n -tore $T_{\mathcal{B}}$, sont les sous-groupes $\mathbf{O}_h(E)$, où h est une forme hermitienne définie positive dont la matrice dans \mathcal{B} est diagonale, soit encore pour laquelle \mathcal{B} est une base orthogonale.

§ IV.5 ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME

Exercice 3 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } E \text{ un } \mathbb{C}\text{-espace hermitien de dimension } n \geq 1 \text{ et } u \in \\ \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E) . \\ a) \text{ Prouver : } u = u^* \Leftrightarrow (\forall x \in E) \quad (u(x) \mid x) \in \mathbb{R} . \\ b) \text{ On suppose } u \text{ autoadjoint défini positif. Prouver :} \\ (\forall x \in E) \quad \|u(x)\|^4 \leq (x \mid u(x)) \times (u(x) \mid u^2(x)) . \blacksquare \end{array} \right.$$

a) Si u est autoadjoint, alors pour tout $x \in E$:

$$(u(x) \mid x) = (x \mid u^*(x)) = (x \mid u(x)) = \overline{(u(x) \mid x)} ,$$

donc $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}$.

Supposons réciproquement, que pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x) \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$(u(x+y) \mid x+y) - (u(x) \mid x) - (u(y) \mid y) = (u(x) \mid y) + (u(y) \mid x)$$

et par conséquent :

$$(1) \quad (u(x) | y) + (u(y) | x) = \overline{(u(x) | y)} + \overline{(u(y) | x)} = (y | u(x)) + (x | u(y)) .$$

En remplaçant y par iy dans cette égalité on obtient :

$$(u(x) | iy) + (u(iy) | x) = (iy | u(x)) + (x | u(iy)) ,$$

soit encore :

$$(2) \quad i \left((u(x) | y) - (u(y) | x) \right) = i \left(- (y | u(x)) + (x | u(y)) \right) .$$

En divisant l'égalité (2) par i et en ajoutant à l'égalité (1), on obtient :

$$2 (u(x) | y) = 2 (x | u(y)) ,$$

pour tout $(x, y) \in E^2$. L'endomorphisme u est donc autoadjoint, ce qu'il fallait démontrer.

b) L'endomorphisme u étant autoadjoint positif, il existe une base orthonormale de E , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, dans laquelle la matrice de u est de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $x \in E$, posons $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On a :

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k \quad \text{d'où} \quad \|u(x)\|^4 = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |x_k|^2 \right)^2 ,$$

et :

$$(u(x) | x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2 , \quad (u(x) | u^2(x)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^3 |x_k|^2 .$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ posons $a_k = \sqrt{\lambda_k} |x_k|$ et $b_k = \lambda_k a_k$; on constate $a_k^2 = \lambda_k |x_k|^2$, $b_k^2 = \lambda_k^3 |x_k|^2$, et $a_k b_k = \lambda_k^2 |x_k|^2$. En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |x_k|^2 \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^3 |x_k|^2 \right) ,$$

d'où :

$$\|u(x)\|^4 \leq (x | u(x)) \times (u(x) | u^2(x)) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 14 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne $A \in \mathcal{H}er(n, \mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{H}er(n, \mathbb{C})$ toutes les deux définies positives. Démontrer :

$$(\det(A))^{1/n} + (\det(B))^{1/n} \leq (\det(A+B))^{1/n},$$

et préciser quand on a l'égalité. ■

Comme A est hermitienne définie positive, et que B est hermitienne, il existe une matrice $P \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $P^*AP = I_n$ et $P^*BP = \Delta$, la matrice Δ étant de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, puisque B est définie positive. On a donc :

$$\det(A) = |\det P|^{-2} \quad ; \quad \det(B) = |\det P|^{-2} \prod_{k=1}^n \lambda_k,$$

et :

$$\det(A+B) = |\det P|^{-2} \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k).$$

Nous sommes donc ramenés à démontrer que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k) \right)^{1/n},$$

ou encore, en posant $a_k = \text{Log}(\lambda_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, à démontrer que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$1 + \exp\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + \exp(a_k)) \right)^{1/n},$$

soit enfin :

$$(1) \quad \text{Log}\left(1 + \exp\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)\right) \leq \frac{\text{Log}(1 + e^{a_1}) + \dots + \text{Log}(1 + e^{a_n})}{n}.$$

La fonction $t \mapsto \text{Log}(1 + e^t)$ a pour dérivée la fonction :

$$t \mapsto \frac{e^t}{1 + e^t} = \frac{1}{e^{-t} + 1},$$

qui est visiblement strictement croissante. La fonction $t \mapsto \text{Log}(1 + e^t)$ est donc strictement convexe, ce qui prouve que l'inégalité (1) est toujours vérifiée. La fonction $t \mapsto \text{Log}(1 + e^t)$ étant strictement convexe, il y a égalité dans l'inégalité (1) si, et seulement si, $a_1 = a_2 = \dots$:

et seulement si, la matrice Δ est de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc si, et seulement si, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad B = \lambda A$.

Exercice 15 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H \in \mathcal{H}er(n, \mathbb{C})$, H étant positive. On note \mathcal{H} l'ensemble des $A \in \mathcal{H}er(n, \mathbb{C})$ définies positives de déterminant ≥ 1 .

a) Démontrer : $\inf_{A \in \mathcal{H}} (\text{Tr}(AH)) = n (\det(H))^{1/n}$.

b) Si H est définie positive, prouver :

$$\min_{A \in \mathcal{H}} (\text{Tr}(AH)) = n (\det(H))^{1/n}.$$

Cela reste-t-il vrai si H n'est plus définie positive ? ■

Le \mathbb{C} -espace \mathbb{C}^n sera implicitement muni de sa structure hermitienne canonique.

1) Soit A une matrice hermitienne définie positive. On note a l'endomorphisme autoadjoint de \mathbb{C}^n de matrice A dans la base canonique, et h l'endomorphisme autoadjoint de matrice H . Comme a est positif, il existe un et un seul endomorphisme autoadjoint positif b tel que $a = b^2$ (cf. exercice 9). L'endomorphisme h étant autoadjoint positif, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de h est de la forme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AH) &= \sum_{k=1}^n (e_k | a(h(e_k))) = \sum_{k=1}^n (a(e_k) | h(e_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (b^2(e_k) | e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k (b(e_k) | b(e_k)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \|b(e_k)\|^2. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \|b(e_k)\|^2 \geq n \left(\prod_{k=1}^n \lambda_k \|b(e_k)\|^2 \right)^{1/n},$$

d'où :

$$\text{Tr}(AH) \geq n (\det(h))^{1/n} \left(\prod_{k=1}^n \|b(e_k)\|^2 \right)^{1/n}.$$

Et d'après l'inégalité de Hadamard (§ IV.3 exercice 2) :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AH) &\geq n (\det(h))^{1/n} (G(b(e_1), \dots, b(e_n)))^{1/n} = \\ &= n (\det(h))^{1/n} (\det(b))^{2/n} = n (\det(H))^{1/n} (\det \end{aligned}$$

En particulier, si de plus $\det(A) \geq 1$, alors :

$$\operatorname{Tr}(AH) \geq n(\det(H))^{1/n}.$$

2) Supposons H définie positive, alors H^{-1} est aussi une matrice hermitienne définie positive (diagonalisation de h dans une base orthonormale). Prenons $A = (\det(H))^{1/n} H^{-1}$, A est définie positive et $\det(A) = 1$. On trouve :

$$\operatorname{Tr}(AH) = (\det(H))^{1/n} \operatorname{Tr}(I_n) = n(\det(H))^{1/n}.$$

Nous en déduisons que dans le cas où H est définie positive :

$$\inf_{A \in \mathcal{H}} (\operatorname{Tr}(AH)) = \min_{A \in \mathcal{H}} (\operatorname{Tr}(AH)) = n(\det(H))^{1/n}.$$

3) Supposons maintenant que H est singulière. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de H est diagonale de la forme $\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$, et on peut supposer $\lambda_1 = 0$. Pour a de matrice $\operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ dans la base \mathcal{B} , où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{*n}$, on a :

$$\operatorname{Tr}(AH) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k = \sum_{k=2}^n a_k \lambda_k.$$

On peut donc, en choisissant $a_1 = 1/(a_2 \dots a_n)$ trouver des éléments $A \in \mathcal{H}$ tels que $\operatorname{Tr}(AH)$ soit aussi petit qu'on veut (≥ 0). On a donc dans ce cas :

$$0 = \inf_{A \in \mathcal{H}} (\operatorname{Tr}(AH)) = n(\det(H))^{1/n}.$$

4) Supposons de nouveau H singulière, et reprenons les notations du 1). Si :

$$0 = \operatorname{Tr}(AH) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \|b(e_k)\|^2,$$

comme $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \lambda_k \geq 0$, on a $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \lambda_k \|b(e_k)\|^2 = 0$; et comme b est inversible, on en déduit $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \lambda_k = 0$; d'où $H = 0$.

En conclusion, l'égalité :

$$\inf_{A \in \mathcal{H}} (\operatorname{Tr}(AH)) = n(\det(H))^{1/n},$$

est toujours vraie, mais la borne inférieure est la plus petite valeur possible si, et seulement si, soit H est définie et positive, soit $H = 0$.

Exercice 17 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On donne $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois *symétrique* et *unitaire*. On pose $D = U + iV$, avec U et V dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ telle que $D = \exp(iS)$. Montrer : $U^2 + V^2 = I_n$ et $UV = VU$. En déduire $\exists Q \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, $\exists \Delta_s = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists \Delta_t = \text{Diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = Q \Delta_s Q^{-1}$ et $V = Q \Delta_t Q^{-1}$.

Prouver l'existence de $\theta_1, \dots, \theta_n$ réels tels que $s_k = \cos \theta_k$ et $t_k = \sin \theta_k$ ($1 \leq k \leq n$). En déduire que $S = Q \Delta_\theta Q^{-1}$ convient, avec $\Delta_\theta = \text{Diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

b) Soit $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$. Prouver qu'il existe $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ telle que ${}^t U U = \exp(2iS)$. Montrer que $Q = U \exp(-iS)$ est unitaire et vérifie ${}^t Q Q = I_n$. En déduire $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, puis $U = Q \exp(iS)$, avec $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ et $S \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$.

Pour U donné, (Q, S) est-il unique ? ■

a) Par hypothèse ${}^t D = D$ et ${}^t \overline{D} = D^{-1}$, d'où $\overline{D} D = D \overline{D} = I_n$. Les matrices \overline{D} et D étant symétriques et permutables, il est clair que les matrices $U = (D + \overline{D})/2$ et $V = (D - \overline{D})/(2i)$ sont symétriques et permutables, et :

$$U^2 + V^2 = (U + iV)(U - iV) = D \overline{D} = I_n.$$

Soient u et v les endomorphismes symétriques du \mathbb{R} -espace euclidien orienté \mathbb{R}^n canonique dont les matrices dans la base canonique sont U et V respectivement. Ces endomorphismes étant symétriques et permutant entre eux, il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que les matrices dans \mathcal{B} de u et de v soient diagonales (cf. § III.4 exercice 10). On peut supposer que la base \mathcal{B} est directe, puisqu'on peut remplacer l'un des vecteurs de la base par son opposé. Notons Q la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} et posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta_s = \text{Diag}(s_1, \dots, s_n)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \Delta_t = \text{Diag}(t_1, \dots, t_n)$. Comme la base \mathcal{B} est orthonormale directe, on a $Q \in \mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$, et d'après les formules de changement de bases : $Q \Delta_s Q^{-1} = U$ et $Q \Delta_t Q^{-1} = V$. Puisque $U^2 + V^2 = I_n$, on a $\Delta_s^2 + \Delta_t^2 = I_n$, et par conséquent pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_k^2 + t_k^2 = 1$; pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on peut trouver un réel θ_k tel que $s_k = \cos(\theta_k)$ et $\sin(\theta_k) = t_k$, d'où $e^{i\theta_k} = s_k + i t_k$. Posons $\Delta_\theta = \text{Diag}(\theta_1, \dots,$

et $S = Q \Delta_\theta Q^{-1}$; on constate :

$$\begin{aligned} \exp(iS) &= Q \exp(i\Delta_\theta) Q^{-1} = Q \operatorname{Diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) Q^{-1} = \\ &= Q(\Delta_s + i\Delta_t) Q^{-1} = U + iV = D. \end{aligned}$$

La matrice S est bien symétrique, puisque $S = Q \Delta_\theta Q^{-1} = Q \Delta_\theta {}^tQ$.

b) Soit $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, on vérifie facilement ${}^tU \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$; la matrice ${}^tU U$ est par conséquent à la fois symétrique et unitaire. D'après le a), il existe une matrice $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ telle que ${}^tU U = \exp(2iS)$. Soit $Q = U \exp(-iS)$; on remarque que comme S est symétrique et réelle ${}^t \overline{\exp(-iS)} = \exp(iS)$. On en déduit :

$$Q^* = {}^t\overline{Q} = \exp(iS) U^* \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \exp(iS) U^{-1} = Q^*,$$

donc $Q \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$. On remarque aussi :

$${}^tQ Q = \exp(-iS) {}^tU U \exp(-iS) = \exp(-iS) \exp(2iS) \exp(-iS) = I_n.$$

Nous en déduisons ${}^tQ = Q^{-1} = {}^t\overline{Q}$, d'où finalement $\overline{Q} = Q$, c'est-à-dire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et plus précisément $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$.

En conclusion, pour toute matrice $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ il existe $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ telles que $U = Q \exp(iS)$.

Examinons le problème de l'unicité. Si $U = Q \exp(iS)$, où $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ et $Q \in \mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, alors ${}^tU = \exp(iS) {}^tQ$, donc ${}^tU U = \exp(2iS)$.

Réciproquement, si $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$ est telle que ${}^tU U = \exp(2iS)$, on a vu ci-dessus que la matrice $Q = U \exp(-iS)$ est dans $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$, et que $U = Q \exp(iS)$. Le couple (Q, S) vérifie donc les conditions si, et seulement si, $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$, ${}^tU U = \exp(2iS)$, et $Q = U \exp(-iS)$. L'application $S \mapsto \exp(2iS)$ n'étant pas injective, il n'y a pas unicité de la décomposition.

Exercice 18 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On donne } C \text{ et } D \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ telles que} \\ C^* C = D^2, \text{ avec } D \in \mathcal{H}_{\text{er}}(n, \mathbb{C}). \text{ Démontrer :} \\ \exists U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) \mid C = U D. \blacksquare \end{array} \right.$$

Soient c et d les endomorphismes du \mathbb{C} -ev hermitien \mathbb{C}^n dont les matrices dans la base canonique sont respectivement C et D ; l'endomorphisme d est autoadjoint et $c^* \circ c = d^2$. Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a :

$$\begin{aligned} \|c(x)\|^2 &= (c(x) \mid c(x)) = (x \mid c^*(c(x))) = \\ &= (x \mid d^2(x)) = (d^*(x) \mid d(x)) = \|d(x)\|^2. \end{aligned}$$

D'après l'exercice 2 du § IV.4, il existe $\omega \in \mathbf{U}(\mathbb{C}^n)$ tel que $c = \omega \circ d$. Nous déduisons qu'il existe $U \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ telle que $C = U D$, ce qu'il fallait démontrer.

Application à la décomposition polaire

Soit $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$; l'endomorphisme $u^* \circ u$ est autoadjoint positif et il existe un (unique) endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u^* \circ u$ (cf. Exercice 9). D'après ce qui a été démontré plus haut, il existe un élément $\omega \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u = \omega \circ v$.

Il existe de même un endomorphisme autoadjoint positif v' , et $\omega' \in \mathbf{U}(E)$ tels que $u^* = \omega' \circ v'$, d'où $u = v' \circ \omega'^*$.

On démontre ainsi l'existence de décompositions polaires de tout endomorphisme u .

Exercice 23 :

Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, \mathcal{G}_k désigne l'ensemble des sous- \mathbb{C} -ev de dimension k de E . On note S la sphère unité de E . Pour tout $u \in \text{Autoad}(E)$, on désigne par $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$ l'unique suite complète décroissante des valeurs propres de u .

a) Prouver $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\lambda_k(u) = \max_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\min_{x \in L \cap S} (u(x) | x) \right) = \min_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \left(\max_{x \in L \cap S} (u(x) | x) \right)$$

(égalité de Courant-Fischer).

b) Soit F un hyperplan de E et $v = f \circ u|_F$, où f désigne la projection orthogonale sur F (si h est la forme hermitienne associée à u , on vérifiera que v est l'endomorphisme associé à $h|_{F \times F}$). Montrer que $\lambda_1(u) \geq \lambda_1(v) \geq \lambda_2(u) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(u) \geq \lambda_{n-1}(v) \geq \lambda_n(u)$.

c) Soit $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $u = \alpha^* \circ \alpha$. On note $\chi_{\alpha}(X) = \prod_{j=1}^n (\lambda_j - X)$ et $\mu_k = \lambda_k(u)$ ($1 \leq k \leq n$). Soit ρ_1, \dots, ρ_p des éléments de $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tous distincts. Dédurre de b) que $|\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p|^2 \leq \mu_1 \mu_2 \dots \mu_p$. ■

a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est $\text{Diag}(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, où (:

\mathbb{C}^n , on a :

$$(1) \quad (u(x) \mid x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(u) |x_i|^2 .$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $u_k = u - \lambda_k(u) \text{Id}_E$. En reprenant les notations précédentes on a pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$(u_k(x) \mid x) = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i(u) - \lambda_k(u)) |x_i|^2 - \sum_{i=k+1}^n (\lambda_k(u) - \lambda_i(u)) |x_i|^2 .$$

Comme $\lambda_1(u) \geq \dots \geq \lambda_n(u)$, on voit que si (p, q) est la signature de u_k , $p < k$ et $q < n - k$. Si $L \in \mathcal{G}_k$, u_k ne peut pas être défini positif sur L , donc $\exists x \in L \setminus \{0\} \quad (u_k(x) \mid x) \leq 0$, d'où :

$$\text{Min}_{x \in L \cap S} (u_k(x) \mid x) \leq 0 .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $L \in \mathcal{G}_k$, nous en déduisons :

$$\text{Max}_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\text{Min}_{x \in L \cap S} (u_k(x) \mid x) \right) \leq 0 .$$

Or si $L = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, u_k est positif sur L , et comme $e_k \in L \cap S$ et $(u_k(e_k) \mid e_k) = 0$, on a :

$$\text{Min}_{x \in L \cap S} (u_k(x) \mid x) = 0 .$$

Nous en déduisons finalement :

$$\text{Max}_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\text{Min}_{x \in L \cap S} (u_k(x) \mid x) \right) = 0 .$$

Enfin, comme pour tout $x \in S$ on a $(u_k(x) \mid x) = (u(x) \mid x) - \lambda_k(u)$, nous en déduisons :

$$(1) \quad \text{Max}_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\text{Min}_{x \in L \cap S} (u(x) \mid x) \right) = \lambda_k(u) .$$

Pour démontrer l'autre égalité, on peut utiliser $-u$. On remarque que les valeurs propres de $-u$ sont $-\lambda_1(u) \leq -\lambda_2(u) \leq \dots \leq -\lambda_n(u)$, de telle sorte que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_{n-k+1}(-u) = -\lambda_k(u)$. L'égalité (1) appliquée à $-u$, et en remplaçant k par $n - k + 1$ devient :

$$\text{Max}_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \left(\text{Min}_{x \in L \cap S} (-u(x) \mid x) \right) = -\lambda_k(u) ,$$

d'où :

$$(2) \quad \min_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \left(\max_{x \in L \cap S} (u(x) | x) \right) = \lambda_k(u) .$$

b) Soit g le projecteur orthogonal sur F^\perp . On remarque que pour tout $(x, y) \in F^2$, $(u(x) | y) = (f(u(x)) | y) + (g(u(x)) | y) = (v(x) | y)$. L'endomorphisme v de l'espace hermitien F est donc autoadjoint, et sa forme hermitienne associée est $h' = h|_{F \times F}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, et $L \in \mathcal{G}_{n-k+1}(E)$. Comme F est un hyperplan de E , $L \cap F$ est de dimension $\geq n-k$; il existe par conséquent un \mathbb{C} -sous-espace $L' \in \mathcal{G}_{n-k}(F)$ tel que $L' \subset L$. Comme L' est un \mathbb{C} -sous-espace de dimension $n-k = (n-1) - k + 1$ du \mathbb{C} -espace F de dimension $n-1$, d'après les égalités de Courant-Fischer :

$$\lambda_k(v) \leq \max_{x \in L' \cap S} h'(x, x) = \max_{x \in L' \cap S} h(x, x) \leq \max_{x \in L \cap S} (u(x) | x) .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $L \in \mathcal{G}_{n-k+1}(E)$, nous en déduisons :

$$\lambda_k(v) \leq \min_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}(E)} \max_{x \in L \cap S} (u(x) | x) = \lambda_k(u) .$$

Soit maintenant $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, et $L \in \mathcal{G}_k(E)$. Comme F est un hyperplan de E , le \mathbb{C} -sous-espace $L \cap F$ est de dimension $\geq k-1$; il existe par conséquent un \mathbb{C} -sous-espace $L' \in \mathcal{G}_{k-1}(F)$ tel que $L' \subset L$. D'après les égalités de Courant-Fischer on a :

$$\lambda_{k-1}(v) \geq \min_{x \in L' \cap S} h'(x, x) = \min_{x \in L' \cap S} h(x, x) \geq \min_{x \in L \cap S} (u(x) | x) .$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $L \in \mathcal{G}_k(E)$, nous en déduisons :

$$\lambda_{k-1}(v) \geq \max_{L \in \mathcal{G}_k(E)} \min_{x \in L \cap S} (u(x) | x) = \lambda_k(u) .$$

Nous en déduisons finalement :

$$\lambda_1(u) \geq \lambda_1(v) \geq \lambda_2(u) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(v) \geq \lambda_n(u) .$$

c) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise α (cf. § IV.3 exercice 3) ; nous supposons que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est la suite des éléments diagonaux de la matrice de u dans la base \mathcal{B} . Par hypothèse,

application injective $\varphi : \llbracket 1, p \rrbracket \mapsto \llbracket 1, n \rrbracket$, telle que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\rho_k = \lambda_{\varphi(k)}$; nous pouvons supposer que φ est strictement croissante, en modifiant éventuellement l'indexation de la suite (ρ_1, \dots, ρ_p) . Soit F le sous-espace de dimension p engendré par la famille $\mathcal{B}' = (e_{\varphi(1)}, \dots, e_{\varphi(p)})$. Comme dans le b), nous noterons f la projection orthogonale sur F , g la projection orthogonale sur F^\perp et soit $\beta = f \circ \alpha|_F \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(F)$. Comme l'application φ est strictement croissante, il est clair que la matrice de β dans la base orthonormale \mathcal{B}' de F est trigonale ; nous en déduisons :

$$\det(\beta^* \circ \beta) = \det(\beta^*) \det(\beta) = \prod_{k=1}^p |\lambda_{\varphi(k)}|^2 = \prod_{k=1}^p |\rho_k|^2 .$$

Posons $v = \beta^* \circ \beta$; v est un endomorphisme autoadjoint de l'espace hermitien F . On a :

$$\det(v) = \prod_{k=1}^p \lambda_k(v) = \prod_{k=1}^p |\rho_k|^2 .$$

Montrons maintenant que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k(v) \leq \lambda_k(u)$.
Remarquons que pour tout $x \in F$:

$$\begin{aligned} (u(x) | x) &= (\alpha^*(\alpha(x)) | x) = (\alpha(x) | \alpha(x)) = \\ &= (f(\alpha(x)) + g(\alpha(x)) | f(\alpha(x)) + g(\alpha(x))) = \\ &= (f(\alpha(x) | f(\alpha(x)) + (g(\alpha(x) | g(\alpha(x))) \geq (\beta(x) | \beta(x)) = (v(x) | x) , \end{aligned}$$

et par conséquent pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (u(x) - \lambda x | x) &= \\ &= (u(x) | x) - \lambda \|x\|^2 \geq (v(x) | x) - \lambda \|x\|^2 = (v(x) - \lambda x | x) . \end{aligned}$$

Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ donné, si $\lambda_k(v) > \lambda_k(u)$, l'endomorphisme autoadjoint $v - \lambda_k(u) \text{Id}_F$ serait défini positif sur au moins un sous-espace de F de dimension k ; d'après ce qui précède, il en serait de même pour $u - \lambda_k(u) \text{Id}_E$, ce qui est exclu puisque si (p_k, q_k) est la signature de $u - \lambda_k(u) \text{Id}_E$, on a $p_k < k$. Nous en déduisons que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\lambda_k(v) \leq \lambda_k(u)$, et par conséquent :

$$\prod_{k=1}^p |\rho_k|^2 = \prod_{k=1}^p \lambda_k(v) \leq \prod_{k=1}^p \lambda_k(u) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 24 :

|| Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 1$. On reprend,
|| pour $u \in \text{Autoad}(E)$, la notation $(\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$

|| cice 23. Montrer que l'application $\lambda_k : \text{Autoad}(E) \rightarrow \mathbb{R}$, où $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, est 1-lipschitzienne. ■

Nous reprenons les notations et les résultats de l'exercice 23. Soient u et v deux éléments de $\text{Autoad}(E)$, et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons $w = u - v$. Pour tout $x \in E$ on a :

$$(u(x) | x) = (v(x) | x) + (w(x) | x) \geq (v(x) | x) - \|w(x)\| \|x\| .$$

Soit $L_0 \in \mathcal{G}_k$. Pour tout $x_0 \in L_0 \cap S$, d'après l'inégalité précédente :

$$(u(x_0) | x_0) \geq \min_{x \in L_0 \cap S} (v(x) | x) - \|w\| ,$$

d'où :

$$\min_{x \in L_0 \cap S} (u(x) | x) \geq \min_{x \in L_0 \cap S} (v(x) | x) - \|w\| .$$

Nous en déduisons :

$$\max_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\min_{x \in L \cap S} (u(x) | x) \right) + \|w\| \geq \min_{x \in L_0 \cap S} (v(x) | x) .$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $L_0 \in \mathcal{G}_k$, nous en déduisons enfin :

$$\max_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\min_{x \in L \cap S} (u(x) | x) \right) + \|w\| \geq \max_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\min_{x \in L \cap S} (v(x) | x) \right) ,$$

c'est-à-dire d'après l'exercice 23 :

$$\lambda_k(u) + \|w\| \geq \lambda_k(v) .$$

En échangeant les rôles joués par u et v , nous obtenons :

$$\lambda_k(v) + \|-w\| \geq \lambda_k(u) ,$$

d'où finalement :

$$|\lambda_k(u) - \lambda_k(v)| \leq \|u - v\| .$$

L'application λ_k est donc 1-lipschitzienne.

Exercice 28 :

|| Soit E un espace hermitien de dimension $n \geq 1$. Si v est un opérateur *autoadjoint* de E , on désigne par $(\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v))$ l'unique suite complète des valeurs propres de v qui soit décroissante. On sait (cf. exercice 9) que si $u \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, il existe un unique endomorphisme autoadjoint *positif* v tel qu'

On note $s_k(u) = \lambda_k(v)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Montrer que $s_k(u^*) = s_k(u)$, et que pour tout $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, on a $s_k(\varphi \circ u) = s_k(u \circ \varphi) = s_k(u)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b₁) Soit $w \in \mathbf{U}(E)$ tel que $u = v \circ w$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de v ($v(e_k) = s_k(u) e_k$). On pose $e'_k = w^{-1}(e_k)$. Démontrer que :

$$(1) \quad (\forall x \in E) \quad u(x) = \sum_{k=1}^n s_k(u) (e'_k | x) e_k.$$

b₂) Pour que u soit *normal*, il faut et il suffit que $(s_k(u))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ soit une suite complète des *modules* des valeurs propres de u .

b₃) Pour que u soit normal, il faut et il suffit qu'il existe une base orthonormale (e_1, \dots, e_n) de E telle que $s_k(u) = |(u(e_k) | e_k)|$ pour tout k .

c₁) Si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E , montrer que :

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n |(u(e_k) | e_k)| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u).$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

c₂) Soit alors (ρ_1, \dots, ρ_n) une suite complète des valeurs propres de u . Utiliser (2) pour montrer que :

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n |\rho_k| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u).$$

c₃) Par une méthode analogue, démontrer :

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n s_k^2(u).$$

Montrer que dans (3) et (4) on a l'égalité ssi u est normal.

d) Démontrer : $\sum_{k=1}^n s_k(u) = \max_{\varphi \in \mathbf{U}(E)} (|\mathrm{Tr}(u \circ \varphi)|)$.

En déduire, pour $u_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, $u_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$:

$$\sum_{k=1}^n s_k(u_1 + u_2) \leq \sum_{k=1}^n s_k(u_1) + \sum_{k=1}^n s_k(u_2).$$

e) Démontrer les relations suivantes :

$$(5) \quad \sum_{1 \leq j < k \leq n} |\rho_k - \rho_j|^2 = n \left(\sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 \right) - |\mathrm{Tr}(u)|^2$$

$$\begin{aligned}
 & (6) \quad \max_{(j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |\rho_k - \rho_j| \leq \left(2 \left[\text{Tr}(u \circ u^*) - \frac{1}{n} |\text{Tr}(u)|^2 \right] \right)^{1/2}. \\
 & (7) \quad \text{Pour } j+k \leq n-1 \text{ et } u_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E), u_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E), \text{ on a :} \\
 & \quad s_{j+k+1}(u_1 + u_2) \leq s_{j+1}(u_1) + s_{k+1}(u_2) \\
 & \text{et} \\
 & \quad s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2) \leq s_{j+1}(u_1) s_{k+1}(u_2). \blacksquare
 \end{aligned}$$

a) On sait que si f et g sont des endomorphismes d'un K -ev de dimension finie, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même polynôme caractéristique. Les endomorphismes $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ ont donc même polynôme caractéristique. Les endomorphismes autoadjoints positifs v et v' tels que $v^2 = u \circ u^*$, et $v'^2 = u^* \circ u$ ont donc aussi même polynôme caractéristique.

Nous en déduisons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_k(u) = \lambda_k(v) = \lambda_k(v') = s_k(u^*)$. Si $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, on a :

$$(u \circ \varphi) \circ (u \circ \varphi)^* = u \circ \varphi \circ \varphi^* \circ u^* = u \circ u^*.$$

Si v est l'endomorphisme autoadjoint tel que $v^2 = u \circ u^*$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\lambda_k(v) = s_k(u) = s_k(u \circ \varphi).$$

Enfin, si $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, on a :

$$s_k(\varphi \circ u) = s_k((\varphi \circ u)^*) = s_k(u^* \circ \varphi^{-1}) = s_k(u^*) = s_k(u).$$

b₁) La base (e'_1, \dots, e'_k) étant orthonormale, pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{k=1}^n (e'_k | x) e'_k,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad u(x) &= v(w(x)) = \sum_{k=1}^n (e'_k | x) v(w(e'_k)) = \\
 &= \sum_{k=1}^n (e'_k | x) v(e_k) = \sum_{k=1}^n (e'_k | x) s_k(u) e_k.
 \end{aligned}$$

b₂) Si u est normal, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui diagonalise u (Théorème IV.5.3). Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Nous pouvons supposer la suite $(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ décroissante. On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v^2) = \text{Diag}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2)$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \text{Diag}(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$, et par conséquent :

$$(\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v)) = (|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|) = (s_1(u), \dots, s_n(u)).$$

La suite $(s_1(u), \dots, s_n(u))$ est donc une suite complète des modules des valeurs propres de u .

Supposons réciproquement que la suite $(s_1(u), \dots, s_n(u))$ soit une suite complète des modules des valeurs propres de u . Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise u (cf. § IV.3 exercice 3)). Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = [u_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$; si $i < j$ on a $u_{i,j} = 0$; la suite $(u_{1,1}, \dots, u_{n,n})$ est une suite complète des valeurs propres de u . On constate :

$$\text{Tr}(v^2) = \text{Tr}(u \circ u^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} \overline{u_{i,j}} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |u_{i,j}|^2 \geq \sum_{i=1}^n |u_{i,i}|^2.$$

Or d'après l'hypothèse, :

$$\text{Tr}(v^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(v) = \sum_{i=1}^n s_i^2(u) = \sum_{i=1}^n |u_{i,i}|^2.$$

Nous en déduisons que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$ alors $u_{i,j} = 0$; la matrice de u dans la base orthonormale \mathcal{B} est diagonale et par conséquent u est normal.

b_3) Si u est normal, d'après b_2), la suite $(s_1(u), \dots, s_n(u))$ est une suite complète des modules des valeurs propres de u . L'endomorphisme normal u est diagonalisable, et il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda_k| = s_k(u)$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $u(e_k) = \lambda_k e_k$, d'où $(e_k | u(e_k)) = \lambda_k$, et $s_k(u) = |\lambda_k| = |(e_k | u(e_k))|$.

Réciproquement supposons qu'il existe dans E une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_k(u) = |(e_k | u(e_k))|$. Posons $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = [u_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $(e_i | u(e_j)) = u_{i,j}$, d'où en particulier pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_k(u) = |u_{k,k}|$. On constate :

$$\text{Tr}(v^2) = \text{Tr}(u \circ u^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} \overline{u_{i,j}} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |u_{i,j}|^2 \geq \sum_{i=1}^n |u_{i,i}|^2.$$

Comme :

$$\text{Tr}(v^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(v) = \sum_{i=1}^n s_i^2(u) = \sum_{i=1}^n |u_{i,i}|^2,$$

nous en déduisons que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$ alors $u_{i,j} = 0$; la matrice de u dans la base orthonormale \mathcal{B} est diagonale et par conséquent u est normal.

c_1) Choisissons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un complexe μ_k de module 1 tel que $(e_k | u(e_k)) = \mu_k |(e_k | u(e_k))|$. Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_k) = \mu_k e_k$; φ est isométrique, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $(e_k | u \circ \varphi^{-1}(e_k)) = \mu_k^{-1} (e_k | u(e_k)) = |(e_k | u(e_k))|$. On voit donc que :

$$\sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| = \text{Tr}(u \circ \varphi^{-1}) .$$

Posons $u_1 = u \circ \varphi^{-1}$; il existe une base orthonormale (e'_1, \dots, e'_n) qui diagonalise l'endomorphisme autoadjoint $u_1^* \circ u_1$; soit w l'endomorphisme autoadjoint positif tel que $w^2 = u_1^* \circ u_1$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $w(e'_k) = \lambda_k e'_k$, où $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$. On constate que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\|u_1(e'_k)\|^2 = (u_1(e'_k) | u_1(e'_k)) = (e'_k | u_1^*(u_1(e'_k))) = (e'_k | w^2(e'_k)) = \lambda_k^2 ,$$

et par conséquent (d'après a)) :

$$\sum_{k=1}^n s_k(u) = \sum_{k=1}^n s_k(u_1^*) = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n \|u_1(e'_k)\| .$$

D'après l'inégalité de Schwarz :

$$\text{Tr}(u_1) = \sum_{k=1}^n (e'_k | u_1(e'_k)) \leq \sum_{k=1}^n |(e'_k | u_1(e'_k))| \leq \sum_{k=1}^n \|u_1(e'_k)\| ,$$

ce qui équivaut, d'après ce qui précède, à l'inégalité :

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u) ,$$

qu'il fallait démontrer.

S'il y a égalité dans l'inégalité (2), d'après l'inégalité précédente, il est clair que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_1(e'_k)$ est \mathbb{R}_+ -colinéaire à e'_k ; l'endomorphisme u_1 est donc autoadjoint positif, diagonalisable dans la base (e'_1, \dots, e'_n) . On remarque que $u = u_1 \circ \varphi$; il s'agit d'une décomposition polaire de l'endomorphisme u (cf. exercice 18), et la base initiale (e_1, \dots, e_n) diagonalise φ .

Inversement supposons $u = v \circ \varphi$ où v est autoadjoint positif, et $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, et que la base orthonormale (e_1, \dots, e_n) diagonalise φ . P

$(s_1(u), \dots, s_n(u))$ est une suite complète des valeurs propres de v (puisque $v^2 = u \circ u^*$). Posons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_k) = \mu_k e_k$, où $\mu_k \in \mathbb{U}$ puisque φ est isométrique. On observe que :

$$\sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| = \sum_{k=1}^n |(e_k | \mu_k v(e_k))| = \sum_{k=1}^n |(e_k | v(e_k))| ;$$

mais comme v est autoadjoint positif, $(e_k | v(e_k)) \in \mathbb{R}_+$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| = \text{Tr}(v) = \sum_{k=1}^n s_k(u) .$$

Les bases orthonormales pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité (2) sont les bases qui diagonalisent l'endomorphisme isométrique d'une décomposition polaire de u (il n'y a pas unicité d'une telle décomposition).

c_2) Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise u (cf. § IV.3 exercice 3)). La suite $((e_k | u(e_k)))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est alors une suite complète des valeurs propres de u . D'après c_1) :

$$\sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u) .$$

Nous en déduisons que pour toute suite complète (ρ_1, \dots, ρ_n) des valeurs propres de u :

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n |\rho_k| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u) .$$

Si u est normal, d'après b_2) la suite $(s_1(u), \dots, s_n(u))$ est une suite complète des modules des valeurs propres de u , et par conséquent il y a égalité dans l'inégalité (3).

Supposons qu'il y ait égalité dans l'inégalité (3). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale qui trigonalise u ; d'après l'étude faite dans le c_1), il existe une décomposition polaire $u = v \circ \varphi$ et \mathcal{B} diagonalise φ . Nous en déduisons que \mathcal{B} trigonalise $v = u \circ \varphi^{-1}$, mais comme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est autoadjointe, elle est nécessairement diagonale. La base \mathcal{B} diagonalise donc v , φ , et par conséquent u . Nous en déduisons que u est un endomorphisme normal.

c_3) Soit encore une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui trigonalise u . Comme dans b_2) posons : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = [u_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$; si $i < j$ on a $u_{i,j} = 0$; la suite $(u_{1,1}, \dots, u_{n,n})$ est une suite complète des valeurs

u . Si v est l'endomorphisme autoadjoint positif tel que $v^2 = u \circ u^*$, on constate :

$$\operatorname{Tr}(v^2) = \operatorname{Tr}(u \circ u^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{i,j} \overline{u_{i,j}} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |u_{i,j}|^2 \geq \sum_{i=1}^n |u_{i,i}|^2,$$

d'où :

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n s_k^2(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2(v) = \operatorname{Tr}(v^2) \geq \sum_{k=1}^n |u_{k,k}|^2 = \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2.$$

Si u est normal, d'après b_2) la suite $(s_1(u), \dots, s_n(u))$ est une suite complète des modules des valeurs propres de u , et par conséquent il y a égalité dans l'inégalité (4).

S'il y a égalité dans l'inégalité (4), il y a égalité dans l'inégalité précédente, donc la base orthonormale \mathcal{B} diagonalise u ; l'endomorphisme u est dans ce cas normal.

d) Soit $\varphi \in \mathbf{U}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale qui diagonalise φ ; pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $\varphi(e_k) = \mu_k e_k$, où $\mu_k \in \mathbb{U}$. On observe que :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr}(u \circ \varphi)| &\leq \sum_{k=1}^n |(e_k | u(\varphi(e_k)))| = \\ &= \sum_{k=1}^n |(e_k | \mu_k u(e_k))| = \sum_{k=1}^n |(e_k | u(e_k))| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u), \end{aligned}$$

d'après (2). Nous en déduisons l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^n s_k(u) \geq \operatorname{Max}_{\varphi \in \mathbf{U}(E)} (|\operatorname{Tr}(u \circ \varphi)|).$$

Si $u = v \circ \varphi$, où $\varphi \in \mathbf{U}(E)$ et v est autoadjoint positif (décomposition polaire), alors $u \circ u^* = v^2$, donc $(s_1(u), \dots, s_n(u)) = (\lambda_1(v), \dots, \lambda_n(v))$. Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^n s_k(u) = \operatorname{Tr}(v) = \operatorname{Tr}(u \circ \varphi^{-1}) = |\operatorname{Tr}(u \circ \varphi^{-1})|.$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n s_k(u) = \operatorname{Max}_{\varphi \in \mathbf{U}(E)} (|\operatorname{Tr}(u \circ \varphi)|).$$

Si $u_1 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ et $u_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, pour tout $\varphi \in \mathbf{U}(E)$, on a :

$$\begin{aligned} |\text{Tr}((u_1 + u_2) \circ \varphi)| &= |\text{Tr}(u_1 \circ \varphi + u_2 \circ \varphi)| = |\text{Tr}(u_1 \circ \varphi) + \text{Tr}(u_2 \circ \varphi)| \leq \\ &\leq |\text{Tr}(u_1 \circ \varphi)| + |\text{Tr}(u_2 \circ \varphi)| \leq \sum_{k=1}^n s_k(u_1) + \sum_{k=1}^n s_k(u_2) . \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité précédemment démontrée nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^n s_k(u_1 + u_2) = \max_{\varphi \in \mathbf{U}(E)} (|\text{Tr}((u_1 + u_2) \circ \varphi)|) \leq \sum_{k=1}^n s_k(u_1) + \sum_{k=1}^n s_k(u_2) .$$

e) La suite (ρ_1, \dots, ρ_n) étant une suite complète des valeurs propres de u , on a bien sûr $\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \rho_k$. On observe que :

$$\begin{aligned} \sum_{(j,k) \in [1,n]^2} |\rho_k - \rho_j|^2 &= 2n \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 - \sum_{(j,k)} \bar{\rho}_k \rho_j - \sum_{(j,k)} \rho_k \bar{\rho}_j = \\ &= 2n \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \bar{\rho}_k \sum_{j=1}^n \rho_j = 2n \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 - 2 \left| \sum_{k=1}^n \rho_k \right|^2 . \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$(5) \quad \sum_{1 \leq j < k \leq n} |\rho_k - \rho_j|^2 = n \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 - \left| \sum_{k=1}^n \rho_k \right|^2 = n \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 - |\text{Tr}(u)|^2 .$$

Remarquons que pour toute suite $(\rho_1, \dots, \rho_n) \in \mathbb{C}^n$, on a par conséquent :

$$(5') \quad \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \rho_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 .$$

Pour démontrer l'inégalité (6) montrons d'abord que pour tout couple (j, k) tel que $1 \leq j < k \leq n$, on a :

$$(6') \quad |\rho_k - \rho_j|^2 \leq 2 \left(\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2 - \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \rho_i \right|^2 \right) .$$

Il suffit de démontrer cette inégalité dans le cas où $j = 1$ et $k = 2$; elle équivaut alors à l'inégalité :

$$\left| \sum_{i=1}^n \rho_i \right|^2 \leq n \left(\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2 - \frac{1}{2} |\rho_2 - \rho_1|^2 \right) .$$

On remarque que :

$$2 |\rho_1|^2 + 2 |\rho_2|^2 - |\rho_2 - \rho_1|^2 = |\rho_1 + \rho_2|^2 ,$$

et que par conséquent :

$$\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2 - \frac{1}{2} |\rho_2 - \rho_1|^2 = \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right|^2 + \sum_{i=3}^n |\rho_i|^2 .$$

L'inégalité (5') appliquée à la suite $((\rho_1 + \rho_2)/2, (\rho_1 + \rho_2)/2, \rho_3, \dots, \rho_n)$ nous donne :

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n \rho_k \right|^2 \leq \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right|^2 + \sum_{i=3}^n |\rho_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\rho_i|^2 - \frac{1}{2} |\rho_2 - \rho_1|^2 .$$

Cela achève de démontrer l'inégalité (6') .

Nous en déduisons :

$$\text{Max}_{(j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |\rho_k - \rho_j|^2 \leq 2 \left(\sum_{i=1}^n |\rho_i|^2 - \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \rho_i \right|^2 \right) .$$

Enfin, d'après l'inégalité (4) , on a :

$$\sum_{k=1}^n |\rho_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n s_k^2(u) = \text{Tr}(u \circ u^*) ,$$

d'où :

$$(6) \quad \text{Max}_{(j,k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |\rho_k - \rho_j|^2 \leq 2 \left(\text{Tr}(u \circ u^*) - \frac{1}{n} |\text{Tr}(u)|^2 \right) .$$

f) Démontrons maintenant les inégalités (7) ; nous utiliserons pour cela les égalités de Courant-Fischer (exercice 23) appliquées à l'endomorphisme autoadjoint $u^* \circ u$. Remarquons que comme pour tout $x \in E$, $(u^*(u(x)) | x) = (u(x) | u(x)) = \|u(x)\|^2$, ces égalités s'écrivent ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$\lambda_k(u^* \circ u) = \text{Max}_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\text{Min}_{x \in L \cap S} \|u(x)\|^2 \right) = \text{Min}_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \left(\text{Max}_{x \in L \cap S} \|u(x)\|^2 \right) .$$

Soit v l'endomorphisme autoadjoint positif tel que $v^2 = u^* \circ u$. Il est clair que (suites complètes décroissantes des valeurs propres) :

$$(\lambda_1^2(v), \dots, \lambda_n^2(v)) = (\lambda_1(v^2), \dots, \lambda_n(v^2)) ,$$

et par conséquent que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$s_k(u) = \lambda_k(v) = \operatorname{Max}_{L \in \mathcal{G}_k} \left(\operatorname{Min}_{x \in L \cap S} \|u(x)\| \right) = \operatorname{Min}_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \left(\operatorname{Max}_{x \in L \cap S} \|u(x)\| \right).$$

Remarquons que la deuxième égalité de Courant-Fischer s'écrit :

$$s_k(u) = \operatorname{Min}_{L \in \mathcal{G}_{n-k+1}} \|u|_L\|.$$

On fixe j et k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $j+k \leq n-1$.

Supposons $s_{j+1}(u_1) + s_{k+1}(u_2) < s_{j+k+1}(u_1 + u_2)$. Il existe alors un sous-espace L_1 de dimension $n - (j+1) + 1 = n - j$, donc de codimension j dans E , et un sous-espace L_2 de dimension $n - (k+1) + 1$, donc de codimension k dans E , tels que :

$$\operatorname{Max}_{x \in L_1 \cap S} \|u_1(x)\| + \operatorname{Max}_{x \in L_2 \cap S} \|u_2(x)\| < s_{j+k+1}(u_1 + u_2).$$

Soit L un sous-espace de codimension $j+k$ tel que $L \subset L_1 \cap L_2$; pour tout $x \in L \cap S$ on a :

$$\|(u_1 + u_2)(x)\| \leq \|u_1(x)\| + \|u_2(x)\| \leq \operatorname{Max}_{x \in L_1 \cap S} \|u_1(x)\| + \operatorname{Max}_{x \in L_2 \cap S} \|u_2(x)\|,$$

d'où :

$$\operatorname{Max}_{x \in L \cap S} \|(u_1 + u_2)(x)\| \leq \operatorname{Max}_{x \in L_1 \cap S} \|u_1(x)\| + \operatorname{Max}_{x \in L_2 \cap S} \|u_2(x)\| < s_{j+k+1}(u_1 + u_2),$$

ce qui est évidemment contradictoire puisque L est de codimension $j+k$. Nous en déduisons :

$$s_{j+k+1}(u_1 + u_2) \leq s_{j+1}(u_1) + s_{k+1}(u_2).$$

Supposons maintenant $s_{j+1}(u_1) s_{k+1}(u_2) < s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2)$. Il existe alors un sous-espace L_1 de codimension j dans E , et un sous-espace L_2 de codimension k dans E , tels que :

$$\|u_1|_{L_1}\| \times \|u_2|_{L_2}\| < s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2).$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \operatorname{Codim}(L_2 \cap u_2^{-1}(L_1)) &\leq \operatorname{Codim}(L_2) + \operatorname{Codim}(u_2^{-1}(L_1)) \leq \\ &\leq \operatorname{Codim}(L_2) + \operatorname{Codim}(L_1) = j+k. \end{aligned}$$

Soit L un sous-espace de codimension $j+k$ tel que $L \subset L_2 \cap u_2^{-1}(L_1)$. Pour tout $x \in L \cap S$, on a $x \in L_2$ et $u_2(x) \in L_1$, donc :

$$\|u_1(u_2(x))\| \leq \|u_1|_{L_1}\| \times \|u_2|_{L_2}\| \times \|x\| = \|u_1|_{L_1}\| \times \|u_2|_{L_2}\|,$$

et par conséquent :

$$\operatorname{Max}_{x \in L \cap S} \|u_1(u_2(x))\| \leq \|u_1|_{L_1}\| \times \|u_2|_{L_2}\| < s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2).$$

Ceci est contradictoire, puisque $\operatorname{Codim}(L) = j+k$. Nous en déduisons :

$$s_{j+k+1}(u_1 \circ u_2) \leq s_{j+1}(u_1) s_{k+1}(u_2).$$

Chapitre V

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE AFFINE

§ V.1 ESPACES AFFINES

Exercice 1 :

Montrer que la loi $\mathbb{R} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$, $(t, z) \mapsto z \dot{+} t = z e^{it}$ est une action à gauche transitive de $(\mathbb{R}, +)$ sur \mathbb{U} . Pourquoi cette loi ne fait-elle pas de \mathbb{U} un espace affine sur \mathbb{R} ? ■

On vérifie que pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $z \in \mathbb{U}$:

$$(z \dot{+} t_1) \dot{+} t_2 = (z e^{it_1}) e^{it_2} = z e^{i(t_1+t_2)} = z \dot{+} (t_1 + t_2) .$$

Cette loi est donc une action à gauche du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur \mathbb{U} .

D'autre part, pour tout $(z, z') \in \mathbb{U}^2$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z' = z e^{it} = z \dot{+} t$. Cette action à gauche est donc transitive.

Mais pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $z = z e^{2i k \pi} = z \dot{+} 2 k \pi$; cette action à gauche n'est donc pas fidèle ; elle ne munit donc pas l'ensemble \mathbb{U} d'une structure d'espace affine sur le \mathbb{R} -ev \mathbb{R} .

§ V.2 APPLICATIONS AFFINES, GROUPE AFFINE

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines de dimensions n et p , d'espaces directeurs E et F .

a) Montrer que $\text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un sous- \mathbb{R} -ev du \mathbb{R} -ev des applications de \mathcal{E} dans F , et que sa dimension est $(n+1)p$.

b) Pour $\alpha \in \text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ et $\varphi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, on note $\varphi \dot{+} \alpha$ l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $x \mapsto \varphi(x) \dot{+} \alpha(x)$. Montrer que $\varphi \dot{+} \alpha \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et qu'on définit ainsi une structure d'

|| ayant pour espace directeur $\text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ sur $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Cette structure sera dite *naturelle* sur $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. ■

a) L'application constante nulle est évidemment une application affine de \mathcal{E} dans F ; son application linéaire associée est l'application linéaire nulle. Soient α et β des applications affines de \mathcal{E} dans F , et λ et μ des scalaires. Par définition de la structure d'espace affine sur le \mathbb{R} -ev F , pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}^2$ on a :

$$\begin{aligned} (\lambda\alpha + \mu\beta)(y) - (\lambda\alpha + \mu\beta)(x) &= \lambda(\alpha(y) - \alpha(x)) + \mu(\beta(y) - \beta(x)) = \\ &= \lambda\vec{\alpha}(\overrightarrow{xy}) + \mu\vec{\beta}(\overrightarrow{xy}) = (\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta})(\overrightarrow{xy}). \end{aligned}$$

L'application $\lambda\alpha + \mu\beta$ est donc affine, et l'application linéaire associée est $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

Nous en déduisons que $\text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un sous- \mathbb{R} -ev du \mathbb{R} -ev des applications de \mathcal{E} dans F . Remarquons aussi que l'application $\alpha \mapsto \vec{\alpha}$, $\text{Aff}(\mathcal{E}, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ est linéaire.

Le noyau de l'application linéaire $\alpha \mapsto \vec{\alpha}$ est le sous-espace vectoriel constitué des applications constantes $\mathcal{E} \rightarrow F$; c'est un \mathbb{R} -ev isomorphe à F qui est de dimension p . L'application $\alpha \mapsto \vec{\alpha}$, $\text{Aff}(\mathcal{E}, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, étant évidemment surjective, nous en déduisons :

$$\dim(\text{Aff}(\mathcal{E}, F)) = \dim(\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)) + p = np + p = (n+1)p.$$

b) Soit $\varphi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et α_1 et α_2 éléments de $\text{Aff}(\mathcal{E}, F)$. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a par définition :

$$\begin{aligned} ((\varphi \dot{+} \alpha_1) \dot{+} \alpha_2)(x) &= (\varphi \dot{+} \alpha_1)(x) \dot{+} \alpha_2(x) = (\varphi(x) \dot{+} \alpha_1(x)) \dot{+} \alpha_2(x) = \\ &= \varphi(x) \dot{+} (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \varphi(x) \dot{+} (\alpha_1 + \alpha_2)(x) = (\varphi \dot{+} (\alpha_1 + \alpha_2))(x). \end{aligned}$$

Nous en déduisons $(\varphi \dot{+} \alpha_1) \dot{+} \alpha_2 = \varphi \dot{+} (\alpha_1 + \alpha_2)$.

Cette opération est donc une action à gauche du groupe $(\text{Aff}(\mathcal{E}, F), +)$ sur $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Soient φ et ψ des éléments de $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$; l'application $\alpha \in \text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est telle que $\psi = \varphi \dot{+} \alpha$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$ on a :

$$\psi(x) = \varphi(x) \dot{+} \alpha(x) \quad \text{soit encore} \quad \alpha(x) = \overrightarrow{\varphi(x) \psi(x)}.$$

Cela prouve l'unicité d'une telle application α . Pour montrer son existence, il suffit de prouver que l'application $\mathcal{E} \rightarrow F$ ainsi définie est bien affine. On constate que pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$:

$$\alpha(y) - \alpha(x) = \overrightarrow{\varphi(y) \psi(y)} - \overrightarrow{\varphi(x) \psi(x)} = \overrightarrow{\psi(x) \psi(y)} - \overrightarrow{\varphi(x) \varphi(y)} =$$

L'application α est donc bien affine d'application linéaire associée $\vec{\psi} - \vec{\varphi}$. L'opération est donc transitive et fidèle ; elle munit par conséquent l'ensemble $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ d'une structure d'espace affine sur le \mathbb{R} -ev $\text{Aff}(\mathcal{E}, F)$.

Remarque : Par définition, si $\varphi \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, et $\alpha \in \text{Aff}(\mathcal{E}, F)$, l'application affine $\varphi \dot{+} \alpha$ est l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $x \mapsto \varphi(x) \dot{+} \alpha(x)$; cela signifie que pour tout $x \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$ est affine, et que l'application linéaire associée est l'application $\text{Aff}(\mathcal{E}, F) \rightarrow F$, $\alpha \mapsto \alpha(x)$.

Exercice 3 :

|| Soit \mathcal{E} un espace affine. On munit $\text{Aff}(\mathcal{E})$ de sa structure affine naturelle (cf. exercice 1). Montrer que $\text{GA}(\mathcal{E})$ est un ouvert de $\text{Aff}(\mathcal{E})$, et que $\text{SA}(\mathcal{E})$ est un fermé de $\text{Aff}(\mathcal{E})$. Quelle est l'adhérence dans $\text{Aff}(\mathcal{E})$ du groupe $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$? ■

Nous supposerons connu le fait que toute application affine d'un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie dans un autre est continue (cf. remarques en fin du § V.3).

Nous supposerons que \mathcal{E} est un espace affine sur le \mathbb{R} -ev E . Nous avons remarqué dans l'exercice 1 que, ψ et φ étant éléments de $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, si $\alpha \in \text{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est telle que $\psi = \varphi \dot{+} \alpha$, alors $\vec{\alpha} = \vec{\psi} - \vec{\varphi}$. Cela signifie que l'application $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$, $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ est affine, et que son application linéaire associée, $\text{Aff}(\mathcal{E}, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, est l'application $\alpha \mapsto \vec{\alpha}$. Ceci est en particulier vrai si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$.

Comme l'application $\varphi \mapsto \vec{\varphi}$, $\text{Aff}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est continue, l'ensemble $\text{GA}(\mathcal{E})$, image réciproque par $\vec{\varphi}$ de l'ouvert $\text{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, est un ouvert de $\text{Aff}(\mathcal{E})$; l'ensemble $\text{SA}(\mathcal{E})$, image réciproque du fermé $\text{SL}_{\mathbb{R}}(E)$ de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, est un fermé de $\text{Aff}(\mathcal{E})$.

L'ensemble des endomorphismes de E de la forme λId_E , où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un fermé de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ (c'est un sous-espace vectoriel). Nous en déduisons que l'ensemble des homothéties-translations, augmenté de l'ensemble des applications affines constantes, est un fermé de $\text{Aff}(\mathcal{E})$; cet ensemble contient l'adhérence de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$; montrons qu'il y a égalité. Il suffit de démontrer que toute application affine constante est limite d'une suite d'homothéties-translations. Une origine $O \in \mathcal{E}$ étant fixée, l'application $\varphi \mapsto (\varphi(O), \vec{\varphi})$, $\text{Aff}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \times \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, est une bijection affine (cf. Exercice 1), donc un homéomorphisme. Si $C \in \mathcal{E}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application :

$$h_n : x \mapsto C + \frac{1}{n} \overrightarrow{Ox},$$

est une homothétie, et d'après ce qui précède h_n tend vers l'application affine constante de valeur C quand n tend vers l'infini.

L'adhérence de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ dans $\text{Aff}(\mathcal{E})$ est donc l'ensemble $\mathcal{H}_T(\mathcal{E}) \cup \mathcal{C}$, où \mathcal{C} désigne l'ensemble des applications affines constantes.

Exercice 4 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$. Montrer que toute *involution affine* φ de \mathcal{E} (i.e. $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}}$) admet au moins un point fixe. En déduire que les involutions affines de \mathcal{E} sont les bijections affines de la forme $M \mapsto O + f(\overrightarrow{OM})$, où $f \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathcal{E}})$ est une involution, i.e. de la forme $f = \text{Id}_F \oplus (-\text{Id}_G)$ avec F et G sous- \mathbb{R} -ev supplémentaires de $\vec{\mathcal{E}}$. Ces propriétés restent-elles vraies si l'on remplace \mathbb{R} par un corps de base quelconque ? ■

Si K est un corps de caractéristique 2, l'application affine $x \mapsto 1 - x$, $K \mapsto K$, qui s'écrit aussi $x \mapsto 1 + x$, est une involution affine qui n'a pas de point fixe. Nous supposons que le corps de base est un corps K de caractéristique $\neq 2$.

Soit φ une involution affine de \mathcal{E} . Comme \mathcal{E} n'est pas vide il existe $O \in \mathcal{E}$; on vérifie que le milieu de $(O, \varphi(O))$ est invariant par φ . On peut démontrer facilement ce résultat en utilisant la notion de barycentre. Procédons de façon élémentaire. Soit O une origine. Posons $\alpha = 1/2 \in K$ (on a supposé $2 \neq 0$). Soit $I = O + \alpha \overrightarrow{O\varphi(O)}$, de telle sorte que $\overrightarrow{OI} = \alpha \overrightarrow{O\varphi(O)}$. On a :

$$\varphi(I) = \varphi(O) + \alpha \vec{\varphi}(\overrightarrow{O\varphi(O)}) = \varphi(O) + \alpha \overrightarrow{\varphi(O)O},$$

puisque $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. Nous en déduisons :

$$\varphi(I) = (O + \overrightarrow{O\varphi(O)}) + \alpha \overrightarrow{\varphi(O)O} = O + \alpha \overrightarrow{O\varphi(O)} = I$$

(puisque $1 - \alpha = \alpha$), ce qu'il fallait démontrer.

Comme $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}}$, nous en déduisons $\vec{\varphi} \circ \vec{\varphi} = \overrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{E}}} = \text{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$. L'application linéaire $\vec{\varphi}$ est donc une involution vectorielle du K -ev $\vec{\mathcal{E}}$, et pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\varphi(M) = \varphi(I) + \vec{\varphi}(\overrightarrow{IM}) = I + \vec{\varphi}(\overrightarrow{IM}).$$

Réciproquement soit $I \in \mathcal{E}$, $f \in \text{GL}_{\mathbb{R}}(\vec{\mathcal{E}})$ telle que $f \circ f = \text{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}$, et φ l'application affine telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\varphi(M) = I + f(\overrightarrow{IM}).$$

On a bien sûr $\vec{\varphi} = f$. L'application affine $\varphi \circ \varphi$ transforme le point I en lui-même et a pour application linéaire associée $\vec{\varphi} \circ \vec{\varphi} = f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$; par unicité on a nécessairement $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathcal{E}}$. L'application affine φ est donc involutive, et I est l'un de ses points fixes.

§ V.3 SOUS-ESPACES AFFINES

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$ et une famille de points de \mathcal{E} : (A_0, A_1, \dots, A_n) affinement libre. Sur chaque droite $\text{Dr}(A_i, A_{i+1})$, on choisit un point B_i ($0 \leq i \leq n-1$) et sur $\text{Dr}(A_0, A_n)$ on choisit un point B . On considère les réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ et λ tels que $(\forall i) \overrightarrow{B_i A_i} = \lambda_i \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, et $\overrightarrow{B A_n} = \lambda \overrightarrow{A_0 A_n}$. Montrer que pour que B_0, \dots, B_{n-1} et B appartiennent à un même hyperplan affine de \mathcal{E} , il faut et il suffit que :

$$(\lambda - 1) \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda_i) = \lambda \prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i . \blacksquare$$

La famille (A_0, A_1, \dots, A_n) étant affinement libre, il n'existe aucun hyperplan la contenant.

Nous poserons $B = B_n$ et $\lambda_n = -\lambda$, de telle sorte que $\overrightarrow{B_n A_n} = \lambda_n \overrightarrow{A_n A_0}$. Nous conviendrons $A_{n+1} = A_0$. La proposition à démontrer est la suivante : pour qu'il existe un hyperplan contenant les points B_0, \dots, B_n , il faut et il suffit que :

$$\prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=0}^n \lambda_i .$$

Il existe un hyperplan affine contenant les points B_0, \dots, B_n si, et seulement si, il existe une fonction affine non constante qui soit nulle en tous ces points. Cela équivaut à ce qu'il existe une fonction affine non nulle qui soit nulle en tous ces points.

Considérons l'application $\varphi \mapsto (\varphi(A_0), \dots, \varphi(A_n))$, $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Il s'agit évidemment d'une application affine. Montrons qu'elle est injective. Si φ et ψ sont telles que $(\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket) \varphi(A_i) = \psi(A_i)$, la fonction affine $\psi - \varphi$, étant nulle en A_0, \dots, A_n , est constante (sinon A_0, \dots, A_n seraient dans un même hyperplan) donc constante nulle, i.e. $\varphi = \psi$. Comme $\dim(\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{R})) = n + 1$, cette application affine est bijective.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et pour toute fonction affine φ , on a :

$$\varphi(A_i) = \varphi(B_i) + \lambda_i (\varphi(A_{i+1}) - \varphi(A_i)) ,$$

d'où :

$$\varphi(B_i) = (1 + \lambda_i) \varphi(A_i) - \lambda_i \varphi(A_{i+1}) .$$

D'après ce qui précède, les points B_0, \dots, B_n sont dans un même hyperplan affine si, et seulement si, les équations en $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$(\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket) \quad 0 = (1 + \lambda_i) x_i - \lambda_i x_{i+1} \quad \text{et} \quad 0 = (1 + \lambda_n) x_n - \lambda_n x_0 ,$$

ont une solution non nulle, c'est-à-dire sont liées. Ces équations s'écrivent :

$$(\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket) \quad (1 + \lambda_i) x_i = \lambda_i x_{i+1} \quad \text{et} \quad (1 + \lambda_n) x_n = \lambda_n x_0 .$$

Le résultat à trouver se conçoit donc facilement, mais la discussion sur les cas d'annulation étant laborieuse, nous préférons écrire la matrice du système :

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda_0 & -\lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda_{n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 + \lambda_{n-1} & 0 \\ -\lambda_n & 0 & \dots & 0 & 1 + \lambda_n \end{bmatrix} .$$

On trouve facilement en développant par rapport à la dernière ligne que le déterminant de cette matrice est :

$$D = \prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i) - \prod_{i=1}^n \lambda_i .$$

Les points B_0, \dots, B_n sont donc dans un même hyperplan si, et seulement si :

$$\prod_{i=0}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=1}^n \lambda_i .$$

Exercice 4 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$ et soit $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré $d \geq 1$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction polynomiale $f_\infty: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré d telle que, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, la fonction polynomiale $g_0: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto f(M) - f_\infty(\overrightarrow{OM})$ soit de degré $\leq d-1$ (f_∞ s'appelle la *forme à l'infini* de f).

Soit $\mathcal{R} = (O ; e_1, \dots, e_n)$ un repère affine de \mathcal{E} . Montrer que si on note h_k la composante homogène de degré k du polynôme $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(O + \sum_{i=1}^n x_i e_i)$, alors

$$f_\infty \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = h_d(x_1, \dots, x_n). \blacksquare$$

Choisissons un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $\theta_O : \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$, $\vec{v} \mapsto O + \vec{v}$; la réciproque de θ_O est l'application $\theta_O^{-1} : M \mapsto \overrightarrow{OM}$. Notons $\Phi_{\mathcal{R}}$ l'isomorphisme linéaire $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\mathbb{R}^n \rightarrow \vec{\mathcal{E}}$ et $\Psi_{\mathcal{R}}$ l'isomorphisme affine $\theta_O \circ \Phi_{\mathcal{R}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous noterons π_k le projecteur dans le \mathbb{R} -ev des fonctions polynomiales sur \mathbb{R}^n , qui à P polynomiale fait correspondre sa composante homogène de degré k .

Si f est polynomiale de degré $d \geq 1$, par définition $f \circ \Psi_{\mathcal{R}}$ est polynomiale de degré d ; on a donc

$$f \circ \Psi_{\mathcal{R}} = \sum_{k=0}^d \pi_k (f \circ \Psi_{\mathcal{R}}),$$

d'où :

$$f = \left(\sum_{k=0}^{d-1} \pi_k (f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) \right) \circ \Psi_{\mathcal{R}}^{-1} + \pi_d (f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) \circ \Psi_{\mathcal{R}}^{-1}.$$

Posons :

$$g_0 = \left(\sum_{k=0}^{d-1} \pi_k (f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) \right) \circ \Psi_{\mathcal{R}}^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi_0 = \pi_d (f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) \circ \Phi_{\mathcal{R}}^{-1},$$

de telle sorte que $f = g_0 + \varphi_0 \circ \theta_O^{-1}$. La fonction g_0 , polynomiale sur \mathcal{E} , est de degré $\leq d-1$; la fonction φ_0 , polynomiale sur $\vec{\mathcal{E}}$, est homogène de degré d ; montrons qu'un tel couple est unique, et ne dépend donc pas du repère choisi. Supposons que g soit une fonction polynomiale sur \mathcal{E} de degré $\leq d-1$, et que φ soit une fonction polynomiale sur $\vec{\mathcal{E}}$ homogène de degré d , telles que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$f(M) = g(M) + \varphi(\overrightarrow{OM}) = g(M) + \varphi \circ \theta_O^{-1}(M).$$

On a :

$$f \circ \Psi_{\mathcal{R}} = g \circ \Psi_{\mathcal{R}} + \varphi \circ \Phi_{\mathcal{R}}.$$

Comme $g \circ \Psi_{\mathcal{R}}$ est de degré $\leq d - 1$ et que $\varphi \circ \Phi_{\mathcal{R}}$ est homogène de degré d , nous en déduisons :

$$\pi_d(f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{R}} \quad \text{d'où} \quad \varphi = \pi_d(f \circ \Psi_{\mathcal{R}}) \circ \Phi_{\mathcal{R}}^{-1} = \varphi_0 .$$

Cela démontre l'unicité de la décomposition.

On pose $f_{\infty} = \varphi_0$, application polynomiale $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$, homogène de degré d , non nulle. D'après ce qui précède :

$$f = g_0 + f_{\infty} \circ \theta_O^{-1} .$$

où la fonction g_0 est une fonction polynomiale de degré $\leq d - 1$.

Le lecteur remarquera qu'il est impossible de définir la notion de fonction polynomiale homogène sur l'espace affine \mathcal{E} .

§ V.4 BARYCENTRES

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 2$.

a) On donne trois points A_1, A_2, A_3 non alignés et on considère l'isobarycentre de ces points. Quelle propriété du triangle $A_1A_2A_3$ remarque-t-on ?

b) On donne quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de \mathcal{E} , trois d'entre eux n'étant jamais alignés et on considère l'isobarycentre de ces quatre points. Montrer qu'il est situé sur 7 droites remarquables.

c) On donne cinq points de \mathcal{E} et leur isobarycentre. Que peut-on noter d'intéressant ? ■

a) Notons G le barycentre de la famille $((A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1))$. Soit B_1 le barycentre de la famille $((A_2, 1), (A_3, 1))$; d'après le théorème d'associativité, le point G est le barycentre de la famille $((A_1, 1), (B_1, 2))$; les points A_1, G, B_1 sont donc alignés. De même G est sur la médiane en A_2 et sur la médiane en A_3 . Le point G est donc l'unique point commun aux trois médianes du triangle $A_1A_2A_3$.

b) Notons G le barycentre de la famille $((A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (A_4, 1))$. On peut utiliser ici le théorème d'associativité de 7 manières différentes. Soit C_1 l'isobarycentre de la famille $((A_2, 1), (A_3, 1), (A_4, 1))$

barycentre de la famille $((A_1, 1), (C_1, 3))$; les points A_1, G, C_1 sont donc alignés. De manière analogue, on montre que le point G se trouve sur les quatre droites qui joignent un des points à l'isobarycentre des trois autres (si ces points sont distincts, et si les droites sont distinctes).

Soit I le milieu de (A_1, A_2) et J le milieu de (A_3, A_4) . Le point G est le barycentre de la famille $((I, 2), (J, 2))$, c'est donc le milieu de (I, J) ; le point G est donc aligné avec I et J . De manière analogue on montre que G est sur les trois droites qui joignent le milieu d'une arête au milieu de l'arête opposée (si ces milieux sont distincts, et si les droites sont distinctes).

Cette propriété est vraie aussi si $n = 2$, sauf que le quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ n'a ni arêtes ni faces.

c) Notons G l'isobarycentre des points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . On peut utiliser le théorème d'associativité du barycentre d'autant de façons qu'il y a de paires de parties complémentaires (non vides) dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ce nombre est le nombre de droites remarquables qui, en général, passent par G . Le même raisonnement donne pour 4 points le résultat $\binom{4}{1} + \frac{1}{2} \binom{4}{2} = 7$. Pour 5 points, on trouve $\binom{5}{1} + \binom{5}{3} = 15$.

Si $n \geq 3$, on peut aussi appliquer le théorème d'associativité en utilisant des ensembles de trois parties non vides complémentaires. Pour 4 points on trouve ainsi que G se trouve sur les 6 plans contenant une arête et le milieu de l'arête opposée. Déterminons pour 5 points le nombre de plans remarquables qui, en général, passent par G . On trouve facilement que les triplets de 3 entiers > 0 dont la somme est 5 sont à l'ordre près $(3, 1, 1)$ et $(2, 2, 1)$. Le point G se trouve donc sur les $\binom{3}{5} = 10$ plans passant par 2 des points et l'isobarycentre des trois autres, et sur les $\frac{1}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 15$ plans passant par les deux milieux de deux paires de points, et le cinquième point.

Exercice 3 :

Soit \mathcal{E} un plan affine, A, B, C trois points de \mathcal{E} non alignés et α, β, γ trois réels tous différents de 1. Soit L (resp. M ; resp. N) le barycentre des points massiques $(B, 1)$ et $(C, -\alpha)$ (resp. $(C, 1)$ et $(A, -\beta)$; resp. $(A, 1)$ et $(B, -\gamma)$). De même, soit L' (resp. M' ; resp. N') le barycentre des points massiques $(C, 1)$ et $(B, -\alpha)$ (resp. $(A, 1)$ et $(C, -\beta)$; resp. $(B, 1)$ et $(A, -\gamma)$).

a) Quelle est la relation algébrique entre α, β, γ qui exprime que les points L, M, N sont alignés ? Si c'est le cas, déterminer μ et ν pour que L soit le barycentre des points mass

et (N, ν) .

b) Si L, M et N sont alignés sur une droite Δ , montrer que L', M' et N' sont alignés sur une droite Δ' , dite *isotomique* de Δ par rapport au triangle ABC .

c) Montrer que si L, M, N sont alignés, les milieux des segments AL, BM et CN sont aussi alignés (*droite de Newton* des 4 droites AB, BC, CA et LMN).

Trouver une relation remarquable entre la droite de Newton, le centre de gravité du triangle ABC et l'isotomique $L'M'N'$ de LMN . ■

a) Les points L, M et N sont alignés si, et seulement si, il existe une fonction affine non constante $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\varphi(L) = \varphi(M) = \varphi(N) = 0$ (donc φ non constante de valeur 0). Par définition de L, M et N , ces conditions sont équivalentes aux conditions :

$$\varphi(B) - \alpha \varphi(C) = \varphi(C) - \beta \varphi(A) = \varphi(A) - \gamma \varphi(B) = 0 ,$$

soit encore :

$$(1) \quad \varphi(B) = \alpha \varphi(C) , \quad \varphi(C) = \beta \varphi(A) , \quad \varphi(A) = \gamma \varphi(B) .$$

Si L, M, N sont alignés, il existe une fonction affine φ non constante qui vérifie ces conditions ; comme (A, B, C) est une base affine et que φ n'est pas constante, $\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = 0$ est exclu ; l'un de ces trois réels est non nul, et puisque (1) est vérifiée, les trois sont $\neq 0$. On trouve qu'alors :

$$(2) \quad \varphi(A) \varphi(B) \varphi(C) = \alpha \beta \gamma \varphi(A) \varphi(B) \varphi(C) \quad \text{d'où} \quad \alpha \beta \gamma = 1 .$$

Inversement, si $\alpha \beta \gamma = 1$, la fonction affine φ telle que $\varphi(A) = 1$, $\varphi(C) = \beta$ et $\varphi(B) = \alpha \beta$, vérifie les conditions (1), ce qui prouve que L, M, N sont alignés.

Dans la base affine (A, B, C) , des suites de coordonnées barycentriques homogènes de ces points sont, pour $L : (0, 1, -\alpha)$, pour $M : (-\beta, 0, 1)$, pour $N : (1, -\gamma, 0)$. On constate :

$$(-\beta, 0, 1) + \beta (1, -\gamma, 0) = (0, -\beta \gamma, 1) = -\beta \gamma (0, 1, -\alpha) .$$

Le point L est donc barycentre du point M affecté de la masse 1 et du point N affecté de la masse β .

b) En raisonnant comme dans a), on trouve que les points, L' , M' et N' sont alignés si, et seulement si, il existe une fonction affine φ , non égale à la fonction constante nulle, telle que :

$$(3) \quad \varphi(C) = \alpha \varphi(B) \quad \varphi(A) = \beta \varphi(C) \quad \varphi(B) = \gamma \varphi(A) .$$

On voit comme dans a) que cette condition s'écrit $\alpha\beta\gamma = 1$. Nous en déduisons que les points L', M' et N' sont alignés si, et seulement si, les points L, M et N le sont.

c) La suite des coordonnées barycentriques de L est :

$$\frac{1}{1-\alpha} (0, 1, -\alpha) .$$

La suite des coordonnées barycentriques du milieu L'' de AL est donc :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\alpha} (0, 1, -\alpha) + (1, 0, 0) \right) = \frac{1}{2(1-\alpha)} (1-\alpha, 1, -\alpha) .$$

La suite des coordonnées barycentriques de L' est :

$$\frac{1}{1-\alpha} (0, -\alpha, 1) .$$

On constate que la suite des coordonnées barycentriques du barycentre de la famille $((L', 1), (L'', 2))$ est :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\alpha} (0, -\alpha, 1) + \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha, 1, -\alpha) \right) = \frac{1}{3} (1, 1, 1) ;$$

il s'agit par conséquent du point G , isobarycentre du triangle ABC . Nous en déduisons $\overrightarrow{GL'} + 2\overrightarrow{GL''} = \vec{0}$. Le calcul montre qu'on a les égalités analogues $\overrightarrow{GM'} + 2\overrightarrow{GM''} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GN'} + 2\overrightarrow{GN''} = \vec{0}$. Les points L'', M'' et N'' sont donc les images des points L', M' et N' par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$.

Si les points L, M et N sont alignés sur Δ , les points L', M' et N' sont alignés sur Δ' , l'isotomique de Δ par rapport au triangle ABC , et les milieux de AL, BM et CN sont alignés sur la droite de Newton, image de Δ' par l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$.

Exercice 9 (Calcul des coordonnées barycentriques d'un point) :

|| Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$ et $(A_0$

une base affine de \mathcal{E} . On sait qu'à tout point $M \in \mathcal{E}$ correspond une suite $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ unique, telle que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et telle que M soit le barycentre de la famille $((A_i, \lambda_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Calculer les λ_i en utilisant une forme n -linéaire alternée non nulle F sur $\vec{\mathcal{E}}$. ■

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, considérons l'application $\varphi_k : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ qui, à $M \in \mathcal{E}$, fait correspondre le réel :

$$\varphi_k(M) = F(\overrightarrow{MA_0}, \dots, \overrightarrow{MA_{k-1}}, \overrightarrow{MA_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{MA_n}) .$$

Précisons que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\varphi_0(M) = F(\overrightarrow{MA_1}, \dots, \overrightarrow{MA_n}) \quad \text{et} \quad \varphi_n(M) = F(\overrightarrow{MA_0}, \dots, \overrightarrow{MA_{n-1}}) .$$

En retranchant, dans la forme n -linéaire alternée F , le premier vecteur aux suivants, on voit que les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ sont des fonctions affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Fixons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il est clair que pour tout $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $h \neq k$, $\varphi_k(A_h) = 0$. Nous en déduisons :

$$\varphi_k(M) = \lambda_k \varphi_k(A_k) ,$$

où :

$$\varphi_k(A_k) = F(\overrightarrow{A_k A_0}, \dots, \overrightarrow{A_k A_{k-1}}, \overrightarrow{A_k A_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{A_k A_n}) .$$

Si $k > 0$, en retranchant le premier vecteur aux suivants on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_k(A_k) &= F(\overrightarrow{A_k A_0}, \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_{k-1}}, \overrightarrow{A_0 A_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}) = \\ &= (-1)^k F(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_{k-1}}, \overrightarrow{A_0 A_k}, \overrightarrow{A_0 A_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}) . \end{aligned}$$

De manière analogue, pour $k = 0$:

$$\varphi_0(A_0) = F(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}) .$$

Nous obtenons donc finalement pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ l'égalité :

$$\lambda_k = (-1)^k \frac{F(\overrightarrow{MA_0}, \dots, \overrightarrow{MA_{k-1}}, \overrightarrow{MA_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{MA_n})}{F(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})} .$$

L'espace des formes n -linéaires alternées sur $\vec{\mathcal{E}}$ étant de dimension 1, ce rapport ne dépend bien entendu que de M , et non du choix d

§ V.5 APPLICATIONS AFFINES REMARQUABLES

Exercice 2 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$.

a) Montrer que les $\varphi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ telles que $\varphi \circ \varphi = \varphi$ sont les *projections* de \mathcal{E} .

b) Déterminer tous les sous-groupes *finis* de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$.

c) montrer que les seuls sous-groupes G de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ qui sont des parties *compactes* de $\text{Aff}(\mathcal{E})$ sont les sous-groupes finis de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$. ■

a) On sait que les projections affines sont des applications affines idempotentes (cf. Cours). Supposons que φ soit une application affine idempotente. Soit O une origine dans l'image de φ ; par hypothèse O est un point fixe de φ . L'application $\vec{\varphi}$ est évidemment un projecteur du \mathbb{R} -ev $\vec{\mathcal{E}}$. Considérons la projection ψ sur $O + \text{Im} \vec{\varphi}$ parallèlement à $\text{Ker} \vec{\varphi}$. On sait que $\vec{\psi}$ est le projecteur sur $\text{Im} \vec{\varphi}$ parallèlement à $\text{Ker} \vec{\varphi}$ (cf. Cours) ; on a donc $\vec{\psi} = \vec{\varphi}$; comme d'autre part $\psi(O) = O = \varphi(O)$, nous en déduisons $\psi = \varphi$. L'application φ est donc une projection affine.

b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$. Soit $h \in G$ de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $n > 0$ est l'ordre de h dans le groupe fini G , $\lambda^n = 1$. Nous en déduisons $\lambda \in \{-1, 1\}$, puisque $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Les éléments d'un sous-groupe fini de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ ne peuvent donc être que des translations ou des symétries par rapport à des points. Si $T_{\vec{v}} \in G$, \vec{v} ne peut être que d'ordre fini non nul, et par conséquent $\vec{v} = 0$. Le groupe G ne peut donc contenir d'autres translations que l'identité. Notons S_O la symétrie par rapport au point O . Supposons $S_O \in G$ et $S_A \in G$, alors $S_A \circ S_O \in G$, et comme $S_A \circ S_O$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$, nous en déduisons $\overrightarrow{OA} = \vec{0}$, puis $A = O$. Le groupe G ne peut donc contenir qu'au plus une symétrie point.

En conclusion, soit $G = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$, soit il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $G = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}, S_O\}$. Les sous-groupes finis de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ sont donc $\{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$, et les sous-groupes d'ordre 2 engendrés par une symétrie centrale.

c) On suppose maintenant que G est un sous-groupe compact de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$. Soit h une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et de centre O , élément de G , et $A \in \mathcal{E}$, $A \neq O$. L'application $\text{Aff}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, $\varphi \mapsto \varphi(A)$, est affine (cf. § V.2 Exercice 1) donc continue (cf. § V.2 Exercice 3). L'image

par cette application est donc une partie compacte de E . Nous en déduisons que l'ensemble $\{O + \lambda^n \overrightarrow{OA} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est borné, ce qui implique évidemment $|\lambda| = 1$. Si la translation $M \mapsto M + \vec{v}$ est élément de G , pour tout $A \in \mathcal{E}$, on démontre de manière analogue que l'ensemble $\{A + n\vec{v} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est une partie bornée de \mathcal{E} et que par conséquent $\vec{v} = 0$. Le sous-groupe G ne peut contenir que l'identité et des symétries point. On démontre comme dans le b) que soit $G = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$, soit il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $G = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}, S_O\}$. Les sous-groupes compacts de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ sont donc les sous-groupes finis de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$.

Exercice 3 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 1$. Pour tout sous-groupe G de $\text{GA}(\mathcal{E})$, on appelle *point fixe* de G tout point $A \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(A) = A$ pour tout $\varphi \in G$.

a) Soit deux homothéties affines φ et φ' de \mathcal{E} , de rapports respectifs $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\lambda' \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, de centres respectifs O et O' . Vérifier que $\psi = \varphi' \circ \varphi$ est une translation ssi $\lambda\lambda' = 1$, et une homothétie affine ssi $\lambda\lambda' \neq 1$. Si $\lambda\lambda' = 1$, préciser le vecteur de la translation. Si $\lambda\lambda' \neq 1$, déterminer le centre de l'homothétie ψ en fonction de O , O' , et λ et λ' . Trouver tous les couples (φ, φ') d'homothéties affines $\neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$, *permutables*.

b) Montrer qu'un sous-groupe G de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ tel que $G \cap T(\mathcal{E}) = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$ a nécessairement un point fixe.

c) Soit G un sous-groupe de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ sans point fixe et qui n'est pas inclus dans $T(\mathcal{E})$, montrer que l'ensemble des centres des homothéties éléments de G est infini et non borné. ■

Le \mathbb{R} -ev sous-jacent à \mathcal{E} sera noté E .

a) On vérifie que $\vec{\psi} = \vec{\varphi} \circ \vec{\varphi}' = \lambda' \lambda \text{Id}_E$, et que par conséquent ψ est un élément de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ de rapport $\lambda\lambda'$. Si $\lambda\lambda' = 1$ l'application ψ est une translation de vecteur $\overrightarrow{O\psi(O)} = \overrightarrow{O\varphi'(O)} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'\varphi'(O)} = (1 - \lambda') \overrightarrow{OO'}$. Si $\lambda\lambda' \neq 1$, ψ est une homothétie. On vérifie que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \psi(M) &= \varphi'(\varphi(M)) = \varphi'(O + \lambda \overrightarrow{OM}) = \\ &= O' + \lambda' \overrightarrow{O'O} + \lambda' \lambda \overrightarrow{OM} = O + (1 - \lambda') \overrightarrow{OO'} + \lambda' \lambda \overrightarrow{OM}. \end{aligned}$$

Le centre de l'homothétie ψ est le point I de \mathcal{E} tel que :

$$I = O + (1 - \lambda') \overrightarrow{OO'} + \lambda' \lambda \overrightarrow{OI},$$

d'où :

$$I = O + \frac{1 - \lambda'}{1 - \lambda' \lambda} \overrightarrow{OO'}.$$

Supposons que φ et φ' commutent, alors $\varphi'(O) = \varphi'(\varphi(O)) = \varphi(\varphi'(O))$. Le point $\varphi'(O)$, invariant par l'homothétie φ , ne peut être que le centre de φ ; on a donc $\varphi'(O) = O$; le point O est donc le centre de φ' , i.e. $O = O'$. Réciproquement, il est clair que si $O = O'$, les homothéties φ et φ' commutent. Nous en déduisons que deux homothéties $\neq \text{Id}_{\mathcal{E}}$ commutent si, et seulement si, elles ont même centre.

b) Soit G un sous-groupe de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ tel que $G \cap T(\mathcal{E}) = \{\text{Id}_{\mathcal{E}}\}$. Soient φ et φ' des éléments de G différents de $\text{Id}_{\mathcal{E}}$; ce sont des homothéties. On constate que le commutateur $\varphi \circ \varphi' \circ \varphi^{-1} \varphi'^{-1}$ est un élément de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ de rapport $\lambda \lambda' \lambda^{-1} \lambda'^{-1} = 1$; il s'agit donc d'une translation, et comme c'est un élément de G , c'est $\text{Id}_{\mathcal{E}}$. Ceci prouve que φ et φ' commutent. D'après a), φ et φ' ont même centre. Les éléments de G différents de $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ (s'il en existe) sont donc des homothéties qui ont toutes le même centre; ce centre commun est un point fixe pour G .

c) D'après l'hypothèse, G possède au moins une homothétie φ , de centre O et de rapport $\lambda \neq 1$ et, d'après b), au moins une translation de vecteur $\neq \vec{0}$. Pour toute translation $T_{\vec{v}} \in G$, l'homothétie $T_{\vec{v}} \circ \varphi$ est élément de G ; son centre est le point I tel que :

$$I = O + \lambda \overrightarrow{OI} + \vec{v} \quad \text{d'où} \quad I = O + \frac{1}{1 - \lambda} \vec{v}.$$

L'ensemble des $\vec{v} \in E$ tels que $T_{\vec{v}} \in G$ est un sous-groupe additif de E , non réduit à $\{\vec{0}\}$; il est donc infini et non borné. L'ensemble des centres des homothéties $\tau \circ \varphi$, où τ est une translation élément de G , est donc un réseau de points de \mathcal{E} , infini et non borné.

Exercice 7 :

|| Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 2$. On considère une application injective $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que

$$(\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2) \quad (A \neq B) \Rightarrow \exists \rho \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \rho \overrightarrow{AB}.$$

|| Démontrer $\varphi \in \mathcal{H}_T(\mathcal{E})$. ■

Soit $(A, B) \in \mathcal{E}^2$, $A \neq B$, fixé; le réel ρ tel que $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \rho \overrightarrow{AB}$ n'est pas nul, car φ est injective. Introduisons l'application affine

telle que $h(A) = \varphi(A)$ et de rapport ρ . On a :

$$h(B) = h(A) + \rho \overrightarrow{AB} = \varphi(A) + \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \varphi(B) .$$

Pour tout point M qui n'est pas aligné avec A et B , le point $\varphi(M)$ est sur la parallèle à la droite D_{AM} passant par $\varphi(A)$, et sur la parallèle à la droite D_{BM} passant par $\varphi(B)$. Ces deux droites ne sont pas parallèles, puisque M n'est pas aligné avec A et B . Elles se coupent en un unique point qui est $\varphi(M)$ et aussi $h(M)$, *puisque'un élément de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ transforme une droite en une droite parallèle*. Nous en déduisons $\varphi(M) = h(M)$ pour tout $M \in \mathcal{E}$ qui n'est pas aligné avec A et B .

Soit $C \in \mathcal{E}$ qui n'est pas aligné avec A et B ; il existe de tels points, car \mathcal{E} est de dimension ≥ 2 . Les applications φ et h coïncident en A et en C . En raisonnant comme précédemment, on montre que h et φ coïncident aussi en tout point qui n'est pas sur la droite D_{AC} . Comme $D_{AB} \cap D_{AC} = \{A\}$, et que φ et h coïncident en A , on voit que $\varphi = h$. L'application φ est donc élément du groupe $\mathcal{H}_T(\mathcal{E})$.

N.B. Le résultat est évidemment faux sans l'hypothèse $n \geq 2$.

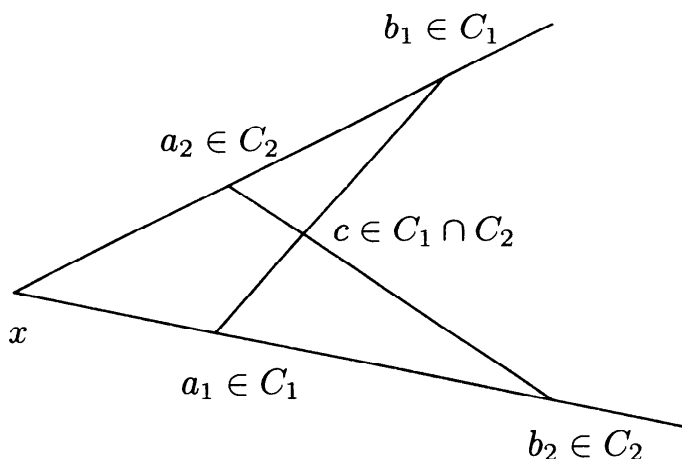
§ V.6 CONVEXITÉ

Exercice 3 (*Lemme de Kakutani*) :

|| Soit C_1 et C_2 deux parties de E non vides, convexes, disjointes, telles que $C_1 \cup C_2 \neq E$, et soit $x \in E \setminus (C_1 \cup C_2)$. Soit Γ_i l'enveloppe convexe de $\{x\} \cup C_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Montrer que $\Gamma_1 \cap C_2 = \emptyset$ ou $\Gamma_2 \cap C_1 = \emptyset$. ■

D'après le Théorème V.6.3, les éléments de Γ_i sont les barycentres des familles massiques à support fini et de masse 1 à masses positives de points de $\{x\} \cup C_i$. En utilisant le théorème d'associativité, comme C_i est convexe, on voit que Γ_i est l'ensemble des barycentres des familles $((x, 1 - \lambda), (y, \lambda))$, où $\lambda \in [0, 1]$ et $y \in C_i$, soit encore $\Gamma_i = \bigcup_{y \in C_i} [x, y]$.

Supposons $\Gamma_2 \cap C_1 \neq \emptyset$ et $\Gamma_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Soit $a_1 \in \Gamma_2 \cap C_1$; d'après ce qui précède il existe $\lambda_1 \in [0, 1]$, et $b_2 \in C_2$ tels que a_1 soit le barycentre de la famille $((x, 1 - \lambda_1), (b_2, \lambda_1))$. Soit $a_2 \in \Gamma_1 \cap C_2$; il existe $\lambda_2 \in [0, 1]$, et $b_1 \in C_1$ tels que a_2 soit le barycentre de la famille $((x, 1 - \lambda_2), (b_1, \lambda_2))$. La situation générale est représentée dans la figure suivante :



Vérifions que les segments $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ ont toujours un élément commun, qui est alors élément de $C_1 \cap C_2$. Si $\lambda_1 = 1$, le point $a_1 = b_2$ est commun ; si $\lambda_2 = 1$, le point $a_2 = b_1$ est commun ; nous supposons dans la suite $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_2 < 1$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, notons c le barycentre de la famille $((a_1, \lambda), (b_1, 1 - \lambda))$ et c' le barycentre de la famille $((a_2, \mu), (b_2, 1 - \mu))$. On a :

$$\overrightarrow{xc} = \lambda \overrightarrow{xa_1} + (1 - \lambda) \overrightarrow{xb_1} = \lambda \lambda_1 \overrightarrow{xb_2} + (1 - \lambda) \overrightarrow{xb_1},$$

et :

$$\overrightarrow{xc'} = \mu \overrightarrow{xa_2} + (1 - \mu) \overrightarrow{xb_2} = \mu \lambda_2 \overrightarrow{xb_1} + (1 - \mu) \overrightarrow{xb_2}.$$

Pour que les points c et c' coïncident, il suffit que :

$$\lambda + \lambda_2 \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda + \mu = 1.$$

Comme λ_1 et λ_2 sont dans l'intervalle $[0, 1[$ on trouve que ce système a pour solution le couple :

$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2}, \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1 \lambda_2} \right).$$

On vérifie qu'alors λ et μ sont dans l'intervalle $]0, 1]$; pour ces valeurs de λ et de μ , les points c et c' coïncident, et on obtient un point commun aux segments $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$.

Nous avons démontré que si $I_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ et $I_2 \cap C_1 \neq \emptyset$, alors $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Nous en déduisons que si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, alors $I_1 \cap C_2 = \emptyset$ ou $I_2 \cap C_1 = \emptyset$.

Exercice 7 :

Soit E un \mathbb{R} -ev. On appelle ici *cône pointé* une réunion de demi-droites vectorielles fermées. Dans ce qui suit C désigne un cône pointé convexe fermé.

a) Montrer que la réunion des droites vectorielles contenues dans C (s'il en existe) est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C .

b) Le cône C est dit *saillant* s'il ne contient aucune droite vectorielle.

Démontrer que, si C est saillant, les relations $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ entraînent $x_1 = \dots = x_p = 0$. Réciproque.

c) On suppose C saillant. On choisit une norme ν sur E ; soit alors S la sphère unité de E et K l'ensemble $S \cap C$. On sait que \hat{K} est compact (cf. Exercice 5). Utiliser b) pour montrer que $0 \notin \hat{K}$.

d) Soit Γ l'ensemble des points λx , où x parcourt \hat{K} et λ décrit $[1, +\infty[$. Prouver que Γ est une partie convexe et fermée de E et que $0 \notin \Gamma$.

e) En utilisant l'exercice 6, montrer qu'il existe un hyperplan affine H séparant strictement 0 et Γ (i.e. tel que l'un des demi-espaces ouverts de frontière H contienne Γ et que l'autre contienne 0).

Prouver enfin que $H \cap C$ est compact, et que H rencontre toute demi-droite vectorielle contenue dans C . ■

a) Supposons qu'il existe des droites vectorielles incluses dans C et notons F leur réunion (donc $\{0\} \subset F \subset C$). Il est clair que si $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x \in F$. D'autre part, si $(x, y) \in F^2$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x + y \neq 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(x + y) = \frac{1}{2} 2\lambda x + \frac{1}{2} 2\lambda y$; $2\lambda x$ et $2\lambda y$ sont dans C , et comme C est convexe, $\lambda(x + y) \in C$. La droite $\mathbb{R}(x + y)$ est incluse dans C , donc $x + y \in F$. On voit donc que F est un sous- \mathbb{R} -ev de E , inclus dans C . Si F' est un sous- \mathbb{R} -ev de E inclus dans C , tout élément de F' appartient à une droite incluse dans C , donc $F' \subset F$. Le sous- \mathbb{R} -ev F est donc le plus grand des sous- \mathbb{R} -ev de E inclus dans C .

b) Supposons C saillant, et soit $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$, tel que $\sum_{i=1}^p x_i = 0$. Montrons $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket), x_i = 0$; nous pouvons supposer $p \geq 2$

est un cône pointé, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda x_p \in C$. On remarque que comme C est convexe :

$$-\frac{1}{p-1} x_p = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p-1} x_i \in C.$$

Nous en déduisons, puisque C est un cône, que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $-\lambda x_p \in C$. Finalement, on voit que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x_p \in C$. Si x_p n'était pas nul, le cône C contiendrait la droite $\mathbb{R}x_p$ et ne serait donc pas saillant. Nous en déduisons $x_p = 0$. On démontrerait de manière analogue $x_i = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Réciproquement, si les relations $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ entraînent $x_1 = \dots = x_p = 0$, alors pour tout $x \in C \setminus \{0\}$, $-x \notin C$ (sinon on aurait $x \in C$, $-x \in C$, $x - x = 0$, mais $x \neq 0$). Il est donc clair que C ne peut contenir aucune droite vectorielle, i.e. est saillant.

c) Supposons $0 \in \widehat{K}$. D'après le théorème V.6.3, il existe une famille massique finie, $((x_i, \lambda_i))_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) \lambda_i \geq 0$, $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) x_i \in K$, et $0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$. Comme $K \subset C$, et que C est un cône, $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) \lambda_i x_i \in C$. D'après b), cela implique $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) \lambda_i x_i = 0$, mais comme $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) x_i \neq 0$, nous en déduisons $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) \lambda_i = 0$, ce qui est en contradiction avec $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Nous en déduisons $0 \notin \widehat{K}$.

d) Il est évident que $0 \notin \Gamma$, puisque pour tout $\lambda \geq 1$, $0 \notin \lambda \widehat{K}$.

Montrons que Γ est convexe. Soit pour $i \in \{1, 2\}$, $y_i = \lambda_i x_i \in \Gamma$, où $\lambda_i \geq 1$, et $x_i \in \widehat{K}$. Pour tout $\mu \in [0, 1]$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mu y_1 + (1 - \mu) y_2 &= \mu \lambda_1 x_1 + (1 - \mu) \lambda_2 x_2 = \\ &= (\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2) \left[\frac{\mu \lambda_1}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2} x_1 + \frac{(1 - \mu) \lambda_2}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2} x_2 \right]. \end{aligned}$$

On voit que les réels

$$\frac{\mu \lambda_1}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2} \quad \text{et} \quad \frac{(1 - \mu) \lambda_2}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2},$$

sont ≥ 0 de somme 1, et que $\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2 \geq \mu + (1 - \mu) = 1$. Nous en déduisons :

$$\frac{\mu \lambda_1}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2} x_1 + \frac{(1 - \mu) \lambda_2}{\mu \lambda_1 + (1 - \mu) \lambda_2} x_2 \in \widehat{K} \quad \text{et} \quad \mu y_1 + (1 - \mu) y_2 \in \Gamma.$$

L'ensemble Γ est donc convexe.

Montrons que Γ est fermé. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite d'éléments de Γ qui converge vers $y \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \lambda_n x_n$, où $\lambda_n \geq 1$ et $x_n \in \widehat{K}$. Comme \widehat{K} est compact, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente. Cela signifie qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, et un élément $x \in \widehat{K}$, tels que $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x$. La suite $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est aussi convergente, car :

$$\lambda_{n_k} = \frac{\nu(y_{n_k})}{\nu(x_{n_k})} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{\nu(y)}{\nu(x)},$$

et sa limite λ est ≥ 1 . On a $y = \lambda x$, où $\lambda \geq 1$ et $x \in \widehat{K}$, donc $y \in \Gamma$. L'ensemble Γ est donc fermé, puisque séquentiellement fermé.

e) D'après l'exercice 6a), Γ est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent ; comme $0 \notin \Gamma$, il existe un demi-espace fermé qui contient Γ , mais n'a pas 0 pour élément. Autrement dit, il existe une fonction affine $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $(\forall x \in \Gamma) \quad \varphi(x) \geq 0$, et $\varphi(0) < 0$. Il est clair que l'hyperplan d'équation $\varphi(x) = \frac{1}{2} \varphi(0)$ sépare strictement 0 et Γ .

Soit H un hyperplan qui sépare strictement 0 et Γ . Il est clair qu'il existe une application affine $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $(\forall x \in \Gamma) \quad \psi(x) > 0$, $H = \psi^{-1}(\{0\})$, et $\psi(0) < 0$. Si $x \in H \cap C$, alors $x \neq 0$. Posons $y = \frac{1}{\|x\|} x$; on voit que $y \in C \cap S = K \subset \widehat{K} \subset \Gamma$, donc $\psi(y) > 0$. Nous en déduisons :

$$0 < \psi \left(\frac{1}{\|x\|} x + \left(1 - \frac{1}{\|x\|} \right) 0 \right) = \left(1 - \frac{1}{\|x\|} \right) \psi(0)$$

d'où :

$$1 - \frac{1}{\|x\|} < 0 \quad \text{et} \quad \|x\| < 1.$$

L'ensemble $H \cap C$ est compact, puisque fermé et borné.

Si $x \in C \setminus \{0\}$, on voit comme ci-dessus que $y = \frac{1}{\|x\|} x \in \Gamma$, donc

$$\psi(y) = \psi \left(\frac{1}{\|x\|} x + \left(1 - \frac{1}{\|x\|} \right) 0 \right) > 0.$$

Pour $t = \frac{1}{\|x\|}$, $\psi(tx + (1-t)0) > 0$, et pour $t = 0$, $\psi(0) < 0$, donc $\exists t \in]0, \frac{1}{\|x\|}[$, $\psi(tx) = 0$, c'est-à-dire $tx \in H$. L'hyperplan H coupe donc toute demi-droite incluse dans le cône C .

Exercice 8 :

Soit A une partie convexe de E . On dit qu'un point $a \in A$ est *point extrémal* de A s'il n'existe aucun segment non réduit à un point contenu dans A et dont a soit un point intérieur, autrement dit si les relations $x \in A$, $y \in A$, $a = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $0 < \lambda < 1$ entraînent $x = y = a$.

a) Soit H un *hyperplan d'appui* de A (cf. Exercice 6). Prouver que tout point extrémal de $A \cap H$ est point extrémal de A .

b) Soit K une partie convexe, compacte non vide de E . Montrer que, pour tout hyperplan affine H_0 , il existe au moins un hyperplan d'appui H de K parallèle à H_0 . En raisonnant par récurrence sur $n = \dim E$, en déduire que tout hyperplan d'appui H de K contient au moins un point extrémal de K .

c) K étant fixé, soit $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble de ses points extrémaux et $L = \widehat{\mathcal{E}(K)}$. Montrer que $\text{Adh}(L) \subset K$. Puis si $x \in K \setminus \text{Adh}(L)$, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui H de K tel que $H \cap \text{Adh}(L) = \emptyset$. En déduire enfin $\text{Adh}(L) = K$. ■

L'ensemble A étant une partie convexe d'un espace affine de dimension ≥ 1 , nous appellerons hyperplan d'appui de A un hyperplan H coupant A et tel que A soit inclus dans l'un des deux demi-espaces de frontière H . Nous supposons dans la suite $\dim E \geq 1$.

a) Soit H un hyperplan d'appui de A et a un point extrémal du convexe $A \cap H$ (qui n'est pas vide). Il existe une fonction affine $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $H = \varphi^{-1}(\{0\})$ et $(\forall z \in A) \varphi(z) \geq 0$. Si $[x, y] \subset A$, et $a \in]x, y[$, la fonction affine φ reste ≥ 0 sur $[x, y]$, et prend la valeur 0 en $a \in]x, y[$, donc reste nulle sur $[x, y]$. Cela implique $[x, y] \subset H \cap A$, ce qui est exclu puisque a est point extrémal de $A \cap H$. Nous en déduisons que a est point extrémal de A .

b) Soit φ une fonction affine non nulle telle que $H_0 = \varphi^{-1}(\{0\})$. Comme φ est continue, elle est bornée sur la partie compacte non vide K , et atteint ses bornes. Soit $x_0 \in K$ et $x_1 \in K$ tels que :

$$\varphi(x_1) = \inf_{x \in K} \varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x_2) = \sup_{x \in K} \varphi(x).$$

Il est clair que les hyperplans $H_1 = \varphi^{-1}(\varphi(x_1))$ et $H_2 = \varphi^{-1}(\varphi(x_2))$ sont des hyperplans d'appui de K , parallèles à H_0 .

Montrons par récurrence sur $n = \dim E$, que si K est une partie compacte et convexe non vide de E , K a des points extrémaux. Cette propriété est vraie si $n = 1$, puisque les compacts convexes non vides de \mathbb{R} sont les intervalles fermés bornés, de la forme $[a, b]$, où $a < b$; il est clair que a et b sont les points extrémaux de $[a, b]$. Supposons que la propriété soit vraie pour l'entier n avec $n \geq 1$. Soit E un espace affine de dimension $n+1$, et K une partie convexe compacte non vide de E . D'après ce qui précède, K a des hyperplans d'appui. Soit H l'un de ces hyperplans d'appui. L'ensemble $H \cap K$ est une partie convexe fermée et non vide de l'espace affine H de dimension n . D'après l'hypothèse de récurrence, $H \cap K$ a un point extrémal, et d'après a), ce point est aussi point extrémal de K . La propriété est donc vraie en dimension $n+1$. Cela termine la démonstration par récurrence. Cette proposition est vraie aussi si E est de dimension 0, c'est-à-dire dans le cas où E est un singleton.

Nous en déduisons que si $\dim E \geq 1$, et que H est un hyperplan d'appui de K , $H \cap K$ a au moins un point extrémal, qui est aussi un point extrémal de K (cf. a)).

c) Comme $\mathcal{E}(K) \subset K$, et que K est convexe, $L = \widehat{\mathcal{E}(K)} \subset K$. Comme K est fermée, $\text{Adh}(L) \subset K$. D'après l'Exercice 1, $\text{Adh}(L)$ est convexe, et comme c'est un fermé inclus dans une partie compacte, c'est une partie convexe compacte, et non vide d'après b).

Supposons qu'il existe $x_0 \in K \setminus \text{Adh}(L)$. D'après l'Exercice 6a), il existe une application affine $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $(\forall y \in \text{Adh}(L)) \varphi(y) \geq 0$, et $\varphi(x_0) < 0$. L'application φ étant continue, elle est minorée sur K et atteint sa borne inférieure; soit $x_1 \in K$ tel que :

$$\varphi(x_1) = \inf_{z \in K} \varphi(z) \leq \varphi(x_0) < 0.$$

Notons H l'hyperplan $\varphi^{-1}(\varphi(x_1))$; H est un hyperplan d'appui de K , et $H \cap K$ contient un élément extrémal x_2 de K (cf. b)). On a $\varphi(x_2) = \varphi(x_1) < 0$ et $x_2 \in \mathcal{E}(K) \subset L \subset \text{Adh}(L)$, ce qui est contradictoire. Nous en déduisons finalement $\text{Adh}(L) = K$.

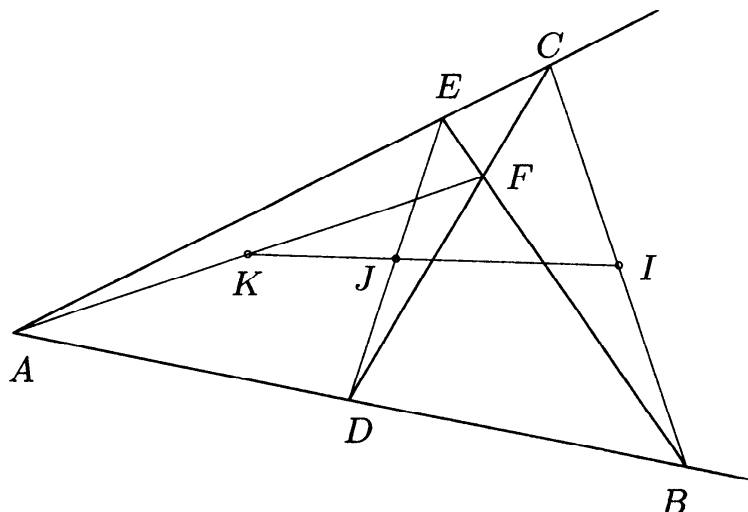
Une partie convexe compacte non vide est donc égale à l'adhérence de l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

§ V.7 GÉOMÉTRIE AFFINE EN DIMENSION 2 OU 3

Exercice 1 :

|| On donne quatre droites $(\mathcal{D}_i)_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}$ du plan affine

sécantes deux à deux en six points distincts. Si deux d'entre elles se coupent en A et les deux autres en F , le segment $[A, F]$ est appelé une *diagonale* du quadrilatère complet formé par les quatre droites. Montrer que les milieux des diagonales sont trois points alignés. ■



On définit les points conformément à la figure. Prenons comme repère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Le point D a pour coordonnées $(d, 0)$, le point E a pour coordonnées $(0, e)$. Le point I a pour coordonnées $(1/2, 1/2)$, et le point J , $(d/2, e/2)$. Les coordonnées (x, y) du point F vérifient les équations :

$$x + \frac{y}{e} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x}{d} + y = 1 .$$

Les coordonnées (x, y) du point K vérifient donc les équations :

$$x + \frac{y}{e} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{x}{d} + y = \frac{1}{2} .$$

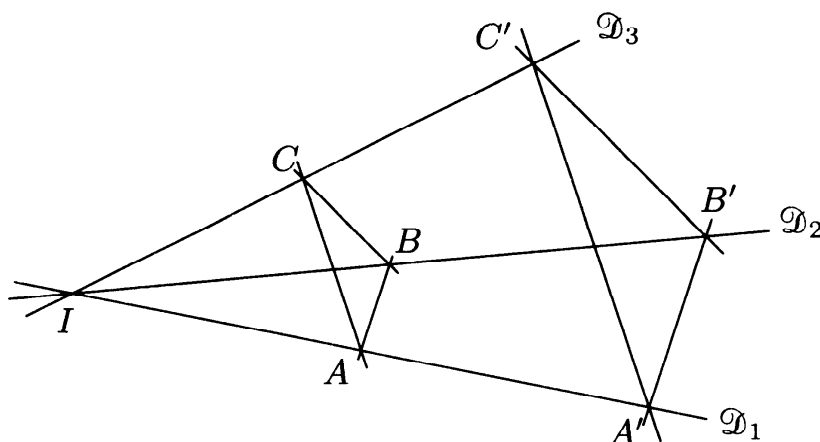
Pour montrer que les points I , J , et K sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe une combinaison linéaire non triviale des fonctions affines $x + \frac{y}{e} - \frac{1}{2}$ et $\frac{x}{d} + y - \frac{1}{2}$, s'annule en I et en J . On trouve facilement que les coordonnées (x, y) des points I et J vérifient l'équation :

$$d \left(\frac{x}{d} + y - \frac{1}{2} \right) - e \left(x + \frac{y}{e} - \frac{1}{2} \right) = 0 .$$

Les points I , J et K sont donc alignés.

Exercice 3 (théorème de Desargues) :

On donne trois droites distinctes \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_3 du plan affine \mathcal{E}_2 qui sont soit parallèles, soit concourantes en I . On prend deux points A et A' sur \mathcal{D}_1 , deux points B et B' sur \mathcal{D}_2 et deux points C et C' sur \mathcal{D}_3 , tous distincts de I . Montrer que les hypothèses $\text{Dr}(A, B)$ parallèle à $\text{Dr}(A', B')$ et $\text{Dr}(A, C)$ parallèle à $\text{Dr}(A', C')$ entraînent comme conséquence $\text{Dr}(B, C)$ parallèle à $\text{Dr}(B', C')$. Etudier une réciproque. ■



Introduisons l'application affine $f \in \mathcal{H}_T(\mathcal{E}_2)$ suivante.

Si les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont concourantes en I , f est l'homothétie de centre I qui transforme A en A' ; les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont invariantes par f .

Si les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont parallèles, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$; les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont invariantes par f .

On fait les hypothèses de l'énoncé. La droite $f(\text{Dr}(A, B))$ est parallèle à $\text{Dr}(A, B)$ et passe par $f(A) = A'$; c'est donc la droite $\text{Dr}(A', B')$. L'image de B par f est sur la droite \mathcal{D}_2 qui est stable par f , et sur la droite $\text{Dr}(A', B')$, c'est donc B' . On démontre de manière analogue $f(C) = C'$. L'image de la droite $\text{Dr}(B, C)$ par f est donc la droite $\text{Dr}(B', C')$, et comme $f \in \mathcal{H}_T(\mathcal{E}_2)$, nous en déduisons que les droites $\text{Dr}(B, C)$ et $\text{Dr}(B', C')$ sont parallèles.

Réciproque.

Supposons que \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 soient trois droites de \mathcal{E}_2 , et qu'il existe deux points distincts A et A' sur \mathcal{D}_1 , deux points distincts B et B' sur \mathcal{D}_2 et deux points distincts C et C' sur \mathcal{D}_3 , le triplet (A, B, C) étant affinement libre, de même que le triplet (A', B', C') , tels que les droi

et $\text{Dr}(A', B')$, $\text{Dr}(A, C)$ et $\text{Dr}(A', C')$, $\text{Dr}(B, C)$ et $\text{Dr}(B', C')$, soient parallèles. Montrons qu'alors les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont concourantes ou parallèles.

Par hypothèse, il existe trois scalaires λ, μ, ν non nuls tels que :

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{A'C'} = \mu \overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{B'C'} = \nu \overrightarrow{BC} .$$

Nous en déduisons :

$$\mu \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} = \mu \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BC} ,$$

et comme la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre, cela implique $\lambda = \mu = \nu$. Considérons l'élément f de $\mathcal{H}_T(\mathcal{E}_2)$, de rapport λ , tel que $f(A) = A'$. On a :

$$f(B) = f(A) + \lambda \overrightarrow{AB} = A' + \overrightarrow{A'B'} = B' ,$$

et de même $f(C) = C'$.

Si f est une homothétie de centre I , la droite $\mathcal{D}_1 = \text{Dr}(A, f(A))$ passe par I ; il en est de même pour les droites \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . Dans ce cas, les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont concourantes.

Si f est une translation de vecteur \vec{v} , la droite $\mathcal{D}_1 = \text{Dr}(A, f(A))$ est dirigée par \vec{v} ; il en est de même pour les droites \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . Dans ce cas, les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont parallèles.

Les droites \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont donc bien, sous ces hypothèses, concourantes ou parallèles.

Exercice 5 (théorème de Ceva) :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On donne trois points } A, B, C \text{ non alignés du plan affine} \\ \mathcal{E}_2. \text{ Soit } A' \in \text{Dr}(B, C) \setminus \{B, C\}, B' \in \text{Dr}(C, A) \setminus \{C, A\}, \\ C' \in \text{Dr}(A, B) \setminus \{A, B\}. \text{ Montrer que les droites } \text{Dr}(A, A'), \\ \text{Dr}(B, B'), \text{Dr}(C, C') \text{ sont concourantes ou parallèles ssi} \\ \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1. \blacksquare \end{array} \right.$$

Si $M \in \mathcal{E}_2$, on note $(\alpha(M), \beta(M), \gamma(M))$, le triplet des coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A, B, C) . Les fonctions α, β, γ sont trois fonctions affines non constantes $\mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, de somme 1 ; $\alpha^{-1}(\{0\})$ est la droite $\text{Dr}(B, C)$, $\beta^{-1}(\{0\})$ est la droite $\text{Dr}(C, A)$ et de même $\gamma^{-1}(\{0\}) = \text{Dr}(A, B)$.

Comme : $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{A'B} = 0$, une suite de coordonnées barycentriques homogènes du point A' est $(0, -\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$. On remarque qu

affine $\alpha' = \overline{A'B} \cdot \beta + \overline{A'C} \cdot \gamma$, est non constante et nulle en A et en A' ; on a donc $\text{Dr}(A, A') = \alpha'^{-1}(\{0\})$. On trouve de manière analogue que $\text{Dr}(B, B') = \beta'^{-1}(\{0\})$ où $\beta' = \overline{B'C} \cdot \gamma + \overline{B'A} \cdot \alpha$, et $\text{Dr}(C, C') = \gamma'^{-1}(\{0\})$ où $\gamma' = \overline{C'A} \cdot \alpha + \overline{C'B} \cdot \beta$.

Les droites $\text{Dr}(A, A')$, $\text{Dr}(B, B')$, $\text{Dr}(C, C')$ sont concourantes ou parallèles si, et seulement si, elles appartiennent à un même faisceau (cf. § V.7 Exemple 1) donc si, et seulement si, les fonctions affines α', β', γ' sont liées. Les coordonnées de α' dans la base (α, β, γ) de $\text{Aff}(\mathcal{E}_2, \mathbb{R})$ sont $(0, \overline{A'B}, \overline{A'C})$, les coordonnées de β' sont $(\overline{B'A}, 0, \overline{B'C})$, et celles de γ' sont $(\overline{C'A}, \overline{C'B}, 0)$. Ces trois fonctions affines sont liées si, et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \overline{A'B} & \overline{A'C} \\ \overline{B'A} & 0 & \overline{B'C} \\ \overline{C'A} & \overline{C'B} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

On en déduit facilement que la condition nécessaire et suffisante cherchée est :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 9 :

On donne dans un espace affine de dimension $n \geq 3$ trois droites (A) , (B) , (C) concourantes en O et non coplanaires. Sur chacune d'entre elles on prend trois points (A_i) , (B_i) , (C_i) ($i \in \{1, 2, 3\}$). On suppose $\frac{2}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA_3}}$, et les relations analogues sur les droites (B) et (C) . Montrer que les 7 plans $A_i B_j C_k$ où $i + j + k = 6$ sont concourants. ■

Déterminons d'abord les triplets (i, j, k) d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ tels que $i + j + k = 6$. Le triplet contient nécessairement un nombre impair de 2 sinon sa somme serait impaire. Le triplet peut être $t = (2, 2, 2)$. Les triplets contenant une seule occurrence de 2 sont : $p = (2, 1, 3)$ et $p' = (2, 3, 1)$, $q = (3, 2, 1)$ et $q' = (1, 2, 3)$, $r = (1, 3, 2)$ et $r' = (3, 1, 2)$; on trouve donc 7 plans : $T = A_2 B_2 C_2$, $P = A_2 B_1 C_3$ et $P' = A_2 B_3 C_1$, $Q = A_3 B_2 C_1$ et $Q' = A_1 B_2 C_3$, $R = A_1 B_3 C_2$ et $R' = A_3 B_1 C_2$.

On munit l'espace d'un repère \mathcal{R} d'origine O dont les axes de coordonnées soient les droites (A) , (B) et (C) . Posons $a_i = 1/\overline{OA_i}$, $b_i = 1/\overline{OB_i}$ et $c_i = 1/\overline{OC_i}$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$; d'après l'hypothèse $2a_2 = a_1 + a_3$, $2b_2 = b_1 + b_3$ et $2c_2 = c_1 + c_3$. Une équation du plan T est :

$$(T) : \frac{x}{\overline{OA_2}} + \frac{y}{\overline{OB_2}} + \frac{z}{\overline{OC_2}} = 1 \quad \text{soit} \quad (T) : a_2 x + b_2 y + c_2 z = 1$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned}(P) : a_2 x + b_1 y + c_3 z &= 1 & (P') : a_2 x + b_3 y + c_1 z &= 1 \\(Q) : a_3 x + b_2 y + c_1 z &= 1 & (Q') : a_1 x + b_2 y + c_3 z &= 1 . \\(R) : a_1 x + b_3 y + c_2 z &= 1 & (R') : a_3 x + b_1 y + c_2 z &= 1\end{aligned}$$

Supposons que les plans (P) , (Q) , (R) aient un point commun M , de coordonnées (x, y, z) . En faisant la somme des équations de (P) , (Q) , (R) , on trouve que (x, y, z) vérifie :

$$(a_2 + a_1 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)y + (c_3 + c_1 + c_2)z = 3 ,$$

soit $3a_2x + 3b_2y + 3c_2z = 3$. Le point M est donc dans le plan (T) . On remarque aussi que :

$$1 = 2(a_2x + b_2y + c_2z) - (a_2x + b_1y + c_3z) = a_2x + b_3y + c_1z .$$

Le point M est donc aussi dans le plan (P') ; on montre de même que M se trouve dans les plans (Q') et (R') . Les 7 plans passent donc par M .

Si les plans (P) , (Q) et (R) n'ont pas de point commun, ce qui peut arriver, les 7 plans ne peuvent pas être concourants.

Chapitre VI

ESPACES AFFINES EUCLIDIENS

§ VI.1 GÉNÉRALITÉS ; ISOMÉTRIES

Exercice 2 :

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension $n \geq 2$, d'espace directeur E .

a) Soit φ une fonction affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ non constante, et \mathcal{H} l'hyperplan $\varphi^{-1}(\{0\})$. On note \vec{V} le vecteur de E tel que $\varphi = (\vec{V} \mid \cdot)$. Montrer que la projection orthogonale de \mathcal{E} sur \mathcal{H} est l'application $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$,

$$M \mapsto M + \left(-\frac{\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \vec{V} \right),$$

et que la réflexion d'hyperplan \mathcal{H} est donnée par

$$M \mapsto M + \left(-\frac{2\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \vec{V} \right).$$

b) Soit \mathcal{V} un sous-espace affine de dimension $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ de \mathcal{E} ; posons $q = n - p$. Supposons \mathcal{V} défini par $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_q = 0$, où $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ sont des fonctions affines sur \mathcal{E} telles que $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_q$ soient indépendantes. Notons \vec{V}_i le vecteur de E tel que $\varphi_i = (\vec{V}_i \mid \cdot)$ pour $1 \leq i \leq q$, et Γ la matrice $\left[(\vec{V}_i \mid \vec{V}_j) \right]_{(i,j) \in \llbracket 1, q \rrbracket^2}$. Montrer que la projection orthogonale de

\mathcal{E} sur \mathcal{V} associe à $M \in \mathcal{E}$, le point $M + \sum_{i=1}^q \lambda_i \vec{V}_i$, où :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{bmatrix} = -\Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix}$$

et que la symétrie orthogonale autour de \mathcal{V} associe, à $M \in \mathcal{E}$,

le point $M + \sum_{i=1}^q \mu_i \vec{V}_i$, où :

$$\left\| \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} \right\| = -2 \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix} . \blacksquare$$

Introduction.

Soit \mathcal{V} un sous-espace affine de \mathcal{E} ; la projection orthogonale sur \mathcal{V} étant la projection affine sur \mathcal{V} parallèlement à $\vec{\mathcal{V}}^\perp$, pour tout $M \in \mathcal{E}$, le point P est la projection orthogonale de M sur \mathcal{V} si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées : 1) $P \in \mathcal{V}$, 2) $\overrightarrow{PM} \in \vec{\mathcal{V}}^\perp$.

Par définition, si S est le symétrique de M par rapport à \mathcal{V} , $M = P \dot{+} \overrightarrow{MP}$. On voit alors que S est le seul point de \mathcal{E} tel que le milieu de (M, S) soit P . On a aussi $S = M \dot{+} 2\overrightarrow{MP}$. On peut encore caractériser directement le point S par le fait que : 1) Le milieu de (M, S) est dans \mathcal{V} et 2) $\overrightarrow{SM} \in \vec{\mathcal{V}}^\perp$.

a) Soit $M \in \mathcal{E}$, et P sa projection orthogonale sur \mathcal{H} . Puisque $\overrightarrow{PM} \in \mathcal{H}^\perp = \mathbb{R}\vec{V}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{PM} = \lambda \vec{V}$. Comme $P \in \mathcal{V}$, on a $0 = \varphi(P) = \varphi(M \dot{+} \overrightarrow{MP}) = \varphi(M) - \lambda \vec{\varphi}(\vec{V}) = \varphi(M) - \lambda \|\vec{V}\|^2$. Cela permet de déterminer λ et d'obtenir :

$$P = M \dot{+} (-\lambda \vec{V}) = M \dot{+} \left(-\frac{\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \right) \vec{V}.$$

D'après l'introduction, si S est le symétrique de M par rapport à \mathcal{V} , on a :

$$S = M \dot{+} \left(-2 \frac{\varphi(M)}{\|\vec{V}\|^2} \right) \vec{V}.$$

b) On a ici $\vec{\mathcal{V}} = \text{Ker}(\vec{\varphi}_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(\vec{\varphi}_q)$, donc $\vec{\mathcal{V}}^\perp = \mathbb{R}\vec{V}_1 + \dots + \mathbb{R}\vec{V}_q$. Soit $M \in \mathcal{E}$, et P sa projection orthogonale sur \mathcal{V} . Comme $\overrightarrow{MP} \in \vec{\mathcal{V}}^\perp$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que $P = M \dot{+} \sum_{i=1}^q \lambda_i \vec{V}_i$. D'autre part, puisque $P \in \mathcal{V}$, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\varphi_j(M) = 0$; ces conditions s'écrivent :

$$(\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket) \quad 0 = \varphi_j(P) = \varphi_j(M \dot{+} \overrightarrow{MP}) = \varphi_j(M) + \sum_{i=1}^q \lambda_i \vec{\varphi}_j(\vec{V}_i)$$

Le q -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ est donc solution du système :

$$(\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket) \quad \sum_{i=1}^q (\vec{V}_j \mid \vec{V}_i) \lambda_i = -\varphi_j(M),$$

qui est un système de Cramer de déterminant $\text{Gram}(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_q) > 0$. On en déduit facilement l'égalité :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_q \end{bmatrix} = -\Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix}.$$

En notant S le symétrique de M par rapport à \mathcal{V} , d'après l'introduction, on a $S = M + 2\overrightarrow{MP}$, et par conséquent, $S = M + \sum_{i=1}^q \mu_i \vec{V}_i$, où :

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_q \end{bmatrix} = -2\Gamma^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \vdots \\ \varphi_q(M) \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 :

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension $n \geq 1$ et une suite (A_0, \dots, A_n) de points de \mathcal{E} . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ on pose $d_{i,j} = \|\overrightarrow{A_i A_j}\|$ et $y_{i,j} = d_{i,j}^2$. Soit $\mathcal{G}(A_0, \dots, A_n) = G(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n})$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $\Phi \in \mathbb{R}[(Y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}]$ unique tel que $\mathcal{G}(A_0, \dots, A_n) = \Phi((y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$ pour toute suite (A_0, \dots, A_n) .

b) En utilisant l'exercice 2 du § II.5 et l'irréductibilité du déterminant général (cf. ci-dessous) démontrer que Φ est irréductible dans $\mathbb{R}[(Y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}]$.

Etant données n^2 variables $X_{i,j}$, on appelle *déterminant général* le polynôme $\Delta = \det([X_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2})$. C'est un polynôme homogène de degré n qui prend la valeur 1 pour $X_{i,j} = \delta_{i,j}$ et qui est de degré 1 par rapport à chacune des variables $X_{i,j}$. Si l'on avait une factorisation $\Delta = F \cdot G$, l'un des facteurs serait de degré 1 en X_{i_0, j_0} et l'autre n'en dépendrait pas, chacun des facteurs étant nécessairement homogène. A c

homogénéité, si X_{i_0, j_0} figure dans F , il en est de même de tous les X_{i, j_0} et de tous les $X_{i_0, j}$ et il en résulte finalement que G est constant, d'où l'irréductibilité de Δ . ■

a) On remarque que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i < j$:

$$y_{i,j} = d_{i,j}^2 = \| \overrightarrow{A_0 A_j} - \overrightarrow{A_0 A_i} \|^2 = y_{0,i} - 2(\overrightarrow{A_0 A_j} | \overrightarrow{A_0 A_i}) + y_{0,j},$$

et par conséquent :

$$(\overrightarrow{A_0 A_j} | \overrightarrow{A_0 A_i}) = \frac{1}{2} (y_{0,i} + y_{0,j} - y_{i,j}).$$

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, posons :

- si $i < j$, $P_{i,j} = \frac{1}{2} (Y_{0,i} + Y_{0,j} - Y_{i,j})$,
- si $i = j$, $P_{i,i} = Y_{0,i}$,
- si $i > j$, $P_{i,j} = \frac{1}{2} (Y_{0,i} + Y_{0,j} - Y_{j,i})$.

Soit alors le polynôme :

$$\Phi = \Delta \left((P_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n P_{\sigma(i), i},$$

qui est élément de $\mathbb{R}[(Y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}]$. On voit que pour tout (A_0, \dots, A_n) on a l'égalité :

$$(1) \quad \mathcal{G}(A_0, \dots, A_n) = \Phi((y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}).$$

Remarquons que comme chaque $P_{i,j}$, où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, est homogène de degré 1, le polynôme Φ est homogène de degré n .

Démontrons maintenant l'unicité de Φ . Si deux polynômes Φ_1 et Φ_2 vérifient l'égalité (1), les fonctions polynomiales associées coïncident sur l'image de l'application $D : \mathcal{E}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $(A_0, \dots, A_n) \mapsto ((d_{i,j}^2)_{0 \leq i < j \leq n})$; pour prouver l'unicité de Φ , il suffit de démontrer que l'image de D contient au moins une boule ouverte non vide (cf. Théorème X.1.2 du tome 1 du Cours). L'application D étant différentiable (car polynomiale), il suffit de montrer que sa différentielle en un point au moins est une application linéaire surjective (cf. Théorème VI.2.3 du tome 3 du Cours); montrons que c'est le cas en (A_0, \dots, A_n) , si (A_0, \dots, A_n) est affinement libre (ce qui prouvera que sur l'ouvert de \mathcal{E}^{n+1} constitué des $n+1$ -uplets (A_0, \dots, A_n) affinement libres, l'application D est une submersion).

La différentielle de D en (A_0, \dots, A_n) est l'application linéaire $L : \vec{\mathcal{E}}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$,

$$(u_0, \dots, u_n) \mapsto \left((\overrightarrow{A_i A_j} \mid u_j - u_i)_{0 \leq i < j \leq n} \right).$$

Soit $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, montrons que Λ est dans l'image de L . La première équation à respecter est :

$$(\overrightarrow{A_0 A_1} \mid u_1 - u_0) = \lambda_{0,1}.$$

Le vecteur u_0 étant arbitraire, comme $\overrightarrow{A_0 A_1} \neq 0$, l'ensemble des vecteurs u_1 vérifiant la condition ci-dessus est un hyperplan affine. Il faut ensuite réaliser les conditions :

$$(\overrightarrow{A_0 A_2} \mid u_2 - u_0) = \lambda_{0,2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{A_1 A_2} \mid u_2 - u_1) = \lambda_{1,2}.$$

Les vecteurs u_0 et u_1 étant fixés, comme $(\overrightarrow{A_0 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_2})$ est libre, l'ensemble des vecteurs u_2 vérifiant ces conditions est un espace affine de codimension 2. De manière générale, pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les vecteurs u_0, \dots, u_{p-1} étant déterminés de telle sorte que pour tout (i, j) , tels que $0 \leq i < j \leq p-1$, les conditions $(\overrightarrow{A_i A_j} \mid u_j - u_i) = \lambda_{i,j}$ soient vérifiées, le vecteur u_p doit être choisi de telle sorte que pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$:

$$(\overrightarrow{A_i A_p} \mid u_p - u_i) = \lambda_{i,j} \quad \text{soit} \quad (\overrightarrow{A_i A_p} \mid u_p) = (\overrightarrow{A_i A_p} \mid u_i) + \lambda_{i,j}.$$

La famille $(\overrightarrow{A_i A_p})_{i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket}$ étant libre, l'ensemble des vecteurs u_p vérifiant ces conditions est un sous-espace affine de codimension p . Pour $p = n$, (u_0, \dots, u_{n-1}) étant choisi, il reste exactement une possibilité pour u_n . Cela prouve que L est surjective, ce qu'il fallait démontrer.

b) On munit \mathcal{E} d'un repère orthonormal $(A_0; \mathcal{B})$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne une base orthonormale. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $A_i = A_0 + \sum_{h=1}^n x_{h,i} e_h$. D'après l'Exercice 2 du § II.5, on a l'égalité :

$$(2) \quad \mathcal{G}(A_0, \dots, A_n) = \left(\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}) \right)^2 = \left(\Delta((x_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}) \right)^2$$

Pour tout (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, on a : $y_{i,j} = \sum_{h=1}^n (x_{h,j} - x_{h,i})^2$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $y_{0,i} = \sum_{h=1}^n x_{h,i}^2$. Posons pour tout (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$,

$Q_{i,j} = \sum_{h=1}^n (X_{h,j} - X_{h,i})^2$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Q_{0,i} = \sum_{h=1}^n X_{h,i}^2$; ces polynômes sont éléments de $\mathbb{R} \left[(X_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right]$. L'égalité (2) étant vraie pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$, A_0 restant fixé, nous en déduisons l'égalité entre polynômes :

$$\Phi((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}) = \Delta^2.$$

La famille $((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$ est algébriquement libre. En effet l'application $(A_1, \dots, A_n) \mapsto ((d_{i,j}^2)_{0 \leq i < j \leq n})$ reste une submersion sur l'ouvert constitué des (A_1, \dots, A_n) tels que (A_0, \dots, A_n) est affinement libre. On peut aussi considérer que si on peut obtenir une famille de distances $((d_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$, on peut le faire en choisissant la position du point A_0 . S'il existait deux polynômes F et G non constants tels que $\Phi = F \times G$, alors $\Delta^2 = F((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}) \times G((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$. Comme le polynôme Δ est irréductible, que l'anneau $\mathbb{R} \left[(X_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \right]$ est factoriel, et que les polynômes $F((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$ et $G((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n})$ sont non constants, on en déduit qu'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que :

$$F((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}) = \lambda \Delta \quad \text{et} \quad G((Q_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}) = \lambda^{-1} \Delta.$$

De telles égalités sont exclues, car le polynôme non nul Δ est globalement impair par rapport aux indéterminées $(X_{1,1}, \dots, X_{1,n})$, alors que les polynômes $Q_{i,j}$, où $0 \leq i < j \leq n$, sont tous globalement pairs par rapport à ces indéterminées. Le polynôme Φ est donc irréductible.

Autre démonstration

On démontre d'abord l'irréductibilité de déterminant symétrique général.

Dans l'anneau $\mathbb{R}[(Z_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}]$, on considère le polynôme (dit déterminant symétrique général) :

$$\mathcal{S}(Z) = \det \left([T_{i,j}]_{i,j} \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \right) \quad \text{où} \quad T_{i,j} = \begin{cases} Z_{i,j} & \text{si } i \leq j \\ Z_{j,i} & \text{si } i > j \end{cases}.$$

1) L'entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ étant fixé, on considère \mathcal{S} par rapport aux indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$. Par définition :

$$\mathcal{S}(Z) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{h=1}^n T_{\sigma(h),h}.$$

Fixons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si $\sigma(i) = i$, on a l'égalité :

$$\prod_{h=1}^n T_{\sigma(h),h} = Z_{i,i} \prod_{h \neq i} T_{\sigma(h),h},$$

et comme $\sigma(h)$ ne prend pas la valeur i , le monôme $\prod_{h \neq i} T_{\sigma(h),h}$ est constant par rapport aux indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$. Si $\sigma(i) \neq i$, on a l'égalité :

$$\prod_{h=1}^n T_{\sigma(h),h} = T_{\sigma(i),i} T_{i,\sigma^{-1}(i)} \prod_{h \notin \{i, \sigma^{-1}(i)\}} T_{\sigma(h),h}.$$

Le monôme $T_{\sigma(i),i} T_{i,\sigma^{-1}(i)}$ est soit le carré d'une indéterminée, soit le produit de 2 des indéterminées, parmi $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$; le monôme :

$$\prod_{h \notin \{i, \sigma^{-1}(i)\}} T_{\sigma(h),h},$$

ne dépend pas des indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$. On a donc une égalité de la forme :

$$\mathcal{P}(Z) = \mu_i + \lambda_i Z_{i,i},$$

où le polynôme μ_i est homogène de degré 2 par rapport aux indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$, et λ_i ne dépend pas des indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$. Le polynôme μ_i est de degré 2 par rapport à chacune des indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$; en effet, prenant $j < i$ par exemple (mais le résultat serait identique si $j > i$), le coefficient de $Z_{j,i}^2$ dans μ_i est :

$$c_{i,j} = \sum_{\sigma(i)=\sigma^{-1}(i)=j} \varepsilon(\sigma) \prod_{h \notin \{i,j\}} T_{\sigma(h),h} ;$$

dans ce polynôme, le coefficient du monôme $\prod_{h \notin \{i,j\}} Z_{h,h}$ est $-1 = \varepsilon(\tau_{i,j})$ (si $n \leq 2$ le résultat est évident).

2) Supposons qu'il existe des polynômes F et G non constants tels que $\mathcal{P}(Z) = F(Z) G(Z)$.

α) Un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ étant fixé, on a l'égalité :

$$F(Z) G(Z) = \mu_i + \lambda_i Z_{i,i}.$$

L'un des polynômes, par exemple F , est de degré 1 par rapport à $Z_{i,i}$ et G n'en dépend pas. Il existe des polynômes a et b ne dépendant pas de $Z_{i,i}$ tels que $F = a + b Z_{i,i}$; on a : $aG = \mu_i$ et $bG = \lambda_i$; comme λ_i ne dépend pas des indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$, ni b ni G n'en dépendent ; mais alors comme μ_i est de degré 2 par rapport à chacune des indéterminées $(Z_{1,i}, \dots, Z_{i-1,i}, Z_{i,i+1}, \dots, Z_{i,n})$, le polynôme a , donc aussi le polynôme F , est de degré 2 par rapport à cl

indéterminées.

β) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $j \neq i$; si G était de degré 1 par rapport à $Z_{j,j}$, on en déduirait comme dans α) qu'il serait de degré 2 par rapport aux indéterminées $(Z_{1,j}, \dots, Z_{j-1,j}, Z_{j,j}, Z_{j,j+1}, \dots, Z_{j,n})$, et donc en particulier par rapport à $Z_{i,j}$ si $i < j$ (resp. $Z_{j,i}$, si $j < i$), ce qui est contradictoire.

γ) Le polynôme F est de donc de degré 1 par rapport à chaque indéterminée $Z_{h,h}$, où $h \in \llbracket 1, n \rrbracket$; en raisonnant de nouveau comme dans α), on voit que le polynôme G ne dépend d'aucune des indéterminées; il est donc constant.

Le polynôme \mathcal{S} est donc irréductible, ce qu'il fallait démontrer.

3) On remarque que le polynôme $\Phi \in \mathbb{R}[(Y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}]$ est le déterminant de la matrice symétrique dont le terme (i, j) est $\frac{1}{2}(Y_{0,i} + Y_{0,j} - Y_{i,j})$ si $i < j$ et $Y_{0,i}$ si $i = j$; posons :

- $R_{i,j} = \frac{1}{2}(Y_{0,i} + Y_{0,j} - Y_{i,j})$ si $i < j$
- $R_{i,i} = Y_{0,i}$.

On a l'égalité $\Phi = \mathcal{S}((R_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n})$. On peut inversement exprimer linéairement les $(R_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ en fonction des $(Y_{i,j})_{0 \leq i < j \leq n}$:

- $Y_{i,j} = R_{i,i} + R_{j,j} - 2R_{i,j}$ si $0 < i < j \leq n$
- $Y_{0,j} = R_{j,j}$ si $1 \leq j \leq n$.

On voit donc que toute factorisation non triviale de \mathcal{S} donne une factorisation non triviale de Φ et inversement. On en déduit que Φ est, comme \mathcal{S} , irréductible.

§ VI.2 STRUCTURE DES ISOMÉTRIES

Exercice 2 :

Soit φ une isométrie sans point fixe de \mathcal{E} , et soit $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ des réflexions, d'hyperplans respectifs $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ et telles que $\varphi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_p$. On rappelle que $\nu(\vec{\varphi}) = \dim(\text{Ker}(\vec{\varphi} - \text{Id}_{\vec{\mathcal{E}}}))$.

a) Montrer que si $p < n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$, on a forcément $p = n - \nu(\vec{\varphi})$.

b) On suppose que $p = n - \nu(\vec{\varphi})$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des fonctions affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\alpha_i^{-1}(\{0\}) = \mathcal{H}_i$ ($1 \leq i \leq p$).

Montrer que $\dim \bigcap_{i=1}^p \overrightarrow{\mathcal{H}_i} = \nu(\vec{\varphi})$, et en déduire que $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_p$

sont linéairement indépendantes. Prouver enfin que $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{H}_i \neq \emptyset$.

c) Dédurre de ce qui précède que $p \geq n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$. ■

a) Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ le sous-espace $\vec{\mathcal{H}}_i$ est l'ensemble des vecteurs invariants de $\vec{\sigma}_i$. Comme $\vec{\varphi} = \vec{\sigma}_1 \circ \dots \circ \vec{\sigma}_p$, le sous-espace $\bigcap_{i=1}^p \vec{\mathcal{H}}_i$ est inclus dans le sous-espace des vecteurs invariants de $\vec{\varphi}$. Nous en déduisons :

$$(1) \quad \nu(\vec{\varphi}) \geq \dim \left(\bigcap_{i=1}^p \vec{\mathcal{H}}_i \right) \geq n - p .$$

D'après le Théorème III.1.1 (dont on reprend les notations) appliqué à l'isométrie $\vec{\varphi}$, on a $\dim(N_+) + \dim(N_-) \equiv \dim \vec{\mathcal{E}} \pmod{2}$, et $\det(\vec{\varphi}) = (-1)^{\dim(N_-)}$. Nous en déduisons qu'ici $\det(\vec{\varphi}) = (-1)^{n-\nu(\vec{\varphi})} = (-1)^p$, et par conséquent $n - \nu(\vec{\varphi}) \equiv p \pmod{2}$. Autrement dit, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = n - \nu(\vec{\varphi}) + 2k$. En particulier, si $p < n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$, alors $p = n - \nu(\vec{\varphi})$.

b) Si $\nu(\vec{\varphi}) = n - p$, il y a égalité dans l'inégalité (1), et par conséquent les formes linéaires $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_p$ sont linéairement indépendantes. L'ensemble $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{H}_i$ est l'ensemble des points M tel que $(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket) \quad \alpha_i(M) = 0$; c'est une variété linéaire non vide de codimension p (cf. Théorème V.3.5).

c) Supposons $\nu(\vec{\varphi}) = n - p$, ce qui implique $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{H}_i \neq \emptyset$. Comme φ est la composée des réflexions autour des \mathcal{H}_i ($i \in \llbracket 1, p \rrbracket$), l'ensemble non vide $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{H}_i$ est inclus dans l'ensemble des points invariants de φ , ce qui est contraire à l'hypothèse (φ sans point fixe). Comme d'autre part, d'après a), il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = n - \nu(\vec{\varphi}) + 2k$, nous en déduisons $k > 0$, d'où $p \geq n - \nu(\vec{\varphi}) + 2$.

Exercice 4 :

|| On suppose $n = 3$. On donne trois retournements ρ_1, ρ_2, ρ_3 autour de droites respectives $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. Montrer que, pour que $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ soit un retournement, il faut et il suffit qu'il existe une droite rencontrant orthogonalement chacune des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. ■

Supposons qu'il existe une droite Δ qui coupe orthogonalement les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. La droite Δ est stable par les retournements ρ_1, ρ_2, ρ_3 , et les isométries induites sur Δ par ces retournements sont trois symétries centrales dans la droite affine euclidienne Δ . L'isométrie induite sur Δ par $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ est donc une symétrie centrale, dont le centre sera noté I ; cel

le point I est invariant par $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$. Le plan vectoriel $\vec{P} = (\vec{\Delta})^\perp$ est stable par chacune des isométries vectorielles $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$ et ces isométries vectorielles induisent sur \vec{P} trois symétries par rapport à des droites. La composée de ces symétries vectorielles est donc dans le plan \vec{P} une symétrie par rapport à une droite \vec{D} . Comme d'autre par l'isométrie induite par $\vec{\rho}_1 \circ \vec{\rho}_2 \circ \vec{\rho}_3$ sur $\vec{\Delta}$ est $-\text{Id}$, et que I est invariant par $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$, il est clair que $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ est le retournement par rapport à la droite $D = I \dot{+} \vec{D}$.

Supposons réciproquement que $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ soit un retournement, et que les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ne soient pas toutes les trois parallèles entre elles. On peut supposer que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles car, en notant $S_{\mathcal{V}}$ la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine \mathcal{V} , si $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = S_D$, alors :

$$\rho_2 \circ \rho_3 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ S_D \circ \rho_1^{-1} = S_{\rho_1(D)} \quad \text{et} \quad \rho_3 \circ \rho_1 \circ \rho_2 = \rho_3 \circ S_D \circ \rho_3^{-1} = S_{\rho_3(D)}.$$

On a alors :

$$S_{\mathcal{D}_1} \circ S_{\mathcal{D}_2} = S_D \circ S_{\mathcal{D}_3}.$$

Comme les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas parallèles, elles ont une perpendiculaire commune Δ . L'isométrie $S_{\mathcal{D}_1} \circ S_{\mathcal{D}_2}$ est un vissage, et comme elle laisse stable Δ , Δ est l'axe de ce vissage. L'isométrie $S_D \circ S_{\mathcal{D}_3}$ est un vissage d'axe Δ ; les droites D et \mathcal{D}_3 ne sont donc pas parallèles, et leur perpendiculaire commune, axe du vissage $S_D \circ S_{\mathcal{D}_3}$, est confondue avec Δ . La droite Δ rencontre donc orthogonalement les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 .

Supposons maintenant que les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 aient même direction \vec{D} . Tout plan P orthogonal à \vec{D} est stable par ρ_1, ρ_2 et ρ_3 , et les isométries induites par ρ_1, ρ_2 et ρ_3 sur P sont trois symétries centrales dans P . Leur composée est donc une symétrie dans P par rapport à un point I ; ce point I est un point fixe de $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$. La droite vectorielle \vec{D} étant point par point invariante par les isométries vectorielles $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ et $\vec{\rho}_3$, il est clair que $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3$ est la réflexion autour de la droite $I \dot{+} \vec{D}$. Par contre aucune droite ne coupe orthogonalement les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 , sauf bien sûr si elles sont de plus coplanaires.

Exercice 6 :

On suppose $n = 3$. Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites non coplanaires de \mathcal{E} . On note \mathcal{R}_1 (resp. \mathcal{R}_2) l'ensemble des rotations d'axe \mathcal{D}_1 (resp. \mathcal{D}_2). Soit Γ le groupe engendré par $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ dans $\text{Dep}(\mathcal{E})$.

a) Soit Ω l'ensemble $\{O \in \mathcal{E} \mid \exists (A_1, A_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2, \exists (\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2, \rho_1(A_2) = \rho_2(A_1) = O\}$. Prouver $\text{card}(\Omega) \geq 2$. On notera O_1 et O_2 deux points de Ω distincts.

- \parallel b) Prouver : $\mathbf{Dep}_{O_1}(\mathcal{E}) \cup \mathbf{Dep}_{O_2}(\mathcal{E}) \subset \Gamma$. En déduire :

$$(\forall O \in \mathcal{E}) \quad \mathbf{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma.$$
 \parallel c) Prouver : $\Gamma = \mathbf{Dep}(\mathcal{E})$. ■

a) Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 n'étant pas coplanaires, elles ont une perpendiculaire commune Δ . Pour $k \in \{1, 2\}$ on note I_k l'intersection de \mathcal{D}_k et de Δ ; on a $I_1 \neq I_2$, on pose $a = \|\overrightarrow{I_1 I_2}\|$. On notera P_1 le plan orthogonal à \mathcal{D}_1 contenant Δ , et P_2 le plan orthogonal à \mathcal{D}_2 contenant Δ .

Supposons d'abord que les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne soient pas orthogonales. L'ensemble Ω est l'intersection de l'hyperboloïde à une nappe \mathcal{H}_1 engendré par la rotation de \mathcal{D}_2 autour de la droite \mathcal{D}_1 , et de l'hyperboloïde à une nappe \mathcal{H}_2 engendré par la rotation de \mathcal{D}_1 autour de la droite \mathcal{D}_2 . L'intersection de \mathcal{H}_1 et du plan P_1 est le cercle \mathcal{C} dans le plan P_1 de centre I_1 de rayon a (il passe par I_2). Le point I_2 est à l'intérieur de l'hyperboloïde \mathcal{H}_2 (i.e dans la composante connexe de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}_2$ contenant l'axe \mathcal{D}_2), et le symétrique J de I_2 par rapport à I_1 à l'extérieur. Par continuité, il existe sur chacun des arcs de cercle ouverts sur \mathcal{C} entre I_2 et J un point de \mathcal{H}_2 ; on obtient ainsi deux points distincts qui sont communs à \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .

Si les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont orthogonales, l'ensemble Ω est l'intersection de l'extérieur dans le plan P_1 du cercle du plan P_1 de centre I_1 et de rayon a , et de l'extérieur dans le plan P_2 du cercle dans le plan P_2 de centre I_2 et de rayon a . On voit que Ω est dans la droite Δ l'extérieur de l'intervalle $]J, K[$, où J est le symétrique de I_2 par rapport à I_1 et K le symétrique de I_1 par rapport à I_2 .

b) Pour la suite nous supposons que \mathcal{E} est orienté et nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1 :

- \parallel Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien orienté de dimension 3. Pour $O \in \mathcal{E}$, $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_{\theta, O, \vec{v}}$ la rotation autour de la droite $O + \mathbb{R}\vec{v}$ orientée par \vec{v} et dont une détermination de l'angle est θ . Pour tout $(\theta, O, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{E} \times \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$, et pour tout déplacement φ de \mathcal{E} , on a :

$$\varphi \circ R_{\theta, O, \vec{v}} \circ \varphi^{-1} = R_{\theta, \varphi(O), \vec{\varphi}(\vec{v})}. \blacksquare$$
 \parallel

Posons $f = R_{\theta, O, \vec{v}}$ et $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$; il est clair que $\varphi(O)$ est invariant par g . Il suffit donc de vérifier que \vec{g} est la rotation vectorielle d'angle θ autour du vecteur $\vec{\varphi}(\vec{v})$. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ une base orthonormale directe d

vecteur est \mathbb{R}_+ -colinéaire à \vec{v} . On a $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$, $\vec{f}(\vec{i}) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, et $\vec{f}(\vec{j}) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$. La famille $(\vec{\varphi}(\vec{i}), \vec{\varphi}(\vec{j}), \vec{\varphi}(\vec{u}))$ est une base orthonormale directe, et on vérifie facilement que $\vec{g}(\vec{\varphi}(\vec{u})) = \vec{\varphi}(\vec{u})$, $\vec{g}(\vec{\varphi}(\vec{i})) = \cos \theta \vec{\varphi}(\vec{i}) + \sin \theta \vec{\varphi}(\vec{j})$, et $\vec{\varphi}(\vec{j}) = -\sin \theta \vec{\varphi}(\vec{i}) + \cos \theta \vec{\varphi}(\vec{j})$. Le vecteur $\vec{\varphi}(\vec{u})$ étant \mathbb{R}_+ -colinéaire au vecteur $\vec{\varphi}(\vec{v})$, il est clair que \vec{g} est la rotation vectorielle d'axe orienté dirigé par $\vec{\varphi}(\vec{v})$ et dont une détermination de l'angle est θ . On a donc bien l'égalité $g = R_{\theta, \varphi(O), \vec{\varphi}(\vec{v})}$. Fin du lemme.

1) Soit $O \in \Omega$, $(A_1, A_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, tels que $\rho_2(A_1) = \rho_1(A_2) = O$. Notons \vec{v}_1 un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 et \vec{v}_2 un vecteur directeur de \mathcal{D}_2 . Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_{\theta, A_1, \vec{v}_1} \in \mathcal{R}_1$, et $\rho_2 \in \mathcal{R}_2$, donc $\rho_2 \circ R_{\theta, A_1, \vec{v}_1} \circ \rho_2^{-1} = R_{\theta, O, \vec{\rho}_2(\vec{v}_1)} \in \Gamma$. De même, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_{\theta, O, \vec{\rho}_1(\vec{v}_2)} \in \Gamma$. Montrons que les vecteurs $\vec{\rho}_1(\vec{v}_2)$ et $\vec{\rho}_2(\vec{v}_1)$ ne sont pas colinéaires. Supposons qu'ils le soient, on aurait alors $\rho_1(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D} = \rho_2(\mathcal{D}_1)$.

Cas où les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont pas orthogonales.

On peut trouver une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que : $I_2 = I_1 + a\vec{i}$, \mathcal{D}_1 est dirigée par \vec{k} , et \mathcal{D}_2 est dirigée par $\vec{v}_2 = \cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}$, où $\alpha \in]0, \pi/2[$. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ une détermination de l'angle de la rotation ρ_1 (axe dirigé par \vec{k}) ; on peut supposer $\theta \in]0, 2\pi[$, car dans le cas contraire, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} = \rho_2(\mathcal{D}_1)$, d'où $\rho_2^{-1}(\mathcal{D}_2) = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$. La droite \mathcal{D} passe par le point $M = \rho_1(I_2) = I_1 + a(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$, et est dirigée par le vecteur $\vec{v} = \vec{\rho}_1(\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}) = -\sin \theta \cos \alpha \vec{i} + \cos \theta \cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}$. Comme $\rho_2(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}$, et que I_2 est sur l'axe de ρ_2 , la distance du point I_2 à la droite \mathcal{D} est a . Cette distance est aussi $\|\overrightarrow{I_2 M} \wedge \vec{v}\|$. On obtient :

$$\begin{aligned} a^{-1} \overrightarrow{I_2 M} \wedge \vec{v} &= ((\cos \theta - 1)\vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \wedge \vec{v} = \\ &= \sin \theta \sin \alpha \vec{i} + (1 - \cos \theta) \sin \alpha \vec{j} + (1 - \cos \theta) \cos \alpha \vec{k}, \end{aligned}$$

d'où la condition nécessaire :

$$1 = \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + (1 - \cos \theta)^2 \quad \text{soit} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \theta \cos^2 \alpha = 2 \cos \theta.$$

Comme \mathcal{D} est supposée être l'image de \mathcal{D}_1 par une rotation d'axe \mathcal{D}_2 , l'angle des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est égal à l'angle des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}_2 . Nous obtenons une deuxième condition nécessaire :

$$|(\vec{v}_2 | \vec{k})| = |(\vec{v}_2 | \vec{v})|,$$

soit :

$$\sin \alpha = |\cos \theta \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha|.$$

Montrons que les deux conditions nécessaires trouvées sont incompatibles. En notant $s = \sin \alpha$ et $c = \cos \alpha$, on a :

$$\cos \theta = \frac{s - s^2}{c^2} = \frac{s}{1 + s} \quad \text{ou} \quad \cos \theta = -\frac{s + s^2}{c^2} = \frac{-s}{1 - s}$$

et

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \theta \cos^2 \alpha = 2 \cos \theta ,$$

d'où :

$$s^2 + \frac{s^2}{(1+s)^2} (1-s^2) = \frac{2s}{1+s} \quad \text{soit} \quad 2s^2 = 2s ,$$

ou la condition obtenue en remplaçant s par $-s$. Comme $\alpha \in]0, \pi/2[$, cette égalité est fausse. Cela démontre qu'il ne peut pas exister une rotation d'axe \mathcal{D}_1 qui transforme \mathcal{D}_2 en \mathcal{D} , et en même temps une rotation d'axe \mathcal{D}_2 qui transforme \mathcal{D}_1 en \mathcal{D} .

Cas où les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont orthogonales.

Si $\mathcal{D} = \rho_1(\mathcal{D}_2) = \rho_2(\mathcal{D}_1)$, \mathcal{D} est dans le plan P_1 une tangente au cercle de centre I_1 et de rayon a , mais aussi dans le plan P_2 une tangente au cercle de centre I_2 et de rayon a ; la droite \mathcal{D} ne peut être que Δ , intersection des plans perpendiculaires P_1 et P_2 , mais cette droite n'est tangente à aucun des deux cercles. On aboutit dans ce cas aussi à une impossibilité.

Conclusion : si $O \in \Omega$, il existe $(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, $(A_1, A_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, tels que $\rho_2(A_1) = O = \rho_1(A_2)$, et les droites $\rho_1(\mathcal{D}_2)$ et $\rho_2(\mathcal{D}_1)$, sécantes en O , sont distinctes. D'après le lemme, il est clair que Γ contient toutes les rotations d'axe $\rho_1(\mathcal{D}_2)$, et toutes les rotations d'axe $\rho_2(\mathcal{D}_1)$.

2) Montrons que cela implique $\text{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma$. Nous noterons \vec{u} un vecteur unitaire directeur de $\rho_2(\mathcal{D}_1)$ et \vec{v} un vecteur unitaire directeur de $\rho_1(\mathcal{D}_2)$. Pour simplifier les notations, nous supposons que le problème est vectoriel, le point O étant identifié au vecteur $\vec{0}$. La rotation vectorielle d'axe dirigé par un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$ et dont une détermination de l'angle est θ , sera notée $R_{\theta, \vec{x}}$.

Soit ρ une rotation fixe d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ telle que le vecteur unitaire $\vec{w} = \rho(\vec{v})$ ne soit pas dans le plan $\mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ (son existence ne fait pas de doute). Toutes les rotations d'axe $\mathbb{R}\vec{w}$ sont dans Γ , puisque que d'après le lemme 1 :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad R_{\theta, \vec{w}} = \rho \circ R_{\theta, \vec{v}} \circ \rho^{-1} \in \Gamma .$$

Pour $\vec{x} \in \mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$, notons $\mathcal{A}_{\vec{x}}$ l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $R_{\theta, \vec{x}} \in \Gamma$. Montrons que l'application $\vec{x} \mapsto \mathcal{A}_{\vec{x}}$ est localement constante. Comme l'ensemble $\mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$ est connexe, cela impliquera qu'elle est constante, et par conséquent que pour tout $\vec{x} \in \mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$, $\mathcal{A}_{\vec{x}} = \mathcal{A}_{\vec{u}} = \mathbb{R}$, ce qui signifie $\text{Dep}_O \subset \Gamma$. Soit $x \in \mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$; on peut choisir 2 vecteurs parmi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ engendrant un plan ne contenant pas \vec{x} ; on peut supposer qu'il s'agit de (\vec{u}, \vec{v}) . Pour tout $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, d'après le lemme, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $R_{\theta, \vec{y}} \in \Gamma$, où $\vec{y} = R_{\beta, \vec{v}} \circ R_{\alpha, \vec{u}}(\lambda \vec{x})$, si, et seulement si, $R_{\theta, \vec{x}} \in \Gamma$; autrement dit $\mathcal{A}_{\vec{y}} = \mathcal{A}_{\vec{x}}$. On pose $\Phi(\alpha, \beta, \lambda) = R_{\beta, \vec{v}} \circ R_{\alpha, \vec{u}}(\lambda \vec{x})$ pour tout $(\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2 :

|| Pour tout vecteur unitaire $\vec{k} \in \mathcal{E}$, et tout $\vec{V} \in \mathcal{E}$, la dérivée en 0 de l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $\theta \mapsto R_{\theta, \vec{k}}(\vec{V})$, est $\vec{k} \wedge \vec{V}$. ■

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe, dans laquelle les coordonnées de \vec{V} sont (x, y, z) . Le vecteur colonne des coordonnées de $R_{\theta, \vec{k}}(\vec{V})$ est :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \\ z \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées de la dérivée en 0 sont donc $(-y, x, 0)$; on vérifie qu'il s'agit des coordonnées de $\vec{k} \wedge \vec{V}$. Fin du lemme.

En appliquant ce lemme 2, on trouve $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(0, 0, 1) = \vec{u} \wedge \vec{x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}(0, 0, 1) =$

$\vec{v} \wedge \vec{x}$, et d'autre part $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(0, 0, 1) = \vec{x}$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants ; en effet si $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ est tel que $\lambda \vec{u} \wedge \vec{x} + \mu \vec{v} \wedge \vec{x} + \nu \vec{x} = 0$, alors soit $\nu = 0$ et \vec{x} est colinéaire à $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ (vecteur $\neq \vec{0}$), soit $\nu \neq 0$ et \vec{x} est orthogonal à \vec{x} . L'image de l'application Φ contient donc un voisinage de \vec{x} dans $\mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$. D'après ce qui précède, l'application $\vec{x} \mapsto \mathcal{A}(\vec{x})$ est constante sur ce voisinage.

En conclusion, l'application $\vec{x} \mapsto \mathcal{A}(\vec{x})$, est localement constante sur l'ensemble connexe $\mathcal{E} \setminus \{\vec{0}\}$, donc constante, et par conséquent, comme nous l'avons remarqué plus haut, $\mathbf{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma$. Ceci est vrai pour tout $O \in \Omega$, donc pour au moins 2 points distincts d'après a).

3) Soit X l'ensemble des $O \in \mathcal{E}$ tels que $\mathbf{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma$. Soient O_1 et O_2 deux éléments de X distincts ; d'après le lemme 1, pour tout $\rho \in \mathbf{Dep}_{O_1}(\mathcal{E})$, $\rho(O_2) \in X$; nous en déduisons que la sphère de centre O_1 passant par O_2 est incluse dans X . Il est donc clair qu'il existe trois éléments non alignés dans X . Montrons que la fonction caractéristique de X est localement constante ; comme \mathcal{E} est connexe et que $X \neq \emptyset$, cela prouvera $X = \mathcal{E}$, c'est-à-dire : $(\forall O \in \mathcal{E}) \mathbf{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma$.

Soit $A \in \mathcal{E}$; on peut trouver O_1 et O_2 dans X tels que O_1, O_2 et A ne soient pas alignés. Soit $M \in \mathcal{E} \setminus \{O_2\}$; en raisonnant comme ci-dessus, on voit que χ_X est constante sur la sphère de centre O_2 passant par M , et sur la sphère de centre O_1 et passant par A ; ces deux sphères se coupent si, et seulement si :

$$|d(O_1, A) - d(O_2, M)| \leq d(O_1, O_2) \leq d(O_1, A) + d(O_2, M).$$

Si cela se produit, $\chi_X(M) = \chi_X(A)$. L'ensemble des points M pour lesquels ces deux sphères se coupent contient l'ensemble des p

que

$$|d(O_1, A) - d(O_2, M)| < d(O_1, O_2) < d(O_1, A) + d(O_2, M) ,$$

ouvert contenant A , parce que les points O_1 , O_2 et A ne sont pas alignés. Nous en déduisons que χ_X est constante dans un certain voisinage de A , ce qu'il fallait démontrer. On a donc prouvé : $(\forall O \in \mathcal{E}) \quad \mathbf{Dep}_O(\mathcal{E}) \subset \Gamma$.

c) D'après le théorème VI.2.2, le groupe $\mathbf{Dep}(\mathcal{E})$ est engendré par l'ensemble des retournements. Comme tout retournement a des points fixes, il est, d'après b) 3), élément de Γ . Nous en déduisons $\mathbf{Dep}(\mathcal{E}) \subset \Gamma$, et par conséquent $\mathbf{Dep}(\mathcal{E}) = \Gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

§ VI.3 EXEMPLES DE GROUPES D'ISOMÉTRIES

Exercice 1 :

|| Montrer que le volume n -dimensionnel du simplexe régulier unité de l'exemple 3 est $V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!}$. Le comparer à celui de la boule circonscrite (cf. Tome 3, § VIII.3, exemple 2 du Cours). ■

Montrons l'égalité $V_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$; elle est vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour $n - 1$, où $n \geq 2$. Le n -simplexe régulier unité (A_1, \dots, A_{n+1}) est, dans l'espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension n , un cône de base le $(n - 1)$ -simplexe régulier unité (A_1, \dots, A_n) dans l'hyperplan affine H engendré par ces points. La mesure $(n - 1)$ -dimensionnelle de sa base est $V_{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} (n-1)!}$; le rayon de l'hypersphère de H circonscrite à (A_1, \dots, A_n) est $R_{n-1} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}}$ (cf. Exemple 3). La hauteur du n -simplexe régulier unité (A_1, \dots, A_{n+1}) est donc :

$$h_n = \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} .$$

La mesure n -dimensionnelle du cône (A_1, \dots, A_{n+1}) est donc :

$$V_n = \frac{1}{n} h_n V_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{2^{(n-1)/2} (n-1)!} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!} ,$$

ce qu'il fallait démontrer (on démontre facilement la formule donnant la mesure n -dimensionnelle d'un cône en utilisant le théorème de

Le rayon de la sphère circonscrite au n -simplexe régulier (A_1, \dots, A_{n+1}) est $R_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}\sqrt{n+1}}$. Si n est pair, $n = 2p$, la mesure n -dimensionnelle de la boule est donc (cf. § VIII.3 Exemple 2 du Tome 3 du Cours) :

$$V'_n = \frac{\pi^p}{p!} R_n^n = \frac{\pi^p}{p!} \left(\frac{n}{2(n+1)} \right)^p = \frac{\pi^p}{p!} \frac{p^p}{(2p+1)^p}.$$

On trouve :

$$\frac{V_{2p}}{V'_{2p}} = \frac{\sqrt{2p+1}}{2^p (2p)!} \frac{p! (2p+1)^p}{\pi^p p^p} = \frac{p! \sqrt{2p+1}}{(2p)! \pi^p} \left(1 + \frac{1}{2p} \right)^p.$$

Si n est impair, $n = 2p+1$:

$$\begin{aligned} V'_n &= \frac{2^{2p+1} p! \pi^p}{(2p+1)!} R_n^n = \frac{2^{2p+1} p! \pi^p}{(2p+1)!} \left(\frac{n}{2(n+1)} \right)^{\frac{2p+1}{2}} = \\ &= \frac{p! \pi^p}{(2p+1)!} \left(\frac{2p+1}{p+1} \right)^{\frac{2p+1}{2}}. \end{aligned}$$

(cf. Tome 3 § VIII.3, Exemple 2 du cours). Dans ce cas on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{V_{2p+1}}{V'_{2p+1}} &= \frac{\sqrt{p+1}}{2^p (2p+1)!} \frac{(2p+1)!}{p! \pi^p} \left(\frac{p+1}{2p+1} \right)^{p+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{p+1}{2^{2p} p! \pi^p \sqrt{2p+1}} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^p \left(1 + \frac{1}{2p} \right)^{-p}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, en utilisant la formule de Stirling (§ IX.1 Tome 2), on trouve le même équivalent :

$$\frac{V_n}{V'_n} \sim \frac{\sqrt{en}}{\sqrt{2}} \left(\frac{e}{2\pi n} \right)^{n/2}.$$

Cela prouve : $V_n/V'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et ce très rapidement.

Exercice 2 :

|| Montrer que le volume du dodécaèdre régulier de l'exemple 5 est
 || égal à $20 \alpha'^2 \beta$, que l'on peut écrire sous la forme $\frac{(5 + \sqrt{5})^{5/2}}{8\sqrt{2}}$,
 || ou encore $\frac{5}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \frac{5}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. ■

Il est clair que le volume du dodécaèdre est le volume du cône de sommet le centre du dodécaèdre et de base l'une des 12 faces, multiplié par 12. On a donc l'égalité :

$$V = 12 \frac{1}{3} h S = 4 h S ,$$

où h est la distance du centre à l'une des faces, et S est l'aire de l'une des faces. Chaque face étant un pentagone de côté 1, son aire est 5 fois l'aire du triangle isocèle d'angle au sommet $2\pi/5$, dont l'aire est $\sin(\pi/5) \cos(\pi/5) = \frac{1}{2} \sin(2\pi/5) = \frac{1}{2} \beta$. Comme d'autre part $h = a = 1 + \alpha$, on trouve :

$$(1) \quad V = 10(1 + \alpha) \beta .$$

On observe que $\alpha' = \cos(4\pi/5) = -\cos(\pi/5)$; par conséquent $1 + \alpha = 1 + \cos(2\pi/5) = 2 \cos^2(\pi/5) = 2 \alpha'^2$. On a donc aussi l'égalité :

$$(2) \quad V = 20 \alpha'^2 \beta .$$

D'autre part, en reprenant l'égalité (1), on obtient :

$$(3) \quad \begin{aligned} V &= 10(1 + \cos(2\pi/5)) \sin(2\pi/5) = 10 \sin(2\pi/5) + 5 \sin(4\pi/5) = \\ &= 10\beta + 5\beta' = \frac{5}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \frac{5}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

On constate aussi que :

$$\beta = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} ,$$

et que :

$$(5 + \sqrt{5})^2 = 30 + 10\sqrt{5} = 40 \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = 40a = 40(1 + \alpha) .$$

Nous en déduisons :

$$(3) \quad V = 10(1 + \alpha) \beta = \frac{(5 + \sqrt{5})^2}{4} \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} = \frac{(5 + \sqrt{5})^{5/2}}{8\sqrt{2}} .$$

Exercice 6 :

On reprend les notations de l'exemple 5 du Cours.

a) Vérifier que les 5 points A_1, B_1, B'_4, B_2, A_2 sont coplanaires et que ce sont les sommets d'un *pentagone régulier*.

b) Expliciter un vecteur unitaire \vec{v} orthogonal au p.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{tagone et montrer que } \Omega = 0_E + (\alpha + 1) \vec{v} \text{ est son isobarycentre.} \\ \text{Réponse : } \vec{v} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\cos \frac{\pi}{5} e_1 + \sin \frac{\pi}{5} e_2 + \frac{1}{2} e_3 \right). \blacksquare \end{array} \right.$$

Les isométries dont il sera question ci-dessous sont toutes des isométries vectorielles de l'espace euclidien orienté $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^3$. Le point M de \mathcal{E} sera identifié au vecteur \overrightarrow{OM} . On note u la rotation d'axe $e_3 = (0, 0, 1)$ telle que $u(A_1) = A_2$ et, comme dans l'Exemple 5 du Cours, ρ la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de $\overrightarrow{0_E A_1}$. Rappelons que pour tout $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on a : $A_i = u^{i-1}(A_1)$, et que $B_1 = \rho(A_5) = \rho^2(A_2)$, d'où $\rho(B_1) = A_2$. Par définition $B_i = u^{i-1}(B_1)$ pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

a) On remarque que $u \circ \rho(A_1) = u(A_1) = A_2$, et que $u \circ \rho(A_2) = u(A_5) = A_1$. L'isométrie directe $r = u \circ \rho$ est donc involutive : c'est nécessairement un retournement, le retournement autour de la droite engendrée par le vecteur \overrightarrow{OI} , où I désigne le milieu de (A_1, A_2) . Montrons que le 5-uplet $(A_2, A_1, B_1, B'_4, B_2)$ et l'image par le retournement r du pentagone $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$. On a établi que $r(A_1) = A_2$, $r(A_2) = A_1$ et $r(B_1) = u(\rho(B_1)) = u(A_2) = A_3$, d'où $r(A_3) = B_1$. On a aussi $r(A_5) = u \circ \rho(A_5) = u(B_1) = B_2$. Il reste à démontrer que A_4 et B'_4 sont symétriques par rapport à la droite $\mathbb{R} \overrightarrow{OI}$. On a $2\overrightarrow{OI} = (1, 0, a) + (\alpha, \beta, a) = (a, \beta, 2a)$. D'autre part $\overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OB'_4} = (\alpha', -\beta', a) + (-\alpha' + 1/2, \beta, -a) = (1/2, \beta - \beta', 0)$. Ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $2a(\beta - \beta') = \beta$. On constate :

$$\beta(\beta - \beta') = \beta^2 - \beta\beta' = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} = \beta'^2,$$

d'où :

$$\frac{\beta}{\beta - \beta'} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = 2a,$$

ce qu'il fallait démontrer. Le milieu de (A_4, B'_4) étant situé sur la droite $D_{O,I}$, le plan médiateur de (A_4, B'_4) , plan vectoriel puisque $\|\overrightarrow{OA_4}\| = \|\overrightarrow{OB'_4}\|$, contient la droite $D_{O,I}$. Cela prouve que les points A_4 et B'_4 sont symétriques par rapport à la droite $D_{O,I}$, soit encore $r(A_4) = B'_4$.

Le 5-uplet $(A_2, A_1, B_1, B'_4, B_2)$ est donc le pentagone régulier plan, image par le retournement r , du pentagone $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

b) Comme e_3 est orthogonal au plan du pentagone $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, le vecteur $r(e_3)$ est orthogonal au plan du pentagone $(A_2, A_1$

Comme le centre du pentagone $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ est $C = O_E + a e_3$, le centre du pentagone $(A_2, A_1, B_1, B_4, B_2)$ est le point $\Omega = O_E + a r(e_3)$ (on rappelle que $a = 1 + \alpha$). Le vecteur $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\cos \frac{\pi}{5} e_1 + \sin \frac{\pi}{5} e_2 + \frac{1}{2} e_3)$ étant unitaire, pour montrer qu'il est le symétrique de e_3 par rapport à la droite $D_{O,I}$, il suffit de prouver que $\frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{2} \vec{v}$, est colinéaire à $2\vec{OI} = (a, \beta, 2a)$. Le vecteur colonne des coordonnées de $e_3 + \vec{v}$ est :

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\alpha' \\ \beta' \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \\ 2 + 2\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

et $2\vec{OI} = (a, \beta, 2a)$. Il nous suffit donc de démontrer l'égalité :

$$\frac{a}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\beta}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}, \quad \text{soit encore :} \quad a \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\beta}{4\beta'}.$$

Or :

$$a(\sqrt{5} - 1) = \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

et :

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\beta^2}{\beta\beta'} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = a(\sqrt{5} - 1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous en déduisons $r(e_3) = \vec{v}$, et $\Omega = O_E + a \vec{v}$.

§ VI.4 ANGLES

Exercice 1 :

Soit trois droites vectorielles D, D', D'' d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geq 3$. Montrer que si $\widehat{D, D''} = \widehat{D, D'} + \widehat{D', D''}$, alors D, D' et D'' sont coplanaires. La réciproque est-elle vraie ? ■

Posons $\alpha = \widehat{D, D'}$, $\beta = \widehat{D', D''}$ et $\gamma = \widehat{D, D''}$. Choisissons un vecteur unitaire u' de D' ; on peut alors choisir un vecteur unitaire u de D tel que $(u | u') = \cos \alpha$, et un vecteur unitaire u'' de D'' tel que $(u'' | u') = \cos \beta$. Soit (\vec{i}, \vec{j}, u') une base orthonormale. Notons v la projection orthogonale de u , et v'' la projection orthogonale de u'' , sur le plan $\mathbb{R}\vec{i} + \mathbb{R}\vec{j}$. Comme $\|v\| = \sin \alpha$ et $\|v''\| = \sin \beta$, il existe des réels φ et ψ tels que :

$$v = \sin \alpha (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) \quad \text{et} \quad v'' = \sin \beta (\cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j})$$

d'où :

$$u = \sin \alpha (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \cos \alpha u' \quad \text{et} \quad u'' = \sin \beta (\cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j}) + \cos \beta u' .$$

Nous obtenons :

$$(1) \quad (u \mid u'') = \sin \alpha \sin \beta \cos(\varphi - \psi) + \cos \alpha \cos \beta .$$

Comme $\sin \alpha \geq 0$ et $\sin \beta \geq 0$, nous déduisons de (1) l'inégalité :

$$(2) \quad \cos \gamma = |(u \mid u'')| \geq (u \mid u'') \geq -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) ,$$

et par conséquent $\gamma \leq \alpha + \beta$ (3). S'il y a égalité dans l'inégalité (3), il y a égalité dans l'inégalité (2), d'où :

$$\sin \alpha \sin \beta \cos(\varphi - \psi) + \cos \alpha \cos \beta = -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta ,$$

soit encore :

$$(4) \quad \sin \alpha \sin \beta \cos(\varphi - \psi) = -\sin \alpha \sin \beta .$$

Ceci n'est possible que si, $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, ou $\varphi - \psi \equiv \pi \pmod{2\pi}$, et dans ce dernier cas :

$$\begin{aligned} u &= \sin \alpha (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \cos \alpha u' \\ u'' &= -\sin \beta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \cos \beta u' . \end{aligned}$$

Dans le premier cas $D = D'$ ou $D' = D''$, et dans le dernier cas les droites D , D' et D'' sont dans le plan $\mathbb{R}(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \mathbb{R}u'$. Les droites D , D' et D'' sont donc toujours nécessairement coplanaires.

La réciproque est fausse. Par exemple si $D = D''$ et que D' est orthogonale à D , les trois droites sont coplanaires mais :

$$\widehat{D, D''} = 0 < \widehat{D, D'} + \widehat{D', D''} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Exercice 5 :

|| Expliquer pourquoi on ne peut pas *paver* l'espace euclidien \mathbb{R}^3 avec des tétraèdres réguliers. ■

Supposons qu'on puisse paver \mathbb{R}^3 par des tétraèdres réguliers. Soit \mathcal{P} un tel pavage, $A \in \mathbb{R}^3$ qui est sommet de l'un des tétraèdres éléments de \mathcal{P} , et \mathcal{T}_A l'ensemble des éléments de \mathcal{P} qui contiennent A . Le

nécessairement sommet de chacun des éléments de \mathcal{T}_A , et les éléments de \mathcal{T}_A recouvrent l'espace au voisinage de A de telle sorte que les intersections deux-à-deux des éléments de \mathcal{T}_A soient d'intérieur vide. On voit qu'alors l'angle solide total de centre A , de valeur 4π , est un multiple entier de l'angle solide déterminé en A par l'un des tétraèdres.

Soit T un tétraèdre régulier de sommets A, B, C, D . On peut supposer que la longueur de chaque arête est 1. L'angle solide déterminé en A par le tétraèdre T est la surface du triangle sphérique B, C, D , sur la sphère de centre A et de rayon 1. Les angles de ce triangle sphérique sont égaux; notons α leur valeur. D'après l'exercice 9 du § VIII.6 du tome 3, l'aire de ce triangle sphérique est $3\alpha - \pi$. L'angle α est aussi l'angle entre les plans de deux des faces du tétraèdre. Si I est le milieu de l'arête AC , et H l'isobarycentre de la face A, C, D , α est l'angle en I dans le triangle rectangle B, H, I ; son cosinus est donc $1/3$.

L'angle solide déterminé en A par le tétraèdre T est donc :

$$\omega = 3\alpha - \pi = 3 \operatorname{Arc} \cos (1/3) - \pi .$$

On trouve que la valeur approchée à 10^{-2} par défaut du quotient $\frac{4\pi}{\omega}$ est 22,79; ce quotient n'est donc pas entier.

On peut aussi démontrer que α/π est irrationnel. On constate que :

$$(X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha}) = X^2 - \frac{2}{3}X + 1 .$$

Le complexe $e^{i\alpha}$ est donc algébrique, de degré 2. Supposons α/π rationnel; le complexe $e^{i\alpha}$ est alors d'ordre fini non nul d dans le groupe \mathbb{U} ; son polynôme minimal est le polynôme cyclotomique Φ_d (qui est bien irréductible), de degré $\varphi(d)$, où φ désigne la fonction d'Euler; on a donc $\varphi(d) = 2$. On voit facilement que le nombre entier d ne peut être que le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis qu'il ne peut s'agir que de 3, 4 ou 6. Le polynôme minimal de $e^{i\alpha}$ ne peut donc être que :

$$\text{soit } \Phi_4 = (X - i)(X + i) = X^2 + 1 ,$$

$$\text{soit } \Phi_3 = (X - j)(X - j^2) = X^2 + X + 1 ,$$

$$\text{soit } \Phi_6 = (X + j)(X + j^2) = X^2 - X + 1 .$$

En aucun cas le polynôme minimal de $e^{i\alpha}$ ne peut être $X^2 - \frac{2}{3}X + 1$, ce qui est contradictoire.

Comme le rapport α/π est irrationnel, le rapport $\frac{4\pi}{3\alpha - \pi}$ ne peut pas être entier.

Cela prouve qu'il n'y a pas de pavage de \mathbb{R}^3 par des tétraèdres réguliers.

§ VI.5 DISTANCES, DROITES ET PLANS

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension $n \geq 3$. On donne deux entiers > 0 p et q tels que $p + q \leq n - 1$, et deux sous-espaces affines \mathcal{V} et \mathcal{W} de dimensions p et q , tels que $\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{W}} = \{\vec{0}\}$. Soit $(A; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ un repère affine de \mathcal{V} et $(B; e_1, \dots, e_q)$ un repère affine de \mathcal{W} .

a) Prouver qu'il existe une unique droite affine \mathcal{D} qui rencontre à la fois \mathcal{V} et \mathcal{W} et telle que $\vec{\mathcal{D}} \subset (\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}})^\perp$. On notera H le point commun à \mathcal{D} et \mathcal{V} , et K le point commun à \mathcal{D} et \mathcal{W} .

b) Montrer que $\|\vec{HK}\| = \min_{(M,N) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}} \|\vec{MN}\|$, et que (H, K) est le seul élément de $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ réalisant ce minimum.

c) Démontrer : $\|\vec{HK}\|^2 = \frac{G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, \vec{AB})}{G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)}$ (cf. Exercice 2 du § II.5) et indiquer deux méthodes permettant de déterminer H et K en fonction des données $(A; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et $(B; e_1, \dots, e_q)$.

d) Que deviennent les résultats ci-dessus si on suppose $\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{W}} \neq \{\vec{0}\}$? ■

a) Supposons que la droite \mathcal{D} coupe orthogonalement \mathcal{V} en H et \mathcal{W} en K . On a alors :

$$\vec{AB} = \vec{AH} + \vec{HK} + \vec{KB} = \vec{AH} - \vec{BK} + \vec{HK}.$$

Le vecteur \vec{HK} est par hypothèse dans le sous-espace $(\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}})^\perp$, et d'autre part $\vec{AH} \in \vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{BK} \in \vec{\mathcal{W}}$; nous en déduisons que $\vec{AH} - \vec{BK}$ est la projection orthogonale du vecteur \vec{AB} sur le sous-espace $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}}$. Cela prouve l'unicité des points H et K .

Réciproquement, notons φ la projection orthogonale sur $\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}}$ et posons $\varphi(\vec{AB}) = \vec{u} - \vec{v}$ où $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{W}}$. On a $H = A + \vec{u} \in \mathcal{V}$, $K = B + \vec{v} \in \mathcal{W}$, et $\vec{HK} = -\vec{u} + \vec{AB} + \vec{v} = \vec{AB} - \varphi(\vec{AB}) \in (\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}})^\perp$.

Si $H \neq K$, la droite passant par H et K est la seule droite qui coupe orthogonalement \mathcal{V} et \mathcal{W} . Si $H = K$, les droites qui coupent orthogonalement \mathcal{V} et \mathcal{W} sont les droites passant par $H = K$ et dont la direction est incluse dans le sous-espace $(\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}})^\perp$.

b) On a $\mathcal{V} = H + \vec{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{W} = K + \vec{\mathcal{W}}$. Soit $M \in \mathcal{V}$ et $N \in \mathcal{W}$, on peut poser $M = H + \vec{u}$ et $N = K + \vec{v}$, où $\vec{u} \in \vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{W}}$. On observe que $\overrightarrow{MN} = (\vec{v} - \vec{u}) + \overrightarrow{HK}$; le deuxième vecteur étant orthogonal au premier, nous en déduisons :

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\overrightarrow{HK}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HK}\|^2,$$

et il ne peut y avoir égalité dans cette inégalité que si $\vec{v} - \vec{u} = \vec{0}$, soit $\vec{v} = \vec{u} = \vec{0}$, d'où $M = H$ et $N = K$, puisque les espaces $\vec{\mathcal{V}}$ et $\vec{\mathcal{W}}$ sont linéairement indépendants.

c) Nous reprenons les notations du a). Posons aussi $\overrightarrow{HK} = d\vec{k}$, où \vec{k} est un vecteur unitaire dans $(\vec{\mathcal{V}} \oplus \vec{\mathcal{W}})^\perp$, et $d \geq 0$. On a donc $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v} + d\vec{k}$. Comme \vec{u} est dans le sous-espace engendré par $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, et que \vec{v} est dans le sous-espace engendré par (e_1, \dots, e_q) , on a :

$$G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, \overrightarrow{AB}) = G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, d\vec{k}).$$

Comme le vecteur \vec{k} est orthogonal aux vecteurs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ et aux vecteurs (e_1, \dots, e_q) , le déterminant de Gram $G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, \vec{k})$ est le déterminant d'une matrice comportant deux blocs diagonaux, le premier ayant pour déterminant $G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$ et dont le second étant 1. Nous en déduisons :

$$\|\overrightarrow{HK}\|^2 = d^2 = \frac{G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, \overrightarrow{AB})}{G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)}.$$

Les points H et K sont obtenus par la méthode exposée dans le a). D'autre part, puisque $\|\overrightarrow{HK}\|^2 = \min_{(M,N) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}} \|\overrightarrow{MN}\|^2$, la différentielle en (H, K) de

l'application $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, $(M, N) \mapsto \|\overrightarrow{MN}\|^2$, est nulle. On dispose ainsi d'une autre méthode permettant de déterminer le couple (H, K) .

d) Supposons que la droite \mathcal{D} coupe orthogonalement \mathcal{V} en H et \mathcal{W} en K . On a alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{HK}.$$

Le vecteur \overrightarrow{HK} est par hypothèse dans le sous-espace $(\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{W}})^\perp$, et d'autre part $\overrightarrow{AH} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{BK} \in \overrightarrow{\mathcal{W}}$; nous en déduisons que $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BK}$ est la projection orthogonale du vecteur \overrightarrow{AB} sur le sous-espace $\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{W}}$.

Réciproquement, notons p la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{W}}$ et posons $p(\overrightarrow{AB}) = \vec{u} - \vec{v}$ où $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{W}}$ (il n'y a pas unicité). Si $H = A + \vec{u}$ et $K = B + \vec{v}$, alors $H \in \mathcal{V}$, $K \in \mathcal{W}$, et

$$\overrightarrow{HK} = -\vec{u} + \overrightarrow{AB} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} - p(\overrightarrow{AB}) \in (\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{W}})^\perp.$$

Si $H \neq K$, la droite passant par H est K coupe orthogonalement \mathcal{V} et \mathcal{W} . Si $H = K$ les droites passant par $H = K$ et dont la direction est incluse dans le sous-espace $(\overrightarrow{\mathcal{V}} + \overrightarrow{\mathcal{W}})^\perp$ coupent orthogonalement \mathcal{V} et \mathcal{W} .

Soient H et K choisis comme ci-dessus. $\mathcal{V} = H + \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{W} = K + \overrightarrow{\mathcal{W}}$. Soit $M \in \mathcal{V}$ et $N \in \mathcal{W}$, on peut poser $M = H + \vec{u}$ et $N = K + \vec{v}$, où $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{W}}$. On observe que $\overrightarrow{MN} = (\vec{v} - \vec{u}) + \overrightarrow{HK}$; le deuxième vecteur étant orthogonal au premier, nous en déduisons :

$$\|\overrightarrow{MN}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\overrightarrow{HK}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HK}\|^2,$$

et il ne peut y avoir égalité dans cette inégalité que si $\vec{v} - \vec{u} = \vec{0}$, mais cela n'implique pas ici $\vec{v} = \vec{u} = \vec{0}$, ni $M = H$ et $N = K$, puisque les espaces $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{W}}$ sont linéairement dépendants.

La distance $\|\overrightarrow{HK}\|$ est donc la distance minimum entre un point de \mathcal{V} et un point de \mathcal{W} . Il est impossible ici d'utiliser les déterminants de Gram $G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q)$ et $G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1, \dots, e_q, \overrightarrow{AB})$, qui sont nuls.

Exercice 4 :

Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien \mathcal{E} , et M un point quelconque de \mathcal{E} , distinct de A, B, C . Soit \mathcal{D}_1 la droite symétrique de $\text{Dr}(A, M)$ par rapport aux bissectrices de $(\text{Dr}(A, B), \text{Dr}(A, C))$. On définit de même \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 . Montrer que les trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes ou parallèles. ■

On posera $a = \|\overrightarrow{BC}\|$, $b = \|\overrightarrow{CA}\|$, $c = \|\overrightarrow{AB}\|$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{u}$, $\overrightarrow{CA} = b\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB} = c\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont unitaires, deux-à-deux

indépendants, et liés par la relation $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Les vecteurs \vec{w} et $-\vec{v}$ sont symétriques dans la symétrie orthogonale autour de la bissectrice intérieure en A .

La suite des coordonnées barycentriques d'un point $P \in \mathcal{E}$ dans la base affine (A, B, C) sera notée $\alpha(P), \beta(P), \gamma(P)$; α, β, γ sont trois applications affines $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ qui forment une base de l'espace $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathbb{R})$.

Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées affines de M dans la base affine (A, B, C) . Comme $\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = yc\vec{w} - zb\vec{v}$, le symétrique de M dans la symétrie orthogonale autour de la bissectrice intérieure en A est $S_A(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{AS_A(M)} = -yc\vec{v} + zb\vec{w} = y\frac{c}{b}\overrightarrow{AC} + z\frac{b}{c}\overrightarrow{AB}.$$

La droite symétrique de la droite $\text{Dr}(A, M)$ par rapport à la bissectrice intérieure en A est la droite $\text{Dr}(A, S_A(M))$; ses points sont les points P de \mathcal{E} tels que :

$$\frac{c\beta(P)}{bz} = \frac{b\gamma(P)}{cy},$$

ce qui s'écrit :

$$\frac{y}{b^2}\beta(P) = \frac{z}{c^2}\gamma(P) \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b^2}\beta(P) - \frac{z}{c^2}\gamma(P) = 0.$$

On trouve de manière analogue que P est sur la symétrique de la droite $\text{Dr}(B, M)$ par rapport à la bissectrice intérieure en B si, et seulement si :

$$\frac{z}{c^2}\gamma(P) = \frac{x}{a^2}\alpha(P) \quad \text{ou} \quad \frac{z}{c^2}\gamma(P) - \frac{x}{a^2}\alpha(P) = 0,$$

et que P est sur la symétrique de la droite $\text{Dr}(C, M)$ par rapport à la bissectrice intérieure en C si, et seulement si :

$$\frac{x}{a^2}\alpha(P) = \frac{y}{b^2}\beta(P) \quad \text{ou} \quad \frac{x}{a^2}\alpha(P) - \frac{y}{b^2}\beta(P) = 0.$$

Ces droites sont concourantes ou parallèles puisque leurs équations sont liées (leur somme est nulle). Elles sont concourantes si, et seulement si, il existe un point P tel que

$$\frac{x}{a^2}\alpha(P) = \frac{y}{b^2}\beta(P) = \frac{z}{c^2}\gamma(P),$$

donc dont les coordonnées barycentriques p, q, r vérifient $p + q + r = 1$, et :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad p = \lambda \frac{a^2}{x}, q = \lambda \frac{b^2}{y}, r = \lambda \frac{c^2}{z}.$$

Un tel point existe si, et seulement si :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \neq 0 \quad \text{soit encore} \quad a^2 y z + b^2 x z + c^2 x y \neq 0 .$$

Dans ce cas, un système de coordonnées barycentriques homogènes du point de concours de ces droites est :

$$\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z} \right) .$$

Les points M tels que $a^2 y z + b^2 x z + c^2 x y = 0$ sont les points du cercle circonscrit au triangle (A, B, C) .

§ VI.6 SIMILITUDES

Exercice 2 :

On donne dans un plan affine euclidien \mathcal{E} quatre points distincts deux à deux $A, B ; A', B'$ et on suppose $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe affine transformant (A, B) en (A', B') . Donner une construction simple du centre de cette similitude. ■

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère affine orthonormal de \mathcal{E} ; l'afixe dans le repère \mathcal{R} du point M sera notée z_M . On sait que les similitudes affines directes sont les applications $M \mapsto \varphi(M)$, telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$z_{\varphi(M)} = \alpha z_M + \beta .$$

La similitude φ , telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $z_{\varphi(M)} = \alpha z_M + \beta$, vérifie les conditions de l'énoncé si, et seulement si :

$$z_{A'} = \alpha z_A + \beta \quad \text{et} \quad z_{B'} = \alpha z_B + \beta .$$

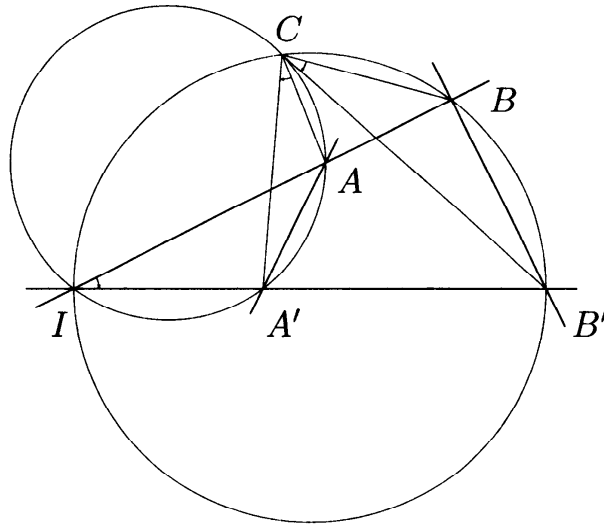
Comme $z_A \neq z_B$, il y a une et une seule solution pour α et β :

$$\alpha = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{z_A z_{B'} - z_B z_{A'}}{z_A - z_B} .$$

On vérifie que comme $z_{A'} \neq z_{B'}$, $\alpha \neq 0$. D'autre part, comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, on a $\alpha \neq 1$, et par conséquent la similitude φ a un point fixe et un seul (son centre).

Construction du centre de la similitude.

On trouvera ci-dessous une figure représentant la situation la plus générale.



On suppose que les points A, A', B, B' sont distincts ; le centre C de la similitude ne peut donc être aucun de ces points.

1) Si les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont liés, la similitude est une homothétie. Dans ce cas, C est l'intersection des droites $\text{Dr}(A, A')$ et $\text{Dr}(B, B')$. Nous supposons dans la suite que les vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont linéairement indépendants.

2) Les droites $\text{Dr}(A, B)$ et $\text{Dr}(A', B')$ ne sont pas parallèles et ont un point d'intersection unique noté I . On peut écrire $\varphi = h \circ r = r \circ h$ où h est une homothétie de centre C et de rapport > 0 , et r est une rotation de centre C et dont une détermination de l'angle est $\theta \in]0, 2\pi[$. L'angle orienté des droites $\text{Dr}(C, A)$ et $\text{Dr}(C, A')$ est égal à l'angle orienté des droites $\text{Dr}(C, B)$ et $\text{Dr}(C, B')$, qui est égal à l'angle orienté des droites $\text{Dr}(A, B)$ et $\text{Dr}(A', B')$; l'une des déterminations de cet angle orienté de droites est θ . La discussion porte maintenant sur la position de I .

a) Si $I = A$. Dans ce cas, $I \neq B$, les points B, B', I ne sont pas alignés, sinon B' est sur la droite $\text{Dr}(I, B) = \text{Dr}(A, B)$ et sur la droite $\text{Dr}(A', B')$, d'où $B' = I = A$, ce qui a été exclu. Le point C est sur le cercle circonscrit au triangle (I, B, B') et sur le cercle qui passe par A' et qui est tangent en I à la droite $\text{Dr}(I, B)$ ($C \neq I = A$). Si $I = B$ la situation est analogue. Si $I = A'$ ou $I = B'$, il suffit de considérer la similitude inverse. Nous supposons dans la suite que I n'est aucun des points A, A', B, B' .

b) Les points A, A', I ne sont pas alignés, sinon $\text{Dr}(A, I) = \text{Dr}(A, B) = \text{Dr}(A', I) = \text{Dr}(A', B')$; de même les points B, B', I ne peuvent pas être alignés. D'après les propriétés angulaires remarquées ci-dessus, les points A, A', C, I et les points B, B', C, I sont cocycliques. Le centre C est donc un des points d'intersection du cercle circonscrit au triangle A, A', I et du cercle circonscrit au triangle B, B', I ; ce n'est pas I , sauf si le :

sont tangents en I : en effet si $I = C$, posons $\overrightarrow{IB} = \lambda \overrightarrow{IA}$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$; nous en déduisons $\overrightarrow{IB'} = \lambda \overrightarrow{IA'}$; le cercle circonscrit au triangle B, B', I est l'image du cercle circonscrit au triangle A, A', I par l'homothétie de centre I et de rapport λ ; ces deux cercles ont dans ce cas même tangente en I , qui est leur seul point d'intersection.

§ VI.7 CERCLES, SPHÈRES

Exercice 4 :

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère 4 points M_i de coordonnées (x_i, y_i) , où $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

a) Montrer que les M_i sont alignés ou cocycliques ssi $D = 0$, avec :

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

b) On pose $d_{i,j} = \|\overrightarrow{M_i M_j}\|$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$. Montrer que la CNS de cocyclicité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou plus simplement $d_{1,2} d_{3,4} \pm d_{1,3} d_{2,4} \pm d_{2,3} d_{1,4} = 0$. ■

a) Les points M_i , où $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont alignés ou cocycliques si, et seulement si, il existe des réels (a, b, c, d) non tous nuls, tels que pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on ait :

$$a(x_i^2 + y_i^2) + b x_i + c y_i + d = 0.$$

Il existe un tel 4-uplet de réels si, et seulement si, les vecteurs colonne de la matrice :

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

sont liés, c'est-à-dire si, et seulement si, $D = 0$.

b) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$, on a par définition :

$$d_{i,j}^2 = \|\overrightarrow{M_j M_i}\|^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 = x_j^2 + y_j^2 - 2x_j x_i - 2y_j y_i + x_i^2 + y_i^2.$$

On constate que :

$$d_{i,j}^2 = [x_i^2 + y_i^2, x_i, y_i, 1] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2x_j \\ -2y_j \\ x_j^2 + y_j^2 \end{bmatrix}.$$

Nous en déduisons l'égalité matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 \\ -2y_1 & -2y_2 & -2y_3 & -2y_4 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_2^2 + y_2^2 & x_3^2 + y_3^2 & x_4^2 + y_4^2 \end{bmatrix},$$

d'où l'égalité :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & d_{1,2}^2 & d_{1,3}^2 & d_{1,4}^2 \\ d_{2,1}^2 & 0 & d_{2,3}^2 & d_{2,4}^2 \\ d_{3,1}^2 & d_{3,2}^2 & 0 & d_{3,4}^2 \\ d_{4,1}^2 & d_{4,2}^2 & d_{4,3}^2 & 0 \end{vmatrix} = 4D^2.$$

Les points M_i , où $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont donc cocycliques ou alignés si, et seulement si $\Delta = 0$. D'après l'exercice 4 du § XIII.4 du Tome 1, on a l'égalité :

$$\Delta = -(d_{2,3}d_{1,4} + d_{1,3}d_{2,4} + d_{1,2}d_{3,4})(d_{2,3}d_{1,4} + d_{1,3}d_{2,4} - d_{1,2}d_{3,4}) \times \\ \times (d_{2,3}d_{1,4} - d_{1,3}d_{2,4} + d_{1,2}d_{3,4})(-d_{2,3}d_{1,4} + d_{1,3}d_{2,4} + d_{1,2}d_{3,4}).$$

On voit donc que les points M_i , où $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, $d_{1,2}d_{3,4} \pm d_{1,3}d_{2,4} \pm d_{2,3}d_{1,4} = 0$.

Exercice 6 :

- || Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension 3. Pour toute sphère S de \mathcal{E} , on note \hat{S} la fonction puissance associée.
- a) Soit deux sphères S_1, S_2 et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\hat{S}_1(M) - k\hat{S}_2(M) = 0$:

faisceau linéaire engendré par S_1 et S_2 . Discuter.

b) Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$ des points de \mathcal{E} non coplanaires, G leur isobarycentre, O le centre de la sphère S qui passe par les A_i , et Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = 2\overrightarrow{OG}$ (Ω est appelé *point de Monge* du tétraèdre $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$). Soit $M_{1,2}$ le milieu de $\{A_1, A_2\}$. Prouver que $(\overrightarrow{\Omega M_{1,2}} | \overrightarrow{A_3 A_4}) = 0$. En déduire que Ω est commun à 6 plans remarquables.

c) Soit \mathcal{V} la sphère de diamètre $\{G, \Omega\}$ (\mathcal{V} est appelée la *sphère orthocentroïdale* du tétraèdre $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$), et \mathcal{W} la sphère déduite de S dans l'homothétie de centre G , de rapport $-1/3$ (\mathcal{W} est appelée *sphère des douze points* de $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$).

Montrer que Ω est un centre d'homothétie de S et de \mathcal{W} .

Prouver : il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{\mathcal{W}(A_i)}{\mathcal{V}(A_i)} = k$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Calculer k .

En déduire que S , \mathcal{V} , \mathcal{W} appartiennent à un même faisceau. ■

a) Nous supposons $S_1 \neq S_2$. Si $k = 1$, l'ensemble est le plan radical des sphères S_1 et S_2 , élément du faisceau linéaire engendré par les sphères S_1 et S_2 ; si $k \neq 1$, cet ensemble est aussi l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\frac{1}{1-k} \widehat{S}_1(M) - \frac{k}{1-k} \widehat{S}_2(M) = 0 ;$$

il s'agit par définition d'une sphère du faisceau linéaire engendré par S_1 et S_2 .

b) Comme :

$$\overrightarrow{\Omega O} = -2\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) ,$$

et :

$$\overrightarrow{OM_{1,2}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) ,$$

nous en déduisons :

$$\overrightarrow{\Omega M_{1,2}} = \overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OM_{1,2}} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}) .$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega M_{1,2}} | \overrightarrow{A_3 A_4}) &= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} | \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3}) = \\ &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{OA_3}\|^2 - \|\overrightarrow{OA_4}\|^2) = 0 \end{aligned}$$

puisque O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre. Par analogie, nous en déduisons que le point Ω est dans chacun des 6 plans qui passent par le milieu d'une arête et qui sont orthogonaux à l'arête opposée.

c) On note R le rayon de la sphère circonscrite. Le rayon de la sphère \mathcal{W} est $R/3$, son centre est le point $O_{\mathcal{W}}$ tel que $\overrightarrow{GO_{\mathcal{W}}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$. Nous en déduisons $3\overrightarrow{\Omega O_{\mathcal{W}}} = 3(\overrightarrow{\Omega G} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GO}) = 3\overrightarrow{\Omega G} - \overrightarrow{GO} = 2\overrightarrow{\Omega G} = \overrightarrow{\Omega O}$. L'homothétie de centre Ω et de rapport 3 transforme donc la sphère \mathcal{W} en la sphère de centre O et de rayon R , c'est-à-dire en S . Il y a donc 2 homothéties qui transforment S en \mathcal{W} , ce qui est normal, puisque les sphères S et \mathcal{W} n'ont pas le même rayon et ne sont pas concentriques.

Etablissons les équations des sphères. On a bien sûr :

$$\widehat{S}(M) = \|\overrightarrow{OM}\|^2 - R^2 = \|\overrightarrow{GM}\|^2 + 2(\overrightarrow{OG} | \overrightarrow{GM}) + \|\overrightarrow{OG}\|^2 - R^2.$$

Notons h l'homothétie de centre G et de rapport -3 ; on a $h(\mathcal{W}) = S$; nous en déduisons que le point M appartient à la sphère \mathcal{W} si, et seulement si, $\widehat{S}(h(M)) = 0$. Or pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\widehat{S}(h(M)) = \widehat{S}(G - 3\overrightarrow{GM}) = 9\|\overrightarrow{GM}\|^2 - 6(\overrightarrow{OG} | \overrightarrow{GM}) + \|\overrightarrow{OG}\|^2 - R^2.$$

Par unicité de l'équation d'une sphère nous obtenons donc :

$$\widehat{\mathcal{W}}(M) = \|\overrightarrow{GM}\|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{OG} | \overrightarrow{GM}) + \frac{1}{9}(\|\overrightarrow{OG}\|^2 - R^2),$$

pour tout $M \in \mathcal{E}$. D'autre part, par définition de la sphère \mathcal{V} , pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\widehat{\mathcal{V}}(M) = (\overrightarrow{M\Omega} | \overrightarrow{MG}) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{G\Omega} | \overrightarrow{MG}) = \|\overrightarrow{GM}\|^2 - (\overrightarrow{OG} | \overrightarrow{GM}).$$

On vérifie facilement que les fonctions $\widehat{S}, \widehat{\mathcal{V}}, \widehat{\mathcal{W}}$ sont liées ; on constate l'égalité : $\frac{1}{9}\widehat{S} + \frac{8}{9}\widehat{\mathcal{V}} = \widehat{\mathcal{W}}$; les 3 sphères S , \mathcal{V} et \mathcal{W} appartiennent donc à un même faisceau linéaire.

Pour tout $M \in S$, en particulier si M est A_1, A_2, A_3 ou A_4 , on a $\widehat{S}(M) = 0$, et par conséquent :

$$\widehat{\mathcal{W}}(M) = \frac{8}{9}\widehat{\mathcal{V}}(M).$$

Le nombre k de l'énoncé est donc $\frac{8}{9}$.

Exercice 7 (*Problème du cerceau rangé dans un coin*) :

|| Soit $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal d'un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3. Lieu des centres des cercles de rayon $R > 0$, tangents aux trois plans de coordonnées de \mathcal{R} . ■

Les fonctions affines coordonnées dans le repère \mathcal{R} seront notées $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Cherchons des conditions nécessaires. Soit A un point de \mathcal{E} qui est centre d'un cercle \mathcal{C} vérifiant les conditions, et soit $(A; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal du plan P du cercle \mathcal{C} . Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, le point $M = A + (x\vec{u} + y\vec{v})$ du plan P est dans le plan de coordonnées d'équation $\varphi_i(M) = 0$ si, et seulement si,

$$\varphi_i(A) + x\vec{\varphi}_i(\vec{u}) + y\vec{\varphi}_i(\vec{v}) = 0.$$

On obtient ainsi une équation dans le repère orthonormal $(A; \vec{u}, \vec{v})$ du plan P , de la droite D_i , intersection de P et du plan de coordonnées d'équation $\varphi_i(M) = 0$. Comme le cercle \mathcal{C} de rayon R est tangent aux plans de coordonnées, sa distance à la droite D_i est R . On a donc l'égalité :

$$(1) \quad \frac{|\varphi_i(A)|}{\sqrt{\vec{\varphi}_i^2(\vec{u}) + \vec{\varphi}_i^2(\vec{v})}} = R \quad \text{soit} \quad \frac{\varphi_i^2(A)}{R^2} = \vec{\varphi}_i^2(\vec{u}) + \vec{\varphi}_i^2(\vec{v}).$$

En faisant la somme des 3 égalités ainsi obtenues, comme les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont unitaires, nous obtenons la condition nécessaire :

$$\varphi_1^2(A) + \varphi_2^2(A) + \varphi_3^2(A) = 2R^2.$$

Le point A se trouve donc nécessairement sur la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}R$.

Comme le plan P coupe les trois plans de coordonnées, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $(\vec{\varphi}_i(\vec{u}), \vec{\varphi}_i(\vec{v})) \neq (0, 0)$, et par conséquent $\varphi_i(A) \neq 0$.

Une dernière condition nécessaire. Soit \vec{w} tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale de \mathcal{E} ; la matrice :

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1(\vec{u}) & \vec{\varphi}_1(\vec{v}) & \vec{\varphi}_1(\vec{w}) \\ \vec{\varphi}_2(\vec{u}) & \vec{\varphi}_2(\vec{v}) & \vec{\varphi}_2(\vec{w}) \\ \vec{\varphi}_3(\vec{u}) & \vec{\varphi}_3(\vec{v}) & \vec{\varphi}_3(\vec{w}) \end{bmatrix},$$

est une matrice orthogonale, donc pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, on a l'égalité : $\vec{\varphi}_i^2(\vec{u}) + \vec{\varphi}_i^2(\vec{v}) + \vec{\varphi}_i^2(\vec{w}) = 1$. Nous en déduisons la condition nécessaire $\varphi_i^2(A) \leq R^2$ (cf. (1)).

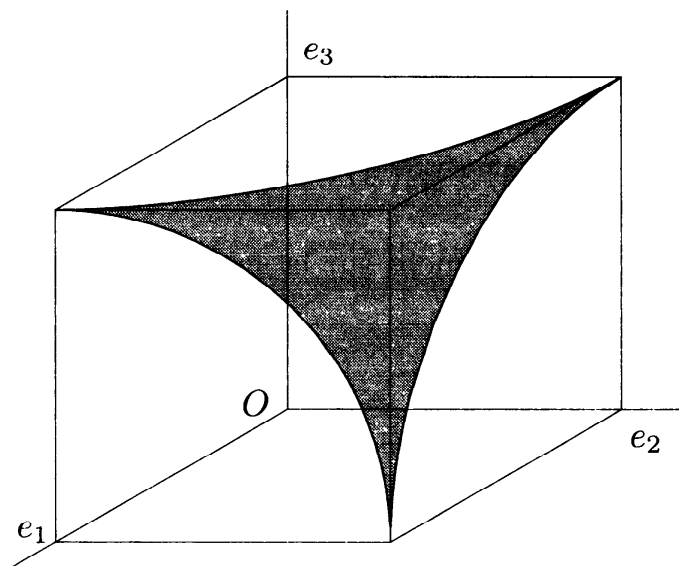
En conclusion, nous avons trouvé que A se trouvait nécessairement sur la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}R$, et que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $0 < |\varphi_i(A)| \leq R$.

Montrons que les conditions énoncées ci-dessus sont suffisantes pour que A soit le centre d'un cercle tangent aux trois plans de coordonnées. Supposons que $A \in \mathcal{E}$ vérifie ces conditions. Il existe des vecteurs \vec{w} tel que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$:

$$\vec{\varphi}_i^2(\vec{w}) = 1 - \frac{\varphi_i^2(A)}{R^2} ;$$

si pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $0 < |\varphi_i(A)| < R$, il y a exactement 8 solutions. Ces vecteurs \vec{w} sont unitaires car $\sum_{i=1}^3 \vec{\varphi}_i^2(A) = 2R^2$. En reprenant les calculs faits dans la recherche de conditions nécessaires, on voit que le plan passant par A et orthogonal à l'une des solutions \vec{w} , c'est-à-dire le plan $A + (\mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v})$, où (\vec{u}, \vec{v}) est tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale, coupe les plans de coordonnées dans le repère \mathcal{R} suivant 3 droites dont la distance au point A est R . Pour chacun de ces vecteurs \vec{w} , le cercle de centre A et de rayon R dans le plan passant par A et orthogonal à \vec{w} , est donc tangent aux 3 plans de coordonnées ; on trouve 4 solutions en général (\vec{w} et $-\vec{w}$ donnent le même plan).

On trouvera ci-dessous une représentation de l'ensemble des points A qui vérifient les conditions, et dont les coordonnées sont > 0 ; le reste de l'ensemble s'obtient par symétries.



Chapitre VII

COURBES EN GÉOMÉTRIE AFFINE

§ VII.1 COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1 :

|| Soit une courbe paramétrée $f : I \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 , de trajectoire Γ . Montrer que l'intérieur de Γ est vide. ■

On suppose $\dim E > 1$. D'après l'Exemple 3 du § VII.1 du Tome 3 du Cours, si I est ouvert, l'ensemble $f(I)$ est négligeable. Il est clair que ce résultat est encore vrai dans tous les cas où I est un intervalle. L'ensemble $f(I)$ est donc d'intérieur vide.

Exercice 2 :

|| Montrer qu'une immersion de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq +\infty$) d'un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} dans E , à valeurs dans une sous-variété de dimension 1 et de classe \mathcal{C}^k , est un plongement. Peut-on généraliser à des sous-variétés de dimension quelconque ? ■

On sait qu'il existe des immersions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des plongements (cf. exercice 1 du § VI.3 du tome 3). Comme \mathbb{R}^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^2 , cela prouve qu'il n'y a pas de généralisation possible dans cette direction. Par contre nous démontrerons le résultat suivant, qui contient la proposition à démontrer :

Lemme :

|| Soit U un ouvert de \mathbb{R}^m et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, une immersion de classe \mathcal{C}^k ($m \leq n$ et $k \geq 1$). Si $f(U)$ est inclus dans une variété \mathcal{V} de classe \mathcal{C}^k et de dimension m , alors $f(U)$ est une variété de classe \mathcal{C}^k qui est relativement ouverte dans \mathcal{V} , et f est un plongement. ■

Soit $x_0 \in U$ et $y_0 = f(x_0)$. Puisque \mathcal{V} est une sous-variété de classe \mathcal{C}^k et de dimension m incluse dans \mathbb{R}^n , il existe un réel $r > 0$, un voisinage ouvert V de y_0 dans \mathbb{R}^n , et un \mathcal{C}^k -difféomorphisme $\varphi :]-r, r[^n \rightarrow V$ tel que $\varphi(]-r, r[^m \times \{0\}) = \mathcal{V} \cap V$. Posons $U_1 = f^{-1}(V)$, voisinage ouvert de x_0 . L'application $f_1 = \varphi^{-1} \circ f|_{U_1}$, est une application de classe \mathcal{C}^k définie sur U_1 , et puisque f est à valeurs dans \mathcal{V} , f_1 est à valeurs dans $]-r, r[^m \times \{0\}$. Il est d'autre part clair qu'en tout $x \in U_1$, le rang de $d_x f_1$ est exactement m . Notons p la projection canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. On voit que $g_1 = p \circ f_1$ est une immersion de classe \mathcal{C}^k , $U_1 \rightarrow]-r, r[^m$. Comme U_1 est un ouvert de \mathbb{R}^n , cette immersion est ouverte (théorème d'inversion locale). Notons V_1 son image; on voit que $f(U_1) = \varphi(V_1 \times \{0\}) \cap \mathcal{V}$ est un ouvert relatif de \mathcal{V} .

L'ensemble $f(U)$ est donc relativement ouvert dans \mathcal{V} . D'après la proposition VII.2.2 du Tome 4 du Cours, cela prouve que $f(U)$ est une sous-variété de classe \mathcal{C}^k et de dimension m de \mathbb{R}^n . Enfin, nous en déduisons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement (Théorème VI.3.2 et définition VI.3.3 du Tome 3 du Cours).

Exercice 4 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3 muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$. On donne trois réels a, b, c distincts, et on considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} = \omega \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto f(t)$ définie par les coordonnées de $f(t)$ dans \mathcal{R} :

$$f_1(t) = \frac{1}{t-a}, \quad f_2(t) = \frac{1}{t-b}, \quad f_3(t) = \frac{1}{t-c}.$$

a) Montrer que $\Gamma = \text{Im}(f)$ est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{E} . Combien a-t-elle de composantes connexes ?

b) Soit $M_0 \in \mathcal{E}$. Etudier les plans osculateurs à f qui passent par M_0 . S'ils sont osculateurs en les paramètres t_i , montrer que M_0 et les $f(t_i)$ sont coplanaires.

c) Soit \mathcal{V} l'un des plans osculateurs à f . Déterminer l'ensemble des points où les tangentes à f rencontrent \mathcal{V} .

d) On suppose désormais \mathcal{E} euclidien et \mathcal{R} orthonormal. Soit $(t_i)_{i \in [1,4]} \in \omega^4$ et $M_i = f(t_i)$.

d1) Prouver que si $(\overrightarrow{M_1 M_2} | \overrightarrow{M_3 M_4}) = 0$, alors

$(\overrightarrow{M_1 M_3} | \overrightarrow{M_2 M_4}) = (\overrightarrow{M_1 M_4} | \overrightarrow{M_2 M_3}) = 0$. Et s'il en est ainsi, l'orthocentre du tétraédre orthocentrique $T = (M_i)_{i \in [1,4]}$ appartient à Γ .

d2) Montrer que si $\overrightarrow{M_1 M_2}$, $\overrightarrow{M_1 M_3}$ et $\overrightarrow{M_1 M_4}$ sont deux à deux orthogonaux, la tangente en t_1 à f est orthogonale

$$\parallel (M_2, M_3, M_4) . \blacksquare$$

a) Soit $U = (\mathbb{R}^*)^3$; c'est un ouvert de \mathbb{R}^3 . Il est clair que Γ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3) \in U$ tels que :

$$\frac{1}{x_1} + a = \frac{1}{x_2} + b = \frac{1}{x_3} + c .$$

L'application $g : U \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_3} \right) ,$$

est de classe \mathcal{C}^∞ et sa matrice Jacobienne en (x_1, x_2, x_3) est :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ \frac{1}{x_1^2} & 0 & \frac{1}{x_3^2} \end{bmatrix} ,$$

visiblement toujours de rang 2. D'après la proposition VI.3.1 du Tome 3 du Cours, nous pouvons en déduire que Γ est une variété de classe \mathcal{C}^∞ et de dimension $3 - 2 = 1$, i.e. une variété courbe.

Supposons $a < b < c$ (ce qui est toujours possible en changeant éventuellement la numérotation des coordonnées).

On voit que les ensembles $f(]-\infty, a[)$ et $\Gamma \cap \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 < 0\}$ sont égaux et il s'agit comme Γ d'une variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ qui est de plus connexe. De manière analogue, on remarque que :

$$f(]a, b]) = \Gamma \cap \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 < 0\} ,$$

$$f(]b, c]) = \Gamma \cap \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 > 0 \text{ et } x_3 < 0\} ,$$

$$f(]c, +\infty[) = \Gamma \cap \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 > 0\} .$$

Ces ensembles sont des variétés courbes connexes de classe \mathcal{C}^∞ . Ce sont les composantes connexes de Γ ; en effet, on remarque que les fonctions continues x_1 , x_2 et x_3 ne peuvent pas prendre sur Γ la valeur 0, et par conséquent que tout connexe inclus dans Γ est nécessairement inclus dans l'un des 4 ensembles cités ci-dessus. L'ensemble Γ a donc 4 composantes connexes, qui sont : $f(]-\infty, a[)$, $f(]a, b])$, $f(]b, c])$ et $f(]c, +\infty[)$.

b) Déterminons d'abord à quelle condition une suite $(t_1, t_2, t_3) \in \omega^3$ est coplanaire sur un plan passant par le point M_0 donné. On procède ici comme dans l'étude de l'alignement sur une courbe rationnelle

en remplaçant l'alignement en dimension 2, par le caractère coplanaire en dimension 3. On considère les polynômes :

$$P(t) = (t - b)(t - c)e_1 + (t - a)(t - c)e_2 + (t - a)(t - b)e_3 ,$$

et :

$$\Delta(t) = (t - a)(t - b)(t - c) .$$

On vérifie qu'aucun diviseur non constant de Δ ne divise P . L'application $f : \omega \rightarrow \mathcal{E}$ est l'application $t \mapsto O + P(t)/\Delta(t)$; c'est une courbe rationnelle de classe \mathcal{C}^∞ , régulière.

Soit Π un plan d'équation $\varphi(M) = 0$, où φ est une fonction affine non constante sur \mathcal{E} , la suite $(t_1, t_2, t_3) \in \omega^3$ est coplanaire (relativement à f)

sur le plan $\Pi = \varphi^{-1}(0)$ si, et seulement si, le polynôme $D(t) = \prod_{i=1}^3 (t - t_i)$ divise le polynôme $Q(t) = \Delta(t) \varphi(f(t)) = \Delta(t) \varphi(O) + \vec{\varphi}(P(t))$. Posons :

$$\varphi(M) = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + h \quad \text{pour} \quad M = O + \sum_{i=1}^3 u_i x_i ,$$

où $(u_1, u_2, u_3, h) \in \mathbb{R}^4$ et $(u_1, u_2, u_3) \neq 0$; on trouve :

$$Q(t) = u_1(t - b)(t - c) + u_2(t - a)(t - c) + u_3(t - a)(t - b) + h(t - a)(t - b)(t - c) .$$

Le seul quotient possible Q/D étant h , la suite $(t_1, t_2, t_3) \in \omega^3$ est coplanaire sur le plan Π si, et seulement si : $h D(t) = Q(t)$, condition qui s'écrit aussi :

$$(1) \quad h \frac{D(t)}{(t - a)(t - b)(t - c)} = h + \frac{u_1}{t - a} + \frac{u_2}{t - b} + \frac{u_3}{t - c} .$$

Comme les réels a, b, c sont distincts, cette condition est réalisée si, et seulement si :

$$u_1 = h \frac{D(a)}{(a - b)(a - c)} , u_2 = h \frac{D(b)}{(b - a)(b - c)} \quad \text{et} \quad u_3 = h \frac{D(c)}{(c - a)(c - b)} .$$

Remarquons que les réels $D(a)$, $D(b)$ et $D(c)$ sont tous non nuls, puisque

$D(t) = \prod_{i=1}^3 (t - t_i)$ et que t_1, t_2 et t_3 sont différents de a , de b et de c .

Soit M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Nous pouvons

qui précède qu'il existe un plan passant par M_0 sur lequel la suite (t_1, t_2, t_3) soit coplanaire si, et seulement si :

$$\frac{x_0 D(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{y_0 D(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{z_0 D(c)}{(c-a)(c-b)} + 1 = 0 ,$$

soit encore :

$$(2) \quad x_0 (c-b) D(a) + y_0 (a-c) D(b) + z_0 (b-a) D(c) + V(a, b, c) = 0 ,$$

où $V(a, b, c) = (c-a)(c-b)(b-a)$.

Posons $D(t) = \prod_{i=1}^3 (t - t_i) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$, la condition (2) est de la forme :

$$(3) \quad A \sigma_3 - B \sigma_2 + C \sigma_1 - D = 0 ,$$

où :

$$A = x_0 (c-b) + y_0 (a-c) + z_0 (b-a)$$

$$B = a x_0 (c-b) + b y_0 (a-c) + c z_0 (b-a)$$

$$C = a^2 x_0 (c-b) + b^2 y_0 (a-c) + c^2 z_0 (b-a)$$

$$D = a^3 x_0 (c-b) + b^3 y_0 (a-c) + c^3 z_0 (b-a) - V(a, b, c) .$$

Le point M_0 est sur le plan osculateur en $\tau \in \omega$ si, et seulement si, la condition (3) est satisfaite, la suite (t_1, t_2, t_3) étant la suite (τ, τ, τ) , c'est-à-dire si, et seulement si :

$$A \tau^3 - B 3 \tau^2 + C 3 \tau - D = 0 .$$

Dans le cas où le polynôme $A X^3 - 3 B X^2 + 3 C X - D$ est de degré 3 et est factorisable sur \mathbb{R} , les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ d'un système (t_1, t_2, t_3) de zéros de ce polynôme vérifient les égalités :

$$\sigma_1 = \frac{3 B}{A} \quad \sigma_2 = \frac{3 C}{A} \quad \sigma_3 = \frac{D}{A} .$$

On observe que :

$$A \sigma_3 - B \sigma_2 + C \sigma_1 - D = A \frac{D}{A} - B \frac{3 C}{A} + C \frac{3 B}{A} - D = 0 .$$

D'après ce qui précède, cela signifie que la suite (t_1, t_2, t_3) est coplanaire sur un plan qui passe par M_0 .

c) Nous supposons que \mathcal{V} est le plan osculateur à f au point de paramètre 0, ce qu'on peut toujours supposer en modifiant éventuellement

et c . Les points de ce plan seront rapportés au repère $(f(0); f'(0), f''(0))$. Pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{E}^3$, on notera $(u, v, w)_m = \det_{(e_1, e_2, e_3)}(u, v, w)$.

Le point $f(0) + \lambda f'(0) + \mu f''(0)$ du plan \mathcal{V} , où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, est sur la tangente à f au point de paramètre $t \in \omega$ si, et seulement si, il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(0) + \lambda f'(0) + \mu f''(0) = f(t) + \nu f'(t).$$

On obtient :

$$(f(t) - f(0), f''(0), f'(t))_m = \lambda (f'(0), f''(0), f'(t))_m,$$

et :

$$(f'(0), f(t) - f(0), f'(t))_m = \mu (f'(0), f''(0), f'(t))_m.$$

Calculons ces trois déterminants. On pose :

$$D(t) = (f'(0), f''(0), f'(t))_m = \begin{vmatrix} -\frac{1}{a^2} & -\frac{2}{a^3} & -\frac{1}{(t-a)^2} \\ -\frac{1}{b^2} & -\frac{2}{b^3} & -\frac{1}{(t-b)^2} \\ -\frac{1}{c^2} & -\frac{2}{c^3} & -\frac{1}{(t-c)^2} \end{vmatrix}.$$

On obtient :

$$D(t) = -\frac{2}{a^3 b^3 c^3 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2} \begin{vmatrix} a(t-a)^2 & (t-a)^2 & a^3 \\ b(t-b)^2 & (t-b)^2 & b^3 \\ c(t-c)^2 & (t-c)^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$ notons :

$$U_i = \begin{bmatrix} a^i \\ b^i \\ c^i \end{bmatrix}.$$

Avec cette notation on a :

$$\begin{aligned} -a^3 b^3 c^3 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2 D(t) &= \\ &= 2 \det(t^2 U_1 - 2t U_2 + U_3, t^2 U_0 - 2t U_1 + U_2, U_3). \end{aligned}$$

Par manipulations élémentaires on obtient :

$$D(t) = 2t^2 \frac{\det(U_0, U_1, U_3) t^2 - 2 \det(U_0, U_2, U_3) t + 3 \det(U_1, U_2, U_3)}{a^3 b^3 c^3 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2}.$$

En notant maintenant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les fonctions symétriques élémentaires de a, b, c , on a : $U_3 = \sigma_1 U_2 - \sigma_2 U_1 + \sigma_3 U_0$, d'où :

$$\det(U_0, U_1, U_3) = \det(U_0, U_1, \sigma_1 U_2) = V(a, b, c) (a + b$$

Ce réel est nul si, et seulement si, $a + b + c = 0$. La fonction $t \mapsto D(t)$ est bien définie sur ω , mais peut prendre la valeur 0 pour $t = 0$, et en au plus deux autres valeurs réelles ; si $t = 0$, la tangente en t est dans la plan \mathcal{V} , si t est l'un des autres zéros de la fraction rationnelle D , la tangente en t est parallèle à \mathcal{V} . Nous poserons $\omega' = \omega \cap \{t \in \mathbb{R} \mid D(t) \neq 0\}$.

On obtient :

$$(f(t) - f(0), f''(0), f'(t))_{\text{m}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{t-a} + \frac{1}{a} & -\frac{2}{a^3} & -\frac{1}{(t-a)^2} \\ \frac{1}{t-b} + \frac{1}{b} & -\frac{2}{b^3} & -\frac{1}{(t-b)^2} \\ \frac{1}{t-c} + \frac{1}{c} & -\frac{2}{c^3} & -\frac{1}{(t-c)^2} \end{vmatrix},$$

soit encore :

$$(f(t) - f(0), f''(0), f'(t))_{\text{m}} = \frac{2}{a^3 b^3 c^3 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2} \begin{vmatrix} a^3 (t-a) + a^2 (t-a)^2 & (t-a)^2 & a^3 \\ b^3 (t-b) + b^2 (t-b)^2 & (t-b)^2 & b^3 \\ c^3 (t-c) + c^2 (t-c)^2 & (t-c)^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

En utilisant les mêmes méthodes et notations que ci-dessus, on trouve :

$$(f(t) - f(0), f''(0), f'(t))_{\text{m}} = 2t^3 \frac{2 \det(U_1, U_2, U_3) - \det(U_0, U_2, U_3) t}{a^3 b^3 c^3 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2}.$$

On obtient :

$$(f'(0), f(t) - f(0), f'(t))_{\text{m}} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{t-a} + \frac{1}{a} & -\frac{1}{(t-a)^2} \\ -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{t-b} + \frac{1}{b} & -\frac{1}{(t-b)^2} \\ -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{t-c} + \frac{1}{c} & -\frac{1}{(t-c)^2} \end{vmatrix},$$

soit encore :

$$(f'(0), f(t) - f(0), f'(t))_{\text{m}} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2} \begin{vmatrix} (t-a)^2 & a^2 (t-a) + a (t-a)^2 & a^2 \\ (t-b)^2 & b^2 (t-b) + b (t-b)^2 & b^2 \\ (t-c)^2 & c^2 (t-c) + c (t-c)^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Nous en déduisons, toujours avec les mêmes notations :

$$(f'(0), f(t) - f(0), f'(t))_{\text{m}} = t^4 \frac{\det(U_0, U_1, U_2)}{a^2 b^2 c^2 (t-a)^2 (t-b)^2 (t-c)^2}$$

Nous obtenons finalement, pour tout $t \in \omega'$:

$$\lambda = t \frac{2 \det(U_1, U_2, U_3) - \det(U_0, U_2, U_3) t}{\det(U_0, U_1, U_3) t^2 - 2 \det(U_0, U_2, U_3) t + 3 \det(U_1, U_2, U_3)} ,$$

et :

$$\mu = \frac{abc t^2}{2} \frac{\det(U_0, U_1, U_2)}{\det(U_0, U_1, U_3) t^2 - 2 \det(U_0, U_2, U_3) t + 3 \det(U_1, U_2, U_3)} .$$

En utilisant comme ci-dessus l'égalité : $U_3 = \sigma_1 U_2 - \sigma_2 U_1 + \sigma_3 U_0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \det(U_0, U_1, U_2) &= V(a, b, c) \\ \det(U_0, U_1, U_3) &= V(a, b, c) \sigma_1 \\ \det(U_0, U_2, U_3) &= V(a, b, c) \sigma_2 \\ \det(U_1, U_2, U_3) &= V(a, b, c) \sigma_3 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lambda = \frac{2 \sigma_3 t - \sigma_2 t^2}{\sigma_1 t^2 - 2 \sigma_2 t + 3 \sigma_3} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\sigma_3 t^2}{\sigma_1 t^2 - 2 \sigma_2 t + 3 \sigma_3} .$$

On reconnaît les équations paramétriques d'une conique dans le plan \mathcal{V} . Cette conique passe par l'origine $f(0)$ et on remarque que comme :

$$\frac{\mu}{\lambda} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 ,$$

la tangente de cette conique à l'origine est dirigée par le vecteur $f'(0)$; elle a donc même tangente que f . La nature de cette conique est déterminée par la nature du trinôme :

$$(a + b + c) t^2 - 2(a b + c a + b c) t + 3 a b c ,$$

dont le discriminant réduit est :

$$\Delta = \sigma_2^2 - 3 \sigma_1 \sigma_3 .$$

d1) Nous supposons que les scalaires t_1, t_2, t_3, t_4 sont distincts. On obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1 M_2} &= \\ &= (t_1 - t_2) \left(\frac{1}{(t_2 - a)(t_1 - a)} e_1 + \frac{1}{(t_2 - b)(t_1 - b)} e_2 + \frac{1}{(t_2 - c)} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_3M_4} &= \\ &= (t_3 - t_4) \left(\frac{1}{(t_4 - a)(t_3 - a)} e_1 + \frac{1}{(t_4 - b)(t_3 - b)} e_2 + \frac{1}{(t_4 - c)(t_3 - c)} e_3 \right). \end{aligned}$$

En notant $P(X) = (t_1 - X)(t_2 - X)(t_3 - X)(t_4 - X)$, on voit que les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_3M_4}$ sont orthogonaux si, et seulement si :

$$(t_1 - t_2)(t_3 - t_4) \left(\frac{1}{P(a)} + \frac{1}{P(b)} + \frac{1}{P(c)} \right) = 0 ,$$

soit si, et seulement si :

$$(1) \quad \frac{1}{P(a)} + \frac{1}{P(b)} + \frac{1}{P(c)} = 0 .$$

Comme cette condition est symétrique par rapport à t_1, t_2, t_3, t_4 , il est clair que les propriétés $(\overrightarrow{M_1M_2} | \overrightarrow{M_3M_4}) = 0$, $(\overrightarrow{M_1M_3} | \overrightarrow{M_2M_4}) = 0$, et $(\overrightarrow{M_1M_4} | \overrightarrow{M_2M_3}) = 0$ sont équivalentes.

Soit (i, j, h, k) quatre entiers distincts dans $\{1, 2, 3, 4\}$ et $t \in \omega$, t distinct de t_1, t_2, t_3, t_4 . On pose $M = f(t)$. On a $(\overrightarrow{M_iM} | \overrightarrow{M_jM_h}) = 0$ si, et seulement si :

$$(2) \quad (t_i - t)(t_j - t_h) \left(\frac{1}{Q(a)} + \frac{1}{Q(b)} + \frac{1}{Q(c)} \right) = 0 ,$$

où $Q(X) = (t - X)(t_i - X)(t_j - X)(t_h - X)$. On observe que $Q(X) = \frac{t - X}{t_k - X} P(X)$, et par conséquent la condition (2) s'écrit :

$$\frac{t_k - a}{t - a} \frac{1}{P(a)} + \frac{t_k - b}{t - b} \frac{1}{P(b)} + \frac{t_k - c}{t - c} \frac{1}{P(c)} = 0 .$$

En tenant compte de l'égalité (1) on obtient la condition équivalente :

$$(t_k - t) \left(\frac{1}{(t - a)P(a)} + \frac{1}{(t - b)P(b)} + \frac{1}{(t - c)P(c)} \right) = 0 ,$$

soit encore :

$$\frac{(t - b)(t - c)}{P(a)} + \frac{(t - c)(t - a)}{P(b)} + \frac{(t - a)(t - b)}{P(c)} = 0$$

et enfin, toujours en tenant compte de l'égalité (1) :

$$\left(\frac{bc}{P(a)} + \frac{ca}{P(b)} + \frac{ab}{P(c)} \right) = t \left(\frac{b+c}{P(a)} + \frac{c+a}{P(b)} + \frac{a+b}{P(c)} \right),$$

ou si l'on préfère :

$$\left(\frac{bc}{P(a)} + \frac{ca}{P(b)} + \frac{ab}{P(c)} \right) + t \left(\frac{a}{P(a)} + \frac{b}{P(b)} + \frac{c}{P(c)} \right) = 0.$$

Si $\frac{a}{P(a)} + \frac{b}{P(b)} + \frac{c}{P(c)} \neq 0$, et que t est la solution de cette équation,

le vecteur $\overrightarrow{M_i M}$ est orthogonal à l'arête $M_j M_h$. Comme la solution t de cette équation ne dépend pas du quadruplet (i, j, h, k) , la suite (t_1, t_2, t_3, t_4) étant fixée, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la droite $\text{Dr}(M_i, M)$ est orthogonale aux arêtes de la face opposée; il s'agit donc de la hauteur en M_i . Le point M est par conséquent l'orthocentre du tétraèdre orthocentrique.

d2) La condition $(\overrightarrow{M_1 M_2} \mid \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0$ s'écrit :

$$(t_1 - t_2)(t_1 - t_3) \left(\frac{1}{R(a)} + \frac{1}{R(b)} + \frac{1}{R(c)} \right) = 0,$$

où $R(X) = (t_2 - X)(t_1 - X)(t_3 - X)(t_1 - X) = (t_2 - X)(t_3 - X)(t_1 - X)^2$.

La condition $(\overrightarrow{f'(t_1)} \mid \overrightarrow{M_2 M_3}) = 0$ s'écrit :

$$-(t_2 - t_3) \left(\frac{1}{R(a)} + \frac{1}{R(b)} + \frac{1}{R(c)} \right) = 0.$$

Ces deux conditions sont donc équivalentes.

Si les vecteurs $\overrightarrow{M_1 M_2}$, $\overrightarrow{M_1 M_3}$ et $\overrightarrow{M_1 M_4}$ sont deux à deux orthogonaux, alors $\overrightarrow{f'(t_1)}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{M_2 M_3}$, $\overrightarrow{M_2 M_4}$ et $\overrightarrow{M_3 M_4}$; dans ce cas, la tangente en M_1 est orthogonale au plan (M_2, M_3, M_4) .

Exercice 7 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ une immersion de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq +\infty$). On munit \mathcal{E} d'une norme $\|\cdot\|$ et on suppose $\|f(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} +\infty$ et $\|f(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.
Démontrer que $\Gamma = \text{Im}(f)$ est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^k . ■

Nous munirons \mathcal{E} d'une origine O et nous identifierons \mathcal{E} et $\vec{\mathcal{E}}$.

D'après le Théorème VI.3.2 du Tome 3 du Cours, il suffit de prouver que f est un homéomorphisme sur son image. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments de Γ qui converge dans Γ vers x . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = f^{-1}(x_n)$ et $t = f^{-1}(x)$. Montrons $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathcal{E} vers x , donc bornée; soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|x_n\| \leq M$. D'après l'hypothèse faite sur f , il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que: $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad |t| > K \Rightarrow \|f(t)\| > M$. Nous en déduisons: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |t_n| \leq K$. La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, elle a des suites extraites convergentes; si $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $t' \in \mathbb{R}$, puisque f est continue en t' , $f(t') = f(\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$, d'où $t' = t = f^{-1}(x)$. Toutes les suites extraites convergentes de la suite réelle bornée $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc vers le même réel: $t = f^{-1}(x)$. Cela prouve que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers t .

L'application $f^{-1} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est donc continue (critère séquentiel de continuité), ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 8 :

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien et $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de \mathcal{E} . On donne la *cardioïde* \mathcal{C} d'équation polaire $r = a(1 + \cos \theta)$ dans \mathcal{R} (a donné > 0).

a) Vérifier que \mathcal{C} admet dans \mathcal{R} l'équation cartésienne :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0.$$

b) Soit \mathcal{D} une droite admettant dans \mathcal{R} l'équation $ux + vy + w = 0$. Prouver que \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C} si, et seulement si :

$$27a^2w(u^2 + v^2) - 16\left(\frac{a}{2}u + w\right)^3 = 0$$

(équation tangentielle de \mathcal{C}). ■

a) Si M de coordonnées (x, y) est sur \mathcal{C} , il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y) = a(1 + \cos \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$. Posons $r = a(1 + \cos \theta) = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a: $x^2 + y^2 = r^2 = ar + ar \cos \theta = ar + ax$, donc $((x^2 + y^2) - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. En développant on obtient :

$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0.$$

Inversement, soit M dont les coordonnées (x, y) vérifient la condition (1). On pose $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$, où $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in]-\pi, \pi$.

que $((x^2 + y^2) - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, donc $(r^2 - ar \cos \varphi)^2 = a^2 r^2$. Si $r = 0$, $M = O$ est l'image du paramètre $\varphi = \pi$ dans la cardioïde. Dans le cas contraire, soit $r^2 = ar \cos \varphi + ar$, donc $r = a(1 + \cos \varphi)$, et M est le point de paramètre φ dans la cardioïde, soit $r^2 = ar \cos \varphi - ar$, donc $r = a(\cos \varphi - 1)$, et on vérifie que M est le point de paramètre $\varphi + \pi$ dans la cardioïde.

La cardioïde est donc l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation (1).

b) La cardioïde a une tangente et une seule qui passe par l'origine, c'est la tangente au point de rebroussement ; l'une de ses équations est $y = 0$, correspondant au triplet $(u, v, w) = (0, 1, 0)$ qui vérifie bien l'équation tangentielle. Inversement, il y a une seule droite passant par l'origine ($w = 0$) qui vérifie l'équation tangentielle, c'est la droite $y = 0$. Nous démontrerons dans ce qui suit, que les tangentes de la cardioïde en ses points réguliers sont les droites d'équations $ux + vy = a$, où :

$$(2) \quad 27(u^2 + v^2) + 2(u - 2)^3 = 0.$$

Cela revient à fixer $w = -a$.

D'après le Théorème VII.1.2, la droite d'équation $ux + vy = a$ est la tangente à la cardioïde au point de paramètre régulier θ si, et seulement si :

$$(3) \quad a(1 + \cos \theta)(\cos \theta u + \sin \theta v) = a,$$

et (en dérivant par rapport à θ) :

$$-\sin \theta (\cos \theta u + \sin \theta v) + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta u + \cos \theta v) = 0.$$

Ces conditions s'écrivent :

$$\cos \theta u + \sin \theta v = \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad \text{et} \quad -\sin \theta u + \cos \theta v = \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^2}.$$

Ce système s'écrit aussi :

$$e^{-i\theta}(u + iv) = \frac{2 \cos^2(\theta/2) + 2i \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{4 \cos^4(\theta/2)} = \frac{e^{i\theta/2}}{2 \cos^3(\theta/2)}.$$

D'où :

$$u + iv = \frac{e^{3i\theta/2}}{2 \cos^3(\theta/2)} = \frac{1}{2} (1 + i \operatorname{tg}(\theta/2))^3.$$

Autrement dit, en posant $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$, on voit que l'ensemble des tangentes de la cardioïde en ses points réguliers, est l'ensemble des droites d'équations $ux + vy = a$, telles qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$(3) \quad u = \frac{1}{2}(1 - 3t^2) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}(3t - t^3).$$

Si un tel t existe, alors :

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4}(1 + t^2)^3 \quad \text{et} \quad 2 - u = \frac{3}{2}(1 + t^2),$$

d'où :

$$(4) \quad \frac{27}{2}(u^2 + v^2) = (2 - u)^3.$$

Supposons réciproquement que la condition (4) soit réalisée, et montrons l'existence d'un réel t vérifiant (3). On a alors $u \leq 1/2$, en effet sinon $u > 1/2$, donc $(2 - u)^3 \geq \frac{27}{2}u^2 > \frac{27}{8}$, et par conséquent $(2 - u) > 3/2$, d'où $u < 1/2$, ce qui est contradictoire. Il existe donc un réel t tel que $u = \frac{1}{2}(1 - 3t^2)$. On obtient alors $(2 - u) = \frac{3}{2}(1 + t^2)$, et par conséquent $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}(1 + t^2)^3$. On en déduit :

$$v^2 = \frac{1}{4}(1 + t^2)^3 - \frac{1}{4}(1 - 3t^2)^2 = \frac{1}{4}(9t^2 - 6t^4 + t^6) = \left(\frac{1}{2}(3t - t^3)\right)^2.$$

En remplaçant éventuellement t par $-t$, on obtient :

$$u = \frac{1}{2}(1 - 3t^2) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}(3t - t^3),$$

d'où l'existence de t , ce qui achève la démonstration.

§ VII.2 \mathcal{C}^k -ÉQUIVALENCE DES COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1 :

- Soit $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$.
- a) Vérifier que f est régulière et de classe \mathcal{C}^∞ .
 - b) L'image de f est \mathbb{U} , qui est une sous-variété courbe connexe de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{C} . Montrer que \mathbb{U} n'est le supp

|| branche régulière de f . ■

a) la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et sa dérivée est la fonction $t \mapsto i e^{it}$, qui ne prend pas la valeur 0 ; l'arc est donc régulier et de classe \mathcal{C}^∞ .

b) L'ensemble \mathbb{U} est l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Comme la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ est de classe \mathcal{C}^∞ et est régulière sur \mathbb{U} , l'ensemble \mathbb{U} est une variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ (Proposition VI.3.1 du Tome 3 du Cours). Cet ensemble, image de l'intervalle $[0, 2\pi]$ par l'arc continu f , est aussi connexe et compact.

Par définition, si \mathbb{U} était le support d'une branche régulière de f , il existerait un sous-intervalle ouvert non vide $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f|_J : J \rightarrow \mathbb{C}$ soit un plongement. L'application bijective induite $g : J \rightarrow \mathbb{U}$ serait un homéomorphisme, et par conséquent J serait un compact. Cela est contradictoire avec l'hypothèse que J est un intervalle ouvert non vide.

Exercice 2 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 3, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$. On considère le sous-ensemble \mathcal{V} de \mathcal{E} défini dans \mathcal{R} par le système d'équations cartésiennes :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 8.$$

a) Prouver que \mathcal{V} est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{E} .

b) Combien \mathcal{V} a-t-elle de composantes connexes ?

c) Soit A le point de \mathcal{V} de coordonnées $(1, 2, -1)$ dans \mathcal{R} . On pose $\tau = x + y + z - 2$. Calculer $yz + zx + xy$ et xyz en fonction de τ ; montrer que τ est *paramètre local* au voisinage de A sur \mathcal{V} , et calculer un $DL_3(0)$ de x, y, z par rapport à τ . ■

a) L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Sa matrice Jacobienne en (x, y, z) est la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix}.$$

Le rang de cette matrice est 2 si, et seulement si, $xy(y - x) \neq 0$, ou $xz(z - x) \neq 0$, ou $yz(z - y) \neq 0$. Si on suppose que (x, y, z)

des coordonnées d'un élément de \mathcal{V} et que la matrice Jacobienne de φ en (x, y, z) n'est pas de rang 2, alors :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6, & x^3 + y^3 + z^3 &= 8 \\ xy(y-x) &= 0, & xz(z-x) &= 0, & yz(z-y) &= 0. \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $y = 0$ est exclu car on aurait $z^2 = 6$ et $z^3 = 8$, impossible ; de même $z = 0$ est exclu ; donc $y = z$, et $y^2 = 3$ et $y^3 = 4$, impossible. De manière analogue, on montre que $y = 0$ et $z = 0$ sont impossibles.

Donc $x = y = z$, mais alors $x^2 = 2$ et $x^3 = 8/3$, ce qui est impossible.

La matrice Jacobienne de φ est donc de rang 2 en tout élément de \mathcal{V} . D'après la proposition VI.3.1 du Tome 3 du Cours, cela prouve que \mathcal{V} est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{E} .

b) En prenant un repère orthonormal dont le dernier vecteur soit colinéaire au vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$, nous voulons démontrer que la courbe peut être paramétrée en coordonnées sphériques, en exprimant la latitude en fonction de la longitude.

On pose $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$; on prend pour e'_1 l'un des deux vecteurs unitaires dans le plan $z = 0$ qui soit orthogonal à e'_3 , soit $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, et e'_2 tel que (e'_1, e'_2, e'_3) soit orthonormale directe, soit $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. En notant (u, v, w) les coordonnées dans cette nouvelle base, on a :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w \\ z &= -2\frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}w. \end{aligned}$$

On trouve que la courbe est l'ensemble des points dont les coordonnées (u, v, w) vérifient les conditions :

$$\begin{aligned} 6 &= u^2 + v^2 + w^2 \\ 8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(3u^2v - v^3) + \sqrt{3}(u^2 + v^2)w + \frac{1}{\sqrt{3}}w^3. \end{aligned}$$

On voit facilement que la courbe ne coupe pas l'axe $u = v = 0$; les coordonnées d'un point de la courbe peuvent donc s'écrire $u = \sqrt{6} \cos \theta \cos \varphi$, $v = \sqrt{6} \sin \theta \cos \varphi$, $w = \sqrt{6} \sin \varphi$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$. On remarque que $u^2 + v^2 = 6 \cos^2 \varphi$, et que $3u^2v - v^3$ est la part

de $(u + iv)^3 = 6\sqrt{6} \cos^3(\varphi) e^{3i\theta}$. Le point de coordonnées sphériques (θ, φ) est donc sur la courbe si, et seulement si :

$$\frac{8}{6} = \cos^3 \varphi \sin(3\theta) + \sqrt{2} (3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin \varphi ,$$

soit si, et seulement si, $\sin(3\theta) = f(\varphi)$, où f désigne l'application

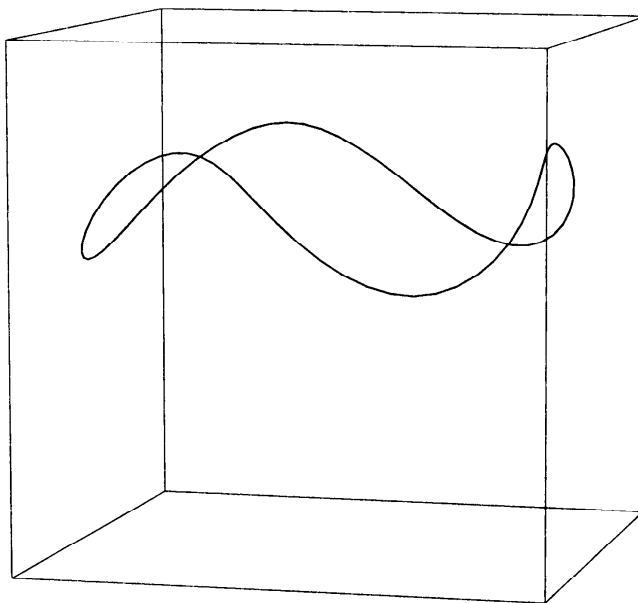
$$f :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R} , \quad \varphi \mapsto \frac{\frac{4}{3} - \sqrt{2} (3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} .$$

La fonction f est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ , et on obtient (miraculeusement!) pour tout $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$:

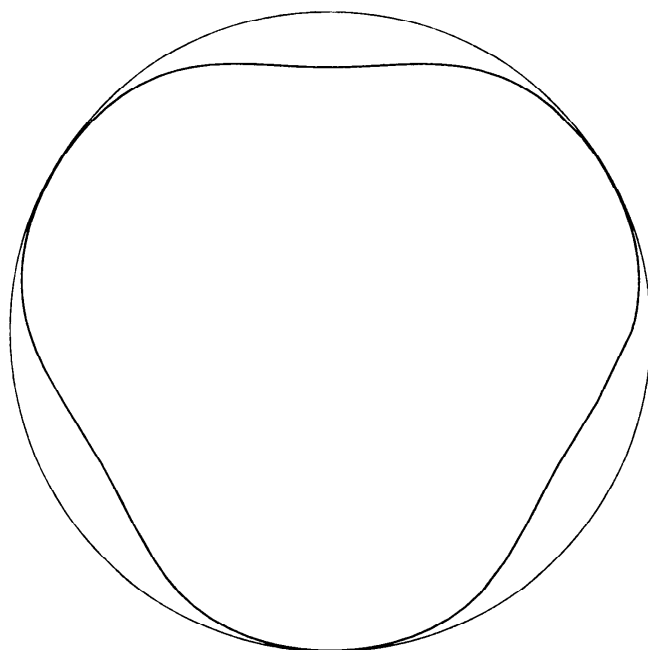
$$f'(\varphi) = \frac{4 \sin \varphi - 3\sqrt{2}}{\cos^4 \varphi} .$$

Comme $3\sqrt{2} > 4$, on en déduit que pour tout $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f'(\varphi) < 0$; la fonction f est donc strictement décroissante, et on voit facilement que c'est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$. La courbe apparaît donc comme le support de l'arc paramétré de classe \mathcal{C}^∞ défini en coordonnées sphériques (dans le nouveau repère), par la condition $\varphi = f^{-1}(\sin(3\theta))$, où θ décrit \mathbb{R} . La courbe est donc connexe.

On trouve ci-dessous une vue en perspective de cette courbe :



Voici une représentation de la projection orthogonale de la courbe sur le plan orthogonal au vecteur de coordonnées $(1, 1, 1)$:



c) Les fonctions symétriques de (x, y, z) seront notées $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. En notant, pour $i \in \mathbb{N}$, $S_i = x^i + y^i + z^i$, on a :

$$S_1 = \sigma_1$$

$$S_2 = \sigma_1 S_1 - 2\sigma_2$$

$$S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3,$$

d'où, en tenant compte du fait que $S_1 = \sigma_1 = 2 + \tau$, $S_2 = 6$ et $S_3 = 8$, on obtient :

$$xy + xz + yz = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\tau + 2)^2 - 3 = \frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau - 1,$$

et :

$$xyz = \sigma_3 = \frac{\tau^3}{6} + \tau^2 - \tau - 2.$$

Soit Φ l'application $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (S_1, S_2, S_3)$; cette application est de classe \mathcal{C}^∞ et son Jacobien en (x, y, z) est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} = 6(z-x)(z-y)(y-x).$$

Ce Jacobien n'étant pas nul en A , il existe un réel $r > 0$, et un voisinage U du point A tels que Φ établit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme entre U et le voisinage $]2-r, 2+r[\times]6-r, 6+r[\times]8-r, 8+r[$ du point $(2, 6, 8)$, image de A . Si $(x, y, z) \in U \cap \mathcal{V}$, alors $\Phi(x, y, z) \in]2-r, 2+r[\times \{6\}$

il existe $\tau \in]-r, r[$ tel que $\Phi(x, y, z) = (2 + \tau, 6, 8)$, soit encore $(x, y, z) = \Phi^{-1}(2 + \tau, 6, 8)$. Inversement, pour tout $\tau \in]-r, r[$, $\Phi^{-1}(2 + \tau, 6, 8) \in \mathcal{V} \cap U$. L'application $\tau \mapsto \Phi^{-1}(2 + \tau, 6, 8)$ est donc un paramétrage de $\mathcal{V} \cap U$.

Les symboles x, y, z représentent ci-dessous les fonctions de τ définies localement au voisinage de 0. On a l'égalité $\Phi(x, y, z) = (2 + \tau, 6, 8)$, d'où en dérivant :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On en déduit facilement $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (1, -1/3, 1/3)$. En dérivant encore (1) on obtient $(x''(0), y''(0), z''(0)) = (1/2, -20/27, 13/54)$. En dérivant encore, on obtient $(x^{(3)}(0), y^{(3)}(0), z^{(3)}(0)) = (5/2, -202/81, -1/162)$. On en déduit les développements limités :

$$\begin{aligned} x &= 1 + \tau + \frac{1}{4} \tau^2 + \frac{5}{12} \tau^3 + o(\tau^3) \\ y &= 2 - \frac{1}{3} \tau - \frac{10}{27} \tau^2 - \frac{101}{243} \tau^3 + o(\tau^3) \\ z &= -1 + \frac{1}{3} \tau + \frac{13}{108} \tau^2 - \frac{1}{972} \tau^3 + o(\tau^3). \end{aligned}$$

Exercice 5 :

- Quelles sont les branches régulières *maximales* pour l'inclusion des courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^∞ suivantes :
- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right)$.
- b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos 3t, \cos 5t)$. ■

Pour résoudre ces exercices nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme :

- Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), et $f : I \rightarrow \mathcal{E}$, où \mathcal{E} désigne un espace affine de dimension finie, une immersion de classe \mathcal{C}^k ($k \in \mathbb{N}^*$). On pose $\Gamma = f(I)$. L'ensemble Γ est une variété courbe de classe \mathcal{C}^k si, et seulement si, aucun élément de Γ n'est valeur d'adhérence de $f(t)$ quand t tend vers a par valeurs supérieures, ni quand t tend vers b par valeurs inférieures. ■

Supposons qu'aucun élément de Γ n'est valeur d'adhérence de $f(t)$ quand t tend vers a par valeurs supérieures, ni quand t tend vers b par valeurs inférieures.

inférieures.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ qui converge vers $x \in \Gamma$; nous allons démontrer que la suite $(f^{-1}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f^{-1}(x)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant quelconque, cela démontrera que l'application $f^{-1} : \Gamma \rightarrow I$ est continue, que $f|_{\Gamma}^I$ est un homéomorphisme, et que par conséquent f est un plongement (Théorème VI.3.2 du Tome 3 du Cours).

Posons $t = f^{-1}(x)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = f^{-1}(x_n)$. Montrons d'abord $\inf_{n \in \mathbb{N}} t_n > a$. En effet, dans le cas contraire, comme $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad t_n > a$, il existerait une suite extraite $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $t_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$; l'élément $x =$

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k})$ serait alors une valeur d'adhérence de la fonction f au voisinage de a par valeurs supérieures, ce qui contredit l'hypothèse. De même on démontre que $\sup_{n \in \mathbb{N}} t_n < b$. La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans un inter-

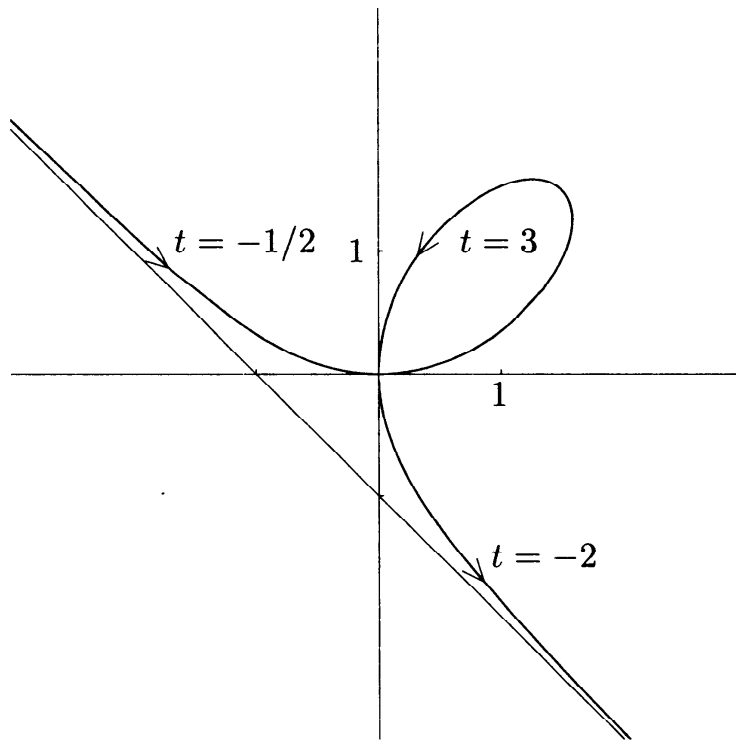
valle compact $[a', b'] \subset]a, b[$. Si $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite convergente vers t' , alors $t' \in [a', b']$ donc $t' \in]a, b[$, et $f(t_{n_k}) = x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x = f(t')$; nous en déduisons $t = t'$. Toutes les suites extraites convergentes de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite à valeurs dans un intervalle compact, sont convergentes vers le même réel t ; nous en déduisons $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$, ce qu'il fallait démontrer.

Supposons que Γ soit une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ , ce qui équivaut à ce que f soit un plongement. S'il existait $t \in I$ tel que $f(t)$ soit valeur d'adhérence de f au voisinage de a^+ , alors il existerait une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I tels que $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ et $f(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(t)$. Comme $f^{-1} : \Gamma \rightarrow I$ est continue ($f|_{\Gamma}^I$ homéomorphisme), on en déduirait $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$, ce qui est contradictoire. Nous en déduisons qu'aucun élément de Γ n'est valeur d'adhérence de f au voisinage de a^+ . On démontrerait de même qu'aucun élément de Γ n'est valeur d'adhérence de f au voisinage de b_- . Fin du Lemme.

a) On reconnaît ici une représentation paramétrique d'un cubique. La fonction f est injective, car le point $(0, 0)$ ne peut être l'image que du paramètre 0, et si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors (x, y) ne peut être l'image que de $t \neq 0$, et dans ce cas $x \neq 0$ et $t = y/x$. L'étude de cette courbe ne présente pas de difficultés. On remarque que l'origine est un point double de l'image, obtenu pour la valeur $t = 0$, et comme limite quand t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. La courbe présente une asymptote, correspondant à la valeur $t = -1$; comme :

$$x + y = 3 \frac{t + t^2}{1 + t^3} = \frac{3t}{1 - t + t^2} \xrightarrow[t \rightarrow -1]{} -1 ,$$

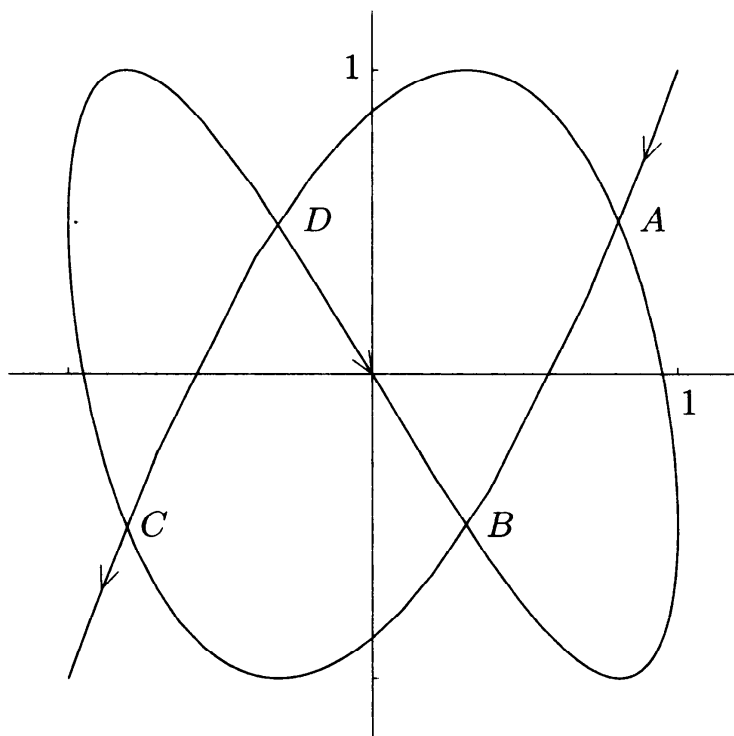
l'équation de cette asymptote est $x + y + 1 = 0$. On a donc affaire à deux immersions, $] -\infty, -1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ et $] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$. On trouvera ci-dessous une représentation de ces deux courbes.



D'après le lemme, la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, -1[$ est un plongement. C'est une branche maximale pour l'inclusion.

Toujours d'après le lemme, toute branche $f|_{]-1, a[}$, où $a > -1$ est un plongement ; il ne pourrait donc y avoir d'autre branche maximale dont l'intervalle de départ soit inclus dans $] -1, +\infty[$, que $f|_{]-1, +\infty[}$, mais d'après le lemme, puisque $(0, 0)$ est dans la trajectoire et que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0)$, ce n'est pas une immersion.

b) On reconnaît ici une courbe de Lissajous. La période de l'arc paramétré est 2π , mais comme $f(t) = f(-t)$, la trajectoire de f est $f([0, \pi])$. Remarquons qu'aucune restriction à un intervalle ouvert contenant un réel de la forme $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, n'est injective. L'intervalle de définition d'une branche régulière maximale est donc nécessairement inclus dans un intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant la parité et la périodicité, nous pouvons nous ramener à étudier les branches régulières maximales dont l'intervalle de définition est inclus dans $]0, \pi[$. Remarquons encore que puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\pi - t) = -f(t)$, la courbe présente une symétrie autour de l'origine. On trouvera ci-dessous une représentation de la courbe.



L'étude des branches régulières maximales est évidemment liée à l'étude des points doubles de cette courbe de Lissajous. Déterminons les points doubles de la restriction à l'intervalle $]0, \pi[$. On a $f(t) = f(t')$, où $0 < t < t' < \pi$ si, et seulement si :

$$\begin{cases} \cos 3t = \cos 3t' \\ \cos 5t = \cos 5t' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \sin \frac{3}{2}(t' - t) \sin \frac{3}{2}(t' + t) = 0 \\ \sin \frac{5}{2}(t' - t) \sin \frac{5}{2}(t' + t) = 0 \end{cases}.$$

Cherchons les solutions pour lesquelles $\sin \frac{3}{2}(t' - t) = 0$. Comme $0 < t' - t < \pi$, la seule possibilité est $t' = t + \frac{2}{3}\pi$. Comme $\sin \frac{5}{3}\pi \neq 0$, le couple (t', t) vérifie les conditions si, et seulement si, il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $t' + t = \frac{2}{5}h\pi$, d'où $t' = \frac{1}{5}h\pi + \frac{1}{3}\pi$ et $t = \frac{1}{5}h\pi - \frac{1}{3}\pi$, et tel que $0 < t$ et $t' < \pi$. On trouve exactement 2 solutions :

$$\begin{cases} t = \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{15}\pi \\ t' = \frac{2}{5}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{11}{15}\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t = \frac{3}{5}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{4}{15}\pi \\ t' = \frac{3}{5}\pi + \frac{1}{3}\pi = \frac{14}{15}\pi \end{cases}.$$

Cherchons les solutions pour lesquelles $\sin \frac{5}{2}(t' - t) = 0$. Comme $0 < t' - t < \pi$, les seules possibilités sont $t' = t + \frac{2}{5}\pi$, et $t' = t + \frac{4}{5}\pi$. Dans le premier cas, comme $\sin \frac{3}{5}\pi \neq 0$ les solutions sont les couples (t, t') tels que de plus il existe $h \in \mathbb{N}^*$, $t' + t = \frac{2}{3}h\pi$, d'où $t = \frac{1}{3}h\pi - \frac{1}{5}\pi$ et $t' = \frac{1}{3}h\pi + \frac{1}{5}\pi$, et tel que $0 < t$ et $t' < \pi$. On trouve deux couples solution :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{2}{15}\pi \\ t' = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{5}\pi = \frac{8}{15}\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} t = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{7}{15}\pi \\ t' = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{5}\pi = \frac{13}{15}\pi \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, comme $\sin \frac{6}{5} \pi \neq 0$, les solutions sont les couples (t, t') tels que de plus il existe $h \in \mathbb{N}^*$, $t' + t = \frac{2}{3} h \pi$, d'où $t = \frac{1}{3} h \pi - \frac{2}{5} \pi$ et $t' = \frac{1}{3} h \pi + \frac{2}{5} \pi$, et tel que $0 < t$ et $t' < \pi$. Cela conduit aux conditions incompatibles $\frac{6}{5} < h < \frac{9}{5}$ (pour $h \in \mathbb{N}$). Il n'y a donc que les 4 solutions précédemment trouvées.

Nous noterons $A = f\left(\frac{1}{15} \pi\right) = f\left(\frac{11}{15} \pi\right)$, $B = f\left(\frac{2}{15} \pi\right) = f\left(\frac{8}{15} \pi\right)$, $C = f\left(\frac{4}{15} \pi\right) = f\left(\frac{14}{15} \pi\right)$, $D = f\left(\frac{7}{15} \pi\right) = f\left(\frac{13}{15} \pi\right)$. Les paramètres de passage en A seront notés $t_{1,A}$ et $t_{2,A}$, où $t_{1,A} < t_{2,A}$; de même pour les autres points doubles. L'ordre des passages aux points doubles est le suivant :

$$0 < t_{1,A} < t_{1,B} < t_{1,C} < t_{1,D} < t_{2,B} < t_{2,A} < t_{2,D} < t_{2,C} < \pi.$$

Nous utiliserons maintenant implicitement le lemme démontré ci-dessus pour déterminer les branches régulières maximales de f (dont l'intervalle de départ est inclus dans $]0, \pi[$). Nous dirons qu'un intervalle ouvert non vide $J \subset]0, \pi[$ est convenable si $f|_J$ est un plongement. Nous cherchons donc les intervalles convenables maximaux.

Il est clair que les bornes d'un intervalle convenable maximal sont 0 ou π ou un paramètre de passage à un point double. Dans ce qui suit J désigne un intervalle convenable maximal.

Supposons que la borne inférieure de J soit 0. Pour tout $a < t_{2,B}$, l'intervalle $]0, a[$ est convenable, mais $]0, t_{2,B}[$ ne l'est pas (la limite quand t tend vers $t_{2,B}$ est sur la trajectoire). Il n'y a donc pas d'intervalle convenable maximal d'origine 0.

Supposons que la borne inférieure de J soit $t_{1,A}$. Pour tout $a < t_{2,B}$, l'intervalle $]t_{1,A}, a[$ est convenable, mais $]t_{1,A}, t_{2,B}[$ ne l'est pas. Il n'y a donc pas d'intervalle convenable maximal d'origine $t_{1,A}$.

Supposons que la borne inférieure de J soit $t_{1,B}$. L'intervalle $]t_{1,B}, t_{2,B}[$ est convenable, tout intervalle de la forme $]t_{1,B}, a[$, où $\pi > a > t_{2,B}$ ne l'est pas, et tout intervalle de la forme $]a, t_{2,B}[$, où $0 < a < t_{1,B}$ ne l'est pas. L'intervalle $]t_{1,B}, t_{2,B}[$ est donc convenable maximal.

On voit que comme pour A , il n'y a pas d'intervalle maximal dont la borne inférieure soit $t_{1,C}$.

On voit que comme pour B , l'intervalle $]t_{1,D}, t_{2,D}[$ est convenable maximal. Aucun des paramètres $t_{2,B}, t_{2,A}, t_{2,D}, t_{2,C}$ ne peut être borne inférieure d'un intervalle convenable maximal, car pour tout a tel que $t_{1,D} < a < \pi$ l'intervalle $]a, \pi[$ est convenable.

La courbe a donc exactement 2 branches régulières maximales : la boucle ouverte entre les deux passages en B et la boucle ouverte entre les deux passages en D .

§ VII.3 CONTACT

Exercice 1 :

|| Soit \mathcal{C} un plan euclidien, Γ un cercle de \mathcal{C} (de rayon $R > 0$) et $O \in \Gamma$. On considère l'ensemble des paraboles de \mathcal{C} osculatrices à Γ en O . Trouver l'ensemble des foyers de ces paraboles. ■

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de \mathcal{C} dans lequel l'équation du cercle \mathcal{C} est $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$.

Une conique passant par O a une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0,$$

où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Cette conique admet la droite d'équation $y = 0$ (tangente au cercle Γ en O) comme tangente en O si, et seulement si, $a \neq 0$ et $d = 0$. Cette conique est une parabole si, et seulement si, $ac - b^2 = 0$. En choisissant $a = 1$, on voit que les paraboles tangentes au cercle Γ en O ont une équation de la forme :

$$x^2 + 2bxy + b^2y^2 + 2ey = 0,$$

où $e \neq 0$ (sinon la conique est une droite double). Une telle parabole est au voisinage de O le graphe d'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$, définie au voisinage de 0, qui a un développement limité de la forme $\varphi(x) = -\frac{1}{2e}x^2 + o(x^2)$. Cette parabole est osculatrice au cercle Γ en O si, et seulement si, $x^2 + \varphi^2(x) - 2R\varphi(x) \in o(x^2)$ (Théorème VII.3.5). On voit que cette condition est satisfaite si, et seulement si, $R = -e$. Les paraboles osculatrices en O au cercle Γ sont donc les paraboles dont une équation est de la forme :

$$x^2 + 2bxy + b^2y^2 - 2Ry = (x + by)^2 - 2Ry = 0,$$

où $b \in \mathbb{R}$.

Posons $b = \operatorname{tg}(\theta)$, où $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. L'équation de la parabole s'écrit :

$$(\cos \theta x + \sin \theta y)^2 - 2R \cos^2 \theta y = 0.$$

Il existe un repère orthonormal d'origine O dans lequel les coordonnées (u, v) sont telles que $u = \cos \theta x + \sin \theta y$ et $v = -\sin \theta x + \cos \theta y$. On a alors $x = \cos \theta u - \sin \theta v$ et $y = \sin \theta u + \cos \theta v$. Dans ce repère orthonormal, l'équation de la parabole est :

$$u^2 = 2R \cos^2 \theta (\sin \theta u + \cos \theta v),$$

soit encore :

$$\begin{aligned} (u - R \cos^2 \theta \sin \theta)^2 &= 2R \cos^3 \theta v + R^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta = \\ &= 2R \cos^3 \theta \left(v + \frac{R}{2} \cos \theta \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

Le paramètre de cette parabole est donc $p = R \cos^3 \theta$, et son sommet a pour coordonnées $u = R \cos^2 \theta \sin \theta$, $v = -\frac{1}{2} R \cos \theta \sin^2 \theta$. Les coordonnées de son foyer sont :

$$\begin{cases} u = R \cos^2 \theta \sin \theta = \frac{R}{2} \cos \theta \sin(2\theta) \\ v = -\frac{1}{2} R \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{2} R \cos^3 \theta = \frac{R}{2} \cos \theta \cos(2\theta) \end{cases}.$$

Nous en déduisons les coordonnées du foyer de cette parabole dans l'ancien repère :

$$\begin{cases} x = \cos \theta u - \sin \theta v = \frac{R}{2} \cos \theta \sin \theta = \frac{R}{4} \sin(2\theta) \\ y = \sin \theta u + \cos \theta v = \frac{R}{2} \cos \theta \cos \theta = \frac{R}{4} \cos(2\theta) + \frac{R}{4} \end{cases}.$$

Le paramètre θ décrivant l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, le foyer de la parabole décrit le cercle de centre le point de coordonnées $(0, R/4)$ et de rayon $R/4$, privé du point O .

Exercice 2 :

|| Soit \mathcal{E} un plan euclidien, Γ un cercle de \mathcal{E} , de rayon $R > 0$ et $O \in \Gamma$. On considère l'ensemble des hyperboles équilatères de \mathcal{E} osculatrices à Γ en O . Trouver l'ensemble des centres de ces hyperboles. ■

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal de \mathcal{E} dans lequel l'équation du cercle \mathcal{C} est $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$.

Une conique passant par O a une équation de la forme :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = 0,$$

où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Cette conique admet la droite d'équation $y = 0$ (tangente au cercle Γ en O) comme tangente en O si, et seulement si, $a \neq 0$ et $d = 0$. Cette conique est une hyperbole équilatère si, et seulement si, $a + c = 0$. En choisissant $a = 1$, on voit que les hyperboles équilatères tangentes au cercle Γ en O ont une équation de la forme :

$$x^2 + 2bxy - y^2 + 2ey = 0,$$

où $e \neq 0$ (sinon la conique est réunion de deux droites orthogonales). Une telle hyperbole est au voisinage de O le graphe d'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$, définie au voisinage de 0 dans \mathbb{R} , qui a un développement limité de la forme $\varphi(x) = -\frac{1}{2e}x^2 + o(x^2)$. Cette hyperbole est osculatrice au cercle Γ en O si, et seulement si, $x^2 + \varphi^2(x) - 2R\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\in} o(x^2)$ (Théorème VII.3.5). On voit que cette condition est satisfaite si, et seulement si, $R = -e$. L

équilatères osculatrices en O au cercle Γ sont donc les hyperboles dont une équation est de la forme :

$$x^2 + 2bxy - y^2 - 2Ry = 0 ,$$

où $b \in \mathbb{R}$.

Posons $b = \operatorname{tg}(\theta)$, où $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. L'équation de l'hyperbole s'écrit :

$$\cos \theta x^2 + 2 \sin \theta xy - \cos \theta y^2 - 2R \cos \theta y = 0 ,$$

soit encore :

$$(\cos(\theta/2)x + \sin(\theta/2)y)^2 - (-\sin(\theta/2)x + \cos(\theta/2)y)^2 - 2R \cos \theta y = 0 .$$

Il existe un repère orthonormal d'origine O dans lequel les coordonnées (ξ, η) sont telles que $\xi = \cos(\theta/2)x + \sin(\theta/2)y$ et $\eta = -\sin(\theta/2)x + \cos(\theta/2)y$. On a alors $x = \cos(\theta/2)\xi - \sin(\theta/2)\eta$ et $y = \sin(\theta/2)\xi + \cos(\theta/2)\eta$. Dans ce repère orthonormal, l'équation de l'hyperbole est :

$$\xi^2 - \eta^2 = 2R \cos \theta (\sin(\theta/2)\xi + \cos(\theta/2)\eta) ,$$

soit encore :

$$\begin{aligned} (\xi - R \cos \theta \sin(\theta/2))^2 - (\eta + R \cos \theta \cos(\theta/2))^2 &= \\ &= R^2 \cos^2 \theta (\sin^2(\theta/2) - \cos^2(\theta/2)) = -R^2 \cos^3 \theta . \end{aligned}$$

Le centre de cette hyperbole a pour coordonnées $\xi = R \cos \theta \sin(\theta/2)$ et $\eta = -R \cos \theta \cos(\theta/2)$. Les coordonnées du centre dans le repère initial sont :

$$\begin{cases} x = \cos(\theta/2)\xi - \sin(\theta/2)\eta = R \cos \theta \times 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \\ y = \sin(\theta/2)\xi + \cos(\theta/2)\eta = R \cos \theta (\sin^2(\theta/2) - \cos^2(\theta/2)) \end{cases} ,$$

soit encore :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \theta = \frac{R}{2} \sin(2\theta) \\ y = -R \cos \theta \cos \theta = -\frac{R}{2} - \frac{R}{2} \cos(2\theta) \end{cases} .$$

Le réel θ décrivant l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, le centre de l'hyperbole décrit un cercle de centre le point de coordonnées $(0, -R/2)$ et de rayon $R/2$, privé du point O .

Exercice 6 :

|| Soit \mathcal{E} un plan affine et A, B, C trois points de \mathcal{E} non alignés.
 || On note A', B', C' les milieux respectifs de $\{B, C\}$, $\{C, A\}$ et $\{A, B\}$. Prouver qu'il existe un et un seul polynôme

de degré 2 tel que $\mathcal{V}_f = f^{-1}(\{0\}) \setminus \{\text{points critiques de } f\}$ soit tangente en A' à $\text{Dr}(B, C)$, en B' à $\text{Dr}(C, A)$ et en C' à $\text{Dr}(A, B)$. Si f est ce polynôme, vérifier que $\mathcal{V}_f = f^{-1}(\{0\})$ est une *ellipse propre* à points réels. ■

Munissons \mathcal{E} du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Soit f un polynôme de degré 2 sur \mathcal{E} . Posons pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$P(x, y) = f(A + x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}) .$$

Il existe des scalaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, tels que :

$$P(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi .$$

Les points critiques pour f sont les points dont les coordonnées (x, y) vérifient les conditions $\alpha x + \beta y + \delta = 0$ et $\beta x + \gamma y + \varepsilon = 0$. Le point C' de coordonnées $(1/2, 0)$ n'est pas critique pour f si, et seulement si, $\alpha + 2\delta \neq 0$ ou $\beta + 2\varepsilon \neq 0$. Cette condition étant vérifiée, la droite $\text{Dr}(A, B)$, qui a pour équation $y = 0$, est tangente à \mathcal{V}_f en C' si, et seulement si, $\alpha x^2 + 2\delta x + \varphi \underset{x \rightarrow 1/2}{\in} o(x - 1/2)$. Ces conditions sont réalisées si, et seulement si : $\alpha = 4\varphi$, $\delta = -2\varphi$ et $\beta + 2\varepsilon \neq 0$.

On trouve de manière analogue que B' n'est pas critique pour f , et que la droite $\text{Dr}(A, C)$ est tangente en B' à \mathcal{V}_f si, et seulement si, $\gamma = 4\varphi$, $\varepsilon = -2\varphi$ et $\beta + 2\delta \neq 0$. En résumé, les coniques qui sont tangentes en C' à $\text{Dr}(A, B)$ et tangentes en B' à $\text{Dr}(A, C)$, les points C' et B' n'étant pas critiques, sont les coniques dont une équation est de la forme :

$$(4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 1)\varphi + 2\beta xy = 0 ,$$

où $\beta - 4\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 0$. Supposons cette condition réalisée. Le point A' de coordonnées $(1/2, 1/2)$ n'est pas critique si, et seulement si, $\alpha + \beta + 2\delta \neq 0$ ou $\beta + \gamma + 2\varepsilon \neq 0$, soit si, et seulement si, $\beta \neq 0$. La conique est tangente à la droite $\text{Dr}(B, C)$, d'équation $x + y = 1$ si, et seulement si :

$$(4x^2 + 4(1-x)^2 - 3)\varphi + 2\beta x(1-x) \underset{x \rightarrow 1/2}{\in} o(x - 1/2) ,$$

soit encore :

$$(8\varphi - 2\beta)x^2 - (8\varphi - 2\beta)x + \varphi \underset{x \rightarrow 1/2}{\in} o(x - 1/2) ,$$

ce qui équivaut à la condition $8\varphi - 2\beta = 4\varphi$, soit $\beta = 2\varphi$. Il y a donc une et une seule conique qui vérifie les conditions de l'énoncé et, à

multiplicative près, un seul polynôme f possible. Une équation de cette conique est :

$$(1) \quad 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 4y + 1 = 0.$$

Si (u, v, w) est la suite des coordonnées barycentriques dans la base affine (A, B, C) du point $M \in \mathcal{E}$, les coordonnées dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de M sont (v, w) , et $u + v + w = 1$. En remplaçant 1 par $u + v + w$ dans l'équation (1), de façon à obtenir une condition homogène, on voit que M est dans \mathcal{V} si, et seulement si :

$$4v^2 + 4vw + 4w^2 - 4(v+w)(u+v+w) + (u+v+w)^2 = 0,$$

soit en développant :

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2vw - 2wu - 2uv = 0.$$

On obtient une condition symétrique, ce qui était prévisible.

La conique \mathcal{V} est une ellipse propre à points réels. En effet, si on munit \mathcal{E} d'une structure euclidienne telle que le triangle (A, B, C) soit équilatéral, \mathcal{V} est le cercle inscrit dans le triangle (A, B, C) . Pour que le triangle (A, B, C) soit équilatéral, il suffit que la matrice de la forme quadratique dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

qui est bien une matrice symétrique définie positive. On peut bien sûr prouver ce résultat directement, sans l'aide de cette interprétation géométrique.

§ VII.4 ÉTUDE LOCALE AFFINE DES COURBES PARAMÉTRÉES

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 2$. On donne une courbe paramétrée $f : I \mapsto \mathcal{E}$ de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq +\infty$); soit $t_0 \in I$ un paramètre régulier pour f . Soit \mathcal{H} un hyperplan affine supplémentaire de la tangente \mathcal{T}_0 en $t = t_0$ à f . Montrer que pour $(t, u) \in I^2$, $t \neq u$, avec t, u assez voisins de t_0 , la droite $\mathcal{D}_{t,u} = \text{Dr}(f(t), f(u))$ est bien définie et qu'elle perce \mathcal{H} en un point $A(t, u)$. Prouver alors que $A(t, u) \xrightarrow{(t)} P$.

|| où P est l'intersection de \mathcal{H} et de la tangente \mathcal{T}_0 . ■

Soit φ une fonction affine non constante sur \mathcal{E} telle que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Par hypothèse $\vec{\varphi}(f'(t_0)) \neq 0$. La droite $\mathcal{D}_{(t,u)}$, où $(t,u) \in I^2$, $t \neq u$, est l'image de l'arc $\lambda \mapsto f(t) + \lambda \overrightarrow{f(t)f(u)}$; l'équation au paramètre de son intersection avec \mathcal{H} s'écrit :

$$\varphi(f(t) + \lambda \overrightarrow{f(t)f(u)}) = 0 ,$$

soit encore :

$$\varphi(f(t)) + \lambda \vec{\varphi}(\overrightarrow{f(t)f(u)}) = 0 .$$

Pour tout $(t,u) \in I$, posons :

$$\begin{cases} g(t,u) = \frac{1}{u-t} \overrightarrow{f(t)f(u)} & \text{si } t \neq u \\ g(t,u) = f'(t) & \text{si } t = u \end{cases} .$$

Cette application $g : I^2 \rightarrow \mathcal{E}$ est continue, car pour tout $(t,u) \in I^2$, on a :

$$g(t,u) = \int_0^1 f'(u + \theta(u-t)) d\theta ,$$

intégrale qui dépend continûment de son paramètre (t,u) (car f' est continue). Comme $\vec{\varphi}(g(t_0,t_0)) = \vec{\varphi}(f'(t_0)) \neq 0$, il existe un voisinage V de t_0 tel que pour tout t,u dans V , $\vec{\varphi}(g(t,u)) \neq 0$. Pour tout t,u dans $V \setminus \{t_0\}$, $t \neq u$, $\vec{\varphi}(\overrightarrow{f(t)f(u)}) = (t-u) \vec{\varphi}(g(t,u)) \neq 0$; la droite $\mathcal{D}_{t,u}$ est alors bien définie, et coupe l'hyperplan \mathcal{H} en le point :

$$A(t,u) = f(t) - \frac{\varphi(f(t))}{\vec{\varphi}(\overrightarrow{f(t)f(u)})} \overrightarrow{f(t)f(u)} = f(t) - \frac{\varphi(f(t))}{\vec{\varphi}(g(t,u))} g(t,u) .$$

D'après ce qui précède :

$$A(t,u) \xrightarrow[t \neq u]{(t,u) \rightarrow (t_0,t_0)} f(t_0) - \frac{\varphi(f(t_0))}{\vec{\varphi}(f'(t_0))} f'(t_0) .$$

Il est clair que ce point limite est l'intersection de \mathcal{H} et de la tangente \mathcal{T}_0 .

Exercice 3 :

|| Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension $n \geq 2$ et $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ une application continue. On suppose : $O \in I$; f est de classe \mathcal{C}^k ($1 \leq k \leq +\infty$) sur $I \setminus \{0\}$; les $t \in I \setminus \{0\}$ sont de

réguliers pour f ; et enfin il existe une fonction $\lambda : I \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^*$ de classe \mathcal{C}^k telle que $t \mapsto \lambda(t) f'(t)$ a une limite non nulle L au voisinage épointé de 0 dans I . Prouver que la droite $f(0) + \mathbb{R}L$ est tangente géométrique stricte à $\text{Im}(f) \cap \omega$, où ω est un voisinage convenablement choisi de $f(0)$. ■

Nous supposons que I n'est pas trivial et que 0 n'est pas la borne supérieure de I . Nous allons démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]0, \alpha[\subset I$ et tel que pour tout $t \in]0, \alpha[$, $f(t) \neq f(0)$. Nous montrerons alors que la droite $\mathcal{D}_t = \text{Dr}(f(0), f(t))$, définie pour $t \in]0, \alpha[$, a pour limite la droite $\mathcal{T} = f(0) + \mathbb{R}L$ quand t tend vers 0. On démontrerait un résultat analogue pour les limites par valeurs inférieures, et pour les limites épointées, au voisinage de 0. L'espace \mathcal{E} sera muni d'une structure d'espace affine euclidien. On peut supposer que L est un vecteur unitaire. On note φ la forme linéaire qui est le produit scalaire par L .

On observe que :

$$(1) \quad \lambda(t) \varphi(f'(t)) = \varphi(\lambda(t) f'(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \|L\|^2 = 1 > 0.$$

Il existe donc un réel $\alpha > 0$, tel que :

$$]0, \alpha[\subset I \quad \text{et} \quad (\forall t \in]0, \alpha[) \quad \lambda(t) \varphi(f'(t)) > 0.$$

Sur l'intervalle $]0, \alpha[$, la fonction continue $t \mapsto \varphi(f'(t))$ ne prend pas la valeur 0, donc garde un signe constant $s \in \{-1, 1\}$. La fonction $t \mapsto \lambda(t)$ garde donc sur cet intervalle le même signe.

La fonction $[0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(\overrightarrow{f(0)f(t)})$, est continue et de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, \alpha[$; d'après le lemme de Rolle elle est injective ; a fortiori $f|_{[0, \alpha]}$ est injective. La droite \mathcal{D}_t est donc définie si $t \in]0, \alpha[$. Pour tout $t \in]0, \alpha[$ on pose :

$$(2) \quad \overrightarrow{f(0)f(t)} = \varphi(\overrightarrow{f(0)f(t)}) L + v(t),$$

où $v(t)$ est orthogonal à L . La fonction v est continue, et est dérivable sur $]0, \alpha[$; pour tout $t \in]0, \alpha[$ on a :

$$f'(t) = \varphi(f'(t)) L + v'(t).$$

En utilisant l'hypothèse on trouve que :

$$|\lambda(t)| \|f'(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \|L\| = 1,$$

et par conséquent en utilisant (1), et le fait que le signe de $\lambda(t)$ est s :

$$s \varphi(f'(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \|f'(t)\| \quad \text{d'où} \quad (\varphi(f'(t)))^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \|f'(t)\|^2$$

Comme :

$$\|f'(t)\|^2 = (\varphi(f'(t)))^2 + \|v'(t)\|^2 ,$$

nous en déduisons :

$$\|v'(t)\|^2 \underset{t \rightarrow 0}{\in} o(\|f'(t)\|^2) \quad \text{d'où} \quad v'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\in} o(\|f'(t)\|) ,$$

et on peut bien sûr remplacer $\|f'(t)\|$ par $s\varphi(f'(t))$. On obtient alors par intégration sur $[0, \alpha[$ la relation :

$$v(t) - v(0) \underset{t \rightarrow 0}{\in} o\left(s\varphi(\overrightarrow{f(0)f(t)})\right) .$$

Comme $v(0) = 0$, en utilisant la relation (2) on obtient :

$$\overrightarrow{f(0)f(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \varphi(\overrightarrow{f(0)f(t)}) L ,$$

et par conséquent :

$$\|\overrightarrow{f(0)f(t)}\| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} s\varphi(\overrightarrow{f(0)f(t)}) .$$

Finalement, en faisant le quotient nous obtenons :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{f(0)f(t)}\|} \overrightarrow{f(0)f(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} s L .$$

Nous en déduisons $\mathcal{D}_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \mathcal{T}$, ce qu'il fallait démontrer.

§ VII.5 EXEMPLES ET APPLICATIONS

Exercice 1 :

- Soit \mathcal{E} un plan affine, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Etudier les courbes paramétrées f suivantes (tracé, branches infinies, paramètres stationnaires, points multiples de la trajectoire).
- a) $f_1(t) = t - t^3$, $f_2(t) = t^2 - t^4$.
- k) $f_1(t) = 2 \cos t - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 t$, $f_2(t) = 2 \sin t + \frac{1}{4} \operatorname{tg} t$. ■

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous poserons $x(t) = f_1(t)$ et $y(t) = f_2(t)$. On voit que x et y sont des fonctions polynomiales, donc de classe \mathcal{C}^∞ . La fonction x est impaire, la fonction y est paire. La courbe présente donc une symétrie par rapport à l'axe des y . On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) =$

$y'(t) = 2t - 4t^3$. Il est donc clair que la courbe est régulière. On établit le tableau de variations suivant :

t	0	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{2}$	1	
x	0	$2/3\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	0	$-\infty$
x'		+	0	-	-
y	0	$2/9$	$1/4$	0	$-\infty$
y'		+	+	0	-

Recherche de points doubles :

Supposons que t_1 et t_2 soient des paramètres distincts de passage au même point de \mathcal{C} ($t_1 < t_2$). Ceci est réalisé si, et seulement si :

$$\begin{cases} t_1 - t_1^3 = t_2 - t_2^3 \\ t_1^2 - t_1^4 = t_2^2 - t_2^4 \end{cases}.$$

En simplifiant par $t_1 - t_2$ on obtient les conditions symétriques :

$$\begin{cases} 1 = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 \\ t_1 + t_2 = (t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 1 = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 \\ (t_1 + t_2)t_1 t_2 = 0 \end{cases}.$$

On trouve facilement 3 couples solution : $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$; cela signifie : $f(-1) = f(0) = f(1)$. L'origine du repère est donc point triple pour la courbe, et c'est le seul point multiple.

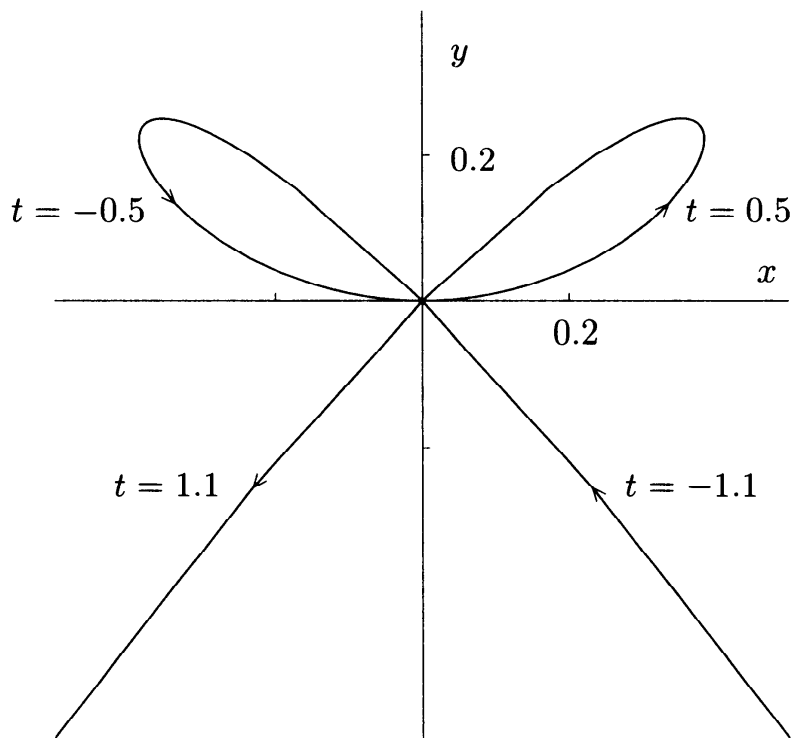
Recherche des points d'inflexion :

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $x''(t) = -6t$ et $y''(t) = 2 - 12t^2$. Les paramètres d'inflexion sont les réels tels que :

$$\begin{vmatrix} 1 - 3t^2 & -6t \\ t - 2t^3 & 1 - 6t^2 \end{vmatrix} = 1 - 3t^2 + 6t^4 = 0.$$

On voit facilement qu'il n'y a pas de solutions réelles.

On trouve la trajectoire :



k) Nous poserons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$:

$$x(t) = 2 \cos t - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2(t) \quad y(t) = 2 \sin t + \frac{1}{4} \operatorname{tg}(t) .$$

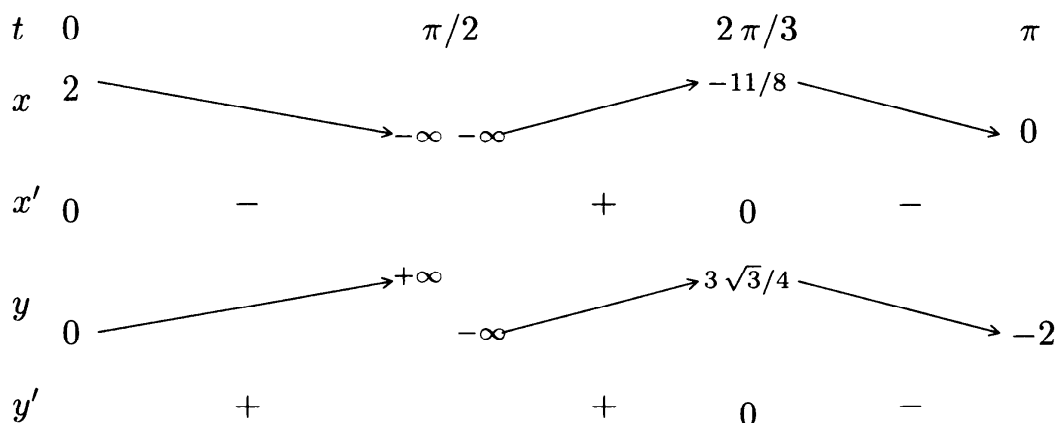
La fonction f est ici 2π -périodique. La fonction x est paire et la fonction y est impaire. La trajectoire de f présente donc une symétrie par rapport à l'axe des x . Nous étudierons f sur l'ensemble $\omega =]0, \pi[\setminus \{\pi/2\}$, réunion d'intervalles sur lesquels f est de classe \mathcal{C}^∞ . Pour tout $t \in \omega$ on a :

$$x'(t) = -2 \sin t - \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\cos^3 t} , \quad \text{et} \quad y'(t) = 2 \cos t + \frac{1}{4} \frac{1}{\cos^2 t} .$$

On voit donc que pour tout $t \in \omega$: $x'(t) = -\operatorname{tg}(t) y'(t)$. La fonction y' ne prend la valeur 0 (sur ω), qu'en t tel que $8 \cos^3(t) + 1 = 0$; la seule solution est $t = 2\pi/3$. Ce paramètre $t = 2\pi/3$ est le paramètre d'un point stationnaire. Pour tout $t \in \omega$, $t \neq 2\pi/3$, $t \neq 0$, $t \neq \pi$, on a :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\operatorname{cotg} t ,$$

la pente de la tangente au point stationnaire est donc $-\operatorname{cotg}(2\pi/3) = 1/\sqrt{3}$.
On trouve le tableau de variations suivant :



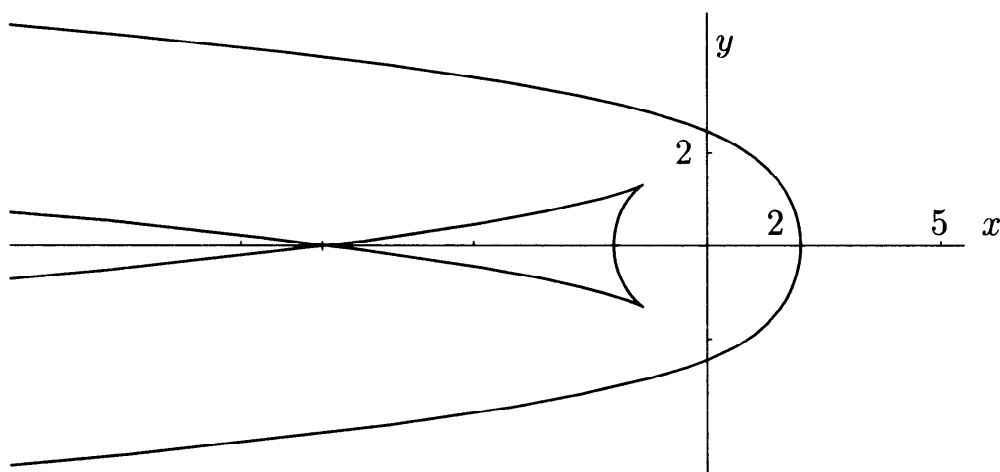
Branches infinies (au voisinage de $\pi/2$)

Quand t tend vers $\pi/2$ on a :

$$x(t) \sim -\frac{1}{8} \operatorname{tg}^2(t) \quad \text{et} \quad y(t) \sim \frac{1}{4} \operatorname{tg}(t) .$$

Nous en déduisons $x(t) \sim -2y^2(t)$; il n'y a donc pas d'asymptote mais deux branches paraboliques (quand t tend vers $\pi/2$ par valeurs supérieures, et quand t tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures).

On obtient la figure suivante :



Points multiples : on considère les points multiples relativement à l'ensemble $\omega' =]-\pi, \pi[\setminus \{-\pi/2, \pi/2\}$.

On observe un point double à l'intersection avec l'axe des x . Les paramètres de ce point multiple sont les $t \in \omega'$ tels que $\cos(t) = -1/8$; ces paramètres sont $t_1 = \operatorname{Arc} \cos(-1/8)$ et $t_2 = -t_1$. On a $x(t_1) = x(t_2) = -8 - 1/8$.

Recherchons maintenant systématiquement les points multiples. On cherche deux réels t_1 et t_2 dans ω' , $t_1 < t_2$, tels que $x(t_1) = x(t_2)$

$y(t_2)$, c'est-à-dire, et notant $C_1 = \cos t_1$, $C_2 = \cos t_2$, $S_1 = \sin t_1$ et $S_2 = \sin t_2$:

$$\begin{aligned} 2C_1 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{C_1^2} - 1 \right) &= 2C_2 - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{C_2^2} - 1 \right) \\ S_1 \left(2 + \frac{1}{4} \frac{1}{C_1} \right) &= S_2 \left(2 + \frac{1}{4} \frac{1}{C_2} \right) . \end{aligned}$$

La première condition s'écrit :

$$(C_1 - C_2) \left(16 + \frac{C_1 + C_2}{C_1^2 C_2^2} \right) = 0 .$$

Déterminons les solutions pour lesquelles $C_1 = C_2$: on a alors $S_1 \neq S_2$, et la deuxième condition ne peut être satisfaite que si $C_1 = C_2 = -1/8$; on trouve donc ici le point multiple à l'intersection avec l'axe des x .

Montrons qu'il n'y a pas d'autres solutions ; on suppose $C_1 \neq C_2$. En élevant la deuxième condition au carré on trouve la condition nécessaire :

$$(1 - C_1^2) \left(2 + \frac{1}{4} \frac{1}{C_1} \right)^2 = (1 - C_2^2) \left(2 + \frac{1}{4} \frac{1}{C_2} \right)^2 ,$$

soit en développant :

$$4 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{16 C_1^2} - 4 C_1^2 - C_1 - \frac{1}{16} = 4 + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{16 C_2^2} - 4 C_2^2 - C_2 - \frac{1}{16} .$$

La première condition étant supposée vérifiée, on a :

$$C_1 - \frac{1}{16 C_1^2} = C_2 - \frac{1}{16 C_2^2} .$$

On obtient donc la condition nécessaire :

$$\frac{1}{C_1} - 4 C_1^2 = \frac{1}{C_2} - 4 C_2^2 ,$$

soit encore (en simplifiant par $C_1 - C_2$) :

$$\frac{1}{C_1 C_2} + 4(C_1 + C_2) = 0 .$$

Comme d'autre part on doit avoir l'égalité $C_1 + C_2 = -16 C_1^2 C_2^2$, on en déduit $C_1^3 C_2^3 = 1/64$, d'où $C_1 C_2 = 1/4$, puis $C_1 + C_2 = -1$. Les réels C_1 et C_2 sont nécessairement les zéros du polynôme $X^2 + X - 1/4 = (X - 1/2)^2$, donc $C_1 = C_2 = -1/2$, ce qui est contradictoire.

On peut cependant remarquer que les paramètres t tels que $\cos t = -1/2$ sont les paramètres des points stationnaires de la courbe.

Exercice 3 :

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. On donne la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ définie par ses coordonnées f_1, f_2 dans \mathcal{R} : $f_1(t) = \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 1}$,

$$f_2(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{t^4 + 1}.$$

a) Tracer la trajectoire \mathcal{L} de f (c'est une *lemniscate de Bernoulli*). Montrer que \mathcal{L} admet dans \mathcal{R} l'équation cartésienne $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.

b) Former la CNS sur $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{R}^4$ pour que les t_i soient 4 paramètres cocycliques. En déduire que si $t \in \mathbb{R}^*$, il y a un unique réel $\theta(t) \in \mathbb{R}^*$ tel que $(t, t, t, \theta(t))$ soient cocycliques. Ce réel $\theta(t)$ sera appelé *résiduel* de t : le calculer et montrer que t_1, t_2, t_3, t_4 sont cocycliques ssi $\theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ le sont. ■

a) Il est clair que f est un arc de classe \mathcal{C}^∞ . Montrons que c'est un arc régulier. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f'_1(t) &= \frac{(3t^2 + 1)(1 + t^4) - 4t^4(t^2 + 1)}{(t^4 + 1)^2} = \\ &= \frac{-t^6 - 3t^4 + 3t^2 + 1}{(t^4 + 1)^2} = \frac{(1 - t^2)(1 + 4t^2 + t^4)}{(t^4 + 1)^2}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f'_2(t) &= \frac{(3t^2 - 1)(1 + t^4) - 4t^4(t^2 - 1)}{(t^4 + 1)^2} = \\ &= \frac{-t^6 + 3t^4 + 3t^2 - 1}{(t^4 + 1)^2} = \frac{(1 + t^2)(-1 + 4t^2 - t^4)}{(t^4 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Les zéros de f'_1 sont -1 et 1 , qui ne sont pas zéros de f'_2 . Nous en déduisons que l'arc f est régulier.

Montrons maintenant que l'arc f est simple. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_1(t) + f_2(t) = \frac{2t^3}{t^4 + 1} \quad \text{et} \quad f_1(t) - f_2(t) = \frac{2t}{t^4 + 1},$$

d'où :

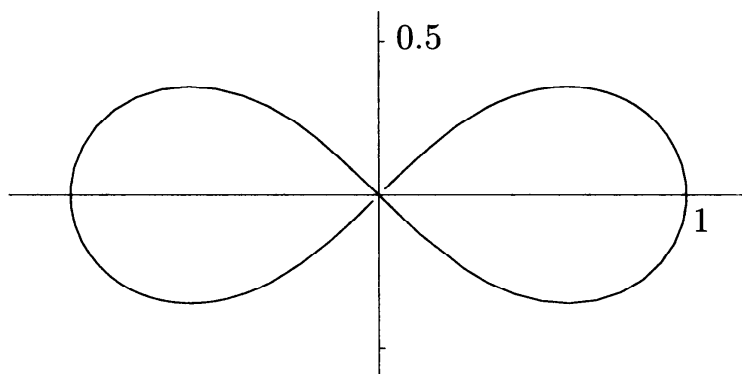
$$(1) \quad f_1^2(t) - f_2^2(t) = \frac{4t^4}{(t^4 + 1)^2}.$$

Si (x, y) est le couple des coordonnées du point $f(t)$, on voit que $x^2 \geq y^2$, et si $t \neq 0$, alors $x^2 > y^2$ et :

$$(2) \quad t = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 - y^2}} .$$

L'origine est l'image du seul paramètre 0, et un point du support de coordonnées (x, y) , différent de l'origine, est l'image du seul paramètre t qui est donné par la relation (2). L'application f est donc une immersion. Ce n'est pas un plongement car $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} O = f(0)$ (cf. lemme de l'exercice 5 du § VII.3).

On obtient facilement la trajectoire suivante :



On trouve aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_1^2(t) + f_2^2(t) = \frac{2t^2}{t^4 + 1} ,$$

et que par conséquent, si (x, y) est le couple des coordonnées du point $f(t)$, on a (cf. (1)) :

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{4t^4}{(t^4 + 1)^2} = x^2 - y^2 .$$

Inversement, supposons que le couple (x, y) des coordonnées d'un point M de \mathcal{C} vérifie l'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0 .$$

Si $(x, y) = (0, 0)$, alors $M = f(0)$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $x^2 > y^2$. Posons :

$$t = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{1}{2} \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{x - y}$$

On a aussi :

$$t^2 = \frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2} = \frac{x + y}{x - y} ,$$

d'où :

$$t = \frac{1}{2} \frac{(t^4 + 1)(x - y)^2}{x - y} .$$

Nous en déduisons :

$$x - y = \frac{2t}{t^4 + 1} \quad \text{et} \quad x + y = \frac{2t^3}{t^4 + 1} ,$$

d'où finalement :

$$x = \frac{t(t^2 + 1)}{t^4 + 1} \quad \text{et} \quad y = \frac{t(t^2 - 1)}{t^4 + 1} .$$

Le point M est donc dans l'image de f .

L'image de f est donc l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation :

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0 .$$

b) On a remarqué que si (x, y) est le couple des coordonnées du point de paramètre t sur la lemniscate :

$$x^2 + y^2 = \frac{2t^2}{\Delta(t)} \quad x = \frac{t(t^2 + 1)}{\Delta(t)} \quad y = \frac{t(t^2 - 1)}{\Delta(t)} ,$$

où $\Delta(t) = t^4 + 1$. Soit \mathcal{C} un cercle (ou une droite) dont une équation dans \mathcal{R} est :

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 .$$

En raisonnant comme dans le problème d'alignement sur une courbe rationnelle, et en prenant les définitions analogues, on voit que le quadruplet (t_1, t_2, t_3, t_4) est cocyclique sur le cercle \mathcal{C} si, et seulement si, le polynôme $(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)$ divise le polynôme :

$$2at^2 + bt(t^2 + 1) + ct(t^2 - 1) + d(1 + t^4) .$$

Ce polynôme étant de degré au plus 4, et le coefficient de degré 4 étant d , cette condition est équivalente à la condition :

$$2at^2 + bt(t^2 + 1) + ct(t^2 - 1) + d(1 + t^4) = d \prod_{i=1}^4 (t - t_i)$$

soit encore, en notant $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les fonctions symétriques élémentaires de t_1, t_2, t_3, t_4 :

$$d\sigma_1 = -(b+c)$$

$$d\sigma_2 = 2a$$

$$d\sigma_3 = c-b$$

$$d\sigma_4 = d.$$

Les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont cocycliques (ou alignés) si, et seulement si, ce système d'équations linéaires en a, b, c, d a une solution où $(a, b, c) \neq 0$. Une condition nécessaire est $\sigma_4 = 1$. Inversement, si $\sigma_4 = 1$, les solutions pour (a, b, c, d) sont les quadruplets tels que :

$$a = d \frac{\sigma_2}{2}, \quad b = -d \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad c = d \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

Il existe des quadruplets vérifiant ces conditions et tels que $(a, b, c) \neq 0$ si, et seulement si, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \neq (0, 0, 0)$. On remarque $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = (0, 0, 0, 1)$ si, et seulement si :

$$\prod_{i=1}^4 (t - t_i) = t^4 + 1.$$

Ce cas est exclu puisque t_1, t_2, t_3, t_4 sont réels. La condition $\sigma_4 = 1$ est donc nécessaire et suffisante. Les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont alors cocycliques (ou alignés) sur le cercle (ou la droite) dont une équation est (en prenant $d = 2$) :

$$\sigma_2 (x^2 + y^2) - (\sigma_1 + \sigma_3) x + (\sigma_3 - \sigma_1) y + 2 = 0.$$

Si $t \neq 0$, il existe un unique réel $\theta(t)$ tel que $t^3 \theta(t) = 1$, c'est $\theta(t) = 1/t^3$. Il est clair que les paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, les paramètres $\theta(t_1), \theta(t_2), \theta(t_3), \theta(t_4)$ le sont.

Exercice 4 :

On reprend la cubique définie par ses coordonnées :

$$f_1(t) = \frac{1+t+t^2}{1+t^2}, \quad f_2(t) = t f_1(t),$$

dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan affine \mathcal{E} (cf. Exemple 3).

On ajoute à \mathbb{R} un élément noté ∞ ($\infty \notin \mathbb{R}$) et on pose $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On convient que des éléments t_1, t_2, t_3 de $\tilde{\mathbb{R}}$ sont *alignés* ssi : ou bien $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ et est aligné au sens donné dans l'Exemple 3 ; ou bien l'un des t_i est ∞ , et les deux autres sont dans \mathbb{R} et de produit 1 ; ou enfin deu

∞ et le troisième est 0.

a) Avec ces conventions, montrer que pour tout couple $(t_1, t_2) \in \tilde{\mathbb{R}}^2$, il existe $\theta(t_1, t_2) \in \tilde{\mathbb{R}}$ unique tel que $(t_1, t_2, \theta(t_1, t_2))$ soit aligné.

b) On fixe $t_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$. A chaque couple $(t_1, t_2) \in \tilde{\mathbb{R}}^2$ on fait correspondre $t_1 \oplus t_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$ ainsi défini : $t_1 \oplus t_2 = \theta(t_0, \theta(t_1, t_2))$. Démontrer que la loi interne \oplus ainsi définie sur $\tilde{\mathbb{R}}$ est une loi de *groupe abélien*.

c) Déterminer les éléments d'ordre 2 et 3 de ce groupe. ■

Où l'on rend vectoriel le problème projectif.

Considérons l'application $p : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ qui, à $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, fait correspondre y/x si $x \neq 0$ et ∞ si $x = 0$. Il est clair que p est surjective, et on montre sans difficulté que si V_1 et V_2 sont des vecteurs colonne non nuls, $p(V_1) = p(V_2)$ si, et seulement si, (V_1, V_2) est lié, ce qu'on peut écrire $\det(V_1, V_2) = 0$, le déterminant étant relatif à la base canonique. Si V est un vecteur colonne non nul tel que $p(V) = t \in \tilde{\mathbb{R}}$ nous dirons que V représente t . L'ensemble $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ sera désigné par \mathcal{D} .

Pour $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$ la condition d'alignement trouvée dans l'Exemple 3 s'écrit :

$$\mathcal{A} : \quad t_1 t_2 t_3 = t_1 + t_2 + t_3 + 1 .$$

Si $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ et $V_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sont 3 vecteurs colonne non nuls, nous dirons qu'ils sont alignés si, et seulement si :

$$\mathcal{PA} : \quad y_1 y_2 y_3 = y_1 x_2 x_3 + y_2 x_1 x_3 + y_3 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 .$$

Montrons que $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$ si, et seulement si, $\mathcal{A}(p(V_1), p(V_2), p(V_3))$.

Si x_1, x_2, x_3 sont tous non nuls, la condition $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$ s'écrit :

$$\frac{y_1}{x_1} \frac{y_2}{x_2} \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} + 1 \quad \text{soit} \quad \mathcal{A}(p(V_1), p(V_2), p(V_3)) .$$

Si $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$, donc $p(V_1) = \infty$, $p(V_2) \in \mathbb{R}$, $p(V_3) \in \mathbb{R}$, la condition $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$ s'écrit (puisque $y_1 \neq 0$) :

$$y_2 y_3 = x_2 x_3 \quad \text{soit} : \quad p(V_2) p(V_3) = 1 .$$

On a des résultats analogues si l'un des x_i est nul et que les deux autres sont $\neq 0$.

Si $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = 0$, donc $p(V_1) \in \mathbb{R}$, $p(V_2) = p(V_3) = \infty$, la condition $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$ s'écrit :

$$y_1 = 0 \quad \text{soit} \quad p(V_1) = 0.$$

On a des résultats analogues si deux des x_i sont nuls et que le troisième est $\neq 0$.

Enfin on vérifie que si $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ est exclu.

On voit donc que la condition $\mathcal{PA}(V_1, V_2, V_3)$ équivaut bien à la condition $\mathcal{A}(p(V_1), p(V_2), p(V_3))$, telle qu'elle a été définie sur $\tilde{\mathbb{R}}^3$.

a) Soient $V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ et $V_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ des vecteurs colonne non nuls, la condition d'alignement s'écrit :

$$(y_1 y_2 - x_1 x_2) y_3 - (y_1 x_2 + y_2 x_1 + x_1 x_2) x_3 = 0,$$

ce qui exprime que le vecteur colonne W , dont les coordonnées dans la base canonique sont $(y_1 y_2 - x_1 x_2, y_1 x_2 + y_2 x_1 + x_1 x_2)$, est colinéaire au vecteur V_3 . Pour tous vecteurs V_1 et V_2 dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ nous poserons :

$$\Theta(V_1, V_2) = \begin{bmatrix} y_1 y_2 - x_1 x_2 \\ y_1 x_2 + y_2 x_1 + x_1 x_2 \end{bmatrix}.$$

Montrons que $\Theta(V_1, V_2)$ ne peut être nul que si V_1 ou V_2 l'est. En effet, on a :

$$\Theta(V_1, V_2) = \begin{bmatrix} y_1 y_2 - x_1 x_2 \\ y_1 x_2 + y_2 x_1 + x_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & y_1 \\ x_1 + y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

et :

$$\det \begin{bmatrix} -x_1 & y_1 \\ x_1 + y_1 & x_1 \end{bmatrix} = -(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2).$$

Si $V_1 \neq 0$ ce déterminant est < 0 , ce qui prouve que si $V_1 \neq 0$ et $V_2 \neq 0$, alors $\Theta(V_1, V_2) \neq 0$.

Si t_1 et t_2 sont deux éléments de $\tilde{\mathbb{R}}$, et que $p(V_1) = t_1$ et $p(V_2) = t_2$, il y a un seul $t_3 \in \tilde{\mathbb{R}}$ tel que (t_1, t_2, t_3) soient alignés, c'est $p(\Theta(V_1, V_2))$; on posera $\theta(p(V_1), p(V_2)) = p(\Theta(V_1, V_2))$.

b) Soit $V_0 \in \mathcal{D}$ tel que $p(V_0) = t_0$. Introduisons la loi \odot sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$(\forall (V_1, V_2) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^2) \quad V_1 \odot V_2 = \Theta(V_0, \Theta(V_1, V_2))$$

Si V_1 et V_2 sont non nuls, il est clair que :

$$p(V_1) \oplus p(V_2) = p(V_1 \odot V_2) .$$

On pourra donc déduire de certaines propriétés de la loi \odot , des propriétés de la loi \oplus . La loi \odot est visiblement commutative. Montrons qu'en choisissant convenablement V_0 , V_0 est élément neutre. En effet, pour tout $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

$$V_0 \odot V = \Theta(V_0, \Theta(V_0, V)) = \begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix} V ,$$

mais comme la matrice $\begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix}$ est de trace nulle, et que son déterminant est $-(x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2)$, on a (Hamilton-Cayley) :

$$V_0 \odot V = (x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2) V .$$

On supposera dans la suite que V_0 est tel que $x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 = 1$ (un tel choix est bien possible) ; dans ce cas, V_0 est élément neutre pour la loi commutative \odot . Cela implique que t_0 est élément neutre pour la loi \oplus , ce qui est géométriquement évident.

Nous voulons démontrer que la loi \odot munit le \mathbb{R} -ev $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ d'une structure de \mathbb{C} -algèbre commutative, qui est en fait isomorphe à \mathbb{C} . Commençons par démontrer qu'il existe des vecteurs colonne V tels que $V \odot V = -V_0$. Le vecteur colonne V de coordonnées (x, y) vérifie cette condition si, et seulement si :

$$\begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & y \\ x + y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} ,$$

soit encore, puisque

$$\begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix}^2 = I_2 ,$$

$$\begin{bmatrix} -x & y \\ x + y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -x_0 & y_0 \\ x_0 + y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} ,$$

ce qui s'écrit :

$$(2) \quad \begin{aligned} -x^2 + y^2 &= x_0^2 - y_0^2 \\ x^2 + 2xy &= -(x_0^2 + 2x_0 y_0) . \end{aligned}$$

On peut remarquer que cette condition s'écrit aussi $\Theta(V, V) = -\Theta(V_0, V_0)$; cela implique que les tangentiels de $p(V)$ et de $p(V_0)$ sont cc

résolvant le système (2) d'abord par rapport à $t = y/x$, on trouve deux solutions opposées dont l'une est :

$$V_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} x_0 + 2y_0 \\ -(2x_0 + y_0) \end{bmatrix}.$$

On peut remarquer que ce vecteur V_1 est de norme 1 et est orthogonal à V_0 , pour la forme quadratique définie positive $Q : V \mapsto x^2 + xy + y^2$. Les vecteurs colonne V_0 et V_1 sont linéairement indépendants.

Soit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application \mathbb{R} -linéaire telle que $\varphi(1) = V_0$ et $\varphi(i) = V_1$. D'après ce qui précède, φ est bijective, et c'est une isométrie, le \mathbb{R} -espace \mathbb{C} étant muni de sa structure canonique, et le \mathbb{R} -espace $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ étant muni de la forme quadratique définie positive Q . On vérifie que :

$$\varphi(1) \odot \varphi(1) = V_0 \odot V_0 = V_0 = \varphi(1 \times 1)$$

$$\varphi(1) \odot \varphi(i) = \varphi(i) \odot \varphi(1) = V_0 \odot V_1 = V_1 = \varphi(1 \times i).$$

et :

$$\varphi(i) \odot \varphi(i) = V_1 \odot V_1 = -V_0 = -\varphi(1) = \varphi(-1) = \varphi(i \times i).$$

On en déduit par \mathbb{R} -bilinéarité :

$$(\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2) \quad \varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) \odot \varphi(z_2).$$

Le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, muni de la loi \odot , est donc une algèbre associative unitaire, et φ est un isomorphisme de \mathbb{R} -algèbres, entre l'algèbre (\mathbb{C}, \times) et l'algèbre $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \odot)$. L'ensemble des éléments inversibles de l'algèbre $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \odot)$ est l'ensemble des éléments non nuls, c'est-à-dire l'ensemble \mathcal{D} . L'application $p : \mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ est un morphisme surjectif de (\mathcal{D}, \odot) dans $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus)$. Cela prouve que $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus)$ est un groupe abélien, et que p est un homomorphisme surjectif de groupes. En résumé, nous avons les homomorphismes de groupes suivants (φ bijectif et p surjectif) :

$$(\mathbb{C}^*, \times) \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{D}, \odot) \xrightarrow{p} (\tilde{\mathbb{R}}, \oplus).$$

Le noyau de p est l'ensemble des vecteurs colonne non nuls colinéaires à V_0 , le noyau de $p \circ \varphi$ est donc \mathbb{R}^* . Nous en déduisons que le groupe $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus)$ est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$; ce groupe est lui-même isomorphe au groupe \mathbb{U} . Le lecteur pourra vérifier que l'application $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{U}$, $z \mapsto (z/|z|)^2$, est un homomorphisme surjectif de groupes de noyau \mathbb{R}^* ; l'homomorphisme factorisé est un isomorphisme entre le groupe quotient $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*$ et le groupe \mathbb{U} .

c) Les éléments d'ordre 2 dans le groupe $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus)$ sont les éléments $t = p(\varphi(z)) \in \tilde{\mathbb{R}}$, où $z \in \mathbb{C}^*$ est tel que $z^2 \in \mathbb{R}^*$. Ce sont donc $t_0 = p(\varphi(1))$ et $t_1 = p(\varphi(i)) = p(V_1)$. Si t_0 est réel, on trouve :

$$t_1 = -\frac{2+t_0}{2t_0+1} \quad \text{si } t_0 \neq -\frac{1}{2}, \quad \text{et } t_1 = \infty \text{ si } t_0 = -\frac{1}{2}.$$

Si $t_0 = \infty$, on trouve $t_1 = -1/2$. On peut remarquer que les éléments d'ordre 2 sont les points de contact des deux tangentes à la cubique menées du tangentiel de t_0 (autres que la tangente en ce point).

Les éléments d'ordre 3 dans le groupe $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus)$ sont les $t = p(\varphi(z)) \in \tilde{\mathbb{R}}$ où $z \in \mathbb{C}^*$ est tel que $z^3 \in \mathbb{R}^*$, et $z \notin \mathbb{R}^*$. Ce sont donc $p(\varphi(j))$ et $p(\varphi(j^2))$, où j et j^2 sont les deux éléments d'ordre 3 dans \mathbb{C}^* . On trouve :

$$\varphi(j) = \begin{bmatrix} y_0 \\ -x_0 - y_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(j^2) = \begin{bmatrix} -x_0 - y_0 \\ x_0 \end{bmatrix},$$

d'où si t_0 est réel, $t_0 \neq -1$, $t_0 \neq 0$, les éléments d'ordre 3 sont :

$$-\frac{1+t_0}{t_0} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{1+t_0}.$$

Si $t_0 = \infty$, on trouve 0 et -1 , si $t_0 = -1$ on trouve ∞ et 0, si $t_0 = 0$ on trouve -1 et ∞ .

Chapitre VIII

ENVELOPPES DE DROITES D'UN PLAN AFFINE

§ VIII.1 FAMILLES DE DROITES À UN PARAMÈTRE

Exercice 1 :

Soit \mathcal{E} un plan affine muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$, où l'on note (x, y) les coordonnées génériques. Soit \mathcal{D} l'ensemble des droites affines de \mathcal{E} . On désigne par U (resp. V) l'ensemble des droites affines de \mathcal{E} non parallèles à e_2 (resp. à e_1). Pour $\mathcal{D} \in U$ (resp. $\mathcal{D} \in V$), on note $\Phi_U(\mathcal{D})$ (resp. $\Phi_V(\mathcal{D})$) le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que \mathcal{D} admette dans \mathcal{R} l'équation $y = ax + b$ (resp. $x = ay + b$). De la sorte $\Phi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\Phi_V : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont des bijections grâce auxquelles on peut transporter à U et V la topologie de \mathbb{R}^2 .

a) Montrer que $\mathcal{D} = U \cup V$ et que sur \mathcal{D} il existe une et une seule topologie séparée qui induit sur U et V les topologies définies ci-dessus. On munit \mathcal{D} de cette topologie. Vérifier que U et V sont alors des ouverts de \mathcal{D} . Prouver que \mathcal{D} est connexe par arcs.

b) Montrer que la topologie ainsi définie sur \mathcal{D} ne dépend pas du choix de \mathcal{R} . ■

a) Montrons l'unicité d'une topologie sur \mathcal{D} qui induise sur U et sur V les topologies telles que Φ_U et Φ_V soient des homéomorphismes. Soit T une telle topologie. Si O est un ouvert pour T , sa trace sur U (resp. sur V) est un ouvert de U (resp. de V). Comme $\mathcal{D} = U \cup V$, on voit que O est la réunion d'un ouvert de U et d'un ouvert de V . Pour montrer qu'inversement la réunion d'un ouvert de U et d'un ouvert de V est un ouvert pour T , il suffit de montrer que U et V sont des ouverts pour T . Soit $\mathcal{D}_0 \in U$, d'équation $y = a_0 x + b_0$, où $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$; soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $M > |a_0|$; l'ensemble des droites \mathcal{D} d'équation $y =$

$|a| < M$ et $b \in \mathbb{R}$, est un voisinage ouvert O de \mathcal{D}_0 dans U ; il existe donc un ouvert $O_1 \in T$ tel que $O_1 \cap U = O$; si cet ensemble O_1 contient une droite \mathcal{D}_1 parallèle à e_2 , d'équation $x = b_1$ où $b_1 \in \mathbb{R}$, il contient aussi un voisinage ouvert de \mathcal{D}_1 dans V ; il existe donc un réel $\varepsilon > 0$, tel que pour tout $(a, b) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times]b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[$, la droite d'équation $x = ay + b$ soit dans O_1 ; si $a \neq 0$, il s'agit aussi de la droite élément de U , donc de O , d'équation $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$; comme on peut choisir $a \in \mathbb{R}^*$, tel que $|\frac{1}{a}| > M$ et $|a| < \varepsilon$, on obtient une contradiction ; l'ouvert O_1 ne peut donc contenir aucune droite parallèle à e_2 , d'où $O_1 = O$; cela prouve que tout élément de U est intérieur à U pour la topologie T , ou encore que U est un ouvert pour T . On démontrerait de manière analogue que V est un ouvert pour T . Comme annoncé, cela prouve que les ouverts de T sont les réunions d'un ouvert de U et d'un ouvert de V . La topologie T vérifiant les conditions de l'énoncé est donc unique.

Exhibons maintenant une topologie séparée sur \mathcal{D} qui vérifie les propriétés de l'énoncé. Soit \mathcal{A} le \mathbb{R} -ev des formes affines sur \mathcal{E} (il est de dimension 3), muni de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie. Dans ce \mathbb{R} -ev, l'ensemble des formes affines constantes est un sous- \mathbb{R} -ev de dimension 1, que nous noterons \mathcal{C} . L'ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$ des formes affines non constantes est un cône ouvert. Notons $q : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_1(\mathcal{A}) \setminus \{\mathcal{C}\}$ l'application $\varphi \mapsto \mathbb{R}\varphi$, et $\mathfrak{d} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$, $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(0)$. Il est clair qu'il existe une bijection et une seule $\Phi : \mathcal{G}_1(\mathcal{A}) \setminus \{\mathcal{C}\} \rightarrow \mathcal{D}$, telle que $\mathfrak{d} = \Phi \circ q$. A une droite vectorielle dans \mathcal{A} de la forme $\mathbb{R}\varphi$, où $\varphi \in \mathcal{G}$, Φ fait correspondre la droite affine $\varphi^{-1}(0) \in \mathcal{D}$. L'espace $\mathcal{G}_1(\mathcal{A})$ est muni d'une topologie métrisable (cf. § VII.4) ; on peut donc munir l'ensemble \mathcal{D} d'une topologie métrisable, telle que $\Phi : \mathcal{G}_1(\mathcal{A}) \setminus \{\mathcal{C}\} \rightarrow \mathcal{D}$ soit un homéomorphisme. L'application q étant continue, et par définition ouverte, l'application $\mathfrak{d} = \Phi \circ q$ est continue, ouverte et surjective. L'espace topologique $\mathcal{G} = \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$ étant connexe par arcs (un \mathbb{R} -ev de dimension 3 privé d'une droite affine) l'espace \mathcal{D} est connexe par arcs. Pour étudier la continuité des applications dont l'ensemble de départ est \mathcal{D} , nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme :

|| On note \mathfrak{d} l'application $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$, $\varphi \mapsto \varphi^{-1}(0)$. Une application $f : \mathcal{O} \rightarrow X$, où X est un espace topologique, et \mathcal{O} un ouvert de \mathcal{D} , est continue si, et seulement si, l'application $f \circ \mathfrak{d}$, définie sur l'ouvert $\mathfrak{d}^{-1}(\mathcal{O})$, l'est. ■

Si f est continue, comme \mathfrak{d} est continue, $f \circ \mathfrak{d}$ est continue. Supposons $f \circ \mathfrak{d}$ continue. Soit Ω un ouvert de X ; l'ensemble :

$$O = (f \circ \mathfrak{d})^{-1}(\Omega) = \mathfrak{d}^{-1}(f^{-1}(\Omega))$$

est un ouvert de $\mathfrak{d}^{-1}(\mathcal{O})$, donc un ouvert de \mathcal{A} . Comme \mathfrak{d} est surjective on a $f^{-1}(\Omega) = \mathfrak{d}(O)$, et cet ensemble est un ouvert de \mathcal{D} , p

ouverte ; c'est aussi un ouvert de \mathbb{O} . L'application f est donc continue. Fin du lemme.

Montrons que les topologies induites sur U et V sont bien telles que Φ_U et Φ_V soient des homéomorphismes. L'application \mathfrak{d} étant continue, il est clair que l'application Φ_U^{-1} , qui à $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fait correspondre la droite dont une équation dans \mathcal{R} est $y = ax + b$, est continue. Il en est de même pour Φ_V^{-1} . Inversement si φ est une forme affine telle que $\vec{\varphi}(e_2) \neq 0$ une équation dans \mathcal{R} de la droite $\mathfrak{d}(\varphi) \in U$ est $x\vec{\varphi}(e_1) + y\vec{\varphi}(e_2) + \varphi(0) = 0$; cette équation s'écrit aussi :

$$y = -\frac{\vec{\varphi}(e_1)}{\vec{\varphi}(e_2)}x - \frac{\varphi(0)}{\vec{\varphi}(e_2)} ;$$

d'où :

$$\Phi_U(\mathfrak{d}(\varphi)) = -\left(\frac{\vec{\varphi}(e_1)}{\vec{\varphi}(e_2)}, \frac{\varphi(0)}{\vec{\varphi}(e_2)}\right) .$$

D'après le lemme, cela prouve que l'application Φ_U est continue. Il en est de même pour Φ_V .

La topologie dont nous avons muni \mathfrak{D} vérifie donc bien les conditions de l'énoncé.

b) La topologie dont nous avons muni \mathfrak{D} ne dépend pas du repère choisi.

Exercice 2 :

On reprend les notations de l'exercice 1, dont on suppose acquis les résultats. Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} , et $\mathfrak{D} : I \rightarrow \mathfrak{D}$, $t \mapsto \mathfrak{D}_t$ une application. On donne $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que \mathfrak{D} est de classe \mathcal{C}^k si elle vérifie les conditions suivantes :

(I) \mathfrak{D} est continue

(II) $\Phi_U \circ (\mathfrak{D}|_{\mathfrak{D}^{-1}(U)})$ et $\Phi_V \circ (\mathfrak{D}|_{\mathfrak{D}^{-1}(V)})$ sont de classe \mathcal{C}^k (ce qui a un sens car $\mathfrak{D}^{-1}(U)$ et $\mathfrak{D}^{-1}(V)$ sont des ouverts relativement à I si (I) est vérifiée).

a) Montrer que la condition “ \mathfrak{D} est de classe \mathcal{C}^k ” ne dépend pas du choix de \mathcal{R} .

b) Montrer que $\mathfrak{D} : I \rightarrow \mathfrak{D}$ est de classe \mathcal{C}^k ssi c'est une famille de droites à un paramètre de classe \mathcal{C}^k au sens de la définition VIII.1.1. ■

a) b) La définition du VIII.1.1 ne faisant pas de référence à un repère, si elle est équivalente à la définition de l'énoncé, alors la définition de l'énoncé sera indépendante du choix du repère \mathcal{R} .

Supposons que la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ soit de classe \mathcal{C}^k au sens de la définition du VIII.1.1. Cela signifie qu'il existe une application $I \rightarrow \mathfrak{C}$, $t \mapsto \varphi_t$, de classe \mathcal{C}^k , telle que pour tout $t \in I$, $\mathcal{D}_t = \varphi_t^{-1}(0) = \mathfrak{d}(\varphi_t)$. L'application \mathfrak{D} est continue, puisque \mathfrak{d} est continue. L'application \mathfrak{D} vérifie la condition (I), et les ensembles $\mathfrak{D}^{-1}(U)$ et $\mathfrak{D}^{-1}(V)$ sont des ouverts de I . L'ouvert relatif $\mathfrak{D}^{-1}(U)$ est l'ensemble des $t \in I$ tels que $\vec{\varphi}_t(e_2) \neq 0$. D'après le calcul fait dans l'exercice 1, pour tout $t \in \mathfrak{D}^{-1}(U)$ on a :

$$\Phi_U(\mathcal{D}_t) = \Phi_U(\mathfrak{d}(\varphi_t)) = - \left(\frac{\vec{\varphi}_t(e_1)}{\vec{\varphi}_t(e_2)}, \frac{\varphi_t(O)}{\vec{\varphi}_t(e_2)} \right).$$

Il est donc clair que $\Phi_U \circ (\mathfrak{D}|_{\mathfrak{D}^{-1}(U)})$ est de classe \mathcal{C}^k sur $\mathfrak{D}^{-1}(U)$. Il en est de même pour $\Phi_V \circ (\mathfrak{D}|_{\mathfrak{D}^{-1}(V)})$ sur $\mathfrak{D}^{-1}(V)$. La fonction \mathfrak{D} est donc de classe \mathcal{C}^k au sens de la définition de l'exercice.

Supposons maintenant que \mathfrak{D} vérifie les conditions (I) et (II). Pour tout $t \in \mathfrak{D}^{-1}(U)$ la droite \mathcal{D}_t a une équation de la forme : $y = a_U(t)x + b_U(t)$, les fonctions réelles $t \mapsto a_U(t)$ et $t \mapsto b_U(t)$ étant de classe \mathcal{C}^k sur l'ensemble $\mathfrak{D}^{-1}(U)$, relativement ouvert dans I . Pour tout $t \in \mathfrak{D}^{-1}(V)$ la droite \mathcal{D}_t a une équation de la forme : $x = a_V(t)y + b_V(t)$, les fonctions réelles $t \mapsto a_V(t)$ et $t \mapsto b_V(t)$ étant de classe \mathcal{C}^k sur l'ensemble $\mathfrak{D}^{-1}(U)$, relativement ouvert dans I . Pour tout $t \in \mathfrak{D}^{-1}(U) \cap \mathfrak{D}^{-1}(V)$, les deux équations :

$$-a_U(t)x + y - b_U(t) = 0 \quad \text{et} \quad x - a_V(t)y - b_V(t) = 0,$$

de \mathcal{D}_t sont proportionnelles. Nous en déduisons :

$$a_V(t) = \frac{1}{a_U(t)} \quad \text{et} \quad b_V(t) = -\frac{b_U(t)}{a_U(t)}.$$

On constate alors l'égalité suivante entre complexes de module 1 :

$$\frac{(1 + i a_U(t))^2}{1 + a_U^2(t)} = \frac{(a_V(t) + i)^2}{a_V^2(t) + 1}.$$

Il existe donc une application $I \rightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto z(t)$, telle que :

$$(\forall t \in \mathfrak{D}^{-1}(U)) \quad z(t) = \frac{(1 + i a_U(t))^2}{1 + a_U^2(t)} \quad \text{et} \quad (\forall t \in \mathfrak{D}^{-1}(V)) \quad z(t) = \frac{(a_V(t) + i)^2}{a_V^2(t) + 1}.$$

Les applications a_U et a_V étant de classe \mathcal{C}^k , nous en déduisons que l'application $t \mapsto z(t)$ est de classe \mathcal{C}^k . D'après le Théorème

existe une application $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \theta(t)$, de classe \mathcal{C}^k , telle que pour tout $t \in I$, $z(t) = e^{i\theta(t)}$. Si $t \in \mathcal{D}^{-1}(U)$, on voit que $1 + ia_U(t)$ est \mathbb{R} -colinéaire à $e^{i\theta(t)/2}$, et que par conséquent une équation de la droite \mathcal{D}_t est :

$$-\sin(\theta(t)/2)x + \cos(\theta(t)/2)y - \cos(\theta(t)/2)b_U(t) = 0.$$

Si $t \in \mathcal{D}^{-1}(V)$, $a_V(t) + i$ est \mathbb{R} -colinéaire à $e^{i\theta(t)/2}$, donc une équation de la droite \mathcal{D}_t est :

$$-\sin(\theta(t)/2)x + \cos(\theta(t)/2)y + \sin(\theta(t)/2)b_V(t) = 0.$$

Si $t \in \mathcal{D}^{-1}(U) \cap \mathcal{D}^{-1}(V)$, les deux équations trouvées ci-dessus sont proportionnelles, donc égales ; cela implique :

$$-\cos(\theta(t)/2)b_U(t) = \sin(\theta(t)/2)b_V(t).$$

Il existe donc une fonction $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathcal{D}^{-1}(U)$ on ait $w(t) = -\cos(\theta(t)/2)b_U(t)$, et pour tout $t \in \mathcal{D}^{-1}(V)$, $w(t) = \sin(\theta(t)/2)b_V(t)$; les ensembles $\mathcal{D}^{-1}(U)$ et $\mathcal{D}^{-1}(V)$ étant relativement ouverts dans I , et les fonctions b_U , b_V , θ étant de classe \mathcal{C}^k , il est clair que w est de classe \mathcal{C}^k . Pour tout $t \in I$, une équation de la droite \mathcal{D}_t est donc :

$$-\sin(\theta(t)/2)x + \cos(\theta(t)/2)y + w(t) = 0.$$

Les fonctions θ et w étant de classe \mathcal{C}^k sur I , nous en déduisons que \mathcal{D} est une famille de classe \mathcal{C}^k sur I au sens de la définition du § VIII.1.1, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 :

On reprend les notations de l'exercice 1, et on munit \mathcal{E} d'une structure euclidienne.

a) Soit \mathcal{P} une partie finie, de cardinal $N \geq 1$, d'un cercle de rayon 1. Notons $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des droites affines de \mathcal{E} ne rencontrant pas \mathcal{P} . Vérifier que c'est un ouvert dense de \mathcal{D} . Caractériser les composantes connexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$; combien y en a-t-il ?

b) Soit L une partie non vide de \mathcal{E} . Montrer que l'ensemble C_L des $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ qui rencontrent L est une partie connexe par arcs de \mathcal{D} .

c) Montrer que si L est une partie compacte de \mathcal{E} , C_L est une partie compacte de \mathcal{D} . ■

a) Soit $M \in \mathcal{E}$, l'ensemble des formes affines $\varphi \in \mathcal{A}$ telles que $\varphi(M) = 0$ est un plan dans le \mathbb{R} -ev \mathcal{A} (de dimension 3) ; l'ensemble des

que la droite $\mathfrak{d}(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ ne passe pas par M est donc un ouvert partout dense de \mathfrak{C} . L'intersection d'un nombre fini d'ouverts partout denses étant un ouvert partout dense, l'ensemble des $\varphi \in \mathfrak{C}$ telles que la droite $\mathfrak{d}(\varphi)$ ne passe par aucun point de la partie finie \mathcal{P} est un ouvert partout dense de \mathfrak{C} . Nous noterons $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ cet ensemble de formes affines. L'application \mathfrak{d} étant continue et ouverte, il est clair que l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ des droites $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ qui ne passent par aucun des éléments de \mathcal{P} est une partie ouverte et partout dense dans \mathcal{D} .

Commençons par chercher les composantes connexes de $\mathcal{D}_{\{A,B\}}$, où A et B désignent deux points de \mathfrak{C} distincts. Il est intuitivement clair qu'il y a deux composantes connexes, l'une constituée par l'ensemble des droites qui ne passent pas entre A et B , et l'autre dont les éléments sont les droites qui passent entre A et B . Considérons l'application $\mathcal{A}_{\{A,B\}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(B)/\varphi(A)$; cette application est évidemment continue, et d'après le lemme de l'exercice 1, elle induit une application continue $\mathcal{D}_{\{A,B\}} \rightarrow \mathbb{R}$; cette application continue ne prend pas la valeur 0 et prend évidemment des valeurs positives et des valeurs négatives; nous en déduisons que $\mathcal{D}_{\{A,B\}}$ n'est pas connexe. La droite $\varphi^{-1}(0)$ passe entre A et B si, et seulement si, $\varphi(B)/\varphi(A) < 0$; l'ensemble des droites vérifiant cette condition est l'image par $\mathfrak{d} : \varphi \mapsto \varphi^{-1}(0)$ de l'ensemble des formes affines vérifiant $\varphi(A) < 0$ et $\varphi(B) > 0$; cet ensemble est un cône convexe de \mathcal{A} , donc son image par \mathfrak{d} est connexe (par arcs). L'ensemble des droites qui ne passent pas entre A et B est l'image par \mathfrak{d} de l'ensemble des formes affines non constantes telles que $\varphi(A) > 0$ et $\varphi(B) > 0$; ce dernier ensemble est l'intersection de deux demi-espaces ouverts, privée de la demi-droite formée par les fonctions affines constantes > 0 ; on voit facilement que cet ensemble est encore connexe (par arcs), et que par conséquent l'ensemble des droites qui ne passent pas entre A et B est connexe (par arcs). L'ensemble $\mathcal{D}_{\{A,B\}}$ est donc bien constitué des deux composantes connexes prévues.

Supposons que \mathcal{P} soit constitué de n points A_1, A_2, \dots, A_n sur un cercle; nous supposons que ces points sont numérotés de telle sorte que le polygone de sommets A_1, \dots, A_n (dans l'ordre) soit convexe. Nous poserons $A_{n+1} = A_1$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous noterons B_i le milieu de (A_i, A_{i+1}) . Si $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ ne passe par aucun des A_i , soit elle ne coupe pas le polygone, soit elle le coupe suivant exactement deux des côtés. L'ensemble des droites qui ne coupent pas le polygone sera noté E ; l'ensemble des droites qui coupent les côtés $]A_i, A_{i+1}[$ et $]A_j, A_{j+1}[$, où $1 \leq i < j \leq n$, sera noté $E_{i,j}$ (cet ensemble contient la droite $\text{Dr}(B_i, B_j)$); montrons que ces $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ ensembles, qui forment une partition de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$, sont les composantes connexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$. L'ensemble E est l'image par \mathfrak{d} de l'ensemble des fonctions affines non constantes qui prennent des valeurs > 0 en A_1, \dots, A_n ; cet ensemble de fonctions affines est une intersection de n demi-espaces ouverts du \mathbb{R} -ev des fonctions affines sur \mathfrak{C} , privée de la demi-droite constituée par les fonctions affines constantes > 0 ; on voit facilement que cet ensemble ϵ

connexe, et connexe par arcs ; nous en déduisons que E est connexe. Pour tout (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, l'ensemble $E_{i,j}$ est constitué des droites qui passent par un point du côté $]A_i, A_{i+1}[$ et un point du côté $]A_j, A_{j+1}[$; l'application $(M, N) \mapsto \text{Dr}(M, N)$, définie sur l'ensemble des couples de points distincts dans \mathcal{E} étant évidemment continue, nous en déduisons que $E_{i,j}$ est connexe. Montrons que la réunion de deux quelconques de ces parties n'est pas connexe. Soient deux paires $\{i, j\}$ et $\{i', j'\}$ différentes, où $1 \leq i < j \leq n$ et $1 \leq i' < j' \leq n$; on a $i \notin \{i', j'\}$ ou $j \notin \{i', j'\}$, supposons $i \notin \{i', j'\}$, le raisonnement étant analogue dans l'autre cas. Les droites éléments de l'ensemble $E_{i',j'}$ ne coupent pas le côté $]A_i, A_{i+1}[$; au contraire les éléments de $E_{i,j}$ le coupent ; l'ensemble $E_{i',j'}$ est donc inclus dans l'ensemble des droites qui ne passent pas entre A_i et A_{i+1} , et $E_{i,j}$ est inclus dans l'ensemble des droites qui passent entre A_i et A_{i+1} . D'après l'étude faite dans le cas où \mathcal{P} est de cardinal 2, il est clair que la réunion des parties $E_{i,j}$ et $E_{i',j'}$ n'est pas connexe. D'autre part, pour toute paire $\{i, j\}$, où $1 \leq i < j \leq n$, l'ensemble E est inclus dans l'ensemble des droites qui ne passent pas entre A_i et A_{i+1} , alors que l'ensemble $E_{i,j}$ est inclus dans l'ensemble des droites qui passent entre A_i et A_{i+1} ; la réunion de $E_{i,j}$ et de E n'est donc pas connexe. Les ensembles $E_{i,j}$, où $1 \leq i < j \leq n$, et E , sont donc bien les composantes connexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$.

b) Montrons d'abord que si A est un élément de \mathcal{E} , l'ensemble des droites qui passent par A est connexe par arcs. En effet l'application qui à $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$, fait correspondre la forme affine $M \mapsto (\overrightarrow{AM} \mid \vec{v})$ est évidemment continue. Nous en déduisons que l'application f qui $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$, fait correspondre la droite qui passe par A et qui est orthogonale à \vec{v} , est continue. L'ensemble des droites passant par A est l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\vec{\mathcal{E}}$. L'ensemble des droites qui passent par A est donc connexe par arcs. Soit maintenant une partie non vide L , $L \subset \mathcal{E}$, et D_1 , D_2 , deux droites qui rencontrent L , respectivement en A_1 et en A_2 . La composante connexe par arcs de D_1 dans C_L contient la partie $C_{\{A_1\}}$ qui est connexe par arcs ; de même la composante connexe par arcs de D_2 contient $C_{\{A_2\}}$; comme les ensembles $C_{\{A_1\}}$ et $C_{\{A_2\}}$ ne sont pas disjoints (si $A_1 \neq A_2$ la droite $\text{Dr}(A_1, A_2)$ est un élément commun), on en déduit que D_1 et D_2 sont dans la même composante connexe par arcs. L'ensemble C_L est donc connexe par arcs.

c) On suppose que la partie L est compacte. L'application qui, à $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$, fait correspondre la forme affine $M \mapsto (\overrightarrow{AM} \mid \vec{v})$ est continue. L'application Δ qui, à $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$, fait correspondre la droite qui passe par A et qui est orthogonale à \vec{v} , est donc continue. L'ensemble C_L est l'image par Δ de l'ensemble $L \times S$, où S est le cercle

et de rayon 1 dans $\tilde{\mathcal{E}}$. Comme L et S sont compactes, nous en déduisons que l'ensemble C_L est une partie compacte de \mathcal{D} .

§ VIII.2 POINT CARACTÉRISTIQUE, ENVELOPPE

Exercice 1 :

On reprend les notations des exercices 1 et 2 du § VIII.1. Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $\mathcal{D} : I \rightarrow \mathcal{D}$, $t \mapsto \mathcal{D}_t$ une application de classe \mathcal{C}^k ($2 \leq k \leq \infty$). Soit S et T les ouverts $\mathcal{D}^{-1}(U)$ et $\mathcal{D}^{-1}(V)$ de I , et soit $f = \mathcal{D}|_S$, $g = \mathcal{D}|_T$. Un paramètre $t \in I$ sera dit *régulier* (resp. stationnaire; d'inflexion; p -régulier ($2 \leq p \leq k$), ...) pour \mathcal{D} ssi :

(I) Lorsque $t \in S \setminus T$, $f'(t) \neq 0$ (resp. $f'(t) = 0$; $f'(t) \neq 0$ et $f''(t) \in \mathbb{R} f'(t)$; $(f'(t), \dots, f^{(p)}(t))$ libre, ...).

(II) Lorsque $t \in T \setminus S$, $g'(t) \neq 0$ (resp. $g'(t) = 0$; $g'(t) \neq 0$ et $g''(t) \in \mathbb{R} g'(t)$; $(g'(t), \dots, g^{(p)}(t))$ libre, ...).

(III) Lorsque $t \in T \cap S$, $f'(t) \neq 0$ et $g'(t) \neq 0$ (resp. $f'(t) = g'(t) = 0$; $f'(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ et $f''(t) \in \mathbb{R} f'(t)$, $g''(t) \in \mathbb{R} g'(t)$; $(f'(t), \dots, f^{(p)}(t))$ et $(g'(t), \dots, g^{(p)}(t))$ libres, ...).

Vérifier que si $t \in S \cap T$, pour que (III) soit satisfait, il faut et il suffit que (I) ou (II) le soit.

a) Montrer que les notions introduites ci-dessus ne dépendent pas du choix du repère \mathcal{R} .

b) Montrer que $t \in I$ est paramètre régulier (resp. stationnaire) de \mathcal{D} ssi c'est un paramètre projectivement régulier au sens de la définition VIII.2.1 (resp. stationnaire au sens de $\text{rg} \left(\begin{bmatrix} u(t) & v(t) & w(t) \\ u'(t) & v'(t) & w'(t) \end{bmatrix} \right) = 1$). De même, prouver que $t \in I$ est paramètre birégulier de \mathcal{D} ssi c'est un paramètre projectivement birégulier de \mathcal{D} au sens de la définition VIII.2.1.

c) Soit $t_0 \in I$ un paramètre d'inflexion projective de \mathcal{D} (i.e. projectivement régulier et non projectivement birégulier au sens de la définition VIII.2.1). Si t_0 est affinement régulier pour la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$, étudier l'enveloppe au voisinage de t_0 . Sinon étudier les enveloppes pour $t \neq t_0$ dans l'hypothèse où les $t \in I \setminus \{t_0\}$ sont affinement réguliers. ■

a) b) Soit $t_0 \in S$, comme S est un ouvert relatif de I , il existe un intervalle J relativement ouvert dans I contenant t_0 . Le paramètre t_0 est projectivement régulier pour \mathcal{D} si, et seulement si, il est projectivement régulier pour $\mathcal{D}|_J$. Pour tout $t \in J$ posons $f(t) = \Phi_U(\mathcal{D}_t) = (a_U(t), b_U(t))$; cela signifie que la droite \mathcal{D}_t a une équation de la forme $y = a_U(t)x + b_U(t)$; les fonctions a_U et b_U sont de classe \mathcal{C}^k sur S (cf. exercice 2 du § VIII.1), donc sur J . Le paramètre t_0 est projectivement régulier si, et seulement si :

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_U(t_0) & -1 & b_U(t_0) \\ a'_U(t_0) & 0 & b'_U(t_0) \end{pmatrix} = 2.$$

La matrice est de rang 2 si, et seulement si, $(a'_U(t_0), b'_U(t_0)) \neq (0, 0)$, ce qui équivaut à la condition $f'(t_0) \neq 0$.

De manière analogue, si $t_0 \in T$, on montre que t_0 est un paramètre projectivement régulier de \mathcal{D} si, et seulement si $g'(t_0) \neq 0$.

Si $t \in S \cap T$, les conditions $f'(t_0) \neq 0$ et $g'(t_0) \neq 0$ sont toutes les deux équivalentes à ce que t_0 soit paramètre d'un point projectivement régulier.

Nous reprenons les notations introduites ci-dessus. Si $t_0 \in S$, le paramètre t_0 est projectivement birégulier pour \mathcal{D} si, et seulement si, il est projectivement birrégulier pour $\mathcal{D}|_J$. Cette condition s'écrit :

$$\det \begin{bmatrix} a_U(t_0) & -1 & b_U(t_0) \\ a'_U(t_0) & 0 & b'_U(t_0) \\ a''_U(t_0) & 0 & b''_U(t_0) \end{bmatrix} \neq 0.$$

ce qui équivaut à la condition :

$$\det \begin{bmatrix} a'_U(t_0) & b'_U(t_0) \\ a''_U(t_0) & b''_U(t_0) \end{bmatrix} = 0,$$

soit encore à la condition $(f'(t_0), f''(t_0))$ libre.

De manière analogue on démontre que $t_0 \in T$ est un paramètre projectivement birégulier pour \mathcal{D} si, et seulement si, $(g'(t_0), g''(t_0))$ est libre.

Si $t \in S \cap T$, les conditions $(f'(t_0), f''(t_0))$ libre, et $(g'(t_0), g''(t_0))$ libre, sont toutes deux équivalentes à ce que t_0 soit le paramètre d'un point projectivement birégulier.

Les notions de paramètre projectivement régulier et de paramètre projectivement birégulier étant intrinsèques, elles ne dépendent pas du repère \mathcal{R} .

c) Supposons que t_0 soit un paramètre affinement régulier mais non projectivement régulier. On peut supposer que \mathcal{D} est affinement régulière en restreignant éventuellement l'intervalle de définition I . D'après le Théorème VIII.2.2, en désignant par $t \mapsto C(t)$ l'enveloppe de \mathcal{D} , $C'(t_0) = 0$. Le paramètre t_0 est donc un paramètre stationnaire de l'enveloppe

Supposons que t_0 soit un paramètre projectivement régulier, mais non affinement régulier et non projectivement birégulier, et qu'il existe un intervalle J relativement ouvert dans I tel que pour tout $t \in J \setminus \{t_0\}$, le paramètre t soit affinement régulier. Nous reprenons les notations de la démonstration du Théorème VIII.2.4. Pour $t \in J$, les coordonnées $(x_C(t), y_C(t))$ du point C_t sont :

$$x_C(t) = -\frac{\begin{vmatrix} w(t) & v(t) \\ w'(t) & v'(t) \end{vmatrix}}{\delta(t)} \quad \text{et} \quad y_C(t) = -\frac{\begin{vmatrix} u(t) & w(t) \\ u'(t) & w'(t) \end{vmatrix}}{\delta(t)},$$

où :

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}.$$

Les déterminants $\begin{vmatrix} w(t_0) & v(t_0) \\ w'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} u(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & w'(t_0) \end{vmatrix}$ ne sont pas tous les deux nuls, car sinon, comme $\delta(t_0) = 0$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} u(t_0) & v(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & v'(t_0) & w'(t_0) \end{bmatrix},$$

ne serait pas de rang 2. On voit donc que l'enveloppe présente au voisinage de t_0 une branche infinie.

Pour tout $t \in J \setminus \{t_0\}$, le vecteur $(x_C(t), y_C(t))$ est colinéaire au vecteur $\left(\begin{vmatrix} w(t) & v(t) \\ w'(t) & v'(t) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u(t) & w(t) \\ u'(t) & w'(t) \end{vmatrix} \right)$; ce vecteur ayant pour limite, lorsque t tend vers t_0 , le vecteur non nul $\left(\begin{vmatrix} w(t_0) & v(t_0) \\ w'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & w'(t_0) \end{vmatrix} \right)$, nous en déduisons que l'enveloppe présente en t_0 une direction asymptotique d'équation (vectorielle) :

$$\begin{vmatrix} u(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & w'(t_0) \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} w(t_0) & v(t_0) \\ w'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} y = 0.$$

Comme $\delta(t_0) = 0$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u'(t_0) = \lambda u(t_0)$ et $v'(t_0) = \lambda v(t_0)$. On obtient :

$$\begin{vmatrix} u(t_0) & w(t_0) \\ u'(t_0) & w'(t_0) \end{vmatrix} = u(t_0) (w'(t_0) - \lambda w(t_0)),$$

et :

$$\begin{vmatrix} w(t_0) & v(t_0) \\ w'(t_0) & v'(t_0) \end{vmatrix} = v(t_0) (\lambda w(t_0) - w'(t_0)).$$

On a $\lambda w(t_0) - w'(t_0) \neq 0$, sinon le paramètre t_0 ne serait pas projectivement régulier. La direction asymptotique a donc pour équation :

$$u(t_0)x + v(t_0)y = 0.$$

En posant, pour tout $t \in J \setminus \{t_0\}$, $\Psi(t) = u(t_0)x_C(t) + v(t_0)y_C(t) + w(t_0)$, on obtient, comme dans la démonstration du Théorème VIII.2.4, l'égalité :

$$\delta(t)\Psi(t) = \begin{bmatrix} u(t_0) & u(t) & u'(t) \\ v(t_0) & v(t) & v'(t) \\ w(t_0) & w(t) & w'(t) \end{bmatrix}.$$

Un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de t_0 donne ici :

$$\delta(t)\Psi(t) = o(t^2),$$

puisque $\Delta_0 = 0$. On voit donc que si $D_0 = \begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) \\ u''(t_0) & v''(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\Psi(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$, et que par conséquent la droite \mathcal{D}_{t_0} est encore asymptote de l'enveloppe au point de paramètre t_0 .

Exercice 3 :

Soit $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\Psi(t) = 0$ si $t \leq 0$, et $\Psi(t) = e^{-1/t}$ si $t > 0$; vérifier que Ψ est de classe \mathcal{C}^∞ . On donne alors la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ définie dans \mathcal{R} par les équations $tx - y - \Psi(t) = 0$ ($t \in \mathbb{R}$).

a) Vérifier que la famille est affinement régulière, et donner son enveloppe.

b) Quels sont les paramètres projectivement biréguliers de la famille ? Que se passe-t-il au voisinage de $t = 1/2$? ■

On démontre facilement le fait que Ψ est de classe \mathcal{C}^∞ (voir exercice 3 du § V.4, et exercice 2 du §VI.3 du tome 2).

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ le paramètre t est affinement régulier et les coordonnées $(x_C(t), y_C(t))$ du point C_t sont solutions du système de Cramer :

$$\begin{aligned} tx - y - \Psi(t) &= 0 \\ x - \Psi'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Le point C_t a donc pour coordonnées :

$$x_C(t) = \Psi'(t) \quad y_C(t) = t\Psi'(t) - \Psi(t).$$

b) Le paramètre t est projectivement birégulier si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} t & -1 & -\Psi(t) \\ 1 & 0 & -\Psi'(t) \\ 0 & 0 & -\Psi''(t) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

ce qui équivaut à la condition : $\Psi''(t) \neq 0$. Les paramètres $t \leq 0$ sont donc tous non projectivement biréguliers. Pour $t > 0$ on a :

$$\Psi'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \quad \Psi''(t) = \frac{1-2t}{t^4} e^{-1/t} .$$

Le paramètre $t = 1/2$ est donc le seul paramètre > 0 non projectivement birégulier. On vérifie que pour tout $t > 0$:

$$x'_C(t) = \Psi''(t) , \quad y'_C(t) = t\Psi''(t) ,$$

et :

$$x''_C(t) = \Psi^{(3)}(t) , \quad y''_C(t) = \Psi''(t) + t\Psi^{(3)}(t) .$$

Pour $t = 1/2$, on a $\Psi''(t) = 0$, et :

$$\Psi^{(3)}(t) = \frac{6t^2 - 6t + 1}{t^6} e^{-1/t} = -32e^{-2} \neq 0 .$$

L'enveloppe présente donc en $t = 1/2$ un point de rebroussement de première espèce, la pente de la tangente étant $1/2$.

Exercice 4 :

Pour $t \neq 0$, on pose $\Psi(t) = e^{-1/t^2} \sin^2(1/t)$, et pour $t = 0$, $\Psi(0) = 0$. On justifiera que la fonction $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , et que toutes ses dérivées sont nulles en 0. On définit la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans \mathcal{R} par les équations :

$$\Psi'(t)x - y + \Psi(t) - t\Psi'(t) = 0 .$$

a) Quels sont les paramètres affinement réguliers (resp. projectivement réguliers) de la famille ?

b) Montrer que les enveloppes obtenues se prolongent en une courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ . Que se passe-t-il en le paramètre $t = 0$? ■

On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n(t, x, y)$ tel que pour tout $t \neq 0$:

$$\Psi^{(n)}(t) = \frac{P_n(t, \cos(1/t), \sin(1/t))}{t^{3n}} e^{-1/t^2} .$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Psi^{(n)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Cela suffit à prouver que Ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que toutes ses dérivées sont nulles en 0 (voir la résolution de problèmes analogues dans l'exercice 3 du § V.4, et l'exercice 2 du § VI.3 du tome 2).

a) Le paramètre t est affinement régulier si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \Psi'(t) & -1 \\ \Psi''(t) & 0 \end{vmatrix} = \Psi''(t) \neq 0 .$$

Le paramètre t est projectivement régulier si, et seulement si, la matrice :

$$\begin{bmatrix} \Psi'(t) & -1 & \Psi(t) - t\Psi'(t) \\ \Psi''(t) & 0 & -t\Psi''(t) \end{bmatrix} ,$$

est de rang 2. Cette matrice est de rang 2 si, et seulement si, sa deuxième ligne n'est pas nulle, c'est-à-dire si, et seulement si, $\Psi''(t) \neq 0$. On trouve donc le même ensemble de paramètres, qui ne contient pas 0 ; comme 0 est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de la fonction Ψ , c'est aussi (lemme de Rolle) un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de la fonction Ψ'' . C'est le seul point d'accumulation de cet ensemble, les autres points étant isolés ; en effet, la fonction Ψ'' est développable en série entière au voisinage de chaque $t_0 \neq 0$; si $t_0 \neq 0$ était point d'accumulation de l'ensemble des zéros de Ψ'' , cette fonction serait localement nulle au voisinage de t_0 , et nulle sur \mathbb{R}_+^* ou sur \mathbb{R}_-^* suivant que $t_0 > 0$ ou $t_0 < 0$, ce qui est évidemment faux.

b) Pour tout t tel que $\Psi''(t) \neq 0$, les coordonnées $(x_C(t), y_C(t))$ du point caractéristique sont les solutions du système de Cramer :

$$\begin{aligned} \Psi'(t)x - y + \Psi(t) - t\Psi'(t) &= 0 \\ \Psi''(t)x - t\Psi''(t) &= 0 . \end{aligned}$$

On trouve :

$$x_C(t) = t \quad \text{et} \quad y_C(t) = \Psi(t) .$$

Il est donc clair que l'enveloppe se prolonge en une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ définie sur \mathbb{R} , dont le support est le graphe de la fonction Ψ .

§ VIII.3 EXEMPLES D'ENVELOPPES DE DROITES

Exercice 1 :

|| Dans \mathcal{E} euclidien, soit \mathcal{P} la parabole d'équation :

($p > 0$ donné). On considère les cercles de \mathcal{C} passant par le foyer F de \mathcal{P} et tangents à \mathcal{P} . Soit \mathcal{F} la famille de ceux de ces cercles Γ qui recoupent \mathcal{P} en deux points M et N (autres que le point de contact de Γ avec \mathcal{P}). Quelle est l'enveloppe de la droite $\text{Dr}(M, N)$? ■

Nous considérerons que la parabole est la courbe paramétrée $t \mapsto (t^2/2p, t)$. Soit \mathcal{C} un cercle passant par le foyer F (de coordonnées $(p/2, 0)$) ; son équation est de la forme $x^2 + y^2 + ax + by - p^2/4 - ap/2 = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation au paramètre de l'intersection de \mathcal{C} et de la parabole s'écrit $P(t) = 0$, où P est le polynôme :

$$P(t) = \frac{t^4}{4p^2} + t^2 + \frac{a}{2p} t^2 + bt - \frac{p^2}{4} - a \frac{p}{2}.$$

Soit \mathcal{D} une droite passant par deux points distincts de la parabole, ou tangente à la parabole ; elle n'est pas parallèle à l'axe des x , donc son équation est de la forme $x = \alpha y + \beta$. L'équation au paramètre de son intersection avec la parabole est :

$$\frac{t^2}{2p} = \alpha t + \beta.$$

Le cercle \mathcal{C} passe par les intersections de \mathcal{D} avec la parabole, et est tangent à la parabole au point de paramètre t_0 si, et seulement si, le polynôme $\left(\frac{1}{2p} t^2 - \alpha t - \beta\right) (t - t_0)^2$ divise le polynôme P . Comme il y a égalité des degrés, cette condition est réalisée si, et seulement si :

$$(1) \quad \left(\frac{1}{2p} t^2 - \alpha t - \beta\right) (t - t_0)^2 = 2p \left(\frac{t^4}{4p^2} + t^2 + \frac{a}{2p} t^2 + bt - \frac{p^2}{4} - a \frac{p}{2}\right).$$

La droite \mathcal{D} d'équation $x = \alpha y + \beta$ étant donnée, si elle passe par les deux autres intersections avec la parabole d'un cercle tangent à la parabole, alors il existe des scalaires a, b, t_0 tels que l'égalité (1) soit vérifiée. Comme il y a égalité des coefficients de t^3 , nécessairement $t_0 = -\alpha p$. En égalant les autres coefficients on trouve les conditions nécessaires :

$$-3\alpha^2 p - 2\beta = 4p + 2a$$

$$-\alpha^3 p - 2\alpha\beta = 2b$$

$$2\alpha^2\beta = p + 2a.$$

La liaison affine sur les coefficients de l'équation du cercle (due au fait que le cercle passe par un point fixe) induit une liaison algébrique sur les coefficients de l'équation de la droite. Ici cette relation est simple :

$$-3\alpha^2 p - 2\beta - 2\alpha^2\beta = 3p \quad \text{d'où} \quad (\alpha^2 + 1)(3p + 2\beta)$$

L'équation de la droite \mathcal{D} est donc de la forme $x = \alpha y - 3p/2$; nous en déduisons que la droite \mathcal{D} passe toujours par le point de coordonnées $(-3p/2, 0)$; l'enveloppe de la famille de ces droites est donc réduite à ce point.

Exercice 2 :

Dans \mathcal{E} euclidien, on donne la lemniscate de Bernoulli \mathcal{L} , paramétrée dans \mathcal{R} par $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto f(t)$ de coordonnées :

$$x(t) = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}.$$

a) Montrer que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il passe en général deux tangentes à \mathcal{L} autres que la tangente en t_0 , par $f(t_0)$.

b) Trouver l'enveloppe de la droite qui passe par les points de contact de ces deux autres tangentes. ■

a) La tangente en t passe par le point de paramètre t_0 si, et seulement si :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & x'(t) \\ y(t) - y(t_0) & y'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition s'écrit aussi :

$$\begin{vmatrix} x(t_0) & x(t) & x'(t) \\ y(t_0) & y(t) & y'(t) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ posons $A(t) = t(1+t^2)$, $B(t) = t(1-t^2)$ et $\Delta(t) = 1+t^4$. La condition (1) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \frac{A(t_0)}{\Delta(t_0)} & \frac{A(t)}{\Delta(t)} & \frac{A'(t)}{\Delta(t)} - \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \frac{A(t)}{\Delta(t)} \\ \frac{B(t_0)}{\Delta(t_0)} & \frac{B(t)}{\Delta(t)} & \frac{B'(t)}{\Delta(t)} - \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \frac{B(t)}{\Delta(t)} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme Δ ne prend pas la valeur 0, cette condition équivaut à la condition :

$$\begin{vmatrix} A(t_0) & A(t) & A'(t) \\ B(t_0) & B(t) & B'(t) \\ \Delta(t_0) & \Delta(t) & \Delta'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient une condition équivalente en remplaçant A par $(A+B)/2 = t$ et B par $(A-B)/2 = t^3$. On obtient la condition $P_{t_0}(t) = 0$, où :

$$P_{t_0}(t) = \begin{vmatrix} t_0 & t & 1 \\ t_0^3 & t^3 & 3t^2 \\ 1+t_0^4 & 1+t^4 & 4t^3 \end{vmatrix}.$$

Le polynôme P_{t_0} est divisible par $(t-t_0)^2$, ce qui correspond au fait que la tangente au point de paramètre t_0 passe par le point $f(t_0)$. On obtient après calcul l'égalité :

$$P_{t_0}(t) = (t-t_0)^2 (t_0 t^4 + 2t_0^2 t^3 + 2t + t_0).$$

Nous poserons $Q_{t_0}(t) = t_0 t^4 + 2t_0^2 t^3 + 2t + t_0$. Les zéros de Q_{t_0} sont les paramètres t , éventuellement différents de t_0 , tels que la tangente en t passe par $f(t_0)$. Le cas $t_0 = 0$ est très particulier ; nous supposons dans la suite $t_0 \neq 0$. Montrons qu'alors le polynôme Q_{t_0} a exactement 2 zéros réels. Nous pouvons supposer $t_0 > 0$, car $Q_{-t_0}(-t) = -Q_{t_0}(t)$. On a $Q'_{t_0}(t) = 12t_0 t^2 + 12t_0^2 t = 12t_0 t(t+t_0)$; le polynôme $Q'_{t_0}(t)$ est donc strictement croissant sur l'intervalle $]-\infty, -t_0]$, strictement décroissant sur l'intervalle $[-t_0, 0]$, et strictement croissant sur l'intervalle $[0, +\infty[$; sa valeur en 0 étant 2, on voit que le polynôme $Q'_{t_0}(t)$ a un seul zéro α , $\alpha < -t_0$; la fonction Q_{t_0} est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$. La valeur de Q_{t_0} en -1 étant $-2(t_0^2 - t_0 + 1) < 0$, nous en déduisons que le polynôme Q_{t_0} a exactement deux zéros réels, ce qu'il fallait démontrer. Remarquons que ces deux zéros réels sont distincts, et distincts de t_0 , puisque si $t_0 > 0$, ces zéros sont < 0 .

b) On peut remarquer que :

$$Q_{t_0}(t) = (1+t^4) (t_0 + t_0^2 (x(t) - y(t)) + x(t) + y(t)).$$

Les paramètres t , différents de t_0 , tels que la tangente en t passe par $f(t_0)$ sont donc les paramètres de l'intersection de la lemniscate et de la droite \mathcal{D}_{t_0} d'équation :

$$(t_0^2 + 1)x + (1 - t_0^2)y + t_0 = 0.$$

La droite \mathcal{D}_{t_0} est donc la droite qui passe par les points de contact des tangentes à la lemniscate menées de $f(t_0)$.

Les coordonnées du point caractéristique de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}^*}$ sont les solutions du système de Cramer :

$$\begin{aligned} (t^2 + 1)x + (1 - t^2)y + t &= 0 \\ 2tx - 2ty + 1 &= 0. \end{aligned}$$

On obtient facilement, pour tout $t \neq 0$:

$$\begin{aligned}x_C(t) &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} + t \right) \\y_C(t) &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} - t \right) .\end{aligned}$$

Le point caractéristique décrit donc une hyperbole d'équation cartésienne :

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4} .$$

Exercice 3 :

Dans \mathcal{E} euclidien on donne l'arc \mathcal{C} de cardioïde défini par l'équation polaire $r = 1 + \cos \theta$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.

a) Vérifier que \mathcal{C} est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ de \mathcal{E} .

b) Montrer que la caustique par réflexion de \mathcal{C} depuis O est une néphroïde. ■

Nous identifierons l'espace euclidien \mathcal{E} au \mathbb{R} -espace euclidien \mathbb{C} .

a) L'arc \mathcal{C} est l'image de l'application $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto (1 + \cos \theta) e^{i\theta}$. Cette application est de classe \mathcal{C}^∞ . Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, $1 + \cos \theta > 0$; θ est donc l'argument du nombre complexe $f(\theta)$; cela prouve que f est injective. Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a :

$$f(\theta) = \frac{1}{2} (2e^{i\theta} + e^{2i\theta} + 1) ,$$

d'où :

$$f'(\theta) = i (e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = 2i e^{3i\theta/2} \cos(\theta/2) .$$

Comme pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\cos(\theta/2) > 0$, on en déduit que f est régulière; c'est donc une immersion. Pour démontrer que f est un plongement, nous pouvons utiliser le lemme démontré dans la résolution de l'exercice 5 du §VII.2. L'application f a ici une limite quand θ tend vers π par valeurs inférieures, ou vers $-\pi$ par valeurs supérieures, qui est 0, point qui n'est pas dans l'image de f ; nous pouvons en déduire que f est un plongement de classe \mathcal{C}^∞ , et que son support est par conséquent une variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ .

b) Au point de paramètre $\theta \in]-\pi, \pi[$, une mesure de l'angle polaire de la normale est $3\theta/2$; une mesure de l'angle polaire de la droite \mathcal{D}_θ , symétrique de la droite $\text{Dr}(O, f(\theta))$ par rapport à la normale est donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha + \theta = 3\theta$, soit $\alpha = 2\theta$. La droite \mathcal{D}_θ est donc la droite qui passe par $f(\theta)$ et qui est dirigée par $e^{2i\theta}$. Une équation de \mathcal{D}_θ s'écrit :

$$\sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y = (1 + \cos\theta)(\sin(2\theta)\cos\theta - \cos(2\theta)\sin\theta),$$

soit :

$$\sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y = \sin\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Les coordonnées (x, y) du point caractéristique sont les solutions du système de Cramer :

$$\begin{aligned}\cos(2\theta)x + \sin(2\theta)y &= \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos(2\theta)) \\ -\sin(2\theta)x + \cos(2\theta)y &= -\sin\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta).\end{aligned}$$

Ces deux équations réelles sont équivalentes à l'équation complexe :

$$\begin{aligned}e^{-2i\theta}(x + iy) &= \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos(2\theta)) - i\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cos\theta - i\sin\theta + \frac{1}{2}e^{-2i\theta},\end{aligned}$$

qui s'écrit :

$$x + iy = \frac{1}{4}e^{2i\theta}(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} + 2e^{-2i\theta}).$$

On trouve finalement :

$$x + iy = \frac{1}{4}(3e^{i\theta} - e^{3i\theta}) + \frac{1}{2} = \frac{i}{4}(3e^{i(\theta-\pi/2)} + e^{3i(\theta-\pi/2)}) + \frac{1}{2}.$$

On reconnaît ci-dessus la représentation paramétrique d'une néphroïde (cf. Exemple 3).

Exercice 11 :

- || Dans \mathcal{E} euclidien, on donne deux droites Δ_1 et Δ_2 non orthogonales, sécantes en un point O . Deux points $A_1 \in \Delta_1$ et $A_2 \in \Delta_2$ se déplacent de façon que $\|\overrightarrow{A_1A_2}\|$ reste constant, égal à $l > 0$.
- || a) Soit I le point commun aux normales à Δ_1 et

et A_2 . Montrer que la projection orthogonale C de I sur $\text{Dr}(A_1, A_2)$ est le point caractéristique de la droite $\text{Dr}(A_1, A_2)$.
 b) Soit Γ le cercle de diamètre OI : vérifier que son rayon est constant. Notons \mathcal{L} la droite diamétrale de Γ parallèle à $\overrightarrow{A_1 A_2}$. Prouver que l'enveloppe de \mathcal{L} est une astroïde et que le point caractéristique J de \mathcal{L} est la projection orthogonale de I sur \mathcal{L} . En déduire, en anticipant sur le chapitre IX, que l'enveloppe de $\text{Dr}(A_1, A_2)$ est une courbe *parallèle d'astroïde*. ■

Nous noterons \vec{u} le vecteur unitaire tel que $\overrightarrow{A_1 A_2} = l\vec{u}$. L'espace \mathcal{E} sera supposé orienté, et le produit mixte dans $\vec{\mathcal{E}}$ sera noté φ . Nous supposons que les mouvements de A_1 et de A_2 sont paramétrés par t de manière \mathcal{C}^k , $k \geq 2$, et que l'arc $t \mapsto \vec{u}(t)$ est régulier.

a) Une équation de la droite $\text{Dr}(A_1, A_2)$ est :

$$\varphi(\overrightarrow{OM}, \vec{u}) - \varphi(\overrightarrow{OA_1}, \vec{u}) = 0.$$

Le point caractéristique C est donc tel que :

$$\varphi(\overrightarrow{OC}, \vec{u}') - \varphi(\overrightarrow{OA_1}, \vec{u}') - \varphi(A_1', \vec{u}) = 0,$$

soit :

$$\varphi(\overrightarrow{A_1 C}, \vec{u}') = \varphi(A_1', \vec{u}).$$

Posons $C = A_1 + \lambda \vec{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$; on obtient :

$$\lambda \varphi(\vec{u}, \vec{u}') = \varphi(A_1', \vec{u}).$$

Le point caractéristique est donc le point C tel que :

$$C = A_1 + \frac{\varphi(A_1', \vec{u})}{\varphi(\vec{u}, \vec{u}')} \vec{u}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $M_\lambda = A_1 + \lambda \vec{u}$. Le scalaire λ étant fixé, la vitesse du point M_λ est $A_1' + \lambda \vec{u}'$, en général non nulle. La normale \mathcal{N}_λ à la courbe décrite par M_λ a pour équation (en M) :

$$(\overrightarrow{A_1 M} - \lambda \vec{u} \mid A_1' + \lambda \vec{u}') = 0.$$

Comme \vec{u} est un vecteur unitaire, il est toujours orthogonal à \vec{u}' ; il n'y a donc pas de terme en λ^2 dans l'équation de \mathcal{N}_λ ; la famille $(\mathcal{N}_\lambda$

conséquent un faisceau linéaire de droites. La normale \mathcal{N}_0 est la normale à Δ_1 en A_1 , et la normale \mathcal{N}_l est la normale à Δ_2 en A_2 , droites qui se coupent en I ; on voit donc que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la droite \mathcal{N}_λ passe par I .

Le paramètre t étant maintenant fixé, égal à t_0 , le point $C(t_0)$ est la position à l'instant t_0 du point M_{λ_0} , où $\lambda_0 = \frac{\varphi(A'_1, \vec{u})}{\varphi(\vec{u}, \vec{u}')}.$ La vitesse à l'instant t_0 de ce point M_{λ_0} est $A'_1 + \frac{\varphi(A'_1, \vec{u})}{\varphi(\vec{u}, \vec{u}')} \vec{u}'$. Ce vecteur est colinéaire à \vec{u} puisque :

$$\varphi\left(A'_1 + \frac{\varphi(A'_1, \vec{u})}{\varphi(\vec{u}, \vec{u}')} \vec{u}', \vec{u}\right) = \frac{\varphi(A'_1, \vec{u})}{\varphi(\vec{u}, \vec{u}')} \varphi(\vec{u}', \vec{u}) + \varphi(A'_1, \vec{u}) = 0.$$

La perpendiculaire à $\text{Dr}(A_1, A_2)$ menée de $C(t_0)$ est donc la normale \mathcal{N}_{λ_0} ; elle passe par I . Cela prouve que $C(t_0)$ est la projection orthogonale de I sur la droite $\text{Dr}(A_1, A_2)$.

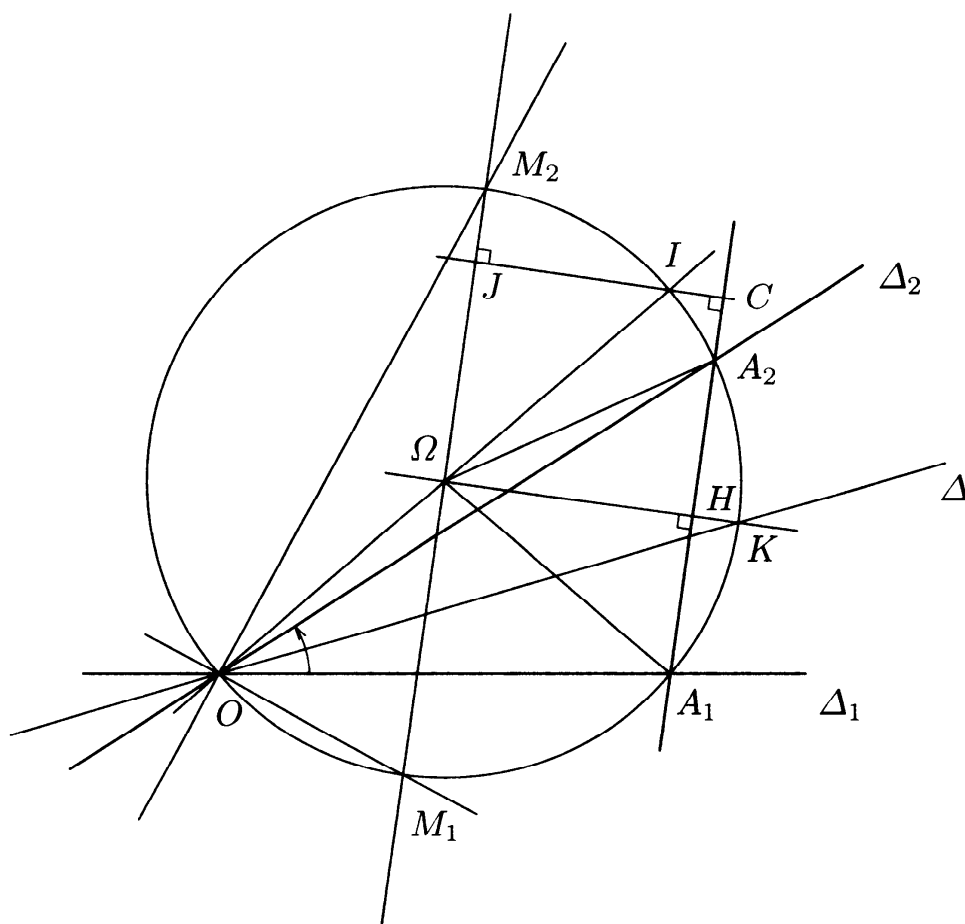
b) Soit Ω le centre de Γ , c'est-à-dire le milieu de (O, I) . Par définition de I , le cercle Γ est aussi le cercle circonscrit au triangle (O, A_1, A_2) . Le triangle (Ω, A_1, A_2) est isocèle en Ω , et si α est une mesure modulo π de l'angle orienté de droites $(\widehat{\Delta_1, \Delta_2})$, 2α est une mesure modulo 2π de l'angle orienté des vecteurs $(\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega A_2})$. En notant R le rayon du cercle Γ , on trouve :

$$2R |\sin \alpha| = l.$$

Le rayon de Γ est donc fixe.

Soit Δ la bissectrice intérieure en O dans le triangle (O, A_1, A_2) ; elle recoupe Γ en K . Le point K est l'un des milieux de l'arc (A_1, A_2) sur Γ ; il est donc sur la médiatrice de (A_1, A_2) , droite qui passe par Ω . La droite \mathcal{L} est donc la perpendiculaire en Ω à $\overrightarrow{\Omega K}$; elle recoupe le cercle Γ en 2 points, M_1 et M_2 ; on suppose que $\overrightarrow{\Omega M_2}$ est directement perpendiculaire à $\overrightarrow{\Omega K}$. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, on voit que l'angle orienté des droites $(\Delta, \text{Dr}(O, M_2))$ a pour mesure $\pi/4$, et que l'angle orienté des droites $(\Delta, \text{Dr}(O, M_1))$ a pour mesure $-\pi/4$. Les points M_1 et M_2 se déplacent donc sur des droites fixes que nous noterons respectivement Δ'_1 et Δ'_2 . Les droites Δ'_1 et Δ'_2 se coupent orthogonalement en O , et comme la distance $\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$ est fixe, égale à $2R$, on voit que l'enveloppe de \mathcal{L} est une astroïde (cf. Exercice 10).

La normale en M_1 à la droite Δ'_1 , et la normale en M_2 à la droite Δ'_2 , se coupent en I puisque les points M_1 et M_2 sont sur le cercle Γ de diamètre (O, I) . Ce qui a été démontré dans le *a)* est vrai pour l'enveloppe de la droite $\text{Dr}(M_1, M_2)$: le point caractéristique J est donc la projection orthogonale de I sur la droite $\text{Dr}(M_1, M_2)$. Il est géométriquement clair que $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{\Omega H}$, où H est le milieu de (A_1, A_2) , et que par conséquent ce vecteur est de longueur fixe, égale à $R \cos \alpha$. Le vecteur \overrightarrow{JC} étant normal à l'astroïde décrite par J , le courbe décrite par C est une parallèle d'astroïde.



Chapitre IX

COURBES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

§ IX.1 FONCTIONS ANGULAIRES

Exercice 2 :

Soit I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $s : I \rightarrow [-1, 1]$ une fonction continue.

a) Montrer qu'il existe au moins une fonction continue $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$(*) \quad (\forall t \in I) \quad s(t) = \sin \varphi(t).$$

Si φ est une de ces fonctions, les fonctions $\varphi + 2k\pi$ et $-\varphi + (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, conviennent aussi. Montrer par un exemple qu'en général on n'obtient pas ainsi toutes les fonctions qui conviennent.

b) Si s est de classe \mathcal{C}^1 , peut-on trouver φ de classe \mathcal{C}^1 qui vérifie $(*)$? ■

a) La fonction $t \mapsto \operatorname{Arcsin}(s(t))$ convient.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$\sin t = \cos(t - \pi/2) = \cos(|t - \pi/2|) = \sin(|t - \pi/2| + \pi/2).$$

On voit donc que si la fonction s est la fonction \sin , on peut prendre la fonction $\varphi : t \mapsto t$, ou encore la fonction $t \mapsto |t - \pi/2| + \pi/2$; cette deuxième fonction n'est pas de la forme $\varphi + 2k\pi$ ou $-\varphi + (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

b) Considérons la fonction $s : t \mapsto 1 - |t|^\alpha$, où $\alpha \in]1, 2[$, définie sur un intervalle ouvert I voisinage de 0, tel que pour tout $t \in I$, $|s(t)| < 1$. Comme $\alpha > 1$, la fonction s est de classe \mathcal{C}^1 sur I . Su

$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que pour tout $t \in I$, $\sin(\varphi(t)) = s(t)$. Pour tout $t > 0$, $t \in I$, on a :

$$|\varphi'(t)| = \frac{|s'(t)|}{\sqrt{1-s^2(t)}} = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\sqrt{2t^\alpha - t^{2\alpha}}}.$$

On en déduit :

$$|\varphi'(t)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} t^{\alpha/2-1}.$$

Comme on a choisi $\alpha < 2$, cela implique $|\varphi'(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que φ est de classe \mathcal{C}^1 .

L'hypothèse : s de classe \mathcal{C}^1 , est donc insuffisante pour assurer l'existence d'une fonction φ de classe \mathcal{C}^1 .

Exercice 3 :

|| Dans \mathbb{R}^2 affine euclidien canonique, on donne la courbe paramétrée, de classe \mathcal{C}^∞ , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que pour tout $t > 0$, $f(t) = (0, e^{-1/t^2})$, pour tout $t < 0$, $f(t) = (e^{-1/t^2}, 0)$ et $f(0) = (0, 0)$. Expliquer pourquoi f ne peut pas être définie en coordonnées polaires dans le repère canonique de \mathbb{R}^2 . ■

Supposons que $t \mapsto r(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ soient des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = r(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Pour tout $t \neq 0$, on a nécessairement $|r(t)| = e^{-1/t^2}$; donc pour tout $t > 0$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t) = \pi/2 + k\pi$, la fonction $t \mapsto k$ étant constante car continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$; de même, pour tout $t < 0$, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(t) = h\pi$, la fonction $t \mapsto h$ étant constante. Il est donc clair que la fonction θ ne peut pas être continue en 0.

Exercices 6 et 7 :

|| Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$ un repère orthonormal direct de \mathcal{E} . Construire les courbes définies en coordonnées polaires par les équations suivantes dans \mathcal{R} :

6e) $r = \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta/2}$

7c) $r = \frac{\sin \theta}{2\theta - 3 \cos \theta}$. ■

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, le point de coordonnées $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ dans le repère \mathcal{R} sera noté $f(\theta)$. Les coordonnées dans \mathcal{R} seront notées (x, y) .

6e) La fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ est ici 4π -périodique. L'arc paramétré f est donc 4π -périodique. On vérifie que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ pour lequel $r(\theta)$ est défini, on a :

$$r(2\pi - \theta) = \cos \theta + \frac{1}{\sin(\pi - \theta/2)} = \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta/2} = r(\theta).$$

L'arc paramétré f présente donc une symétrie par rapport à l'axe des x , i.e. la droite $O + \mathbb{R}e_1$. Nous étudierons l'arc f sur l'intervalle $I = [-\pi, \pi]$; nous en déduirons le comportement de f sur l'intervalle $[2\pi - \pi, 2\pi + \pi] = [\pi, 3\pi]$, puis sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, de longueur une période. Le point $f(\theta)$ est défini pour tout $\theta \in I \setminus \{0\}$, ensemble que nous noterons ω .

Pour tout $\theta \in \omega$ on a :

$$\begin{aligned} r'(\theta) &= -\sin \theta - \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = -2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) - \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = \\ &= -\frac{\cos(\theta/2)}{2 \sin^2(\theta/2)} (4 \sin^3(\theta/2) + 1). \end{aligned}$$

Posons $\alpha = -2 \operatorname{Arc} \sin(4^{-1/3})$; on constate :

$$r(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2) + \frac{1}{\sin(\alpha/2)} = 1 + \frac{2/4 + 1}{\sin(\alpha/2)} = 1 - \frac{3}{2^{1/3}} < 0.$$

Une valeur approchée à 10^{-2} près de α est : $-1,36$; une valeur approchée à 10^{-2} près de $r(\alpha)$ est : $-1,38$. On en déduit facilement le tableau de variations de r :

θ	$-\pi$	α	0	π
r	-2	$r(\alpha)$	$+\infty$	0
r'	0	$+$	0	$-$
			$-$	0

On remarque que le point de paramètre π est stationnaire; la tangente au point de paramètre π , passage à l'origine, a pour angle polaire π : c'est la droite $O + \mathbb{R}e_1$.

Branches infinies.

Pour tout $\theta \in \omega$, on a :

$$y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = \sin \theta \cos \theta + 2 \cos(\theta/2) .$$

Il est donc clair que l'arc f présente une asymptote d'équation $y = 2$ quand θ tend vers 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures.

Points multiples (relatifs à l'intervalle $]-\pi, 3\pi]$).

On cherche deux réels θ_1 et θ_2 , $\theta_1 < \theta_2$, dans $]-\pi, 3\pi]$, tels que $f(\theta_1) = f(\theta_2)$. Il y a trois possibilités.

Soit $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$ et $r(\theta_1) = r(\theta_2)$; cette condition sur θ_1 s'écrit :

$$\cos \theta_1 + \frac{1}{\sin(\theta_1/2)} = \cos \theta_1 - \frac{1}{\sin(\theta_1/2)} .$$

Il n'y a donc pas de solutions de ce type.

Soit $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ et $r(\theta_1) = -r(\theta_2)$; cette condition sur θ_1 s'écrit :

$$\cos \theta_1 + \frac{1}{\sin(\theta_1/2)} = \cos \theta_1 - \frac{1}{\cos(\theta_1/2)} .$$

Elle est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier k tel que :

$$-\pi < \theta_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3\pi .$$

Les possibilités pour k sont : $k = 0$ et alors $(\theta_1, \theta_2) = (-\pi/2, \pi/2)$, ou $k = 1$ et alors $(\theta_1, \theta_2) = (3\pi/2, 5\pi/2) = (2\pi - \pi/2, 2\pi + \pi/2)$. On trouve donc deux points doubles symétriques par rapport à l'axe de symétrie.

Soit $\theta_2 = \theta_1 + 3\pi$ et $r(\theta_1) = -r(\theta_2)$; cette condition sur θ_1 s'écrit :

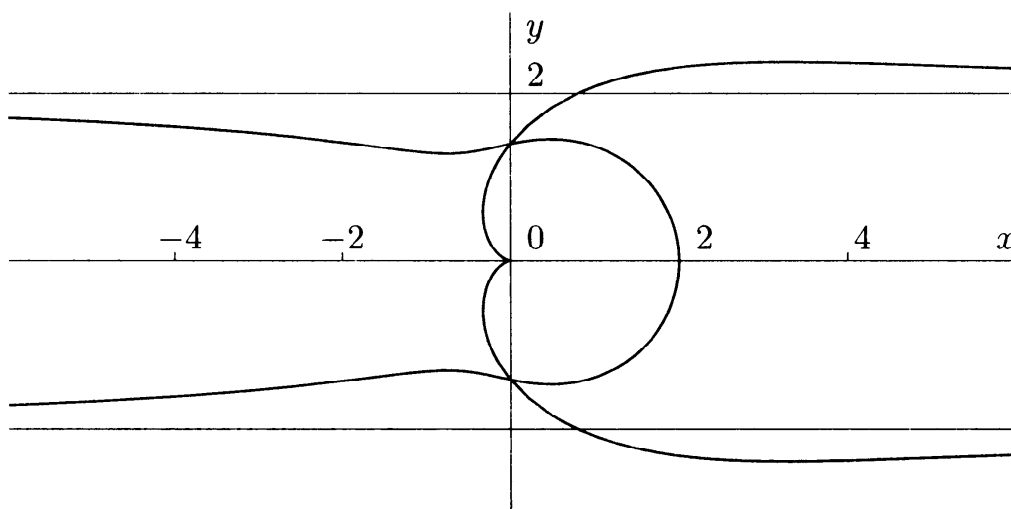
$$\cos \theta_1 + \frac{1}{\sin(\theta_1/2)} = \cos \theta_1 + \frac{1}{\cos(\theta_1/2)} .$$

Elle est vérifiée si, et seulement si, il existe un entier k tel que :

$$-\pi < \theta_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \theta_2 = 3\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3\pi .$$

Il n'y a pas de solutions pour k , donc pas d'autres points doubles que ceux précédemment trouvés.

On obtient la représentation graphique suivante :



Remarquons enfin qu'on peut paramétrer rationnellement cette courbe en posant $t = \cotg(\theta/4)$, où θ décrit $]0, 4\pi[\setminus \{2\pi\}$. Cette courbe est donc a fortiori algébrique.

7c) Définition, asymptote.

La fonction r est définie en tout θ tel que $2\theta \neq 3 \cos \theta$. Démontrons que l'équation $2\theta = 3 \cos \theta$ possède sur \mathbb{R} une unique solution, et que cette solution appartient à l'intervalle $]0, \pi/2[$. La fonction $\varphi : \theta \mapsto 2\theta - 3 \cos \theta$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, sa valeur en 0 est -3 , sa valeur en $\pi/2$ est π ; elle a donc dans $[0, \pi/2]$ un zéro unique (noté α). La fonction φ n'a pas de zéros $> \pi/2$; en effet, si $\theta > \pi/2$, $2\theta - 3 \cos \theta > \pi - 3 > 0$. La fonction φ n'a pas de zéros < 0 ; en effet, si $\theta \in [-\pi/2, 0[$, alors $2\theta < 0 \leq 3 \cos \theta$, et si $\theta < -\pi/2$, alors $2\theta - 3 \cos \theta < -\pi + 3 < 0$. La fonction r est donc définie sur l'ouvert $\omega = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$, et elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur cet ouvert. Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est : 0,91. Au voisinage du paramètre α , on a la relation :

$$2\theta - 3 \cos \theta \sim (\theta - \alpha)(2 + 3 \sin \alpha),$$

nous en déduisons :

$$r(\theta) \sin(\theta - \alpha) \sim \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\theta - \alpha} \frac{\sin \alpha}{2 + 3 \sin \alpha},$$

et par conséquent :

$$r(\theta) \sin(\theta - \alpha) \xrightarrow{\theta \rightarrow \alpha} \frac{\sin \alpha}{2 + 3 \sin \alpha}.$$

Une valeur approchée à 10^{-3} près de cette limite est 0,181. Le graphe de f présente donc au voisinage du paramètre α une asymptote d'équation :

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2 + 3 \cos \alpha}.$$

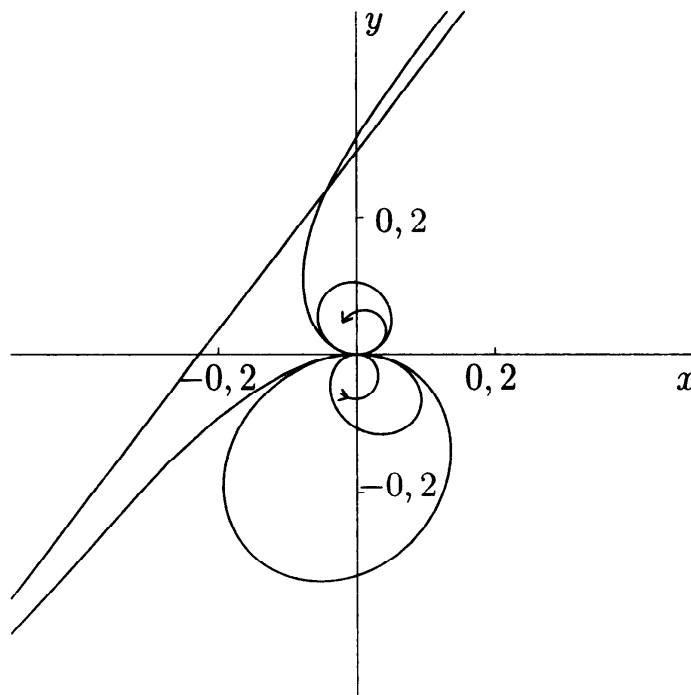
Point limite.

L'origine est point limite de f quand θ tend vers $-\infty$ et quand θ tend vers $+\infty$. On observe un passage à l'origine en tout paramètre $\theta \in \pi\mathbb{Z}$; la tangente en ces passages à l'origine est évidemment la droite $O + \mathbb{R}e_1$. On observe que pour tout $t \in \omega$ on a :

$$y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{2\theta - 3 \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\varphi(\theta)}.$$

Le point $f(\theta)$ est donc situé dans le demi-plan $y \geq 0$ pour toutes les valeurs $\theta > \alpha$, et dans le demi-plan $y \leq 0$ pour toutes les valeurs $\theta < \alpha$.

On obtient la représentation graphique suivante :



Remarquons que comme la courbe coupe une infinité de fois la droite Oy , elle n'est certainement pas algébrique.

Points doubles.

Montrons qu'il n'y a pas de point double différent de l'origine. Le point de paramètre θ est point double si, et seulement si,

- soit il existe $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $r(\theta) = r(\theta + 2k\pi)$,
- soit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $r(\theta) = -r(\theta + (2k+1)\pi)$.

La première condition équivaut à :

$$\frac{\sin \theta}{2\theta - 3 \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{2\theta + 4k\pi - 3 \cos \theta},$$

ce qui est impossible, sauf si $\sin \theta = 0$.

La deuxième condition équivaut à :

$$\frac{\sin \theta}{2\theta - 3 \cos \theta} = -\frac{-\sin \theta}{2\theta + 4k\pi + 2\pi + 3 \cos \theta},$$

ce qui, en supposant $\sin \theta \neq 0$, ne peut être réalisé que si :

$$-3 \cos \theta = (2k + 1)\pi;$$

ceci est aussi impossible, car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|(2k + 1)\pi| \geq \pi > 3$. La courbe n'a donc pas de point double différent de l'origine.

Exercice 9 (Quartique de Loriga) :

Avec les notations de l'exercice 6, soit \mathcal{L} la courbe d'équation polaire dans \mathcal{R} : (1) $r^4 - 2r^3 \cos 3\theta + r^2 - 1 = 0$.

a) Donner une équation cartésienne de \mathcal{L} dans \mathcal{R} .

b) Trouver un triangle équilatéral $\{A_1, A_2, A_3\}$ de centre O tel

que \mathcal{L} soit définie par l'équation (2) : $\frac{3}{r^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i^2}$,

avec $r(M) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $r_i(M) = \|\overrightarrow{A_iM}\|$ pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

c) On pose $\Phi = \frac{1}{r}$ et $X = \Phi^2$. Montrer que les points d'inflexion de \mathcal{L} sont déduits des paramètres θ tels que $F(X) = 0$, où $F \in \mathbb{Z}[T]$ est un polynôme normalisé de degré 4 à préciser.

d) En déduire que \mathcal{L} a six points d'inflexion, sommets de deux triangles équilatéraux de centre O . Tracer \mathcal{L} . ■

a) Le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans le repère \mathcal{R} est dans \mathcal{L} si, et seulement si, il existe deux réels r et θ tels que :

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{et} \quad r^4 - 2r^3 \cos 3\theta + r^2 - 1 = 0.$$

On remarque que $r^3 \cos 3\theta$ est la partie réelle de z^3 . Le point M d'affixe z est donc dans \mathcal{L} si, et seulement si :

$$(3) \quad z^2 \bar{z}^2 - (z^3 + \bar{z}^3) + z \bar{z} - 1 = 0.$$

En posant $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient une équation cartésienne de \mathcal{L} dans le repère \mathcal{R} :

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

b) Soit (A_1, A_2, A_3) trois points de \mathcal{E} qui forment un triangle équilatéral de centre O . Soient (z_1, z_2, z_3) les affixes de ces points; notons σ_1 (resp. σ_2) la somme (resp. la somme des doubles produits) de ces complexes, on a $\sigma_1 = 0$ et $\sigma_2 = 0$; d'autre part $S_2 = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 0$, et si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, alors $z_i z_j = z_k^2$. On notera $a = |z_i|$, pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. Soit $M \in \mathcal{E}$ d'affixe z , on a :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i^2(M)} = \frac{r_3^2 r_2^2 + r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2}{r_1^2 r_2^2 r_3^2}.$$

Si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, comme, $r_i^2 r_j^2 = |(z - z_i)(z - z_j)|^2$, et que :

$$(z - z_i)(z - z_j) = z^2 + z_k z - z_k^2.$$

on a :

$$\begin{aligned} r_i^2 r_j^2 &= (z^2 + z_k z - z_k^2)(\bar{z}^2 + \bar{z}_k \bar{z} - \bar{z}_k^2) = \\ &= z^2 \bar{z}^2 + \bar{z}_k z^2 \bar{z} - \bar{z}_k^2 z^2 + z_k z \bar{z}^2 + a^2 z \bar{z} - a^2 \bar{z}_k z - \bar{z}_k^2 \bar{z}^2 - a^2 \bar{z}_k \bar{z} + a^4. \end{aligned}$$

D'après les remarques précédentes, la somme de ces termes est :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} r_i^2 r_j^2 = 3(z^2 \bar{z}^2 + a^2 z \bar{z} + a^4).$$

Comme d'autre part :

$$\begin{aligned} r_1^2 r_2^2 r_3^2 &= |(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)|^2 = |z^3 - z_1^3|^2 = \\ &= (z^3 - z_1^3)(\bar{z}^3 - \bar{z}_1^3) = z^3 \bar{z}^3 - (z_1^3 \bar{z}^3 + \bar{z}_1^3 z^3) + a^6, \end{aligned}$$

la condition (2) $\frac{3}{r^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i^2}$ s'écrit :

$$z^3 \bar{z}^3 - (z_1^3 \bar{z}^3 + \bar{z}_1^3 z^3) + a^6 = z \bar{z} (z^2 \bar{z}^2 + a^2 z \bar{z} + a^4),$$

soit encore :

$$a^2 z^2 \bar{z}^2 + (z_1^3 \bar{z}^3 + \bar{z}_1^3 z^3) + a^4 z \bar{z} - a^6 = 0.$$

Si $z_1 = -1$, donc $a = 1$, cette condition coïncide avec la condition (3) (équation cartésienne de \mathcal{L}). Le triangle équilatéral (A_1, A_2, A_3) , formé des points dont les affixes sont $(-1, -j, -j^2)$ vérifie donc la condition de l'énoncé.

c) Pour étudier les inflexions de cette quartique, démontrons d'abord qu'elle est le support d'une courbe en polaires définie par une condition de la forme $r = \varphi(\theta)$, où $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Remarquons d'abord que le couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifie la condition (1) de l'énoncé si, et seulement si, le couple $(-r, \theta + \pi)$ vérifie la condition (1). On remarque aussi que \mathcal{L} ne passe pas par O . Le point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est donc dans \mathcal{L} si, et seulement si, il existe un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $z = r e^{i\theta}$ et vérifiant (1). Cette condition s'écrit :

$$2 \cos 3\theta = \frac{r^4 + r^2 - 1}{r^3}.$$

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto r + \frac{1}{r} - \frac{1}{r^3}$. Pour tout $r > 0$ on a $g'(r) = 1 - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{r^4}$, donc $g'(r) = \frac{r^4 - r^2 + 3}{r^4} > 0$. On voit facilement que la fonction g est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$; nous noterons f sa réciproque. La courbe \mathcal{L} apparaît comme le support de la courbe en polaires définie par la relation $r = \varphi(\theta)$, où φ est l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\theta \mapsto f(2 \cos 3\theta)$. La fonction φ est 2π -périodique, donc 2π est une période de l'arc. D'autre part, on voit que le support est invariant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.

Soit $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $\theta \mapsto \frac{1}{\varphi(\theta)}$. Par définition on a l'égalité :

$$(a) \quad \frac{1}{\Phi} + \Phi - \Phi^3 = 2 \cos 3\theta,$$

d'où en dérivant :

$$(b) \quad \Phi' \left(-\frac{1}{\Phi^2} + 1 - 3\Phi^2 \right) = -6 \sin 3\theta,$$

et :

$$(c) \quad \Phi'' \left(-\frac{1}{\Phi^2} + 1 - 3\Phi^2 \right) + \Phi'^2 \left(\frac{2}{\Phi^3} - 6\Phi \right) = -18 \cos 3\theta.$$

En multipliant (c) par $\left(-\frac{1}{\Phi^2} + 1 - 3\Phi^2 \right)^2$, et en utilisant (b) (élevée au carré) on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi'' \left(-\frac{1}{\Phi^2} + 1 - 3\Phi^2 \right)^3 + 36 \sin^2 3\theta \left(\frac{2}{\Phi^3} - 6\Phi \right) &= \\ &= -18 \left(-\frac{1}{\Phi^2} + 1 - 3\Phi^2 \right)^2 \cos^2 3\theta \end{aligned}$$

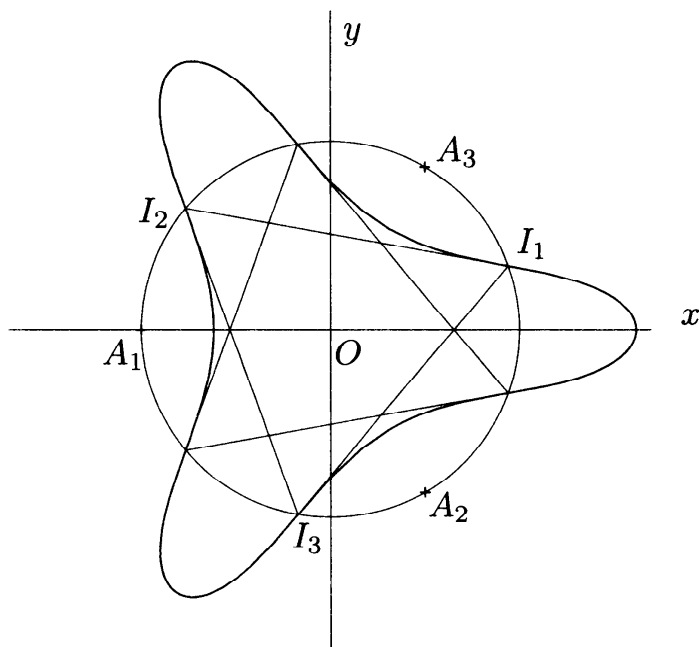
En utilisant (a), on peut obtenir la valeur de Φ'' en fonction de Φ , puis l'égalité :

$$\Phi'' + \Phi = 8\Phi(1 - \Phi^2) \frac{9\Phi^6 + 17\Phi^4 + 2\Phi^2 - 1}{(1 - \Phi^2 + 3\Phi^4)^3}.$$

On remarque que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{\Phi} + \Phi - \Phi^3 = 2 \cos 3\theta \leq 2$; comme $2 + 1/2 - 1/8 > 2$, on en déduit $\Phi > 1/2$, et par conséquent :

$$9\Phi^6 + 17\Phi^4 + 2\Phi^2 - 1 > \frac{9}{64} + \frac{17}{16} + \frac{2}{4} - 1 > 0.$$

Les points d'inflexion de la courbe sont donc les points de paramètre θ tels que $\Phi(\theta) = 1$, c'est-à-dire les points d'intersection de la quartique avec le cercle de centre O et de rayon 1. Ce sont les points de paramètre θ tels que : $2 \cos 3\theta = 1 + 1 - 1 = 1$, donc $3\theta \in \pi/3 + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $3\theta \in -\pi/3 + 2\pi\mathbb{Z}$. L'arc paramétré étant 2π -périodique, on voit qu'il y a 6 points d'inflexion formant deux triangles équilatéraux symétriques par rapport à l'axe des x . En utilisant l'équation polaire $r = g^{-1}(2 \cos 3\theta)$, on trouve la représentation graphique suivante :



La figure suggère que les côtés des triangles équilatéraux dirigent les tangentes d'inflexion, ce qui est vrai, comme on le vérifie par le calcul. En effet, si $\Phi(\theta) = 1$, comme $\Phi' \left(-\frac{1}{\Phi} + 1 - 3\Phi^2 \right) = -6 \sin 3\theta$, on a $\Phi'(\theta) = 2 \sin 3\theta$, et :

$$\text{tg}(V) = \frac{r}{r'} = -\frac{\Phi}{\Phi'} = -\frac{1}{2 \sin 3\theta}.$$

Pour $\theta = \pi/9$, on trouve $\operatorname{tg} V = -1/\sqrt{3}$ d'où $V = -\pi/6 \bmod \pi$. Comme O est sur la bissectrice intérieure issue de I_1 dans le triangle équilatéral $I_1 I_2 I_3$, il est géométriquement clair que la tangente au point I_1 de paramètre $\pi/9$ contient le segment $[I_1, I_2]$, où I_2 est le point de paramètre $\pi/9 + 2\pi/3$. En utilisant l'invariance de la quartique par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$, et par la symétrie d'axe Ox , on obtient des résultats analogues pour les autres tangentes d'inflexion.

§ IX.2 LONGUEUR D'UNE COURBE

Exercice 1 :

|| Dans \mathbb{R}^2 on considère la courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ : $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$ ($R > 0$), mais on munit \mathbb{R}^2 de la norme $(x, y) \mapsto \operatorname{Max}(|x|, |y|)$. Calculer la longueur $L(f)$. ■

On peut appliquer l'égalité (1) du Théorème IX.2.1. On obtient :

$$L(f) = R \int_0^{2\pi} \operatorname{Max}(|\sin t|, |\cos t|) \, dt.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \operatorname{Max}(|\sin t|, |\cos t|)$. La fonction φ est continue, π -périodique, paire, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\pi/2 - t) = \varphi(t)$. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} L(f) &= 2R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(t) \, dt = 4R \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \, dt = 8R \int_0^{\pi/4} \varphi(t) \, dt = \\ &= 8R \int_0^{\pi/4} \cos t \, dt = 8R \sin(\pi/4) = 4R\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

|| Dans \mathbb{R}^2 euclidien canonique, on considère l'arc de lemniscate d'équation $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ($a > 0$ donné, $\theta \in [0, \pi/4]$). Soit $\lambda(u, v)$ la longueur de l'arc de cette courbe obtenu pour $\theta \in [u, v]$ ($0 \leq u \leq v \leq \pi/4$). On donne θ_1, θ_2 réels tels que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/4$. Démontrer : $\lambda(0, \theta_1) = \lambda(\theta_2, \pi/4)$ ssi $\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \sqrt{2}/2$. ■

Nous identifierons \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} . L'arc de lemniscate d'équation polaire $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, où $\theta \in [0, \pi/4]$, est l'arc $f : \theta \mapsto a\sqrt{\cos 2\theta} e^{i\theta}$, défini sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.

Pour tout $\theta \in [0, \pi/4]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= a \left(-\sin 2\theta (\cos 2\theta)^{-1/2} + i (\cos 2\theta)^{1/2} \right) e^{i\theta} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} (-\sin 2\theta + i \cos 2\theta) e^{i\theta} = \frac{ia}{\sqrt{\cos 2\theta}} e^{3i\theta}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que pour tout u, v tels que $0 \leq u \leq v \leq \pi/4$, on a :

$$\lambda(u, v) = a \int_u^v \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Si θ_1, θ_2 sont des réels tels que $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi/4$, l'égalité $\lambda(0, \theta_1) = \lambda(\theta_2, \pi/4)$ est donc vérifiée si, et seulement si :

$$(1) \quad \int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \int_{\theta_2}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Faisons dans les deux intégrales le changement de variable $x = \cos \theta$, et posons $x_1 = \cos \theta_1$ et $x_2 = \cos \theta_2$. L'égalité (1) devient :

$$(2) \quad \int_{x_1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{2x^2-1}} = \int_{1/\sqrt{2}}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{2x^2-1}}.$$

En utilisant le changement de variable $y = 1/(\sqrt{2}x)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{1/\sqrt{2}}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{2x^2-1}} &= \int_{1/(\sqrt{2}x_2)}^1 \frac{dy/y^2}{\sqrt{2} \sqrt{1-1/(2y^2)} \sqrt{1/y^2-1}} = \\ &= \int_{1/(\sqrt{2}x_2)}^1 \frac{dy}{\sqrt{2y^2-1} \sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

L'égalité (2) équivaut donc à l'égalité :

$$\int_{x_1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{2x^2-1}} = \int_{1/(\sqrt{2}x_2)}^1 \frac{dy}{\sqrt{2y^2-1} \sqrt{1-y^2}},$$

qui équivaut à l'égalité $x_1 = 1/(\sqrt{2}x_2)$, c'est-à-dire :

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 6 :

|| Dans \mathbb{R}^2 euclidien canonique on considère la rosa

|| polaire $r = a \sin 2\theta$, ($a > 0$ donné, $0 \leq \theta \leq 2\pi$) et l'ellipse d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 - 4a^2 = 0$. Montrer que les deux courbes ont même longueur. ■

Nous identifions \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} .

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $r(\theta) = a \sin 2\theta$. Comme 2π est une période de r et que π n'est pas une anti-période de r , on voit que l'arc $\theta \mapsto r(\theta) e^{i\theta}$ est de période 2π . Pour $\theta \in \mathbb{R}$ posons $z(\theta) = r(\theta) e^{i\theta}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$z'(\theta) = a(2 \cos 2\theta + i \sin 2\theta) e^{i\theta}.$$

La longueur de la rosace est donc :

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} d\theta.$$

En posant $t = 2\theta$ dans cette intégrale on obtient :

$$L = a \int_0^{4\pi} \sqrt{4 \cos^2 t + \sin^2 t} \frac{dt}{2} = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 t + \sin^2 t} dt,$$

puisque la fonction à intégrer est 2π -périodique.

L'ellipse est le support de l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto f(\theta)$, où :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \quad f(\theta) = a(2 \sin \theta + i \cos \theta).$$

L'arc f est de période 2π ; la longueur de l'ellipse est donc :

$$L_1 = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta.$$

On observe l'égalité $L = L_1$ qu'il fallait démontrer.

§ IX.3 ABSCISSES CURVILIGNES, COURBURE

Exercice 3 :

|| Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$. On donne une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 régulière $f : I \rightarrow \mathcal{E}$, $\theta \mapsto f(\theta)$, définie en coordonnées polaires dans \mathcal{R} par $\overrightarrow{Of(\theta)} = r \vec{u}(\theta)$, avec r fonction réelle de θ de classe \mathcal{C}^1 et $\vec{u}(\theta) = e_1 \cos$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $S(\theta)$ l'aire algébrique balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{Of(\theta)}$ comptée à partir de $\theta_0 \in I$, et $s = s(\theta)$ l'abscisse curviligne de f telle que $s(\theta_0) = 0$ et $\frac{ds}{d\theta} > 0$. Déterminer f pour que $(\forall \theta) \quad S = \lambda s$. ■

Pour tout $\theta \in I$ on a les égalités :

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(t) dt \quad \text{et} \quad s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r'^2(t) + r^2(t)} dt.$$

La fonction r étant supposée de classe \mathcal{C}^1 , la condition de l'énoncé est vérifiée si, et seulement si, la fonction r est solution sur I l'équation différentielle :

$$(1) \quad r^2 = 2\lambda \sqrt{r'^2 + r^2} \quad \text{soit} \quad r^4 - 4\lambda^2 r^2 = 4\lambda^2 r'^2.$$

Une condition nécessaire est $(\forall \theta \in I) \quad r(\theta) = 0$ ou $|r(\theta)| \geq 2\lambda$; comme la fonction r est continue, définie sur un intervalle, et qu'elle n'est pas identiquement nulle, pour tout $\theta \in I$, $|r(\theta)| \geq 2\lambda$. La condition (1) peut donc s'écrire :

$$\left(\frac{r'}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{4\lambda^2}.$$

Les solutions de cette équation différentielle en $1/r$ sont les fonctions constantes égales à $1/2\lambda$ ou $-1/2\lambda$, et les fonctions de la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\lambda} \cos(\theta - \theta_1),$$

où $\theta_1 \in \mathbb{R}$. L'arc f est donc solution si, et seulement si, soit il est porté par le cercle de centre O et de rayon 2λ , soit il est porté par une droite d'équation :

$$x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 = 2\lambda,$$

où $\theta_1 \in \mathbb{R}$; ces droites sont les tangentes du cercle de centre O et de rayon 2λ .

Exercice 5 :

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$. Soit $f : I \rightarrow \mathcal{E}$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^2 régulière dont aucune tangente ne soit dirigée par e_2 . Soit $g(t)$ le point où la tangente en $t \in I$ à f rencontre $\mathcal{D} = O + \mathbb{R}e_2$. Déterminer f pour que $\|f'(t)\|^2 = \|g'(t)\|^2$ (resp. $\|f'(t)\|^2 = 2\|g'(t)\|^2$). Interpréter. ■

Pour $t \in I$, les coordonnées de $f(t)$ dans \mathcal{R} seront notées $(x(t), y(t))$. Comme aucune tangente de f n'est dirigée par e_2 , pour tout $t \in I$, $x'(t) \neq 0$. La fonction x' ne change donc pas de signe et, en remplaçant éventuellement e_1 par $-e_1$, nous pouvons supposer $(\forall t \in I) \quad x'(t) > 0$. Les coordonnées de $g(t)$ seront notées $(0, m(t))$. Le point $g(t)$ de coordonnées $(0, m(t))$ est sur la tangente à f en t si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que :

$$x(t) + \lambda x'(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) + \lambda y'(t) = m(t) ,$$

nous en déduisons la relation :

$$y(t) - \frac{x(t)}{x'(t)} y'(t) = m(t) .$$

Comme la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , et que $x' > 0$, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 . Le nombre c étant 1 ou 2, les conditions que doit vérifier f s'écrivent donc :

$$x'^2 + y'^2 = c^2 m'^2 \quad \text{où} \quad m = y - \frac{x}{x'} y' .$$

Comme l'arc f est supposé régulier, la fonction continue m' ne prend pas sur l'intervalle I la valeur 0 ; elle garde donc sur I un signe constant, que nous pouvons supposer > 0 , en changeant éventuellement e_2 en $-e_2$.

Pour tout $t \in I$, posons $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \text{sh}(\varphi(t))$ où $\varphi(t) \in \mathbb{R}$; on définit ainsi une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Avec cette notation les conditions que doit vérifier f s'écrivent :

$$x' \text{ch}(\varphi) = c m' , \quad y - x \text{sh}(\varphi) = m , \quad \frac{y'}{x'} = \text{sh}(\varphi) .$$

En dérivant la deuxième relation on obtient l'égalité $y' - x' \text{sh} \varphi - x \varphi' \text{ch} \varphi = m'$, soit $m' = -x \varphi' \text{ch} \varphi$. Les conditions que doit vérifier f s'écrivent donc :

$$x' + c x \varphi' = 0 , \quad y - x \text{sh}(\varphi) = m , \quad y' = x' \text{sh}(\varphi) .$$

La première condition est vérifiée si, et seulement si, il existe un scalaire λ tel que $x = \lambda e^{-c\varphi}$, $\lambda \neq 0$ sinon $x' = 0$. La deuxième condition peut être éliminée puisqu'elle ne fait que donner la position de $g(t)$. Les conditions que doit vérifier f sont donc :

$$(1) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (x = \lambda e^{-c\varphi} , \quad y' = -\lambda c \varphi' e^{-c\varphi} \text{sh}(\varphi)) ,$$

où $\varphi = \text{Arg sh}(y'/x')$.

La fonction φ est nécessairement de classe \mathcal{C}^2 sur I (puisc

classe \mathcal{C}^2), et sa dérivée ne prend pas la valeur 0 et reste du signe opposé à celui de λ (et à celui de x qui est fixe) puisque $x' > 0$.

Inversement, s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ et une fonction φ de classe \mathcal{C}^2 sur I dont la dérivée reste du signe opposé à celui de λ , et que les coordonnées (x, y) de f vérifient les égalités (1), alors :

$$x' = -\lambda c \varphi' e^{-c\varphi} \quad \text{d'où} \quad \frac{y'}{x'} = \text{sh}(\varphi),$$

et $x' > 0$. Dans ce cas la fonction f vérifie les conditions de l'énoncé.

Résolvons les équations dans le cas où $c = 1$. La condition sur y s'écrit :

$$y' = -\frac{1}{2} \lambda \varphi' (1 - e^{-2\varphi}),$$

elle est vérifiée si, et seulement si, il existe un scalaire μ tel que :

$$y = \mu - \frac{\lambda}{4} (2\varphi + e^{-2\varphi}).$$

La fonction f vérifie les conditions sur I si, et seulement si, il existe deux scalaires λ et μ , $\lambda \neq 0$, et une fonction φ de classe \mathcal{C}^2 sur I dont la dérivée reste du signe opposé à celui de λ , tels que :

$$x = \lambda e^{-\varphi} \quad \text{et} \quad y = \mu - \frac{\lambda}{4} (2\varphi + e^{-2\varphi}).$$

Les hypothèses étant celles de l'énoncé, il ne peut pas y avoir rencontre de $f(t)$ et de $g(t)$. On remarque aussi que pour tout $t \in I$:

$$y(t) - m(t) = x(t) \text{sh}(\varphi(t)) = \frac{x(t)}{2} \left(\frac{\lambda}{x(t)} - \frac{x(t)}{\lambda} \right).$$

La fonction x peut tendre vers 0, si φ tend vers $+\infty$, mais alors $y - m$ tend vers $\lambda/2$; il ne peut donc pas y avoir rencontre, même à la limite.

Résolvons les équations dans le cas où $c = 2$. La condition sur y s'écrit :

$$y' = -\lambda \varphi' (e^{-\varphi} - e^{-3\varphi}).$$

En raisonnant comme dans le cas où $c = 1$, on trouve que la fonction f est solution si, et seulement si, il existe deux réels λ, μ , $\lambda \neq 0$, et une fonction φ de classe \mathcal{C}^2 sur I tels que :

$$x = \lambda e^{-2\varphi} \quad \text{et} \quad y = \mu + \frac{1}{3} \lambda (3e^{-\varphi} - e^{-3\varphi}).$$

On remarque que la trajectoire de f est portée par une cubique unicursale dont un paramétrage est :

$$x = \lambda t^2, \quad y = \mu + \frac{1}{3} \lambda (3t - t^3).$$

On remarque que :

$$y - m = x \operatorname{sh}(\varphi) = \frac{1}{2} \lambda (e^{-\varphi} - e^{-3\varphi}).$$

Quand φ tend vers $+\infty$, la différence $f(t) - g(t)$ tend vers 0. Il y a donc rencontre à la limite, sauf bien sûr si f et g diminuent leur vitesse de telle sorte qu'il n'y ait pas rencontre. Dans les hypothèses de l'énoncé, il ne peut pas y avoir rencontre dans l'intervalle I , car s'il y a rencontre la tangente à f au point de rencontre doit être parallèle à e_2 .

§ IX.4 COURBURE DES COURBES PLANES

Exercice 1 :

Soit deux courbes paramétrées de classe \mathcal{C}^2 , birégulières et normales g_1 et $g_2 : I \rightarrow \mathcal{E}$, avec $0 \in I$ et $g_1(0) = g_2(0) = M_0$ et enfin $g'_1(0) = g'_2(0)$. On note \mathcal{K}_1 et \mathcal{K}_2 les courbures algébriques associées à g_1 et g_2 . Montrer que $\frac{\mathcal{K}_1(0)}{\mathcal{K}_2(0)}$ est un invariant du groupe affine de \mathcal{E} (Goursat). ■

Soit φ une bijection affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. On pose $h_i = \varphi \circ g_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Les deux courbes paramétrées h_1 et h_2 sont de classe \mathcal{C}^2 , birégulières, mais peut-être pas normales. On vérifie : $h_1(0) = h_2(0) = \varphi(M_0)$, et $h'_1(0) = \vec{\varphi}(g'_1(0)) = \vec{\varphi}(g'_2(0)) = h'_2(0)$. Pour tout $t \in I$ et $i \in \{1, 2\}$, on a :

$$h'_i(t) = \vec{\varphi}(g'_i(t)) \quad \text{d'où} \quad h''_i(t) = \vec{\varphi}(g''_i(t)).$$

D'après la formule (5) du Cours, la courbure c_i de h_i en 0 est :

$$c_i = \frac{[h'_i(0), h''_i(0)]}{\|h'_i(0)\|^3} = \frac{[\vec{\varphi}(g'_i(0)), \vec{\varphi}(g''_i(0))]}{\|h'_i(0)\|^3} = \det(\vec{\varphi}) \times \frac{[g'_i(0), g''_i(0)]}{\|h'_i(0)\|^3},$$

si on oriente les deux courbes de telle sorte que leurs abscisses curvilignes soient croissantes. Le rapport des courbures algébriques en 0 de h_1 et h_2 est donc (puisque $h'_1(0) = h'_2(0)$) :

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{[g'_2(0), g''_2(0)]}{[g'_1(0), g''_1(0)]} = \frac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{K}_1}.$$

Exercice 2 :

Soit une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ normale et birégulière $g : I \rightarrow \mathcal{E}$, avec $0 \in I$ et $g(0) = M_0$. Notons \mathcal{T}_s la tangente en s à g .

a) Soit Γ_s le cercle passant par $g(0)$ et tangent en $g(s)$ à \mathcal{T}_s pour $s \in I \setminus \{0\}$ et assez voisin de 0. Montrer que le centre et le rayon de Γ_s ont une limite (à préciser) lorsque $s \xrightarrow[\neq 0]{} 0$.

b) Même question avec le cercle tangent en $g(0)$ à \mathcal{T}_0 qui passe par $g(s)$.

c) Pour s assez voisin de 0, \mathcal{T}_s rencontre \mathcal{T}_0 en P_s . Soit \mathcal{C}_s le cercle circonscrit à $(g(0), g(s), P_s)$. Montrer que le centre et le rayon de \mathcal{C}_s ont une limite (à préciser), quand $s \xrightarrow[\neq 0]{} 0$.

d) Dans les mêmes conditions, soit G_s le cercle exinscrit au triangle $(g(0), g(s), P_s)$ centré sur la bissectrice intérieure issue de P_s . Montrer que le centre et le rayon de G_s ont une limite (à préciser) quand $s \xrightarrow[\neq 0]{} 0$. ■

Nous noterons $(x(s), y(s))$ les coordonnées de $g(s)$ dans le repère de Frenet de l'arc normal g au point de paramètre 0. Nous noterons c la courbure algébrique de g en 0. Au voisinage du point 0 on a les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} x(s) &= s + o(s^2) & x'(s) &= 1 + o(s) \\ y(s) &= \frac{c}{2} s^2 + o(s^2) & y'(s) &= c s + o(s). \end{aligned}$$

On trouve aussi :

$$x^2(s) + y^2(s) = s^2 + o(s^3) \quad \text{et} \quad x(s)x'(s) + y(s)y'(s) = s + o(s^2).$$

La tangente au point de paramètre s est dirigée par le vecteur unitaire $g'(s)$, de coordonnées $(x'(s), y'(s))$. Le produit mixte des vecteurs $g'(0)$ et $g'(s)$ est :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x'(s) \\ 0 & y'(s) \end{bmatrix} = y'(s) \underset{s \xrightarrow[\neq 0]{} 0}{\sim} c s.$$

Il existe donc un voisinage V de 0 dans I , tel que pour tout $s \in V$, $s \neq 0$, la tangente \mathcal{T}_s coupe la tangente \mathcal{T}_0 en un point et un seul. On peut choisir V de telle sorte qu'il en soit de même pour la normale en s , notée \mathcal{N}_s , et la normale en 0.

a) Le centre du cercle Γ_s est l'intersection de la normale en s et de la médiatrice de $(g(0), g(s))$. L'équation de la médiatrice de $(g(0), g(s))$ est :

$$\left(X - \frac{1}{2}x(s)\right)x(s) + \left(Y - \frac{1}{2}y(s)\right)y(s) = 0.$$

L'équation de la normale en s est :

$$(X - x(s))x'(s) + (Y - y(s))y'(s) = 0.$$

Les coordonnées de l'intersection sont les solutions du système :

$$\begin{bmatrix} x(s) & y(s) \\ x'(s) & y'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x^2(s) + y^2(s)) \\ x(s)x'(s) + y(s)y'(s) \end{bmatrix}.$$

On trouve que le déterminant du système est :

$$x(s)y'(s) - x'(s)y(s) = \frac{1}{2}cs^2 + o(s^2) \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\sim}} \frac{1}{2}cs^2.$$

Le système est donc bien de Cramer pour s assez voisin de 0. D'autre part on trouve :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x^2(s) + y^2(s)) & y(s) \\ x(s)x'(s) + y(s)y'(s) & y'(s) \end{bmatrix} \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\sim}} o(s^3),$$

et :

$$\det \begin{bmatrix} x(s) & \frac{1}{2}(x^2(s) + y^2(s)) \\ x'(s) & x(s)x'(s) + y(s)y'(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}s^2 + o(s^3) \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\sim}} \frac{1}{2}s^2.$$

En utilisant les formules de Cramer, on voit que si $(X(s), Y(s))$ sont les coordonnées du centre de Γ_s , on a :

$$X(s) \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\longrightarrow}} 0 \quad \text{et} \quad Y(s) \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\longrightarrow}} \frac{1}{c}.$$

Le centre du cercle Γ_s a donc pour limite le centre de courbure en 0 de la courbe, et son rayon a pour limite le rayon de courbure géométrique.

b) Le centre du cercle est ici l'intersection de la médiatrice de $(g(0), g(s))$ d'équation :

$$\left(X - \frac{1}{2}x(s)\right)x(s) + \left(Y - \frac{1}{2}y(s)\right)y(s) = 0,$$

et de la normale en 0 d'équation $X = 0$. L'ordonnée du point d'intersection est :

$$Y = \frac{1}{2} y(s) + \frac{x^2(s)}{2y(s)} = \frac{1}{2} \frac{x^2(s) + y^2(s)}{y(s)} .$$

En utilisant les développements limités précédemment calculés, on trouve :

$$Y(s) \xrightarrow[s \neq 0]{s \rightarrow 0} \frac{1}{c} .$$

Le centre du cercle a donc pour limite le centre de courbure en 0 et le rayon du cercle le rayon de courbure géométrique.

c) La tangente en s a pour équation :

$$(Y - y(s)) x'(s) - (X - x(s)) y'(s) = 0 .$$

Elle coupe la tangente en 0, d'équation $Y = 0$, au point P_s de coordonnées $(X(s), 0)$ où :

$$X(s) = x(s) - y(s) \frac{x'(s)}{y'(s)} = \frac{x(s) y'(s) - x'(s) y(s)}{y'(s)} .$$

En utilisant les calculs précédents on trouve :

$$X(s) \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\sim}} \frac{\frac{1}{2} c s^2}{c s} \underset{s \neq 0}{\underset{s \rightarrow 0}{\sim}} \frac{1}{2} s .$$

Le centre du cercle circonscrit au triangle $(g(0), g(s), P_s)$ est l'intersection de la médiatrice de $(g(0), g(s))$ d'équation :

$$\left(X - \frac{1}{2} x(s) \right) x(s) + \left(Y - \frac{1}{2} y(s) \right) y(s) = 0 ,$$

et de la droite d'équation $X = \frac{1}{2} X(s)$. Son ordonnée est $Y(s)$ où :

$$Y(s) = \frac{1}{2} y(s) + \frac{x(s)}{2y(s)} (x(s) - X(s)) .$$

En utilisant les développements limités précédemment calculés on trouve :

$$Y(s) \xrightarrow[s \neq 0]{s \rightarrow 0} \frac{1}{2c} .$$

Si C est le centre de courbure en 0, la limite du centre de cercle \mathcal{C}_s est le milieu de $(g(0), C)$ et son rayon a pour limite la moitié du rayon

d) Etablissons d'abord des développements limités au voisinage épointé de 0, des coordonnées du vecteur unitaire $u(s)$ qui dirige le vecteur $\overrightarrow{g(0)g(s)}$. Nous noterons $(\alpha(s), \beta(s))$ les coordonnées de $u(s)$. Nous supposons $s > 0$, le cas où $s < 0$ étant analogue. On a :

$$x^2(s) + y^2(s) = s^2 + o(s^3) = s^2 (1 + o(s)) \quad \text{d'où} \quad \sqrt{x^2(s) + y^2(s)} = s + o(s^2).$$

Nous en déduisons :

$$\alpha(s) = \frac{s + o(s^2)}{s + o(s^2)} = 1 + o(s) \quad \text{et} \quad \beta(s) = \frac{\frac{1}{2} c s^2 + o(s^2)}{s + o(s^2)} = \frac{1}{2} c s + o(s).$$

Comme le point P_s a pour abscisse $X(s) \sim s/2 > 0$, le vecteur unitaire qui dirige $\overrightarrow{g(0)P_s}$ est le vecteur tangent en 0. De manière analogue, comme un équivalent de la première coordonnée de $\overrightarrow{P_s g(s)}$ est $s/2$, le vecteur unitaire qui dirige le vecteur $\overrightarrow{P_s g(s)}$ est le vecteur tangent en s , de coordonnées $(x'(s), y'(s))$. Dans le triangle $(g(0), g(s), P_s)$, la bissectrice extérieure en $g(0)$ est orthogonale à $u(s) + g'(0)$, son équation est donc :

$$(\alpha(s) + 1) X + \beta(s) Y = 0.$$

La bissectrice extérieure en $g(s)$ est orthogonale à $u(s) + g'(s)$. Son équation est donc :

$$(X - x(s))(\alpha(s) + x'(s)) + (Y - y(s))(\beta(s) + y'(s)) = 0.$$

Les coordonnées (X, Y) du centre de ce cercle exinscrit sont donc les solutions du système :

$$\begin{bmatrix} \alpha(s) + 1 & \beta(s) \\ \alpha(s) + x'(s) & \beta(s) + y'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma(s) \end{bmatrix},$$

où $\gamma(s) = x(s)(\alpha(s) + x'(s)) + y(s)(\beta(s) + y'(s))$. Le déterminant de ce système est :

$$\delta(s) = \begin{vmatrix} \alpha(s) + 1 & \beta(s) \\ x'(s) - 1 & y'(s) \end{vmatrix} = 2 c s + o(s).$$

On trouve $\gamma(s) = 2 s + o(s^2)$. D'après les formules de Cramer, on a :

$$X = -\frac{\gamma(s) \beta(s)}{\delta(s)} \quad \text{et} \quad Y = \frac{(\alpha(s) + 1) \gamma(s)}{\delta(s)}.$$

En utilisant les développements limités précédemment calculés, on trouve :

$$X \underset{s \rightarrow 0}{\underset{s \neq 0}{\sim}} -\frac{1}{2} s \quad \text{et} \quad Y \underset{s \rightarrow 0}{\underset{s \neq 0}{\sim}} \frac{2}{c}.$$

Le centre du cercle exinscrit a donc pour limite le point diamétralement opposé à $g(0)$ dans le cercle de courbure, et son rayon a pour limite le double du rayon de courbure géométrique.

Exercice 3 :

Soit les courbes (\mathcal{C}_λ) d'équation dans \mathbb{R} :

$$x^4 + y^4 + \lambda x^3 + \lambda^2 x^2 - y^2 = 0.$$

Trouver, lorsque λ varie dans \mathbb{R} , le lieu des centres de courbure à \mathcal{C}_λ en O . ■

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, le point de coordonnées (x, y) est sur \mathcal{C}_λ si, et seulement si, y^2 est solution de l'équation du second degré :

$$(1) \quad X^2 - X + x^4 + \lambda x^3 + \lambda^2 x^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta(x) = 1 - 4x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)$ qui est > 0 au voisinage de 0 pour x . De plus, comme $x^4 + \lambda x^3 + \lambda^2 x^2 > 0$, sauf pour $x = 0$, il est clair que les deux solutions de l'équation (1) sont positives. Ces solutions sont :

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)}}{2} \geq \frac{1}{2},$$

et

$$X_\lambda(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)}}{2} = \frac{2x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)}{1 + \sqrt{1 - 4x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)}}.$$

Soit I un intervalle ouvert voisinage de 0 tel que pour tout $x \in I$, $\Delta(x) \geq 0$, et $X_\lambda(x) < 1/2$. On pose $J =]-2^{-1/2}, 2^{1/2}[$. L'ensemble des couples $(x, y) \in I \times J$ qui sont les coordonnées d'un point de \mathcal{C}_λ est la réunion des graphes de deux fonctions opposées, f_λ et $-f_\lambda$, où pour tout $x \in I$:

$$f_\lambda(x) = x \frac{\sqrt{2} \sqrt{x^2 + \lambda x + \lambda^2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4x^2(x^2 + \lambda x + \lambda^2)}}}.$$

Les centres de courbure de \mathcal{C}_λ en O sont les centres de courbure en 0 des graphes de ces deux fonctions ; ils sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = 0$.

Calculons un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f_λ . Si $\lambda \neq 0$, on trouve, en notant $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ le signe de λ :

$$f_\lambda(x) = \varepsilon x \lambda \left(1 + \frac{x}{2\lambda} + o(x)\right) = \varepsilon \left(\lambda x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$$

Nous en déduisons :

$$v = f'_\lambda(0) = \varepsilon \lambda \quad \text{et} \quad \gamma = f''_\lambda(0) = \varepsilon .$$

En appliquant la formule (7) du cours, on trouve que les coordonnées du centre de courbure en 0 du graphe de f_λ sont :

$$\frac{(1+v^2)^{3/2}}{\gamma} \frac{1}{(1+v^2)^{1/2}} (-v, 1) = \frac{(1+v^2)}{\gamma} (-v, 1) = (1+\lambda^2) (-\lambda, \varepsilon) .$$

Les deux centres de courbure en O de la courbe \mathcal{C}_λ sont donc les points dont les coordonnées sont, quel que soit le signe de λ :

$$(1+\lambda^2)(-\lambda, 1) \quad \text{et} \quad (1+\lambda^2)(-\lambda, -1) .$$

Pour $\lambda = 0$, on a au voisinage de 0 :

$$X_0(x) = \frac{2x^4}{1 + \sqrt{1 - 4x^4}} .$$

La courbe \mathcal{C}_0 est au voisinage de O réunion des graphes des fonctions f et $-f$ où :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4x^4}}} .$$

On trouve $v = f'(0) = 0$ et $\gamma = f''(0) = 2$; les coordonnées des centres de courbure en O de la courbe \mathcal{C}_0 sont donc (d'après les formules utilisées ci-dessus) : $(0, 1/2)$ et $(0, -1/2)$.

Exercice 4 :

- || Soit $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe paramétrée normale de classe \mathcal{C}^1 , et soit $\varphi = \varphi(s)$ une détermination de l'angle orienté $(e_1, \widehat{\vec{\tau}(s)})$.
- || a) On suppose trouvé $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $s \in I$, $\varphi(s) \in]\alpha, \alpha + \pi[$. Montrer que g est injective.
- || b) Etudier la réciproque de cette propriété. ■

a) Nous pouvons supposer que \mathbb{C} est le plan complexe. Posons pour $s \in I$, $z(s) = e^{-i\alpha} g(s)$. On a alors pour tout $s \in I$, $z'(s) = e^{-i\alpha} e^{i\varphi(s)}$. Pour $s \in I$, notons $y(s)$ la partie imaginaire de $z(s)$; pour tout $s \in I$, $y'(s) = \sin(\varphi(s) - \alpha)$, et comme $\varphi(s) - \alpha \in]0, \pi[$, nous en déduisons $y'(s) > 0$. La fonction y est donc strictement croissante sur I donc injective ; il en est de même a fortiori pour les fonctions z et g .

b) La réciproque est fautive. Les spirales logarithmiques sont des courbes simples, mais une détermination de l'angle du vecteur tangent ne reste pas dans un intervalle de longueur π .

Exercice 5 (roulement sans glissement) :

On dit qu'une courbe régulière variable \mathcal{C} *roule sans glisser* sur une courbe régulière fixe \mathcal{B} ssi \mathcal{C} reste congrue à elle-même modulo le groupe $\text{Dep}(\mathcal{C})$, reste tangente à \mathcal{B} , et si de plus le point de contact T décrit sur \mathcal{C} et \mathcal{B} des abscisses curvilignes s et σ telles que $ds = d\sigma$ lorsque s et σ sont choisies pour que les vecteurs unitaires tangents à \mathcal{C} et \mathcal{B} en T soient *les mêmes*.

a) Une chaînette variable de \mathcal{C} , qui reste congrue à elle-même mod $(\text{Dep}(\mathcal{C}))$ roule sans glisser sur une droite fixe \mathcal{D} de \mathcal{C} . Trouver le lieu du sommet de la chaînette. Etudier la courbure du lieu trouvé.

b) Une parabole variable de \mathcal{C} , qui reste congrue à elle-même mod $(\text{Dep}(\mathcal{C}))$ roule sans glisser sur une droite fixe \mathcal{D} de \mathcal{C} . Montrer que le lieu du foyer de la parabole est une chaînette de base \mathcal{D} . ■

a) On choisit un repère orthonormal \mathcal{R} de \mathcal{C} de telle sorte que \mathcal{D} soit dans \mathcal{R} la droite d'équation $y = 0$. Pour $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$, on note $D(a, b, \theta)$ le déplacement de \mathcal{C} qui transforme le point de coordonnées (x, y) en le point de coordonnées $(a + x \cos \theta - y \sin \theta, b + x \sin \theta + y \cos \theta)$. L'image par $D(a, b, \theta)$ de la chaînette d'équation $y = \text{ch } x$ est la courbe paramétrée (par $\lambda \in \mathbb{R}$) définie par ses coordonnées :

$$x = a + \lambda \cos \theta - \text{ch } \lambda \sin \theta, \quad y = b + \lambda \sin \theta + \text{ch } \lambda \cos \theta.$$

Si τ est le paramètre du point de contact T de cette courbe avec la droite \mathcal{D} , τ vérifie les deux conditions :

$$b + \tau \sin \theta + \text{ch } \tau \cos \theta = 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta + \text{sh } \tau \cos \theta = 0.$$

Puisqu'il y a un point de contact, $\cos \theta = 0$ est impossible ; la variation de θ étant continue, on peut supposer $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, de telle sorte que le paramètre θ et le paramètre τ du point de contact sont liés par la relation :

$$(1) \quad \text{sh } \tau = -\text{tg}(\theta) \quad \text{d'où} \quad \text{ch } \tau = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad \text{th } \tau = -\sin$$

Le paramètre b du déplacement est alors :

$$(2) \quad b = -\tau \sin \theta - \operatorname{ch} \tau \cos \theta = \tau \operatorname{th} \tau - 1 .$$

Prenons une interprétation cinématique. Nous supposons que a, θ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 du temps, le paramètre τ étant défini par les relations (1), et le paramètre b par les relations (2). La dérivée d'une fonction dérivable φ (par rapport au temps) sera notée $\dot{\varphi}$, et si φ est deux fois dérivable, sa dérivée seconde sera notée $\ddot{\varphi}$. Le roulement de la chaînette sur la base est sans glissement si, et seulement si, la vitesse absolue du point de contact est toujours égale à sa vitesse relative, soit si, et seulement si, la vitesse d'entraînement du point de contact est toujours nulle. La deuxième coordonnée de la vitesse d'entraînement du point de contact étant par construction nulle, il reste à écrire que la première est nulle, soit la condition :

$$(3) \quad \dot{a} - \tau \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta} \operatorname{ch} \tau \cos \theta = 0 .$$

D'autre part on a la relation $\operatorname{sh} \tau = -\operatorname{tg} \theta$, et par conséquent en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{\tau} \operatorname{ch} \tau = -\frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \quad \text{d'où} \quad \dot{\theta} = -\dot{\tau} \cos^2 \theta \operatorname{ch} \tau = -\frac{\dot{\tau}}{\operatorname{ch} \tau} .$$

La condition (3) est donc équivalente à la condition :

$$\dot{a} - \tau \frac{\dot{\tau}}{\operatorname{ch} \tau} \operatorname{th} \tau + \operatorname{ch} \tau \frac{\dot{\tau}}{\operatorname{ch} \tau} \frac{1}{\operatorname{ch} \tau} = 0 ,$$

soit :

$$\dot{a} = \dot{\tau} \left(\frac{\tau \operatorname{sh} \tau - \operatorname{ch} \tau}{\operatorname{ch}^2 \tau} \right) .$$

On voit que cette relation est vérifiée si, et seulement si, il existe un réel c tel que :

$$a = -\frac{\tau}{\operatorname{ch} \tau} + c .$$

Le sommet de la chaînette est le point de paramètre $\lambda = 0$. Ses coordonnées sont :

$$x = a - \sin \theta \quad \text{et} \quad y = b + \cos \theta ,$$

soit :

$$x = c - \frac{\tau}{\operatorname{ch} \tau} + \operatorname{th} \tau \quad \text{et} \quad y = \tau \operatorname{th} \tau - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \tau} .$$

Calculons maintenant la fonction courbure de cet arc paramétré. En utilisant les égalités (1), on trouve :

$$x = c - \tau \cos \theta - \sin \theta , \quad y = -\tau \sin \theta - 1 + \cos \theta ,$$

soit encore, en posant $z = x + iy$:

$$z = c - i + (i - \tau) e^{i\theta} .$$

Comme :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{\tau}}{\operatorname{ch} \theta} = -\cos \theta \dot{\tau} ,$$

on obtient en dérivant :

$$\dot{z} = i \dot{\theta} (i - \tau) e^{i\theta} - \dot{\tau} e^{i\theta} = \dot{\tau} e^{i\theta} (-1 + (1 + i\tau) \cos \theta) .$$

On obtient encore :

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= (\ddot{\tau} + i \dot{\tau} \dot{\theta}) e^{i\theta} (-1 + (1 + i\tau) \cos \theta) + \dot{\tau} e^{i\theta} (i \dot{\tau} \cos \theta - \dot{\theta} (1 + i\tau) \sin \theta) = \\ &= (\ddot{\tau} + i \dot{\tau} \dot{\theta}) e^{i\theta} (-1 + (1 + i\tau) \cos \theta) - \dot{\tau} \dot{\theta} e^{i\theta} (i + (1 + i\tau) \sin \theta) = \\ &= \ddot{\tau} e^{i\theta} (-1 + (1 + i\tau) \cos \theta) + i \dot{\tau} \dot{\theta} e^{i\theta} (-2 + (1 + i\tau) (\cos \theta + i \sin \theta)) . \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{e^{-i\theta} \dot{z}}{\cos \theta} = \dot{\tau} (-\operatorname{ch} \tau + 1 + i\tau) ,$$

et

$$\frac{e^{-i\theta} \ddot{z}}{\cos \theta} = \ddot{\tau} (-\operatorname{ch} \tau + 1 + i\tau) + i \dot{\tau} \dot{\theta} (-2 \operatorname{ch} \tau + (1 + i\tau) (1 - i \operatorname{sh} \tau)) .$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{[\dot{z}, \ddot{z}]}{\cos^2 \theta} = \dot{\tau}^2 \dot{\theta} [-\operatorname{ch} \tau + 1 + i\tau, \operatorname{sh} \tau - \tau + i(1 - 2 \operatorname{ch} \tau + \tau \operatorname{sh} \tau)] ,$$

soit :

$$[\dot{z}, \ddot{z}] = -\frac{\dot{\tau}^3}{\operatorname{ch}^3 \tau} \begin{vmatrix} -\operatorname{ch} \tau + 1 & \operatorname{sh} \tau - \tau \\ \tau & 1 - 2 \operatorname{ch} \tau + \tau \operatorname{sh} \tau \end{vmatrix} .$$

On trouve :

$$[\dot{z}, \ddot{z}] = \frac{\dot{\tau}^3}{\operatorname{ch}^3 \tau} (-1 + 3 \operatorname{ch} \tau - 2 \operatorname{ch}^2 \tau + \tau \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \tau^2) .$$

D'autre part :

$$|\dot{z}| = \frac{|\dot{\tau}|}{\operatorname{ch} \tau} ((\operatorname{ch} \tau - 1)^2 + \tau^2)^{1/2} .$$

Notons ε le signe de $\dot{\tau}$. La fonction courbure algébrique de l'arc décrit par le sommet de la chaînette est :

$$\mathcal{K} = \frac{[\dot{z}, \ddot{z}]}{|\dot{z}|^3} = \varepsilon \frac{-1 + 3 \operatorname{ch} \tau - 2 \operatorname{ch}^2 \tau + \tau \operatorname{ch} \tau \operatorname{sh} \tau - \tau^2}{((\operatorname{ch} \tau - 1)^2 + \tau^2)^{3/2}}$$

b) On garde les mêmes notations. L'image par $D(a, b, \theta)$ de la parabole d'équation $2py = x^2$, où $p > 0$, est la courbe paramétrée (par $\lambda \in \mathbb{R}$) définie par ses coordonnées :

$$x = a + \lambda \cos \theta - \frac{1}{2p} \lambda^2 \sin \theta, \quad y = b + \lambda \sin \theta + \frac{1}{2p} \lambda^2 \cos \theta.$$

Si τ est le paramètre du point de contact T de cette courbe avec la droite \mathcal{D} , τ vérifie les deux conditions :

$$b + \tau \sin \theta + \frac{1}{2p} \tau^2 \cos \theta = 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta + \frac{1}{p} \tau \cos \theta = 0.$$

Puisqu'il y a un point de contact, $\cos \theta = 0$ est impossible ; la variation de θ étant continue, on peut supposer $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, de telle sorte que le paramètre θ et le paramètre τ du point de contact sont liés par la relation :

$$(1) \quad \tau = -p \operatorname{tg}(\theta).$$

Le paramètre b du déplacement est alors :

$$(2) \quad b = -\tau \sin \theta - \frac{1}{2p} \tau^2 \cos \theta = \frac{1}{2} p \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Supposons que a et θ soient des fonctions de classe \mathcal{C}^1 du temps, le paramètre τ étant défini par la relation (1), et le paramètre b par la relation (2). Le roulement de la chaînette sur la base est sans glissement si, et seulement si, la vitesse absolue du point de contact est toujours égale à sa vitesse relative, soit si, et seulement si, la vitesse d'entraînement du point de contact est toujours nulle. La deuxième coordonnée de la vitesse d'entraînement du point de contact étant par construction nulle, il reste à écrire que la première est nulle, soit la condition :

$$(3) \quad \dot{a} - \tau \dot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta} \frac{1}{2p} \tau^2 \cos \theta = 0.$$

En utilisant l'égalité (1), on trouve que la condition (3) est équivalente à la condition :

$$\dot{a} = \dot{\theta} \left(\tau \sin \theta + \frac{1}{2p} \tau^2 \cos \theta \right) = -\frac{p}{2} \dot{\theta} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Introduisons la fonction φ telle que $\sin \theta = \operatorname{th} \varphi$. Comme $\cos \theta > 0$, on en déduit $\cos \theta = \frac{1}{\operatorname{ch} \varphi}$, puis $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{sh} \varphi$. En dérivant l'une de ces relations on trouve $\dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{\operatorname{ch} \varphi}$. Nous en déduisons :

$$\dot{a} = -\frac{p}{2} \frac{\dot{\varphi}}{\operatorname{ch} \varphi} \operatorname{th}^2 \varphi \operatorname{ch} \varphi = -\frac{p}{2} \dot{\varphi} \operatorname{th}^2 \varphi = \frac{p}{2} \dot{\varphi} (1 - \operatorname{th}^2 \varphi) = \dot{a}.$$

Cette condition est vérifiée si, et seulement si, il existe un réel c tel que :

$$a = c + \frac{p}{2} (\operatorname{th} \varphi - \varphi) .$$

Le foyer de la parabole est le point de coordonnées $(0, p/2)$ dans le repère lié à la parabole ; ses coordonnées dans le repère fixe sont :

$$x = a - \frac{p}{2} \sin \theta = c + \frac{p}{2} (\operatorname{th} \varphi - \varphi) - \frac{p}{2} \operatorname{th} \varphi = -\frac{p}{2} \varphi ,$$

et :

$$y = b + \frac{p}{2} \cos \theta = \frac{p}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta \right) = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{p}{2} \operatorname{ch} \varphi .$$

Le foyer de la parabole décrit donc une chaînette de base la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire la droite \mathcal{D} .

Exercice 8 :

Soit une courbe paramétrée $g : I \rightarrow \mathcal{E}$ de classe \mathcal{C}^4 , normale, birégulière, de rayon de courbure associé $s \mapsto \rho_1(s)$. On suppose $(\forall s \in I) \quad \frac{d\rho_1}{ds} > 0$.

a) Montrer que les cercles osculateurs à g en deux paramètres distincts et assez voisins ne se rencontrent pas.

b) Soit $(s_1, s_2) \in I^2$ avec $s_1 < s_2$. Montrer que le cercle osculateur Γ_{s_1} à g en s_1 est strictement intérieur au cercle osculateur Γ_{s_2} à g en s_2 (dans le cas où $(\forall s \in I) \quad \rho_1(s) > 0$). ■

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ sera noté \vec{v}^2 .

a) b) La conclusion du b) implique la conclusion du a).

Pour $s \in I$ fixé, le point $P \in \mathcal{E}$ est sur le cercle osculateur au point de paramètre s si, et seulement si :

$$\overrightarrow{g(s)P}^2 - 2\rho_1(s) \left(\tau_1(s) \left| \overrightarrow{g(s)P} \right| \right) = 0 .$$

La position du point P par rapport au cercle osculateur au point de paramètre s est déterminée par le signe de l'expression :

$$E(P, s) = \overrightarrow{Pg(s)}^2 + 2\rho_1(s) \left(\tau_1(s) \left| \overrightarrow{Pg(s)} \right| \right) .$$

Pour tout $P \in \mathcal{E}$, on considère l'application $\Phi_P : I \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $s \in I$, $\Phi_P(s) = \mathcal{K}_1(s) E(P, s) = \mathcal{K}_1(s) \overrightarrow{Pg(s)}^2 + 2 \left(\tau_1(s) \mid \overrightarrow{Pg(s)} \right)$. Pour tout $P \in \mathcal{E}$ l'application Φ_P est dérivable sur I , et pour tout $s \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_P}{ds}(s) &= \frac{d\mathcal{K}_1}{ds}(s) \overrightarrow{Pg(s)}^2 + 2 \mathcal{K}_1(s) \left(\overrightarrow{Pg(s)} \mid \tau(s) \right) - 2 \mathcal{K}_1(s) \left(\tau(s) \mid \overrightarrow{Pg(s)} \right) \\ &= \frac{d\mathcal{K}_1}{ds}(s) \overrightarrow{Pg(s)}^2. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses, la dérivée de la courbure est toujours < 0 ; la fonction Φ_P est strictement décroissante : sa dérivée est ≤ 0 et ne peut prendre la valeur 0 qu'en des paramètres isolés, paramètres des passages éventuels de la courbe en P .

Supposons $s_1 < s_2$, et soit P un point du cercle osculateur Γ_{s_1} . On a $\Phi_P(s_1) = 0$, donc $\Phi_P(s_2) < 0$, et $E(P, s_2) = \mathcal{K}_1(s_2) \Phi_P(s_2) < 0$. Le point P est donc strictement à l'intérieur du cercle osculateur Γ_{s_2} . Le cercle Γ_{s_1} est donc strictement à l'intérieur du cercle Γ_{s_2} , ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 18 (*Inégalité isopérimétrique, démonstration de Hurwitz*) :

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , 2π -périodique, telle que

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0. \text{ Démontrer :}$$

$$\int_0^{2\pi} f'(t) dt \geq \int_0^{2\pi} f^2(t) dt, \text{ l'égalité ayant lieu ssi}$$

$$\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = a \cos t + b \sin t.$$

b) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^1 normale, 2π -périodique, telle que $g|_{[0, 2\pi[}$ soit injective, de coordonnées g_1 et g_2 dans \mathcal{R} . Montrer qu'on peut, sans modifier les hypothèses, supposer O choisi tel que $\int_0^{2\pi} g_1(s) ds = 0$, ce qu'on suppose pour la suite. On note A l'aire renfermée par g : $A = \int_0^{2\pi} g_1(s) g_2'(s) ds$. A partir de : $2(\pi - A) = \int_0^{2\pi} (g_1'^2(s) - g_1^2(s)) ds + \int_0^{2\pi} (g_1(s) - g_2'(s))^2 ds$, et à l'aide de a), montrer $\pi \geq A$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle.

c) Les hypothèses sur g sont inchangées, sauf que la période 2π est remplacée par $L > 0$. Dédurre du b) que $L^2 \geq 4\pi A$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle (inégalité isopérimétrique).

d) On conserve toutes les hypothèses de c), et on suppose en outre g de classe \mathcal{C}^2 et de fonction courbure \mathcal{K}_1 assc

≥ 0 . Avec les notations de l'exercice 15 ci-dessus partie III, on note D le diamètre de C . Prouver que $A \leq \frac{1}{4} \pi D^2$, l'égalité ayant lieu ssi la trajectoire de g est un cercle.

Prouver en outre ici le théorème d'Emch (1926) : il existe un carré formé avec 4 tangentes à g . Essayer enfin d'étendre le théorème d'Emch au cas où \mathcal{K}_1 n'est pas de signe constant. ■

a) Les fonctions f et f' étant continues et 2π -périodiques à valeurs réelles, on a (égalité de Parseval : Théorème IV.2.2 Cours Tome 3) :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu(f)|^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu(f')|^2.$$

Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ on a par définition :

$$c_\nu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(t) dt \quad \text{et} \quad c_\nu(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f'(t) dt.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ l'égalité :

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f'(t) dt = [e^{-i\nu t} f(t)]_0^{2\pi} + i\nu \int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(t) dt.$$

Nous en déduisons :

$$c_\nu(f') = i\nu c_\nu(f).$$

Comme $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$ par hypothèse, on voit que :

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^*} |\nu|^2 |c_\nu(f)|^2 \geq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^*} |c_\nu(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2.$$

Il y a égalité dans l'inégalité (1) si, et seulement si, $(\forall \nu \in \mathbb{Z}) \quad |\nu| > 1 \Rightarrow c_\nu(f) = 0$. S'il y a égalité, puisque f est continue et que la famille $(c_\nu(f))_{\nu \in \mathbb{Z}}$ est de support fini, d'après le Corollaire 2 du Théorème IV.2.1 du Tome 3 du Cours, on a :

$$(2) \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = c_1(f) e^{it} + c_{-1}(f) e^{-it}.$$

Comme l'égalité (2) implique $(\forall \nu \in \mathbb{Z}) \quad |\nu| > 1 \Rightarrow c_\nu(f) = 0$, on voit qu'il y a égalité dans l'inégalité (1) si, et seulement si, l'égalité (2) est vérifiée. Enfin, il est clair que les fonctions réelles vérifiant la condition (2) sont les fonctions de la forme $t \mapsto a \cos t + b \sin t$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) Pour que $\int_0^{2\pi} g_1(s) ds = 0$, il suffit de prendre comme origine l'isobary-centre de la courbe, c'est-à-dire le point :

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s) ds.$$

Dans ce cas, on a aussi $\int_0^{2\pi} g_2(s) ds = 0$.

On observe que, puisque l'arc g est normal :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (g_1'^2 - g_1^2) + \int_0^{2\pi} (g_1 - g_2')^2 &= \int_0^{2\pi} (g_1'^2 - g_1^2 + g_1^2 - 2g_1 g_2' + g_2'^2) = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2g_1 g_2') = 2\pi - 2 \int_0^{2\pi} g_1 g_2' = 2\pi - 2A. \end{aligned}$$

D'après le a), $\int_0^{2\pi} (g_1'^2 - g_1^2) \geq 0$, donc $\pi \geq A$, l'égalité ayant lieu si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $(\forall s \in \mathbb{R}) \quad g_1(s) = a \cos s + b \sin s$, et $g_2' = g_1$. On a donc $A = \pi$ si, et seulement si, il existe des réels a, b, c tels que :

$$(\forall s \in \mathbb{R}) \quad g_1(s) = a \cos s + b \sin s \quad \text{et} \quad g_2(s) = c + a \sin s - b \cos s.$$

Comme d'autre part on suppose dans cette question que g est normale et 2π -périodique, on doit avoir $a^2 + b^2 = 1$. On a donc l'égalité $A = \pi$ si, et seulement si, g est un paramétrage normal d'un cercle de rayon 1.

c) Choisissons une origine $O \in \mathcal{C}$. La fonction g de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , normale, L -périodique étant donnée, considérons l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$, telle que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad h(2\pi t) = O + \frac{2\pi}{L} \overrightarrow{Og(Lt)}.$$

Il est clair que la fonction h est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et comme : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad h'(2\pi t) = g'(Lt)$, c'est un arc normal, de longueur 2π . Notons A_g et A_h les aires renfermées par g , respectivement par h . On a évidemment :

$$A_h = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 A_g.$$

D'après le b), on a l'inégalité $A_h \leq \pi$, d'où : $4\pi A_g \leq L^2$ (4). Il y a égalité dans l'inégalité (4) si, et seulement si, h est un paramétrage normal d'un cercle (de rayon 1 de longueur 2π). Il y a donc égalité dans l'inégalité (4) si, et seulement si, g est un paramétrage normal d'un cercle de longueur L .

d) Introduisons le réel R tel que $D = 2R$. Soient s_1 et s_2 réels tels que $\|\overrightarrow{g(s_1)g(s_2)}\| = D$; on peut supposer, puisque g est L -périodique, $s_1 < s_2 < s_1 + L$. Soit O le milieu de $(g(s_1), g(s_2))$, \vec{i} le vecteur unitaire tel que $D\vec{i} = \overrightarrow{g(s_1)g(s_2)}$, et \vec{j} le vecteur unitaire tel que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormal direct. Pour $s \in \mathbb{R}$, les coordonnées de $g(s)$ dans \mathcal{R} seront notées $(x(s), y(s))$. On a $x(s_1) = -R$, $y(s_1) = 0$, $x(s_2) = R$ et $y(s_2) = 0$. Introduisons aussi un relèvement $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^1 , de l'angle de g' avec \vec{i} ; comme la courbure est ≥ 0 , θ est une fonction croissante. Rappelons que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $x'(s) = \cos \theta(s)$ et $y'(s) = \sin \theta(s)$. Il est clair que la fonction x atteint en s_1 un minimum strict et en s_2 un maximum strict; nous en déduisons $\theta(s_1) \in -\pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$ et $\theta(s_2) \in \pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$. En effet, si on pouvait choisir $\theta(s_1) = \pi/2$, alors il existerait $\alpha > 0$ tel que pour tout $s \in [s_1, s_1 + \alpha[$, $\varphi(s_1) \in [\pi/2, 3\pi/2[$; la fonction x serait strictement décroissante sur cet intervalle, ce qui est exclu; on procède de manière analogue pour démontrer $\theta(s_2) \in \pi/2 + 2\mathbb{Z}\pi$. D'après le Théorème de Whitney (cf. Exercice 15, partie I), $\theta(s_1 + L) = \theta(s_1) + 2\pi$; nous en déduisons qu'on suppose $\theta(s_1) = -\pi/2$ et $\theta(s_2) = \pi/2$. Remarquons encore que sur $[s_1, s_1 + L]$, la fonction θ ne peut prendre la valeur $-\pi/2$ qu'en s_1 (sinon x serait constante au voisinage de s_1 , et cela est exclu parce que dans ce cas le diamètre serait $> D$) et que de même θ ne peut prendre la valeur $\pi/2$ qu'en s_2 . La fonction x est donc strictement croissante sur l'intervalle $[s_1, s_2]$; elle établit un homéomorphisme strictement croissant $[s_1, s_2] \rightarrow [-R, R]$, qui induit entre les intérieurs de ces intervalles un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. De manière analogue, la fonction x établit un homéomorphisme strictement décroissant $[s_2, s_1 + L] \rightarrow [-R, R]$, qui induit entre les intérieurs de ces intervalles un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. La fonction y est strictement décroissante puis strictement croissante sur $[s_1, s_2]$, donc reste < 0 sur $]s_1, s_2[$; de même elle reste > 0 sur $]s_2, s_1 + L[$.

Notons φ_1 la fonction numérique définie sur $[-R, R]$ telle que pour tout $s \in [s_1, s_1 + L]$, $\varphi_1(x(s)) = y(s)$; la fonction φ_1 est continue, $\varphi_1(-R) = \varphi_1(R) = 0$, φ_1 reste < 0 sur $] -R, R[$, et est de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle ouvert. Pour tout $s \in] -R, R[$, on a l'égalité $\varphi_1'(x(s)) = \operatorname{tg} \theta(s)$, ce qui prouve que φ_1' est croissante; la fonction φ_1 est donc convexe. On définit de manière analogue sur $[-R, R]$ la fonction φ_2 , telle que pour tout $s \in [s_2, s_1 + L]$, $\varphi_2(x(s)) = y(s)$; la fonction φ_2 est continue, $\varphi_2(-R) = \varphi_2(R) = 0$ et cette fonction est concave sur $[s_2, s_1 + L]$.

Montrons que l'enveloppe convexe $\hat{\Gamma}$ de Γ est l'ensemble \mathcal{C} des points de \mathcal{E} dont les coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} vérifient $-R \leq x \leq R$ et $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$. Comme pour tout $x \in [-R, R]$ les points de coordonnées $(x, \varphi_1(x))$ et $(x, \varphi_2(x))$ appartiennent à Γ , l'inclusion $\mathcal{C} \subset \hat{\Gamma}$ est évidente. Réciproquement, \mathcal{C} contient Γ , et est une partie convexe puisque la fonction φ_1 est convexe et que φ_2 est concave. On a donc bien l'égalité $\mathcal{C} = \hat{\Gamma}$.

L'aire de $\hat{\Gamma}$ est :

$$A = \int_{-R}^R (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx .$$

On en déduit l'égalité :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-R}^0 (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx + \int_0^R (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx = \\ &= \int_0^R (\varphi_2(x) - \varphi_1(x) + \varphi_2(-x) - \varphi_1(-x)) dx . \end{aligned}$$

Les points de coordonnées $(x, \varphi_2(x))$ et $(-x, \varphi_1(-x))$ sont tous les deux éléments de Γ ; nous en déduisons l'inégalité :

$$4x^2 + (\varphi_2(x) - \varphi_1(-x))^2 \leq D^2 \quad \text{soit} \quad 0 \leq \varphi_2(x) - \varphi_1(-x) \leq 2\sqrt{R^2 - x^2} .$$

On trouve de manière analogue :

$$4x^2 + (\varphi_2(-x) - \varphi_1(x))^2 \leq D^2 \quad \text{soit} \quad 0 \leq \varphi_2(-x) - \varphi_1(x) \leq 2\sqrt{R^2 - x^2} .$$

Nous en déduisons :

$$(1) \quad A \leq 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \pi R^2 ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Examinons le cas d'égalité. Comme les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues, s'il y a égalité dans l'inégalité (1) alors pour tout $x \in [0, R]$, $\varphi_2(x) - \varphi_1(-x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ et $\varphi_2(-x) - \varphi_1(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, c'est-à-dire :

$$(\forall x \in [-R, R]) \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(-x) + 2\sqrt{R^2 - x^2} .$$

La distance entre les points de Γ de coordonnées $(-x, \varphi_1(-x))$ et $(x, \varphi_2(x))$ est donc pour tout $x \in [-R, R]$ égale au diamètre D . Cela implique que pour tout $x \in]-R, R[$, la tangente à Γ au point de coordonnées $(x, \varphi_2(x))$ est orthogonale au vecteur joignant ces points, c'est-à-dire la condition :

$$2x + 2\varphi_2'(x)\sqrt{R^2 - x^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi_2'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} .$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante c telle que :

$$(\forall x \in]-R, R[) \quad \varphi_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + c ,$$

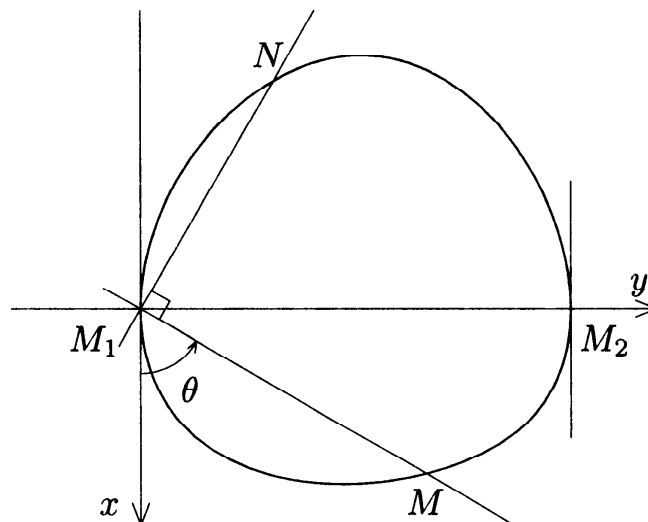
la constante étant nécessairement nulle puisque φ_2 est continue sur $[-R, R]$ et que $\varphi_2(R) = 0$. On a donc nécessairement :

$$(\forall x \in [-R, R]) \quad \varphi_2 = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Nous pouvons donc conclure que s'il y a égalité dans l'inégalité (1), Γ est nécessairement un cercle, condition qui est évidemment suffisante.

Autre solution

Certaines affirmations restent à justifier, elles sont repérées par un signe (*), mais la justification est assez facile si on utilise ce qui a été mis en place dans la démonstration précédente. On note ici $M_1 = g(s_1)$ et $M_2 = g(s_2)$ ($M_1 M_2$ est un diamètre); on utilisera dans ce qui suit le repère orthonormal direct $\mathcal{R}' = (M_1; -\vec{j}, \vec{i})$. Le lecteur pourra s'aider de la figure suivante :



Dans le repère \mathcal{R}' la courbe Γ est le support d'un arc défini en coordonnées polaires par une équation $\rho = \rho(\theta)$, où ρ est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , dont π est une antipériode (*); le point de paramètre θ sur cet arc sera noté $M(\theta)$; on pose aussi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $N(\theta) = M(\theta + \pi/2)$. Les points de passage à l'origine sont les points de paramètre $k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ (*). Comme la courbe Γ est de diamètre D , pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\rho^2(\theta) + \rho^2(\theta + \pi/2) \leq D^2$ (théorème de Pythagore). L'aire intérieure A de Γ peut être calculée en polaires, en faisant varier θ dans l'intervalle $]0, \pi[$ (*). On trouve :

$$2A = \int_0^\pi \rho^2(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \rho^2(\theta) d\theta + \int_0^{\pi/2} \rho^2(\theta + \pi/2) d\theta \leq \int_0^{\pi/2} D^2 d\theta = \frac{\pi D^2}{2}.$$

On obtient donc l'inégalité $A \leq \pi R^2$, et il ne peut y avoir égalité que si pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, $\rho^2(\theta) + \rho^2(\theta + \pi/2) = D^2$. Si cette

réalisée, pour tout $\theta \in]0, \pi/2[$, le segment $[M(\theta), N(\theta)]$ est un diamètre de Γ et la tangente en $M(\theta)$ est orthogonale au vecteur \overrightarrow{MN} ; cette dernière condition s'écrit :

$$(\forall \theta \in]0, \pi/2[) \quad \rho(\theta) \rho'(\theta) = \rho(\theta) \rho(\theta + \pi/2) ,$$

d'où :

$$(\forall \theta \in]0, \pi/2[) \quad \rho'(\theta) = \rho(\theta + \pi/2) = \sqrt{D^2 - \rho^2(\theta)} .$$

On en déduit facilement que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta) = D \sin \theta$, et que la courbe Γ est nécessairement le cercle de diamètre $M_1 M_2$.

Théorème d'Emch

Nous supposons $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$. Soit K une partie compacte non vide de \mathbb{R}^2 . Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ nous poserons :

$$a_K(\theta) = \inf_{(x,y) \in K} (x \cos \theta + y \sin \theta) \quad \text{et} \quad b_K(\theta) = \sup_{(x,y) \in K} (x \cos \theta + y \sin \theta) .$$

Ceci nous permet de définir le diamètre de K suivant l'angle θ :

$$d_K(\theta) = b_K(\theta) - a_K(\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R}) .$$

Montrons que les fonctions a_K , b_K et d_K sont continues.

Nous noterons M un majorant de x et de y pour $(x, y) \in K$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$; comme K est une partie compacte, il existe $(x_0, y_0) \in K$ tel que $b_K(\theta_0) = x_0 \cos \theta_0 + y_0 \sin \theta_0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a donc l'inégalité :

$$b_K(\theta) \geq x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = b_K(\theta_0) + x_0 (\cos \theta - \cos \theta_0) + y_0 (\sin \theta - \sin \theta_0) .$$

On a d'autre part pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la majoration :

$$b_K(\theta) \leq b_K(\theta_0) + M |\cos \theta - \cos \theta_0| + M |\sin \theta - \sin \theta_0| .$$

Cet encadrement prouve $b_K(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \theta_0} b_K(\theta_0)$. La fonction b_K est donc continue. On démontrerait de manière analogue que la fonction a_K est continue ; nous en déduisons que la fonction d_K est continue.

On voit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$a_K(\theta + \pi) = -b_K(\theta) \quad \text{et} \quad b_K(\theta + \pi) = -a_K(\theta) .$$

Nous en déduisons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $d_K(\theta + \pi) = d_K(\theta)$. La fonction $\theta \mapsto d_K(\theta + \pi/2) - d_K(\theta)$ est continue, π -périodique et $\pi/2$ en est une anti-période ; il est donc clair que cette fonction prend la valeur 0.

qu'il existe, modulo π , un réel θ tel que les diamètres de K suivant les angles θ et $\theta + \pi/2$ soient égaux.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ soit p_θ l'application affine $(x, y) \mapsto \cos \theta x + \sin \theta y$. Comme p_θ conserve le barycentre, $p_\theta(\widehat{K}) = \widehat{p_\theta(K)}$. Or la cloture convexe de $p_\theta(K)$ est l'intervalle $[a_K(\theta), b_K(\theta)]$; nous en déduisons $a_{\widehat{K}} = a_K$, $b_{\widehat{K}} = b_K$ et $d_{\widehat{K}} = d_K$. Le diamètre de K suivant l'angle θ est donc identique au diamètre de l'enveloppe convexe de K suivant l'angle θ .

Supposons que K soit la trajectoire d'une courbe fermée de classe \mathcal{C}^1 régulière, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$; f supposée L -périodique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $a_K(\theta)$ est la valeur minimum de la fonction périodique $t \mapsto x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta$, et $b_K(\theta)$ sa valeur maximum; si ces valeurs extrêmes sont atteintes respectivement en t_1 et en t_2 , alors la dérivée de la fonction $t \mapsto x(t) \cos \theta + y(t) \sin \theta$ est nulle en t_1 et en t_2 , c'est-à-dire :

$$x'(t_1) \cos \theta + y'(t_1) \sin \theta = 0 \quad \text{et} \quad x'(t_2) \cos \theta + y'(t_2) \sin \theta = 0.$$

Une mesure de l'angle de la tangente en t_1 et en t_2 est donc $\theta + \pi/2$. D'après ce qui a été démontré pour une partie compacte K en général, il existe donc ici quatre tangentes à la courbe qui forment un carré, ce qu'il fallait démontrer.

§ IX.5 COURBES PLANES DÉFINIES PAR LEUR COURBURE ALGÈBRE

Exercice 1 :

Soit les deux courbes paramétrées f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ telles que $f_1(0) = f_2(0) = O$, et définies par :

pour $t > 0$,

$$f_1(t) = f_2(t) = O + (t e_1 + e^{-1/t^2} e_2),$$

pour $t < 0$,

$$f_1(t) = O + (t e_1 + e^{-1/t^2} e_2), \text{ et } f_2(t) = O + (t e_1 - e^{-1/t^2} e_2).$$

Soit $s = s(t)$ l'abscisse curviligne $t \mapsto \int_0^t \|f'_j(u)\|^2 du$ pour f_j ($j \in \{1, 2\}$), et soit $g_j(s)$ la courbe normale correspondante, \mathcal{C}^∞ -équivalente à f_j . Prouver que g_1 et g_2 ont même fonction courbure géométrique, mais que g_2 n'est pas déduite de g_1 par une isométrie de \mathcal{C} . ■

On notera $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction de classe \mathcal{C}^∞ , telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = e^{-1/t^2}$, et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de classe \mathcal{C}^∞ telle c

$t > 0$, $\psi(t) = \varphi(t)$, et pour tout $t < 0$, $\psi(t) = -\varphi(t)$. On vérifie facilement que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi'(t)| = |\psi'(t)|$, et $|\varphi''(t)| = |\psi''(t)|$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^t \|f'_1\|^2 = \int_0^t \sqrt{1 + (\varphi'(u))^2} du = \int_0^t \sqrt{1 + (\psi'(u))^2} du = \int_0^t \|f'_2\|^2 .$$

On associe donc aux deux courbes f_1 et f_2 la même abscisse curviligne, qui sera notée s .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après l'égalité (7) du § IX.4, la courbure géométrique de la courbe g_1 en $s(t)$ est : $\frac{|\varphi''(t)|}{(1 + \varphi'^2(t))^{3/2}}$, et la courbure géométrique de la courbe g_2 en $s(t)$ est $\frac{|\psi''(t)|}{(1 + \psi'^2(t))^{3/2}}$. D'après les remarques préliminaires, ces deux courbures sont toujours identiques.

S'il existait une isométrie affine L telle que $L \circ g_1 = g_2$, alors on aurait $L(g_1(0)) = g_2(0)$, soit $L(O) = O$, et $\vec{L}(g'_1(0)) = g'_2(0)$, soit $\vec{L}(e_1) = e_1$. L'isométrie L ne peut donc être que l'identité, ou la symétrie par rapport à la droite $O + \mathbb{R}e_1$. Ces deux éventualités sont à exclure, car pour tout $t < 0$ les points $g_1(s(t)) = f_1(t)$ et $g_2(s(t)) = f_2(t)$ sont de part et d'autre de la droite $O + \mathbb{R}e_1$, alors que pour tout $t > 0$ ces points sont du même côté. Les deux courbes g_1 et g_2 ne se déduisent donc pas l'une de l'autre par une isométrie.

Il est donc indispensable, dans le Théorème IX.5.1 (équation intrinsèque), de supposer que les deux courbes normales ont même fonction courbure *algébrique*.

Exercice 2 :

Soit la courbe \mathcal{S} de classe \mathcal{C}^∞ régulière paramétrée dans \mathcal{R} par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $x \mapsto O + (x e_1 + (\sin x) e_2)$. On considère l'abscisse curviligne $s = s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \cos^2 t} dt$ de f . Soit $\alpha_1(s)$ la courbure algébrique correspondante. On considère l'équation intrinsèque (1) $\mathcal{K}_1^2(s) = \alpha_1^2(s)$, avec $s \in \mathbb{R}$, où \mathcal{K}_1 est la courbure algébrique d'une courbe de classe \mathcal{C}^2 recherchée. Montrer que (1) possède des solutions périodiques (et en particulier dont la trajectoire est bornée). Ainsi (1) possède des solutions à trajectoire bornée, et d'autres (par exemple \mathcal{S} paramétrée par s) à trajectoire non bornée. ■

Soit $A = O$ et $B = f(\pi) = O + \pi e_1$. On note r la rotation de centre le point Ω de coordonnées $(-\pi/2, -\pi/2)$ et d'angle $-\pi/2$. On vérifie que $r(A) = B$, que $\vec{r}(f'(0)) = \vec{r}(e_1 + e_2) = e_1 - e_2 = f'(\pi)$, et que comme $f''(0) = f''(\pi) = 0$, on a aussi $\vec{r}(f''(0)) = f''(\pi)$. Nous noterons aussi $C = r(B)$ et $D = r(C)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \in [n\pi, (n+1)\pi[$, où $n \in \mathbb{Z}$, nous poserons $g(x) = r^n(f(x - n\pi))$. Comme la rotation r est d'ordre 4, il est clair que l'arc g est 4π -périodique.

Montrons que g est continue; il suffit de montrer que g est continue à gauche en les réels de la forme $n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$. Quand x tend vers $n\pi$ par valeurs inférieures, alors $g(x) = r^{n-1}(f(x - (n-1)\pi))$ a pour limite $r^{n-1}(f(\pi)) = r^n(r^{-1}(B)) = r^n(A)$; or $g(n\pi) = r^n(f(0)) = r^n(A)$. L'application g est donc continue.

Montrons que g est de classe \mathcal{C}^1 ; le problème se pose aux points de la forme $n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$. Quand x tend vers $n\pi$ par valeurs inférieures, d'après ce qui précède $g'(x) = \vec{r}^{n-1}(f'(x - (n-1)\pi))$, qui a pour limite $\vec{r}^{n-1}(f'(\pi)) = \vec{r}^n(\vec{r}^{-1}(f'(\pi))) = \vec{r}^n(f'(0))$. Quand x tend vers $n\pi$ par valeurs supérieures, on a $g'(x) = \vec{r}^n(f'(x - n\pi))$; la limite de $g'(x)$ est donc $\vec{r}^n(f'(0))$. On voit donc que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On démontrerait de manière analogue, en utilisant l'égalité :

$$\vec{r}(f''(0)) = f''(\pi) (= 0),$$

que g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x \in [n\pi, (n+1)\pi[$, où $n \in \mathbb{Z}$, on a $\|g'(x)\| = \|f'(x - n\pi)\|$. La fonction $x \mapsto \|f'(x)\| = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$ étant π -périodique, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|f'(x)\| = \|g'(x)\|$. On peut donc prendre la même abscisse curviligne s pour l'arc f et pour l'arc g .

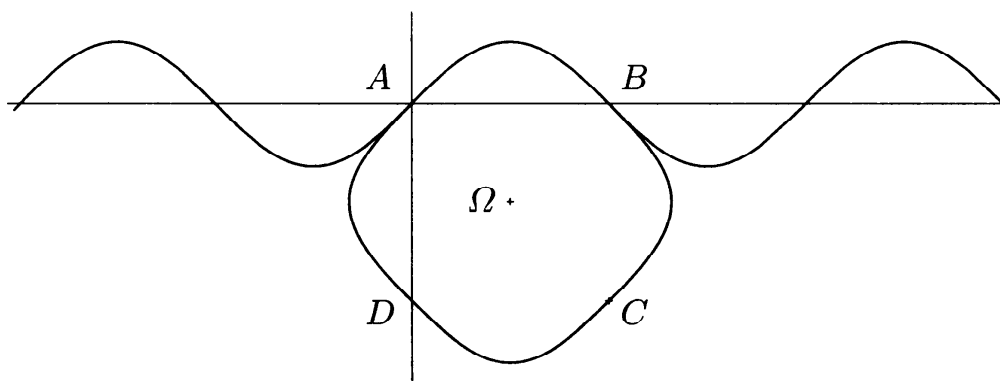
Calculons la fonction courbure de l'arc régulier f . Au point de paramètre x , la courbure algébrique de f est :

$$\mathcal{K}_{1f}(x) = \frac{[f'(x), f''(x)]}{\|f'(x)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}} = -\frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}.$$

Si $x \in [n\pi, (n+1)\pi[$, où $n \in \mathbb{Z}$, la courbure algébrique de l'arc g en x est :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{1g}(x) &= \frac{[g'(x), g''(x)]}{\|g'(x)\|^3} = \frac{[\vec{r}^n(f'(x - n\pi)), \vec{r}^n(f''(x - n\pi))]}{\|f'(x - n\pi)\|^3} = \\ &= \mathcal{K}_{1f}(x - n\pi) = (-1)^n \mathcal{K}_{1f}(x). \end{aligned}$$

Il est donc clair que les arcs normaux associés à f et g par le choix de l'abscisse curviligne commune s , ont même fonction courbure géométrique.



Exercice 5 (*clothoïde, ou spirale de Cornu*) :

On identifie \mathcal{C} à \mathbb{C} à l'aide de \mathcal{R} . Soit λ un réel > 0 . On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto f(s) = -\int_s^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{\lambda^2} \sigma^2\right) d\sigma$.

a) Montrer que f est solution d'une équation intrinsèque de la forme $\mathcal{K}_1(s) = C s$ avec un $C \in \mathbb{R}^*$.

b) Soit $\theta(s)$ une détermination continue de l'angle orienté des vecteurs e_1 et $\overrightarrow{Of(s)}$. Montrer que $\theta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} +\infty$.

c) Posant $r = r(s) = \|\overrightarrow{Of(s)}\|$, calculer $r \frac{dr}{ds}$ sous forme d'intégrale. En déduire que la fonction $s \mapsto r(s)$ décroît strictement, puis, que f est un \mathcal{C}^∞ -plongement. Construire avec soin la trajectoire \mathcal{C} de f . ■

La convergence de l'intégrale définissant f a été démontrée dans la résolution de l'exercice 5 du § VIII.4 du tome 3.

a) La courbe paramétrée f est de classe \mathcal{C}^∞ . Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a : $f'(s) = \exp\left(\frac{i}{\lambda^2} s^2\right)$; la courbe f est donc normale, et un relèvement angulaire de l'angle du vecteur tangent est la fonction $\varphi : s \mapsto \frac{s^2}{\lambda^2}$; la fonction courbure de l'arc f est donc la fonction $\mathcal{K}_1 : s \mapsto \varphi'(s) = \frac{2s}{\lambda^2}$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a donc l'égalité : $\mathcal{K}_1(s) = C s$, où $C = \frac{2}{\lambda^2}$.

b) c)

1) La courbure algébrique de la courbe f étant strictement croissante, nous pouvons appliquer les méthodes de l'exercice 8 du § IX.4, dont nous reprendrons les notations. Soit $s_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'application $\varphi_{s_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{s_0}(s) = \mathcal{K}_1(s) \overrightarrow{f(s_0)f(s)}^2 + 2 \left(\overrightarrow{f(s_0)f(s)} \mid \vec{\tau}_1(s) \right).$$

Comme dans l'exercice 8 du § IX.4, on trouve que pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'_{s_0}(s) = \mathcal{K}'_1(s) \overrightarrow{f(s_0)f(s)}^2 = \frac{2}{\lambda^2} \overrightarrow{f(s_0)f(s)}^2.$$

La fonction φ_{s_0} est donc strictement croissante sur \mathbb{R} , nulle en s_0 , donc $\varphi_{s_0}(s) > 0$ si $s > s_0$ et $\varphi_{s_0}(s) < 0$ si $s < s_0$.

Pour $s = 0$, on a $\mathcal{K}_1(0) = 0$. Nous en déduisons que pour tout $s_0 > 0$, $\left(\overrightarrow{f(s_0)f(0)} \mid \vec{\tau}_1(0) \right) < 0$, et pour tout $s_0 < 0$, $\left(\overrightarrow{f(s_0)f(0)} \mid \vec{\tau}_1(0) \right) > 0$. La tangente au point de paramètre 0 partage donc la trajectoire en deux parties disjointes. Il est par ailleurs facile de voir que la courbe admet le point $f(0)$ comme centre de symétrie (cf. 4)). Supposons $0 < s < s_0$, d'où $\varphi_{s_0}(s) < 0$; comme $\mathcal{K}_1(s) > 0$, cela signifie que le point $f(s_0)$ est strictement à l'intérieur du cercle osculateur en s ; cela implique $f(s) \neq f(s_0)$. En faisant tendre s_0 vers $+\infty$, on voit que l'intérieur du cercle osculateur en s contient la limite de f , c'est-à-dire le point O . Soit $s_0 > 0$, choisissons s_1 tel que $s_0 < s_1$; comme $\varphi_{s_0}(s_1) > 0$, le point $f(s_0)$ est strictement extérieur au cercle osculateur en s_1 ; le point O étant intérieur à ce cercle, cela prouve $f(s_0) \neq O$. Par symétrie on voit qu'il en est de même pour la restriction de f à \mathbb{R}_-^* . Nous pouvons donc conclure que f est un arc simple, et que de plus les limites en $-\infty$ et $+\infty$ n'appartiennent pas à la trajectoire. D'après le lemme démontré lors de la résolution de l'exercice 5 du § VII.2, f est un \mathcal{C}^∞ -plongement.

2) Posons pour tout $s \in \mathbb{R}$, $r(s) = \|\overrightarrow{Of(s)}\|$; comme pour tout $s \in \mathbb{R}$, $O \neq f(s)$, la fonction r ne prend que des valeurs > 0 et est de classe \mathcal{C}^∞ .

La fonction $s \mapsto \frac{1}{r(s)} \overrightarrow{Of(s)}$, est de classe \mathcal{C}^∞ et à valeurs dans le cercle de rayon 1; d'après le théorème de relèvement, il existe une fonction $s \mapsto \theta(s)$, de classe \mathcal{C}^∞ , telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\theta(s)$ soit une mesure de l'angle orienté des vecteurs e_1 et $\overrightarrow{Of(s)}$. En utilisant l'identification de \mathcal{C} et de

\mathbb{C} , on peut écrire que pour tout $s \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{Of(s)} = r(s) e^{i\theta(s)}$, d'où : $\vec{\tau}(s) = f'(s) = (r'(s) + i r(s) \theta'(s)) e^{i\theta(s)}$, et $\vec{\tau}_1(s) = (-r(s) \theta'(s) + i r'(s)) e^{i\theta(s)}$. Soit $s > 0$, comme le point O est à l'intérieur du cercle osculateur en s , on a :

$$\mathcal{K}_1(s) \overrightarrow{Of(s)}^2 + 2 \left(\overrightarrow{Of(s)} \mid \vec{\tau}_1(s) \right) \leq 0.$$

Nous en déduisons : $(\overrightarrow{Of(s)} | \vec{\tau}_1(s)) < 0$. Or la valeur en s de ce produit scalaire est d'après le calcul précédent $-r^2(s) \theta'(s)$. On voit donc que pour tout $s > 0$, on a $\theta'(s) > 0$. On peut enfin remarquer que ce produit scalaire est aussi le produit scalaire des vecteurs $r(\theta) e^{i\theta(s)}$ et $i e^{i s^2/\lambda^2}$; c'est donc $r(\theta) \sin(\theta(s) - s^2/\lambda^2)$, qui reste < 0 . Il existe donc un entier k , tel que pour tout $s > 0$, $(\theta(s) - s^2/\lambda^2) \in](2k-1)\pi, 2k\pi[$, d'où :

$$\frac{s^2}{\lambda^2} + (2k-1)\pi < \theta(s) < \frac{s^2}{\lambda^2} + 2k\pi.$$

Cela implique évidemment $\theta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} +\infty$, et la fonction θ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

3) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $r(s) r'(s) = (\overrightarrow{Of(s)} | f'(s)) = (\overrightarrow{Of(s)} | \vec{\tau}(s))$. Comme pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a :

$$\overrightarrow{Of(s)} = - \int_s^{+\infty} \vec{\tau}(\sigma) d\sigma,$$

nous en déduisons :

$$r(s) r'(s) = - \int_s^{+\infty} (\vec{\tau}(\sigma) | \vec{\tau}(s)) d\sigma = - \int_s^{+\infty} \cos\left(\frac{\sigma^2 - s^2}{\lambda^2}\right) d\sigma.$$

Montrons que pour tout $s > 0$ l'intégrale est > 0 . En posant $v = \frac{\sigma^2 - s^2}{\lambda^2}$ on trouve :

$$-r(s) r'(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos v}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 v}} dv.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ posons :

$$I_k = \int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} \frac{\cos v}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 v}} dv = \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u)}} du,$$

et montrons $(\forall k \in \mathbb{N}) \quad I_k > 0$, ce qui démontrera $-r'(s)r(s) > 0$. On a :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u)}} du = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + \pi - u)}} du,$$

$$\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u)}} du = - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + \pi + u)}} du,$$

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u)}} du = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + 2\pi - u)}} du.$$

Pour $u \in]0, \pi/2[$, posons :

$$a = s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u) \quad \text{et} \quad b = s^2 + \lambda^2 (2k\pi + \pi - u) ;$$

on vérifie $b > a > 0$. On a l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} > \frac{1}{\sqrt{a + \lambda^2 \pi}} - \frac{1}{\sqrt{b + \lambda^2 \pi}} ,$$

en effet, la fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{a + t}} - \frac{1}{\sqrt{b + t}} ,$$

est décroissante (sa dérivée est < 0). Nous en déduisons que pour $u \in]0, \pi/2[$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + u)}} - \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + \pi - u)}} &> \\ &> \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + \pi + u)}} - \frac{\cos u}{\sqrt{s^2 + \lambda^2 (2k\pi + 2\pi - u)}} , \end{aligned}$$

et par conséquent $I_k > 0$, ce qu'il fallait démontrer. Nous en déduisons comme annoncé ci-dessus que pour tout $s > 0$, $r'(s) < 0$, et par conséquent que la fonction r est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

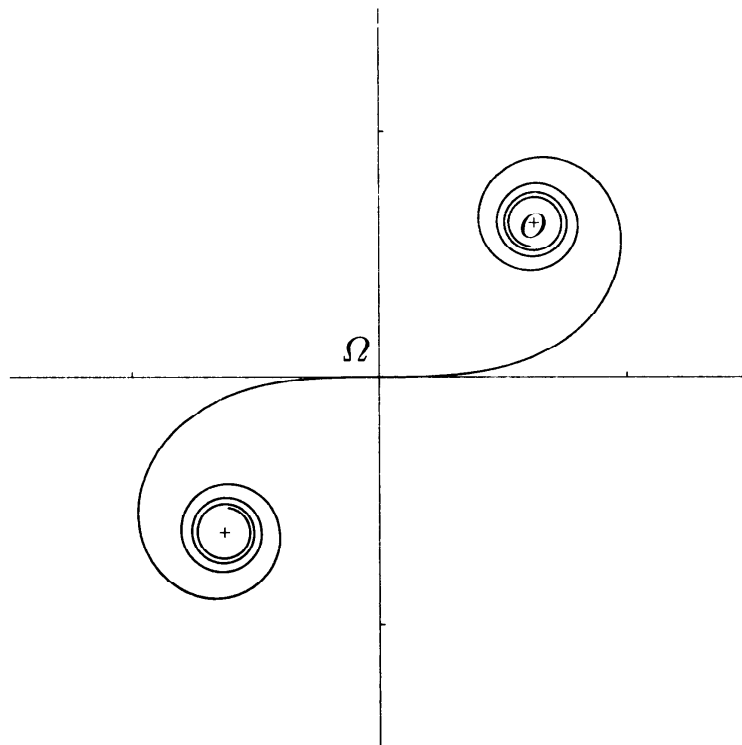
4) Soit $\Omega = f(0)$. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\Omega f(s)} = \int_0^s \exp\left(\frac{i}{\lambda^2} \sigma^2\right) d\sigma .$$

Il est donc clair que la fonction $s \mapsto \overrightarrow{\Omega f(s)}$ est impaire, et par conséquent que la trajectoire de f est symétrique par rapport au point Ω . La tangente au point Ω est la droite dirigée par e_1 ; d'après 1), elle sépare la trajectoire en deux parties disjointes. D'après la résolution de l'exercice 5 du § VIII.4 du tome 3, on a :

$$\overrightarrow{\Omega O} = \int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{i}{\lambda^2} \sigma^2\right) d\sigma = \lambda \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1 + i) .$$

On obtient la représentation graphique suivante :



On a pris $\lambda = 1$, et fait varier t dans l'intervalle $[-5, 5]$. On remarque que $f(t)$ converge assez lentement vers le point limite O quand t tend vers $+\infty$.

§ IX.6 DÉVELOPPÉES, PARALLÈLES, DÉVELOPPANTES

Exercice 1 :

Soit la courbe paramétrée : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ donnée par ses coordonnées dans \mathcal{R} :

$$f_1(t) = 3 \cos t + 3 \cos 2t + \cos 3t,$$

$$f_2(t) = 3 \sin t + 3 \sin 2t + \sin 3t.$$

Tracer la courbe ; déterminer sa développée et trouver la longueur de cette développée quand t décrit $[0, 2\pi]$. ■

1) La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ , 2π -périodique ; f_1 est paire et f_2 est impaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit $z(t)$ l'affixe de $f(t)$ dans le repère \mathcal{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$z(t) = 3e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it},$$

d'où :

$$z'(t) = 3i(e^{it} + 2e^{2it} + e^{3it}) = 3ie^{it}(1 + e^{it})^2 = 12ie^{2it}$$

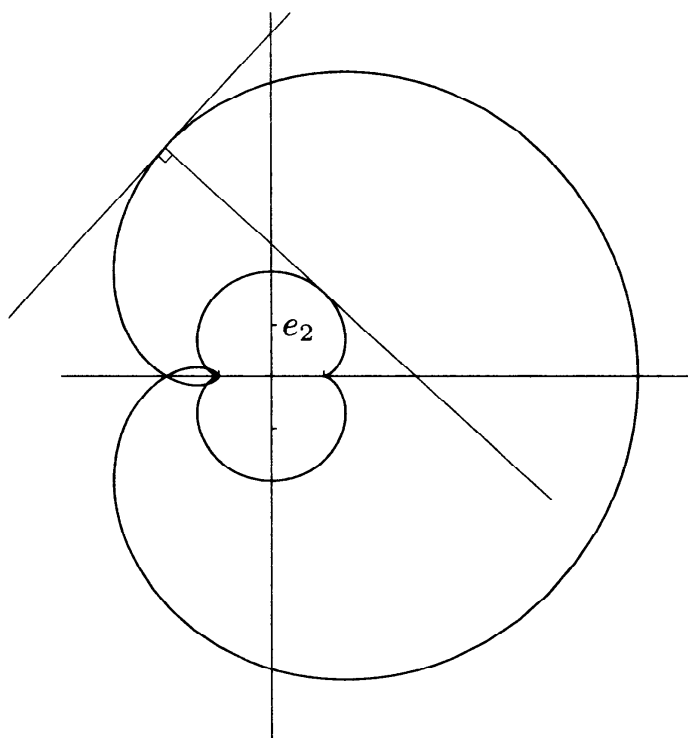
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'_1(t) = -6(\cos t + 1) \sin 2t \quad \text{et} \quad f'_2(t) = 6(\cos t + 1) \cos 2t.$$

On obtient facilement le tableau de variations suivant :

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f'_1	0	—	0	+	0
f'_2		+	0	—	0
f_1	7	$\sqrt{2}$	—3	$-\sqrt{2}$	-1
f_2	0	$2\sqrt{2}+3$	2	$2\sqrt{2}-3$	0

Les points stationnaires de f sont les points de paramètres $\pi + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$; il y a un seul point stationnaire dans une période, le point de paramètre π . On trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z''(t) = -3(e^{it} + 4e^{2it} + 3e^{3it})$ et $z^{(3)}(t) = -3i(e^{it} + 8e^{2it} + 9e^{3it})$; on en déduit $z''(\pi) = -3(-1 + 4 - 3) = 0$, et $z^{(3)}(\pi) = -3i(-1 + 8 - 9) = 6i$; on trouve aussi $z^{(4)}(0) = -36$. Comme $z'(\pi) = z''(\pi) = 0$, et que $(z^{(3)}(\pi), z^{(4)}(\pi))$ est \mathbb{R} -libre, on voit que le point de paramètre π n'est pas un point de rebroussement ; la tangente en ce point est dirigée par le vecteur e_2 . On obtient la représentation graphique suivante :



On observe un point double à l'intersection avec la droite $O + \mathbb{R} e_1$; les paramètres de passage à ce point double sont $2\pi/3$ et $-2\pi/3$, et son abscisse est -2 .

2) Nous considérerons la restriction de f à l'intervalle $] -\pi, \pi[$, qui est une courbe de classe \mathcal{C}^∞ régulière. D'après 1), au point de paramètre t , l'afixe du vecteur tangent unitaire est $i e^{2it}$ et le vecteur tangent est de longueur $12 \cos^2(t/2)$. Un relèvement angulaire continu de l'angle du vecteur tangent est la fonction $\varphi : t \mapsto \pi/2 + 2t$. On a donc pour tout $t \in] -\pi, \pi[$:

$$\rho_1(t) = \frac{|z'(t)|}{2} = 6 \cos^2(t/2) = 3(\cos t + 1).$$

Le centre de courbure en t a donc pour affixe :

$$\begin{aligned} c(t) &= z(t) + \rho_1(t) i \frac{z'(t)}{|z'(t)|} = z(t) + \frac{i}{2} z'(t) = \\ &= 3e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it} - \frac{3}{2}e^{it} - 3e^{2it} - \frac{3}{2}e^{3it} = \frac{1}{2}(3e^{it} - e^{3it}). \end{aligned}$$

La développée est donc une néphroïde (cf. § VIII.3 Exemple 3).

Pour chaque arc où le rayon de courbure est monotone, la longueur de l'arc correspondant de la développée est la valeur absolue de la différence des rayons de courbure aux extrémités. Comme $\rho_1(t) = 3(\cos t + 1)$, le rayon de courbure est monotone sur l'intervalle $[0, \pi[$. La longueur de la développée entre le point de paramètre 0 et le point de paramètre $t \in]0, \pi[$, est donc : $6 - 3(\cos t + 1)$; cette longueur a pour limite 6 quand t tend vers π . Par symétrie on en déduit que la longueur de la développée est : $L = 12$.

Exercice 2 (triangle de Reuleaux) :

On identifie \mathcal{C} à \mathbb{C} à l'aide de \mathcal{R} . On donne l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ défini par

$$t \mapsto 2e^{it} + e^{-2it} + \frac{8}{3}(1 - \cos(3t/2))e^{-it/2}.$$

a) Préciser les tangentes géométriques aux paramètres stationnaires.

b) Soit \mathcal{N}_t la normale en t (si t est stationnaire, \mathcal{N}_t sera la normale géométrique). Prouver que la famille $(\mathcal{N}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ enveloppe une hypocycloïde à 3 rebroussements.

c) Que remarque-t-on sur la distance des tangentes à f en t et $t + 2\pi$? Interprétation géométrique (on dit que f est "de largeur constante"). ■

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned} f(t) &= 2e^{it} + e^{-2it} + \frac{4}{3} \left(2 - e^{i3t/2} - e^{-i3t/2} \right) e^{-it/2} = \\ &= 2e^{it} + e^{-2it} + \frac{8}{3} e^{-it/2} - \frac{4}{3} e^{it} - \frac{4}{3} e^{-2it} = \\ &= \frac{1}{3} \left(8 e^{-it/2} + 2e^{it} - e^{-2it} \right) . \end{aligned}$$

On trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2i}{3} \left(-2 e^{-it/2} + e^{it} + e^{-2it} \right) = \frac{2i}{3} e^{it} \left(1 - 2 e^{-i3t/2} + e^{-3it} \right) = \\ &= \frac{2i}{3} e^{it} \left(1 - e^{-i3t/2} \right)^2 = \frac{2i}{3} e^{it} e^{-i3t/2} (2i \sin(3t/4))^2 = \\ &= -\frac{8i}{3} e^{-it/2} \sin^2(3t/4) . \end{aligned}$$

Les points stationnaires sont les points de paramètres $t_k = 4k\pi/3$, où $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f étant 4π -périodique, on voit qu'il y a 3 points stationnaires sur la trajectoire.

Au voisinage de t_k on a l'équivalence :

$$\sin(3t/4) = \sin(3t/4) - \sin(3t_k/4) \sim \frac{3}{4} \cos(3t_k/4) (t - t_k) \sim \frac{3}{4} (-1)^k (t - t_k) ,$$

d'où :

$$f'(t) \sim -\frac{8i}{3} e^{-it_k/2} \frac{9}{16} (t - t_k)^2 \sim -\frac{3i}{2} e^{-it_k/2} (t - t_k)^2 .$$

Nous en déduisons $f'(t_k) = f''(t_k) = 0$ et $f^{(3)}(t_k) = -3i e^{-it_k/2} \neq 0$. Par calcul direct on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(4)}(t) = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{16} e^{-it/2} + 2e^{it} - 16e^{-2it} \right) ,$$

et par conséquent, et posant $z_k = e^{-it_k/2} = e^{-2ik\pi/3}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (on remarque $z_k^3 = 1$) :

$$f^{(4)}(t_k) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} z_k + 2z_k^{-2} - 16z_k^4 \right) = \frac{z_k}{3} \left(\frac{1}{2} + 2 - 16 \right) = -\frac{9z_k}{2} .$$

La famille $(f^{(3)}(t_k), f^{(4)}(t_k))$ est \mathbb{R} -libre puisque $f^{(3)}(t_k) = -3i z_k$. Les points de paramètres t_k , où $k \in \mathbb{Z}$ ne sont donc pas des points de rebroussement ; en ces points la tangente géométrique est dirigée par le vecteur unitaire $-i e^{-it_k/2}$.

b) D'après le calcul de $f'(t)$ du a) et ce qui précède, on voit que la tangente géométrique est toujours dirigée par le vecteur unitaire $-i e^{-it/2}$; pour tout $t \in \mathbb{R}$ la normale géométrique \mathcal{N}_t est donc la droite qui passe par $f(t)$ et qui est dirigée par le vecteur unitaire $e^{-it/2}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous poserons $\tau(t) = -i e^{-it/2}$ et $\nu(t) = e^{-it/2}$; la base $(\tau(t), \nu(t))$ est une base orthonormale directe, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau'(t) = -\nu(t)/2$. Pour éviter les confusions, le produit scalaire canonique dans \mathbb{C} sera noté $B(\cdot, \cdot)$. L'équation en Z de la normale géométrique \mathcal{N}_t est :

$$B(Z, \tau(t)) = B(f(t), \tau(t)) .$$

L'équation dérivée est :

$$B(Z, -\nu(t)/2) = B(f'(t), \tau(t)) + B(f(t), -\nu(t)/2) .$$

Le système de ces deux équations peut s'écrire sous la forme :

$$B(Z - f(t), \tau(t)) = 0 \quad \text{et} \quad B(Z - f(t), \nu(t)) = -2 B(f'(t), \tau(t)) .$$

La base $(\tau(t), \nu(t))$ étant orthonormale, nous en déduisons que ce système a une solution et une seule, le point de contact $C(t)$, qui est :

$$C(t) = f(t) - 2 B(f'(t), \tau(t)) \nu(t) .$$

Le lecteur aura bien sûr reconnu le calcul de la développée de l'arc f ; nous avons, par cette méthode, évité le problème posé par l'existence des points stationnaires. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f'(t) = |f'(t)| \tau(t)$, et que $\nu(t) = i \tau(t)$, on a :

$$C(t) = f(t) - 2 |f'(t)| i \tau(t) = f(t) - 2i f'(t) .$$

Nous en déduisons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{3} \left(8 e^{-it/2} + 2 e^{it} - e^{-2it} \right) + \frac{4}{3} \left(-2 e^{-it/2} + e^{it} + e^{-2it} \right) = \\ &= 2 e^{it} + e^{-2it} . \end{aligned}$$

On reconnaît une hypocycloïde à 3 rebroussements.

On remarque que la fonction $t \mapsto C(t)$ est 2π -périodique ; pour tout $t \in \mathbb{R}$, le centre de courbure en t de f est donc confondu avec le centre de courbure en $t + 2\pi$; comme d'autre part la normale en t est dirigée par le vecteur unitaire $e^{-it/2}$, et la normale en $t + 2\pi$ par $e^{-i(t+2\pi)/2} = -e^{-it/2}$, on voit que les normales \mathcal{N}_t et $\mathcal{N}_{t+2\pi}$ sont confondues.

c) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $t \in \mathbb{R}$ posons :

$$f_{t_0}(t) = \frac{1}{\tau(t_0)} f(t) = i e^{i t_0/2} f(t) .$$

Le complexe $f_{t_0}(t)$ est l'affixe de $f(t)$ dans le repère $(O; \tau(t_0), \nu(t_0))$. On trouve :

$$f'_{t_0}(t) = i e^{i t_0/2} f'(t) = \frac{8}{3} e^{i(t_0-t)/2} \sin^2(3t/4) .$$

Notons $y_{t_0}(t)$ la partie imaginaire de $f_{t_0}(t)$; on a :

$$y'_{t_0}(t) = \frac{8}{3} \sin((t_0 - t)/2) \sin^2(3t/4) .$$

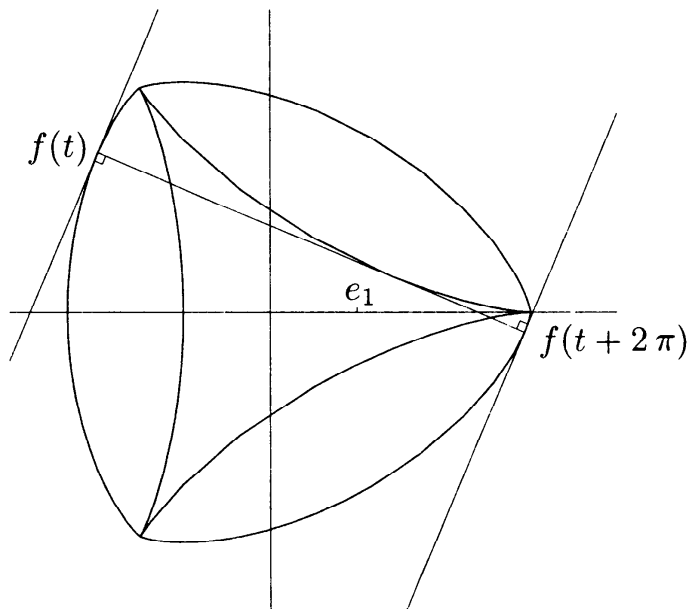
Il est clair que la fonction y_{t_0} est strictement croissante sur $[t_0 - 2\pi, t_0]$, et strictement décroissante sur $[t_0, t_0 + 2\pi]$; ses valeurs sont comprises entre sa valeur en t_0 et sa valeur en $t_0 + 2\pi$. On voit donc que toute la trajectoire de f est comprise entre la tangente en t_0 et la tangente en $t_0 + 2\pi$, droites qui sont parallèles. La largeur de la bande comprise entre ces deux tangentes est la partie imaginaire du complexe $f_{t_0}(t_0) - f_{t_0}(t_0 + 2\pi)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on trouve (en ne tenant compte dans le calcul que des termes non 2π -périodiques) :

$$f(t) - f(t + 2\pi) = \frac{8}{3} \left(e^{-i t/2} - e^{-i (t+2\pi)/2} \right) = \frac{16}{3} e^{-i t/2} .$$

Nous en déduisons :

$$f_{t_0}(t_0) - f_{t_0}(t_0 + 2\pi) = \frac{16}{3} i .$$

La largeur de la courbe est donc constante égale à $16/3$.



Exercice 7 (Développôides) :

Soit $g : I \rightarrow \mathcal{E}$ une courbe de classe \mathcal{C}^2 birégulière normale et $\alpha \in]0, \pi[$. Notons $(\vec{\tau}, \vec{\tau}_1)$ la base de Frenet et \mathcal{K}_1 la courbure algébrique de g . Soit \mathcal{D}_s la droite :

$$\mathcal{D}_s = g(s) + \mathbb{R} (\cos \alpha \vec{\tau}(s) + \sin \alpha \vec{\tau}_1(s)) .$$

a) Donner une condition suffisante pour que l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_s)_{s \in I}$ soit définie. Si c'est le cas, cette enveloppe est appelée une *développôide* de g .

b) Prouver que toute développôide d'une ellipse se déduit par une affinité convenable d'une courbe *parallèle d'astroïde* (Texeira). ■

a) Nous identifierons \mathcal{E} à \mathbb{C} par le choix d'un repère orthonormal direct \mathcal{R} . Le produit scalaire dans \mathbb{C} sera noté $B(\cdot, \cdot)$. Soit $s \mapsto \varphi(s)$ un relèvement angulaire du vecteur tangent. L'équation en Z de la droite \mathcal{D}_s est :

$$B(Z, i e^{i(\varphi(s)+\alpha)}) = B(g(s), i e^{i(\varphi(s)+\alpha)}) .$$

L'équation dérivée s'écrit :

$$B(Z, -\mathcal{K}_1(s) e^{i(\varphi(s)+\alpha)}) = B(\vec{\tau}(s), i e^{i\alpha} \vec{\tau}(s)) + B(g(s), -\mathcal{K}_1(s) e^{i(\varphi(s)+\alpha)}) .$$

On remarque que :

$$B(\vec{\tau}(s), i e^{i\alpha} \vec{\tau}(s)) = B(1, i e^{i\alpha}) = -\sin \alpha .$$

Le système de ces deux équations peut s'écrire :

$$(1) \quad B(Z - g(s), i e^{i\alpha} \vec{\tau}(s)) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_1(s) B(Z - g(s), e^{i\alpha} \vec{\tau}(s)) = \sin \alpha .$$

On voit donc que le paramètre s est affinement régulier si, et seulement si, $\mathcal{K}_1(s) \neq 0$. Cette condition étant par hypothèse vérifiée pour tout $s \in I$, la famille $(\mathcal{D}_s)_{s \in I}$ a donc une enveloppe.

Le couple $(e^{i\alpha} \vec{\tau}(s), i e^{i\alpha} \vec{\tau}(s))$ étant une base orthonormale directe, on déduit facilement de (1) les coordonnées du point de contact en s ; on trouve :

$$C_\alpha(s) = g(s) + \rho_1(s) \sin \alpha e^{i\alpha} \vec{\tau}(s) .$$

Pour $\alpha = \pi/2$, on retrouve la développée de g . Pour $\alpha = 0$, on trouve l'enveloppe des tangentes de g , c'est-à-dire g . Pour tout $s \in I$ nous noterons $\omega(s)$ le centre de courbure de g en s . Avec cette notation on a : $i \rho_1(s) \vec{\tau}(s) = \omega(s) - g(s)$, d'où :

$$C_\alpha(s) = g(s) - i \sin \alpha e^{i\alpha} (\omega(s) - g(s)) ,$$

et par conséquent :

$$e^{-i\alpha} C_\alpha(s) = (e^{-i\alpha} + i \sin \alpha) g(s) - i \sin \alpha \omega(s) = \cos \alpha g(s) - i \sin \alpha \omega(s) .$$

Cette égalité, vraie pour un arc normal birégulier, reste vraie pour un arc birégulier quelconque.

b) Appliquons les résultats trouvés dans le a), à l'arc paramétré birégulier défini sur \mathbb{R} :

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = (a \cos t, b \sin t) ,$$

dont la trajectoire est une ellipse. Nous supposons $a > b > 0$.

On montre dans l'Exemple 1 du Cours (§ IX.6) que le centre de courbure $\omega(t)$ au point de paramètre t a pour coordonnées :

$$x_\omega(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t \quad , \quad y_\omega(t) = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t .$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-i\alpha} C_\alpha(t) = \cos \alpha (a \cos t + i b \sin t) - (a^2 - b^2) \sin \alpha \left(\frac{\sin^3 t}{b} + i \frac{\cos^3 t}{a} \right) .$$

Soit φ l'application affine (le corps de base est \mathbb{R}) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x + iy) = x/a + iy/b$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi(e^{-i\alpha} C_\alpha(t)) = \cos \alpha e^{it} - \frac{a^2 - b^2}{ab} \sin \alpha (\sin^3 t + i \cos^3 t) .$$

D'où enfin :

$$i \varphi(e^{-i\alpha} C_\alpha(t)) = \cos \alpha i e^{it} + \frac{a^2 - b^2}{ab} \sin \alpha (\cos^3 t - i \sin^3 t) .$$

On trouve élémentairement que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos^3 t - i \sin^3 t = \frac{1}{4} (e^{3it} + 3e^{-it}) .$$

L'arc $f : t \mapsto \cos^3 t - i \sin^3 t$, est donc une astroïde. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(t) = \frac{3i}{4} (e^{3it} - e^{-it}) = -\frac{3}{2} e^{it} \sin 2t .$$

Aux points stationnaires on a $e^{3it} = e^{-it}$, et par conséquent :

$$f''(t) = \frac{3i}{4} (3i e^{3it} + i e^{-it}) = -3e^{-it} .$$

Mais comme $e^{2it} \in \{-1, 1\}$, le vecteur d'affixe e^{it} dirige aussi la tangente géométrique.

On voit donc que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur d'affixe $i e^{it}$ dirige la normale en t de l'astroïde. Il est alors clair que l'arc :

$$t \mapsto i \varphi(e^{-i\alpha} C_\alpha(t)) ,$$

est une parallèle d'astroïde. L'arc $t \mapsto C_\alpha(t)$ est donc une affine d'une parallèle d'astroïde, ce qu'il fallait démontrer.

Chapitre X

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES CONIQUES

§ X.1 POLYNÔMES DE DEGRÉ 2 SUR \mathcal{E}

Exercice 2 :

|| Caractériser les orbites de \mathcal{P}_2 pour l'action à gauche de $\text{GA}(\mathcal{E})$ sur \mathcal{P}_2 définie par : $\text{GA}(\mathcal{E}) \times \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, (\varphi, f) \mapsto f \circ \varphi^{-1}$. ■

Dans ce qui suit \mathcal{R} désignera un repère de \mathcal{E} . Les éléments de \mathcal{P}_2 seront identifiés à leur expression dans \mathcal{R} . Les orbites pour l'action à gauche de $\text{GA}(\mathcal{E})$ sont aussi les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence associée.

Soit $A \in \mathcal{E}$; si f et g sont des éléments équivalents de \mathcal{P}_2 , et que $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ est telle que $f \circ \varphi = g$, l'application :

$$M \mapsto g(M) - f_{\infty}(\vec{\varphi}(\overrightarrow{AM})) = f(\varphi(M)) - f_{\infty}(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)})$$

est affine, ce qui prouve, d'après la définition X.1.2 du Cours, l'égalité $g_{\infty} = f_{\infty} \circ \vec{\varphi}$. Les formes quadratiques g_{∞} et f_{∞} sont donc équivalentes. On vérifie aussi que les formes quadratiques \tilde{f} et \tilde{g} sont équivalentes ; en effet, si $\vec{\varphi}$ est l'isomorphisme du dual de l'espace des fonctions affines sur \mathcal{E} qui prolonge φ , $\tilde{f} \circ \vec{\varphi}$ est une forme quadratique qui étend $f \circ \varphi = g$, c'est donc \tilde{g} .

Si les polynômes f et g éléments de \mathcal{P}_2 sont équivalents, alors les signatures des formes quadratiques f_{∞} et g_{∞} sont identiques ; les signatures possibles sont $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$ et $(0,2)$; nous noterons $C_{1,0}, C_{0,1}, C_{2,0}, C_{1,1}, C_{0,2}$ les parties correspondantes dans \mathcal{P}_2 , parties qui sont toutes non vides, et qui sont des réunions de classes.

Si f est élément de l'une des parties $C_{2,0}, C_{1,1}, C_{0,2}$, il est équivalent à un polynôme de la forme :

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2ax + 2by + c,$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$, le couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ étant déterminé par la signature de f_∞ : c'est $(1, 1)$ si $f \in C_{2,0}$, $(1, -1)$ si $f \in C_{1,1}$ et $(-1, -1)$ si $f \in C_{0,2}$. Un tel polynôme est équivalent (par translation) à un polynôme g de la forme :

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est la valeur de g en son point critique. Soit $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{C})$ telle que $f \circ \varphi = g$; d'après le Théorème X.2.2, le point critique de g est $\varphi(\Omega)$, où Ω est le point critique de f ; on a donc l'égalité $\lambda = g(\varphi(\Omega)) = f(\Omega)$. Le polynôme f est donc équivalent à un et un seul des polynômes de la forme :

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \lambda,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$. On obtient donc ainsi un système de représentants de la relation d'équivalence dans $C_{2,0} \cup C_{1,1} \cup C_{0,2}$.

Soit $f \in C_{1,0}$. Ce polynôme est équivalent à un polynôme f_1 de la forme : $x^2 + 2ax + 2by + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, polynôme qui est lui-même équivalent (par translation) à un polynôme f_2 de la forme : $x^2 + 2by + d$, où $d \in \mathbb{R}$. On remarque l'égalité $\Delta_{f_2, \mathbb{R}} = -b^2$. Notons $C_{1,0,*}$ l'ensemble des polynômes $f \in C_{1,0}$ tels que la forme quadratique \tilde{f} soit non dégénérée, et $C_{1,0,o}$ l'ensemble des polynômes $f \in C_{1,0}$ tels que la forme quadratique \tilde{f} soit dégénérée. Le couple $(C_{1,0,*}, C_{1,0,o})$ est un partage de $C_{1,0}$ en deux parties qui sont des réunions de classes d'équivalence.

Soit $f \in C_{1,0,*}$. Le polynôme f est équivalent à un polynôme de la forme $x^2 + 2by + d$, où $b \neq 0$; f est donc équivalent au polynôme $x^2 + 2y$. L'ensemble $C_{1,0,*}$ est donc la classe d'équivalence de $x^2 + 2y$.

Soit $f \in C_{1,0,o}$. Ce polynôme est équivalent à un polynôme de la forme $x^2 + d$, où $d \in \mathbb{R}$. Supposons que les polynômes $x^2 + d_1$ et $x^2 + d_2$ soient équivalents. Il existe alors des scalaires α, β, γ , avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, tels que :

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + d_1 = x^2 + d_2.$$

En développant, on trouve :

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + 2\gamma\alpha x + 2\gamma\beta y + \gamma^2 + d_1 = x^2 + d_2.$$

Comme $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on en déduit que nécessairement $\gamma = 0$, puis $d_1 = d_2$. La famille des polynômes $(x^2 + \lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est donc un système de représentants de la relation d'équivalence dans $C_{1,0,o}$.

On définit de manière analogue les ensembles $C_{0,1,*}$ et $C_{0,1,o}$. L'ensemble $C_{0,1,*}$, est la classe du polynôme $-x^2 + 2y$, et un système de représentants de la relation d'équivalence dans $C_{0,1,o}$ est la famille $(-x^2 + \lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

En résumé nous avons obtenu ci-dessus le système représentatif suivant :

-les polynômes $x^2 + y^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;

- les polynômes $x^2 - y^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
- les polynômes $-x^2 - y^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
- les polynômes $x^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
- les polynômes $-x^2 + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
- le polynôme $x^2 + 2y$;
- le polynôme $-x^2 + 2y$.

§ X.2 ZÉROS D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2 SUR \mathcal{E}

Exercice 1 :

On donne $a > 0$. Soit $A = O + ae_1$ et $B = O + (-ae_1)$.
Notons Δ la droite $A + \mathbb{R}e_2$.

a) Former une équation dans \mathcal{R} des coniques passant par A et B , tangentes à Δ et rencontrant $\mathcal{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$ en deux points P et Q d'ordonnées λ_P et λ_Q dans \mathcal{R} vérifiant : $\lambda_P \cdot \lambda_Q = -a^2$.

b) Par $M \in \mathcal{E}$ il passe au plus deux de ces coniques. Discuter la nature de ces coniques suivant la position de M . ■

a) Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} :

$$f(M) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi,$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi) \in \mathbb{R}^6$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, et $\Gamma = f^{-1}(0)$. Si la conique Γ est tangente à la droite Δ et passe par A , alors elle est tangente en A à Δ ; cette condition est vérifiée si, et seulement si, le polynôme en y :

$$\gamma y^2 + 2(\beta a + \varepsilon)y + \alpha a^2 + 2\delta a + \varphi,$$

admet le réel 0 comme zéro double, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$\gamma \neq 0, \quad \beta a + \varepsilon = 0, \quad \alpha a^2 + 2\delta a + \varphi = 0.$$

On voit donc que la conique Γ est tangente en A à la droite Δ si, et seulement si, le polynôme f est de la forme :

$$f(M) = \alpha(x^2 - a^2) + 2\beta(x - a)y + \gamma y^2 + 2\delta(x - a),$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$, $\gamma \neq 0$. Cette condition étant supposée réalisée, il est clair que la conique Γ passe par B si, et seulement si, $\delta = 0$. Cette condition étant supposée réalisée, la conique Γ coupe la droite

deux points P et Q , d'ordonnées λ_P et λ_Q telles que $\lambda_P \lambda_Q = -a^2$ si, et seulement si, le polynôme en y : $-\alpha a^2 - 2\beta a y + \gamma y^2$, a deux zéros réels dont le produit est $-a^2$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\alpha = \gamma$.

De ce qui précède, nous déduisons que la conique Γ vérifie les conditions de l'énoncé si, et seulement si, l'expression dans \mathcal{R} du polynôme f est de la forme :

$$f(M) = \gamma(x^2 + y^2 - a^2) + 2\beta(x - a)y,$$

où $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \neq 0$.

Comme nous pouvons supposer $\gamma = 1$, l'ensemble \mathcal{C} des coniques vérifiant les conditions de l'énoncé est l'ensemble des coniques dont une équation est :

$$(x^2 + y^2 - a^2) + 2\lambda(x - a)y = 0,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ nous noterons f_λ le polynôme dont l'expression dans \mathcal{R} est :

$$f_\lambda(M) = (x^2 + y^2 - a^2) + 2\lambda(x - a)y.$$

b) Soit $M \in \mathcal{C}$ de coordonnées (x, y) . Si $x = a$, $M \in \Delta$; à moins que M ne soit confondu avec A , il ne passe pas par M de conique élément de \mathcal{C} . Si $y = 0$, à moins que M ne soit confondu avec A ou B , il ne passe pas par M de conique élément de \mathcal{C} . Supposons $y(x - a) \neq 0$; d'après ce qui précède, il passe par M une conique élément de \mathcal{C} et une seule; le paramètre λ de cette conique est :

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2(a - x)y}.$$

La matrice dans \mathcal{R} de la forme quadratique \tilde{f}_λ est (cf. formule (4) du § X.1) :

$$\begin{bmatrix} -a^2 & 0 & -a\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \\ -a\lambda & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

On trouve facilement $\Delta_{f_\lambda} = -a^2$ et $\delta_{f_\lambda} = 1 - \lambda^2$. La conique $f_\lambda^{-1}(0)$ est donc toujours propre; sa nature est déterminée par le signe de $1 - \lambda^2 = (1 - \lambda)(1 + \lambda)$. Si $1 - \lambda^2 < 0$, c'est une hyperbole, si $1 = \lambda^2$ c'est une parabole, et si $1 - \lambda^2 > 0$ c'est une ellipse (à points réels puisqu'elle passe par A). On trouve que pour tout point $M \in \mathcal{C}$ qui n'est pas sur la droite \mathcal{D}_2 ni sur la droite Δ , la conique élément de \mathcal{C} qui passe par M est $f_\lambda^{-1}(0)$, avec :

$$1 - \lambda^2 = \frac{(2(a - x)y - (x^2 + y^2 - a^2))(2(a - x)y + (x^2 + y^2 - a^2))}{4y^2(a - x)^2}$$

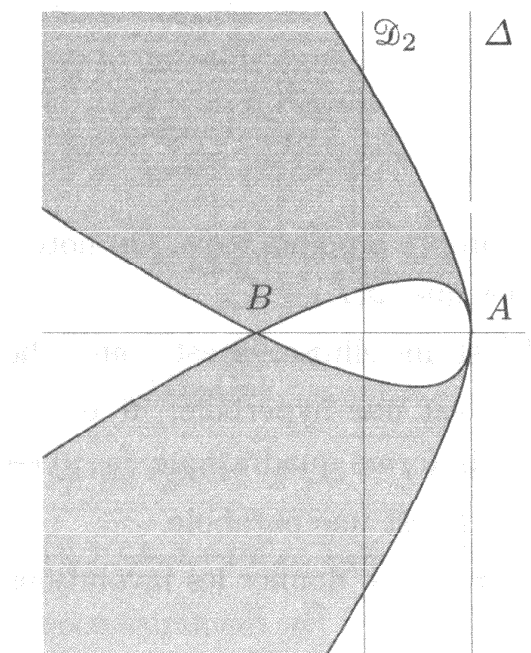
Le signe de $1 - \lambda^2$ est celui de :

$$-((x+y)^2 - 2ay - a^2)((x-y)^2 + 2ay - a^2).$$

Les coniques d'équations respectives :

$$(x+y)^2 - 2ay - a^2 = 0 \quad \text{et} \quad (x-y)^2 + 2ay - a^2 = 0,$$

sont deux paraboles symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$. La conique élément de \mathcal{C} qui passe par M est une hyperbole si M est à l'intérieur des deux paraboles ou à l'extérieur des deux paraboles, c'est une ellipse si M est à l'intérieur de l'une des paraboles et à l'extérieur de l'autre, c'est une parabole si M est sur l'une de ces deux paraboles. Voici une représentation graphique de ce régionnement :



Exercice 2b) :

|| Trouver la nature de l'ensemble défini dans \mathcal{R} par l'équation suivante :

$$\beta x^2 - 2\alpha xy + \beta^2 y^2 - 2\alpha x + 1 = 0 \quad ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2). \blacksquare$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ posons $f_{\alpha, \beta}(x, y) = \beta x^2 - 2\alpha xy + \beta^2 y^2 - 2\alpha x + 1$ et $C_{\alpha, \beta} = f_{\alpha, \beta}^{-1}(0)$. La matrice de la forme quadratique $\tilde{f}_{\alpha, \beta}$ est :

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \beta & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \beta^2 \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$\delta_{f_{\alpha,\beta}} = \beta^3 - \alpha^2 \quad \text{et} \quad \Delta_{f_{\alpha,\beta}} = \beta^3 - \alpha^2(1 + \beta^2).$$

1) Si $\beta^3 < \alpha^2$, ce qui englobe le cas où $\beta < 0$, alors $\delta_{f_{\alpha,\beta}} < 0$ et $\Delta_{f_{\alpha,\beta}} < 0$. Dans ce cas $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est une hyperbole.

2) Supposons $\beta^3 = \alpha^2$, d'où $\delta_{f_{\alpha,\beta}} = 0$.

- si $\alpha = \beta = 0$, $f_{\alpha,\beta} = 1$.

- si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, alors $\alpha \neq 0$ et $\beta > 0$; dans ce cas, $\Delta_{f_{\alpha,\beta}} < 0$ et par conséquent $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est une parabole.

3) Supposons : $\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} < \alpha^2 < \beta^3$. Dans ce cas $\beta > 0$, $\Delta_{f_{\alpha,\beta}} < 0$ et $\delta_{f_{\alpha,\beta}} > 0$, et par conséquent $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est une ellipse à points réels.

4) Supposons $\frac{\beta^3}{1 + \beta^2} = \alpha^2 > 0$. Dans ce cas, $\Delta_{f_{\alpha,\beta}} = 0$ et $\delta_{f_{\alpha,\beta}} > 0$, et par conséquent $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est réduite à un point.

5) Supposons enfin $\alpha^2 < \frac{\beta^3}{1 + \beta^2}$. Dans ce cas $\Delta_{f_{\alpha,\beta}} > 0$ et $\delta_{f_{\alpha,\beta}} > 0$, et par conséquent $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ est vide.

Exercice 3 :

Soit Γ une conique propre à points réels. On note \mathcal{G} le groupe des $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ telles que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.

a) Montrer que si Γ est une ellipse, \mathcal{G} est isomorphe à $\mathbf{O}(2, \mathbb{R})$.

b) Montrer que si Γ est une hyperbole, \mathcal{G} est isomorphe au groupe orthogonal de la forme quadratique $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

c) Etudier \mathcal{G} lorsque Γ est une parabole.

d) Dans chacun des trois cas, donner les involutions affines éléments de \mathcal{G} . ■

Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que $\Gamma = f^{-1}(0)$. Pour tout $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$, $\varphi^{-1}(\Gamma) = (f \circ \varphi)^{-1}(0)$. D'après le Théorème X.2.1, la conique Γ étant propre et à points réels, on a l'égalité $\Gamma = \varphi^{-1}(\Gamma)$ si, et seulement si, il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $f \circ \varphi = \lambda f$.

a) b) Si Γ est une conique propre à points réels de centre Ω (hyperbole ou ellipse), et que $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ est telle que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$, alors $\varphi(\Omega) = \Omega$ (Théorème X.2.2), et il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $f \circ \varphi = \lambda f$. Nous en déduisons $f(\varphi(\Omega)) = f(\Omega) = \lambda f(\Omega)$. Comme le centre Ω n'est pas sur la conique, on voit que nécessairement $\lambda = 1$. Les éléments de \mathcal{G} sont donc les applications affines bijectives telles que $\varphi(\Omega) = \Omega$ et $f \circ \varphi = f$; comme :

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad f(M) = f(\Omega) + f_\infty(\overrightarrow{\Omega M}),$$

ces deux conditions sont équivalentes aux conditions $\varphi(\Omega) = \Omega$ et $f_\infty \circ \vec{\varphi} = f_\infty$. Le groupe \mathcal{G} est donc isomorphe au groupe $\mathbf{O}_{f_\infty}(\vec{\mathcal{E}})$.

c) Supposons que Γ soit une parabole; on peut choisir un repère affine \mathcal{R} , d'origine O et de base \mathcal{B} , tel que l'expression analytique dans \mathcal{R} du polynôme f soit $y^2 - 2x$. Soit $\varphi \in \mathbf{GA}(\mathcal{E})$; on suppose que $\varphi(O)$ est le point de coordonnées $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, et que la matrice de $\vec{\varphi}$ dans \mathcal{B} est :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{R}) .$$

On peut aussi associer à φ la matrice :

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & a & b \\ v & c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R}) ;$$

Pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} , si (x', y') désignent les coordonnées de $\varphi(M)$ on a l'égalité :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & a & b \\ v & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} .$$

On vérifie que l'application $\varphi \mapsto M_\varphi$ est un homomorphisme injectif de groupes, $\mathbf{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a l'égalité $f \circ \varphi = \lambda f$ si, et seulement si :

$$(v + cx + dy)^2 - 2(u + ax + by) = \lambda(y^2 - 2x) .$$

On voit que nécessairement $d^2 = \lambda \neq 0$, puis $cd = 0$ d'où $c = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit élément de \mathcal{G} est donc :

$$d \neq 0, c = 0, b = dv, a = d^2, v^2 = 2u .$$

Autrement dit, $\varphi \in \mathcal{G}$ si, et seulement si, la matrice M_φ est de la forme :

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v^2/2 & d^2 & dv \\ v & 0 & d \end{bmatrix} \quad \text{où } (d, v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} .$$

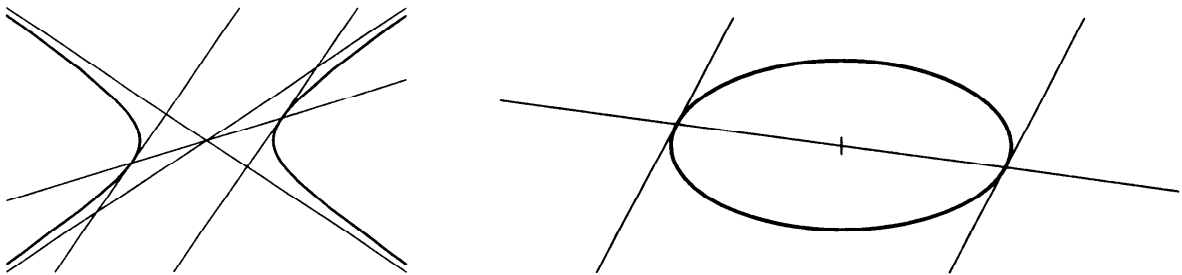
L'ensemble des matrices qui s'écrivent ainsi est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$, isomorphe au sous-groupe \mathcal{G} . Pour $(d, v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, posons :

$$A(d, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v^2/2 & d^2 & dv \\ v & 0 & d \end{bmatrix} .$$

On constate par le calcul que pour tout $(d, v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et tout $(d', v') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a l'égalité $A(d, v) A(d', v') = A(d d', v + d v')$. On voit donc que le sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $A(d, v)$, où $(d, v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, est isomorphe au groupe affine de la droite réelle. Les groupes \mathcal{G} et $\text{GA}(\mathbb{R})$ sont donc isomorphes.

d) Nous savons que les involutions affines de \mathcal{G} sont les symétries centrales, et les symétries obliques par rapport aux droites affines. Nous excluons l'involution particulière $\text{Id}_{\mathcal{G}}$ de notre recherche.

Supposons que Γ soit une hyperbole ou une ellipse. Les involutions affines éléments de \mathcal{G} sont la symétrie centrale de centre Ω , centre de Γ , et les symétries obliques par rapport à des droites passant par Ω dont l'application linéaire associée est un élément du groupe $\text{O}(f_\infty)$. Soit φ une telle application affine, et (e_1, e_2) une base telle que $\vec{\varphi}(e_1) = e_1$ et $\vec{\varphi}(e_2) = -e_2$; $\vec{\varphi}$ est une isométrie pour f_∞ si, et seulement si, la matrice de f_∞ dans (e_1, e_2) est identique à la matrice de f_∞ dans la base $(\vec{\varphi}(e_1), \vec{\varphi}(e_2)) = (e_1, -e_2)$. Il est clair que cette condition est réalisée si, et seulement si, les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux pour la forme polaire B de la forme quadratique f_∞ . Supposons que le point $M_1 \in \Gamma$ soit tel que $\overrightarrow{\Omega M_1}$ soit colinéaire à e_1 ; comme Γ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f_\infty(\overrightarrow{\Omega M_1}) + f(\Omega) = 0$, la direction de la tangente en M_1 est le noyau de la forme linéaire $\vec{u} \mapsto B(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_1})$; le vecteur e_2 dirige donc la tangente en M_1 . Cette situation est illustrée par la représentation graphique suivante :

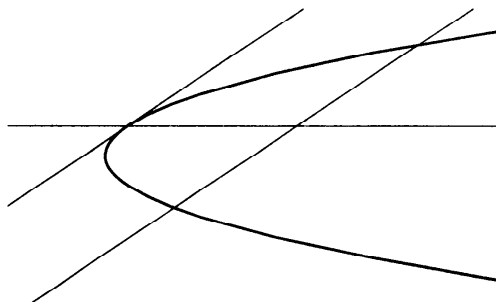


Supposons que Γ soit une parabole. Les involutions affines ($\neq \text{Id}$) de la droite réelle sont les applications de la forme $x \mapsto -x + v$, où $v \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que les involutions éléments de \mathcal{G} sont les $\varphi \in \text{GA}(\mathcal{E})$ dont la matrice M_φ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v^2/2 & 1 & -v \\ v & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (v \in \mathbb{R}),$$

le repère \mathcal{R} étant choisi de telle sorte que l'expression de f dans \mathcal{R} soit $y^2 - 2x$. On trouve facilement que l'ensemble des points invariants par la symétrie est la droite d'équation $y = v/2$. Cette droite coupe l :

point M de coordonnées $(v^2/8, v/2)$; la tangente à la parabole en M est dirigée par le vecteur \vec{v} de coordonnées $(v/2, 1)$; on constate que \vec{v} est un vecteur propre de $\vec{\varphi}$ pour la valeur propre -1 ; cela signifie que la direction de la tangente en M est l'espace propre de valeur propre -1 de la symétrie vectorielle $\vec{\varphi}$, ce qui est géométriquement évident. On trouvera ci-dessous une représentation graphique de cette situation.



Exercice 6 :

Soit f et f' deux éléments de \mathcal{P}_2 tels que $\Gamma = \Gamma_f$ et $\Gamma' = \Gamma_{f'}$, soient deux coniques propres à points réels. Montrer que si Γ est une ellipse ou une parabole, pour qu'il existe un élément φ du groupe des *homothéties et translations* de \mathcal{E} tel que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$, il faut et il suffit qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $f_\infty = \rho f'_\infty$.

Lorsque c'est le cas, trouver toutes les $\varphi \in \mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ telles que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. ■

Les éléments du groupe des homothéties et translations de \mathcal{E} seront appelés *dilatations*.

Supposons que $\Gamma = \Gamma_f$ et $\Gamma' = \Gamma_{f'}$, soient deux coniques propres à points réels et que φ soit une dilatation telle que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. La conique Γ' est donc l'ensemble des zéros du polynôme $f \circ \varphi^{-1}$; il existe par conséquent un réel $\lambda \neq 0$ tel que $f \circ \varphi^{-1} = \lambda f'$ (Théorème X.2.1), soit encore $f = \lambda f' \circ \varphi$. Nous en déduisons $f_\infty = \lambda f'_\infty \circ \vec{\varphi}$, mais comme $\vec{\varphi}$ est une homothétie vectorielle de rapport $\mu \in \mathbb{R}^*$ et que f'_∞ est une forme quadratique, nous obtenons l'égalité : $f_\infty = \lambda \mu^2 f'_\infty$.

Supposons réciproquement que Γ soit une ellipse à points réels, et qu'il existe un réel $\rho \neq 0$ tel que $f_\infty = \rho f'_\infty$. La conique Γ' , qui est à points réels, est donc nécessairement une ellipse à points réels. Soit Ω le centre de Γ et Ω' le centre de Γ' . Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ telle que l'expression analytique de f_∞ dans \mathcal{B} est $x^2 + y^2$. Comme Γ est à points réels, l'expression analytique de f dans le repère $\mathcal{R} = (\Omega, \mathcal{B})$ est de la forme : $x^2 + y^2 - a^2$, où $a \neq 0$. Si (α, β) désignent les coordonnées de Ω' , comme Γ' est à points réels, l'expression analytique de f' dans

forme : $\rho^{-1}((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - b^2)$, où $b \neq 0$. On vérifie élémentairement que la dilatation φ telle que $\varphi(\Omega) = \Omega'$ et dont le rapport est b/a est telle que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$.

Supposons que Γ soit une parabole, et qu'il existe un réel $\rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $f_\infty = \rho f'_\infty$. Il existe un repère \mathcal{R} dans lequel l'expression analytique de f soit $x^2 - 2y$. L'expression analytique de f' dans \mathcal{R} est alors de la forme $\rho^{-1}(x^2 - 2ax - 2by + c)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $b \neq 0$ car Γ' est une conique propre ; on peut donc mettre cette expression sous la forme :

$$f'(x, y) = \rho^{-1}((x-a)^2 - 2b(y-\beta)) = \rho^{-1}b^2 \left(\frac{(x-a)^2}{b^2} - 2\frac{y-\beta}{b} \right),$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. Soit h la dilatation qui transforme le point de coordonnées (x, y) en le point de coordonnées $(a + bx, \beta + by)$; on a $h(\Gamma) = \Gamma'$.

Supposons que $h_0 \in \mathcal{H}_T(\mathcal{E})$ soit telle que $h_0(\Gamma) = \Gamma'$, Γ désignant une conique propre à points réels, ellipse, hyperbole ou parabole. Une dilatation h vérifie aussi $h(\Gamma) = \Gamma'$ si, et seulement si, $h_0^{-1} \circ h(\Gamma) = \Gamma$. L'ensemble des dilatations h telles que $h(\Gamma) = \Gamma'$ est donc l'ensemble des bijections affines de la forme $h_0 \circ \varphi$, où φ est une dilatation telle que $\varphi(\Gamma) = \Gamma$.

D'après l'exercice 3, dans le cas où Γ est une conique à centre, de centre Ω , φ vérifie ces conditions si, et seulement si, $\varphi(\Omega) = \Omega$ et $\vec{\varphi} \in \mathbf{O}_{f_\infty}$; comme φ est une dilatation, φ est l'identité ou la symétrie centrale de centre Ω .

Dans le cas où Γ est une parabole, φ vérifie les conditions si, et seulement si, φ est une dilatation et il existe $(a, u) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que :

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & a & 0 \\ u^2/2 & au & a^2 \end{bmatrix}.$$

L'application affine φ ne peut être une dilatation que si $a = 1$ et $u = 0$, donc que si φ est l'identité. Il y a donc dans ce cas une et une seule dilatation h telle que $h(\Gamma) = \Gamma'$.

§ X.3 INTERSECTION AVEC UNE DROITE

Exercice 1 :

- || Soit A le point de coordonnées $(a, 0)$ dans \mathcal{R} , ($a > 0$ donné).
- a) Former l'équation des hyperboles dont $\mathcal{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$ est une asymptote, et tangentes en A à $\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$.
- b) Montrer que l'autre asymptote de ces hyperboles passe par un point fixe. ■

a) Soit $f \in \mathcal{P}_2$, et $\Gamma = f^{-1}(0)$. La conique Γ est tangente en A à \mathcal{D}_1 si, et seulement si, l'expression de f dans le repère \mathcal{R} est de la forme :

$$f(M) = \alpha (x - a)^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\varepsilon y,$$

où $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha \neq 0$. Cette condition étant supposée réalisée, la conique Γ est une hyperbole, et la droite \mathcal{D}_2 en est une asymptote si, et seulement si, le polynôme en y : $\alpha a^2 + 2\varepsilon y + \gamma y^2$ est constant, c'est-à-dire $\gamma = 0$ et $\varepsilon = 0$, et Γ est propre. En conclusion, la conique Γ vérifie les conditions de l'énoncé si, et seulement si, l'expression dans \mathcal{R} du polynôme f est de la forme :

$$f(M) = \alpha (x - a)^2 + 2\beta xy,$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et Γ est une conique propre ; on obtient facilement $\Delta_{f,\mathcal{R}} = -\alpha\beta^2 a^2$; la conique Γ est donc propre si, et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

b) Soit Γ une conique dont une équation est :

$$\alpha (x - a)^2 + 2\beta xy = 0,$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Cette équation peut s'écrire :

$$x(\alpha x + 2\beta y - 2a\alpha) = -\alpha a^2.$$

La conique Γ est donc bien une hyperbole dont une asymptote est la droite \mathcal{D}_2 et dont l'autre est la droite dont une équation est $\alpha x + 2\beta y - 2a\alpha = 0$. Ces droites passent toutes par le point de coordonnées $(2a, 0)$, symétrique de l'origine par rapport à A .

Ce dernier résultat était géométriquement attendu, car la tangente à une hyperbole (ici \mathcal{D}_1) recoupe les asymptotes en deux points dont le milieu est le point de contact (ici A).

Exercice 4 (Représentation rationnelle des coniques propres) :

- a) Soit P, Q, R des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ linéairement indépendants. Posons $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus R^{-1}(0)$. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto M(t)$, où $M(t)$ admet dans \mathcal{R} les coordonnées $\left(\frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right)$ définit une bijection de \mathcal{D} sur une conique propre privée éventuellement d'un point, et que Φ est un plongement.
- b) Inversement soit Γ une conique propre. Montrer

|| la paramétrer sous la forme vue en a) d'une infinité de façons. ■

a) On pose :

$$\begin{aligned} P(t) &= a_{1,1} + a_{2,1}t + a_{3,1}t^2 \\ Q(t) &= a_{1,2} + a_{2,2}t + a_{3,2}t^2 \\ R(t) &= a_{1,3} + a_{2,3}t + a_{3,3}t^2, \end{aligned}$$

où $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants, la matrice A est inversible. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Supposons que pour $(t_1, t_2) \in \mathcal{D}^2$ on ait $\Phi(t_1) = \Phi(t_2)$; les vecteurs colonne :

$$V_1 = \begin{bmatrix} P(t_1) \\ Q(t_1) \\ R(t_1) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_2 = \begin{bmatrix} P(t_2) \\ Q(t_2) \\ R(t_2) \end{bmatrix},$$

sont alors colinéaires, et par conséquent les vecteurs colonne :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_1^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ t_2 \\ t_2^2 \end{bmatrix},$$

le sont aussi ; ceci n'est possible que si $t_1 = t_2$. L'application Φ est donc injective.

Le point de paramètre $t \in \mathcal{D}$ est régulier pour Φ si, et seulement si, les triplets $(P(t), Q(t), R(t))$ et $(P'(t), Q'(t), R'(t))$ sont linéairement indépendants (cf. § VII.1 du Cours) ; or pour tout $t \in \mathcal{D}$:

$$\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} P'(t) \\ Q'(t) \\ R'(t) \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix}.$$

Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$ les triplets $(1, t, t^2)$ et $(0, 1, 2t)$ sont linéairement indépendants, on voit que tout $t \in \mathcal{D}$ est régulier pour Φ . L'arc Φ est donc une immersion de classe \mathcal{C}^∞ .

Posons $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^2} = ({}^tA)^{-1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 1 &= b_{1,1} P(t) + b_{1,2} Q(t) + b_{1,3} R(t) \\ t &= b_{2,1} P(t) + b_{2,2} Q(t) + b_{2,3} R(t) \\ t^2 &= b_{3,1} P(t) + b_{3,2} Q(t) + b_{3,3} R(t) . \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a donc l'égalité :

$$\begin{aligned} (b_{2,1} P(t) + b_{2,2} Q(t) + b_{2,3} R(t))^2 &= \\ &= (b_{1,1} P(t) + b_{1,2} Q(t) + b_{1,3} R(t)) (b_{3,1} P(t) + b_{3,2} Q(t) + b_{3,3} R(t)) . \end{aligned}$$

On voit que pour tout $t \in \mathcal{D}$, $\Phi(t)$ appartient à la conique Γ dont une équation dans \mathcal{R} est :

$$(b_{2,1} x + b_{2,2} y + b_{2,3})^2 = (b_{1,1} x + b_{1,2} y + b_{1,3}) (b_{3,1} x + b_{3,2} y + b_{3,3}) .$$

Notons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les fonctions affines sur \mathcal{E} telles que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(M) &= b_{1,1} x + b_{1,2} y + b_{1,3} \\ \varphi_2(M) &= b_{2,1} x + b_{2,2} y + b_{2,3} \\ \varphi_3(M) &= b_{3,1} x + b_{3,2} y + b_{3,3} , \end{aligned}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ désigne le couple des coordonnées de M dans \mathcal{R} . Soit $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \varphi_2(M) \\ \varphi_3(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1,1} x + b_{1,2} y + b_{1,3} \\ b_{2,1} x + b_{2,2} y + b_{2,3} \\ b_{3,1} x + b_{3,2} y + b_{3,3} \end{bmatrix} = B X .$$

On constate :

$$\begin{aligned} (b_{2,1} x + b_{2,2} y + b_{2,3})^2 - (b_{1,1} x + b_{1,2} y + b_{1,3}) (b_{3,1} x + b_{3,2} y + b_{3,3}) &= \\ = \varphi_2^2(M) - \varphi_1(M) \varphi_3(M) &= {}^t Y \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y = {}^t X {}^t B J B X , \end{aligned}$$

où :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

On peut donc associer à la conique Γ la matrice ${}^t B J B$ qui est inversible ; la conique Γ est donc non dégénérée.

Montrons que tous les points de Γ , sauf peut-être un, sont dans $\Phi(\mathcal{D})$. L'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi_1(M) = \varphi_2(M) = 0$ a au plus

en effet, s'il en avait deux distincts, cet ensemble contiendrait la droite affine passant par ces deux points ; les fonctions affines φ_1 et φ_2 seraient alors toutes les deux proportionnelles à une fonction affine non constante, nulle sur cette droite ; φ_1 et φ_2 seraient par conséquent liées, ce qui est en contradiction avec le fait que la matrice B est régulière. Il ne peut donc y avoir sur Γ qu'au plus un point M_0 tel que $\varphi_1(M_0) = 0$. Soit $M \in \Gamma$, de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\varphi_1(M) \neq 0$; posons $t = \varphi_2(M)/\varphi_1(M)$. Puisque $M \in \Gamma$ on a l'égalité :

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(M) \\ \varphi_2(M) \\ \varphi_3(M) \end{bmatrix} = \varphi_1(M) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} ,$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \varphi_1(M)^{-1} A \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} = \varphi_1(M)^{-1} \begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \\ R(t) \end{bmatrix} .$$

Nous en déduisons $1 = \varphi_1(M) R(t)$, et par conséquent $t \in \mathcal{D}$, et $\Phi(t) = M$. Tous les points de Γ , éventuellement à une exception près, sont dans $\Phi(\mathcal{D})$.

Nous pouvons conclure de l'étude précédente que, soit il existe $A \in \Gamma$ tel que $\Phi(\mathcal{D}) = \Gamma \setminus \{A\}$, soit $\Phi(\mathcal{D}) = \Gamma$; dans tous les cas $\Phi(\mathcal{D})$ est une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ . L'application Φ étant une immersion de classe \mathcal{C}^∞ , définie sur l'ouvert \mathcal{D} de \mathbb{R} et d'image une sous-variété courbe de classe \mathcal{C}^∞ , nous pouvons appliquer ici le lemme démontré dans la résolution de l'exercice 2 du § VII.1, et conclure que Φ est un \mathcal{C}^∞ -plongement.

b) Soit Γ une conique propre, $O \in \Gamma$, et (e_1, e_2) une base de $\vec{\mathcal{E}}$ telle que la droite $O + \mathbb{R}e_2$ soit la tangente en O à Γ . Soit $f \in \mathcal{P}_2(\mathcal{E})$ tel que $\Gamma = f^{-1}(0)$; l'expression de f dans \mathcal{R} est de la forme :

$$f(M) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx = 0 ,$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$. Pour tout $M \in \Gamma$ de coordonnées (x, y) , si $M \neq O$ alors $x \neq 0$, et en posant $t = y/x$:

$$2dx + x^2(a + 2bt + ct^2) = 0 .$$

On a donc $a + 2bt + ct^2 \neq 0$ et :

$$x = -\frac{2d}{a + 2bt + ct^2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{2dt}{a + 2bt + ct^2} .$$

Posons $P(t) = -2d$, $Q(t) = -2dt$, $R(t) = a + 2bt + ct^2$ et $\mathcal{D} = R^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants puisq

$c \neq 0$. On définit comme dans a) l'arc paramétré $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, tel que pour tout $t \in \mathcal{D}$, $\Phi(t)$ soit le point de \mathcal{E} dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont $\left(\frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right)$. Ce qui précède prouve l'inclusion $\Gamma \setminus \{O\} \subset \Phi(\mathcal{D})$.

Inversement, si $t \in \mathcal{D}$, on vérifie élémentairement $\Phi(M) \in \Gamma \setminus \{O\}$. On a donc l'égalité $\Gamma \setminus \{O\} = \Phi(\mathcal{D})$. On obtient donc un paramétrage rationnel d'une conique en faisant pivoter une droite autour d'un point de la conique.

Supposons maintenant que la conique propre Γ soit une hyperbole. Il existe un repère dont les axes sont les asymptotes de Γ dans lequel une équation de Γ est $xy = 1$. Posons $P(t) = t^2$, $Q(t) = 1$ et $R(t) = t$; les polynômes (P, Q, R) sont linéairement indépendants. On note $\mathcal{D} = R^{-1}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ et $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ l'arc paramétré tel que pour tout $t \in \mathcal{D}$, $\Phi(t)$ est le point de \mathcal{E} dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont $\left(\frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right)$, c'est-à-dire ici $(t, 1/t)$.

On a alors l'égalité $\Phi(\mathcal{D}) = \Gamma$. On peut donc paramétrer rationnellement une hyperbole, en la coupant par le faisceau des droites parallèles à l'une des asymptotes.

Supposons enfin que Γ soit une parabole. Il existe un repère \mathcal{R} dans lequel une équation de Γ est $x^2 - y = 0$. On pose $P(t) = t$, $Q(t) = t^2$ et $R(t) = 1$; les polynômes P, Q, R sont linéairement indépendants. On a ici $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, et Γ est la trajectoire de l'arc paramétré Φ , tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t)$ est le point de \mathcal{E} dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont (t, t^2) . On paramètre donc rationnellement une parabole en la coupant par le faisceau des droites parallèles à sa direction à l'infini.

Exercice 7 :

On suppose \mathcal{E} euclidien orienté et \mathcal{R} orthonormé direct. Soit \mathcal{C} la courbe admettant dans \mathcal{R} l'équation polaire $r = 2a/\operatorname{ch} \theta$ ($a > 0$ donné). Une droite variable \mathcal{D}_t pivote autour de O . Montrer que les tangentes à \mathcal{C} aux points $\mathcal{D}_t \cap \mathcal{C}$ sont tangentes à une même hyperbole pour t fixé. Quand t varie, trouver le lieu des centres de ces hyperboles et l'enveloppe de leurs asymptotes.

■

Par le choix du repère orthonormé direct \mathcal{R} nous identifions \mathcal{E} à \mathbb{C} .

Pour $t \in \mathbb{R}$ donné, la droite \mathcal{D}_t passant par O et dirigée par le vecteur e^{it} coupe la courbe \mathcal{C} aux points de paramètres $\theta_k = t + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, la tangente à \mathcal{C} au point de paramètre θ est

le vecteur :

$$\left(\frac{-\operatorname{sh} \theta}{\operatorname{ch}^2 \theta} + \frac{i}{\operatorname{ch} \theta} \right) e^{i\theta} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \theta} (-\operatorname{sh} \theta + i \operatorname{ch} \theta) e^{i\theta} .$$

Fixons le réel t . Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ la tangente à \mathcal{C} au point de paramètre $\theta_k = t + k\pi$ est la droite qui passe par le point : $(-1)^k \frac{2a}{\operatorname{ch} \theta_k} e^{it}$, et qui est dirigée par le vecteur :

$$(-1)^k (-\operatorname{sh} \theta_k + i \operatorname{ch} \theta_k) e^{it} .$$

Dans le repère $\mathcal{R}_t = (O; e^{it}, i e^{it})$, l'équation de la tangente \mathcal{T}_{θ_k} à \mathcal{C} est :

$$\left(X - (-1)^k \frac{2a}{\operatorname{ch} \theta_k} \right) \operatorname{ch} \theta_k + Y \operatorname{sh} \theta_k = 0 ,$$

soit encore :

$$\operatorname{ch} \theta_k X + \operatorname{sh} \theta_k Y - 2(-1)^k a = 0 .$$

Posons $u = \operatorname{ch} \theta_k$, $v = \operatorname{sh} \theta_k$ et $w = -2(-1)^k a$; on constate l'égalité $4a^2 u^2 - 4a^2 v^2 - w^2 = 0$. Les droites \mathcal{T}_{θ_k} sont donc des tangentes de la conique dont une équation tangentielle est $4a^2 u^2 - 4a^2 v^2 - w^2 = 0$. Une équation de cette conique (toujours dans le repère \mathcal{R}_t) est $X^2 - Y^2 - 4a^2 = 0$. Il s'agit donc d'une hyperbole de centre l'origine de \mathcal{R}_t .

Quand t varie, le centre de l'hyperbole reste fixe, confondu avec l'origine du repère \mathcal{R} . Les asymptotes des hyperboles passent par ce point fixe, qui est donc leur enveloppe.

§ X.4 CONIQUES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Exercice 2 :

|| Parmi les normales à une ellipse, quelles sont celles qui s'éloignent le plus du centre de l'ellipse ? ■

L'espace affine euclidien sera identifié à \mathbb{R}^2 .

Soit Γ une ellipse support de l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$, où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$, a et b désignant des réels tels que $a > b > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $x'(t) = -a \sin t$ et $y'(t) = b \cos t$. L'équation de la normale en t est donc :

$$-a \sin t (X - a \cos t) + b \cos t (Y - b \sin t) = 0 .$$

La distance de l'origine à cette normale est :

$$d(t) = \frac{|(a^2 - b^2) \cos t \sin t|}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

L'application $t \mapsto d(t)$, est π -périodique continue donc bornée ; la valeur minimum de $d(t)$ est 0, valeur atteinte pour $t \in (\pi/2)\mathbb{Z}$. Comme d est paire, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi/2]$. Si $t \in]0, \pi/2[$, on a :

$$\frac{1}{d^2(t)} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{\cos t \sin t} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} (a^2 \operatorname{tg} t + b^2 \operatorname{cotg} t).$$

Le minimum de cette fonction est atteint lorsque $a^2 \operatorname{tg} t = b^2 \operatorname{cotg} t$ (le produit des termes de la somme est $a^2 b^2$), c'est-à-dire lorsque $\operatorname{tg} t = b/a$. La valeur maximum de d est donc :

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2ab}}.$$

Exercice 3 :

|| Trouver le lieu des foyers des hyperboles équilatères admettant $\mathcal{D}_2 = O + \mathbb{R}e_2$ pour asymptote et qui sont tangentes au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon donné $R > 0$. ■

Supposons qu'une hyperbole vérifiant les conditions de l'énoncé soit tangente au cercle \mathcal{C} au point de coordonnées $(R \cos \theta, R \sin \theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Comme une tangente à une hyperbole coupe les deux asymptotes en des points dont le milieu est le point de contact, on voit que nécessairement $\theta \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$; l'équation de la tangente commune est : $\cos \theta x + \sin \theta y = R$, son point d'intersection avec \mathcal{D}_2 a pour ordonnée $R/\sin \theta$, et comme le point de contact est le milieu des intersections avec les asymptotes, l'autre asymptote de l'hyperbole est la droite d'équation :

$$\frac{1}{2} \left(y + \frac{R}{\sin \theta} \right) = R \sin \theta.$$

L'équation de l'hyperbole est alors de la forme :

$$\left(y - R \left(2 \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) \right) x = k,$$

où $k \in \mathbb{R}$ est tel que l'hyperbole passe par le point de contact. On trouve que nécessairement :

$$(1) \quad k = R^2 \cos \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \right) = R^2 \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta}.$$

Une équation de l'hyperbole est donc :

$$(2) \quad \sin \theta \cdot xy + R \cos 2\theta \cdot x - R^2 \cos^3 \theta = 0 .$$

Réciproquement, pour tout $\theta \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$, l'hyperbole dont une équation est donnée par (2) a pour asymptotes les droites d'équations :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \left(y + \frac{R}{\sin \theta} \right) = R \sin \theta ,$$

et elle passe par le point de coordonnées $(R \cos \theta, R \sin \theta)$; la tangente au cercle en ce point recoupe les asymptotes de l'hyperbole en deux points dont ce point est le milieu ; or on sait que si une droite coupe une hyperbole elle la coupe en deux points dont le milieu est le milieu des intersections de cette droite avec les asymptotes ; dans le cas présent, les deux intersections de la droite avec l'hyperbole sont confondues, et la droite est par conséquent tangente.

L'ensemble des hyperboles vérifiant les propriétés de l'énoncé est donc l'ensemble des hyperboles dont une équation est de la forme donnée par (2), où $\theta \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$.

Supposons $\theta \in]0, \pi/2[$. Le centre de l'hyperbole est le point d'intersection des asymptotes, c'est-à-dire de point de \mathcal{D}_2 d'ordonnée :

$$R \left(2 \sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} \right) = -R \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} .$$

L'axe focal est dirigé par le vecteur de coordonnées $(1, 1)$. Le demi-grand axe a de l'hyperbole est $\sqrt{2} \sqrt{k}$, où k est la constante donné par (1) (distance du centre aux sommets). Comme l'excentricité d'une hyperbole équilatère est $\sqrt{2}$, on trouve que la distance du centre aux foyers est :

$$c = 2 \sqrt{k} = 2 R \cos \theta \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} .$$

Les foyers sont donc les points de coordonnées :

$$R \left(-\sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}, -\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} - \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \right) ,$$

et :

$$R \left(\sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}, -\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} + \sqrt{2} \cos \theta \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \right)$$

Pour $\theta \in]0, \pi/2[$, posons :

$$t = \sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}},$$

d'où :

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, \quad \cos \theta = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \quad \text{et} \quad \cos 2\theta = \frac{t^4 - 1}{1 + t^4}.$$

Les foyers correspondants sont les points de coordonnées :

$$R \left(-\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}}, \frac{1-t^4-\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}} \right) \quad \text{et} \quad R \left(\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}}, \frac{1-t^4+\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}} \right).$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto f(t)$, où $f(t)$ est le point dont les coordonnées sont :

$$R \left(\frac{\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}}, \frac{1-t^4+\sqrt{2}t^3}{\sqrt{1+t^4}} \right).$$

L'arc f est de classe \mathcal{C}^∞ , et le lieu des foyers de l'hyperbole quand θ varie dans $]0, \pi/2[$ est $f(\mathbb{R}_-) \cup f(\mathbb{R}_+)$.

Dans le cas où θ n'est pas dans l'intervalle $]0, \pi/2[$, on obtient les foyers de l'hyperbole en utilisant la symétrie du problème par rapport à \mathcal{D}_2 ou par rapport à $\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$.

Exercice 6 :

- || a) Lieu des foyers des paraboles de paramètre donné $p > 0$ et tangentes en un point donné A à une droite donnée \mathcal{D} .
- || b) Lieu du centre de courbure en A à ces paraboles. ■

a) Soit $\mathcal{R} = (A; e_1, e_2)$ un repère orthonormal tel que $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}e_1$. Pour tout point $F \in \mathcal{E}$ qui n'est pas sur \mathcal{D} il existe une parabole de foyer F est une seule qui est tangente à \mathcal{D} en A . En effet, si une telle parabole \mathcal{P} existe, la projection orthogonale de A sur la directrice Δ de \mathcal{P} est le symétrique F' du foyer F par rapport à la tangente en A (la droite \mathcal{D}); le point F' n'est pas sur \mathcal{D} et la directrice Δ est la perpendiculaire en F' à la droite $\text{Dr}(A, F')$; on prouve ainsi l'unicité d'une telle parabole. Inversement il est clair que la parabole de foyer F dont on détermine ainsi la directrice, passe par A et a pour tangente en A la droite \mathcal{D} .

Soit $F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$, de coordonnées (x_0, y_0) dans \mathcal{R} (donc $y_0 \neq 0$); son symétrique par rapport à la droite \mathcal{D} est le point F' de coordonnées $(x_0, -y_0)$; la perpendiculaire à $\text{Dr}(A, F')$ passant par F' est la droite d'équation :

$$x_0(x - x_0) - y_0(y + y_0) = 0.$$

Le paramètre d'une parabole étant la distance entre son foyer et sa directrice, le point $F \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$ appartient au lieu \mathcal{L} des foyers des paraboles de paramètre p tangentes en A à \mathcal{D} si, et seulement si :

$$\frac{2y_0^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = p \quad \text{soit} \quad 4y_0^4 - p^2(x_0^2 + y_0^2) = 0.$$

Le lieu \mathcal{L} est donc l'ensemble des points de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$ dont les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifient l'équation :

$$(1) \quad 4y^4 - p^2(x^2 + y^2) = 0.$$

On peut remarquer que le seul point de \mathcal{D} dont les coordonnées vérifient l'équation (1) est le point A .

Montrons que \mathcal{L} est la trajectoire \mathcal{C} de la courbe en polaires d'équation :

$$\rho = \frac{p}{2 \sin^2 \theta} \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}).$$

Si $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) est élément de \mathcal{C} , il existe un réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = \frac{p}{2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad y = \frac{p}{2} \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \text{d'où} \quad 4y^4 = \frac{p^4}{4 \sin^4 \theta} = p^2(x^2 + y^2).$$

Comme d'autre part $y = \rho \sin \theta \neq 0$, on en déduit $M \in \mathcal{L}$. Inversement, si le point M de coordonnées (x, y) est dans \mathcal{L} , il existe $(\rho_1, \theta_1) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = \rho_1 \cos \theta_1, \quad y = \rho_1 \sin \theta_1,$$

et comme les coordonnées de M vérifient (1) on a :

$$4\rho_1^4 \sin^4 \theta_1 = p^2 \rho_1^2 \quad \text{d'où} \quad \rho_1 = \frac{1}{2 \sin^2 \theta_1} \quad \text{ou} \quad \rho_1 = -\frac{1}{2 \sin^2 \theta_1}.$$

Dans le premier cas M est l'image du paramètre θ_1 dans la courbe en polaires, dans le second M c'est l'image du paramètre $\theta + \pi$. Le lieu \mathcal{L} est donc bien la trajectoire de la courbe en polaires.

b) Soit $F \in \mathcal{L}$ de coordonnées (x_0, y_0) . La parabole de foyer F qui est tangente en A à la droite \mathcal{D} est de paramètre p , et comme l'équation de sa directrice est (cf. a)) :

$$x_0 x - y_0 y - (x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

son équation dans \mathcal{R} est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{(x_0 x - y_0 y - (x_0^2 + y_0^2))^2}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Après calcul on trouve l'équation :

$$(y_0 x + x_0 y)^2 - 4 y_0 (x_0^2 + y_0^2) y = 0.$$

Calculons maintenant le centre de courbure de cette parabole en A . Supposons que la parabole soit paramétrée de telle sorte que le repère $\mathcal{R} = (A; e_1, e_2)$ soit le repère de Frenet en A . Le rayon de courbure algébrique R est alors la limite du rapport $x^2/2y$. Au voisinage de A , si le point M de coordonnées (x, y) est sur la parabole, on a :

$$y_0^2 \frac{x^2}{2y} + x_0 y_0 \frac{x}{2} + x_0^2 \frac{y}{2} - 2 y_0 (x_0^2 + y_0^2) = 0,$$

d'où, et notant C le centre de courbure :

$$R = 2 \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} \quad \text{et} \quad C = A + 2 \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} e_2.$$

Supposons que le point F soit le point de paramètre $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ dans la courbe en polaires introduite dans le a), on a alors :

$$R = 2 \frac{\rho^2}{\rho \sin \theta} = 2 \frac{\rho}{\sin \theta} = \frac{p}{\sin^3 \theta} \quad \text{et} \quad C = A + \frac{p}{\sin^3 \theta} e_2.$$

L'ensemble des centres de courbure en A aux paraboles vérifiant les conditions de l'énoncé est donc la perpendiculaire en A à \mathcal{D} , privée de l'ensemble des points dont la distance à \mathcal{D} est $< p$.

Exercice 11 :

- || Soit \mathcal{C} un cercle de rayon $R > 0$, et O un point de \mathcal{C} .
- || a) Pour chaque point $F \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, trouver les coniques à centre Γ osculatrices à \mathcal{C} en O et admettant F pour foyer.
- || b) Lieu du second foyer de Γ . ■

a) Soit \mathcal{R} un repère orthonormé dans lequel une équation du cercle \mathcal{C} est $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$. Soit $F \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$; il existe un réel $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que F soit le point de coordonnées :

$$x_F = 2R \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad y_F = 2R \cos \theta \sin \theta.$$

La conique Γ est une conique de foyer F si, et seulement si, l'une de ses équations est de la forme

$$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 - (u x + v y + w)^2 = 0 ,$$

où $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $(u, v) \neq (0, 0)$; on peut supposer $w \leq 0$. Cette conique est tangente au cercle en O si, et seulement si le polynôme en y :

$$x_F^2 + (y - y_F)^2 - (v y + w)^2 ,$$

admet 0 comme zéro double, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$v^2 \neq 1 , \quad x_F^2 + y_F^2 - w^2 = 0 \quad \text{et} \quad y_F + v w = 0 .$$

Ces conditions s'écrivent (on suppose $w \leq 0$) :

$$w = -2 R \cos \theta \quad \text{et} \quad v = \sin \theta .$$

On vérifie que si ces conditions sont réunies, $v^2 = \sin^2 \theta \neq 1$ car $\cos \theta > 0$. Une équation de Γ est alors :

$$(1 - u^2) x^2 - 2 u v x y + (1 - v^2) y^2 - 2 (x_F + u w) x = 0 .$$

Il reste encore à écrire que le rayon de courbure en O est R ; cette condition s'écrit (le rayon de courbure est la limite de $y^2/2x$ au voisinage de O) :

$$R = \frac{x_F + u w}{1 - v^2} \quad \text{soit} \quad u = \frac{R \cos^2 \theta - 2 R \cos^2 \theta}{-2 R \cos \theta} = \frac{\cos \theta}{2} .$$

Il y a donc une seule conique de foyer F qui soit osculatrice en O au cercle \mathcal{C} ; l'une de ses équations est :

$$(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 - \left(\frac{1}{2} \cos \theta x + \sin \theta y - 2 R \cos \theta \right)^2 = 0 ,$$

ou encore :

$$\left(1 - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) x^2 - \cos \theta \sin \theta x y + \cos^2 \theta (y^2 - 2 R x) = 0 .$$

On vérifie que le foyer F n'est pas sur la directrice :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1}{2} \cos \theta \cdot 2 R \cos^2 \theta + \sin \theta \cdot 2 R \sin \theta \cos \theta - 2 R \cos \theta = \\ & = R \cos \theta (\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta - 2) = -R \cos^3 \theta < 0 . \end{aligned}$$

La conique Γ est donc une conique propre. Son excentricité est :

$$e = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} .$$

Comme $\cos \theta > 0$, on a $e < 1$; la conique est donc toujours une ellipse.

b) Nous avons vu dans l'égalité (1) que :

$$u x_F + v y_F + w = -R \cos^3 \theta ,$$

où $u x + v y + w = 0$ est une équation de la directrice du foyer F ; ce nombre est $-e d$, où e est l'excentricité de la conique et d la distance du foyer à la directrice; c'est donc le paramètre de la conique. Nous en déduisons, $a > 0$ désignant le demi-grand axe de l'ellipse et p son paramètre :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{R \cos^3 \theta}{1 - \frac{1}{4} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{4 R}{3} \cos \theta .$$

Le second foyer F' se trouve sur la symétrique par rapport à la tangente en O de la droite $Dr(O, F)$; cette droite est la droite de paramètre angulaire $-\theta$. On a aussi l'égalité $OF + OF' = 2a$; nous en déduisons :

$$OF' = \frac{8 R}{3} \cos \theta - 2 R \cos \theta = \frac{2 R}{3} \cos \theta .$$

Le point F' est donc le point de coordonnées :

$$x_{F'} = \frac{2 R}{3} \cos^2 \theta \quad \text{et} \quad y_{F'} = -\frac{2 R}{3} \cos \theta \sin \theta .$$

Quand θ décrit l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, le point F' décrit le cercle tangent en O au cercle \mathcal{C} et de rayon $R/3$, privé du point O .

Exercice 14 :

|| Soit Γ une ellipse de foyers F et F' . Un point M décrit Γ .
 || Trouver le lieu du centre du cercle d'Euler, des centres des cercles
 || inscrits et exinscrits du triangle $\{M, F, F'\}$. ■

On choisit un repère orthonormé d'origine O dans lequel l'équation de Γ est réduite, de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Les foyers F et F' sont les points de coordonnées respectives $(-c, 0)$ et $(c, 0)$. L'excentricité de l'ellipse sera notée e .

Lieu du centre du cercle d'Euler

L'ellipse est la trajectoire de l'arc paramétré $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $t \mapsto M(t)$, où $M(t)$ est le point de coordonnées $(a \cos t, b \sin t)$. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$

d'Euler du triangle $\{M(t), F, F'\}$ est le cercle circonscrit au triangle des milieux des côtés, c'est-à-dire ici le cercle circonscrit aux points A, A', O dont les coordonnées sont respectivement :

$$\frac{1}{2}(a \cos t - c, b \sin t), \quad \frac{1}{2}(a \cos t + c, b \sin t), \quad (0, 0).$$

La médiatrice de $\{O, A'\}$ est la droite d'équation :

$$(a \cos t + c) \left(x - \frac{1}{4}(a \cos t + c) \right) + b \sin t \left(y - \frac{1}{4}b \sin t \right) = 0.$$

La médiatrice de $\{A, A'\}$ est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}a \cos t$. Le point cherché est donc le point d'abscisse $\alpha(t) = \frac{1}{2}a \cos t$ et d'ordonnée :

$$\beta(t) = \frac{1}{4}b \sin t - \frac{a \cos t + c}{4b \sin t}(a \cos t - c) = \frac{b^2 \sin^2 t - a^2 \cos^2 t + c^2}{4b \sin t}.$$

Comme $c^2 = a^2 - b^2$ on a aussi, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}a \cos t, \quad \beta(t) = \frac{a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{4b \sin t}.$$

Lieu des centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits

La distance entre deux points A et B de \mathcal{E} sera notée AB . Soit $M \in \Gamma$ de coordonnées (x, y) , M étant distinct des sommets S et S' situés sur l'axe focal. Soit H la projection orthogonale de M sur la directrice associée à F (c'est la polaire de F); on a l'égalité: $MF = e MH$; comme H est d'abscisse $-c - \frac{b^2}{c} = -\frac{a^2}{c}$, on en déduit $MF = ex + a$. De manière analogue, $MF' = a - ex$. On retrouve l'égalité $MF + MF' = 2a$. On rappelle que $FF' = 2c$.

Le centre I du cercle inscrit du triangle $\{M, F, F'\}$ est le barycentre de la famille $(M, FF'), (F, MF'), (F', MF)$. Les coordonnées (x_I, y_I) du centre de cercle inscrit sont donc telles que :

$$(2a + 2c) \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix} = 2c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (a - ex) \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} + (ex + a) \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$x_I = ex \quad \text{et} \quad y_I = \frac{e}{e+1}y.$$

Le point I décrit donc une ellipse moins deux points, image de $\Gamma \setminus \{S, S'\}$ par une application affine. Les sommets de cette ellipse sont les foyers F et F' .

Le centre J du cercle exinscrit situé sur la bissectrice intérieure en M du triangle $\{M, F, F'\}$ est le barycentre de la famille de points pondérés $(M, -FF')$, (F, MF') , (F', MF) . Les coordonnées (x_J, y_J) de ce point sont donc telles que :

$$(2a - 2c) \begin{bmatrix} x_J \\ y_J \end{bmatrix} = -2c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (a - ex) \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} + (ex + a) \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$x_J = -ex \quad \text{et} \quad y_J = -\frac{e}{1-e} y.$$

Le point J décrit donc une ellipse moins deux points, image de $\Gamma \setminus \{S, S'\}$ par une application affine.

Le centre K du cercle exinscrit situé sur la bissectrice intérieure en F du triangle $\{M, F, F'\}$ est le barycentre de la famille de points pondérés (M, FF') , $(F, -MF')$, (F', MF) . Comme :

$$FF' - MF' + MF = 2c - a + ex + a + ex = 2(c + ex) = \frac{2c}{a}(a + x),$$

les coordonnées (x_K, y_K) de ce point sont donc telles que :

$$\frac{2c}{a}(a + x) \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} = 2c \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - (a - ex) \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} + (ex + a) \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$x_K = a \quad \text{et} \quad y_K = \frac{ay}{x+a}.$$

En posant $x = a \cos \theta$ et $y = b \sin \theta$, où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on obtient :

$$y_K = \frac{ab \sin \theta}{a + a \cos \theta} = b \operatorname{tg}(\theta/2).$$

Le point K décrit donc la tangente au sommet S' (d'abscisse a), privée de S'

On montrerait de manière analogue que le centre K' du cercle exinscrit situé sur la bissectrice intérieure en F' du triangle $\{M, F, F'\}$ décrit la tangente au sommet S (d'abscisse $-a$), privée de S .

Exercice 18 :

|| Des hyperboles équilatères de centre O passent par un point fixe $A \neq O$. Lieu des foyers ? Enveloppe des directrices ? Lieu des sommets ? ■

On introduit le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel les coordonnées du point A sont $(\alpha, 0)$, où $\alpha > 0$. Une paire de droites orthogonales se coupant en O et ne passant pas par le point A étant donnée, il existe une et une seule hyperbole passant par A et dont les asymptotes soient ces droites. Il existe aussi un repère orthonormé direct et un seul $\mathcal{R}' = (O; \vec{u}, \vec{v})$ tel que les droites soient les axes de coordonnées de ce repère, et tel que les coordonnées de A dans ce repère soient toutes les deux positives. On peut introduire alors le réel $\theta \in]0, \pi/2[$ tel que les coordonnées de A dans \mathcal{R}' soient $(\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta)$. On en déduit $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = \sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$.

On reprend les notations introduites ci-dessus, la famille des hyperboles trouvées étant paramétrée par $\theta \in]0, \pi/2[$. L'équation dans le repère \mathcal{R}' de l'hyperbole correspondant au paramètre θ est :

$$x' y' = \alpha^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{\alpha^2}{2} \sin 2\theta .$$

Le demi-grand axe a de l'hyperbole est la distance du centre aux sommets, c'est-à-dire $\alpha \sqrt{\sin 2\theta}$, et comme l'excentricité est $\sqrt{2}$, la distance du centre aux foyers est $c = \alpha \sqrt{2 \sin 2\theta}$. L'un des foyers est le point dont l'affixe dans \mathcal{R}' est $\alpha \sqrt{2 \sin 2\theta} e^{i\pi/4}$; son affixe dans le repère fixe \mathcal{R} est $\alpha \sqrt{2 \sin 2\theta} e^{i(\pi/4 - \theta)}$. L'autre foyer est le symétrique par rapport à O .

Posons $\varphi = \pi/4 - \theta$, paramètre qui décrit l'intervalle $]-\pi/4, \pi/4[$. Le demi-grand axe de l'hyperbole qui correspond au paramètre φ est $a = \alpha \sqrt{\cos 2\varphi}$. L'affixe dans \mathcal{R} du premier foyer $F_1(\varphi)$ est $\alpha \sqrt{2 \cos 2\varphi} e^{i\varphi}$, le deuxième foyer, $F_2(\varphi)$, a pour affixe $-\alpha \sqrt{2 \cos 2\varphi} e^{i\varphi}$. Les deux foyers décrivent donc la Lemniscate de Bernoulli (privée de O) d'équation polaire :

$$\rho^2 = 2 \alpha^2 \cos(2\varphi) .$$

La directrice associée au foyer $F_1(\varphi)$ est à une distance de O égale à :

$$\frac{b^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos 2\varphi} .$$

Cette directrice coupe le segment $[O, F_1(\varphi)]$. Son équation normale dans le repère \mathcal{R} est :

$$\cos \varphi x + \sin \varphi y = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos 2\varphi} .$$

L'équation dérivée est :

$$-\sin \varphi x + \cos \varphi y = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} .$$

On trouve que l'affixe $z_1(\varphi)$ du point de contact est :

$$z_1(\varphi) = e^{i\varphi} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{e^{-2i\varphi}}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2} \cos 2\varphi} e^{-i\varphi} .$$

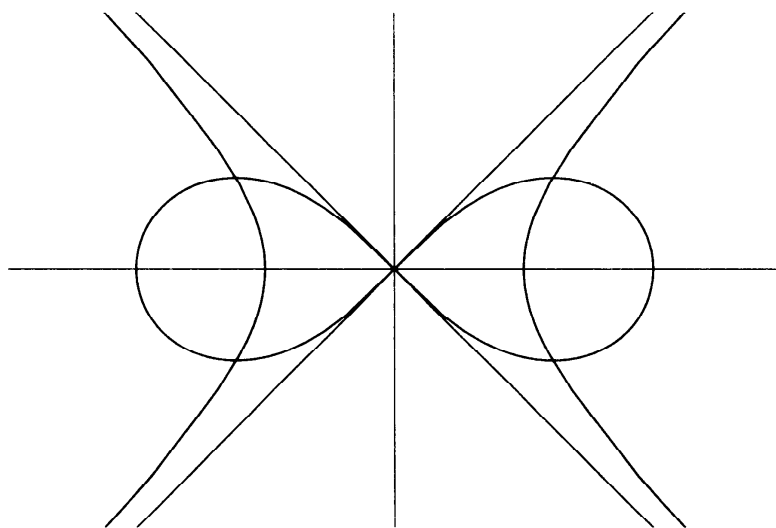
Par symétrie, l'affixe du point de contact de l'enveloppe de la directrice associée au foyer $F_2(\varphi)$ est :

$$z_2(\varphi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2} \cos 2\varphi} e^{-i\varphi} .$$

On vérifie que les points d'affixes $z_1(\varphi)$ et $z_2(\varphi)$ décrivent, quand φ décrit l'intervalle $]-\pi/4, \pi/4[$, respectivement l'une et l'autre branche de l'hyperbole équilatère d'équation :

$$x^2 - y^2 = \frac{\alpha^2}{2} .$$

On obtient la représentation graphique suivante :



Les sommets sont les homothétiques des foyers par une homothétie de centre O et de rapport $1/\sqrt{2}$. Les sommets décrivent donc la lemniscate de Bernoulli (privée de O) d'équation polaire :

$$\rho^2 = \alpha^2 \cos(2\varphi) .$$

Exercice 22 :

- || Lieu du centre des hyperboles équilatères tangentes à trois droites données. ■

1) Le plan affine euclidien \mathcal{E} sera muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2)$. Soit $P \in \mathcal{P}_2$, posons :

$$P(M) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$

où $M = O + (xe_1 + ye_2)$. Posons aussi :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{bmatrix}.$$

La conique $\mathcal{C} = P^{-1}(0)$ est à centre si, et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \varphi \det A \neq 0.$$

En supposant cette condition satisfaite, on remarque que, en notant (x_C, y_C) les coordonnées du centre C de \mathcal{C} :

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} be - cd \\ bd - ea \end{bmatrix} = \frac{1}{\varphi} \begin{bmatrix} \delta \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Le dernier vecteur colonne de la matrice A^{-1} est donc un système de coordonnées homogènes de C .

On a $A = (A^{-1})^{-1}$, d'où :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} \gamma\varphi - \varepsilon^2 & \delta\varepsilon - \beta\varphi \\ \delta\varepsilon - \beta\varphi & \alpha\varphi - \delta^2 \end{bmatrix}.$$

En supposant $\det A \neq 0$, la conique $P^{-1}(0)$ est donc une hyperbole équilatère si, et seulement si :

$$\frac{a+c}{\det A} = \varphi(\alpha + \gamma) - \delta^2 - \varepsilon^2 = 0,$$

condition qui s'écrit aussi :

$$x_C^2 + y_C^2 = \frac{\alpha}{\varphi} + \frac{\gamma}{\varphi}.$$

2) Nous supposons que les droites de l'énoncé, notées ici $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$, sont non deux à deux parallèles. Pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, une équation de la droite \mathcal{D}_i est de la forme $u_i x + v_i y + w_i = 0$, où $(u_i, v_i, w_i) \in \mathbb{R}^3$, $(u_i, v_i$

droites sont des tangentes (ou asymptotes) de la conique \mathcal{C} si, et seulement si :

$$\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 v_1 + \gamma v_1^2 + 2\delta u_1 w_1 + 2\varepsilon v_1 w_1 + \varphi w_1^2 = 0$$

$$\alpha u_2^2 + 2\beta u_2 v_2 + \gamma v_2^2 + 2\delta u_2 w_2 + 2\varepsilon v_2 w_2 + \varphi w_2^2 = 0$$

$$\alpha u_3^2 + 2\beta u_3 v_3 + \gamma v_3^2 + 2\delta u_3 w_3 + 2\varepsilon v_3 w_3 + \varphi w_3^2 = 0 .$$

Ce système en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi)$ est de rang 3 et peut-être paramétré par $(\delta, \varepsilon, \varphi)$; on vérifie en effet que (déterminant de Vandermonde) :

$$\det \begin{bmatrix} u_1^2 & 2u_1 v_1 & v_1^2 \\ u_2^2 & 2u_2 v_2 & v_2^2 \\ u_3^2 & 2u_3 v_3 & v_3^2 \end{bmatrix} = 2(v_3 u_2 - v_2 u_3)(v_3 u_1 - v_1 u_3)(v_2 u_1 - v_1 u_2) \neq 0 .$$

Cela signifie que l'ensemble des solutions du système linéaire est le graphe d'une application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; nous noterons Φ_1, Φ_2, Φ_3 les coordonnées de Φ , qui donnent respectivement α, β, γ en fonction de $(\delta, \varepsilon, \varphi)$.

Soit $C \in \mathcal{C}$ de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; le point C est centre de la conique \mathcal{C} , et les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont des tangentes (ou asymptotes) de la conique, et seulement si :

$$\varphi \neq 0, \quad \det A \neq 0, \quad (\delta, \varepsilon) = \varphi \cdot (x, y) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = \Phi(\delta, \varepsilon, \varphi) .$$

Il est donc clair que ces conditions déterminent une conique \mathcal{C} et une seule, sauf au cas où les matrices obtenues seraient singulières. La conique obtenue est une hyperbole équilatère si, et seulement si, les coordonnées (x_C, y_C) du centre C de \mathcal{C} vérifient la condition :

$$(\Phi_1 + \Phi_3)(x_C, y_C, 1) = x_C^2 + y_C^2 .$$

L'application $T = \Phi_1 + \Phi_3$ étant linéaire, cette dernière condition est vérifiée si, et seulement si, le point C se trouve sur le cercle d'équation :

$$(1) \quad x^2 + y^2 - T(x, y, 1) = 0 .$$

3) Déterminons maintenant plus précisément l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) tels que :

$$x^2 + y^2 - T(x, y, 1) = 0 .$$

L'origine O du repère \mathcal{R} étant toujours quelconque, écrivons les équations des droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sous forme normale, c'est-à-dire sous la forme :

$$\cos \theta_i x + \sin \theta_i y - d_i = 0 \quad (i \in \{1, 2, 3\}) ,$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont des réels distincts modulo π et d_1, d_2, d_3 des réels. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le triplet $\Phi(x, y, 1)$, noté ci-dessous (α, β, γ) , vérifie les conditions :

$$\begin{aligned} (\forall i \in \{1, 2, 3\}) \quad \cos^2 \theta_i \alpha + 2 \sin \theta_i \cos \theta_i \beta + \sin^2 \theta_i \gamma = \\ = 2 d_i \cos \theta_i x + 2 d_i \sin \theta_i y - d_i^2. \end{aligned}$$

Ce système est équivalent au système :

$$\begin{aligned} (\forall i \in \{1, 2, 3\}) \quad \frac{\alpha + \gamma}{2} + \sin 2\theta_i \beta + \cos 2\theta_i \frac{\alpha - \gamma}{2} = \\ = 2 d_i \cos \theta_i x + 2 d_i \sin \theta_i y - d_i^2. \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Cramer, on trouve :

$$T(x, y, 1) = \alpha + \gamma = 2 \frac{\det [2 d_i \cos \theta_i x + 2 d_i \sin \theta_i y - d_i^2, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]}{\det [1, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]}.$$

Posons $\Delta = \det [1, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]$; on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité :

$$\begin{aligned} \Delta((x^2 + y^2) - T(x, y, 1)) = \\ = \det [x^2 + y^2 - 4 d_i \cos \theta_i x - 4 d_i \sin \theta_i y + 2 d_i^2, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i] = \\ = \det [(x - 2 d_i \cos \theta_i)^2 + (y - 2 d_i \sin \theta_i)^2 - 2 d_i^2, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]. \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons s_i la symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D}_i ; les coordonnées de $s_i(O)$ sont $(2 d_i \cos \theta_i, 2 d_i \sin \theta_i)$. En développant le déterminant, on voit que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} \Delta((x^2 + y^2) - T(x, y, 1)) = \\ = \sin 2\alpha_1 \overrightarrow{s_1(O)M}^2 + \sin 2\alpha_2 \overrightarrow{s_2(O)M}^2 + \sin 2\alpha_3 \overrightarrow{s_3(O)M}^2 + \\ - 2 \det [d_i^2, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]. \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \theta_2 - \theta_3$, $\alpha_2 = \theta_3 - \theta_1$ et $\alpha_3 = \theta_1 - \theta_2$. Le centre du cercle est donc le barycentre de la famille de points massiques $(s_i(O), \sin 2\alpha_i)_{i \in \{1, 2, 3\}}$. Les coefficients de cette famille sont indépendant du repère choisi, et leur somme n'est pas nulle, c'est le déterminant : $\Delta = \det [1, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i]$. Quand le cercle est réel, il est géométriquement clair que ce barycentre est indépendant de la position de l'origine O du repère ; on peut vérifier cela par le calcul dans tous les cas. Montrons que ce barycentre est l'orthocentre du triangle (A_1, A_2, A_3) déterminé par les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ (A_i est l'intersection des droites \mathcal{D}_j et \mathcal{D}_k si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$). Notons H ce barycentre. Prenons pour origine $O = A_1$; on alors $s_2(O) = s_3(O) = O$, et par conséquent :

$$\overrightarrow{A_1 H} = \sin 2\alpha_1 \overrightarrow{A_1 s_1(A_1)}.$$

Comme s_1 est la symétrie orthogonale autour de \mathcal{D}_1 , on voit que le point H se trouve sur la hauteur en A_1 dans le triangle (A_1, A_2, A_3) ; on démontrerait de manière analogue que H est sur les deux autres hauteurs du triangle; H est donc l'orthocentre du triangle, ce qu'il fallait démontrer.

4) Prenons maintenant pour \mathcal{R} un repère orthonormé de centre l'orthocentre H du triangle (A_1, A_2, A_3) . Pour tout M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} on a :

$$\begin{aligned} \Delta (x^2 + y^2 - T(x, y, 1)) &= \\ &= \Delta \overrightarrow{HM}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \overrightarrow{s_i(H)H}^2 - 2 \det [d_i^2, \sin 2\theta_i, \cos 2\theta_i] . \end{aligned}$$

Comme pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{s_i(H)H}^2 = 4d_i^2$, on voit que pour tout M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} :

$$\Delta (x^2 + y^2 - T(x, y, 1)) = \Delta \overrightarrow{HM}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \overrightarrow{s_i(H)H}^2 .$$

D'après la définition de H , pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a :

$$\sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \overrightarrow{s_i(H)M}^2 = \Delta \overrightarrow{HM}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \overrightarrow{s_i(H)H}^2 .$$

Prenons pour M le centre Ω du cercle circonscrit au triangle (A_1, A_2, A_3) ; comme les symétriques de l'orthocentre sont sur le cercle circonscrit on en déduit :

$$\Delta R^2 = \Delta \overrightarrow{H\Omega}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin 2\alpha_i \overrightarrow{s_i(H)H}^2 ,$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit du triangle. Pour tout point M de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} on a donc :

$$x^2 + y^2 - T(x, y, 1) = \overrightarrow{HM}^2 + \frac{1}{2} (R^2 - \overrightarrow{H\Omega}^2) .$$

5) Le lieu cherché est donc l'ensemble des points $C \in \mathcal{E}$ tels que

$$\overrightarrow{HC}^2 = \frac{1}{2} (\overrightarrow{H\Omega}^2 - R^2) ,$$

où H désigne l'orthocentre du triangle formé par les trois droites, Ω le centre du cercle circonscrit et R le rayon du cercle circonscrit

un cercle de centre H qui a des points réels si, et seulement si, l'orthocentre du triangle est à l'extérieur du cercle circonscrit, ce qui est vérifié si, et seulement si, le triangle a au moins un angle obtus. Pour chaque point C du cercle, il existe une et une seule hyperbole équilatère de centre C qui soit tangente aux droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. Si H est sur le cercle circonscrit, le triangle est rectangle, et le lieu est réduit au point H ; dans ce cas, les deux côtés orthogonaux du triangle sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère tangente au troisième côté; cette hyperbole est la seule hyperbole équilatère de centre H qui convienne.

Exercice 27 :

|| Soit un triangle $\{A, B, C\}$. Notons \mathcal{F} la famille des coniques passant par A, B, C , et dont les normales en A, B, C concourent. Lieu du point commun à ces normales (Darboux). ■

Une équation barycentrique dans la base affine (A, B, C) d'une conique propre passant par A, B, C est de la forme :

$$cxy + bxz + ayz = 0 ,$$

où a, b, c sont trois réels tous non nuls (sinon la conique est dégénérée). Les équations barycentriques des tangentes en A, B, C sont respectivement :

$$cy + bz = 0 \quad cx + az = 0 , \quad bx + ay = 0 .$$

Pour nous dégager de la base affine, notons α, β, γ les fonctions affines sur \mathcal{E} qui à $M \in \mathcal{E}$ font correspondre les coordonnées barycentriques de M de telle sorte que :

$$(\forall M \in \mathcal{E}) \quad M = \alpha(M)A + \beta(M)B + \gamma(M)C .$$

Les tangentes en A, B, C sont respectivement les droites $(c\beta + b\gamma)^{-1}(0)$, $(c\alpha + a\gamma)^{-1}(0)$, $(b\alpha + a\beta)^{-1}(0)$. Soit R une rotation quelconque dans \mathcal{E} d'angle $\pi/2$; son centre sera noté O . Le point M se trouve sur la normale en A si, et seulement si :

$$(c\vec{\beta} + b\vec{\gamma})(\vec{R}(\overrightarrow{AM})) = 0 .$$

Cette condition s'écrit :

$$(c\beta + b\gamma)(R(M)) = (c\beta + b\gamma)(R(A)) .$$

De manière analogue le point M se trouve sur la normale en B si, et seulement si :

$$(c\alpha + a\gamma)(R(M)) = (c\alpha + a\gamma)(R(B)) ,$$

et il se trouve sur la normale en C si, et seulement si :

$$(b\alpha + a\beta)(R(M)) = (b\alpha + a\beta)(R(C)) .$$

Les fonctions affines $\alpha' = \alpha \circ R$, $\beta' = \beta \circ R$, $\gamma' = \gamma \circ R$ sont les coordonnées barycentriques dans la base affine $(R^{-1}(A), R^{-1}(B), R^{-1}(C))$, que nous noterons (A', B', C') . En notant (x', y', z') les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A', B', C') , on voit que le point M est sur les trois normales si, et seulement si :

$$cy' + bz' = cy'_A + bz'_A, \quad cx' + az' = cx'_B + az'_B, \quad bx' + ay' = bx'_C + ay'_C .$$

Ces conditions s'écrivent matriciellement :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 0 & z' - z'_A & y' - y'_A \\ z' - z'_B & 0 & x' - x'_B \\ y' - y'_C & x' - x'_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 .$$

Le point M de coordonnées barycentriques (x', y', z') est le point de concours des normales en A, B, C d'une conique propre passant par A, B, C si, et seulement si, il existe des réels (a, b, c) , tous non nuls, tels que la condition (1) soit vérifiée. Cela implique la nullité du déterminant, c'est-à-dire :

$$(2) \quad (x' - x'_C)(y' - y'_A)(z' - z'_B) + (x' - x'_B)(y' - y'_C)(z' - z'_A) = 0 .$$

L'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques dans la base affine (A', B', C') vérifient la condition (2) est une cubique \mathcal{C} qui passe par A, B, C .

Réciproquement, si les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A', B', C') vérifient la condition (2), et que $x' \neq x'_C$, $z' \neq z'_B$, $y' \neq y'_A$, alors tous les coefficients de la comatrice de la matrice du système (1) sont non nuls. Les triplets (a, b, c) non nuls qui vérifient (1) sont donc composés de réels tous non nuls, ce qui prouve que M est bien le point de concours des normales en A, B, C d'une conique propre passant par ces points. Si $M \in \mathcal{C}$ et que $x' = x'_C$, alors $y' = y'_C$, ou $x' = x'_B$, ou $z' = z'_A$.

Dans le premier cas on a aussi $z' = z'_C$; ces conditions sont réalisées si, et seulement si, $M = C$. Le point C est sur les trois normales en A, B, C de la conique si, et seulement si :

$$cy'_C + bz'_C = cy'_A + bz'_A, \quad cx'_C + az'_C = cx'_B + az'_B,$$

soit :

$$b(z'_C - z'_A) = -c(y'_C - y'_A) \quad \text{et} \quad a(z'_C - z'_B) = -c(x'_C -$$

Les réels $y'_C - y'_A$ et $x'_C - x'_B$ sont toujours non nuls : par exemple $y'_C = y'_A$ signifie que la droite $\text{Dr}(A, C)$ est parallèle à la droite $\text{Dr}(A', C')$ ce qui est exclu. On voit qu'il existe en général une et une seule conique vérifiant ces conditions : la conique qui admet pour normales en A et B respectivement les droites $\text{Dr}(A, C)$ et $\text{Dr}(B, C)$, et qui passe par C . La condition $z'_C = z'_A$ est vérifiée si, et seulement si, la droite $\text{Dr}(A, C)$ est orthogonale à la droite $\text{Dr}(A, B)$, c'est-à-dire si, et seulement si, le triangle (A, B, C) est rectangle en A ; dans ce cas $z'_C \neq z'_B$ et la conique trouvée a pour équation barycentrique $xz = 0$; il s'agit de la réunion des droites $\text{Dr}(A, B)$ et $\text{Dr}(B, C)$. On trouve un cas analogue dans le cas où le triangle (A, B, C) est rectangle en B .

Dans le second on aurait $x'_C = x'_B$; la droite $\text{Dr}(B, C)$ serait alors parallèle à la droite $\text{Dr}(B', C')$ qui lui est orthogonale ; ce cas est donc exclu.

Enfin les conditions $x' = x'_C$ et $z' = z'_A$ sont réalisées si, et seulement si, le point M se trouve sur la parallèle à $\text{Dr}(B', C')$ menée par C , c'est-à-dire la normale à $\text{Dr}(B, C)$ menée par C , et sur la parallèle à $\text{Dr}(A', B')$ menée par A , c'est-à-dire la normale à $\text{Dr}(A, B)$ menée par A ; ces conditions sont réalisées si, et seulement si, le point M est le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit au triangle (A, B, C) , point que nous noterons ici B'' . Les conditions sur (a, b, c) s'écrivent alors :

$$cy'_{B''} = cy'_A, \quad c(x'_C - x'_B) = -a(z'_B - z'_A), \quad ay'_{B''} = ay'_C.$$

Les réels $x'_C - x'_B$ et $z'_B - z'_A$ sont $\neq 0$, donc $a = 0$ si, et seulement si, $c = 0$; on ne peut pas avoir $a \neq 0$ et $c \neq 0$ sinon on aurait $y'_A = y'_C$; donc $a = c = 0$. La conique trouvée a pour équation barycentrique $xz = 0$; il s'agit de la réunion des droites $\text{Dr}(A, B)$ et $\text{Dr}(B, C)$.

On étudie de manière analogue le cas où $z' = z'_B$ ou $y' = y'_A$. Il y a donc au plus 6 points particuliers sur la cubique, les points A, B, C et les points diamétralement opposés sur le cercle circonscrit au triangle (A, B, C) .

On trouve aussi sur cette cubique 3 autres points remarquables.

Le premier est le centre de cercle circonscrit au triangle (A, B, C) , ce qui est un évidence géométrique.

Le second est l'orthocentre H du triangle (A, B, C) . Le triangle (A, B, C) est le triangle des milieux d'un triangle (A_1, B_1, C_1) . L'ellipse d'aire maximale inscrite dans ce triangle est tangente aux côtés du triangle (A_1, B_1, C_1) respectivement en A, B, C (cf. Exercice 10 du § VI.5 du Tome 3) ; c'est l'ellipse de Steiner du triangle (A_1, B_1, C_1) . Les normales en A, B, C de cette ellipse sont les médiatrices du triangle (A_1, B_1, C_1) , donc les hauteurs du triangle (A, B, C) ; elles sont concourantes en H .

Le troisième est le centre du cercle inscrit du triangle (A, B, C) . Il suffit pour le prouver de montrer que les bissectrices extérieures en A, B, C du triangle (A, B, C) sont bien les tangentes en A, B, C d'une conique. Notons ici a_1, b_1, c_1 les longueurs des côtés du triangle (A, B, C) . 1

barycentriques des bissectrices extérieures en A, B, C sont respectivement :

$$\frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 0, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{z}{c_1} = 0, \quad \frac{y}{b_1} + \frac{x}{a_1} = 0,$$

soit encore :

$$c_1 y + b_1 z = 0, \quad c_1 x + a_1 z = 0, \quad b_1 x + a_1 y = 0.$$

D'après le début de cette étude, ce sont les tangentes respectivement en A, B, C de l'ellipse d'équation barycentrique :

$$a_1 y z + b_1 x z + c_1 x y = 0.$$

Le centre du cercle inscrit dans le triangle (A, B, C) , point de concours des bissectrices intérieures, est le point de concours des normales en A, B, C de cette ellipse.

Discussion de la nature de la cubique de Darboux.

On trouvera ci-dessous une discussion de la nature de la cubique de Darboux. Le lecteur pourra se reporter à la fin de ce chapitre où il trouvera des aperçus généraux sur les cubiques planes.

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, et tel que $(\vec{i} | \vec{j}) = \gamma \geq 0$. Toutes les coordonnées dont il sera question ci-dessous s'entendront relativement à \mathcal{R} . Donnons-nous deux réels non nuls a et b . Soit A et B les points de coordonnées respectives $(a, 0)$ et $(0, b)$. Prenons pour triangle de départ dans le problème de Darboux l'ensemble $\{O, A, B\}$. Le lecteur pourra s'assurer qu'une équation dans \mathcal{R} du lieu cherché est : $\Phi(x, y) = 0$, avec :

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & (\gamma x + y)(x + \gamma y - a)((b\gamma - a)x + (b - a\gamma)y + b(a\gamma - b)) \\ & - (x + \gamma y)(\gamma x + y - b)((a - b\gamma)x + (a\gamma - b)y + a(b\gamma - a)). \end{aligned}$$

Lorsque $\gamma = 0$ (i.e., que \mathcal{R} est orthonormé, c'est-à-dire que le triangle de départ est rectangle en O), l'équation $\Phi = 0$ se réduit à : $f(x, y) = 0$, avec :

$$(I) \quad f(x, y) = 2xy(by - ax) + ab(x^2 - y^2) + 2(a^2 - b^2)xy + ab(by - ax).$$

Il est aisé de vérifier que si $a^2 \neq b^2$, la cubique d'équation $f(x, y) = 0$ est non singulière. Compte tenu des explications générales concernant les cubiques, il est possible d'en déduire qu'en général, le lieu demandé dans le problème de Darboux est une cubique non singulière.

Sans étudier tous les cas exceptionnels, signalons-en deux remarquables :

Cas où le triangle de départ est isocèle et non équilatéral

On obtient ce cas en prenant ci-dessus $a = b > 0$ et $\gamma \neq 1/2$. Alors l'axe de symétrie orthogonale Δ du triangle fait partie du lieu. En effet, les coniques passant par O, A et B et dont la tangente en O est parallèle à la droite $Dr(A, B)$ appartiennent à l'ensemble \mathcal{F} des coniques passant par O, A et B et dont les normales en ces points concourent. Ces coniques forment un faisceau linéaire ponctuel. Les normales en O, A, B à chacune d'elles concourent sur Δ , qui est la normale en O (tous les points de Δ sont obtenus). Le reste du lieu est dans ce cas l'hyperbole dont le centre est le centre Ω du cercle circonscrit au triangle (O, A, B) , qui passe par A et B , et dont les asymptotes sont les médiatrices de $\{O, A\}$ et $\{O, B\}$. Cette hyperbole passe donc par les symétriques A', B' de A et B par rapport à Ω . Toutes ces assertions se vérifient à l'aide de Φ , qui se factorise dans ce cas, les deux facteurs étant proportionnels à $x - y$ et au polynôme h , où :

$$h(x, y) = 2(\gamma x^2 + \gamma y^2 + (1 + \gamma^2)xy) - a(1 + \gamma)(x + y) + a^2(1 - \gamma).$$

L'équation de l'hyperbole est donc $h(x, y) = 0$ (on peut vérifier que sous les hypothèses ici faites, h définit bien une hyperbole propre).

Cas où le triangle de départ est équilatéral

On obtient ce cas en prenant ci-dessus $a = b > 0$ et $\gamma = 1/2$. Alors f se factorise dans $\mathbb{R}[x, y]$ en trois facteurs linéaires ; il est \mathbb{R}^* -proportionnel à g , où :

$$g(x, y) = (x - y)(x + 2y - a)(2x + y - a).$$

Le lieu cherché est l'union des trois axes de symétrie orthogonale du triangle, comme le montre l'équation $g = 0$. L'ensemble \mathcal{F} des cubiques répondant à la condition de l'énoncé est ici l'union des trois faisceaux linéaires ponctuels $\mathcal{F}_O, \mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ définis comme au cas précédent, mais sur chaque côté : \mathcal{F}_O est le faisceau des coniques passant par O, A et B et dont la tangente en O est parallèle à AB , et $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ sont définis de même.

Exercice 30 :

Soit quatre droites \mathcal{D}_i ($1 \leq i \leq 4$) données dans \mathcal{R} par leur équation normale $L_i(M) = 0$, avec

$$(\forall M = O + (x e_1 + y e_2) \in \mathcal{E}) \quad L_i(M) = x \cos \theta_i + y \sin \theta_i - \lambda_i.$$

a) Montrer que $M \in \mathcal{E}$ est foyer d'une conique Γ tangente à chaque \mathcal{D}_i ssi il existe $N \in \mathcal{E}$ tel que les 4 nombres $L_i(M) \times L_i(N)$ ($1 \leq i \leq 4$) soient égaux.

- b) En déduire que le lieu des foyers des coniques tangentes aux 4 droites \mathcal{D}_i est une cubique, qui passe par les 6 points communs aux \mathcal{D}_i prises 2 à 2.
- c) Cas où les \mathcal{D}_i forment un parallélogramme ? Dans ce cas, donner une solution directe. ■

Introduction :

Soit Γ une conique bifocale, ou un cercle, d'équation réduite dans un repère orthonormé \mathcal{R} :

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1 ,$$

où $\alpha > 0$, $\alpha \geq \beta$ et $\beta \neq 0$. Une équation tangentielle de cette conique, dans le même repère est :

$$\alpha u^2 + \beta v^2 - w^2 = 0 .$$

Si c est la distance du centre aux foyers, ou 0 dans le cas où Γ est un cercle, on a $c^2 + \beta = \alpha$. L'équation tangentielle de Γ peut s'écrire :

$$\beta (u^2 + v^2) = w^2 - c^2 u^2 = (w - cu)(w + cu) .$$

La droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est donc tangente à la conique (ou asymptote de l'hyperbole) si, et seulement si :

$$\frac{w - cu}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{w + cu}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \beta ,$$

c'est-à-dire si, et seulement si, le produit des distances algébriques des foyers à la droite \mathcal{D} (dans le cas où Γ est un cercle les foyers sont confondus avec le centre) est β ; précisément $\beta = b^2$ si Γ est une ellipse (ou un cercle) et $\beta = -b^2$ si Γ est une hyperbole.

a) Si M est l'un des foyers d'une conique bifocale (resp. centre d'un cercle), qui est tangente aux droites \mathcal{D}_i pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, alors si N est l'autre foyer (resp. le centre du cercle), il existe un réel $k \neq 0$ tel que $(\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket) \quad L_i(M) \times L_i(N) = k$, k est b^2 si Γ est une ellipse (ou un cercle), et $-b^2$ si Γ est une hyperbole.

Inversement, un point $M \in \mathcal{E}$ étant donné, supposons qu'il existe un réel $k \neq 0$ et un point $N \in \mathcal{E}$ tels que $(\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket) \quad L_i(M) \times L_i(N) = k$. Soit \mathcal{R}' un repère orthonormé dans lequel les coordonnées de M soient $(-c, 0)$ et celles de N soient $(c, 0)$, où $c \geq 0$. Les droites \mathcal{D}_i appartiennent à la conique tangentielle dont une équation dans \mathcal{R}' est :

$$(w - cu)(w + cu) = k(u^2 + v^2) ,$$

qui s'écrit aussi :

$$(k + c^2) u^2 + k v^2 - w^2 = 0 .$$

On a donc nécessairement $k > -c^2$, et il apparaît que les droites \mathcal{D}_i sont tangentes à la conique dont l'équation réduite dans \mathcal{R}' est :

$$\frac{x^2}{k + c^2} + \frac{y^2}{k} - 1 = 0 ,$$

dont M est l'un des foyers (resp. le centre, au cas où $M = N$).

Nous pouvons donc conclure qu'il existe un réel $k \neq 0$, et un point $N \in \mathcal{E}$ tel que $(\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket) \quad L_i(M) \times L_i(N) = k$ si, et seulement si, le point M est l'un des foyers d'une conique bifocale (ou le centre d'un cercle) à laquelle les droites \mathcal{D}_i , pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont tangentes (ou asymptotes).

b) D'après a), le point $M \in \mathcal{E}$ est l'un des foyers d'une conique bifocale (ou le centre d'un cercle) à laquelle les droites \mathcal{D}_i , pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont tangentes (ou asymptotes) si, et seulement si, il existe des réels (x, y, k) , $k \neq 0$, tels que :

$$(\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket) \quad (\cos \theta_i x + \sin \theta_i y - \lambda_i) L_i(M) - k = 0 .$$

Ces conditions s'écrivent matriciellement :

$$(1) \quad x \begin{bmatrix} \cos \theta_1 L_1(M) \\ \cos \theta_2 L_2(M) \\ \cos \theta_3 L_3(M) \\ \cos \theta_4 L_4(M) \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \sin \theta_1 L_1(M) \\ \sin \theta_2 L_2(M) \\ \sin \theta_3 L_3(M) \\ \sin \theta_4 L_4(M) \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 L_1(M) \\ \lambda_2 L_2(M) \\ \lambda_3 L_3(M) \\ \lambda_4 L_4(M) \end{bmatrix} .$$

S'il existe $(x, y, k) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant ces conditions, alors :

$$(2) \quad \det \begin{bmatrix} \cos \theta_1 L_1(M) & \sin \theta_1 L_1(M) & \lambda_1 L_1(M) & 1 \\ \cos \theta_2 L_2(M) & \sin \theta_2 L_2(M) & \lambda_2 L_2(M) & 1 \\ \cos \theta_3 L_3(M) & \sin \theta_3 L_3(M) & \lambda_3 L_3(M) & 1 \\ \cos \theta_4 L_4(M) & \sin \theta_4 L_4(M) & \lambda_4 L_4(M) & 1 \end{bmatrix} = 0 .$$

En développant le déterminant ci-dessus par rapport à la dernière colonne, on voit que la condition (2) s'écrit $P(M) = 0$ où P est une fonction polynomiale $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ de degré ≤ 3 . Si $M \in \mathcal{E}$ est tel que $L_1(M) = L_2(M) = 0$, les deux premières lignes du déterminant sont liées, et par conséquent $P(M) = 0$. L'ensemble des zéros de P contient donc l'intersection éventuelle des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ; il en est de même pour les 6 autres paires $\{\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j\}$ où $1 \leq i < j \leq 4$.

Inversement, si la condition (2) est vérifiée et que les vecteurs colonne :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 L_1(M) \\ \lambda_2 L_2(M) \\ \lambda_3 L_3(M) \\ \lambda_4 L_4(M) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ne sont pas dans le sous- \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par les vecteurs colonne

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 L_1(M) \\ \cos \theta_2 L_2(M) \\ \cos \theta_3 L_3(M) \\ \cos \theta_4 L_4(M) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sin \theta_1 L_1(M) \\ \sin \theta_2 L_2(M) \\ \sin \theta_3 L_3(M) \\ \sin \theta_4 L_4(M) \end{bmatrix},$$

alors il existe des réels x, y, k , $k \neq 0$, tels que la condition (1) soit vérifiée ; le point M est alors l'un des foyers d'une conique bifocale (ou le centre d'un cercle), à laquelle les droites \mathcal{D}_i , pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont tangentes (ou asymptotes)

c) Dans le cas où les droites \mathcal{D}_i forment un parallélogramme, il existe deux fonctions affines normales φ et ψ , telle que $(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$ soit libre, et deux réels > 0 , α et β , tels que les équations des droites s'écrivent :

$$\varphi(M) - \alpha = 0, \quad \varphi(M) + \alpha = 0, \quad \psi(M) - \beta = 0, \quad \psi(M) + \beta = 0.$$

Le point M est l'un des foyers d'une conique bifocale (ou le centre d'un cercle), à laquelle les droites \mathcal{D}_i , pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, sont tangentes (ou asymptotes) si, et seulement si, il existe un réel $k \neq 0$ et un point $N \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\begin{aligned} (\varphi(M) - \alpha)(\varphi(N) - \alpha) &= k & (\psi(M) - \beta)(\psi(N) - \beta) &= k \\ (\varphi(M) + \alpha)(\varphi(N) + \alpha) &= k & (\psi(M) + \beta)(\psi(N) + \beta) &= k. \end{aligned} \quad \text{et}$$

Ces conditions sont vérifiées si, et seulement si, il existe un réel $k \neq 0$ et un point $N \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\begin{aligned} \varphi(M)\varphi(N) + \alpha^2 &= k & \psi(M)\psi(N) + \beta^2 &= k \\ \varphi(M) + \varphi(N) &= 0 & \psi(M) + \psi(N) &= 0. \end{aligned} \quad \text{et}$$

On voit donc que, s'il existe, le point N est nécessairement le symétrique de M par rapport au centre du parallélogramme, et que M vérifie la condition si, et seulement si :

$$\alpha^2 - \varphi^2(M) = \beta^2 - \psi^2(M) \neq 0.$$

Dans un repère affine dans lequel les équations des droites \mathcal{D}_i sont :

$$y = \alpha, \quad y = -\alpha, \quad x = \beta, \quad x = -\beta,$$

un point M de coordonnées (x, y) vérifie les conditions si, et seulement si :

$$x^2 - y^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \text{et} \quad |x| \neq \alpha.$$

L'ensemble des points M est donc une hyperbole (ou la réunion de deux droites si $\alpha = \beta$) passant par les 4 sommets du parallélogramme, privée de ces 4 sommets.

Discussion de la nature de la cubique obtenue.

On trouvera ci-dessous une discussion de la nature de la cubique obtenue. Le lecteur pourra se reporter à la fin du chapitre où il trouvera des aperçus généraux sur les cubiques planes.

Considérons un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, un réel $\beta > 0$, un réel $\theta \in]0, \pi/2[$, et les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ respectivement définies par les équations suivantes dans \mathcal{R} : $y = -\beta$; $y = \beta$; $x = 0$; $y = x \operatorname{tg} \theta$. Un calcul facile prouve alors que le polynôme P de degré ≤ 3 défini ci-dessus est ici :

$$P(x, y) = y(x^2 + y^2) - x\beta^2 \cotg \theta + \beta^2 y.$$

On s'assure aisément que la cubique d'équation $P = 0$ est **non singulière** et circulaire.

Des explications données à la fin de ce chapitre, on peut déduire que la cubique trouvée est donc en général une cubique non singulière. On peut aussi montrer que cette cubique est toujours circulaire ; cela peut être vérifié en calculant la partie homogène de degré 3 dans l'équation cartésienne la plus générale donnée plus haut (avec les L_i) ; cela peut aussi être justifié par un raisonnement synthétique "sans calculs" utilisant une définition des foyers plus algébrique que celle donnée dans le Cours, la définition dite *Plückerienne* des foyers d'une conique. (Parmi les coniques tangentes aux quatre droites de départ, il y a une et une seule parabole. C'est l'existence de cette parabole qui entraîne que la cubique trouvée doit être circulaire. Signalons au passage que pour les mêmes raisons, la direction à l'infini de la parabole est direction à l'infini de la cubique trouvée).

Parmi les cas exceptionnels, nous en retiendrons deux remarquables, sans chercher à déterminer les éventuels autres :

Cas où les 4 droites forment un parallélogramme

Dans ce cas, le polynôme trouvé n'est pas de degré 3, il est de degré 2 ; le lieu cherché est alors l'unique hyperbole équilatère passant par les sommets du parallélogramme. Cette hyperbole a pour centre le centre du parallélogramme, et c'est le lieu des points dont les projections sur les 4 côtés du parallélogramme sont cocycliques ; cette dernière propriété est quasiment évidente si on se souvient que la podaire d'une hyperbole à partir d'un foyer est son cercle principal.

Cas où il existe un cercle tangent aux quatre droites

Dans ce cas, ou bien ce cercle est unique, ou bien il y en a deux. On peut prouver que lorsque le cercle est unique, la cubique trouvée est une strophoïde, ayant pour point double le centre du cercle. S'il y a deux cercles, la cubique dégénère en une droite et un cercle, qui se rencontrent en les centres des deux cercles : la droite est donc la droite des centres des deux cercles, qui est aussi axe de symétrie orthogonale de toute la figure. L'existence de cette symétrie montre que le cercle n'est autre que celui dont un diamètre est formé par les centres des deux cercles.

Remarquons enfin que la question posée peut être élargie de la façon suivante : on remplace la recherche du lieu des foyers des coniques tangentes à 4 droites données distinctes, par la recherche du lieu des foyers des coniques d'un *faisceau linéaire tangentiel*. Les cas exceptionnels sont alors bien plus nombreux, et l'étude complète rigoureuse de la question serait non-évidente. Dans ce cas s'intégrerait le problème, déjà rencontré, du lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites données deux à deux non parallèles (ces paraboles forment en effet un faisceau linéaire tangentiel de coniques) : rappelons que ce lieu n'est autre que le cercle circonscrit au triangle formé par les trois droites. Là encore, la propriété prouvée est quasiment évidente si on se souvient que la podaire d'une parabole pour son foyer est sa tangente au sommet.

APERCUS SUR LES CUBIQUES PLANES

A l'intention de ceux qui se destinent à la Géométrie (même sous les formes algébriques abstraites actuelles), donnons quelques indications sur les cubiques, sans entrer dans des preuves rigoureuses qui nécessiteraient des préalables théoriques coûteux, débordant les limites de ces livres de cours et d'exercices. Une courbe plane d'un plan affine réel, définie par les zéros d'un polynôme de degré 3, s'appelle une *cubique* de ce plan. On montre que l'irréductibilité sur \mathbb{R} d'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ de degré 3 équivaut à son irréductibilité sur \mathbb{C} . Lorsque le polynôme n'est pas irréductible

est dite *décomposée* ; elle “dégénère” alors en l’une des figures suivantes : une droite, deux droites distinctes, trois droites distinctes, l’union d’une droite et d’un point isolé hors de la droite, l’union d’une droite et d’une conique propre à points réels. Si l’on attribue des multiplicités convenables à tous ces objets, il faut classer plus finement : par exemple les deux cubiques d’équation cartésienne (relative à un repère affine) $x^3 = 0$ et $x(x^2 + y^2 + 1) = 0$ ne sont pas dans la même classe, bien qu’elles aient toutes deux pour ensemble de points ceux de la droite $x = 0$.

Sous des hypothèses convenables relatives au corps de base (qui est ici \mathbb{R}), on montre qu’une cubique plane irréductible possède au plus un point singulier. Si elle n’en a pas, on dit qu’elle est *non singulière* ; si elle en a, elle en possède exactement un, qui est ou bien un point singulier *ordinaire* (c’est-à-dire soit isolé, soit à tangentes réelles distinctes), ou bien un point de rebroussement (nécessairement de l’espèce la plus simple, dite “première espèce”). Une cubique irréductible à point singulier est dite *singulière* ; plus précisément, on la dit *acnodale* ssi son point singulier est isolé, *crunodale* ssi son point singulier est à tangentes réelles distinctes, et *cuspidale* ssi ce point singulier est de rebroussement. On regroupe les cubiques acnodales et les crunodales en une seule famille, appelée famille des cubiques à *point double ordinaire*. Soit $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ un polynôme de degré 3 noté :

$$a_1 X^3 + a_2 X^2 Y + a_3 X Y^2 + a_4 X^3 + a_5 X^2 + a_6 X Y + a_7 Y^2 + a_8 X + a_9 Y + a_{10}.$$

On montre l’existence d’un polynôme non nul, homogène de degré 12 :

$$\mathfrak{D}((Z_i)_{1 \leq i \leq 10}) \in \mathbb{R}[(Z_i)_{1 \leq i \leq 10}]$$

tel que la cubique d’équation $f = 0$ est singulière ou décomposée si, et seulement si, $\mathfrak{D}(a_1, \dots, a_{10}) = 0$. La valeur $\mathfrak{D}(a_1, \dots, a_{10})$ est appelée le *discriminant* de f . L’ensemble des 10-uples $(a_i) \in \mathbb{R}^{10}$ tels que la cubique $f = 0$ soit non singulière est donc le complémentaire d’une hypersurface de \mathbb{R}^{10} : en ce sens, on peut dire qu’en *général*, une cubique est non singulière (en Algèbre, une propriété dépendant d’une famille finie $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$ de paramètres sur un corps commutatif infini K est dite vraie en général ssi il existe $F \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ telle qu’elle soit vraie pour tous les n -uples (t_i) vérifiant $F(t_1, \dots, t_n) \neq 0$). Le calcul du discriminant est très pénible, mais on dispose de nombreuses techniques très abordables pour reconnaître si une cubique est ou non singulière, sans passer par le discriminant, ces techniques utilisent la notion de *classe* d’une courbe algébrique (voir ci-dessous).

Quand on rencontre une cubique plane d’un plan affine réel, définie par les zéros d’un polynôme de degré 3, on est tout d’abord assuré qu’elle **est toujours non vide**, et plus précisément possède une **infinité de points non singuliers**. On peut prouver que cela entraîne, lorsqu’elle est irréductible, que les polynômes de degré 3 l’admettant pour

zéros forment une droite vectorielle privée de $\{0\}$, ce qui permet de parler sans ambiguïté de *son équation de degré 3*.

Les questions essentielles qui se posent pour une cubique plane sont : 1) Cette cubique est-elle irréductible ? 2) Si oui, est-elle ou non singulière ?, et 3) si elle est irréductible singulière, est-elle cuspidale, acnodale ou crunodale ? Bien d'autres questions plus particulières se posent ensuite ; par exemple, le nombre et la nature des branches infinies réelles, le nombre et la configuration des points d'inflexion, la *classe* (= nombre "général" des tangentes issues d'un point à la cubique), etc.

- Lorsque le plan affine est de surcroît euclidien, on procède à une classification plus fine, dans les détails de laquelle nous n'entrerons pas. Bornons-nous à signaler que la propriété, pour une cubique irréductible, que son équation cartésienne en repère orthonormé admette une partie homogène de degré 3 de la forme $(x^2 + y^2) L(x, y)$, avec L homogène de degré 1, est invariante dans le groupe des similitudes du plan. Les cubiques vérifiant cette propriété sont dites *circulaires*. Une cubique circulaire possède une seule direction à l'infini ; cette direction est assortie d'une asymptote. Pour une cubique singulière non cuspidale, le polynôme caractéristique de la forme quadratique des termes de degré 2 de son équation en repère orthonormé quand on prend le point singulier pour origine est invariant par isométries. Notamment, l'angle des tangentes au point double d'une cubique crunodale est invariant dans le groupe des similitudes. Une cubique circulaire crunodale dont les tangentes en le point double sont orthogonales est appelée une *strophoïde*. En particulier, une strophoïde possède une unique asymptote. Une strophoïde est dite *droite* ssi la droite passant par son point double et orthogonale à l'asymptote est axe de symétrie orthogonale de la cubique : il revient au même de dire que la strophoïde ne rencontre pas son asymptote.

Chapitre XI

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES SURFACES

§ XI.1 SURFACES PARAMÉTRÉES

Exercice 2 :

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}$, $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$ une surface paramétrée de classe \mathcal{C}^∞ , de coordonnées dans \mathcal{R} :

$$x = a \sin^2 \frac{u}{2}, \quad y = v \cos u, \quad z = v \sin u \quad (a > 0 \text{ donné}).$$

a) Quels sont les paramètres réguliers (resp. stationnaires) pour Φ ?

b) Soit \mathcal{S} le support de Φ . Trouver une équation cartésienne de $\text{Adh}(\mathcal{S})$ dans \mathcal{R} .

c) Etudier l'intersection de \mathcal{S} avec des plans parallèles aux plans de coordonnées de \mathcal{R} ; avec des plans contenant la droite $\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R}e_1$. ■

Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\vec{\mathcal{E}}$ telle que $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. On reconnaît ici une surface réglée.

a) Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, les vecteurs colonne des coordonnées dans \mathcal{B} de $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v)$ (resp. $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$) sont :

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} \sin u \\ -v \sin u \\ v \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \cos u \\ \sin u \end{bmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants si, et seulement si :

$$\begin{bmatrix} -v \sin^2 u - v \cos^2 u \\ -\frac{a}{2} \sin^2 u \\ \frac{a}{2} \sin u \cos u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2v \\ -a \sin^2 u \\ a \sin u \cos u \end{bmatrix} \neq 0.$$

Les paramètres stationnaires sont donc les couples de la forme $(k\pi, 0)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

b) Supposons que le point M de coordonnées (x, y, z) soit élément du support \mathcal{S} , et $M = \Phi(u, v)$ où $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On a alors l'égalité: $a - 2x = a \cos u$, d'où $ay = (a - 2x)v$. Nous en déduisons :

$$(1) \quad (a - 2x)^2 (y^2 + z^2) = a^2 y^2 .$$

Soit \mathcal{S}' l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la condition (1). Soit $M \in \mathcal{S}'$ de coordonnées (x, y, z) . Il existe deux réels u_1 et v_1 tels que $y = v_1 \cos u_1$ et $z = v_1 \sin u_1$ et comme $M \in \mathcal{S}'$:

$$(a - 2x)^2 v_1^2 = a^2 y^2 = a^2 v_1^2 \cos^2 u_1 .$$

La droite \mathcal{D}_1 d'équations $y = z = 0$ est incluse dans \mathcal{S}' , mais le point $M \in \mathcal{D}_1$, d'abscisse x , est élément de \mathcal{S} si, et seulement si, $0 \leq x \leq a$. Si $M \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{D}_1$, alors $v_1 \neq 0$ donc, ou bien $a - 2x = a \cos u_1$, ou bien $a - 2x = -a \cos u_1$. Dans le premier cas, on pose $v = v_1$ et $u = u_1$, de telle sorte que $x = \frac{a}{2}(1 - \cos u) = a \sin^2(u/2)$, $y = v \cos u$ et $z = v \sin u$, c'est-à-dire $M = \Phi(u, v)$. Dans le second cas, on pose $u = u_1 + \pi$ et $v = -v_1$, de telle sorte que $x = \frac{a}{2}(1 + \cos u_1) = a \sin^2(u/2)$, $y = v \cos u$ et $z = v \sin u$, c'est-à-dire $M = \Phi(u, v)$. Nous en déduisons que $\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}$ est l'ensemble des points de \mathcal{D}_1 d'abscisse x telle que $x \notin [0, a]$.

c)

1) Intersection avec un plan P d'équation $x = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Si $c \notin [0, a]$, l'intersection avec \mathcal{S} est vide. Si $c \in [0, a]$, posons $c/a = \sin^2(u_0/2)$, où $u_0 \in [0, \pi]$. L'intersection $P \cap \mathcal{S}$ est la réunion des droites passant par le point $O + ce_1$ et dirigées par les vecteurs $\cos u_0 e_2 + \sin u_0 e_3$ et $\cos u_0 e_2 - \sin u_0 e_3$. Ces droites sont confondues si, et seulement si, $u_0 = 0$ ou $u_0 = \pi/2$ ou $u_0 = \pi$, soit si, et seulement si, $c = 0$ ou $c = a/2$ ou $c = a$.

2) Intersection avec un plan P d'équation $y = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Si $c \neq 0$, $\mathcal{S} \cap P$ est dans le plan P la quartique d'équation :

$$(a - 2x)^2 (c^2 + z^2) = a^2 c^2 .$$

Si $c = 0$, $\mathcal{S} \cap P$ est la réunion des droites d'équations respectives $x = a/2$ et $z = 0$ dans le plan P d'équation $y = 0$. On en déduit facile

3) Intersection avec un plan P d'équation $z = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

L'intersection $\mathcal{S}' \cap P$ est dans le plan P la quartique d'équation :

$$(a - 2x)^2 (y^2 + c^2) = a^2 y^2 .$$

Si $c \neq 0$, $\mathcal{S}' \cap P = \mathcal{S} \cap P$. Si $c = 0$, $\mathcal{S}' \cap P$ a pour équation :

$$(a - 2x)^2 y^2 = a^2 y^2 \quad \text{soit} \quad 4x(x - a)y^2 = 0 .$$

Dans ce cas, $\mathcal{S}' \cap P$ est la réunion des droites d'équations respectives $x = 0$, $x = a$ et $y = 0$ dans le plan P d'équation $z = 0$. On en déduit facilement l'intersection $\mathcal{S} \cap P$.

4) Intersection avec un plan P contenant la droite \mathcal{D}_1 .

Le plan P passe par O et il existe un réel $u_0 \in [0, \pi[$ tel que le plan P soit dirigé par les vecteurs e_1 et $\vec{v} = \cos u_0 e_2 + \sin u_0 e_3$. On trouve facilement que le point $\Phi(u, v)$ appartient au plan P si, et seulement si, $v \sin(u - u_0) = 0$. Un point $M \in \mathcal{D}_1$ de coordonnées $(x, 0, 0)$ est dans $\mathcal{S} \cap P$ si, et seulement si $x \in [0, a]$. Un point $M \notin \mathcal{D}_1$ est dans $\mathcal{S} \cap P$ si, et seulement si, il est de la forme $\Phi(u_0, v)$ ou $\Phi(u_0 + \pi, v)$, où $v \in \mathbb{R}^*$. Soit $A = O + a e_1$. On voit que $\mathcal{S} \cap P$ est la réunion du segment $[O, A]$ et des deux droites affines passant par les points $O + a \sin^2(u_0/2)$ et $O + a \cos^2(u_0/2)$ et dirigées par le vecteur \vec{v} . Ces droites sont confondues dans le cas où $u_0 = \pi/2$.

Exercice 4 :

|| Soit la surface paramétrée, de classe \mathcal{C}^∞ , $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}$ définie dans \mathcal{R} par $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^2 + 2u$. Montrer qu'un plan tangent à Φ rencontre le support \mathcal{S} de Φ suivant deux paraboles. ■

Pour simplifier les notations, nous identifierons \mathcal{E} à \mathbb{R}^3 .

Le point (u, v) est stationnaire si, et seulement si, la matrice Jacobienne :

$$\begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 2 & 2v \end{bmatrix} ,$$

n'est pas de rang 2 c'est-à-dire si, et seulement si :

$$2v^2 - 2u = -4uv = 2u^2 = 0 .$$

On voit facilement que le seul point stationnaire est le point de paramètre $(0, 0)$.

Soit $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$. Comme l'application Φ est polynomiale de degré 2 on a l'égalité :

$$\Phi(u, v) = \Phi(u_0, v_0) + l_0(u - u_0, v - v_0) + P_0(u - u_0, v - v_0) ,$$

où l_0 désigne l'application linéaire telle que pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$l_0(\xi, \eta) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \xi + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \eta = \xi(2u_0, v_0, 2) + \eta(0, u_0, 2v_0) ,$$

et P_0 le polynôme homogène de degré 2 :

$$P_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(u_0, v_0) \xi^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v}(u_0, v_0) \xi \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}(u_0, v_0) \eta^2 .$$

Soit φ une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 de noyau $\text{Im}(l_0)$. Pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, le point $\Phi(u_0 + \xi, v_0 + \eta)$ appartient au plan tangent en (u_0, v_0) si, et seulement si : $\varphi(\Phi(u_0 + \xi, v_0 + \eta) - \Phi(u_0, v_0)) = 0$, et par conséquent si, et seulement si $\varphi(P_0(\xi, \eta)) = 0$. L'application $q_0 : (\xi, \eta) \mapsto \varphi(P_0(\xi, \eta))$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^2 . La nature de l'intersection de \mathcal{S} avec le plan tangent en (u_0, v_0) est déterminée par la signature de q_0 . Si q_0 est définie positive ou définie négative, l'intersection de \mathcal{S} et du plan tangent en (u_0, v_0) est réduite au point $\Phi(u_0, v_0)$. Si q_0 est de signature $(1, 1)$, l'ensemble des couples $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $q_0(\xi, \eta) = 0$ est la réunion de deux droites vectorielles distinctes ; si (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2) sont des vecteurs directeurs de ces droites, l'intersection de \mathcal{S} et du plan tangent en (u_0, v_0) est la réunion des trajectoires des arcs paramétrés définis sur \mathbb{R} par :

$$t \mapsto \Phi(u_0, v_0) + t l_0(\xi_i, \eta_i) + t^2 P_0(\xi_i, \eta_i) ,$$

pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$; ces trajectoires sont en général des paraboles dans le plan tangent. Si la forme quadratique q_0 est de signature $(1, 0)$ ou $(0, 1)$, alors l'ensemble des couples (ξ, η) tels que $q_0(\xi, \eta) = 0$ est une droite, et l'intersection de \mathcal{S} avec le plan tangent est en général une parabole. Enfin si $q_0 = 0$, le plan tangent en (u_0, v_0) est inclus dans \mathcal{S} , mais ce cas ne se présentera pas dans les conditions de l'énoncé.

Le polynôme P_0 ne dépend pas de (u_0, v_0) , c'est la partie homogène de degré 2 de la fonction polynomiale Φ , c'est-à-dire l'application :

$$(\xi, \eta) \mapsto (\xi^2, \xi \eta, \eta^2) .$$

La forme linéaire dont les coordonnées sont $(2v_0^2 - 2u_0, -4u_0v_0, 2u_0^2)$ est nulle sur $\text{Im}(l_0)$. Pour tout $(u_0, v_0) \neq (0, 0)$ nous pouvons donc prendre pour q_0 la forme quadratique :

$$q_0(\xi, \eta) = (v_0^2 - u_0) \xi^2 - 2u_0v_0 \xi \eta + u_0^2 \eta^2 = (v_0 \xi - u_0 \eta)^2$$

D'après ce qui a été démontré ci-dessus, si $u_0 < 0$, le plan tangent en (u_0, v_0) coupe \mathcal{S} en $\Phi(u_0, v_0)$ uniquement.

Si $u_0 > 0$, le plan tangent en (u_0, v_0) coupe \mathcal{S} en général suivant deux paraboles distinctes. Précisément on a :

$$q_0(\xi, \eta) = ((v_0 + \sqrt{u_0})\xi - u_0\eta) ((v_0 - \sqrt{u_0})\xi - u_0\eta) .$$

On peut poser :

$$(\xi_1, \eta_1) = (u_0, v_0 + \sqrt{u_0}) \quad \text{et} \quad (\xi_2, \eta_2) = (u_0, v_0 - \sqrt{u_0}) .$$

On a alors :

$$l_0(\xi_1, \eta_1) = (2u_0^2, 2u_0v_0 + u_0\sqrt{u_0}, 2u_0 + 2v_0^2 + 2v_0\sqrt{u_0}) ,$$

et :

$$P_0(\xi_1, \eta_1) = (u_0^2, u_0v_0 + u_0\sqrt{u_0}, (v_0 + \sqrt{u_0})^2) .$$

On obtient des résultats analogues pour (ξ_2, η_2) . Comme $u_0 > 0$, on voit que les vecteurs $l_0(\xi_1, \eta_1)$ et $P_0(\xi_1, \eta_1)$ ne sont pas colinéaires ; il en est de même pour les vecteurs $l_0(\xi_2, \eta_2)$ et $P_0(\xi_2, \eta_2)$; dans ce cas le plan tangent coupe \mathcal{S} suivant deux paraboles distinctes.

Si $u_0 = 0$, $q_0(\xi, \eta) = v_0^2 \xi^2$ (on suppose $v_0 \neq 0$) ; dans ce cas on peut poser $(\xi_1, \eta_1) = (0, 1)$; on a $l_0(\xi_1, \eta_1) = (0, 0, 2v_0)$ et $P_0(\xi_1, \eta_1) = (0, 0, 1)$; l'intersection de \mathcal{S} et du plan tangent au point de paramètre $(0, v_0)$ est le support de l'arc :

$$t \mapsto (0, 0, v_0^2 + 2v_0t + t^2) = (0, 0, (v_0 + t)^2) ,$$

c'est-à-dire une demi-droite.

Exercice 7 :

- On suppose \mathcal{E} euclidien et \mathcal{R} orthonormal. Soit \mathcal{S} la surface définie dans \mathcal{R} par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ ($a > b > c > 0$).
- Montrer que \mathcal{S} est une sous-variété surface de classe \mathcal{C}^∞ .
 - Soit \mathcal{V} l'ensemble des projections orthogonales de O sur les plans tangents à \mathcal{S} . Calculer une équation cartésienne de \mathcal{V} dans \mathcal{R} . ■

a) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, l'application qui, au point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} , fait correspondre le réel :

$$f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} .$$

L'application f est une fonction numérique de classe \mathcal{C}^∞ , dont le gradient au point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) est le vecteur de coordonnées $\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$. On constate qu'en tout M_0 tel que $f(M_0) = 1$, le gradient de f n'est pas nul. D'après la proposition VI.3.1 du Tome 3 du Cours, nous pouvons en déduire que $\mathcal{S} = f^{-1}(\{1\})$ est une sous-variété de dimension 2 de classe \mathcal{C}^∞ , c'est-à-dire une sous-variété surface de \mathcal{E} de classe \mathcal{C}^∞ .

b) Soit $M_0 \in \mathcal{S}$ de coordonnées $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Une équation du plan tangent à \mathcal{S} en M_0 est :

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1 .$$

La projection orthogonale de O sur ce plan est le point dont les coordonnées sont de la forme :

$$\left(t \frac{x_0}{a^2}, t \frac{y_0}{b^2}, t \frac{z_0}{c^2}\right) ,$$

où $t \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\frac{t x_0}{a^2} \frac{x_0}{a^2} + \frac{t y_0}{b^2} \frac{y_0}{b^2} + \frac{t z_0}{c^2} \frac{z_0}{c^2} = 1 ,$$

c'est-à-dire :

$$t = \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}} .$$

La projection de O sur le plan tangent en $M \in \mathcal{S}$ de coordonnées (x, y, z) est donc le point dont les coordonnées sont :

$$(X, Y, Z) = \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) .$$

Ce point sera noté $\Phi(M)$. Notons $q = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$. On constate que : $X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{1}{q}$, et par conséquent :

$$(1) \quad (x, y, z) = \frac{1}{X^2 + Y^2 + Z^2} (a^2 X, b^2 Y, c^2 Z) .$$

Comme $M \in \mathcal{S}$ nous en déduisons :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2} .$$

On voit donc que pour tout $M \in \mathcal{S}$ le point $\Phi(M)$ appartient à l'ensemble dont une équation dans le repère \mathcal{R} est :

$$(2) \quad (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - (a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2) = 0 .$$

Supposons inversement que les coordonnées (X, Y, Z) dans \mathcal{R} du point N vérifient la condition (2). Comme $a > b > c$ on a :

$$c^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) \leq a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 \leq a^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) ,$$

et par conséquent :

$$c^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) \leq (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 \leq a^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) .$$

Le point O , qui n'est pas dans $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{S})$, est donc un point isolé dans l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité (2). Si $N \neq O$ on a :

$$c^2 \leq X^2 + Y^2 + Z^2 \leq a^2 .$$

On vérifie alors facilement si M est le point dont les coordonnées (x, y, z) sont données par les égalités (1), $\Phi(M) = N$ et $M \in \mathcal{S}$.

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{V} = \Phi(\mathcal{S})$ est l'ensemble des points $N \neq O$ dont les coordonnées $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ vérifient l'équation (2).

Exercice 9 :

On suppose \mathcal{E} euclidien et \mathcal{R} orthonormal. On donne a, λ et c réels ($a > \lambda > c > 0$). Soit \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 les surfaces d'équations respectives dans \mathcal{R} :

$$y^2 (z^2 + x^2) - c^2 x^2 - a^2 z^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 .$$

Montrer que \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 se coupent suivant 4 droites, et qu'en chacun de leurs points communs, leurs plans tangents sont perpendiculaires. ■

La deuxième équation s'écrit :

$$\frac{\lambda^2 (x^2 + z^2) - c^2 x^2 - a^2 z^2}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)} = \frac{\lambda^2 - y^2}{\lambda^2} .$$

Le système des deux équations est donc équivalent au système :

$$(1) \quad y^2 (z^2 + x^2) = c^2 x^2 + a^2 z^2 \quad \text{et} \quad \frac{(\lambda^2 - y^2)(x^2 + z^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - c^2)} = \lambda^2 - y^2$$

Supposons que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie les égalités (1), et que $y^2 \neq \lambda^2$; on aurait alors :

$$x^2 + z^2 = -\frac{(a^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - c^2)}{\lambda^2} < 0 ,$$

ce qui est évidemment exclu. Le système (1) équivaut donc au système :

$$y^2 = \lambda^2 \quad \text{et} \quad (\lambda^2 - c^2) x^2 = (a^2 - \lambda^2) z^2 .$$

Comme $0 < \lambda^2 - c^2$ et $0 < a^2 - \lambda^2$, il est clair que $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ est la réunion des 4 droites définies par les systèmes :

$$y = \varepsilon_1 \lambda \quad \text{et} \quad \sqrt{\lambda^2 - c^2} x = \varepsilon_2 \sqrt{a^2 - \lambda^2} z ,$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$.

Les coordonnées d'un vecteur normal à \mathcal{S}_1 en un point $M \in \mathcal{S}_1$ de coordonnées (x, y, z) sont : $(2x(y^2 - c^2), 2y(x^2 + z^2), 2z(y^2 - a^2))$; ce vecteur n'est pas nul, sauf si le point M est sur la droite \mathcal{D} d'équations $x = 0, z = 0$ (droite incluse dans \mathcal{S}_1). Les coordonnées d'un vecteur normal à \mathcal{S}_2 en un point $M \in \mathcal{S}_2$ de coordonnées (x, y, z) sont : $\left(\frac{2x}{\lambda^2 - a^2}, \frac{2y}{\lambda^2}, \frac{2z}{\lambda^2 - c^2}\right)$; ce vecteur n'est jamais nul. Le produit scalaire de ces deux vecteurs en un point $M \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ de coordonnées (x, y, z) est :

$$K = \frac{4x^2(y^2 - c^2)}{\lambda^2 - a^2} + \frac{4y^2(x^2 + z^2)}{\lambda^2} + \frac{4z^2(y^2 - a^2)}{\lambda^2 - c^2} .$$

En tenant compte du fait que $y^2 = \lambda^2$ et $(\lambda^2 - c^2)x^2 = (a^2 - \lambda^2)z^2$ on trouve :

$$K = -4z^2 + 4(x^2 + z^2) - 4z^2 = 0 .$$

En tout point de $(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \setminus \mathcal{D}$, les plans tangents à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont donc perpendiculaires. On vérifie que l'ensemble $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{D}$ est constitué des deux points de \mathcal{E} dont les coordonnées sont $(0, \lambda, 0)$ et $(0, -\lambda, 0)$.

§ XI.2 ETUDE GÉOMÉTRIQUE DES PLANS TANGENTS

Exercice 1 :

Soit \mathcal{V} une sous-variété surface de classe \mathcal{C}^k , avec $k \geq 2$, supposée *connexe*. Montrer que si \mathcal{V} possède des points elliptiques et des points hyperboliques, elle a au moins un point parabolique.

■

Soit $M_0 \in \mathcal{V}$ un point elliptique de \mathcal{V} , et \mathcal{R} un repère de \mathcal{E} dont le vecteur e_3 ne soit pas dans le plan tangent en M_0 . Il existe une représentation locale de \mathcal{V} au voisinage de M_0 qui soit cartésienne dans \mathcal{R} , soit :

$$\Phi : D \rightarrow \mathcal{E}, \quad (x, y) \mapsto M_0 + (x e_1 + y e_2 + f(x, y) e_3),$$

où D est un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^k . Comme le point M_0 est elliptique, on a : $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, inégalité qui est vérifiée aussi au voisinage de $(0, 0)$ dans D . On voit donc que M_0 est intérieur à l'ensemble des points elliptiques de \mathcal{V} . L'ensemble E des points elliptiques de \mathcal{V} est donc un ouvert de \mathcal{V} . On démontre de manière analogue que l'ensemble H des points hyperboliques de \mathcal{V} est un ouvert de \mathcal{V} . Si la variété surface \mathcal{V} possède au moins un point elliptique et un point hyperbolique, les parties E et H de \mathcal{V} sont ouvertes disjointes non vides ; si \mathcal{V} est connexe, elles ne peuvent pas recouvrir \mathcal{V} ; dans ce cas \mathcal{V} possède au moins un point parabolique.

Exercice 2 :

Soit $z = f(x, y)$ une représentation locale, dans un repère $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ d'une sous-variété surface \mathcal{V} de classe \mathcal{C}^k ($3 \leq k \leq +\infty$) au voisinage d'un point $M_0 \in \mathcal{V}$. On suppose $M_0 = O$, f étant définie sur un domaine D voisinage de $\mu_0 = (0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , avec $f(0, 0) = 0$; on suppose aussi que $O + \text{Vect}(e_1, e_2)$ est le plan tangent \mathcal{T}_{M_0} en M_0 à \mathcal{V} .

a) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale pour prouver qu'on a des fonctions numériques A, B, C définies au voisinage de μ_0 dans D , de classe \mathcal{C}^{k-2} si $k < +\infty$ (et \mathcal{C}^∞ si $k = +\infty$) telles que :

$$f(x, y) = x^2 A(x, y) + 2xy B(x, y) + y^2 C(x, y)$$

pour (x, y) voisin de μ_0 , avec :

$$A(0, 0) = \frac{1}{2} r_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mu_0), \quad B(0, 0) = \frac{1}{2} s_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mu_0),$$

$$\text{et} \quad C(0, 0) = \frac{1}{2} t_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mu_0).$$

On suppose pour la suite $r_0 t_0 - s_0^2 \neq 0$.

b) En déduire qu'il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme Θ d'un voisinage de μ_0 dans \mathbb{R}^2 sur un voisinage de μ_0 dans \mathbb{R}^2 tel que, pour (X, Y) assez voisin de μ_0 dans \mathbb{R}^2 , on ait $f \circ \Theta(X, Y) = X^2 + \varepsilon Y^2$, avec $\varepsilon = 1$ si M_0 est elliptique sur \mathcal{V} et $\varepsilon = -1$ si M_0 est hyperbolique sur \mathcal{V} .

c) Si M_0 est hyperbolique sur \mathcal{V} , en déduire la

|| de \mathcal{V} au voisinage de M_0 , et la nature de son intersection avec \mathcal{T}_{M_0} . ■

a) Nous supposons que le domaine D est étoilé autour de $\mu_0 = (0, 0)$. Comme $O + \text{Vect}(e_1, e_2)$ est le plan tangent \mathcal{T}_{M_0} , on a $\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mu_0) = 0$, et $f(\mu_0) = 0$. D'après la formule de Taylor-reste intégrale à l'ordre 2 (§ V.6, formule (5) du Tome 3 du Cours), pour tout $(x, y) \in D$ on a l'égalité :

$$f(x, y) = \int_0^1 (1-t) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, tx) x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, tx) xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, tx) y^2 \right) dt ,$$

soit :

$$f(x, y) = x^2 A(x, y) + 2xy B(x, y) + y^2 C(x, y) ,$$

où :

$$\begin{aligned} A(x, y) &= \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, tx) dt \\ B(x, y) &= \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, tx) dt \\ C(x, y) &= \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, tx) dt . \end{aligned}$$

Comme la fonction f est de classe \mathcal{C}^k , où $k \geq 2$, par différentiation sous le signe somme, nous en déduisons que les fonctions A, B, C sont de classe \mathcal{C}^{k-2} (et de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^∞). On vérifie élémentairement :

$$A(0, 0) = \frac{1}{2} r_0 , \quad B(0, 0) = \frac{1}{2} s_0 , \quad C(0, 0) = \frac{1}{2} t_0 .$$

b) Pour $(x, y) \in D$, soit $q(x, y)$ la forme quadratique telle que pour tout $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$:

$$q(x, y)(\xi, \eta) = \xi^2 A(x, y) + 2\xi\eta B(x, y) + \eta^2 C(x, y) .$$

D'après les hypothèses, $q(0, 0)$ est non dégénérée, et l'application $(x, y) \mapsto q(x, y)$, définie sur D , est de classe \mathcal{C}^{k-2} (ou \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^∞). Soit $\mathcal{B} = (u, v)$ une base de \mathbb{R}^2 telle que $q(0, 0)(u) \neq 0$. Pour tout $(x, y) \in D$, on pose :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q(x, y)) = \begin{bmatrix} A_1(x, y) & B_1(x, y) \\ B_1(x, y) & C_1(x, y) \end{bmatrix} .$$

Par hypothèse $A_1(0,0) = q(0,0)(u) \neq 0$. Soit $D_1 \subset D$ un voisinage ouvert de $(0,0)$ dans \mathbb{R}^2 sur lequel $A_1(x,y)$ garde un signe fixe, que l'on notera ε_1 , et sur lequel $\text{Discr}_{\mathcal{B}}(q(x,y))$ garde un signe fixe noté $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Pour tout $(x,y) \in D_1$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned} q(x,y)(\lambda u + \mu v) &= A_1(x,y) \lambda^2 + 2 B_1(x,y) \lambda \mu + C_1(x,y) \mu^2 = \\ &= A_1(x,y) \left(\lambda + \frac{B_1(x,y)}{A_1(x,y)} \mu \right)^2 + \frac{A_1(x,y) C_1(x,y) - B_1^2(x,y)}{A_1(x,y)} \mu^2 . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ le signe fixe de $A_1(x,y)$ sur D_1 . Pour tout $(x,y) \in D_1$ note $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ les formes linéaires telles que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ont ait :

$$\begin{aligned} \varphi(x,y)(\lambda u + \mu v) &= \sqrt{|A_1(x,y)|} \left(\lambda + \frac{B_1(x,y)}{A_1(x,y)} \mu \right) , \\ \psi(x,y)(\lambda u + \mu v) &= \frac{\sqrt{|\text{Discr}_{\mathcal{B}} q(x,y)|}}{\sqrt{|A_1(x,y)|}} \mu . \end{aligned}$$

Il est clair que l'application $(x,y) \mapsto (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ est de classe \mathcal{C}^{k-2} (de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^∞), et que pour tout $(x,y) \in D_1$ les formes linéaires $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sont linéairement indépendantes. D'autre part, par définition, pour tout $(x,y) \in D_1$, et tout $w \in \mathbb{R}^2$ on a l'égalité :

$$q(x,y)(w) = \varepsilon_1 (\varphi^2(x,y)(w) + \varepsilon \psi^2(x,y)(w)) .$$

Nous en déduisons que pour tout $(x,y) \in D_1$:

$$f(x,y) = q(x,y)(x,y) = \varepsilon_1 (\varphi^2(x,y)(x,y) + \varepsilon \psi^2(x,y)(x,y)) .$$

L'application $\Phi : (x,y) \mapsto (\varphi(x,y)(x,y), \psi(x,y)(x,y))$, définie sur D_1 , est au moins de classe \mathcal{C}^1 . Sa différentielle en $(0,0)$ est l'application linéaire : $(\xi, \eta) \mapsto (\varphi(0,0)(\xi, \eta), \psi(0,0)(\xi, \eta))$, qui est bijective puisque les formes linéaires $\varphi(0,0)$ et $\psi(0,0)$ sont linéairement indépendantes. Il existe donc des voisinages ouverts U et $D_2 \subset D_1$ de $(0,0)$, tels que $\Phi(D_2) = U$, et tels que Φ établisse un \mathcal{C}^{k-2} -difféomorphisme $D_2 \rightarrow U$. Soit $\Theta : U \rightarrow D_2$ le difféomorphisme inverse. Pour tout $(X,Y) \in U$, on a l'égalité :

$$f(\Theta(X,Y)) = \varepsilon_1 (X^2 + \varepsilon Y^2) .$$

Le signe ε est le signe du discriminant de la forme quadratique $q(0,0)$ dans la base \mathcal{B} ; on a $\varepsilon = 1$ si le point M_0 est elliptique, et -1 s'il est hyperbolique. Si $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon_1 = -1$ on se ramènera au cas où $\varepsilon_1 = 1$ en choisissant une autre représentation locale de f .

c) Nous reprenons les notations du a). On a ici $\varepsilon = -1$. On peut supposer $\varepsilon_1 = 1$. Notons Θ_1 et Θ_2 les deux coordonnées de la fonction Θ . Ce qui précède prouve qu'un paramétrage local de \mathcal{V} au voisinage de M_0 est l'application :

$$(X, Y) \mapsto (\Theta_1(X, Y), \Theta_2(X, Y), X^2 - Y^2),$$

défini sur U . Nous pouvons supposer que U est un carré de centre $(0, 0)$, de la forme $] -\alpha, \alpha[$, où $\alpha > 0$. Le plan tangent en M_0 à \mathcal{V} est le plan $O + \text{Vect}(e_1, e_2)$; son intersection avec \mathcal{V} , au voisinage de M_0 , est donc la réunion des trajectoires des arcs paramétrés :

$$t \mapsto (\Theta_1(t, t), \Theta_2(t, t), 0) \quad \text{et} \quad t \mapsto (\Theta_1(t, -t), \Theta_2(t, -t), 0),$$

définis, de classe \mathcal{C}^{k-2} , réguliers et simples, sur l'intervalle $] -\alpha, \alpha[$. Les trajectoires de ces arcs paramétrés ont pour unique point commun le point M_0 et leurs tangentes en M_0 sont distinctes.

§ XI.3 CYLINDRES, CÔNES, SURFACES RÉGLÉES

Exercice 1 :

On suppose \mathcal{E} euclidien. On donne deux droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sécantes en O . Trouver le cône engendré par les droites Δ passant par O telles que la somme des écarts angulaires de Δ avec \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 soit une constante donnée $C \in]0, \pi[$. ■

Il existe un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$ et un réel $\alpha \in]0, \pi/4]$ tels que :

$$\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R}(\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = O + \mathbb{R}(\cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_2).$$

L'ensemble des points $M \neq O$ du cône défini par l'énoncé est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifient la condition :

$$(1) \quad \text{Arc cos} \left(\frac{|x \cos \alpha + y \sin \alpha|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) + \text{Arc cos} \left(\frac{|x \cos \alpha - y \sin \alpha|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = C.$$

Pour (x, y, z) fixés, posons $\varphi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $\psi = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ et $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Avec ces notations, comme la fonction \cos est injective sur $[0, \pi]$, la condition (1) s'écrit :

$$\cos C = \frac{|\varphi|}{d} \frac{|\psi|}{d} - \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{d^2}} \sqrt{1 - \frac{\psi^2}{d^2}}$$

soit encore :

$$|\varphi \psi| - d^2 \cos C = \sqrt{(d^2 - \varphi^2)(d^2 - \psi^2)}.$$

Cette condition équivaut aux conditions :

$$|\varphi \psi| \geq d^2 \cos C \quad \text{et} \quad (|\varphi \psi| - d^2 \cos C)^2 = (d^2 - \varphi^2)(d^2 - \psi^2).$$

En développant la deuxième égalité on obtient, après simplification par d^2 :

$$\varphi^2 - 2 \cos C |\varphi \psi| + \psi^2 = d^2 \sin^2 C.$$

On a :

$$\varphi \psi = x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \sin^2 \alpha \quad \text{et} \quad \varphi^2 + \psi^2 = 2(x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha).$$

Le cône défini par l'énoncé est donc l'ensemble des points dont les coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifient les conditions :

$$x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha - \cos C |x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \sin^2 \alpha| = \frac{\sin^2 C}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

et :

$$|x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \sin^2 \alpha| \geq (x^2 + y^2 + z^2) \cos C.$$

Il s'agit d'une réunion de parties de cônes du second degré.

Exercice 3 :

On suppose \mathcal{E} euclidien. Soit deux droites fixes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 orthogonales et non coplanaires. On donne deux points A et B sur \mathcal{D}_2 , par lesquels on mène respectivement les droites variables Δ_1 et Δ_2 orthogonales entre elles et rencontrant \mathcal{D}_1 . Trouver la surface engendrée par la perpendiculaire commune à Δ_1 et Δ_2 . ■

Il existe un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$ et un réel $h > 0$ tels que :

$$\mathcal{D}_1 = O + (\mathbb{R} e_1 - h e_3) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = O + (\mathbb{R} e_2 + h e_3).$$

On pose $A = O + (a e_2 + h e_3)$ et $B = O + (b e_2 + h e_3)$, où $a > 0$, $b > 0$ et $a \neq b$. Soit $M_1 = O + (\lambda_1 e_1 - h e_3)$ l'intersection de Δ_1 et de \mathcal{D}_1 et $M_2 = O + (\lambda_2 e_1 - h e_3)$ l'intersection de Δ_2 et de \mathcal{D}_1 . La droite Δ_1 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AM_1} = \lambda_1 e_1 - a e_2 - 2 h e_3$, et la droite Δ_2 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BM_2} = \lambda_2 e_1 - b e_2 - 2 h e_3$. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales si, et seulement si :

$$(1) \quad \lambda_1 \lambda_2 + a b + 4 h^2 = 0.$$

En supposant cette condition réalisée, la perpendiculaire commune à Δ_1 et à Δ_2 est l'intersection du plan perpendiculaire à Δ_2 contenant Δ_1 , noté P_1 , et du plan perpendiculaire à Δ_1 contenant Δ_2 , noté P_2 . Le plan P_1 est le plan passant par A et perpendiculaire à Δ_2 ; le plan P_2 est le plan passant par B et perpendiculaire à Δ_1 . Un système d'équations de la perpendiculaire commune aux droites Δ_1 et Δ_2 , supposées orthogonales, est donc :

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_2 x - b(y - a) - 2h(z - h) = 0 \\ \lambda_1 x - a(y - b) - 2h(z - h) = 0. \end{cases}$$

Notons \mathcal{S} l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ se trouvant sur une perpendiculaire commune à deux droites Δ_1 et Δ_2 vérifiant les conditions de l'énoncé. Le point M de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à \mathcal{S} si, et seulement si, il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que les conditions (1) et (2) soient vérifiées. Par élimination de λ_1 et λ_2 on obtient la condition nécessaire :

$$(3) \quad -x^2(ab + 4h^2) = (by + 2hz - ab - 2h^2)(ay + 2hz - ab - 2h^2).$$

Soit \mathcal{S}' l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la condition (3); on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Inversement, soit M de coordonnées (x, y, z) ; si $x \neq 0$, il est clair que M est dans \mathcal{S} si, et seulement si, $M \in \mathcal{S}'$; si $x = 0$, $M \in \mathcal{S}'$ si, et seulement si, M est sur l'une des droites d'équation :

$$by + 2hz = ab + 2h^2 \quad \text{ou} \quad ay + 2hz = ab + 2h^2,$$

dans le plan $x = 0$; il est dans \mathcal{S} si, et seulement si, il est dans ces deux droites, c'est-à-dire confondu avec leur intersection. Si $ab + 4h^2 = 0$, \mathcal{S}' est la réunion de 2 plans, sinon c'est un cône du second degré de sommet le point S de coordonnées $(0, 0, (ab + 2h^2)/2h)$.

Exercice 6 :

On suppose \mathcal{E} euclidien et \mathcal{R} orthonormal. Soit \mathcal{S} la surface paramétrée définie dans \mathcal{R} par :

$$x = (a + bv) \cos u, \quad y = (b + av) \sin u, \quad z = cv,$$

où (u, v) décrit \mathbb{R}^2 tandis que a, b, c sont donnés $\neq 0$. Quel est le contour apparent de \mathcal{S} dans la direction de e_3 ? Montrer que la projection orthogonale de ce contour sur le plan $\mathcal{H} = O + \text{Vect}(e_1, e_2)$ est une développée d'ellipse.

Etait-ce prévisible ? ■

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on pose $f(u) = O + (a \cos u e_1 + b \sin u e_2)$ et $\vec{K}(u) = b \cos u e_1 + a \sin u e_2 + c e_3$. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ le point

(u, v) de \mathcal{S} est le point $f(u) + v \vec{K}(u)$. La surface \mathcal{S} est donc une surface réglée. On remarque que le point $f(u)$ décrit une ellipse, et que pour tout $u \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{K}(u)$ est orthogonal à $f'(u) = -a \sin u e_1 + b \cos u e_2$. Pour $u \in \mathbb{R}$ notons $\vec{n}(u) = b \cos u e_1 + a \sin u e_2$, vecteur directeur de la normale à l'ellipse au point de paramètre u . Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\vec{K}(u) = \vec{n}(u) + c e_3$, et par conséquent $\vec{K}'(u) = \vec{n}'(u)$.

Le point de \mathcal{S} de paramètre (u, v) est sur le contour apparent dans la direction $\mathbb{R}e_3$ si, et seulement si, la famille $(f'(u) + v \vec{K}'(u), \vec{K}(u), e_3)$ est liée, soit si, et seulement si, la famille $(f'(u) + v \vec{n}'(u), \vec{n}(u) + c e_3, e_3)$ est liée, soit si, et seulement si, la famille $(f'(u) + v \vec{n}'(u), \vec{n}(u), e_3)$ est liée. Comme les deux premiers vecteurs de cette famille sont dans le plan \mathcal{H} , le point de paramètre (u, v) est sur le contour apparent dans la direction $\mathbb{R}e_3$ si, et seulement si, la famille $(f'(u) + v \vec{n}'(u), \vec{n}(u))$ est liée. La normale en u à l'ellipse est la droite image de $v \mapsto f(u) + v \vec{n}(u)$. Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, il existe un scalaire v est un seul tel que la famille $(f'(u) + v \vec{n}'(u), \vec{n}(u))$ soit liée, c'est le paramètre du point de contact de l'enveloppe des normales de l'ellipse (i.e. la développée de l'ellipse). La projection orthogonale sur \mathcal{H} du contour apparent de \mathcal{S} dans la direction $\mathbb{R}e_3$ est donc la développée de l'ellipse introduite ci-dessus.

Exercice 9 :

|| On suppose \mathcal{E} euclidien. Soit \mathcal{S} un tore à collier de \mathcal{E} (cf. l'Exemple 2 du § XI.2). On projette orthogonalement \mathcal{S} sur un plan \mathcal{H} non parallèle à l'axe de révolution de \mathcal{S} . Montrer que la projection du contour apparent dans la direction $D = \mathcal{H}^\perp$ est l'union de deux parallèles d'ellipse. ■

Nous noterons d la distance du centre du tore au centre du petit cercle et r le rayon du petit cercle. On a $d > r$ puisqu'il s'agit d'un tore à collier. Il existe un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$ tel que le tore soit l'image de l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}$:

$$(\theta, \varphi) \mapsto (d + r \cos \varphi)(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + r \sin \varphi e_3.$$

Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) &= (d + r \cos \varphi)(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= -r \sin \varphi(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + r \cos \varphi e_3. \end{aligned}$$

On peut supposer que \mathcal{H} est l'orthogonal du vecteur $\vec{w} = \sin \alpha e_1 + \cos \alpha e_3$, où $\cos \alpha > 0$, puisque e_3 n'est pas dans la direction de \mathcal{H} .

paramètre (θ, φ) est dans le contour apparent dans la direction de \vec{w} si, et seulement si :

$$0 = \begin{vmatrix} -\sin \theta & -\sin \varphi \cos \theta & \sin \alpha \\ \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \cos \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \theta \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi .$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, $\cos \varphi = 0$ est exclu car $\cos \alpha \neq 0$. Il y a donc pour φ deux solutions (modulo 2π) :

$$\varphi_1(\theta) = -\text{Arctg}(\text{tg } \alpha \cos \theta) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\theta) = \pi - \text{Arctg}(\text{tg } \alpha \cos \theta) .$$

On a alors, en posant $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_i(\theta) &= \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha \cos^2 \theta}} = \\ &= \frac{\varepsilon_i \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta}} = \frac{\varepsilon_i \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}} . \end{aligned}$$

Le vecteur \vec{w} est le dernier vecteur d'une base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dont la matrice de passage par rapport à (e_1, e_2, e_3) est :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} .$$

Les deux premières coordonnées dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ du point $\Phi(\theta, \varphi)$ sont respectivement les produits scalaires de $\overrightarrow{O\Phi(\theta, \varphi)}$ avec \vec{u} et \vec{v} , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \alpha (d + r \cos \varphi) \cos \theta - r \sin \alpha \sin \varphi \\ \eta &= (d + r \cos \varphi) \sin \theta . \end{aligned}$$

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ donné, les projections sur \mathcal{H} des points du contour dans la direction \vec{w} ont pour coordonnées $(i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket)$:

$$\begin{aligned} \xi_i(\theta) &= d \cos \alpha \cos \theta + r \cos \varphi_i(\theta) (\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \text{tg } \varphi_i(\theta)) \\ \eta_i(\theta) &= d \sin \theta + r \cos \varphi_i(\theta) \sin \theta . \end{aligned}$$

Comme $\text{tg}(\varphi_i(\theta)) = -\text{tg } \alpha \cos \theta$, on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \xi_i(\theta) &= d \cos \alpha \cos \theta + r \cos \varphi_i(\theta) \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \\ \eta_i(\theta) &= d \sin \theta + r \cos \varphi_i(\theta) \sin \theta , \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \xi_i(\theta) &= d \cos \alpha \cos \theta + \frac{\varepsilon_i r \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ \eta_i(\theta) &= d \sin \theta + \frac{\varepsilon_i r \cos \alpha \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}} . \end{aligned}$$

Considérons l'ellipse qui est la projection orthogonale sur \mathcal{H} du cercle $\theta \mapsto O + d(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2)$; cette ellipse est la trajectoire de l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f(\theta) = O + d(\cos \alpha \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}) .$$

On trouve que le vecteur normal unitaire $\tau_1(\theta)$ au point de paramètre θ pour f est le vecteur :

$$\tau_1(\theta) = -\frac{\cos \theta \vec{u} + \cos \alpha \sin \theta \vec{v}}{\sqrt{\cos^2 \theta + \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}} .$$

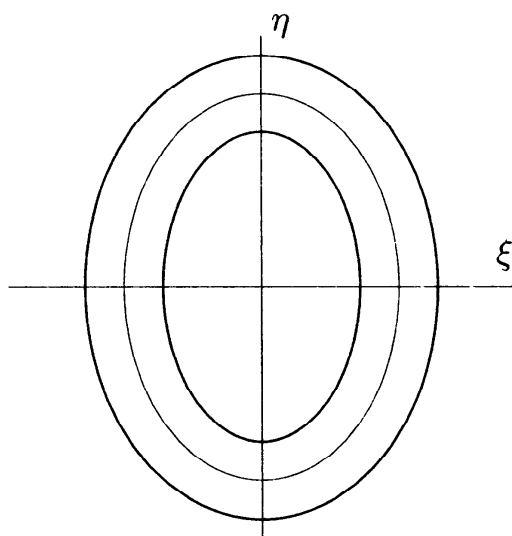
On constate que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$:

$$O + (\xi_i(\theta) \vec{u} + \eta_i(\theta) \vec{v}) = f(\theta) - \varepsilon_i r \tau_1(\theta) .$$

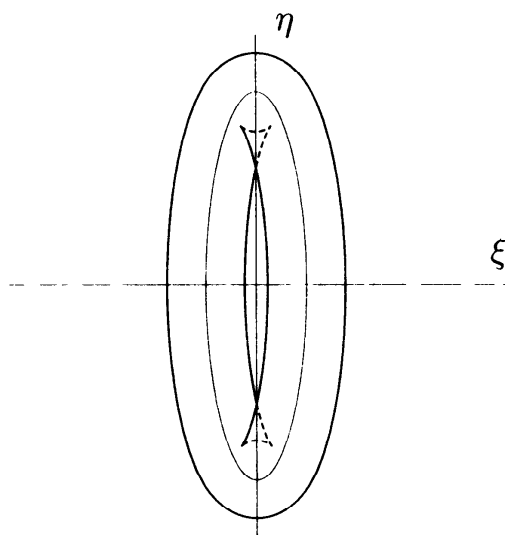
La projection sur \mathcal{H} du contour du tore dans la direction \mathcal{H}^\perp est donc la réunion de deux parallèles d'une même ellipse.

On trouvera ci-dessous les représentations graphiques de divers cas, suivant que la parallèle d'ellipse intérieure a des points de rebroussement, ou des points doubles.

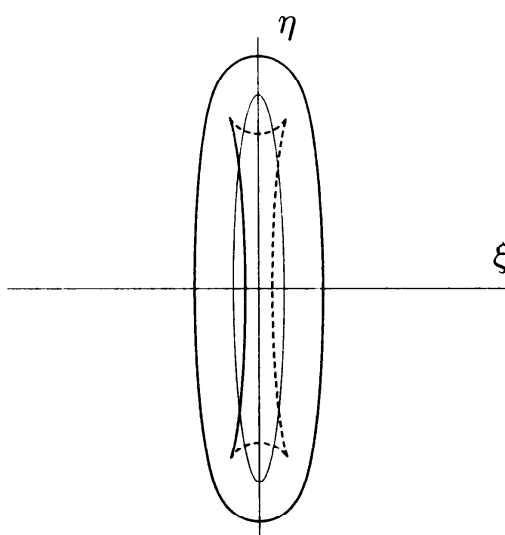
Cas où la parallèle intérieure n'a ni point double ni point stationnaire :



Cas où la parallèle intérieure a des points stationnaires mais pas de point double :



Cas où la parallèle intérieure a des points stationnaires et des points doubles :



Exercice 11 :

La surface $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{E}$ représentée dans \mathcal{R} par $x = 2u + v$, $y = u^2 + 2uv$, $z = u^2v$ est réglée. Montrer qu'elle est développable et qu'elle admet une arête de rebroussement qu'on précisera. ■

Pour tout $u \in \mathbb{R}$ posons :

$$f(u) = O + (2u e_1 + u^2 e_2) \quad \text{et} \quad \vec{K}(u) = e_1 + 2u e_2 + u^2 e_3 .$$

On vérifie que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = f(u) + v \vec{K}(u)$. La surface Φ est donc réglée. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(u) = 2e_1 + 2ue_2 \quad \text{et} \quad \vec{K}'(u) = 2e_2 + 2ue_3 .$$

On constate que pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$f'(u) = 2 \vec{K}(u) - u \vec{K}'(u) ,$$

et que $(\vec{K}(u), \vec{K}'(u))$ est libre. La surface paramétrée Φ est donc développable. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'unique $v \in \mathbb{R}$ tel que le point de paramètre (u, v) soit stationnaire pour Φ est $v = u$ (cf. Cours). L'arc :

$$u \mapsto S(u) = \Phi(u, u) = O + (3u e_1 + 3u^2 e_2 + u^3 e_3) ,$$

est l'arête de rebroussement de la surface développable Φ . L'arc S est une cubique gauche.

On vérifie que pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$S'(u) = 3(e_1 + 2u e_2 + u^2 e_3) = 3 \vec{K}(u) ,$$

et que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Phi(u, v) = (f(u) + u \vec{K}(u)) + (v - u) \vec{K}(u) = S(u) + \frac{v - u}{3} S'(u) .$$

La surface développable Φ est bien la surface réglée engendrée par les tangentes de l'arc S , son arête de rebroussement.

§ XI.4 SURFACES DE RÉVOLUTION

Exercice 1 :

|| Soit \mathcal{S} la surface de révolution engendrée par la *cissoïde droite* Γ d'équations dans \mathcal{R} ; $z = 0$, $x(x^2 + y^2) - a y^2 = 0$ ($a > 0$ donné) par rotation autour de la droite Δ d'équations dans \mathcal{R} : $x = 0$, $y = z$. Trouver la méridienne de \mathcal{S} . ■

La droite Δ est dirigée par le vecteur $e_2 + e_3$. La projection orthogonale sur Δ du point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} , est le point de coordonnées $\left(0, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)$, et le carré de la distance de M à la droite Δ est :

$$d^2(M, \Delta) = x^2 + \frac{(y - z)^2}{2} .$$

Cherchons la méridienne de \mathcal{S} dans le plan d'équation $X = 0$. Le point de coordonnées $(0, Y, Z)$ est sur la méridienne de \mathcal{S} si, et seulement si, il existe un point de Γ qui a même projection orthogonale que M

Δ et dont la distance à Δ est la même que la distance de M à Δ . Ces conditions s'écrivent :

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} y = Y + Z, & 2x^2 + y^2 = (Y - Z)^2, \\ x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0. \end{cases}$$

Après élimination de y on obtient la condition équivalente :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 2YZ = 0, \quad x^3 + (Y + Z)^2(x - a) = 0),$$

soit encore en reportant la valeur de x^2 :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -2YZ, \quad x(Y^2 + Z^2) = a(Y + Z)^2).$$

Le point de coordonnées $(Y, Z) = (0, 0)$ est sur la méridienne, et si $(Y, Z) \neq (0, 0)$, le point de coordonnées (Y, Z) est sur la méridienne si, et seulement si :

$$\frac{a^2(Y + Z)^4}{(Y^2 + Z^2)^2} + 2YZ = 0 \quad \text{soit} \quad a^2(Y + Z)^4 + 2YZ(Y^2 + Z^2)^2 = 0.$$

La méridienne de \mathcal{S} dans le plan d'équation $X = 0$ est donc la courbe d'équation :

$$a^2(Y + Z)^4 + 2YZ(Y^2 + Z^2)^2 = 0.$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation de la méridienne dans un repère $\mathcal{R}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, dont le dernier axe de coordonnées soit l'axe de révolution. On peut poser :

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}, \quad e'_3 = \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}.$$

Si les coordonnées de M sont (X, Y, Z) dans \mathcal{R} , ses coordonnées dans \mathcal{R}' sont :

$$X' = X, \quad Y' = \frac{Y - Z}{\sqrt{2}}, \quad Z' = \frac{Y + Z}{\sqrt{2}},$$

et :

$$X = X', \quad Y = \frac{Y' + Z'}{\sqrt{2}}, \quad Z = \frac{Z' - Y'}{\sqrt{2}}.$$

Dans ce nouveau repère, la méridienne est la courbe d'équation :

$$4a^2 Z'^4 + (Z'^2 - Y'^2)(Y'^2 + Z'^2)^2 = 0,$$

et la surface \mathcal{S} a pour équation :

$$4a^2 Z'^4 + (Z'^2 - X'^2 - Y'^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)^2 = 0$$

Exercice 3 :

On donne a et c réels avec $0 < a < c$ et on considère l'ovale de Cassini \mathcal{C} défini dans \mathcal{R} par $\{y = 0, \|\overrightarrow{MF}\| \cdot \|\overrightarrow{MF'}\| = a^2\}$, les foyers F et F' étant les points de coordonnées $(c, 0, 0)$ et $(-c, 0, 0)$ dans \mathcal{R} . Tracer \mathcal{C} . Soit \mathcal{S} la surface de révolution autour de $\mathcal{D} = O + \mathbb{R}e_3$ dont \mathcal{C} est une méridienne. Expliquer pourquoi \mathcal{S} admet des plans bitangents non orthogonaux à e_3 . Puis prouver qu'un tel plan coupe \mathcal{S} suivant deux cercles. ■

a) Le point M de coordonnées $(x, 0, z)$ se trouve sur l'ovale de Cassini si, et seulement si :

$$((x - c)^2 + z^2)((x + c)^2 + z^2) = a^4,$$

soit :

$$(x^2 + z^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + z^2 + c^2 + 2cx) = a^4,$$

soit encore :

$$(1) \quad (x^2 + z^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 - a^4 = 0.$$

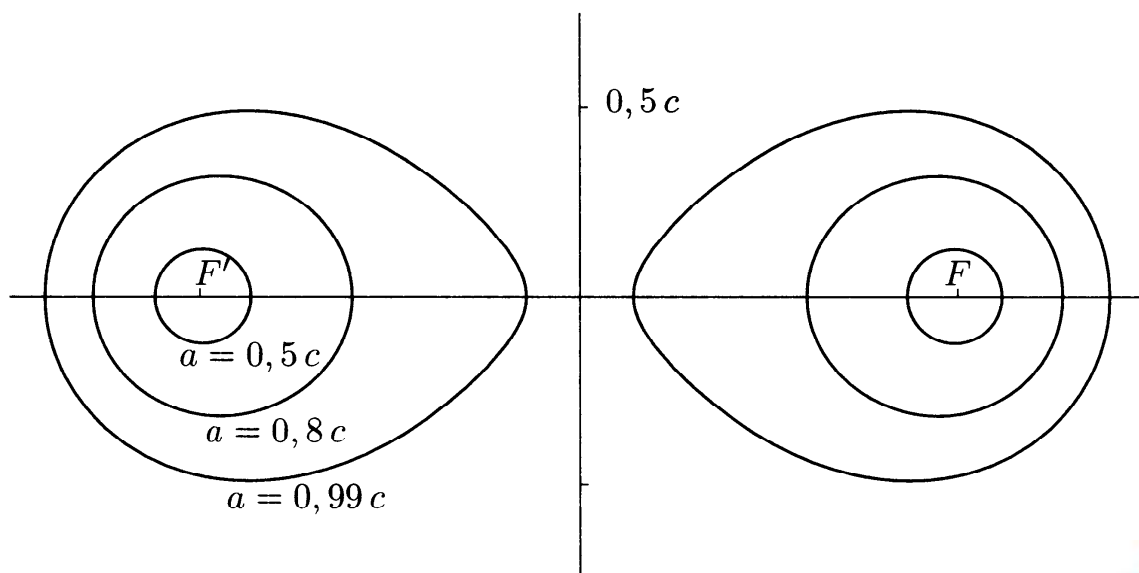
Le point de coordonnées $(x, 0, z)$ est sur l'ovale de Cassini si, et seulement si, $z^2 = \sqrt{4c^2 x^2 + a^4} - x^2 - c^2$. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que le point de coordonnées $(x, 0, z)$ soit sur l'ovale de Cassini si, et seulement si :

$$4c^2 x^2 + a^4 \geq (x^2 + c^2)^2 \quad \text{soit} \quad (x^2 - c^2)^2 \leq a^4,$$

soit encore si, et seulement si : $c^2 - a^2 \leq x^2 \leq a^2 + c^2$. L'ovale de Cassini est donc la réunion des graphes des applications :

$$z \mapsto \varepsilon \sqrt{\sqrt{4c^2 x^2 + a^4} - x^2 - c^2} \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\}),$$

définis sur la réunion de l'intervalle $[\sqrt{c^2 - a^2}, \sqrt{c^2 + a^2}]$ et de son symétrique par rapport à 0. On trouve la représentation suivante :



b) On obtient facilement une équation de \mathcal{S} à partir de (1) :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + c^2)^2 - 4c^2(x^2 + y^2) - a^4 = 0.$$

On remarque que \mathcal{S} ne coupe pas la droite $O + \mathbb{R}e_3$, puisque $c > a$. Pour $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ posons $q(M) = x^2 + y^2 + z^2$ et $l(M) = z$. L'ensemble \mathcal{S} est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$(q(M) + c^2)^2 - 4c^2(q(M) - l^2(M)) - a^4 = 0,$$

soit encore l'ensemble $\Phi^{-1}(0)$, où pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$(2) \quad \Phi(M) = (q(M) - c^2)^2 + 4c^2 l^2(M) - a^4.$$

L'application Φ est évidemment de classe \mathcal{C}^∞ , et son gradient en un point $M \in \mathcal{E}$ est :

$$(3) \quad \text{grad}_M \Phi = 4(q(M) - c^2) \overrightarrow{OM} + 8c^2 l(M) e_3.$$

Si $M \in \mathcal{S}$, alors $(q(M) - c^2)$ et $l(M)$ ne sont pas simultanément nuls ; le vecteur $\text{grad}_M \Phi$ ne pourrait être nul que si les vecteurs \overrightarrow{OM} et e_3 étaient colinéaires, ce qui est exclu puisque \mathcal{S} ne coupe pas la droite $O + \mathbb{R}e_3$. L'ensemble \mathcal{S} est donc une sous-variété surface de classe \mathcal{C}^∞ .

Le plan tangent en $M \in \mathcal{S}$ est horizontal si, et seulement si, le vecteur $\text{grad}_M \Phi$ est colinéaire à e_3 , soit si, et seulement si, $q(M) = c^2$. Le point $M \in \mathcal{E}$ vérifie ces conditions si, et seulement si : $q(M) = c^2$ et $l^2(M) = a^4/(4c^2)$. La surface \mathcal{S} admettant le point O comme centre de symétrie, si le plan tangent en $M \in \mathcal{S}$ passe par l'origine, alors c'est aussi le plan tangent au symétrique de M . Le plan tangent en M passe par l'origine si, et seulement si : $(\text{grad}_M \Phi \mid \overrightarrow{OM}) = 0$, c'est-à-dire :

$$(4) \quad 4(q(M) - c^2)q(M) + 8c^2 l^2(M) = 0.$$

Comme $M \in \mathcal{S}$ on a : $4c^2 l^2(M) = a^4 - (q(M) - c^2)^2$, on trouve qu'il s'agit des points $M \in \mathcal{S}$ tels que : $q^2(M) = c^4 - a^4$.

Supposons que Π soit un tel plan bitangent passant par le point $M_0 \in \mathcal{S}$, par l'origine, et donc aussi par le symétrique de M_0 par rapport à O . Le vecteur $\overrightarrow{OM_0}$ est orthogonal au vecteur $\text{grad}_{M_0} \Phi$. Il existe donc un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{OM_0} = \sqrt{q(M_0)} \vec{w}$.

\vec{w} soit colinéaire à $\text{grad}_{M_0} \Phi$. Le vecteur \vec{v} est alors orthogonal à $\overrightarrow{OM_0}$ et à $\text{grad}_{M_0} \Phi$, donc orthogonal à e_3 (cf. (3)). Le plan bitangent est $\Pi = O + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Soit $M \in \Pi$, de coordonnées (ξ, η) dans le repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de Π . On a :

$$l(M) = (\overrightarrow{OM} | e_3) = \xi (\vec{u} | e_3) = \xi \frac{l(M_0)}{\sqrt{q(M_0)}}.$$

Pour $M \in \Pi$ on a donc l'égalité (cf. (2)) :

$$\Phi(M) = (\xi^2 + \eta^2 - c^2)^2 + 4c^2 \frac{l^2(M_0)}{q(M_0)} \xi^2 - a^4.$$

On a remarqué que (cf. (4)) : $2(q(M_0) - c^2)q(M_0) + 4c^2 l^2(M_0) = 0$. Pour tout $M \in \Pi$ on a donc l'égalité :

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= (\xi^2 + \eta^2 - c^2)^2 + 2(c^2 - q(M_0))\xi^2 - a^4 = \\ &= (\xi^2 + \eta^2 - q(M_0))^2 - 2(c^2 - q(M_0))\eta^2 + c^4 - a^4 - q^2(M_0). \end{aligned}$$

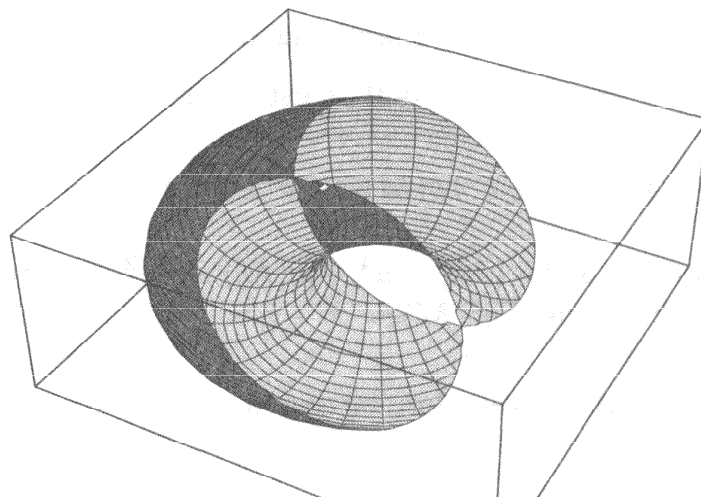
Comme $\Phi(M_0) = 0$, on en déduit $c^4 - a^4 - q^2(M_0) = 0$, ce qui avait déjà été remarqué. D'autre part $c^2 > q(M_0)$, puisque $c^4 > q^2(M_0)$. Soit $k > 0$ tel que $2k^2 = c^2 - q(M_0)$. Pour tout $M \in \Pi$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= (\xi^2 + \eta^2 - q(M_0))^2 - 4k^2 \eta^2 = \\ &= (\xi^2 + \eta^2 - 2k\eta - q(M_0))(\xi^2 + \eta^2 + 2k\eta - q(M_0)) = \\ &= (\xi^2 + (\eta - k)^2 - q(M_0) - k^2)(\xi^2 + (\eta + k)^2 - q(M_0) - k^2). \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ tel que :

$$r^2 = q(M_0) + k^2 = \frac{c^2 + q(M_0)}{2} = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 - a^4}}{2} > 0.$$

L'ensemble $\Pi \cap \mathcal{S}$ est donc la réunion du cercle de centre le point de coordonnées $(0, k)$ et de rayon r et du cercle de centre le point de coordonnées $(0, -k)$ et de même rayon r .



Exercice 6 :

Soit \mathcal{C} un cône de révolution, \mathcal{D} une droite parallèle à l'axe de \mathcal{C} et distincte de cet axe, et \mathcal{G} une génératrice variable de \mathcal{C} . Enfin soit Δ la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{G} . Quel est le lieu du pied de Δ sur \mathcal{G} ? ■

Soit α le demi-angle au sommet du cône de révolution. Il existe un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$, d'origine le sommet du cône, et dont le dernier axe de coordonnées est l'axe du cône, tel que le cône soit engendré par la droite \mathcal{G}_θ , où θ décrit \mathbb{R} , passant par O et dirigée par le vecteur :

$$\vec{v}(\theta) = \sin \alpha (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + \cos \alpha e_3.$$

On peut supposer que la droite \mathcal{D} est la droite d'équations $x = a, y = 0$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ les droites \mathcal{G}_θ et \mathcal{D} ne sont pas parallèles; elles ont par conséquent une perpendiculaire commune, et le pied de cette perpendiculaire commune sur \mathcal{G}_θ est le point de \mathcal{G}_θ qui est le plus proche de \mathcal{D} . Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le carré de la distance du point $O + \lambda \vec{v}(\theta)$ de \mathcal{G}_θ à la droite \mathcal{D} est :

$$(\lambda \sin \alpha \cos \theta - a)^2 + (\lambda \sin \alpha \sin \theta)^2 = \lambda^2 \sin^2 \alpha - 2a\lambda \sin \alpha \cos \theta + a^2.$$

Le pied de la perpendiculaire commune à \mathcal{G}_θ et à \mathcal{D} sur \mathcal{G}_θ est donc le point de paramètre :

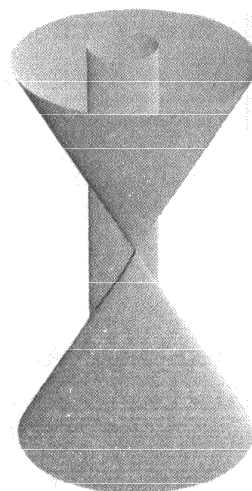
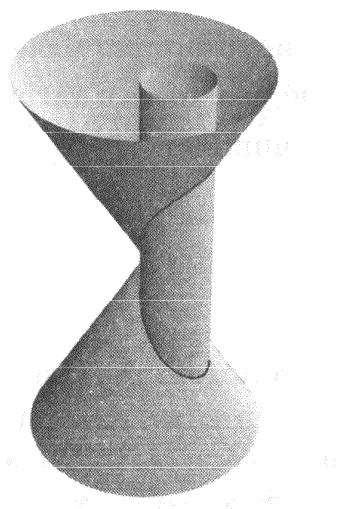
$$\lambda = \frac{a \sin \alpha \cos \theta}{\sin^2 \alpha} = \frac{a \cos \theta}{\sin \alpha}.$$

Il s'agit du point :

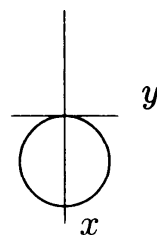
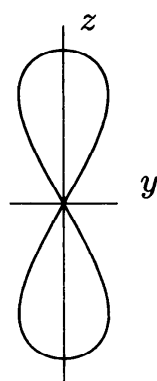
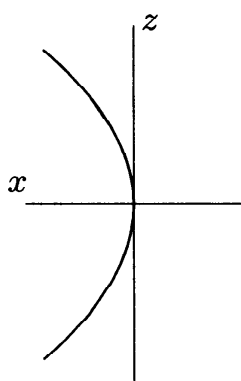
$$P(\theta) = O + a \cos \theta (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + a \cotg \alpha \cos \theta e_3.$$

La projection orthogonale de $P(\theta)$ sur le plan d'équation $z = 0$ décrit le cercle d'équation polaire $\rho = a \cos \theta$. Le point $P(\theta)$ décrit une bi-quadratique unicursale intersection du cône \mathcal{C} est du cylindre d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$.

On trouvera ci-dessous une représentation graphique de deux vues en perspective de cette intersection.



On trouvera ci-dessous une représentation graphique des vues de l'intersection en projection suivant chacun des axes de coordonnées :



Chapitre XII

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES QUADRIQUES

§ XII.1 FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 2 SUR \mathcal{E}

Exercice 2 :

|| On suppose ici \mathcal{E} de dimension $n \geq 4$. On définit \mathcal{P} , \mathcal{P}_2 et l'équivalence affine dans \mathcal{P}_2 comme dans le Cours. Les classes d'équivalence affine des $f \in \mathcal{P}_2$ sont-elles en nombre fini ? ■

L'espace \mathcal{E} sera identifié à \mathbb{R}^n par le choix d'un repère \mathcal{R} . Soit $f \in \mathcal{P}_2$. La forme quadratique f_∞ s'écrit comme combinaison linéaire, à coefficients dans $\{-1, 1\}$ de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes (leur nombre est ≥ 1 car $f \in \mathcal{P}_2$). Le polynôme f est donc équivalent à un polynôme de la forme :

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + c ,$$

où r est le rang de f_∞ , $(\varepsilon_i)_{i \in [1, r]} \in \{-1, 1\}^r$, $(a_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On peut éliminer par translation les termes du premier degré en (x_1, \dots, x_r) ; on peut donc supposer $a_1 = \dots = a_r = 0$. Alors de deux choses l'une :

- soit la forme linéaire $\sum_{i=r+1}^n a_i x_i$ est nulle (ce qui englobe le cas où $r = n$),

alors :

- soit $c = 0$, et f est équivalent au polynôme $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i x_i^2$,

- soit $c > 0$, et en utilisant une homothétie on voit que f est équivalent au polynôme $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i x_i^2 + 1$,

- soit $c < 0$, et en utilisant une homothétie on voit que f est équivalent au polynôme $-\sum_{i=1}^r \varepsilon_i x_i^2 + 1$ (même cas que le précédent en fait) .

- soit la forme linéaire $\sum_{i=r+1}^n a_i x_i$ n'est pas nulle. Dans ce cas, on peut prendre la fonction affine $\sum_{i=r+1}^n a_i x_i + c$ comme dernière coordonnée affine, sans changer la partie quadratique. Le polynôme est donc équivalent au polynôme :

$$\sum_{i=1}^r \varepsilon_i x_i^2 + x_n ,$$

avec $r < n$.

Nous avons mis en évidence le fait qu'il y a un ensemble fini de polynômes tel que tout polynôme $f \in \mathcal{P}_2$ soit affinement équivalent à l'un des éléments de cet ensemble. L'ensemble des classes d'équivalence affine des $f \in \mathcal{P}_2$ est donc fini.

§ XII.2 ZÉROS D'UNE FONCTION $f \in \mathcal{P}_2$

Exercice 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quelle est la nature des ensembles de } \mathcal{E} \text{ définis dans un repère} \\ \mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3) \text{ par les équations suivantes :} \\ b) \ x^2 + (2\lambda^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \\ \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \\ e) \ x^2 + 2\lambda yz - 2ax = 0 \quad ((\lambda, a) \in \mathbb{R}^2). \blacksquare \end{array} \right.$$

La quadrique sera notée \mathcal{S} .

b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose :

$$P_\lambda(x, y, z) = x^2 + (2\lambda^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 .$$

On observe que :

$$P_\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 + 2\lambda^2(y^2 + z^2) - 4yz + (2\lambda - 1)(1 - \lambda) .$$

Si $\lambda = 0$, alors :

$$P_0(x, y, z) = (x - y - z)^2 + (y - z)^2 - (y + z)^2 - 1 .$$

L'ensemble $\mathcal{S} = P_0^{-1}(0)$ est un hyperboloïde à une nappe (cas $i = 5$ du Cours).

Si $\lambda \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} P_\lambda(x, y, z) &= (x - y - z)^2 + 2\lambda^2 \left(y^2 - \frac{2}{\lambda^2} yz + z^2 \right) + (2\lambda - 1)(1 - \lambda) = \\ &= (x - y - z)^2 + 2\lambda^2 \left(y - \frac{z}{\lambda^2} \right)^2 + 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) z^2 + (2\lambda - 1)(1 - \lambda) . \end{aligned}$$

Posons $a(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$ et $b(\lambda) = (2\lambda - 1)(1 - \lambda)$.

Si $\lambda < -1$, alors $a(\lambda) > 0$ et $b(\lambda) < 0$:

\mathcal{S} est un ellipsoïde.

Si $\lambda = -1$, alors $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) < 0$:

\mathcal{S} est un cylindre de base elliptique.

Si $-1 < \lambda < 1/2$, alors $a(\lambda) < 0$ et $b(\lambda) < 0$:

\mathcal{S} est un hyperboloïde à une nappe (vrai aussi pour $\lambda = 0$).

Si $1/2 = \lambda$, alors $a(\lambda) < 0$ et $b(\lambda) = 0$:

\mathcal{S} est un cône du second degré.

Si $1/2 < \lambda < 1$, alors $a(\lambda) < 0$ et $b(\lambda) > 0$:

\mathcal{S} est un hyperboloïde à deux nappes.

Si $\lambda = 1$, alors $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = 0$:

\mathcal{S} est la droite d'équations $x = y + z$, $y = z$.

Si $\lambda > 1$, alors $a(\lambda) > 0$ et $b(\lambda) < 0$:

\mathcal{S} est un ellipsoïde.

e) Pour $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^2$ on pose ici :

$$P_{\lambda,a}(x, y, z) = x^2 + 2\lambda yz - 2ax .$$

On remarque que pour tout $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^2$:

$$P_{\lambda,a}(x, y, z) = (x - a)^2 + \frac{\lambda}{2} (y + z)^2 - \frac{\lambda}{2} (y - z)^2 - a^2 .$$

Si $a = 0$:

- soit $\lambda = 0$: \mathcal{S} est le plan $x = a$.

- soit $\lambda \neq 0$: \mathcal{S} est un cône du second degré.

Si $a \neq 0$:

- soit $\lambda = 0$: \mathcal{S} est la réunion des plans $x = 0$ et $x = 2a$.

- soit $\lambda \neq 0$: \mathcal{S} est un hyperboloïde à une nappe.

Exercice 2 :

|| On suppose \mathcal{E} euclidien. On donne deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de \mathcal{E} non coplanaires. Montrer que le lieu des droites rencontrant \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 suivant des angles égaux est l'union de deux

|| hyperboliques. ■

Il existe un repère $(O; e_1, e_2, e_3)$, un réel $\alpha \in]0, \pi/4]$, un réel $h > 0$, tels que \mathcal{D}_1 soit la droite passant par le point $A_1 = O + (-h e_3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}_1 = \cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_2$, et \mathcal{D}_2 la droite passant par le point $A_2 = O + h e_3$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}_2 = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$. Soit $M_1 = A_1 + \lambda_1 v_1 \in \mathcal{D}_1$ ($\lambda_1 \in \mathbb{R}$) et $M_2 = A_2 + \lambda_2 v_2 \in \mathcal{D}_2$ ($\lambda_2 \in \mathbb{R}$). La droite $\text{Dr}(M_1, M_2)$ coupe les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 suivant des angles égaux si, et seulement si :

$$\frac{|(\overrightarrow{M_1 M_2} | \vec{v}_1)|}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|} = \frac{|(\overrightarrow{M_1 M_2} | \vec{v}_2)|}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|}.$$

Comme $\overrightarrow{M_1 M_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cos \alpha e_1 + (\lambda_2 + \lambda_1) \sin \alpha e_2 + 2h e_3$, la condition s'écrit :

$$|(\lambda_2 - \lambda_1) \cos^2 \alpha - (\lambda_2 + \lambda_1) \sin^2 \alpha| = |(\lambda_2 - \lambda_1) \cos^2 \alpha + (\lambda_2 + \lambda_1) \sin^2 \alpha|,$$

soit enfin, puisque $\cos \alpha \neq 0$ et $\sin \alpha \neq 0$:

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \lambda_1.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\Delta_1(\lambda)$ la droite passant par les points $A_1 + (-\lambda v_1)$ et $A_2 + \lambda v_2$, et $\Delta_2(\lambda)$ la droite passant par les points $A_1 + \lambda v_1$ et $A_2 + \lambda v_2$. D'après ce qui précède, ce sont les droites qui rencontrent \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 suivant des angles égaux.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la droite $\Delta_1(\lambda)$ passe par le milieu des points $A_1 + (-\lambda v_1)$ et $A_2 + \lambda v_2$; ce milieu est le point $O + \lambda \sin \alpha e_2$; elle est dirigée par le vecteur $\lambda \cos \alpha e_1 + h e_3$. L'ensemble décrit par $\Delta_1(\lambda)$ quand λ décrit \mathbb{R} est la surface réglée définie par :

$$x = \lambda \mu \cos \alpha \quad y = \lambda \sin \alpha \quad z = \mu h,$$

pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par élimination on trouve qu'il s'agit du paraboloid hyperbolique d'équation :

$$\sin \alpha h x = \cos \alpha y z.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la droite $\Delta_2(\lambda)$ passe par le milieu des points $A_1 + \lambda v_1$ et $A_2 + \lambda v_2$; ce milieu est le point $O + \lambda \cos \alpha e_1$; elle est dirigée par le vecteur $\lambda \sin \alpha e_2 + h e_3$. L'ensemble décrit par $\Delta_2(\lambda)$ quand λ décrit \mathbb{R} est la surface réglée définie par :

$$x = \lambda \cos \alpha \quad y = \lambda \mu \sin \alpha \quad z = \mu h,$$

pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par élimination on trouve qu'il s'agit du paraboloïde hyperbolique d'équation :

$$\cos \alpha \, h \, y = \sin \alpha \, x \, z .$$

Le lieu des droites rencontrant \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 suivant des angles égaux est donc bien la réunion de deux paraboloïdes hyperboliques.

Exercice 4 :

|| Soit une conique Γ de \mathcal{C} et $S \in \mathcal{C}$ non situé dans le plan de Γ .
 || On note \mathcal{C} le cône de sommet S et de directrice Γ . Montrer
 || que \mathcal{C} est contenu dans un et un seul cône \mathcal{S} du second degré.
 || Préciser $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$. Dans quel cas a-t-on $\mathcal{S} = \mathcal{C}$? ■

Supposons que Γ soit une ellipse ou une hyperbole dans le plan Π . Il existe un repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ du plan Π dans lequel Γ est la conique d'équation réduite: $x^2 + \varepsilon y^2 = 1$, où $\varepsilon = 1$ si Γ est une ellipse et $\varepsilon = -1$ si Γ est une hyperbole. Soit \mathcal{R} le repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{S}\vec{\Omega})$ de \mathcal{C} . Le point M de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} est dans \mathcal{C} si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que le point de coordonnées (tx, ty, tz) soit dans Γ . Ces conditions s'écrivent :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad t^2 x^2 + \varepsilon t^2 y^2 = 1, \quad tz = 1.$$

Par élimination de t on obtient la condition équivalente :

$$z \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + \varepsilon y^2 = z^2.$$

L'ensemble \mathcal{S} des points $M \in \mathcal{C}$ dont les coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifient $x^2 + \varepsilon y^2 - z^2 = 0$ est, quelle que soit la valeur de ε , un cône du second degré. Si Γ est une ellipse, alors $\varepsilon = 1$, et on voit que $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C} = \{S\}$. Si Γ est une hyperbole, alors $\varepsilon = -1$; dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$ est la réunion de la droite d'équation $x = y$ et de la droite d'équation $x = -y$ dans le plan d'équation $z = 0$.

Supposons que Γ soit une parabole dans le plan Π . Il existe un repère $(\Sigma; \vec{i}, \vec{j})$ du plan Π dans lequel Γ est la parabole d'équation: $x^2 - 2y = 0$. Soit \mathcal{R} le repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{S}\vec{\Sigma})$ de \mathcal{C} . Le point M de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} est dans \mathcal{C} si, et seulement si, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que le point de coordonnées (tx, ty, tz) soit dans Γ . Ces conditions s'écrivent :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad t^2 x^2 - 2ty = 0, \quad tz = 1.$$

Par élimination de t on obtient la condition équivalente :

$$z \neq 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2yz = 0.$$

L'ensemble \mathcal{S} des points $M \in \mathcal{E}$ dont les coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifient $x^2 - 2yz = 0$ est un cône du second degré ; on a en effet l'égalité :

$$x^2 - 2yz = x^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 - \frac{1}{2}(y+z)^2.$$

L'ensemble $\mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$ est la droite d'équation $x = 0$ dans le plan $z = 0$.

Reprenons les notations communes aux 2 parties précédentes, l'espace \mathcal{E} étant identifié à \mathbb{R}^3 par le choix du repère \mathcal{R} , et le plan Π à \mathbb{R}^2 . On a dans tous les cas prouvé l'existence d'un cône du second degré \mathcal{S} tel que $\mathcal{S} \cap \Pi = \Gamma$. Soit $P(x, y, z) = x^2 + \varepsilon y^2 - 1$ ou $P(x, y, z) = x^2 - 2yz$ suivant le cas, de telle sorte que $\mathcal{S} = P^{-1}(0)$. On constate que le polynôme $f(x, y) = P(x, y, 1)$ est de degré 2 (de classe II, IV ou VI cf. Cours § X) et que $\Gamma = \Gamma_f$. Supposons que \mathcal{S}_1 soit un autre cône du second degré de sommet S qui *contienne* Γ et donc \mathcal{C} . Il existe un polynôme homogène P_1 de degré 2, tel que $\mathcal{S}_1 = P_1^{-1}(0)$. Soit f_1 le polynôme $(x, y) \mapsto P_1(x, y, 1)$; ce polynôme est au plus de degré 2 et n'est pas nul. On a $\Gamma \subset \Gamma_{f_1}$, donc le polynôme f_1 ne peut pas être de degré ≤ 1 (sinon Γ serait incluse dans une droite). D'après le Théorème X.2.1, il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $f_1 = \lambda f$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_1(x, y, 1) = \lambda P(x, y, 1)$, et comme P_1 et λP sont homogènes de degré 2, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $z \neq 0$, $P_1(x, y, z) = \lambda P(x, y, z)$. Comme les polynômes $P_1(x, y, z)$ et $\lambda P(x, y, z)$ coïncident sur un ouvert de \mathbb{R}^3 , ils sont identiques ; nous en déduisons $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$. Cela démontre l'unicité du cône du second degré \mathcal{S} qui contient \mathcal{C} .

Exercice 7 :

On donne la courbe paramétrée définie dans un repère $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ de \mathcal{E} par ($a > 0$ donné) :

$$x = \frac{2at}{1+t^2}, \quad y = 2at \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \quad z = a \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Déterminer l'unique quadrique contenant cette courbe (appelée une *quartique de Steiner*). ■

Supposons que $(a_i)_{i \in [1, 10]}$ soient des réels non tous nuls tels que :

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 yz + a_5 xz + a_6 xy + a_7 x + a_8 y + a_9 z + a_{10} = 0,$$

(x, y, z) étant les fonctions de l'énoncé. Les limites de x , y et z quand t tend vers l'infini étant 0, on a $a_{10} = 0$. En séparant la partie paire de la partie impaire on obtient :

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_6 xy + a_9 z = 0$$

$$a_4 yz + a_5 xz + a_7 x + a_8 y = 0.$$

Pour $t = 0$ on a $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ donc nécessairement $a_9 = -a a_3$.
 Pour $t = 1$ on a $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, donc $a_1 = a_7 = 0$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ les égalités :

$$\frac{a_2 4 a^2 t^2 (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_3 a^2 (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_6 4 a^2 t^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^3} - \frac{a_3 a^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} = 0$$

$$\frac{a_4 2 a^2 t (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_5 2 a^2 t (1 - t^2)}{(1 + t^2)^3} + \frac{a_8 2 a t (1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} = 0 .$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_2 4 t^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_3 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_6 4 t^2}{(1 + t^2)^3} - \frac{a_3}{(1 + t^2)^2} = 0$$

$$\frac{a_4 a (1 - t^2)}{(1 + t^2)^4} + \frac{a_5 a}{(1 + t^2)^3} + \frac{a_8}{(1 + t^2)^2} = 0 ,$$

puis les égalités polynomiales :

$$a_2 4 t^2 (1 - t^2) + a_3 (1 - t^2) + a_6 4 t^2 (1 + t^2) - a_3 (1 + t^2)^2 = 0$$

$$a_4 a (1 - t^2) + a_5 a (1 + t^2) + a_8 (1 + t^2)^2 = 0 .$$

La première égalité donne pour $t^2 = 1$ la condition $a_3 = 2 a_6$ et pour $t^2 = -1$ la condition $a_3 = 4 a_2$. La deuxième égalité donne $a_8 = 0$ (degré) et $a_4 = a_5 = 0$ (pour $t^2 = 1$ et $t^2 = -1$).

En conclusion, on a nécessairement $a_1 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_{10} = 0$ et $a_3 = 4 a_2$, $a_6 = 2 a_2$, $a_9 = -4 a a_2$. Un polynôme du second degré P tel que $P(x, y, z) = 0$, où (x, y, z) sont les fonctions de l'énoncé, est donc nécessairement de la forme :

$$a_2 (y^2 + 4 z^2 + 2 x y - 4 a z) \quad (a_2 \in \mathbb{R}^*) .$$

Montrons que ces polynômes conviennent. Les fonctions x, y, z étant les fonctions définies par l'énoncé, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y^2 + 4 z^2 + 2 x y - 4 a z =$$

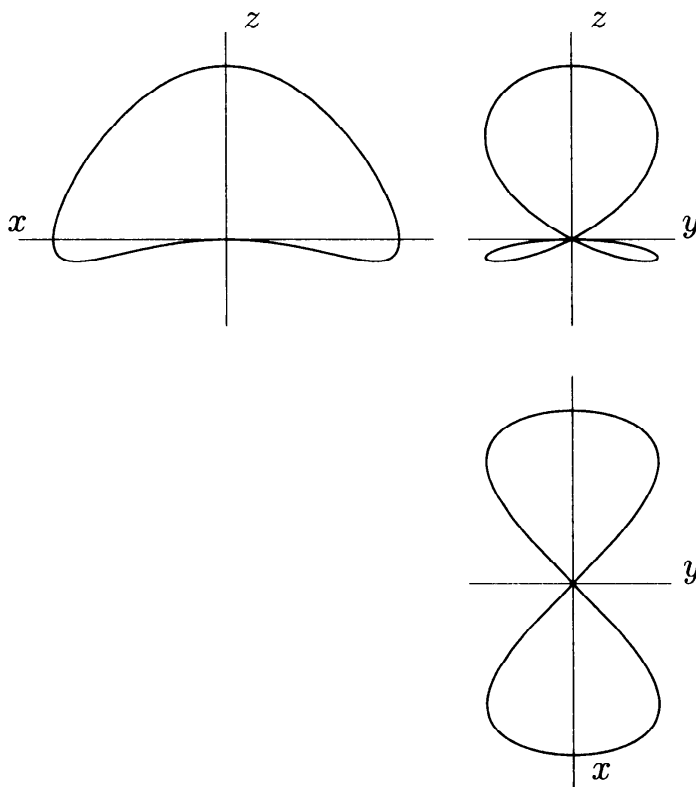
$$= \frac{4 a^2 t^2 (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^4} + \frac{4 a^2 (1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^4} + \frac{8 a^2 t^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^3} - \frac{4 a^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}$$

$$= \frac{4 a^2 (1 - t^2)}{(1 + t^2)^4} (t^2 - t^4 + 1 - t^2 + 2 t^2 + 2 t^4 - 1 - 2 t^2 - t^4) = 0 .$$

Cette quartique de Steiner est donc incluse dans la quadrique d'équation :

$$y^2 + 4 z^2 + 2 x y - 4 a z = 0 ,$$

et cette quadrique est la seule qui possède cette propriété. On trouvera ci-dessous une représentation graphique des vues de cette quartique de Steiner en projection suivant chacun des axes de coordonnées :



§ XII.3 QUADRIQUES, DROITES ET PLANS

Exercice 3 :

On suppose \mathcal{E} euclidien. Soit \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 deux droites de \mathcal{E} non coplanaires. Une droite variable \mathcal{G} rencontre \mathcal{D}_1 en M_1 , \mathcal{D}_2 en M_2 et reste orthogonale à \mathcal{D}_1 (on suppose \mathcal{D}_2 non orthogonale à \mathcal{D}_1). Soit Γ le cercle de diamètre M_1M_2 dont le plan est orthogonal à \mathcal{D}_1 .

a) Montrer que l'union des cercles Γ est un hyperboloïde à une nappe \mathcal{S}_1 , et que \mathcal{S}_1 est aussi l'union des droites $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, où \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont deux plans perpendiculaires passant respectivement par \mathcal{D}_1 et par \mathcal{D}_2 .

b) Les droites $\text{Dr}(M_1, M_2)$ engendrent un paraboloid hyperbolique \mathcal{S}_2 . Déterminer $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

c) Vérifier que le cône asymptote à \mathcal{S}_1 est un cône de Hachette (cf. exercice 3 du § XII.5 pour la définition d'un tel cône). ■

a) Il existe un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$, un réel $h > 0$ et un réel $\alpha \in]0, \pi/2[$ tels que $\mathcal{D}_1 = O + \mathbb{R} e_1$ et, en posant $A = O + 2h e_3$, $\mathcal{D}_2 = A + \mathbb{R} (\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2)$ (les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ne sont ni parallèles ni orthogonales). Soit, pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, le point $M_1(\lambda_1) = O + \lambda_1 e_1$ de \mathcal{D}_1 , et pour $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, le point $M_2(\lambda_2) = A + \lambda_2 (\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2)$ de \mathcal{D}_2 . On a l'égalité :

$$\overrightarrow{M_1(\lambda_1)M_2(\lambda_2)} = (\lambda_2 \cos \alpha - \lambda_1) e_1 + \lambda_2 \sin \alpha e_2 + 2h e_3.$$

La droite $\text{Dr}(M_1(\lambda_1), M_2(\lambda_2))$ est orthogonale à la droite \mathcal{D}_1 dirigée par e_1 si, et seulement si : $\lambda_1 = \lambda_2 \cos \alpha$.

Supposons cette condition réalisée, et posons $\lambda = \lambda_2$. On a :

$$M_1(\lambda_1) = O + \lambda \cos \alpha e_1,$$

et :

$$M_2(\lambda_2) = A + \lambda (\cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2).$$

La plan orthogonal à \mathcal{D}_1 qui passe par $M_1(\lambda_1)$ est le plan d'équation $x = \lambda \cos \alpha$. On trouve facilement que l'équation du cercle de diamètre $(M_1(\lambda_1), M_2(\lambda_2))$ dans ce plan est :

$$y^2 + z^2 - \lambda \sin \alpha y - 2h z = 0.$$

Le point M de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans le repère \mathcal{R} appartient à l'union des cercles quand λ décrit \mathbb{R} si, et seulement si :

$$(1) \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad x = \lambda \cos \alpha \quad \text{et} \quad y^2 + z^2 - \lambda \sin \alpha y - 2h z = 0.$$

Par élimination de λ on trouve la condition nécessaire et suffisante :

$$(2) \quad y^2 + z^2 - \text{tg} \alpha x y - 2h z = 0.$$

Cette équation s'écrit encore :

$$(z - h)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \text{tg} \alpha x \right)^2 - \frac{1}{4} \text{tg}^2 \alpha x^2 - h^2 = 0.$$

L'ensemble décrit est donc un hyperboloïde à une nappe. Remarquons que le point $M \in \mathcal{S}_1$ de coordonnées (x, y, z) étant donné, il existe un et un seul réel λ tel que la condition (1) soit réalisée, et par conséquent un et un seul couple $(M_1, M_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ tel que M appartienne au cercle de diamètre M_1, M_2 dans un plan orthogonal à \mathcal{D}_1 , et tel que la droite $\text{Dr}(M_1, M_2)$ soit orthogonale à \mathcal{D}_1 . Ces points seront dits associés à M .

Un système d'équations de la droite \mathcal{D}_1 est $y = 0$, $z = 0$; les plans qui contiennent la droite \mathcal{D}_1 sont donc les plans d'équations

0 où $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Un système d'équations de la droite \mathcal{D}_2 est $\cos \alpha y - \sin \alpha x = 0$, $z - 2h = 0$; les plans qui contiennent la droite \mathcal{D}_2 sont donc les plans d'équations $u'(\cos \alpha y - \sin \alpha x) + v'(z - 2h) = 0$, où $(u', v') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, soit encore :

$$-\sin \alpha u' x + \cos \alpha u' y + v' z - 2h v' = 0.$$

Le point M de coordonnées (x, y, z) est à l'intersection de deux plans orthogonaux contenant respectivement les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 si, et seulement si, il existe deux couples non nuls (u, v) et (u', v') dans \mathbb{R}^2 tels que :

$$\cos \alpha u u' + v v' = 0$$

$$u y + v z = 0$$

$$\cos \alpha u' (y - \operatorname{tg} \alpha x) + v' (z - 2h) = 0.$$

Le point M vérifie ces conditions si, et seulement si, il existe deux vecteurs non nuls orthogonaux dans \mathbb{R}^2 (les couples (u, v) et $(\cos \alpha u', v')$) tels que (y, z) soit orthogonal au premier et $(y - \operatorname{tg} \alpha x, z - 2h)$ orthogonal au second. Il est géométriquement clair que cette condition est réalisée si, et seulement si, les couples (y, z) et $(y - \operatorname{tg} \alpha x, z - 2h)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$y(y - \operatorname{tg} \alpha x) + z(z - 2h) = 0,$$

soit :

$$y^2 + z^2 - \operatorname{tg} \alpha x y - 2h z = 0.$$

L'hyperboloïde \mathcal{S}_1 est donc aussi la réunion des intersections de deux plans orthogonaux contenant respectivement les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

Si $M \in \mathcal{S}_1$ n'est ni sur \mathcal{D}_1 ni sur \mathcal{D}_2 , il appartient à l'intersection d'un unique couple de plans orthogonaux contenant respectivement \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 : le plan P_1 passant par M et contenant \mathcal{D}_1 et le plan P_2 passant par M et contenant \mathcal{D}_2 . Les plans P_1 et P_2 sont orthogonaux, ce qui est géométriquement assez évident (M est sur le cercle de diamètre M_1, M_2 dans un plan orthogonal à \mathcal{D}_1), mais de plus l'intersection de ces plans est une droite incluse dans \mathcal{S}_1 , donc l'une des deux génératrices de \mathcal{S}_1 passant par M .

b) D'après le début du a), le point M de coordonnées (x, y, z) est sur l'une des droites $\operatorname{Dr}(M_1, M_2)$ si, et seulement si, il existe des réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$x = \lambda \cos \alpha, \quad y = \mu \lambda \sin \alpha, \quad z = \mu 2h.$$

L'élimination de λ et de μ donne la condition équivalente :

$$2h y = \operatorname{tg} \alpha x z.$$

La surface \mathcal{S}_2 est donc un parabolôïde hyperbolique.

La première coordonnée x de $M \in \mathcal{S}_1$ étant fixée, $M \in \mathcal{S}_2$ si, et seulement si, M est à l'intersection de la droite d'équation $2hy = \operatorname{tg} \alpha xz$ (qui est la droite $\operatorname{Dr}(M_1, M_2)$) et du cercle d'équation $y^2 + z^2 - \operatorname{tg} \alpha xy - 2hz = 0$ (qui est le cercle de diamètre M_1, M_2); les points d'intersection sont donc M_1 et M_2 . L'intersection de \mathcal{S}_1 et de \mathcal{S}_2 est donc la réunion des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

c) Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} on ait :

$$f(M) = y^2 + z^2 - \operatorname{tg} \alpha xy - 2hz.$$

D'après l'égalité (2) du a), $\mathcal{S}_1 = f^{-1}(0)$. Le cône asymptote de \mathcal{S}_1 est $f_\infty^{-1}(0)$. Soit u l'opérateur symétrique associé à la forme quadratique f_∞ ; sa matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$\operatorname{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)} u = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{tg} \alpha/2 & 0 \\ -\operatorname{tg} \alpha/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est évident que 1 est la moitié de la trace de u et que 1 est aussi valeur propre de u ; le cône asymptote de \mathcal{S}_1 est donc un cône de Hachette (cf. exercice 3 du § XII.5).

Exercice 4 :

On donne a, b, c réels > 0 . Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{S}_{\lambda, \mu}$ l'ensemble défini dans \mathcal{R} par l'équation :

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda zx + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz = 0.$$

- a) Discuter la nature de $\mathcal{S}_{\lambda, \mu}$ suivant (λ, μ) .
- b) Lieu des centres des $\mathcal{S}_{\lambda, \mu}$ qui sont des quadriques à centre ?
- c) On distinguera les hyperboloïdes à une nappe et ceux à deux nappes. ■

a) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ soit $P_{\lambda, \mu}$ le polynôme :

$$P_{\lambda, \mu}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2\lambda zx + 2\mu yz - 2ax - 2by + 2cz.$$

On a :

$$P_{\lambda, \mu}(x, y, z) = x^2 + y^2 + (\lambda x + \mu y)^2 - (z - \lambda x - \mu y)^2 - 2ax -$$

Comme la forme quadratique $x^2 + y^2 + (\lambda x + \mu y)^2$ est définie positive dans \mathbb{R}^2 , on voit que la forme à l'infini de $P_{\lambda,\mu}$ est de signature $(2, 1)$. L'ensemble $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est donc soit un hyperboloïde à une nappe, soit un cône du second degré, soit un hyperboloïde à deux nappes, et dans tous les cas une quadrique à centre. La nature de cette quadrique sera déterminée dans le c).

b) Le centre de la quadrique $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est le point critique de $P_{\lambda,\mu}$; ses coordonnées (x, y, z) vérifient le système :

$$(1) \quad \begin{cases} 2x + 2\lambda z - 2a = 0 \\ 2y + 2\mu z - 2b = 0 \\ -2z + 2\lambda x + 2\mu y + 2c = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = a - \lambda z \\ y = b - \mu z \\ z = \lambda x + \mu y + c \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$x = a - \lambda \frac{\lambda a + \mu b + c}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \quad y = b - \mu \frac{\lambda a + \mu b + c}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \quad z = \frac{\lambda a + \mu b + c}{1 + \lambda^2 + \mu^2}.$$

Pour trouver le lieu du centre il est plus simple d'éliminer (λ, μ) dans le système (1). Le point M de coordonnées (x, y, z) est centre de l'une des quadriques $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ si, et seulement si, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{bmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix}.$$

Si $z = 0$, M est centre d'une quadrique si, et seulement si, $x = a$ et $y = b$.
Si $z \neq 0$, M est centre d'une quadrique si, et seulement si :

$$\det \begin{bmatrix} x - a & -z & 0 \\ y - b & 0 & -z \\ z - c & x & y \end{bmatrix} = z^2(z - c) + zx(x - a) + zy(y - b) = 0,$$

soit $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ (2). L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'égalité (2) est une sphère \mathcal{S} qui contient le point de coordonnées $(a, b, 0)$, seul point du cercle intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $z = 0$ qui soit dans l'ensemble des centres des quadriques $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$.

c) Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ on note $\Omega_{\lambda,\mu}$ le centre de la quadrique $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$. On rappelle l'égalité :

$$P_{\lambda,\mu}(M) = P_{\lambda,\mu}(\Omega_{\lambda,\mu}) + P_{\lambda,\mu\infty}(\overrightarrow{\Omega_{\lambda,\mu}M}).$$

La nature de $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est donc déterminée par la valeur que prend le polynôme $P_{\lambda,\mu}$ en son point critique. La signature de $P_{\lambda,\mu\infty}$ étant $(2, 1)$,

est :

- > 0 , $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est un hyperboloïde à deux nappes,
- $= 0$, $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est un cône du second degré,
- < 0 , $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est un hyperboloïde à une nappe.

Calculons la valeur de :

$$P_{\lambda,\mu}(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - z^2 + 2z(\lambda x + \mu y) + 2cz - a^2 - b^2,$$

en son point critique. Au point critique, on a $x - a = -\lambda z$, $y - b = -\mu z$ et $\lambda x + \mu y = z - c$. On a donc :

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\mu}(\Omega_{\lambda,\mu}) &= \lambda^2 z^2 + \mu^2 z^2 - z^2 + 2z(z - c) + 2cz - a^2 - b^2 = \\ &= (1 + \lambda^2 + \mu^2) z^2 - (a^2 + b^2) = \frac{(\lambda a + \mu b + c)^2}{1 + \lambda^2 + \mu^2} - (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

On trouve :

$$(1 + \lambda^2 + \mu^2) P_{\lambda,\mu}(\Omega_{\lambda,\mu}) = -(b\lambda - a\mu)^2 + 2c(a\lambda + b\mu) + c^2 - a^2 - b^2.$$

L'ensemble des couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ soit un cône du second degré est donc une parabole ; $\mathcal{S}_{\lambda,\mu}$ est un hyperboloïde à une nappe si (λ, μ) est à l'extérieur de cette parabole, et à deux nappes si (λ, μ) est à l'intérieur

Exercice 6 :

On suppose \mathcal{E} euclidien et \mathcal{R} orthonormal. Soit \mathcal{S} l'hyperboloïde à une nappe d'équation dans \mathcal{R} : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (a, b et $c > 0$, $a \neq b$) et \mathcal{C} l'ellipse de \mathcal{S} du plan $z = 0$. Soit Δ la perpendiculaire commune à deux génératrices de \mathcal{S} d'un même système passant par deux points de \mathcal{C} symétriques par rapport au centre Ω de \mathcal{S} (donc de \mathcal{C}). Trouver la surface engendrée par Δ . ■

L'ellipse \mathcal{C} est la trajectoire de l'arc paramétré $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$, $\theta \mapsto f(\theta)$, où pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ est le point de coordonnées $(a \cos \theta, b \sin \theta, 0)$. Le vecteur directeur de l'une des génératrices de l'hyperboloïde \mathcal{S} au point $f(\theta)$ est le vecteur $\vec{v}(\theta)$ de coordonnées $(-a \sin \theta, b \cos \theta, c)$. La génératrice $f(\theta) + \mathbb{R} \vec{v}(\theta)$ sera noté $\mathcal{G}(\theta)$; la famille $(\mathcal{G}(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}}$ est un système de génératrices de l'hyperboloïde \mathcal{S} .

Les génératrices $\mathcal{G}(\theta)$ et $\mathcal{G}(\theta + \pi)$ en des points symétriques par rapport à Ω , sont symétriques par rapport à l'axe $O + \mathbb{R} e_3$; leur pe

commune $\Delta(\theta)$ est donc invariante dans la symétrie d'axe $O + \mathbb{R} e_3$, comme elle n'est pas confondue avec cet axe, elle le coupe orthogonalement en un point $A(\theta)$. Un vecteur directeur de la droite $\Delta(\theta)$ est le vecteur $\vec{u}(\theta) = \vec{v}(\theta) \wedge \vec{v}(\theta + \pi)$; on trouve :

$$\vec{u}(\theta) = 2c(b \cos \theta e_1 + a \sin \theta e_2) .$$

Supposons que le point $P = f(\theta) + \lambda \vec{v}(\theta)$ soit sur $\mathcal{G}(\theta)$ le pied de la perpendiculaire commune. Ce point a pour coordonnées :

$$(a \cos \theta - \lambda a \sin \theta, b \sin \theta + \lambda b \cos \theta, \lambda c) .$$

Le point $A(\theta)$ est donc le point de coordonnées $(0, 0, \lambda c)$ et le vecteur $\overrightarrow{A(\theta)P}$, de coordonnées :

$$(a \cos \theta - \lambda a \sin \theta, b \sin \theta + \lambda b \cos \theta, 0) ,$$

est colinéaire au vecteur $\vec{u}(\theta)$. Nous en déduisons :

$$a(\cos \theta - \lambda \sin \theta) a \sin \theta - b(\sin \theta + \lambda \cos \theta) b \cos \theta = 0 ,$$

soit :

$$\lambda = \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} .$$

Un point M de coordonnées (x, y, z) se trouve sur l'une de ces perpendiculaires communes si, et seulement si, il existe un réel μ et un réel θ tels que $M = A(\theta) + \mu \vec{u}(\theta)$, c'est-à-dire :

$$x = 2c\mu b \cos \theta \quad y = 2c\mu a \sin \theta \quad z = c \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} .$$

Si $(x, y) = (0, 0)$, la condition sur z est qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = c \frac{(a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$; on trouve que cela équivaut à $|z| \leq c \frac{|a^2 - b^2|}{2ab}$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$ la condition s'écrit :

$$z = c \frac{(a^2 - b^2)(x/b)(y/a)}{a^2(y/a)^2 + b^2(x/b)^2} \quad \text{soit} \quad abz(x^2 + y^2) = c(a^2 - b^2)xy .$$

La surface réglée cherchée est un conoïde de Plücker, d'équation :

$$z(x^2 + y^2) - \rho xy = 0 ,$$

où $\rho = \frac{c(a^2 - b^2)}{ab} \neq 0$.

Exercice 9 :

On suppose \mathcal{E} euclidien.

a) Montrer que le lieu des points équidistants de deux droites données non coplanaires est un paraboloïde hyperbolique équilatère.

b) Soit \mathcal{S} un paraboloïde hyperbolique équilatère. Montrer qu'il y a une infinité de couples de droites non coplanaires tels que \mathcal{S} soit le lieu des points équidistants de ces deux droites. Etudier la surface réglée engendrée par ces couples de droites. ■

a) Soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites non coplanaires. Notons Δ leur perpendiculaire commune, O le milieu des points d'intersection de Δ avec \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Introduisons aussi le plan Π qui passe par O et qui est orthogonal à Δ et $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ les projections orthogonales de \mathcal{D}_1 et de \mathcal{D}_2 sur le plan Π . Les droites \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}'_2 se coupent en O , et ont deux bissectrices orthogonales, dirigées par les vecteurs unitaires e_1 et e_2 . Soit e_3 un vecteur directeur unitaire de Δ , et \mathcal{R} le repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$. Il existe un réel $h \neq 0$ et un réel $\alpha \in]0, \pi/2[$ tels que, dans \mathcal{R} , \mathcal{D}_1 soit la droite d'équations $z = h, \cos \alpha y - \sin \alpha x = 0$ et \mathcal{D}_2 la droite d'équations $z = -h, \cos \alpha y + \sin \alpha x = 0$. On peut choisir e_3 de telle sorte que $h > 0$. Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 étant intersections de plans orthogonaux, il est simple de calculer le carré de la distance d'un point à l'une de ces droites. Le point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) est équidistant des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 si, et seulement si :

$$(\cos \alpha y - \sin \alpha x)^2 + (z - h)^2 = (\cos \alpha y + \sin \alpha x)^2 + (z + h)^2 ,$$

soit :

$$\cos \alpha \sin \alpha x y + h z = 0 ,$$

ou encore :

$$\frac{(x - y)^2}{2} - \frac{(x + y)^2}{2} - \frac{2h}{\cos \alpha \sin \alpha} z = 0 .$$

Comme $\left(\frac{x - y}{\sqrt{2}}, \frac{x + y}{\sqrt{2}}, z \right)$ sont les coordonnées de M dans un repère orthonormal, on en déduit que l'ensemble cherché est un paraboloïde hyperbolique équilatère, donc le paramètre est : $p = \frac{h}{\cos \alpha \sin \alpha}$.

b) Supposons que \mathcal{S} soit un paraboloïde hyperbolique équilatère dont l'équation dans un certain repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ soit :

$$x y + p z = 0 ,$$

où $p > 0$. Le sommet de \mathcal{S} est O , la direction à l'infini singulière est $\mathbb{R}e_3$, les directions propres non singulières sont $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$. Si \mathcal{S} est l'hyperboloïde équilatère déterminé par le couple de deux droites non coplanaires $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, alors son axe $O + \mathbb{R}e_3$ est la perpendiculaire commune de ces droites, son sommet O est le milieu de l'intersection de la perpendiculaire commune avec les droites, les droites passant par le sommet et dirigées par les directions propres non singulières sont les bissectrices des droites \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}'_2 (cf. a)), elles engendrent le plan Π . Il existe donc un réel $h \neq 0$ et un réel $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus \{0\}$ tels que la droite \mathcal{D}_1 soit la droite d'équations $z = h$, $\cos \alpha y - \sin \alpha x = 0$, et tels que la droite \mathcal{D}_2 soit la droite d'équations $z = -h$, $\cos \alpha y + \sin \alpha x = 0$. Le paraboloid hyperbolique équilatère engendré par les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 a alors pour équation :

$$xy + \frac{h}{\cos \alpha \sin \alpha} z = 0.$$

Il coïncide avec \mathcal{S} si, et seulement si : $h = p \cos \alpha \sin \alpha$. La droite \mathcal{D}_1 est la droite passant par le point $A(\alpha) = O + p \cos \alpha \sin \alpha e_3$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(\alpha) = \cos \alpha e_1 + \sin \alpha e_2$; la droite \mathcal{D}_2 est la droite passant par le point $O + (-p \cos \alpha \sin \alpha) = A(-\alpha)$ et dirigée par le vecteur $\cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_2 = \vec{v}(-\alpha)$.

Les différentes droites obtenues appartiennent à la surface réglée \mathcal{S}_1 engendrée par la famille de droites $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$, où pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{G}_\alpha = A(\alpha) + \mathbb{R}\vec{v}(\alpha)$. Le point $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} appartient à \mathcal{S}_1 si, et seulement si :

$$\exists (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \quad x = \lambda \cos \alpha, \quad y = \lambda \sin \alpha, \quad z = p \cos \alpha \sin \alpha.$$

La surface \mathcal{S}_1 est incluse dans la surface \mathcal{S}_2 d'équation :

$$(1) \quad z(x^2 + y^2) = pxy,$$

qui contient la droite D d'équations $x = 0, y = 0$. Soit $M \in \mathcal{S}_2$ de coordonnées (x, y, z) ; si $M \notin D$ alors $M \in \mathcal{S}_1$; si $M \in D$, alors $M \in \mathcal{S}_1$ si, et seulement si $|z| \leq p/2$. L'ensemble $\mathcal{S}_2 \setminus \mathcal{S}_1$ est donc inclus dans la droite D et, dans cette droite, c'est l'ensemble des points dont la troisième coordonnée appartient à l'ensemble $] -\infty, p/2[\cup]p/2, +\infty[$.

Remarquons que la surface réglée \mathcal{S}_2 est un conoïde de Plücker.

§ XII.4 QUADRIQUES EN GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Exercice 2 :

|| Soit \mathcal{S} un paraboloid de \mathcal{E} .

- a) Si \mathcal{S} est elliptique et de révolution, d'axe de révolution \mathcal{D} , $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est le groupe des rotations d'axe \mathcal{D} et $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est le groupe engendré par les réflexions autour des plans méridiens.
- b) Si \mathcal{S} est hyperbolique équilatère, $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est isomorphe au groupe du carré, et $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- c) Si \mathcal{S} est elliptique et non de révolution, ou hyperbolique et non équilatère, $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On précisera $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$. ■

Soit \mathcal{S} un paraboloïde d'équation $x^2 + k y^2 - 2 p z = 0$, où $k \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $p > 0$, dans le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ de \mathcal{E} . Le point O est le sommet du paraboloïde. On note f le polynôme tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} , on ait :

$$f(M) = x^2 + k y^2 - 2 p z .$$

Soit φ une isométrie de \mathcal{E} ; $\varphi \in \mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ si, et seulement si $\varphi^{-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$; comme $\varphi^{-1}(\mathcal{S}) = (f \circ \varphi)^{-1}(0)$ et que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$, d'après le Théorème XII.2.1, cette condition est réalisée si, et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \quad f \circ \varphi = \lambda f .$$

Supposons cette condition réalisée ; on sait qu'alors $f_\infty \circ \vec{\varphi} = \lambda f_\infty$; nous en déduisons que l'espace singulier de la forme quadratique f_∞ , qui est $\mathbb{R} e_3$, est stable par $\vec{\varphi}$; comme $\vec{\varphi}$ est une isométrie vectorielle, cela implique $\vec{\varphi}(e_3) = \varepsilon e_3$, où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, on a :

$$d_{\varphi(O)} f(\vec{\varphi}(\vec{u})) = d_O(f \circ \varphi)(\vec{u}) = \lambda d_O f(\vec{u}) = 0 .$$

Nous en déduisons :

$$\left(\text{grad}_{\varphi(O)} f \mid \vec{\varphi}(\vec{u}) \right) = \lambda \left(\text{grad}_O f \mid \vec{u} \right) ,$$

d'où puisque $\vec{\varphi}$ est une isométrie :

$$\left(\vec{\varphi}^{-1} \left(\text{grad}_{\varphi(O)} f \right) \mid \vec{u} \right) = \lambda \left(\text{grad}_O f \mid \vec{u} \right) .$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$, nous en déduisons :

$$\vec{\varphi}^{-1} \left(\text{grad}_{\varphi(O)} f \right) = \lambda \text{grad}_O f \quad \text{d'où} \quad \text{grad}_{\varphi(O)} f = \lambda \vec{\varphi}(\text{grad}_O f) .$$

Nous en déduisons enfin :

$$\text{grad}_{\varphi(O)} f = -2 p \lambda \vec{\varphi}(e_3) = -2 p \lambda \varepsilon e_3 .$$

Au point $\varphi(O)$ le plan tangent à \mathcal{S} est orthogonal à la direction singulière à l'infini ; le point $\varphi(O)$ est donc le sommet de \mathcal{S} , c'est-à-dire $\varphi(O) = O$. En conséquence :

$$\text{grad}_{\varphi(O)} f = -2p\lambda\varepsilon e_3 = \text{grad}_O f = -2p e_3 \quad \text{d'où} \quad \lambda = \varepsilon.$$

Inversement, supposons que φ soit une isométrie de \mathcal{E} telle que $\varphi(O) = O$, $\vec{\varphi}(e_3) = \varepsilon e_3$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, et $f_\infty \circ \vec{\varphi} = \varepsilon f_\infty$. Pour tout $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ on a :

$$\begin{aligned} d_O f(\vec{\varphi}(\vec{v})) &= -2p (\vec{\varphi}(\vec{v}) | e_3) = -2p (\vec{v} | \vec{\varphi}^{-1}(e_3)) = \\ &= -2\varepsilon p (\vec{v} | e_3) = \varepsilon d_O f(\vec{v}), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f(\varphi(O + \vec{v})) &= f(O + \vec{\varphi}(\vec{v})) = d_O f(\vec{\varphi}(\vec{v})) + f_\infty(\vec{\varphi}(\vec{v})) = \\ &= \varepsilon d_O f(\vec{v}) + \varepsilon f_\infty(\vec{v}) = \varepsilon f(O + \vec{v}). \end{aligned}$$

L'isométrie φ est donc un élément du groupe $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$. Remarquons enfin que si φ est une isométrie de \mathcal{E} telle que $\varphi(O) = O$ et $\vec{\varphi}(e_3) = \varepsilon e_3$, alors $(\mathbb{R}e_3)^\perp$ est stable par $\vec{\varphi}$ et $f_\infty \circ \vec{\varphi} = \varepsilon f_\infty$ si, et seulement si, cette égalité est vraie sur $(\mathbb{R}e_3)^\perp$, sous espace sur lequel f_∞ est non dégénérée. Appliquons cette caractérisation des éléments de $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ dans les différents cas.

a) On suppose \mathcal{S} elliptique et de révolution. Soit φ une isométrie de \mathcal{E} telle que $\vec{\varphi}(\mathbb{R}e_3) = \mathbb{R}e_3$. La restriction de f_∞ à $(\mathbb{R}e_3)^\perp$ est le carré scalaire dans ce sous-espace euclidien ; on ne peut donc avoir sur $(\mathbb{R}e_3)^\perp$ l'égalité $f_\infty \circ \vec{\varphi} = -f_\infty$, et on a l'égalité $f_\infty \circ \vec{\varphi} = f_\infty$. Une isométrie φ est donc élément de $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ si, et seulement si : $\varphi(O) = O$ et $\vec{\varphi}(e_3) = e_3$. Les isométries directes éléments de ce groupe sont les rotations d'axe $\mathcal{D} = O + \mathbb{R}e_3$ et les isométries indirectes sont les symétries par rapport aux plans contenant \mathcal{D} .

b) La restriction à $(\mathbb{R}e_3)^\perp$ de f_∞ est ici la forme quadratique dont l'expression analytique dans (e_1, e_2) est $x^2 - y^2$. L'isométrie φ est dans le groupe $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ si, et seulement si, $\varphi(O) = O$, $f_\infty \circ \vec{\varphi} = f_\infty$ et $\vec{\varphi}(e_3) = e_3$ ou $f_\infty \circ \vec{\varphi} = -f_\infty$ et $\vec{\varphi}(e_3) = -e_3$. La réunion des droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$, qui est le cône isotrope de la restriction de f_∞ à $(\mathbb{R}e_3)^\perp$, est stable par $\vec{\varphi}$. On voit que nécessairement la matrice de $\vec{\varphi}$ dans la base (e_1, e_2, e_3) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$. Inversement, on vérifie facilement que les 8 isométries affines obtenues ainsi sont des éléments de $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$. Si

on voit que l'ensemble $E = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2\}$ est stable par $\vec{\varphi}$ et que l'application $\vec{\varphi} \mapsto \vec{\varphi}|_E^E$ est un homomorphisme injectif de groupes, $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle} \rightarrow \mathfrak{S}(E)$. Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$, qui a 8 éléments, est donc isomorphe au groupe du carré. Le groupe $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ a 4 éléments, correspondant aux matrices :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\varepsilon \in \{-1, 1\}).$$

Ces éléments étant tous de carré $\text{Id}_{\mathbb{E}}$, le groupe $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

c) La restriction à $(\mathbb{R}e_3)^\perp$ de f_∞ est ici la forme quadratique dont l'expression analytique dans (e_1, e_2) est $x^2 + ky^2$, où $|k| < 1$, $k \neq 0$. On remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, on a $|x^2 + ky^2| < 1$, sauf si $y = 0$. Si $\varphi \in \mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$, alors $|f_\infty(\vec{\varphi}(e_1))| = |f_\infty(e_1)| = 1$, donc $\vec{\varphi}(e_1) = \varepsilon_1 e_1$ où $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$. Les droites $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_3$, et par conséquent $\mathbb{R}e_2$, sont donc nécessairement stables par $\vec{\varphi}$. On voit alors facilement que les éléments de $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ sont les isométries affines telles que $\varphi(O) = O$ et telles que la matrice de $\vec{\varphi}$ dans la base (e_1, e_2, e_3) soit de la forme $\text{Diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1)$, où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$. Le groupe $\mathbf{Is}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ est donc isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, et le groupe $\mathbf{Dep}_{\langle \mathcal{S} \rangle}$ isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3 :

|| Trouver les normales à un ellipsoïde \mathcal{S} de \mathcal{E} qui s'éloignent le plus du centre Ω de \mathcal{S} (Mannheim). ■

Soit \mathcal{S} l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$ de \mathcal{E} . On suppose $0 < c \leq b \leq a$, en excluant le cas $a = b = c$.

La normale au point $M \in \mathcal{S}$ de coordonnées (x, y, z) est la droite dirigée par le vecteur \vec{v} de coordonnées $(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ le carré de la distance du point $M + \lambda \vec{v}$ à l'origine est :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \left(x + \lambda \frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(y + \lambda \frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(z + \lambda \frac{z}{c^2}\right)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda + \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) \lambda^2. \end{aligned}$$

Le carré de la distance de O à la normale en M est la valeur minimum de ce polynôme du second degré, c'est-à-dire :

$$\Phi(M) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

Le triplet des dérivées partielles de cette fonction en M est :

$$2 \left(x \left(1 + \frac{1/a^4}{S^2} \right), y \left(1 + \frac{1/b^4}{S^2} \right), z \left(1 + \frac{1/c^4}{S^2} \right) \right),$$

où $S = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$. En un point $M \in \mathcal{S}$ en lequel le maximum de Φ est atteint, ce triplet est nécessairement colinéaire au triplet des coordonnées du vecteur normal, c'est-à-dire $2(x/a^2, y/b^2, z/c^2)$. Supposons que ce maximum soit atteint en un point pour lequel $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$. On doit alors avoir :

$$a^2 + \frac{1/a^2}{S^2} = b^2 + \frac{1/b^2}{S^2} = c^2 + \frac{1/c^2}{S^2},$$

ce qui équivaut aux conditions :

$$(a^2 - b^2)(a^2 b^2 S^2 - 1) = 0$$

$$(b^2 - c^2)(b^2 c^2 S^2 - 1) = 0$$

$$(c^2 - a^2)(c^2 a^2 S^2 - 1) = 0.$$

Si $c < b < a$, ces conditions sont incompatibles.

Supposons $c < b < a$. La valeur maximum de Φ ne peut être atteinte qu'en un point de l'une des ellipses intersections de \mathcal{S} avec les plans de coordonnées. Ces ellipses ont pour équations :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

D'après les résultats de l'exercice 2 du § X.4, les valeurs maximum de Φ sur ces ellipses sont respectivement $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2ab}}$, $\frac{a^2 - c^2}{\sqrt{2ac}}$, $\frac{b^2 - c^2}{\sqrt{2bc}}$. Il est clair que comme $0 < c < b < a$:

$$\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2ab}} < \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{2ac}} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{2bc}} < \frac{a^2 - c^2}{\sqrt{2ac}}.$$

La distance maximum du centre à une normale est donc $\frac{a^2 - c^2}{\sqrt{2ac}}$, distance atteinte pour les normales en les 4 points de coordonnées (cf. § X.4 exercice 2) :

$$(a \cos \theta, 0, c \sin \theta) \quad \text{où} \quad |\operatorname{tg} \theta| = \frac{c}{a}.$$

Supposons $c = b < a$. L'ellipsoïde est alors un ellipsoïde de révolution autour de la droite $O + \mathbb{R}e_1$. On peut donc ramener le probl

de la distance de l'origine à une normale de l'ellipse intersection de \mathcal{S} avec le plan d'équation $z = 0$ par exemple. La valeur maximum de la distance de l'origine à une normale est donc $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2ab}}$, cette distance étant atteinte pour les normales en les points des deux cercles d'axe $O + \mathbb{R}e_1$ qui passent par les points de coordonnées $(a \cos \theta, b \sin \theta, 0)$ où $|\operatorname{tg} \theta| = b/a$.

Supposons $c < b = a$. L'ellipsoïde est alors un ellipsoïde de révolution autour de la droite $O + \mathbb{R}e_3$. On peut ramener le problème à l'étude de la distance de l'origine à une normale de l'ellipse intersection de \mathcal{S} avec le plan d'équation $y = 0$ par exemple. La valeur maximum de la distance de l'origine à une normale est donc $\frac{a^2 - c^2}{\sqrt{2ac}}$, cette distance étant atteinte pour les normales en les points des deux cercles d'axe $O + \mathbb{R}e_3$ qui passent par les points de coordonnées $(a \cos \theta, 0, c \sin \theta)$ où $|\operatorname{tg} \theta| = c/a$.

Exercice 9 :

Soit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ réels > 0 tels que $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1$. On donne un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; e_1, e_2, e_3)$ et les surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 d'équations respectives dans \mathcal{R} : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ et $\frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2} - 1 = 0$. Montrer que \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont tangentes en 8 points, et que les plans tangents en ces 8 points forment un polyèdre convexe de volume $\frac{4}{3} \frac{(abc)^{3/2}}{(\alpha\beta\gamma)^{1/2}}$. ■

Soit M de coordonnées (x, y, z) un point où les surfaces \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont tangentes. Les vecteurs normaux en M à \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont nécessairement colinéaires. Cette condition s'écrit :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \frac{x}{a^2} = \lambda \frac{\alpha^2}{x^3} \\ \frac{y}{b^2} = \lambda \frac{\beta^2}{y^3} \\ \frac{z}{c^2} = \lambda \frac{\gamma^2}{z^3} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \lambda \frac{\alpha^2}{x^2} \\ \frac{y^2}{b^2} = \lambda \frac{\beta^2}{y^2} \\ \frac{z^2}{c^2} = \lambda \frac{\gamma^2}{z^2} \end{cases}$$

En additionnant les trois équations, on voit que nécessairement $\lambda = 1$. Nous en déduisons que les coordonnées de M sont nécessairement de la forme :

$$(x, y, z) = \left(\varepsilon_1 \sqrt{a\alpha}, \varepsilon_2 \sqrt{b\beta}, \varepsilon_3 \sqrt{c\gamma} \right),$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$. Réciproquement, pour chacun des ces 8 points possibles, on a :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1 .$$

Ce sont donc des points de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ et, d'après l'étude de la condition nécessaire, les plans tangents à \mathcal{S}_1 et à \mathcal{S}_2 en ces points sont confondus. Pour alléger les notations nous poserons $u = \sqrt{a\alpha}$, $v = \sqrt{b\beta}$ et $w = \sqrt{c\gamma}$.

Pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$, le plan tangent commun au point de coordonnées $(\varepsilon_1 u, \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 w)$ a pour équation :

$$\frac{\varepsilon_1 u}{a^2} (x - \varepsilon_1 u) + \frac{\varepsilon_2 v}{b^2} (y - \varepsilon_2 v) + \frac{\varepsilon_3 w}{c^2} (z - \varepsilon_3 w) = 0 .$$

Cette équation s'écrit :

$$\frac{\varepsilon_1 u}{a^2} x + \frac{\varepsilon_2 v}{b^2} y + \frac{\varepsilon_3 w}{c^2} z = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 1 .$$

L'intersection des 8 demi-espaces contenant l'origine et déterminés par ces 8 plans, est une partie convexe non vide \mathcal{C} qui est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient les inégalités :

$$(1) \quad \forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3 \quad \frac{\varepsilon_1 u}{a^2} x + \frac{\varepsilon_2 v}{b^2} y + \frac{\varepsilon_3 w}{c^2} z \leq 1 .$$

Pour z fixé, (x, y, z) vérifie (1) si, et seulement si :

$$\left| \frac{u}{a^2} x + \frac{v}{b^2} y \right| \leq 1 - \left| \frac{w}{c^2} z \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{u}{a^2} x - \frac{v}{b^2} y \right| \leq 1 - \left| \frac{w}{c^2} z \right| .$$

Si $|z| > \frac{c^2}{w}$ la section est vide, sinon c'est un losange. On voit que \mathcal{C} est un octaèdre réunion de deux cônes de base losange. La hauteur de chacun des cônes est $\frac{c^2}{w}$; la surface de leur base commune est $2 \frac{a^2 b^2}{u v}$. Le volume de l'octaèdre est donc :

$$V = 2 \frac{1}{3} \frac{c^2}{w} \frac{2 a^2 b^2}{u v} = \frac{4}{3} \frac{a^2 b^2 c^2}{u v w} = \frac{4}{3} \frac{(a b c)^{3/2}}{(\alpha \beta \gamma)^{1/2}} .$$

Exercice 12 :

|| Soit \mathcal{S} un ellipsoïde et trois cylindres circonscrits à \mathcal{S} (cf. Exercice 8 du § XII.3) dont les directions de génératri

|| à deux orthogonales. Montrer que la somme des carrés des aires des sections droites de ces cylindres est constante. ■

Notons O le centre de \mathcal{S} . Il existe une forme quadratique définie positive q telle que $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{E} \mid q(\overrightarrow{OM}) = 0\}$. Soit \mathcal{B} une base orthonormale et \mathcal{R} le repère orthonormal (O, \mathcal{B}) . On note A la matrice de la forme quadratique q dans la base \mathcal{B} . Pour tout $M \in \mathcal{E}$ de matrice colonne X on a : $q(M) = {}^t X A X$. Soit $M_0 \in \mathcal{S}$ et X_0 la matrice colonne de ses coordonnées dans \mathcal{R} . La forme linéaire $d_{M_0} q$ est l'application linéaire $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$ qui, au vecteur de matrice colonne X , fait correspondre le scalaire $2 {}^t X_0 A X$; on peut donc associer à cette forme linéaire la matrice ligne $2 {}^t X_0 A$. Le point M de matrice colonne X est dans le plan tangent à \mathcal{S} en M_0 si, et seulement si :

$${}^t X_0 A (X - X_0) = 0 \quad \text{soit} \quad {}^t X_0 A X = 1.$$

On obtient ainsi l'équation normalisée du plan tangent en M_0 , c'est-à-dire la forme affine qui est nulle sur le plan tangent en M_0 et dont la valeur en O est 1. L'équation normalisée du plan tangent en M de matrice colonne X est représentée par la matrice ligne $L = {}^t X A$; on remarque que comme A est régulière, l'application $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, $X \mapsto {}^t X A$ est linéaire bijective. L'ellipsoïde \mathcal{S} étant l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de matrice colonne X telle que ${}^t X A X = 1$, l'ensemble des équations normalisées des plans tangents à \mathcal{S} est l'ensemble des fonctions affines représentées par une matrice ligne L vérifiant la condition $L A^{-1} {}^t L = 1$.

Posons :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{bmatrix},$$

où (a, b, c, d, e, f) et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi)$ sont éléments de \mathbb{R}^6 . Les plans tangents parallèles à la direction $\mathbb{R} e_3$ sont les plans d'équations normalisées de la forme $u x + v y = 1$ où :

$$[u \quad v \quad 0] B \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{soit} \quad [u \quad v] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1.$$

Les intersections de ces plans avec le plan d'équation $z = 0$ sont les tangentes de l'ellipse projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ du contour apparent dans la direction $\mathbb{R} e_3$. On obtient donc ainsi une équation tangentielle de cette ellipse. Le point M de coordonnées $(x, y, 0)$ appartient à cette ellipse si, et seulement si :

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1.$$

La surface d'une ellipse d'équation réduite ${}^tX A_1 X = 1$ est $S = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A_1)}}$.

Si S est la surface de l'ellipse obtenue, on a donc :

$$S^2 = \pi^2 \det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}.$$

Mais ce déterminant est le cofacteur d'indices $(3, 3)$ dans la matrice A^{-1} , d'inverse A . On a donc l'égalité : $S^2 = \pi^2 f \det A$. Nous en déduisons en généralisant le résultat suivant :

Soit \vec{v} un vecteur unitaire ; on note $S(\vec{v})$ la surface de la projection orthogonale sur un plan orthogonal à \vec{v} du contour apparent de \mathcal{S} dans la direction $\mathbb{R} \vec{v}$; on a :

$$S^2(\vec{v}) = \pi^2 q(\vec{v}) \text{ Discr } q.$$

Nous en déduisons que si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale :

$$S^2(\vec{u}) + S^2(\vec{v}) + S^2(\vec{w}) = \pi^2 (q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + q(\vec{w})) \text{ Discr } (q) = \pi^2 \text{Tr}(u) \det(u),$$

où u désigne l'endomorphisme symétrique associé à la forme quadratique q .

La somme des carrés des aires des sections droites de trois cylindres circonscrits à \mathcal{S} , dont les directions de génératrices sont deux à deux orthogonales, est donc constante, égale à :

$$\pi^2 \text{Tr}(u) \det(u).$$

Exercice 18 (*Ellipsoïde de Steiner*) :

|| Montrer qu'il existe un ellipsoïde tangent à chacune des faces d'un tétraèdre donné au centre de gravité de cette face. Quel est le centre de cet ellipsoïde ? ■

Soient (A, B, C, D) les centres de gravité des faces du tétraèdre. L'application qui à $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x + y + z + t = 1$ fait correspondre le point de coordonnées barycentriques (x, y, z, t) dans la base affine (A, B, C, D) est un isomorphisme affine entre l'hyperplan affine H d'équation $x + y + z + t = 1$ dans \mathbb{R}^4 , et l'espace affine \mathcal{E} . Nous pouvons donc supposer que le problème est posé dans l'hyperplan affine H .

Soit \mathcal{S} une quadrique non dégénérée sur H ; il existe une forme quadratique q non dégénérée sur \mathbb{R}^4 telle que $\mathcal{S} = q^{-1}(0) \cap H$. La quadrique \mathcal{S} est l'intersection avec H du cône isotrope $q^{-1}(0)$. Si $M_0 \in \mathcal{S}$, le

en M_0 à \mathcal{S} est l'intersection avec H de l'hyperplan tangent au cône $q^{-1}(0)$. Notons Q la matrice de q dans la base canonique de \mathbb{R}^4 . La différentielle de q en M_0 , de matrice colonne X_0 , est la forme linéaire qui à un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ de matrice colonne U , fait correspondre $2 {}^t X_0 Q U$; le vecteur ligne associé à cette forme linéaire est donc $2 {}^t X_0 Q$. L'hyperplan tangent en M_0 à $q^{-1}(0)$ est l'hyperplan d'équation ${}^t X_0 A (X - X_0) = 0$, soit ${}^t X_0 A X = 0$; cet hyperplan passe par O , ses équations sont les équations barycentriques du plan tangent en M_0 à \mathcal{S} . La face du tétraèdre dont le centre de gravité est A est porté par le plan d'équation barycentrique $x = 1$, soit encore $y + z + t = 0$. Les coordonnées barycentriques de A étant $(1, 0, 0, 0)$, la quadrique \mathcal{S} admet ce plan comme plan tangent en A si, et seulement si la matrice ligne $[1, 0, 0, 0] Q$ est colinéaire à la matrice ligne $[0, 1, 1, 1]$. En utilisant la même méthode en B, C et D , on voit que la quadrique \mathcal{S} admet en A, B, C, D les plans des faces du tétraèdre comme plans tangents si, et seulement si, la matrice Q est de la forme :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & a & a & a \\ b & 0 & b & b \\ c & c & 0 & c \\ d & d & d & 0 \end{bmatrix},$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Mais comme elle est aussi nécessairement symétrique et inversible, on voit que la quadrique \mathcal{S} vérifie les conditions de l'énoncé si, et seulement si, la matrice Q est de la forme $\lambda(J_4 - I_4)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et où J_4 est la matrice élément de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Il existe donc une et une seule quadrique vérifiant les conditions de l'énoncé. Une équation en coordonnées barycentriques de la quadrique est :

$$(x + y + z + t)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 0,$$

ou encore, de manière non homogène :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Soit $(\varphi_i)_{i \in [1, 4]}$ la famille des fonctions affines coordonnées dans la base affine (A, B, C, D) , et Φ le polynôme du second degré tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\Phi(M) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^2(M) - 1.$$

D'après ce qui précède, $\mathcal{S} = \Phi^{-1}(0)$. Soit G l'isobarycentre des points (A, B, C, D) ; pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \sum_{i=1}^4 \left(\varphi_i(G) + \vec{\varphi}_i(\overrightarrow{GM}) \right)^2 - 1 = \\ &= \Phi(G) + 2 \sum_{i=1}^4 \varphi_i(G) \vec{\varphi}_i(\overrightarrow{GM}) + \sum_{i=1}^4 \vec{\varphi}_i^2(\overrightarrow{GM}) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{i=1}^4 \vec{\varphi}_i = 0$, et que, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $\varphi_i(G) = 1/4$, on voit que pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$\Phi(M) = \Phi(G) + \sum_{i=1}^4 \vec{\varphi}_i^2(\overrightarrow{GM}) .$$

L'application $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{v} \mapsto \sum_{i=1}^4 \vec{\varphi}_i^2(\vec{v})$, est la forme à l'infini de Φ , c'est-à-dire la forme quadratique Φ_∞ . Cette forme quadratique est évidemment positive, et comme trois quelconques des formes linéaires $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\varphi}_3, \vec{\varphi}_4$ forment une base de $\vec{\mathcal{E}}$, elle est définie positive. La quadrique \mathcal{S} est donc un ellipsoïde ($\neq \emptyset$ bien sûr) de centre l'isobarycentre des points (A, B, C, D) , qui est aussi l'isobarycentre du tétraèdre.

§ XII.5 QUELQUES PROBLÈMES CLASSIQUES SUR LES QUADRIQUES

Exercice 1 :

|| Lieu des centres des hyperboles *équilatères* tracées sur un hyperboloïde donné de \mathcal{E} . ■

L'hyperboloïde sera noté \mathcal{S} , son centre sera noté O . Soit q la forme quadratique telle que \mathcal{S} soit l'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que $q(\overrightarrow{OM}) = 1$. L'endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{E}}$ associé à q sera noté u .

Soit P un plan affine ; il existe un vecteur unitaire \vec{k} et un scalaire h tels que P soit l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $(\overrightarrow{OM} | \vec{k}) = h$; on choisit deux vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} tels que $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base orthonormale. Notons A la matrice de q (et de u) dans la base \mathcal{B} ; on pose :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} ,$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$. La matrice A est régulière puisque \mathcal{S} est un hyperboloïde. L'intersection de \mathcal{S} et de P est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y, h) dans le repère $(O; \mathcal{B})$ vérifient l'égalité :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxh + 2eyh + fh^2 = 1 .$$

L'ensemble $\mathcal{S} \cap P$ est donc une hyperbole équilatère (éventuellement dégénérée) si, et seulement si, $a + c = 0$, soit si, et seulement si $\text{Tr } u = f$, soit enfin si, et seulement si, $\text{Tr } u = q(\vec{k})$. On voit donc qu'un plan orthogonal à un vecteur unitaire \vec{k} coupe \mathcal{S} suivant une hyperbole équilatère si, et seulement si $\text{Tr } u = q(\vec{k})$ (cela ne dépend donc que de la direction du plan).

Reprenons les notations précédentes, en supposant que le plan P coupe \mathcal{S} suivant une hyperbole équilatère. Le centre de cette hyperbole équilatère est le point M dont les coordonnées (x, y, h) vérifient les égalités :

$$\begin{cases} ax + by + dh = 0 \\ bx + cy + eh = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de Cramer de déterminant $ac - b^2 = -(a^2 + b^2) < 0$ (le cas $a = b = c = 0$ est exclu puisque A est régulière). On trouve :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = \frac{h}{ac - b^2} \begin{bmatrix} be - cd \\ bd - ae \end{bmatrix} \quad \text{d'où :} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix} = \frac{h}{ac - b^2} \cdot \begin{bmatrix} be - cd \\ bd - ae \\ ac - b^2 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur unitaire \vec{k} tel que $\text{Tr } u = q(\vec{k})$ étant fixé, l'ensemble des centres des hyperboles équilatères intersections avec \mathcal{S} des plans orthogonaux à \vec{k} , est une droite passant par O . On remarque que le vecteur colonne apparaissant ci-dessus est le troisième vecteur colonne de la comatrice de A . Cette droite est donc dirigée par le vecteur $u^{-1}(\vec{k})$. L'ensemble \mathcal{C} des centres des hyperboles équilatères tracées sur \mathcal{S} est donc la réunion des droites passant par O et dirigées par un vecteur de la forme $u^{-1}(\vec{k})$, où \vec{k} est un vecteur non nul tel que $\text{Tr } u \times \|\vec{k}\|^2 = q(\vec{k})$. Nous en déduisons que le point M est dans le cône \mathcal{C} si, et seulement si :

$$\text{Tr } u \times \|u(\overrightarrow{OM})\|^2 = q(u(\overrightarrow{OM})).$$

Remarquons que si \mathcal{C} ne contient aucun point $\neq O$, \mathcal{C} est vide.

Supposons que pour tout M de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on ait :

$$q(M) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad ((\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{*3}).$$

Le point M est dans le cône \mathcal{C} si, et seulement si :

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) = \alpha^3 x^2 + \beta^3 y^2 + \gamma^3 z^2,$$

soit encore :

$$\alpha^2(\beta + \gamma)x^2 + \beta^2(\alpha + \gamma)y^2 + \gamma^2(\alpha + \beta)z^2 = 0.$$

Dans le cas où \mathcal{S} est un hyperboloïde à une nappe, on peut poser :

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \quad \beta = \frac{1}{b^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{c^2} \quad (0 < b \leq a, 0 < c).$$

Une équation de \mathcal{C} est :

$$\frac{1}{a^4} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) x^2 + \frac{1}{b^4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) y^2 + \frac{1}{c^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) z^2 = 0.$$

Si $c > a$, il n'y a pas d'hyperboles équilatères tracées sur \mathcal{S} ; si $c \leq a$, \mathcal{C} est un cône du second degré, éventuellement dégénéré.

Dans le cas où \mathcal{S} est un hyperboloïde à deux nappes, on peut poser :

$$\alpha = -\frac{1}{a^2}, \quad \beta = -\frac{1}{b^2}, \quad \gamma = \frac{1}{c^2} \quad (0 < b \leq a, 0 < c).$$

Une équation de \mathcal{C} est :

$$\frac{1}{a^4} \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) x^2 + \frac{1}{b^4} \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) y^2 - \frac{1}{c^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) z^2 = 0.$$

Si $c > a$, il n'y a pas d'hyperboles équilatères tracées sur \mathcal{S} ; si $c \leq a$, \mathcal{C} est un cône du second degré, éventuellement dégénéré.

Exercice 3 :

a) Une *section plane* d'une quadrique \mathcal{S} à centre, de centre Ω , est dite *principale* ssi c'est l'intersection de \mathcal{S} avec un plan passant par Ω et orthogonal à une direction principale. Etudier les sections principales en discutant suivant \mathcal{S} .

b) On suppose que \mathcal{S} est un cône du second degré *non de révolution*. Vérifier qu'il y a exactement *deux* sections principales formées de deux génératrices de \mathcal{S} sécantes.

c) Un cône du second degré non de révolution \mathcal{S} est appelé *cône de Hachette* ssi ses directions de plans cycliques sont les orthogonales des deux génératrices d'une section principale de \mathcal{S} (laquelle ?).

Soit g un élément de \mathcal{P}_2 définissant un cône du second degré \mathcal{S} , et soit v l'opérateur associé à g_∞ . On note $\chi_v(X) = -X^2 + TX^2 - \Theta X + \Delta$. Prouver que \mathcal{S} est de Hachette ssi $T^3 - 4\Theta T + 8\Delta = 0$. ■

a) Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$, u l'opérateur symétrique associé à f_∞ et $\mathcal{R} = (\Omega; e_1, e_2, e_3)$ un repère orthonormal tel que la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit diagonale, de la forme $\text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{*3}$.

Si α, β, γ sont distincts, les directions propres de u sont les droites $\mathbb{R}e_1$, $\mathbb{R}e_2$ et $\mathbb{R}e_3$. Les sections principales de \mathcal{S} sont les intersections avec les plans de coordonnées.

Supposons que \mathcal{S} soit un cône du second degré. Dans ce cas $f(\Omega) = 0$, et on peut supposer $\gamma < 0 < \beta < \alpha$. Les intersections avec les plans d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont des réunions de deux droites distinctes. L'intersection avec le plan d'équation $z = 0$ est réduite au centre.

Supposons que \mathcal{S} soit un ellipsoïde. On peut alors supposer $f(\Omega) = -1$ et $0 < \gamma < \beta < \alpha$. Les 3 sections principales sont des ellipses.

Supposons que \mathcal{S} soit un hyperboloïde à une nappe. On peut alors supposer $f(\Omega) = -1$ et $\gamma < 0 < \beta < \alpha$. Les sections principales dans les plans d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont des hyperboles; la section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est une ellipse.

Supposons que \mathcal{S} soit un hyperboloïde à deux nappes. On peut alors supposer $f(\Omega) = 1$ et $\gamma < 0 < \beta < \alpha < .$ Les sections principales dans les plans d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$ sont des hyperboles; la section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est vide.

Si deux des réels α, β, γ sont confondus (ie. \mathcal{S} est de révolution) par exemple si $\alpha = \beta$, les sous-espaces propres de u sont $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ et $\mathbb{R}e_3$. Les sections principales de \mathcal{S} sont donc l'intersection avec le plan orthogonal à e_3 et les intersections avec les plans contenant la droite $\Omega + \mathbb{R}e_3$, axe de révolution de \mathcal{S} .

Supposons que \mathcal{S} soit un cône du second degré. Si \mathcal{S} n'est pas réduit à son centre, α et γ sont de signes différents; on peut donc supposer $\gamma < 0 < \alpha = \beta$. La section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est réduite au centre. Les sections principales dans les plans contenant l'axe de \mathcal{S} sont des réunions de deux droites.

Supposons que \mathcal{S} soit un ellipsoïde. On peut alors supposer $f(\Omega) = -1$, et $\alpha = \beta > 0$, $\gamma > 0$. La section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est un cercle. Les sections principales dans les plans contenant l'axe de \mathcal{S} sont des ellipses.

Supposons que \mathcal{S} soit un hyperboloïde à une nappe. On peut alors supposer $f(\Omega) = -1$, et puisque α et β sont de même signe, $\gamma < 0 < \alpha = \beta$. La section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est un cercle. Les sections principales dans les plans contenant l'axe de \mathcal{S} sont des hyperboles.

Supposons que \mathcal{S} soit un hyperboloïde à deux nappes. On peut alors supposer $f(\Omega) = 1$, et comme α et β sont de même signe, $\gamma < 0 < \alpha = \beta$. La section principale dans le plan d'équation $z = 0$ est vide. Les sections principales dans les plans contenant l'axe de \mathcal{S} sont des hyper

Si $\alpha = \beta = \gamma$, toute section de \mathcal{S} est principale. Si \mathcal{S} est pas vide ou réduit à son centre, c'est nécessairement une sphère. Les sections planes principales sont donc des cercles.

b) On reprend les notations précédentes; on a ici $f(\Omega) = 0$; on peut supposer :

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, \quad \beta = \frac{1}{b^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{c^2} \quad \text{où} \quad 0 < b < a, \quad 0 < c.$$

Les sections principales non réduites au centre sont les intersections avec les plans orthogonaux à e_2 et e_1 ; des équations de ces sections sont :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Ce sont des hyperboles dégénérées; la première est la réunion des droites engendrées par les vecteurs de coordonnées $(a, 0, \varepsilon c)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, et la seconde la réunion des droites engendrées par les vecteurs de coordonnées $(0, b, \varepsilon c)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

c) Reprenons les notations du b). Les valeurs propres de u sont $-\frac{1}{c^2} < 0 < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$. D'après le Cours, un plan cyclique est un plan dont la direction est un plan vectoriel totalement isotrope pour la forme quadratique d'expression analytique :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2) = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)z^2.$$

Ce sont donc les plans d'équations :

$$\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} y + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}} z = 0 \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Ces plans ne peuvent être orthogonaux qu'aux génératrices de la section principale dans le plan d'équation $x = 0$, et ils le sont si, et seulement si :

$$\frac{1}{b} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}},$$

soit encore, en reprenant les notations initiales :

$$\beta(\beta - \alpha) = -\gamma(\alpha - \gamma) \quad \text{soit} \quad \beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta - \gamma)$$

ce qui est équivalent, puisque $\gamma < 0 < \beta$, à la condition $\beta + \gamma = \alpha$.

Si \mathcal{S} est un cône de Hachette, alors il existe une suite complète (α, β, γ) des zéros du polynôme caractéristique de u telle que $\beta + \gamma = \alpha$. Inversement, supposons que \mathcal{S} est un cône du second degré et qu'il existe une suite complète (α, β, γ) des zéros du polynôme caractéristique de u telle que $\beta + \gamma = \alpha$. On peut choisir u (en remplaçant éventuellement u par $-u$) de telle sorte que parmi les réels α, β, γ deux soient positifs et le troisième négatif. Comme β et γ ne peuvent pas être de même signe, nécessairement $\alpha > 0$ et on peut supposer $\beta > 0 > \gamma$. On a alors $\gamma < 0 < \alpha < \beta$. On est alors dans la situation du b), et puisque $\beta + \gamma = \alpha$, \mathcal{S} est un cône de Hachette.

Le cône \mathcal{S} est un cône de Hachette si, et seulement si, il existe une suite complète (α, β, γ) des zéros du polynôme caractéristique de u qui vérifie l'égalité $\alpha + \beta + \gamma = 2\alpha$. Cette condition est vérifiée, en prenant les notations de l'énoncé si, et seulement si, $T/2$ est zéro du polynôme caractéristique, soit :

$$\frac{T^3}{8} - T \frac{T^2}{4} - \Theta \frac{T}{2} + \Delta = 0 \quad \text{soit} \quad T^3 - 4\Theta T + 8\Delta = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5 :

- a) Un cône du second degré est dit *équilatère* ssi il contient trois génératrices deux à deux orthogonales. Avec les notations de l'exercice 3c), prouver que \mathcal{S} est équilatère ssi $T = 0$. En déduire que \mathcal{S} contient une infinité de trièdres trirectangles.
- b) Soit \mathcal{S} une quadrique propre de \mathcal{E} . Lieu des points $S \in \mathcal{E}$ tels que le cône circonscrit à \mathcal{S} depuis S soit équilatère.
- c) Soit Γ une conique de \mathcal{E} . Trouver le lieu des sommets des cônes équilatères de \mathcal{E} contenant Γ . ■

a) Soit q une forme quadratique telle que $\mathcal{S} = \{ M \in \mathcal{E} \mid q(\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \}$, et u l'opérateur associé à q . Les génératrices de \mathcal{S} sont les droites passant par Ω et dirigées par un vecteur isotrope de q . Le cône \mathcal{S} est donc équilatère si, et seulement si, il existe une base orthonormale \mathcal{B} telle que les coefficients diagonaux de la matrice de q (et de u) dans la base \mathcal{B} soient nuls. Cela implique évidemment $T = \text{Tr } u = 0$. Inversement, si cette condition est réalisée, d'après ce qui a été démontré dans l'exercice 5 du § III.3, il existe une infinité de bases orthonormales \mathcal{B} telles que les coefficients diagonaux de la matrice de q (et de u) dans la base \mathcal{B} soient nuls. Le cône

un cône équilatère, et il existe une infinité de trièdres trirectangles formés par des génératrices de \mathcal{S} .

b) Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$. Le point $M \neq S$ est sur le cône circonscrit à \mathcal{S} depuis le point S si, et seulement si, l'équation aux paramètres de l'intersection de la droite $\text{Dr}(SM)$ et de la quadrique a une racine double. Cette équation est :

$$f(S + \lambda \overrightarrow{SM}) = f(S) + \lambda d_S f(\overrightarrow{SM}) + \lambda^2 f_\infty(\overrightarrow{SM}) = 0.$$

La condition sur M s'écrit donc :

$$(1) \quad \left(d_S f(\overrightarrow{SM}) \right)^2 - 4 f(S) f_\infty(\overrightarrow{SM}) = 0.$$

Le cône circonscrit à \mathcal{S} depuis S est l'ensemble des points M vérifiant (1) (y compris S). Soit q_S la forme quadratique :

$$q_S : \vec{x} \mapsto (d_S f(\vec{x}))^2 - 4 f(S) f_\infty(\vec{x}),$$

et u_S l'opérateur symétrique associé. Si les coordonnées de $\text{grad}_S f$ dans une base orthonormale sont $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, la matrice de la forme quadratique $\vec{x} \mapsto (d_S f(\vec{x}))^2$ est $[\lambda_i \lambda_j]_{(i,j) \in [1,3]^2}$. Nous en déduisons :

$$\text{Tr}(u_S) = \|\text{grad}_S f\|^2 - 4 f(S) \text{Tr} u.$$

L'ensemble E des points S tels que le cône circonscrit à \mathcal{S} de S est équilatère, est donc l'ensemble des points $S \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\|\text{grad}_S f\|^2 - 4 f(S) \text{Tr} u = 0.$$

Supposons que \mathcal{S} soit une quadrique à centre, de centre Ω . Il existe un repère $\mathcal{R} = (\Omega; e_1, e_2, e_3)$ tel que \mathcal{S} soit la quadrique d'équation

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1 \quad ((\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{*3}),$$

dans \mathcal{R} . On peut donc supposer que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(M) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 - 1.$$

On a aussi :

$$\text{grad}_M f = 2(\alpha x e_1 + \beta y e_2 + \gamma z e_3).$$

Le point S de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est donc dans l'ensemble E si, et seulement si :

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2).$$

soit :

$$\alpha(\beta + \gamma)x^2 + \beta(\gamma + \alpha)y^2 + \gamma(\alpha + \beta)z^2 = \alpha + \beta + \gamma.$$

On vérifie en particulier que si \mathcal{S} est un ellipsoïde, E est aussi un ellipsoïde.

Supposons que \mathcal{S} soit un paraboloides hyperbolique. Il existe alors un repère \mathcal{R} et deux réels $k \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $p > 0$ tels qu'une équation de \mathcal{S} dans \mathcal{R} soit :

$$x^2 + ky^2 - 2pz = 0.$$

On peut donc supposer que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} :

$$f(M) = x^2 + ky^2 - 2pz.$$

On a alors :

$$\text{grad}_M f = 2(xe_1 + ky e_2 - pe_3).$$

Le point $S \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} appartient à E si, et seulement si :

$$x^2 + k^2y^2 + p^2 = (1 + k)(x^2 + ky^2 - 2pz),$$

soit :

$$kx^2 + ky^2 - 2(1 + k)pz = p^2.$$

Si le paraboloides \mathcal{S} n'est pas équilatère ($k \neq -1$), E est un paraboloides de révolution. Si \mathcal{S} est équilatère, E est vide.

c) Supposons que Γ soit une conique dans le plan $P = \varphi^{-1}(0)$, où φ est une fonction affine non nulle. Soit \vec{w} un vecteur non nul tel que :

$$(\forall \vec{x} \in \mathcal{E}) \quad \vec{\varphi}(\vec{x}) = (\vec{x} | \vec{w}).$$

On peut supposer, en modifiant éventuellement φ , que \vec{w} est unitaire.

La conique Γ est l'intersection avec P d'un cylindre dont les génératrices sont dirigées par \vec{w} ; aussi, il existe un polynôme $f \in \mathcal{P}_2$ tel que $\Gamma = f^{-1}(0) \cap P$, et tel qu'en tout $M \in \mathcal{E}$, $(\text{grad}_M f | \vec{w}) = 0$. L'opérateur symétrique associé à f_∞ sera noté u .

Soit $S \in \mathcal{E} \setminus P$, un point M tel que $\vec{\varphi}(\overrightarrow{SM}) \neq 0$ est dans le cône \mathcal{C}_S de sommet S contenant Γ (cf. Exercice 4 du § XII.2) si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\varphi(S + \lambda \overrightarrow{SM}) = 0$ et :

$$f(S + \lambda \overrightarrow{SM}) = f(S) + \lambda d_S f(\overrightarrow{SM}) + \lambda^2 f_\infty(\overrightarrow{SM}) =$$

Ces conditions s'écrivent :

$$f(S) - \frac{\varphi(S)}{\vec{\varphi}(\overrightarrow{SM})} d_S f(\overrightarrow{SM}) + \left(\frac{\varphi(S)}{\vec{\varphi}(\overrightarrow{SM})} \right)^2 f_\infty(\overrightarrow{SM}) = 0 ,$$

soit :

$$(1) \quad f(S) \vec{\varphi}^2(\overrightarrow{SM}) - \varphi(S) \vec{\varphi}(\overrightarrow{SM}) d_S f(\overrightarrow{SM}) + \varphi^2(S) f_\infty(\overrightarrow{SM}) = 0 .$$

Le cône \mathcal{C}_S étant unique, l'équation (1) est une équation de \mathcal{C}_S . Notons q_S la forme quadratique :

$$\vec{x} \mapsto f(S) \vec{\varphi}^2(\vec{x}) - \varphi(S) \vec{\varphi}(\vec{x}) (\text{grad}_S f \mid \vec{x}) + \varphi^2(S) (u(\vec{x}) \mid \vec{x}) ,$$

et u_S l'opérateur linéaire associé. Soit un repère orthonormal $(O; e_1, e_2, e_3)$ où $\vec{w} = e_3$. Pour \vec{x} de coordonnées (x_1, x_2, x_3) on a : $\vec{\varphi}^2(\vec{x}) = x_3^2$; la trace de l'endomorphisme symétrique associé est 1. Notons $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ les coordonnées du vecteur $\text{grad}_S f$. Pour \vec{x} de coordonnées (x_1, x_2, x_3) on a : $\vec{\varphi}(\vec{x}) (\text{grad}_S f \mid \vec{x}) = \lambda_1 x_3 x_1 + \lambda_2 x_3 x_2$; la trace de l'endomorphisme symétrique associé est donc 0. Nous en déduisons finalement :

$$\text{Tr } u_S = f(S) + \varphi^2(S) \text{Tr } u .$$

Le cône \mathcal{C}_S est donc équilatère si, et seulement si :

$$f(S) + \varphi^2(S) \text{Tr } u = 0 .$$

Soit E l'union de l'ensemble des points de $\mathcal{E} \setminus P$ tels que le cône de sommet S qui contient Γ soit équilatère, et de Γ . L'ensemble E est l'ensemble des points $S \in \mathcal{E}$ tels que :

$$f(S) + \varphi^2(S) \text{Tr } u = 0 .$$

Supposons que Γ soit une conique à centre, d'équation réduite :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1 ,$$

dans un repère orthonormal $(O; e_1, e_2)$ du plan P . Le point M de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ dans le repère $(O; e_1, e_2, e_3)$ appartient à E si, et seulement si :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + (\alpha + \beta) z^2 = 1 .$$

Supposons que Γ soit une parabole, d'équation :

$$y^2 - 2px = 0 \quad (p > 0) .$$

dans un repère orthonormal $(O; e_1, e_2)$ du plan P . Le point M de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans le repère $(O; e_1, e_2, e_3)$ appartient à E si, et seulement si :

$$y^2 - 2px + z^2 = 0.$$

L'ensemble E est alors un parabolôïde de révolution.

Exercice 11 :

|| Soit \mathcal{T} un tétraèdre. Montrer que les 4 droites joignant chacune un sommet au centre du cercle inscrit dans la face opposée sont tracées sur un même hyperboloïde à une nappe. ■

La résolution élémentaire de cet exercice est possible mais assez lourde et peu géométrique. Il nous a semblé préférable de donner ici une résolution utilisant les méthodes algébriques en géométrie, dans un cadre plus vaste que celui du Cours.

Notations

Notons A, B, C, D les sommets du tétraèdre, E le *vectorialisé* de l'espace affine euclidien \mathcal{E} et \mathcal{P} l'espace projectif réel issu de E . On prend comme base dans E le 4-uplet (A, B, C, D) , et on utilise le repère projectif de \mathcal{P} qui s'en déduit. On identifie \mathcal{E} à son image canonique dans \mathcal{P} , qui est l'hyperplan affine $z_0 = 1$ de E (où z_0 désigne, bien sûr, la coordonnée d'homogénéité rajoutée dans la construction canonique de E). Les systèmes de coordonnées homogènes dans ce repère des points de \mathcal{E} ne sont autres que les systèmes de coordonnées barycentriques relatifs aux sommets du tétraèdre affectés des masses 1. Notons $V_1 = A$, $V_2 = B$, $V_3 = C$, $V_4 = D$, où $V_i \in \mathcal{E}$, et considérons la base :

$$\mathcal{B} = (V_1 \wedge V_2, V_1 \wedge V_3, V_1 \wedge V_4, V_2 \wedge V_3, V_2 \wedge V_4, V_3 \wedge V_4)$$

de la puissance extérieure seconde $\wedge^2(E)$. Enfin soit \mathfrak{P} l'espace projectif réel issu de $\wedge^2(E)$. Un point $P \in \mathfrak{P}$, de coordonnées homogènes X, Y, Z, L, M, N dans \mathcal{B} , représente une droite projective de \mathcal{P} ssi on a :

$$(1) \quad XN - YM + ZL = 0.$$

L'équation (1) est celle d'une quadrique dans \mathfrak{P} , que nous noterons Ω , et que l'on appelle habituellement la *quadrique de Plücker*.

La forme polaire de la forme quadratique $XN - YM + ZL$ sera notée Φ , c'est: $\Phi = X_1N_2 + X_2N_1 - Y_1M_2 - Y_2M_1 + Z_1L_2 + Z_2L_1$. Notons respectivement $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ les longueurs des côtés CD, DB, BC, AB, AC, AD , et I_A, I_B, I_C, I_D les centres des cercles inscrits aux faces opposées :

Remarque

Dans toute cette étude, le mot “droite” ne recouvre pas la même acception selon qu’on le considère en géométrie affine euclidienne (dans \mathcal{E}) ou en géométrie projective (dans \mathcal{P}). Une droite de \mathcal{P} est ou bien contenue dans le plan à l’infini de \mathcal{P} (ce *plan à l’infini* étant bien sûr $\mathcal{P} \setminus \mathcal{E}$, i.e. celui qui correspond au plongement naturel $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$), ou bien, est obtenue en rajoutant un point à l’infini à sa trace sur \mathcal{E} ; cette trace sur \mathcal{E} la détermine alors de manière unique. Nous laissons au lecteur le soin d’apporter éventuellement au texte les précisions qui en découlent.

PRÉLIMINAIRES

Des systèmes de coordonnées barycentriques homogènes de I_A, I_B, I_C, I_D sont respectivement :

$$(2) \quad (0, \alpha, \beta, \gamma) ; (\alpha, 0, \nu, \mu) ; (\beta, \nu, 0, \lambda) ; (\gamma, \mu, \lambda, 0) .$$

On en déduit les coordonnées respectives dans \mathcal{B} des droites AI_A, BI_B, CI_C, DI_D : elles forment une matrice $\mathcal{L} \in \mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{R})$, dont nous noterons \mathcal{L}_i les lignes ($1 \leq i \leq 4$).

On a :

$$(3) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & \nu & \mu & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -\nu & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & -\mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que \mathcal{L} est de rang 3. Mieux : trois quelconques de ses lignes sont indépendantes, ce qui prouve que parmi les quatre droites AI_A, BI_B, CI_C, DI_D , il n’y en a pas trois coplanaires. On voit que $\sum_{i=1}^4 \mathcal{L}_i = 0$. Il est aisé de justifier directement que parmi les 4 droites AI_A, BI_B, CI_C, DI_D , il n’y en a pas deux parallèles. Pour abréger, nous noterons respectivement $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ ces droites.

Cas de concours de deux des droites \mathcal{D}_i

On sait que deux droites de coordonnées $\mathcal{C}_i = (X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i)$ ($i \in \{1, 2\}$) dans \mathcal{B} sont coplanaires ssi $\Phi(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = 0$. En utilisant \mathcal{L} , et en tenant compte que deux quelconques des \mathcal{D}_i ne sont pas :

en déduit la condition nécessaire et suffisante pour que deux de ces droites concourent. Nous présentons le résultat sous forme de tableau :

Couple de droites	CNS de concours
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$	$\gamma\nu - \beta\mu = 0$
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3$	$\alpha\lambda - \gamma\nu = 0$
$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_4$	$\beta\mu - \alpha\lambda = 0$
$\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$	$\beta\mu - \alpha\lambda = 0$
$\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4$	$\alpha\lambda - \gamma\nu = 0$
$\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$	$\beta\mu - \gamma\nu = 0$

On conclut que pour toute 2-partie J de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, les droites \mathcal{D}_i , $i \in J$, concourent ssi les droites \mathcal{D}_i , $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \setminus J$, concourent, cette condition étant équivalente à : “les deux produits des longueurs de deux arêtes opposées parmi les quatre autres que $\{V_i\}_{i \in J}$ et $\{V_i\}_{i \notin J}$ sont égaux”. De plus, on voit que *si trois des droites \mathcal{D}_i concourent, la quatrième passe par leur point commun*, et cela se produit ssi on a $\alpha\lambda = \beta\mu = \gamma\nu$ (Les tétraèdres tels que deux au moins des trois produits $\alpha\lambda, \beta\mu, \gamma\nu$ soient égaux ont été abondamment étudiés. Voir par exemple le livre *Determinantentheorie* de GORDAN). Pour la suite, nous appellerons *cas général* celui où les trois produits $\alpha\lambda, \beta\mu, \gamma\nu$ sont distincts.

ETUDE DU PROBLÈME DANS LE CAS GÉNÉRAL

Dans ce qui suit, il sera commode d'adopter l'ancienne terminologie suivante : on appellera *demi-quadrique* l'ensemble des génératrices de l'un des deux systèmes dans une quadrique propre à génératrices réelles. Ce terme désignera deux choses légèrement différentes suivant le contexte, selon qu'il s'agit de demi-quadriques *affines* (dans \mathcal{E}) ou *projectives* (dans \mathcal{P}) : dans le second cas, il faut rajouter les éventuelles génératrices contenues dans le plan à l'infini de \mathcal{P} , et de plus les autres génératrices sont des droites projectives de \mathcal{P} , i.e. ont un point de plus que leur trace dans \mathcal{E} .

D'après ce qui précède, ici trois quelconques des \mathcal{D}_i correspondent sur Ω à trois points non alignés et tels que le plan projectif de \mathfrak{P} qu'ils engendrent soit issu d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3 *non isotrope* pour Φ . Ce plan rencontre donc Ω suivant une *conique propre*, qui est l'image sur Ω d'une demi-quadrique propre \mathcal{Q} de \mathcal{P} à génératrices réelles. Cette demi-quadrique correspond donc dans \mathcal{E} à l'un des systèmes de génératrices d'un *hyperboloïde* à une nappe ou d'un *paraboloïde hyperbolique*. L'étude ci-dessus montre que *la quatrième des \mathcal{D}_i est alors aussi une génératrice du même système*. La question naturelle est de trancher entre l'hyperboloïde et le paraboloïde. Pour cela, calculons l'image dans Ω de la demi-quadrique engendrée par $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$. Pour $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, écrivons que le point

naturelle de $u\mathcal{L}_2 + v\mathcal{L}_3 + w\mathcal{L}_4$ appartient à Ω . On obtient la condition nécessaire et suffisante :

$$(4) \quad p v w + q w u + r u v = 0, \text{ avec : } p = \beta\mu - \gamma\nu, \quad q = \gamma\nu - \alpha\lambda, \quad r = \alpha\lambda - \beta\mu.$$

Une équation dans $(V_i)_{1 \leq i \leq 4}$ du plan à l'infini de \mathcal{P} est :

$$(5) \quad x + y + z + t = 0.$$

Soit les trois points de ce plan de coordonnées respectives :

$$(6) \quad (1, 0, 0, -1) ; (0, 1, 0, -1) ; (0, 0, 1, -1) ;$$

les trois droites suivantes du plan à l'infini sont définies par leurs coordonnées dans \mathcal{B} , et sont obtenues en joignant deux à deux les points (6) ; nous présentons ces coordonnées sous forme d'une matrice $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R})$, dont les lignes seront notées \mathcal{J}_i , $1 \leq i \leq 3$:

$$(7) \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les points de \mathfrak{B} dont un système de coordonnées dans \mathcal{B} appartient à l'ensemble $\{U\mathcal{J}_1 + V\mathcal{J}_2 + W\mathcal{J}_3 \mid (U, V, W) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\}$ appartiennent tous à Ω , et forment un plan projectif \mathcal{S} issu d'un \mathbb{R} -e.v. de dimension 3 totalement isotrope pour Φ . Un système d'équations dans \mathcal{B} de ce plan projectif est :

$$(8) \quad \begin{cases} X + Y + Z = 0 \\ Y + L + N = 0 \\ Z + M + N = 0 \end{cases}.$$

Un élément de $\wedge^2(E)$ de la forme $u\mathcal{L}_2 + v\mathcal{L}_3 + w\mathcal{L}_4$ vérifie le système (8) ssi il représente un point de \mathcal{S} , c'est-à-dire ssi il vérifie à la fois (4) et (8). Cette condition s'écrit :

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \\ \nu u - (\beta + \lambda + \nu)v + \lambda w = 0 \\ \mu u + \lambda v - (\gamma + \lambda + \mu)w = 0 \end{cases}.$$

Les relations (9) constituent un système linéaire 3-3 en (u, v, w) dont le déterminant Δ est donné par :

$$(10) \quad \Delta = \alpha\beta\gamma + \beta\gamma(\mu + \nu) + \gamma\alpha(\nu + \lambda) + \alpha\beta(\lambda + \mu) + (\alpha + \beta + \gamma)(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu).$$

On remarque que $\Delta > 0$. Donc $\Delta \neq 0$. Aucun système $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ne peut donc vérifier (8) et (4). Cela signifie qu'aucune droite

à la demi-quadrique \mathcal{Q} n'est contenue dans le plan à l'infini. Donc \mathcal{Q} correspond à un hyperboloïde à une nappe. Dans ce qui suit, nous noterons \mathcal{H} cet hyperboloïde.

Équation cartésienne de \mathcal{H}

Nous allons donner une équation cartésienne dans le repère $(V_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de \mathcal{P} . Un point de coordonnées homogènes x, y, z, t dans (V_i) appartient à une droite de coordonnées X, Y, Z, L, M, N dans \mathcal{B} ssi les relations suivantes sont satisfaites :

$$(11) \quad \begin{cases} Ny - Mz + Lt = 0 \\ -Nx + Zz - Yt = 0 \\ Mx - Zy + Xt = 0 \\ -Lx + Yy - Xz = 0 \end{cases} .$$

On obtient donc l'équation cartésienne cherchée en écrivant qu'il existe un élément $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que les relations (11) soient vérifiées avec $(X, Y, Z, L, M, N) = u\mathcal{L}_2 + v\mathcal{L}_3 + w\mathcal{L}_4$ et u, v, w vérifiant la relation (4). Posons :

$$(12) \quad Q(x, y, z, t) = p(\lambda xy + \alpha zt) + q(\mu xz + \beta yt) + r(\nu xt + \gamma yz) .$$

Choisissons deux quelconques des trois dernières équations (11), remplaçons-y (X, Y, Z, L, M, N) par $u\mathcal{L}_2 + v\mathcal{L}_3 + w\mathcal{L}_4$, tirons alors u, v, w des deux équations obtenues, et reportons ces valeurs dans (4). Avec les trois choix ci-dessus définis possibles, on obtient ainsi les trois relations suivantes :

$$(13) \quad P_1 Q(x, y, z, t) = 0 ; \quad P_2 Q(x, y, z, t) = 0 ; \quad P_3 Q(x, y, z, t) = 0 ,$$

avec :

$$(14) \quad \begin{aligned} P_1 &= (\beta y - \nu x)(\gamma y - \mu x) ; \\ P_2 &= (\nu x - \alpha z)(\gamma z - \lambda x) ; \\ P_3 &= (\mu x - \alpha t)(\lambda x - \beta t) . \end{aligned}$$

Prenons maintenant la première équation (11), couplons-la avec une quelconque des trois autres, et procédons comme ci-dessus : tirons u, v, w des relations obtenues, et reportons dans (4). Avec les trois choix possibles de la seconde équation, on en déduit les trois autres relations :

$$(15) \quad R_1 Q(x, y, z, t) = 0 ; \quad R_2 Q(x, y, z, t) = 0 ; \quad R_3 Q(x, y, z, t) = 0 ;$$

avec :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= (\beta y - \alpha z)(\lambda y - \mu z) ; \\
 R_2 &= (\gamma z - \beta t)(\mu z - \nu t) ; \\
 R_3 &= (\gamma y - \alpha t)(\lambda y - \nu t) .
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Les relations (13) et (14) se calculent aisément à la main ; les relations (15) et (16) sont beaucoup moins triviales mais se vérifient instantanément avec un logiciel de calcul formel.

On peut vérifier que tout (x, y, z, t) qui vérifie $P_1 = P_2 = P_3 = R_1 = R_2 = R_3 = 0$ vérifie aussi $Q(x, y, z, t) = 0$ (le 4-uplet $(\beta\gamma, \beta\mu, \beta\lambda, \gamma\lambda)$ par exemple, vérifie $P_1 = P_2 = P_3 = 0$, et il vérifie bien $Q = 0$). Par suite, l'élimination de u, v, w entre les relations (4) et (11) quand on substitue $u\mathcal{L}_2 + v\mathcal{L}_3 + w\mathcal{L}_4$ à (X, Y, Z, L, M, N) conduit à la condition nécessaire et suffisante suivante que doit vérifier (x, y, z, t) :

$$Q(x, y, z, t) = 0 . \tag{17}$$

Comme \mathcal{H} est une quadrique propre à points réels et comme Q est un polynôme homogène de degré 2, visiblement non nul (on est dans le *cas général*), il résulte du Cours que : $Q(x, y, z, t) = 0$ est l'équation cartésienne de degré 2 (relative à la base (V_i)) de \mathcal{H} .

CONCLUSION

- Si exactement deux des produits $\alpha\lambda, \beta\mu, \gamma\nu$ sont égaux, les droites \mathcal{D}_i se séparent en exactement deux groupes de deux droites concourantes. (Observons que dans ce cas, aucune quadrique ne peut contenir les quatre droites). Les classes de congruence, modulo le groupe des isométries de \mathcal{E} , des tétraèdres vérifiant cette condition forment une famille à 5 paramètres (Nous entendons par là qu'il existe une bijection "raisonnable" d'un ouvert-non nécessairement connexe de \mathbb{R}^5 sur l'ensemble de ces classes).

- Si les trois produits $\alpha\lambda, \beta\mu, \gamma\nu$ sont égaux, les quatre droites \mathcal{D}_i ont un et un seul point commun. Les classes de congruence, modulo le groupe des isométries de \mathcal{E} , des tétraèdres vérifiant cette condition forment une famille à 4 paramètres.

- Dans le cas général, il existe un, et un seul, hyperboloïde à une nappe qui contient les quatre droites \mathcal{D}_i ; ces droites sont alors dans un même système de génératrices de cet hyperboloïde. Une équation cartésienne de cet hyperboloïde en coordonnées isobarycentriques homogènes relativement à (A, B, C, D) est (17).

Exercice 14 :

- Soit \mathcal{S} un ellipsoïde et $S \in \mathcal{E}$ (\mathcal{S} non de révolution).
- a) Montrer qu'il y a au plus six normales à \mathcal{S} passant par S et qu'elles sont les génératrices d'un unique cône du second degré, qu'on notera \mathcal{C}_S .
- b) Lieu de S pour que \mathcal{C}_S soit de révolution. ■

Soit $f \in \mathcal{P}_2$ le polynôme tel que $\mathcal{S} = f^{-1}(0)$ et $f(\Omega) = 1$, où Ω est le centre de \mathcal{S} . Il existe un repère orthonormal \mathcal{R} d'origine Ω tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on ait :

$$f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (0 < c < b < a) .$$

a) 1) Soit $M_0 \in \mathcal{S}$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . La normale à \mathcal{S} en M_0 passe par le point S de coordonnées (x, y, z) si, et seulement si, il existe un réel λ tel que :

$$x = x_0 + \lambda \frac{x_0}{a^2} , \quad y = y_0 + \lambda \frac{y_0}{b^2} , \quad z = z_0 + \lambda \frac{z_0}{c^2} .$$

Ces égalités s'écrivent aussi :

$$a^2 x = (a^2 + \lambda) x_0 , \quad b^2 y = (b^2 + \lambda) y_0 , \quad c^2 z = (c^2 + \lambda) z_0 .$$

Nous en déduisons la condition nécessaire suivante :

$$\begin{aligned} a^2 x^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 + b^2 y^2 (a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 + c^2 z^2 (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 &= \\ &= (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = \\ &= (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 . \end{aligned}$$

Le scalaire λ est donc nécessairement l'un des zéros du polynôme :

$$\begin{aligned} P_S(\lambda) &= a^2 x^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 + b^2 y^2 (a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 + \\ &+ c^2 z^2 (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 - (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^2 . \end{aligned}$$

Le polynôme P_S a au plus 6 zéros.

Supposons $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$; alors $-a^2, -b^2, -c^2$ ne sont pas des zéros de P_S et l'équation $P_S(\lambda) = 0$ peut s'écrire :

$$(1) \quad \frac{a^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 + \lambda)^2} = 1 .$$

Si λ est un zéro de P_S , les coordonnées de M_0 sont nécessairement :

$$x_0 = \frac{a^2 x}{a^2 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{b^2 y}{b^2 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{c^2 z}{c^2 + \lambda}.$$

On vérifie réciproquement en utilisant (1) que le point M_0 dont les coordonnées sont définies par ces égalités est bien un point de \mathcal{S} , et que la normale en ce point passe par S . Le nombre de normales à \mathcal{S} passant par S est donc le nombre de zéros de P_S ; ce nombre est ≤ 6 .

La fonction :

$$\lambda \mapsto \frac{a^2 x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 + \lambda)^2},$$

est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur les intervalles $] -\infty, -a^2[$, $] -a^2, -b^2[$, $] -b^2, -c^2[$, $] -c^2, +\infty[$. Elle est convexe et > 0 sur chacun de ces intervalles et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont 0. Ses limites en $-a^2$, en $-b^2$, et en $-c^2$ sont $+\infty$. On voit donc que si (x, y, z) sont tous $\neq 0$, le nombre de zéros réels de P_S est au moins 2 (ce qui arrive quand S est assez loin de Ω), et au plus 6 (ce qui arrive quand S est proche de Ω).

2) Notons maintenant (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de S , supposées toutes non nulles. Si $P_S(\lambda) = 0$, alors λ est différent de $-a^2$ de $-b^2$ et de $-c^2$; le vecteur normal à \mathcal{S} qui correspond à λ est le vecteur de coordonnées :

$$\left(\frac{x_1}{a^2 + \lambda}, \frac{y_1}{b^2 + \lambda}, \frac{z_1}{c^2 + \lambda} \right).$$

Nous voulons démontrer que la courbe paramétrée $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$, où $\varphi(\lambda)$ est le point de coordonnées :

$$\left(\frac{x_1}{a^2 + \lambda}, \frac{y_1}{b^2 + \lambda}, \frac{z_1}{c^2 + \lambda} \right),$$

définie sur $\omega = \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}$, est tracée sur un cône du second degré. Cela prouvera que les normales à \mathcal{S} passant par S sont des génératrices d'un cône du second degré de sommet S .

Pour tout $\lambda \in \omega$ on note $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)$ les coordonnées de $\varphi(\lambda)$. On remarque que pour tout $\lambda \in \omega$:

$$x_1 = a^2 x(\lambda) + \lambda x(\lambda), \quad y_1 = b^2 y(\lambda) + \lambda y(\lambda), \quad z_1 = c^2 z(\lambda) + \lambda z(\lambda),$$

d'où, en notant (x, y, z) au lieu de $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$:

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & a^2 x & x \\ y_1 & b^2 y & y \\ z_1 & c^2 z & z \end{bmatrix} = 0,$$

d'où :

$$x_1 (b^2 - c^2) y z + y_1 (c^2 - a^2) x z + z_1 (a^2 - b^2) x y = 0 .$$

La courbe φ est donc tracée sur un cône du second degré, ce qu'il fallait démontrer.

b) Posons :

$$\alpha = x_1 (b^2 - c^2) , \quad \beta = y_1 (c^2 - a^2) , \quad \gamma = z_1 (a^2 - b^2) .$$

Nous supposons x_1, y_1, z_1 tous non nuls. Le cône \mathcal{C}_S est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $q(\overrightarrow{SM}) = 0$, où q désigne la forme quadratique :

$$q(x, y, z) = 2\alpha y z + 2\beta x z + 2\gamma x y .$$

Notons u l'opérateur linéaire associé à q . Le cône \mathcal{C}_S est de révolution si, et seulement si, il existe un réel λ tel que la matrice

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \gamma & \beta \\ \gamma & -\lambda & \alpha \\ \beta & \alpha & -\lambda \end{bmatrix} ,$$

soit de rang ≤ 1 (ce rang ne peut pas être 0 car \mathcal{C}_S n'est pas réduit à son sommet). On obtient une condition équivalente en écrivant que la transposée de la comatrice est nulle, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \alpha^2 & \alpha\beta + \lambda\gamma & \alpha\gamma + \lambda\beta \\ \alpha\beta + \lambda\gamma & \lambda^2 - \beta^2 & \beta\gamma + \lambda\alpha \\ \alpha\gamma + \lambda\beta & \beta\gamma + \lambda\alpha & \lambda^2 - \gamma^2 \end{bmatrix} = 0 .$$

Comme α, β, γ sont supposés tous non nuls cette condition s'écrit :

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 \quad \text{et} \quad -\frac{\alpha\beta}{\gamma} = -\frac{\alpha\gamma}{\beta} = -\frac{\gamma\beta}{\alpha} .$$

Ces conditions sont équivalentes aux conditions :

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 ,$$

ce qui s'écrit ici :

$$(b^2 - c^2)^2 x_1^2 = (c^2 - a^2)^2 y_1^2 = (a^2 - b^2)^2 z_1^2 .$$

L'ensemble des points S (n'appartenant pas à l'un des plans de coordonnées) tels que \mathcal{C}_S soit un cône de révolution est donc la réunion de 4 droites qui passent par le centre de l'ellipsoïde.

Exercice 15 :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Trouver les sections planes cycliques de la quadrique d'équation} \\ \text{dans le repère orthonormal } \mathcal{R} : \\ x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + x - y = 0. \blacksquare \end{array} \right.$$

Soit $f \in \mathcal{P}_2$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dans \mathcal{R} , on ait :

$$f(M) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + x - y.$$

On notera u l'opérateur symétrique associé à la forme quadratique f_∞ . On a l'égalité :

$$f(M) = 2 \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right)^2 + 3z^2 + \sqrt{2} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) = 2 \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 3z^2 - \frac{1}{4}.$$

La quadrique \mathcal{S} est donc un cylindre elliptique. Les valeurs propres de u sont 0, 2, 3 ; la valeur propre médiane est 2. On remarque :

$$f(M) - 2(x^2 + y^2 + z^2) = -x^2 - y^2 + z^2 - 2xy + x - y = z^2 - (x+y)^2 + x - y.$$

Les directions des plans cycliques de \mathcal{S} sont les plans totalement isotropes de la forme quadratique dont l'expression analytique est $z^2 - (x+y)^2$. Ce sont les directions de plan d'équations $x+y=z$ et $x+y=-z$. Soit \mathcal{R}' le repère orthonormal dans lequel les coordonnées sont :

$$x' = \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad z' = z.$$

Dans ce repère \mathcal{S} est le cylindre elliptique d'équation :

$$2x'^2 + 3z'^2 = \frac{1}{4},$$

et les équations des directions des plans cycliques sont les plans vectoriels d'équations $\sqrt{2}y' = z'$ et $\sqrt{2}y' = -z'$. Il est alors clair que tous les plans parallèles à ces directions coupent réellement le cylindre elliptique \mathcal{S} , donc suivant un cercle.

BIBLIOGRAPHIE

- BOREVITCH Z. I., CHAFAREVITCH I. R., *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, 1967.
- BOURBAKI N., *Algèbre*, chap. I à III ; Hermann, 1982.
- BOURBAKI N., *Groupes et Algèbres de Lie*, Hermann, 1982.
- BOUTELOUP, *L'algèbre linéaire*, P.U.F., coll. "Que Sais-je ?".
- CALAIS J., *Éléments de Théorie des groupes*, P.U.F., coll. "Mathématiques".
- CARREGA J. C., *Théorie des corps, la règle et le compas*, Hermann, 1981.
- CHAMBADAL L., OVAERT J.-L., *Algèbre linéaire et tensorielle*, Dunod, 1968.
- COHEN Paul, *Set Theory and the continuum hypothesis*, Benjamin, 1966.
- COMTET L., *Analyse combinatoire*, T 1 et 2, P.U.F.
- DELLACHERIE C., *Nombres au hasard*, Public. Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1978.
- DICKSON L. E., *Introduction to the theory of numbers*, Dover.
- DUBREIL P., *Leçons d'Algèbre moderne*, Dunod, 1964.
- GAAL L., *Classical Galois Theory, with examples*, Chelsea, 3ième éd., 1979.
- GALOIS E., *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1962.
- GAUSS C. F., *Recherches Arithmétiques*, Blanchard, Paris.
- GODEMENT R., *Cours d'Algèbre*, Hermann, 1969.
- HARDY G. H., WRIGHT E. M., *An Introduction to the theory of numbers*, Oxford Un. Press, 1959.
- ITARD J., *Les nombres premiers*, P.U.F., coll. "Que sais-je ?".
- ITARD J., *Arithmétique et théorie des nombres*, P.U.F., coll. "Que sais-je ?".
- JACOBSON N., *Lectures in abstract algebra*, Tome 3, Springer.
- JORDAN C., *Traité des Substitutions*, Gauthier-Villars, 1927, Blanchard, 1957.
- KREISEL G., KRIVINE J. L., *Éléments de Logique Mathématique*, Dunod, 1967.
- KRIVINE J. L., *Théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F., coll. "Sup".
- LEDERMANN W., *Introduction to the theory of finite groups*, Wiley, 1961.
- MOISOTTE L., *Exercices de Mathématiques*, Dunod, 1982.
- RYSER H. J., *Mathématiques combinatoires*, Dunod, 1969.
- SAMUEL P., ZARISKY O., *Commutative Algebra*, Tome 1, Van Nostrand.
- SAMUEL P., *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, 1967.
- SCHWERDTFEGGER, *Geometry of complex numbers*, Toronto.
- SIERPINSKY W., *250 Problèmes de théorie des nombres*, Hachette.
- SIERPINSKY W., *Elementary theory of numbers*, Warszawa, 1964.
- WARUSFEL A., *Structures algébriques finies*, Hachette.
- WEBER H., *Lehrbuch der Algebra*, T. 1 à 3, Chelsea.

J.M. Arnaudiès P. Delezoide
H. Fraysse

Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours de mathématiques - 4

Ce recueil contient 213 exercices résolus choisis parmi les énoncés les plus représentatifs du cours d'algèbre bilinéaire et géométrie.

Très détaillées et de niveau varié, les solutions ont été rédigées avec le souci constant d'approfondir les notions abordées et d'élargir la portée des exercices.

Dans la lignée du cours avec lequel il forme un ensemble sans égal (J.-M. Arnaudiès et H. Fraysse, *cours de mathématiques*, tome 4, *algèbre bilinéaire et géométrie*), ce recueil est un outil de travail complet et vivant qui ouvre la voie aux résultats concrets et pratiques.

L'ensemble, destiné aux étudiants de deuxième cycle et aux élèves de mathématiques spéciales, comporte 4 volumes :

- *Exercices résolus d'analyse* ;
- *Exercices résolus d'algèbre* ;
- *Exercices résolus d'analyse (compléments)* ;
- *Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie*.



Code 043102
ISBN 2 10 003102 3

