# J. M. Arnaudiès
# H. Fraysse

## Cours de mathématiques - 2

# Analyse

*Classes préparatoires*
*1er cycle universitaire*

**Dunod Université**

# Cours de mathématiques - 2

# Analyse

*Jean-Marie ARNAUDIÈS* *Henri FRAYSSE*

*Professeurs de Mathématiques Spéciales*
*au Lycée Pierre de Fermat à Toulouse*
*Anciens élèves de l'École Normale Supérieure*

Dunod

Nouveau tirage, 1991


ISBN 2-04-016501-0

# *PRÉFACE*

Ce tome 2 du cours de mathématiques développe les bases indispensables de l'analyse pour tout étudiant, que ce soit en classe préparatoire ou à l'université. Sa conception, comme celle du tome 1, est celle d'un outil de travail, utilisable immédiatement dès la sortie de la terminale C.

Les programmes 1984 des classes préparatoires ont axé l'étude de l'analyse en mathématiques supérieures sur celle des nombres réels, et leur rédaction ne laisse aucun doute : en première année, les seules notions de topologie souhaitées sont celles relatives à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{R}$ achevé ou à leurs parties.

Nous pensons qu'il s'agit là d'un point d'ancrage essentiel de ces programmes. En effet, toute étude de topologie, même restreinte à celle des espaces métriques, voire des espaces vectoriels normés, ne peut porter ses fruits et éviter le piège de l'abstraction stérile que si elle repose sur une assimilation solide et en profondeur du numérique. C'est pourquoi plus des deux tiers de l'ouvrage sont consacrés à $\mathbb{R}$ et à la variable réelle, et les espaces métriques généraux n'apparaissent qu'au chapitre X. Entre temps, les grands outils de base de l'analyse ont été définis et exploités à fond : suites, théorème des accroissements finis, construction rigoureuse des fonctions usuelles (y compris les fonctions trigonométriques), développements limités, intégration, séries numériques.

Un commentaire sur l'intégrale : le programme n'impose aucun choix de théorie de l'intégration. Nous avons mis à la disposition des lecteurs, d'emblée, *la vraie intégrale, celle de Lebesgue,* définie directement à partir des fonctions en escalier, mais en nous en tenant, pour rester accessibles, aux fonctions bornées sur un intervalle compact. C'était pour nous l'occasion d'illustrer le bien-fondé de ce parti-pris en faveur de la variable réelle, puisque, comme on verra, de puissants théorèmes sont obtenus à partir des seules propriétés des suites croissantes et majorées de $\mathbb{R}$. Mais c'était aussi pour répondre à ce souhait maintes fois exprimé par des personnes d'horizons les plus divers, savoir : *faire passer l'intégrale de Lebesgue dans l'enseignement classique ;* on conviendra que 85 ans après les travaux de Lebesgue, ce souhait n'a rien d'excessif. Aurons-nous contribué à l'exaucer ? En tout cas, nous avons voulu rester élémentaires, concrets, fournir rapidement des résultats pratiques utilisables (quelle simplification pour dériver sous l'intégrale !), en essayant de montrer que l'intégrale de Lebesgue n'est pas le préalable décourageant que l'on croit, mais au contraire une clé.

Plus de 930 exercices classés jalonnent le texte paragraphe par paragraphe, en n'exigeant jamais d'autre connaissance du lecteur que celles acquises jusque-là. Ils ont été vérifiés avec soin. Néanmoin reconnaissance que nous accueillerons les remarques de nos lecteurs pour les défauts et erreurs qui subsisteraient.

Nous remercions chaleureusement les éditeurs de DUNOD, qui se sont dévoués sans compter pour créer ce livre. Il n'aurait pas été possible sans l'inestimable compétence de Gisèle Maïus et Pierre Riotort.

J. M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE.

# TABLE DES MATIÈRES

# *Chapitre I*

# *LES NOMBRES RÉELS*

## § I.1 *INSUFFISANCE DES NOMBRES RATIONNELS*

Nous avons vu dans le tome d'Algèbre (§§ II.5 et II.6) comment, à partir de la notion de nombre *entier naturel,* s'élaborent d'abord celle *d'entier relatif,* puis celle de *nombre rationnel.*

Muni de son addition, de sa multiplication, et de son ordre usuel, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est un **corps commutatif totalement ordonné.**

Comme on peut « trouver des rationnels aussi petits que l'on veut », il semblerait à première vue que les nombres rationnels (et même, en pratique, les nombres *décimaux*) suffisent pour les applications des mathématiques aux autres sciences, où il s'agit d'interpréter des résultats d'*expériences* à l'aide d'*approximations* numériques.

Mais lorsqu'on cherche à bâtir un système cohérent de *mesure de certaines grandeurs physiques,* on s'aperçoit bien vite que la Nature, même en les plus simples circonstances, ne se laisse pas enfermer dans la notion de nombre rationnel.

***Exemple 1 :*** On trouve dans les tablettes babyloniennes des tables de carrés. Le problème de trouver un « nombre » dont le carré est égal à 2 s'était donc certainement posé plusieurs millénaires avant notre ère. Or si $r \in \mathbb{Q}$, on a toujours $r^2 \neq 2$. En effet, en choisissant pour $r$ un représentant irréductible $\dfrac{p}{q}$, de $r^2 = 2$ on déduirait $p^2 = 2\,q^2$, d'où (théorème de Gauss, Tome 1, § IV.2) $p^2|2$, ce qui ne laisse que les possibilités $p^2 = 1 = 2\,q^2$ ou $p^2 = 2$ aussi absurdes l'une que l'autre. Certains estimeront que ce problème est de nature purement théorique et qu'il n'effleurera pas l'esprit d'un non-mathématicien. Cependant plaçons-nous dans le plan physique « intuitif », celui-là même qu'Euclide avait essayé de définir axiomatiquement au IIIe siècle avant notre ère. Soit $(A, B, C, D)$ un carré (cf. fig. 1) dont le côté $AB$ est pris pour unité de longueur. Il apparaît comme parfaitement évident que l'aire du carré construit sur la diagonale $AC$ est exactement le double de l'aire du carré construit sur $AB$. Si $l$ est la mesure de

$AC$, elle doit bien vérifier $l^2 = 2$, ce qui signifie que cette mesure est impossible à l'aide de $AB$ et des seuls nombres rationnels.

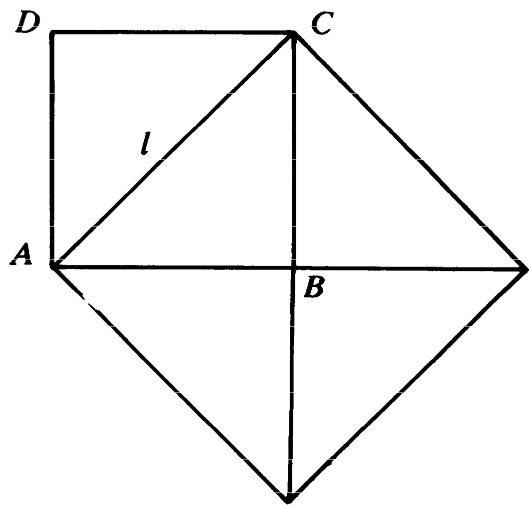



**Fig. 1.**

Cette grave lacune avait été remarquée des Pythagoriciens par des voies purement géométriques (cf. exercice 1), ce qui les avait incités à « combler des vides » dans $\mathbb{Q}$ en introduisant de nouveaux nombres, qu'ils baptisèrent **irrationnels.**

***Exemple 2 :*** Acceptons provisoirement l'idée, somme toute naturelle, qu'un nombre réel est connu par son *développement décimal* (nous verrons au Chapitre II comment affiner cette idée intuitive). Si nous imaginons qu'on puisse améliorer indéfiniment la précision d'une certaine mesure physique (par exemple la longueur d'un cercle de diamètre donné), on obtiendra, en écrivant sous forme décimale des approximations de plus en plus serrées du résultat idéal, une suite infinie de chiffres :

$$(1) \qquad A, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

où le développement *tronqué* $A, a_1 a_2 \dots a_n$ représente, pour chaque $n$, la liste des $n$ premières décimales suivant la partie entière $A$.

Une suite infinie telle que (1) conduit naturellement au *concept de nombre réel*. On s'aperçoit alors rapidement que les nombres rationnels eux-mêmes peuvent s'écrire de cette manière, par exemple $\frac{2}{3} = 0{,}6666 \dots 6 \dots$ ; $\frac{1}{11} = 0{,}090909 \dots 09 \dots$ Mais la représentation décimale illimitée des rationnels est loin d'épuiser tous les développements imaginables du type (1) (on se reportera au Chapitre II pour plus de précisions) : par exemple, on n'obtiendra jamais, en développant un rationnel, la suite des approximations décimales du nombre $\pi$, ni même le développement

$$(2) \qquad 0{,}123456789101112 \dots$$

où l'on écrit à la queue-leu-leu les entiers successifs écrits en base dix [1].

En conclusion, *les nombres rationnels sont insuffisants,* même pour traduire en nombres les mesures de grandeurs physiques idéales. Il s'avère donc nécessaire de *concevoir un ensemble plus vaste de nombres,* suggéré par notre intuition de certaines grandeurs physiques, par exemple la *notion de longueur d'un segment de droite,* mais que le mathématicien s'efforcera de construire rigoureusement. Nous allons voir que, dans un sens précis qui sera analysé ci-dessous, il y a, *à un isomorphisme près,* un seul outil mathématique exactement adapté à ce but : on l'appelle **ensemble des nombres réels,** et il sera utilisé aussi bien dans toutes les sciences expérimentales qu'en mathématiques, plus particulièrement en Analyse.

***Exercice 1 :*** Dans le plan de la géométrie d'Euclide, on considère le carré $(A, B, C, D)$ (cf. fig. 2). On cherche une « partie aliquote commune » au côté $AB$ et à la diagonale $AC$, c'est-à-dire un segment $S$ tel que l'on ait $AB = mS$ et $AC = nS$ pour des entiers $m$ et $n$ convenables. Montrer qu'un tel $S$ n'existe pas, en précisant le raisonnement suivant : si $S$ existait, il serait aussi partie aliquote commune à $A_1 B_1$ et $A_1 C$ dans le carré $(A_1, B_1, C, D_1)$ qui est « plus de deux fois » plus petit que le carré $(A, B, C, D)$.

En itérant l'opération, on voit que $S$ devrait être inférieur à toute longueur fixée à l'avance, ce qui est absurde.

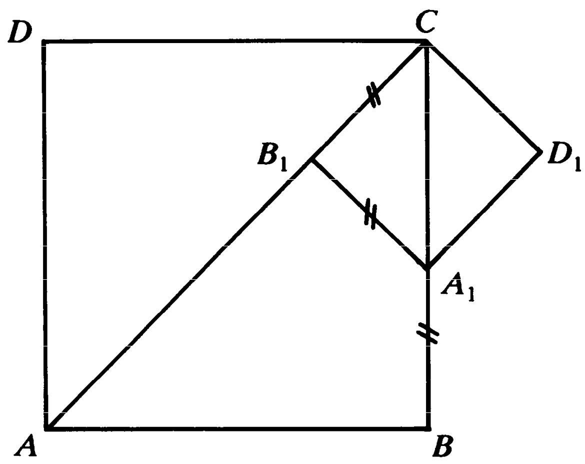



**Fig. 2.**

## § I.2 *GROUPES ABÉLIENS TOTALEMENT ORDONNÉS*

**DÉFINITION I.2.1**

*Un groupe abélien G (noté additivement) est dit* ***totalement ordonné*** *lorsqu'il est muni d'une relation d'ordre total (notée ici $\leqslant$) telle que*

(1) $$\forall (x, y, h) \in G^3 \quad (x \leqslant y) \Rightarrow (x + h \leqslant y + h)\,.$$

[1] En fait, le nombre $\pi$, ainsi que le nombre réel représenté par (2), sont [illegible] irrationnels mais même *transcendants* (cf. [9]).

Pour signifier (1) on dit aussi que la relation d'ordre est *invariante par translation,* et en l'appliquant avec $h$ et avec $-h$, on voit qu'elle signifie en fait qu'il y a *équivalence* entre $(x \leqslant y)$ et $(x+h \leqslant y+h)$, pour tous $x$, $y$ et $h$.

**Propriétés élémentaires**

Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe abélien totalement ordonné. Si $x \in G$ et $y \in G$ nous écrirons $x < y$ pour signifier $x \leqslant y$ et $x \neq y$. Nous noterons $G_+$ l'*ensemble des éléments positifs* de $G$ (*i.e.* $\{x \in G \mid x \geqslant 0\}$), $G_+^*$ l'ensemble des éléments *strictement positifs* (*i.e.* $\{x \in G \mid x > 0\} = G_+ \setminus \{0\}$, $G_-$ l'ensemble des éléments *négatifs* (*i.e.* $\{x \in G \mid x \leqslant 0\} = \{x \in G \mid -x \in G_+\}$ et $G_-^*$ l'ensemble $G_- \setminus \{0\}$.

On vérifie alors, pour $x \in G$ et $y \in G$ :

(2) $$\begin{cases} x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in G_+ \Leftrightarrow x - y \in G_- \\ x < y \Leftrightarrow y - x \in G_+^* \Leftrightarrow x - y \in G_-^* \end{cases}$$

(3) $(x \in G_+ \text{ et } y \in G_+) \Rightarrow (x + y \in G_+)$. (En abrégé $G_+ + G_+ = G_+$).

La propriété (3) permet **d'additionner membre à membre des inégalités de même sens** (si $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$, alors $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$).

(4) $$G_+ \cap G_- = \{0\}, \quad G_+ \cup G_- = G.$$

Notons, pour $z \in G$

$$\boxed{z^+ = \operatorname{Max}(z, 0), \quad z^- = \operatorname{Max}(-z, 0), \quad |z| = \operatorname{Max}(z, -z)}\,.$$

Alors :

(5) $$\begin{gathered} x = x^+ - x^-, \quad |x| \in G_+, \quad |x| = x^+ + x^- \\ (x+y)^+ \leqslant x^+ + y^+, \quad (x+y)^- \leqslant x^- + y^-, \end{gathered}$$

d'où, en ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités :

(6) $$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

On déduit de (6) *l'inégalité triangulaire,* valable pour tous $x_1$, $x_2$, $x_3$ dans $G$ :

(7) $$|x_1 - x_3| \leqslant |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|.$$

Dans l'ensemble ordonné $(G, \leqslant)$, nous utiliserons les notions générales de *majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure,* définies dans le tome d'Algèbre au § I.6. Nous emploierons également la notation $n \cdot x$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in G$, étant bien entendu que si $G$ est noté multiplicativement $n \cdot x$ est à remplacer par $x^n$. Si $n \in \mathbb{Z}^*$ et $x \in G \setminus \{0\}$. alors $n \cdot x \neq 0$ et l'appartenance de $n \cdot x$ à $G_+^*$ ou à $G_-^*$ est régie pa *signes* habituelle. En particulier, **si $G \neq \{0\}$, il n'y a pas dans $G$ d'élément de torsion,** ce qui prouve que **$G$ est infini.**

Muni de l'ordre induit, un sous-groupe $H$ de $G$ devient totalement ordonné : on parlera du **sous-groupe abélien totalement ordonné $H$ de $G$.**

***Exemple 1 :*** Pour sa structure additive usuelle et son ordre usuel, $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ est un groupe abélien totalement ordonné. En prenant les sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$ et l'ordre induit, on obtient une famille de groupes abéliens totalement ordonnés.

***Exemple 2 :*** Considérons maintenant $\mathbb{Q}_+^*$ muni de la *multiplication usuelle* et de l'ordre usuel. On obtient un autre groupe abélien totalement ordonné, mais il n'est pas isomorphe au précédent.

***Exemple 3 :*** Soit $n$ un entier naturel $\geqslant 2$. Munissons le groupe abélien $(\mathbb{Q}^n, +)$ de l'*ordre lexicographique* [1] (cf. Tome 1, § I.6) noté $\preccurlyeq$. Alors $(\mathbb{Q}^n, +, \preccurlyeq)$ est un groupe abélien totalement ordonné.

**Groupes discrets, groupes non discrets**

DÉFINITION **I.2.2**

*Un groupe abélien totalement ordonné $(G, +, \leqslant)$ est dit* ***discret*** *ssi $G_+^*$ admet un* ***minorant*** *$a > 0$. Sinon, le groupe est dit* ***non discret*** *lorsqu'il est non nul. Par convention, si $G = \{0\}$, $G$ est dit discret.*

Il résulte de cette définition que $a$, qui appartient à $G_+^*$ et minore $G_+^*$, est **le plus petit élément** de $G_+^*$.

***Exemple 4 :*** Le groupe $(\mathbb{Z}, +, \leqslant)$ est discret. Si $n \geqslant 2$, le groupe $(\mathbb{Z}^n, +, \preccurlyeq)$ (où $\preccurlyeq$ est l'ordre lexicographique) est discret : son plus petit élément parmi ceux strictement plus grands que 0 est $(0, 0, \dots, 0, 1)$.

Plus généralement, avec $n \geqslant 2$, $\mathbb{Q}^{n-1} \times \mathbb{Z}$ ordonné lexicographiquement, est discret.

Si $G$ est *non discret,* entre deux éléments distincts dans $G$, il en existe toujours au moins un autre (et par conséquent, une infinité). En effet, soit $x$ et $y$ dans $G$ tels que $x < y$. D'après la définition, il existe $u \in G$ tel que $0 < u < y - x$. En posant $y = x + u$ avec un tel $u$, on constate que $x < z < y$, donc l'intervalle $]x, y[$ de $G$ est *non vide.*

***Exemple 5 :*** Les groupes $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leqslant)$ sont non discrets.

---

[1] Rappelons que par définition, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x \preccurlyeq y$ signifie : ou bien $x = y$, ou bien, en notant $p = \mathrm{Min}\ \{i \in [\![1, n]\!] \mid x_i \neq y_i\}$, $x_p < y_p$.

**THÉORÈME I.2.1**

> *Soit* $(G, +, \leqslant)$ *un groupe abélien totalement ordonné et* **non discret.** *Si* $a \in G_+^*$, *et si* $N \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *dans* $G$ *tel que* $N \cdot \varepsilon \leqslant a$.

*Démonstration :*

Choisissons $b \in G$ tel que $0 < b < a$. L'élément $a_1 = \operatorname{Min}(b, a-b)$ vérifie $2 \cdot a_1 \leqslant a$. Par récurrence, on définit une suite $(a_n)$ dans $G_+^*$ telle que $2^n \cdot a_n \leqslant a$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Pour $n$ vérifiant $2^n \geqslant N$, on a bien $a_n > 0$ et $N \cdot a_n \leqslant 2^n \cdot a_n \leqslant a$, donc $\varepsilon = a_n$ convient. ■

***Exercice 1 :*** Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe abélien totalement ordonné. On donne le nom *d'intervalle* à tout sous-ensemble $I$ de $G$ tel que $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant y$ entraînent : $[x, y] \subset I$.

Montrer que si $G$ est **discret,** il existe un, et un seul, intervalle $H$ de $G$ qui possède la propriété d'être un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

***Exercice 2 :*** *a*) Démontrer l'affirmation énoncée dans l'exemple 2.

*b*) Construire sur $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ un ordre total qui en fait un groupe totalement ordonné *non isomorphe* au groupe ordonné $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leqslant)$, où $\leqslant$ est l'ordre usuel.

***Exercice 3 :*** Soit $G$ un sous-groupe non nul de $(\mathbb{Q}, +)$. On donne $a \in G \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe sur $G$ un et un seul ordre total $\leqslant$ tel que $a > 0$ et que le groupe $(G, +, \leqslant)$ soit totalement ordonné. De même il existe sur $G$ un et un seul ordre total tel que $a > 0$ et qui rend $G$ totalement ordonné.

***Exercice 4 :*** Soit $(G_i, +, \leqslant)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de $n$ groupes abéliens totalement ordonnés. Montrer que sur le groupe-produit $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ l'*ordre lexicographique* associé aux ordres des $G_i$ définit une structure de groupe totalement ordonné.

## § I.3 *GROUPES ARCHIMÉDIENS*

**DÉFINITION I.3.1**

> *Un groupe abélien totalement ordonné* $(G, +, \leqslant)$ *est dit* **archimédien** [1] *ssi, pour tous* $a > 0$ *et* $b > 0$ *de* $G$, *il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $N \cdot a \geqslant b$.

***Exemple 1 :*** Les groupes $(\mathbb{Z}, +, \leqslant)$ et $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ munis de l'ordre usuel sont archimédiens. En revanche le groupe $(\mathbb{Z}^2, +, \preccurlyeq)$ ordonné lexicographiquement ne l'est pas.

En notation *multiplicative,* la condition de la définition I.3.1 est à remplacer par

$$\forall a > 1, \quad \forall b > 1, \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \mid a^N \geqslant b.$$

---

[1] *Archimède* (287-212 av. J.C.) fut l'un des plus grands mathématiciens de l'Antiquité (encadrement de $\pi$, calcul d'aires et de volumes, numération) et s'illustre aussi comme ingénieur (défense de Syracuse) et physicien (Statique des solides, Hydrosta

***Exemple 2 :*** Montrons que le groupe $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leqslant)$ est archimédien. Soit $a > 1$ et $b > 1$ dans $\mathbb{Q}_+^*$. Posons $a = 1 + h$, d'où $h > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la *formule du binôme* (cf. Tome 1, § III.5) donne :

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant 1 + n \,.\, h \,.$$

Choisissons $N$ pour que $N \,.\, h \geqslant b$, ce qui est possible. On a alors $a^N \geqslant b$. On notera que les fonctions définies au § I.2 et qui n'ont pas reçu de nom particulier deviennent ici :

$$z^+ = \operatorname{Max}(z, 1)\,, \quad z^- = \operatorname{Max}\left(\frac{1}{z}, 1\right) \quad \text{et} \quad |z| = \operatorname{Max}\left(z, \frac{1}{z}\right)\,.$$

Il est évident que tout sous-groupe d'un groupe archimédien l'est encore.

On a vu dans le tome d'Algèbre comment la propriété d'Archimède entraînait l'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{N}$, puis dans $\mathbb{Z}$. Le lecteur démontrera très facilement (en distinguant les cas $b \geqslant 0$ et $b < 0$) la proposition suivante :

**PROPOSITION I.3.1**

*Soit $a > 0$ et $b$ deux éléments d'un groupe $(G, +, \leqslant)$ archimédien. Il existe un unique $m \in \mathbb{Z}$ (resp. un unique $n \in \mathbb{Z}$) tel que $m \,.\, a \leqslant b < (m+1) \,.\, a$ (resp. $n \,.\, a < b \leqslant (n+1) \,.\, a$).*

Cela permet de caractériser les groupes archimédiens discrets.

**THÉORÈME I.3.1**

*Un groupe archimédien $(G, +, \leqslant)$, non nul et discret, est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +, \leqslant)$ usuel.*

*Démonstration :*

Soit $a$ le plus petit élément de $G_+^*$. Le sous-groupe $H = \mathbb{Z} \,.\, a = \{m \,.\, a\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (par l'application $m \mapsto m \,.\, a$, $\mathbb{Z} \longrightarrow G$, qui est croissante pour l'ordre usuel de $\mathbb{Z}$). Soit $x \in G$. Notons $m \in \mathbb{Z}$ l'entier tel que $m \,.\, a \leqslant x < (m+1)\, a$ (cf. proposition I.3.1). Alors $x - m \,.\, a \in G_+$ et $x - ma < a$. Donc $x - ma = 0$, d'où $x = m \,.\, a \in H$. Donc $H = G$. ■

Dans toute la suite du Chapitre I, nous pourrons ainsi considérer uniquement des groupes archimédiens non discrets que nous appellerons **groupes Archimédiens** (tout court, mais avec un grand A), abréviation commode pour groupe abélien, totalement ordonné, non discret, archimédien et non nul.

**Limites dans les groupes Archimédiens**

Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe Archimédien. Une partie $A$ de $G$ est dite **bornée** ssi elle est à la fois majorée et minorée. Il est clair que *finie* de bornés est un borné. Une **suite** d'éléments de $G$ sera dite **bornée** ssi *l'ensemble de ses valeurs* l'est. Si deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ à valeurs dans $G$ sont bornées, la suite $(x_n - y_n)$ l'est.

**DÉFINITION I.3.2**

*Soit $(x_n)$ une suite de $G$ et $l \in G$. On dit que $l$ est **limite** de $(x_n)$ ou que $(x_n)$ **converge** vers $l$, pour exprimer la propriété suivante :*

(1) $\quad \forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in G), \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N \qquad |x_n - l| \leqslant \varepsilon .$

Le lecteur vérifiera aisément que *toute suite convergente est bornée* (cf. aussi proposition I.3.6).

**PROPOSITION I.3.2**

*Une suite de $G$ admet au plus une limite.*

*Démonstration :*

Soit $l \in G$, $l' \in G$, $l \neq l'$. Prenons $\varepsilon > 0$ dans $G$ tel que $3 \,.\, \varepsilon \leqslant |l - l'|$, ce qui est possible d'après le théorème I.2.1. Si $l$ et $l'$ étaient tous deux limites de $(x_n)$, il existerait d'après (1) des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $|x_n - l| \leqslant \varepsilon$ et $|x_n - l'| \leqslant \varepsilon$, d'où $|l - l'| \leqslant 2 \,.\, \varepsilon$, ce qui est contradictoire. ■

En vertu de cette proposition, si une suite $(x_n)$ converge, il est cohérent de noter **sa** limite $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n)$. Pour exprimer que $(x_n)$ converge *vers $l$*, on écrira aussi $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

**PROPOSITION I.3.3**

*Si deux suites convergentes $(x_n)$ et $(x'_n)$ de $G$ ont pour limites respectives $l$ et $l'$, alors la suite $(x_n - x'_n)$ converge vers $l - l'$.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon > 0$ dans $G$. Choisissons $\varepsilon' > 0$ dans $G$ tel que $2 \,.\, \varepsilon' \leqslant \varepsilon$, puis $N_1$ (resp. $N'_1$) dans $\mathbb{N}$ tel que $|x_n - l| \leqslant \varepsilon'$ pour $n \geqslant N_1$ (resp. $|x'_n - l'| \leqslant \varepsilon'$ pour $n \geqslant N'_1$). Alors, pour $n \geqslant N = \operatorname{Max}(N_1, N'_1)$, on a :

$$|x_n - x'_n - (l - l')| \leqslant \varepsilon' + \varepsilon' \leqslant \varepsilon . \quad ■$$

***Exemple 3 :*** Rappelons qu'une suite $(u_n)$ est dite *stationnaire* s'il existe un entier $n_0$ tel que $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$. Il est clair que toute suite stationnaire (et en particulier toute suite constante) converge : sa limite est la valeur qu'elle prend pour $n \geqslant n_0$.

**PROPOSITION I.3.4**

*Si la suite $(x_n)$ de $G$ converge vers $l$, et si $(\forall n)\, x_n \geqslant 0$, alors $l \geqslant 0$.*

*Démonstration :*

Si l'on avait $l < 0$, on *infirmerait* (1) en prenant dans $G$ un élément $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < |l|$. ■

Il résulte de cette proposition que si deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent dans $G$ et si $(\forall n)$ $x_n \leqslant y_n$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n$. Cette propriété s'appelle **passage des inégalités larges à la limite.**

Le lecteur débutant prendra garde au fait que les inégalités strictes ne se conservent pas nécessairement par passage à la limite. Par exemple dans $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ on a $\frac{1}{n} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pourtant $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

**Suites monotones**

Une suite de $G$, notée $(x_n)$, est dite **croissante** ssi $x_{n+1} \geqslant x_n$ pour tout $n$ (on remarque que cela *équivaut* à : $x_n \geqslant x_p$ pour $n \geqslant p$). Une suite $(x_n)$ est **décroissante** ssi $x_{n+1} \leqslant x_n$ pour tout $n$.

Si $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n$ (resp. $x_{n+1} < x_n$ pour tout $n$), on parlera de suite **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**). Une suite est dite **monotone** ssi elle est croissante **ou** décroissante. Elle est **strictement monotone** ssi elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Comme les propriétés des suites croissantes et des suites décroissantes se ramènent les unes aux autres par la bijection $x \mapsto -x$ de $G$ sur $G$, nous laisserons au lecteur le soin de compléter l'énoncé ci-dessous, ainsi que plus bas le théorème I.3.2.

**PROPOSITION I.3.5**

*Soit $(x_n)$ une suite croissante dans $G$. Pour qu'elle converge, il faut et il suffit que l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admette une borne supérieure. Si c'est le cas, cette borne est la limite de $(x_n)$.*

*Démonstration :*

Supposons d'abord que $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l$ $(l \in G)$. Pour $p$ fixé dans $\mathbb{N}$ et $m \geqslant p$, on a : $x_m \geqslant x_p$, d'où par passage à la limite $l \geqslant x_p$ (proposition I.3.4). Mais comme $p$ est arbitraire on en déduit que l'ensemble $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est *majoré par $l$*. Si maintenant $\varepsilon > 0$ est donné dans $G$, prenons $\varepsilon' > 0$ dans $G$ tel que $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. D'après la définition de la limite, on a $x_n \geqslant l - \varepsilon' > l - \varepsilon$ dès que $n$ est assez grand, donc $l - \varepsilon$ n'est plus majorant de la suite, et donc $l = \sup\, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement, supposons que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admette une borne supérieure $l$. Soit $\varepsilon > 0$ dans $G$. Prenons $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \geqslant l - \varepsilon$, ce qui est possible par définition de la borne supérieure. Alors, pour $n \geqslant N$, on aura d'après la croissance de la suite $x_N \leqslant x_n \leqslant l$, d'où *a fortiori* $|l - x_n| \leqslant |l - x_N| \leqslant \varepsilon$. Donc $(x_n)$ converge vers $l$. ■

### Suites de Cauchy

**Définition I.3.3**

*Une suite $(x_n)$ de $G$ est dite* **de Cauchy** [1] *ssi elle vérifie la condition :*

$$(2) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ (\varepsilon \in G)\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 , \quad (N \leqslant n < p) \Rightarrow |x_n - x_p| \leqslant \varepsilon .$$

Il résulte immédiatement de cette définition que :

(3) *si une suite $(x_n)$ converge dans $G$, elle est de Cauchy*

(utiliser le théorème I.2.1 avec $N = 2$), et de même :

(4) si les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont de Cauchy, la suite $(x_n - y_n)$ l'est aussi.

**Proposition I.3.6**

*Toute suite de Cauchy est bornée.*

*Démonstration :*

Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de $G$. Fixons $\varepsilon > 0$ dans $G$ et choisissons un $N$ qui vérifie (2) avec cet $\varepsilon$. On sait déjà que $|x_p| \leqslant |x_N| + \varepsilon$ pour tout $p \geqslant N$. Si maintenant on pose

$$M = \mathrm{Max}\ (|x_N| + \varepsilon, |x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|)$$

on peut assurer que $|x_n| \leqslant M$ pour tout $n$. ■

Il serait illusoire cependant de penser qu'une suite de Cauchy est nécessairement convergente *dans $G$* :

***Exemple 4 :*** Dans $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ usuel, considérons la suite $(u_n)$ définie par récurrence, à partir de $u_0 = 2$, par :

$$(\forall n) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

---

[1] Le baron Augustin Louis *Cauchy* (1789-1857) est à l'origine de l'Analyse moderne grâce à sa définition rigoureuse des limites et de la continuité. Innombrables travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle ou complexe et en théorie des groupes.

(c'est l'un des procédés couramment utilisé par les mathématiciens de l'Antiquité pour approcher $\sqrt{2}$ par une suite de rationnels avec une précision excellente). C'est une suite bien définie, *décroissante,* à valeurs dans $[1,2]$ : $u_1 = \dfrac{3}{2}$, $u_2 = \dfrac{17}{12}$, etc... Des relations

$$u_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{u_n^2 - 2}{2\,u_n}\right)^2 > 0 \quad \text{et} \quad u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2 - 2}{2\,u_n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

on tire

$$u_{n+1} - u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 - 2}{2\,u_{n+1}} \leqslant \left(\frac{u_n^2 - 2}{2\,u_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\,u_{n+1}} = \frac{(u_n - u_{n+1})^2}{2\,u_{n+1}},$$

ce qui, même en se contentant d'une majoration grossière, montre que $u_{n+1} - u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n - u_{n+1}}{2}$, et comme $u_0 - u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$, on obtient par récurrence $u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$, d'où, pour $n < p$,

$$0 < u_n - u_p \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^p} \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Il est donc clair que *la suite* $(u_n)$ *est de Cauchy* puisque, si l'on fixe $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$, il suffit de choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ pour obtenir : $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$ dès que $N < n < p$.

Cependant cette suite *ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$, car si elle convergeait, comme

$$0 < u_n^2 - 2 = 2\,u_n(u_n - u_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}},$$

on voit que $u_n^2 - 2$ tendrait vers zéro, et en utilisant le théorème valable dans $\mathbb{Q}$ sur le produit des limites, on voit que sa limite $l$ (qui est nécessairement $\geqslant 1$) vérifierait $l^2 - 2 = 0$, ce qui est impossible dans $\mathbb{Q}$ comme on l'a prouvé dans l'exemple 1 du § I.1.

### Groupes Archimédiens complets

**DÉFINITION I.3.4**

*Un groupe Archimédien est dit* **complet** *ssi dans ce groupe,* **toute suite de Cauchy converge** *; en d'autres termes, ssi dans ce groupe,* l'ensemble des suites de Cauchy coïncide avec l'ensemble des suites convergentes (cf. (3)).

D'après l'exemple 4 ci-dessus, le groupe $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ usuel *n'est pas complet.*

**PROPOSITION I.3.7**

*Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe Archimédien* **complet.** *Considérons deux suites $(a_n)$, $(b_n)$ de $G$ telles que : $(a_n)$ est croissante, $(b_n)$ est décroissante, et $b_n - a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.*

*Démonstration :*

La suite $(a_n)$ est certainement de Cauchy, car si $\varepsilon > 0$ est donné dans $G$, et si $N$ est choisi dans $\mathbb{N}$ pour que $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$, alors $|a_n - a_p| \leqslant b_N - a_N \leqslant \varepsilon$ dès que $N \leqslant n < p$. La suite $(b_n)$ est également de Cauchy. Posons $A = \lim_{n \to \infty} (a_n)$ et $B = \lim_{n \to \infty} (b_n)$. En remarquant que $a_n \leqslant b_p$ pour tous entiers $n$ et $p$, et utilisant la proposition I.3.5, on voit que $A \leqslant B$ avec

$$A = \sup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad B = \inf \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Puisque $b_n - a_n \geqslant B - A$ pour tout $n$ et $b_n - a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ par hypothèse, il s'ensuit $A = B$. Il est alors clair que cet élément $A$ est le seul élément commun à tous les segments $[a_n, b_n]$. ■

Lorsque tout couple de suites $(a_n)$, $(b_n)$ satisfaisant aux conditions de la proposition I.3.7 est tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ soit un singleton, on dit que le groupe totalement ordonné $G$ **vérifie la propriété des segments emboîtés** de Cantor (1)-Dedekind (2). Cette propriété dont une illustration est fournie en pensant à des segments sur une droite de la géométrie d'Euclide, n'est pas vérifiée par $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$. Mais elle ne suffirait pas *à elle seule* à entraîner que $G$ soit archimédien. Le lecteur attentif aura d'ailleurs remarqué à ce propos que les raisonnements utilisés jusqu'ici concernant les suites de $G$ n'ont pas encore exploité la propriété d'Archimède, qu'il est temps de faire intervenir maintenant que l'on approche des propriétés les plus profondes de l'ensemble des réels.

**DÉFINITION I.3.5**

*On dit qu'un groupe totalement ordonné* **vérifie la propriété de la borne supérieure** *ssi toute partie de ce groupe, non vide et majorée, possède une borne supérieure.*

---

(1) Georg Ferdinand Ludwig Philipp *Cantor,* mathématicien russe (1845-1918), à partir de ses travaux sur les ordinaux transfinis et les cardinaux, a fondé la théorie des Ensembles.

(2) Julius Wilhelm Richard *Dedekind,* mathématicien allemand (1831-1916), auteur de travaux importants sur les anneaux de nombres algébriques, et sur les fondements des mathématiques.

**THÉORÈME I.3.2**

> *Soit $(G, +, \leqslant)$ un* **groupe Archimédien.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
>
> (I) *$G$ vérifie la propriété de la borne supérieure.*
> (II) *Toute suite croissante et majorée de $G$ converge.*
> (III) *$G$ est complet.*

*Démonstration :*

D'abord (I) $\Rightarrow$ (II). En effet toute suite croissante et majorée admet alors une borne supérieure, donc converge d'après la proposition I.3.5.

Ensuite (I) $\Rightarrow$ (III). Soit en effet $(u_n)$ une suite de Cauchy de $G$. On sait déjà qu'elle est bornée (proposition I.3.6). Par hypothèse, pour tout $n$, $\sup\limits_{p \geqslant n} (u_p)$ existe.

Posons $U_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$ et considérons la suite $(a_n) = \sup (U_n)$. Elle est décroissante et minorée, donc, puisque (II) est vérifiée, elle converge : appelons $\lambda$ sa limite. Si $\varepsilon > 0$ est donné, on choisit $\varepsilon' > 0$ tel que $3\,\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ (théorème I.2.1). Choisissons d'abord $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon'$ dès que $N_1 \leqslant n < p$, ensuite $N_2 \geqslant N_1$ pour que $a_{N_2} - \lambda \leqslant \varepsilon'$ et enfin $N_3 \geqslant N_2$ pour que $a_{N_3} - u_{N_3} \leqslant \varepsilon$. Il suffit de choisir $n \geqslant N_3$ pour avoir :

$$|u_n - \lambda| \leqslant |u_n - u_{N_3}| + |u_{N_3} - a_{N_2}| + |a_{N_2} - \lambda| \leqslant 3\,\varepsilon' \leqslant \varepsilon .$$

Donc $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$, ce qui prouve que (III) est vérifié.

Maintenant (III) $\Rightarrow$ (II). Par hypothèse $G$ est complet. Soit $(a_n)$ une suite croissante et majorée. Si elle n'était pas de Cauchy, on aurait $\varepsilon > 0$ dans $G$ et une suite strictement croissante $(N_k)$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $a_{N_{k+1}} - a_{N_k} \geqslant \varepsilon$ pour tout $k$, d'où $a_{N_k} - a_{N_0} \geqslant k\,.\,\varepsilon$, et *puisque $G$ est Archimédien,* on voit que $(a_n)$ ne serait pas majorée, contrairement à l'hypothèse. Donc la suite $(a_n)$ est de Cauchy, donc elle converge puisque $G$ est complet.

Pour finir (II) $\Rightarrow$ (I). Soit $E \subset G$ une partie non vide, admettant un majorant $b$. Si Max $(E)$ existe, on a trouvé la borne supérieure de $E$. Sinon soit $a$ un élément particulier de $E$. A partir de $a_0 = a$, $b_0 = b$ on peut définir par récurrence deux suites $(a_n)$, $(b_n)$ de $G$ telles que :

$$(\mathscr{P}_n) \quad a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n < b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0 \text{ et } 2^i\,.\,(b_i - a_i) \leqslant b_0 - a_0 .$$

En effet, arrivés à l'étape $n$, choisissons $h \in G$, $h > 0$, pour que $2\,.\,h \leqslant b_n - a_n$ et posons : $c_0 = a_n$, $c_1 = a_n + h$, $c_2 = a_n + 2\,h$ et $c_3 = b_n$. Notons $k$ le plus petit des $i \in [\![1, 3]\!]$ tels que $c_i$ majore $E$. On réalise $(\mathscr{P}_{n+1})$ en prenant $a_{n+1} = c_{k-1}$ et $b_{n+1} = c_k$. Finalement $(\mathscr{P}_n)$ est vérifié à tout rang $n$. Puisque (II) est vraie par hypothèse la suite croissante $(a_n)$ majorée par $b$, a une limite $L$. Mais il est clair que $b_n - a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ dans $G$.

*Puisque $G$ est archimédien,* il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^N\,.\,\varepsilon > b_0 - a_0$, et alors pour $n \geqslant N$, $2^n\,.\,(b_n - a_n) \leqslant b_0 - a_0 < 2^N\,.\,\varepsilon \leqslant 2^n\,.\,\varepsilon$, ce qui prouve que $b_n - a_n \leqslant \varepsilon$, d'où il résulte que $b_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$ et que $L = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (a_n) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (b_n)$. Comme, par construction, tous les $b_n$ majorent $E$, on voit que $L$ majore $E$. Comme tous les $a_n$ sont éléments de $E$, on voit que $L = \sup (E)$. Donc (I) est vérifié. ■

***Exercice 1 :*** Dans le groupe $(\mathbb{Q}^*, \times, \leqslant)$ montrer que l'inégalité $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$ $(n \in \mathbb{N})$, qui a été utilisée dans l'exemple 2 avec $h > 0$, reste valable pour $h \geqslant -1$.

***Exercice 2 :*** On ordonne $\mathbb{Z}^2$ lexicographiquement. Donner un exemple, dans ce groupe additif, de couples de suites $(a_n)$, $(b_n)$, l'une croissante, l'autre décroissante, telle que $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n$ et $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \varnothing$.

***Exercice 3 :*** On reprend la suite de rationnels définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ de l'exemple 4. Montrer que la convergence de $u_n^2$ vers 2 est bien plus rapide qu'il n'est indiqué dans le texte. En partant de $u_1^2 - 2 = \frac{1}{4}$ et en minorant $(2\,u_n)^2$ par 8, montrer qu'on arrive à la majoration $u_n^2 - 2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{5.2^{n-1}-3}$. Par exemple $u_5^2 - 2 \leqslant 10^{-23}$.

***Exercice 4 :*** Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe abélien totalement ordonné non discret et non nul. On suppose que toute suite croissante et majorée de $G$ converge. Montrer que $G$ est nécessairement archimédien.

*Indication :* Prendre $a > 0$ et $b > 0$ dans $G$ et considérer la suite $(na)$.

***Exercice 5 :*** Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe Archimédien. On suppose que $G$ vérifie la propriété des segments emboîtés de Cantor-Dedekind. Montrer que $G$ est complet.

## § I.4 *LE THÉORÈME D'ISOMORPHISME*

**DÉFINITION I.4.1**

*Un groupe abélien $G$ (noté additivement) est dit* **divisible** *ssi pour tous $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in G$ tel que $n \,.\, x = a$.*

***Exemple 1 :*** Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(\mathbb{Q}^n, +)$ est divisible, mais $(\mathbb{Z}^n, +)$ ne l'est pas.

Bien entendu, en notation *multiplicative*, $n \,.\, x = a$ est à remplacer par : $x^n = a$.

***Exemple 2 :*** Les groupes $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$,et *a fortiori* $(\mathbb{Q}^*, \times)$, ne sont pas divisibles.

Rappelons que, par convention, nous avons appelé **groupe Archimédien** tout groupe abélien non nul, totalement ordonné, non discret et archimédien.

**PROPOSITION I.4.1**

*Un groupe Archimédien* **complet** *est divisible.*

*Démonstration :*

Soit $a \in G$. On peut supposer $a > 0$. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $E = \{t \in G_+^* \mid n \,.\, t > d\}$ est non vide, car $G$ est archimédien, et il est minoré par 0. Puisque $G$ est complet, $E$ admet une borne inférieure $\tau$, et on a : $n \,.\, \tau \geqslant a$, d'où $\tau > 0$. Si l'on avait $n \,.\, \tau > a$, on en déduirait, en posant $\delta = n \,.\, \tau - a$, que : $0 < \delta < n \,.\, \tau$.

$\varepsilon > 0$ et $\delta'$ pour que $n \,.\, \varepsilon \leqslant \delta' < \delta$ (ce qui est possible à cause du fait que $G$ est non discret et par le théorème I.2.1), on aurait $n \,.\, (\tau - \varepsilon) > n \,.\, \tau - \delta = a$. Donc l'élément $\tau - \varepsilon > 0$ serait dans $E$ contrairement au fait que $\tau$ est la borne inférieure de $E$. Donc, $n \,.\, \tau = a$. ■

Considérons un groupe abélien *divisible* $(G, +)$. Pour tous $a \in G \backslash \{0\}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe donc $b \in G$ tel que $n \,.\, b = a$. Si $G$ n'a pas d'élément de torsion, cet élément $b$ est unique. Or c'est justement le cas lorsque $G$ est *totalement ordonné*. On peut alors noter $\frac{1}{n} \cdot a$ cet unique élément $b$. Puis, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on pose $\frac{p}{n} \cdot a = p \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot a \right)$ et l'on vérifie aisément que, pour tout $d \in \mathbb{Z}^*$, $\frac{pd}{nd} \cdot a = \frac{p}{n} \cdot a$. On a donc défini une application $f_a : \mathbb{Q} \longrightarrow G$, $r \mapsto r \,.\, a$ telle que $r \cdot a = \frac{p}{n} \cdot a$ pour tous $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifiant $r = \frac{p}{n}$. Le lecteur contrôlera sans peine que $f_a$ est un *homomorphisme injectif* du groupe additif $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(G, +)$, qui est *croissant* si $a > 0$ (resp. décroissant si $a < 0$), $(\mathbb{Q}, +)$ étant bien entendu muni de l'ordre usuel. Nous noterons $\mathbb{Q} \,.\, a$ l'image de $f_a$. On a, pour tout $a \in G$ et tous $(r, s) \in \mathbb{Q}^2 : r \,.\, (s \,.\, a) = (rs) \,.\, a$, et $s \,.\, a = a$, d'où finalement une **structure de $\mathbb{Q}$-ev** pour $(G, +, .)$.

**DÉFINITION I.4.2**

*Soit G un groupe Archimédien. Une partie E de G est dite* ***partout dense dans G*** *ssi pour tous x et y dans G tels que $x < y$, on peut trouver $z \in E$ tel que $x < z < y$.*

**PROPOSITION I.4.2**

*Soit $(G, +, \leqslant)$ un groupe Archimédien divisible. Pour tout $a \in G \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q} \,.\, a$ est* ***partout dense*** *dans G, ce qui signifie : pour tous $x \in G$ et $y \in G$ avec $x < y$, il existe $z \in \mathbb{Q} \,.\, a$ tel que $x < z < y$.*

*Démonstration :*

On se donne $x$ et $y$ dans $G$ avec $x < y$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q \,.\, (y - x) > a$. Ensuite, soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\left( \frac{p}{q} \right) \cdot a \leqslant x < \frac{p+1}{q} \cdot a$ (cf. proposition I.3.1). Alors l'élément $z = \frac{p+1}{q} \cdot a$ vérifie $x < z < y$ et $z \in \mathbb{Q} \,.\, a$. ■

**COROLLAIRE**

*Si G est un groupe Archimédien divisible, et $a \in G \backslash \{0\}$, pour tout $x \in G$, il existe une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de $\mathbb{Q} \,.\, a$ qui converge vers x.*

*Démonstration :*

On peut évidemment supposer $x \notin \mathbb{Q} \, . \, a$, et $a > 0$. On part de $x_0 = m \, . \, a$, où $m \in \mathbb{Z}$ est tel que $m \, . \, a < x < (m+1) \, . \, a$. Supposons construits $x_0, x_1, \ldots, x_n$, éléments de $\mathbb{Q} \, . \, a$ de telle sorte que $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, et $x - x_n < \dfrac{1}{2^n} \cdot a$. Pour définir $x_{n+1}$ nous envisageons les deux seuls cas possibles :

$$\text{si } x - x_n < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot a \,, \quad \text{on prend} \quad x_{n+1} = x_n \,;$$

$$\text{si } x - x_n > \frac{1}{2^{n+1}} \cdot a \,, \quad \text{on prend} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot a \,.$$

On a défini par récurrence une suite $(x_n)$ qui est croissante et qui converge vers $x$. ■

Bien sûr, il y a beaucoup de suites à termes dans $\mathbb{Q} \, . \, a$ qui convergent vers $x$. Remarquons que, *pour qu'une suite $(r_n \, . \, a)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{Q} \, . \, a$ soit de Cauchy, il faut et il suffit que la suite $(r_n)$ soit de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ usuel.*

**THÉORÈME I.4.1**

> *Soit $(G, +, \leqslant)$ et $(\Gamma, +, \leqslant)$ deux groupes* **Archimédiens complets.** *Pour tous $a > 0$ dans $G$ et $\alpha > 0$ dans $\Gamma$, il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes $f : G \longrightarrow \Gamma$* **croissant** *et tel que $f(a) = \alpha$.*
> *Cet homomorphisme est un* **isomorphisme.**

*Démonstration :*

Si $f$ existe, elle vérifie $f(n \, . \, a) = n \, . \, \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis $f\left(\dfrac{1}{q} \cdot a\right) = \dfrac{1}{q} \cdot \alpha$ pour $q \in \mathbb{N}^*$ (car $q \cdot f\left(\dfrac{1}{q} \cdot a\right) = f(1 \cdot a) = \alpha$), d'où enfin $f(r \, . \, a) = r \, . \, \alpha$ pour $r \in \mathbb{Q}$. De plus elle transforme toute suite croissante et majorée en une suite croissante et majorée, d'où grâce au *corollaire* ci-dessus, l'*unicité* de $f$.

Montrons *l'existence* de $f$. Pour cela, notons d'abord que si $(r_n)$ est une suite dans $\mathbb{Q}$, on a : $r_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{Q}$ ssi $r_n \, . \, a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ dans $G$ (conséquence immédiate des propositions I.4.1 et I.4.2). Soit alors $x \in G$. Pour toute suite croissante $(r \, . \, a)$ de $\mathbb{Q} \, . \, a$ qui converge vers $x$, la suite $r_n \, . \, \alpha$ est croissante et majorée dans $\Gamma$, donc converge ($\Gamma$ est complet). En réalité, $\lim\limits_{n \to \infty} r \, . \, \alpha$ **ne dépend pas du choix** de $(r_n)$, car si $(r_n \, . \, a)$ et $(r'_n \, . \, a)$ tendent vers $x$ en croissant, on a $(r_n - r'_n) \, . \, a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, donc $r_n - r'_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{Q}$, et donc $r_n \, . \, \alpha - r'_n \, . \, \alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\Gamma$. On peut donc définir l'application $f : G \longrightarrow \Gamma$ ainsi : si $x \in G$, $f(x)$ est $\lim\limits_{n \to \infty} r_n \, . \, \alpha$ pour toute suite croissante $(r_n)$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $r_n \, . \, a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $f$ satisfait à toutes les propriétés requises.

En premier lieu, $f$ est *croissante :* en effet, si $x < y$ dans $G$, la proposition I.4.2 montre qu'il existe $b$ et $c$ dans $\mathbb{Q} \,.\, a$ tels que $x < b < c < y$. A l'aide du corollaire on construit deux suites croissantes $(r_n \,.\, a)$ convergeant vers $x$ et $(s_n \,.\, a)$ convergeant vers $y$ (en l'affinant pour que $(\forall n)\, c \leqslant s_n \,.\, a$). Alors :

$$(\forall n) \quad r_n \,.\, \alpha < f(b) < f(c) < s_n \,.\, \alpha \ ,$$

d'où en passant à la limite dans ces inégalités :

$$f(x) \leqslant f(b) < f(c) \leqslant f(y)\,, \quad \text{d'où} \quad f(x) < f(y)\,.$$

On a même prouvé que $f$ est strictement croissante, donc *injective*. En second lieu, $f$ est un *homomorphisme de groupes*. En effet, si $x \in G$ et $y \in G$, en choisissant deux suites croissantes $(r_n \,.\, a)$ et $(s_n \,.\, a)$ de limites respectives $x$ et $y$ ($r_n$ et $s_n$ rationnels), on a pour tout $n$ :

$$r_n \,.\, \alpha + s_n \,.\, \alpha = (r_n + s_n) \,.\, \alpha \ .$$

De plus (cf. proposition I.3.3)

$$r_n \,.\, a + s_n \,.\, a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x + y \quad \text{et} \quad r_n \,.\, \alpha + s_n \,.\, \alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x) + f(y)\,.$$

Mais la suite $(r_n + s_n) \,.\, a$ est croissante, de limite $x + y$, donc

$$(r_n + s_n) \,.\, \alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x + y) \quad \text{et par conséquent} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)\,.$$

En dernier lieu, la *surjectivité* de $f$ est immédiate grâce au corollaire ci-dessus. En effet, soit $\xi \in \Gamma$. On construit une suite croissante de $\mathbb{Q} \,.\alpha$ de limite $\xi$, soit $(r_n \,.\, \alpha)$. Alors la suite $(r_n)$ est croissante et majorée dans $\mathbb{Q}$, donc la suite $(r_n \,.\, a)$ est croissante et majorée dans $G$, où elle admet en conséquence une limite $x$, et d'après la façon dont l'application $f$ a été construite, on constate bien que $f(x) = \xi$. ■

***Remarque 1 :*** Si l'on s'affranchit de l'hypothèse : $a > 0$ et $\alpha > 0$, pour ne garder que : $a \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, la conclusion essentielle demeure, la croissance ou la décroissance de $f$ étant régie par la *règle des signes*.

***Remarque 2 :*** Ce n'est que par commodité que nous avons noté les deux groupes abéliens $G$ et $\Gamma$ additivement. Nous aurons l'occasion au § I.6 d'appliquer le théorème I.4.1 avec l'un des groupes noté additivement et l'autre multiplicativement.

***Exercice 1 :*** Montrer qu'un groupe abélien totalement ordonné et discret (cf. définition I.2.2) n'est pas divisible.

***Exercice 2 :*** Donner un exemple de groupe abélien divisible admettant des éléments de torsion. (Penser aux groupes quotients de $(\mathbb{Q}, +)$.)

***Exercice 3 :*** Pour qu'un groupe abélien $(G, +)$ puisse être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev, il faut et il suffit qu'il soit *divisible* et *sans torsion*. Cette structure est alors *unique*.

## § I.5 *LES NOMBRES RÉELS*

### Complété de Cauchy d'un groupe Archimédien

Considérons un groupe **Archimédien** $(G, +, \leqslant)$ que nous supposons non complet : nous allons voir comment l'utilisation des suites de Cauchy de $G$ permet de le **plonger** dans un groupe Archimédien **complet.**

Pour cela, commençons par considérer l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, G)$ de toutes les *suites* à valeurs dans $G$. Muni de son addition naturelle (*i.e.* la somme de deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ est la suite $(x_n + y_n)$), c'est un *groupe abélien :* l'élément neutre est la suite nulle ; l'opposée de $(x_n)$ est $(-x_n)$.

Désignons maintenant par $\mathcal{C}$ l'ensemble des *suites de Cauchy* de $G$. Les *suites constantes* (et en particulier la suite nulle) appartiennent à $\mathcal{C}$. On sait de plus que la différence de deux suites de Cauchy est de Cauchy, donc $\mathcal{C}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, G), +)$. En particulier l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des *suites de $G$ tendant vers* 0 est un sous-groupe de $\mathcal{C}$. Nous pouvons donc former le *groupe quotient* $\mathcal{R}_G = \mathcal{C}/\mathcal{C}_0$ : par définition les éléments de $\mathcal{R}_G$ sont les *classes d'équivalence* de suites de Cauchy de $G$ pour la relation d'équivalence $\rho$ (congruence modulo $\mathcal{C}_0$) ainsi définie : si $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ et $y = (y_n) \in \mathcal{C}$, alors $x \rho y$ ssi $x - y \in \mathcal{C}_0$, c'est-à-dire ssi $x_n - y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{R}_G$ l'application canonique, qui envoie $x = (x_n)$ sur sa classe mod $(\rho)$ : la loi d'addition de $\mathcal{R}_G$ est telle que $F$ est un *homomorphisme de groupes*. On a $\operatorname{Ker}(F) = \mathcal{C}_0$, $\operatorname{Im}(F) = \mathcal{R}_G$. A tout $g \in G$ on peut associer la *suite constante* de valeur $g$. On obtient ainsi une injection naturelle $J : G \longrightarrow \mathcal{C}$ qui est un homomorphisme de groupes. Finalement cela nous permet de définir un homomorphisme de groupes, dit *naturel :*

(1) $$I = F \circ J : G \longrightarrow \mathcal{R}_G .$$

**PROPOSITION I.5.1**

|| *L'homomorphisme naturel $I$ défini par* (1) *est* ***injectif.***

*Démonstration :*

Il s'agit de voir que $\operatorname{Ker}(I) = \{0\}$. Or un $g \in G$ est envoyé sur 0 par $I$ ssi la suite constante de valeur $g$ tend vers 0 dans $G$, ce qui signifie que $g = 0$. ■

Notre but sera atteint si nous réussissons à doter $\mathcal{R}_G$ d'une structure de groupe Archimédien complet qui *prolonge* la structure de groupe Archimédien de $G$ *via* $I$. Pour cela commençons par définir sur $\mathcal{R}_G$ un *ordre* convenable.

**LEMME 1**

|| *Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{C}$ ainsi définie : si $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ et $y = (y_n) \in \mathcal{C}$, alors $x \mathcal{R} y$ ssi il existe $a > 0$ dans $G$ et $N$ dans $\mathbb{N}$ tels que $y_n - x_n \geqslant a$ pour tout $n \geqslant N$.*

*Cette relation est* **transitive, antisymétrique,** *et* **compatible avec la relation d'équivalence** $\rho$.

*Démonstration :*

La transitivité et l'antisymétrie sont immédiates. Montrons la compatibilité avec $\rho$, c'est-à-dire si $x \mathcal{R} y$, si $x' \rho x$ et $y' \rho y$, alors $x' \mathcal{R} y'$. Par hypothèse il existe $a > 0$ dans $G$ et $N$ dans $\mathbb{N}$ tels que $y_n - x_n \geqslant a$ pour $n \geqslant N$. Prenons alors dans $G$ un élément $\varepsilon > 0$ tel que $3 . \varepsilon \leqslant a$, puis $N_1 \in \mathbb{N}$ $(N_1 > N)$ tel que $|x_n - x'_n| \leqslant \varepsilon$ **et** $|y_n - y'_n| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N_1$. Alors pour $n \geqslant N_1$, on a forcément $y'_n - x'_n \geqslant \varepsilon$. Donc $x' \mathcal{R} y'$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de définir une **relation d'ordre** $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{R}_G$ en convenant que (pour $X \in \mathcal{R}_G$ et $Y \in \mathcal{R}_G$) $X \mathcal{S} Y$ ssi $x \mathcal{R} y$ pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ **ou** $X = Y$. Il est clair d'après le lemme 1 que pour avoir $X \mathcal{S} Y$ avec $X \neq Y$, il faut et il suffit que l'on ait $x \mathcal{R} y$ pour *au moins* un couple $(x, y) \in X \times Y$. Ci-dessous, cette relation d'ordre $\mathcal{S}$ sera notée $\preccurlyeq$ et selon la coutume, on abrégera « $X \preccurlyeq Y$ et $X \neq Y$ » en : « $X \prec Y$ ».

**LEMME 2**

*La relation d'ordre $X \preccurlyeq Y$ sur $\mathcal{R}_G$ est* totale. *Elle prolonge celle de G (lorsqu'on identifie G à un sous-groupe de $\mathcal{R}_G$ à l'aide de l'homomorphisme injectif I).*

*Démonstration :*

La dernière assertion est immédiate. Pour montrer que deux éléments quelconques $X$ et $Y$ de $\mathcal{R}_G$ sont comparables, supposons $X \neq Y$ et choisissons des représentants $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ de $X$ et $Y$ dans $\mathcal{C}$. Puisque $x_n - y_n$ ne tend pas vers zéro, on peut trouver $a$ dans $G$ et une suite d'indices $(n_k)$ tels que $|x_{n_k} - y_{n_k}| \geqslant a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite on choisit $\varepsilon > 0$ dans $G$ tel que $3 . \varepsilon \leqslant a$, auquel on associe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_p| \leqslant \varepsilon$ et $|y_n - y_p| \leqslant \varepsilon$ dès que $N \leqslant n < p$. Il suffit maintenant de fixer $k$ pour que $n_k \geqslant N$. Dans ces conditions, pour $n \geqslant n_k$, on est sûr que $|x_n - x_{n_k}| \leqslant \varepsilon$ et $|y_n - y_{n_k}| \leqslant \varepsilon$. Dès lors, ou bien $x_{n_k} < y_{n_k}$, ce qui entraîne $x_{n_k} + a \leqslant y_{n_k}$, et nécessairement $y_n - x_n \geqslant \varepsilon$, d'où $x \mathcal{R} y$ et $X \prec y$ ou bien $x_{n_k} > y_{n_k}$, c'est-à-dire $y_{n_k} + a \leqslant x_{n_k}$, et alors $x_n - y_n \geqslant \varepsilon$, d'où $y \mathcal{R} x$ et $Y \prec X$. ■

Dans ce qui suit, on identifiera une fois pour toutes $G$ à un sous-groupe de $\mathcal{R}_G$ à l'aide de $I$.

**LEMME 3**

*La relation d'ordre $X \preccurlyeq Y$ sur $\mathcal{R}_G$ définit sur $\mathcal{R}_G$ une structure de* **groupe Archimédien** *dont G est un sous-groupe* **partout dense.**

*Démonstration :*

Nous savons déjà que $\mathcal{R}_G$ est un groupe abélien. Pour montrer que c'est un *groupe totalement ordonné* (cf. définition I.2.1), prenons $X$, $Y$ et $H$ dans $\mathcal{R}_G$, avec $X \prec Y$. Choisissons des représentants $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ et $h = (h_n)$ de $X$, $Y$ et $H$ respectivement dans $\mathcal{C}$. Alors $x \mathcal{R} y$. Comme $y_n + h_n - (x_n + h_n) = y_n - x_n$ pour tout $n$, on en déduit que $x + h \mathcal{R} y + h$, d'où $X + H$

finalement $X \preccurlyeq Y \Rightarrow X + H \preccurlyeq Y + H$. Donc $(\mathcal{R}_G, \preccurlyeq)$ est un groupe totalement ordonné, dont $G$ est un sous-groupe totalement ordonné d'après le lemme 2.

Comme $G$ est déjà *non discret*, c'est le cas *a fortiori* de $\mathcal{R}_G$.

Montrons que $\mathcal{R}_G$ est *archimédien*. Soit $X \succ 0$ et $Y \succ 0$ dans $\mathcal{R}_G$ représentés par $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans $\mathcal{C}$. Choisissons $a > 0$ dans $G$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_n \geqslant a > 0$ pour $n \geqslant N$. (C'est possible, parce que $X \succ 0$, et par définition de $\preccurlyeq$.) Quant à la suite de Cauchy $(y_n)$, elle est bornée, d'où l'existence de $b$ tel que $y_n \leqslant b$ $(\forall n)$. Dans le groupe $\mathcal{R}_G$ on a donc $0 \prec a \preccurlyeq X$ et $Y \preccurlyeq b$. Mais $G$ étant archimédien il existe un naturel $p$ tel que $p \,.\, a \geqslant b$. Cet entier $p$ vérifie *a fortiori* $p \,.\, X \succcurlyeq Y$ dans $\mathcal{R}_G$.

Montrons enfin que $G$ est *partout dense* dans $\mathcal{R}_G$. Soit $X$, $Y$ de $\mathcal{R}_G$ avec $X \prec Y$, représentés par $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ dans $\mathcal{C}$ (avec $x \,\mathcal{R}\, y$). Fixons $a > 0$ dans $G$ et $N_1$ dans $\mathbb{N}$ pour que $y_n - x_n \geqslant a$ dès que $n \geqslant N_1$ et prenons $\varepsilon > 0$ dans $G$ tel que $4 \,.\, \varepsilon \leqslant a$, puis $N \geqslant N_1$ dans $\mathbb{N}$ pour que $|x_n - x_p| \leqslant \varepsilon$ et $|y_n - y_p| \leqslant \varepsilon$ lorsque $N \leqslant n < p$. Alors l'élément $Z = x_N + 2 \,.\, \varepsilon$ de $G$ vérifie $X \prec Z \prec Y$. ■

**LEMME 4**

> *Soit $x = (x_n)$ une suite de Cauchy de $G$, qui représente $X \in \mathcal{R}_G$. Alors la suite $(x_n)$, considérée dans $\mathcal{R}_G$,* **converge vers X.**

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon \succ 0$ dans $\mathcal{R}_G$. Choisissons $\varepsilon' > 0$ *dans* $G$ tel que $0 \prec 2\,\varepsilon' \prec \varepsilon$, ce qui est possible puisque $G$ est dense dans $\mathcal{R}_G$ et non discret. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_p| \leqslant \varepsilon'$ dès que $N \leqslant n < p$. Fixons $n \geqslant N$ et notons $[x_n]$ la suite *constante* de valeur $x_n$. Les inégalités $-\varepsilon' \leqslant x_p - x_n \leqslant \varepsilon'$ vraies pour tout $p$ montrent que : $[x_n - 2\,\varepsilon'] \,\mathcal{R}\, x \,\mathcal{R}\, [x_n + 2\,\varepsilon']$, d'où, dans $\mathcal{R}_G$ : $-\varepsilon \preccurlyeq X - x_n \preccurlyeq \varepsilon$, autrement dit $|X - x_n| \preccurlyeq \varepsilon$. Mais cela est vrai pour tout $n \geqslant N$. Donc $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X$. ■

**THÉORÈME I.5.1**

> *Le groupe Archimédien $(\mathcal{R}_G, +, \preccurlyeq)$ est* **complet.** *Il admet $G$ comme sous-groupe* **partout dense.**

*Démonstration :*

La seconde assertion a déjà été prouvée avec le lemme 3. Il reste à voir que $\mathcal{R}_G$ est complet. Soit donc une suite de Cauchy $(X_n)$ dans $\mathcal{R}_G$. Formons dans $G$ une suite $(\varepsilon_n)$ d'éléments $> 0$ et telle que $\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ : c'est possible en utilisant le théorème I.2.1 et le fait que $G$ est archimédien. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \in G$ tel que $|g_n - X_n| \preccurlyeq \varepsilon_n$. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$|g_n - g_p| \preccurlyeq |g_n - X_n| + |X_n - X_p| + |X_p - g_p| \preccurlyeq \varepsilon_n + \varepsilon_p + |X_n - X_p| ,$$

d'où l'on déduit aisément que la suite $(g_n)$ est de Cauchy *dans* $G$. Soit $X$ l'élément de $\mathcal{R}_G$ qu'elle représente. Alors $g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X$ d'après le lemme 4 ; et puisque $g_n - X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, il s'ensuit que : $X_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} X$. C'est donc que toute suite de Cauchy de $\mathscr{R}_G$ converge. ■

**DÉFINITION I.5.1**

*Le groupe Archimédien complet ($\mathscr{R}_G$, + , $\preccurlyeq$ ) construit ci-dessus à partir de G s'appelle le* **complété de Cauchy** *du groupe Archimédien G.*

D'après le théorème d'isomorphisme du § I.4, toutes les complétions de Cauchy d'un groupe Archimédien quelconque conduisent, à isomorphisme près, au **même** groupe Archimédien complet. Or le groupe Archimédien le plus simple qui vient naturellement à l'esprit est le groupe additif des nombres rationnels muni de l'ordre usuel. C'est donc à partir des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ (Cantor les appelait « suites fondamentales ») que nous construirons les nombres réels.

## L'ensemble $\mathbb{R}$ et ses structures

**DÉFINITION I.5.2**

*Le complété de Cauchy du groupe Archimédien ($\mathbb{Q}$, + , $\leqslant$ ) usuel s'appelle groupe additif des* **nombres réels** *et se note* $\mathbb{R}$. *Sa relation d'ordre se note* $\leqslant$.

D'après l'étude qui précède on sait déjà que ($\mathbb{R}$, + , $\leqslant$ ) est un groupe **Archimédien** (c'est-à-dire un groupe non nul, abélien, totalement ordonné, non discret et archimédien) et **complet.** Il contient ($\mathbb{Q}$, + , $\leqslant$ ) comme sous-groupe **totalement ordonné** et **partout dense,** ce qui signifie qu'entre deux nombres réels distincts $x$ et $y$ il existe toujours un rationnel $z$. D'ailleurs tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ peuvent être ordonnés par l'ordre induit par celui de $\mathbb{R}$. Soit $H$ un tel sous-groupe $\neq \{0\}$. S'il est *discret,* $H_+^*$ admet un plus petit élément $a$, et l'on a $\mathbb{Z} \,.\, a \subset H$. Mais si $x \in H$, comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $m$ unique dans $\mathbb{Z}$ tel que $ma \leqslant x < (m+1)\,a$, et $x - ma < a \in H$, donc $x - ma = 0$ et $H = \mathbb{Z} \,.\, a$ ($H$ est donc lui aussi archimédien, *isomorphe à* ($\mathbb{Z}$, + )).

Si $H$ est *non discret,* comme sous-groupe de ($\mathbb{R}$, + ), il est Archimédien et on peut donc construire son complété de Cauchy qui, nous le savons, doit être isomorphe à $\mathbb{R}$. D'après le théorème I.5.1, il s'ensuit qu'alors *$H$ est dense dans* $\mathbb{R}$. Nous avons donc prouvé :

**PROPOSITION I.5.2**

*Un sous-groupe de* ($\mathbb{R}$, + ) *est soit discret, soit partout dense.*

En qualité de groupe Archimédien complet, $\mathbb{R}$ est **divisible** (cf. proposition I.4.1), et donc le *produit* $r \,.\, x$ d'un rationnel $r$ et d'un réel $x$ est défini de manière naturelle (cf. § I.4), et $\mathbb{R}$ se trouve ainsi doté d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev. A partir du fait que $1 \,.\, x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remar en revenant à la définition de $r \,.\, x$, que *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $r \in \mathbb{Q}$, *alors* $r \,.\, x$ *n'est autre que le produit ordinaire de* $r$ *et* $x$ *dans* $\mathbb{Q}$.

Nous allons maintenant définir une **multiplication** sur $\mathbb{R}$ qui *prolonge* celle de $\mathbb{Q}$. Pour cela nous pouvons utiliser le théorème I.4.1 qui précise que, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (noté $\mathbb{R}^*$) il y a un, et un seul, isomorphisme de groupes abéliens monotone $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(1) = a$. Notons-le $f_a$. Nous remarquons que $f_a|_{\mathbb{Q}}$ est nécessairement l'homomorphisme de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R} : \lambda \longrightarrow \lambda \,.\, a$ tel qu'il a été défini dans l'étude précédant la proposition I.4.2.

Dans le cas où $a = 0$ nous poserons par convention $f_0 =$ l'application nulle (*i.e.* l'application constante de valeur 0).

**THÉORÈME I.5.2**

> *La loi de composition interne* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto f_a(b)$ *que l'on note* $a \,.\, b$ *et que l'on appelle produit de* $a$ *par* $b$ *(dans cet ordre) dote le groupe abélien* $(\mathbb{R}, +)$ *d'une structure de* ***corps commutatif,*** *dont* $\mathbb{Q}$ *est un* ***sous-corps.***

*Démonstration :*

On a d'abord $f_a(1) = a$ pour $a \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire $a \,.\, 1 = a$). D'autre part $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donc $1 \,.\, a = a \,.\, 1$ est donc *élément neutre* de la multiplication.

Chaque $f_a$ étant un homomorphisme de groupes additifs, on a : $f_a(x + y) = f_a(x) + f_a(y)$. Donc $a \,.\, (x + y) = a \,.\, x + a \,.\, y$ pour tous $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$. $0 \,.\, a$ est l'image de $a$ par $f_0$, donc $0 \,.\, a = 0$ ; et $a \,.\, 0 = f_a(0) = 0$ puisque $f_a$ est un homomorphisme de groupes. Si $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f_a \circ f_b$, composé de deux *isomorphismes* de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, et envoyant 1 sur $f_a(b) = a \,.\, b$, est monotone puisque $f_a$ et $f_b$ le sont, donc c'est $f_{a\,.\,b}$, ce qui permet de démontrer l'*associativité* de la multiplication en appliquant $f_a \circ f_b = f_{a\,.\,b}$ à un élément quelconque $c$ de $\mathbb{R}$.

On a déjà remarqué (à la suite de la proposition I.5.2) que si $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, $a \,.\, b$ est le produit ordinaire de $a$ et $b$ dans $\mathbb{Q}$ : la multiplication des réels prolonge bien celle des rationnels.

Le point le plus délicat est la démonstration de la commutativité : elle est évidente si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ car

$$\begin{aligned} n \,.\, a = a + a + \cdots + a = f_a(1) + \cdots + f_a(1) &= \\ = f_a(1 + 1 + \cdots + 1) = f_a(n) = a \,.\, n \,, \end{aligned}$$

d'où aussi $n \,.\, a = a \,.\, n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. De même, $q \,.\, f_a\left(\dfrac{1}{q}\right) = f_a(1) = a$, d'où $f_a\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1}{q} \cdot a = a \cdot \dfrac{1}{q}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $a \,.\, \lambda = \lambda \,.\, a$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{R}$. On remarque au passage que

$$|a \,.\, \lambda| = |a| \,.\, |\lambda| = |\lambda| \,.\, |a| \quad \text{pour} \quad (\lambda, a) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \,.$$

Il reste le cas où $a$ et $b$ sont réels quelconques, que l'on peut d'ailleurs supposer tous deux $> 0$. Considérons $a$ comme limite d'une suite $(a_n)$ de $\mathbb{Q}$ et $b$ comme limite d'une suite $(b_n)$ de $\mathbb{Q}_+^*$. Alors

$$\begin{aligned} a \,.\, b - a_n \,.\, b_n &= a \,.\, (b - b_n) + a \,.\, b_n - a_n \,.\, b_n = \\ &= a \,.\, (b - b_n) + b_n \,.\, a - b_n \,.\, a_n = a \,.\, (b - b_n) + \end{aligned}$$

Notons $K$ un entier $\geqslant 1$ qui majore $a$ et tous les $b_n$ ; soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$-\frac{1}{2K}.\varepsilon \leqslant b - b_n \leqslant \frac{1}{2K}\cdot\varepsilon\,, \quad -\frac{1}{2K}\cdot\varepsilon \leqslant a - a_n \leqslant \frac{1}{2K}\cdot\varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqslant N\,.$$

Alors pour $n \geqslant N$, par monotonie de $f_a$ et des $f_{b_n}$, on a :

$$-\varepsilon \leqslant a\,.\,b - a_n\,.\,b_n \leqslant \varepsilon\,.$$

On a donc prouvé que $a_n\,.\,b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\,.\,b$ ; mais évidemment $a_n\,.\,b_n = b_n\,.\,a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b\,.\,a$ en échangeant les rôles de $(a_n)$ et $(b_n)$. D'où $a\,.\,b = b\,.\,a$, et la commutativité est prouvée.

On en déduit $(x+y)\,.\,a = a\,.\,(x+y) = a\,.\,x + a\,.\,y$ pour tous réels $a, x, y$, ce qui montre déjà que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un *anneau commutatif.* Il reste à prouver que c'est un *corps*. Prenons $a \in \mathbb{R}^*$ : comme $f_a$ est bijective (théorème I.4.1), il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que $a\,.\,b = 1$, donc tout réel non nul est inversible, ce qui achève la démonstration, compte tenu du fait que la multiplication de $\mathbb{Q}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$. ■

Remarquons que le corps $\mathbb{R}$, comme son sous-corps $\mathbb{Q}$, est de *caractéristique nulle*.

**Fonction partie entière**

Appliquons la proposition I.3.1 au groupe $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ avec $a > 0$ et $x$ quelconque. Les relations $a\,.\,y \leqslant a\,.\,z$ et $y \leqslant z$ sont *équivalentes* pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Donc l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m\,.\,a \leqslant x < (m+1)\,.\,a$ est aussi l'unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$m = m\,.\,1 \leqslant \frac{x}{a} < (m+1)\,.\,1 = m+1\,.$$

Si $t \in \mathbb{R}$, l'unique $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant t < m+1$ s'appelle **partie entière** de $t$, et nous le noterons $\operatorname{Ent}(t)$. On a donc $\operatorname{Ent}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot a \leqslant x < \left(\operatorname{Ent}\left(\frac{x}{a}\right)+1\right)\cdot a$ pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$. L'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(n-1)\,.\,a < x \leqslant n\,.\,a$ est évidemment $-\operatorname{Ent}\left(-\frac{x}{a}\right)$.

**Valeur absolue dans $\mathbb{R}$**

Dans un groupe abélien totalement ordonné, nous avons défini une fonction $V : z \mapsto |z| = \operatorname{Max}(z, -z)$. Ici, la fonction $x \mapsto |x| = \operatorname{Max}(x, -x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ prend le nom de **valeur absolue** dans $\mathbb{R}$. Elle **prolonge** la valeur absolue définie dans $\mathbb{Q}$, avec la propriété habituelle $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Mais de plus on a l'importante formule $|x\,.\,y| = |x|\,.\,|y|$ valable pour tous réels $x$ et $y$. On en déduit que $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$. De plus, on a vu que pour $(a, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, les relations $a\,.\,x \leqslant a\,.\,y$ et $x \leqslant y$ sont équ par suite, $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ est un **groupe abélien totalement ordonné,** dont la fonction $V$ est la fonction $x \mapsto \|x\| = \operatorname{Max}\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

**Limites de suites dans $\mathbb{R}$**

$\mathbb{R}$ étant un groupe Archimédien **complet, suite convergente** *y* est **synonyme de suite de Cauchy.** Maintenant qu'on sait que $\mathbb{R}$ est un corps, cela donne de nouvelles propriétés pour les suites convergentes. Regroupons ici les résultats essentiels :

**PROPOSITION I.5.3**

*Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites dans $\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers $x$ et $y$ :*

(I) $$x_n - y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x - y$$

(II) $$|x_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} |x|$$

(III) $$\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \quad a \cdot x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \cdot x$$

(IV) $$x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y \,.$$

(V) *Si les $(x_n)$ sont tous $> 0$ ainsi que la limite $x$, alors* $\frac{1}{x_n} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$.

(VI) *Si les $(x_n)$ sont tous $> 0$ ainsi que la limite $x$, alors la suite $(x_n)$ converge aussi dans le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$.*

*Démonstration :*

(I) reprend la proposition I.3.3, valable dans tout groupe abélien totalement ordonné non discret ;

(II) résulte immédiatement de $\big||x_n| - |x|\big| \leqslant |x_n - x|$ $(n \in \mathbb{N})$ ;

(III) a déjà été utilisé dans la démonstration du théorème I.5.2 et résulte de la monotonie de $f_a$ ;

(IV) résulte de la majoration de $|x_n y_n - x_y|$ par $|x_n - x| \cdot |y_n| + |x| \cdot |y_n - y|$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit donc de choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant \mathbb{N}$, on ait à la fois

$$|y_n - y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1 + |x|)} \quad \text{et} \quad |x_n - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,Y}$$

en désignant par $Y$ un majorant $> 0$ de $\{|y_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ ;

(V) résulte de $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n}\right| = \frac{|x_n - x|}{|x| \cdot |x_n|}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir

$N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait à la fois

$$|x_n| > \frac{|x|}{2} \quad \text{et} \quad |x_n - x| \leqslant \frac{\varepsilon \cdot |x|^2}{2} ;$$

(VI) résulte de (V), puisque

$$\left\| \frac{x_n}{x} \right\| = \text{Max}\left( \frac{x_n}{x}, \frac{x}{x_n} \right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 .$$

Donc $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{R}_+^*$. ∎

**THÉORÈME I.5.3**

*Le groupe abélien totalement ordonné $P = (\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ est* ***Archimédien*** *et* ***complet.***

*Démonstration :*

$P$ contient déjà $\mathbb{Q}_+^*$ qui est non discret. L'ordre sur $P$ est celui de $\mathbb{R}$ restreint à $\mathbb{R}_+^*$. Comme $(\mathbb{Q}, +, \leqslant)$ est dense dans $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$, il s'ensuit que $(\mathbb{Q}_+^*, \times, \leqslant)$ est dense dans $P$, d'où il découle que $P$ est Archimédien.

Soit alors $(x_n)$ une suite de Cauchy de $P$. Cela signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $N \leqslant n < p$ on ait :

$$\left| \text{Max}\left( \frac{x_n}{x_p}, \frac{x_p}{x_n} \right) - 1 \right| \leqslant \varepsilon .$$

Pour ces valeurs de $n$ et $p$ on a donc à la fois

$$\left| \frac{x_n}{x_p} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \frac{x_p}{x_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon .$$

Restreignons-nous à des valeurs de $n$ et $p$ telles que $N' \leqslant n < p$, où $N'$ est choisi tel que, pour $q \geqslant N'$, on ait $\left| \dfrac{x_q}{x_{N'}} - 1 \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Cela entraîne en particulier $|x_p - x_{N'}| \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot x_{N'}$, d'où $\dfrac{1}{2} \cdot x_{N'} \leqslant x_p \leqslant \dfrac{3}{2} \cdot x_{N'}$. Posons $\varepsilon' = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\varepsilon}{x_{N'}}$ ; il correspond à $\varepsilon'$ un $N'' \in \mathbb{N}$ tel que, pour $N'' \leqslant n < p$, $|x_n - x_p| \leqslant x_p \cdot \varepsilon' \leqslant \dfrac{3}{2} \cdot x_{N'} \cdot \varepsilon' = \varepsilon$. La suite $(x_n)$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ où elle a une limite $x$. On a $x > 0$, car $x_p \geqslant \dfrac{1}{2} x_{N'}$ pour $p > N'$. La proposition I.5.3 (VI) montre alors que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$ dans $P$. ∎

**Résumé des propriétés de $\mathbb{R}$**

Rassemblons les principaux résultats qui précèdent :

- Le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ du corps commutatif $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par $\leqslant$ et devient alors un groupe **Archimédien** et **complet.**
- Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les relations $ax \leqslant ay$ et $x \leqslant y$ sont **équivalentes.**

On résume ces propriétés en disant que **le corps $\mathbb{R}$,** muni de son ordre $\leqslant$ (dit usuel), **est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien et complet.**

Ces propriétés conduisent à définir la notion générale de *corps commutatif totalement ordonné, archimédien et complet :* par définition, on nomme ainsi tout corps commutatif $K$ muni d'un ordre total $\leqslant$ tel que $(K, +, \leqslant)$ soit un groupe Archimédien complet, et tel que les relations $ax \leqslant ay$ et $x \leqslant y$ soient équivalentes pour tout $a > 0$ dans $K$ et tous $(x, y) \in K^2$. Un tel corps est nécessairement de caractérique 0, donc contient $\mathbb{Q}$. Comme conséquence du théorème d'isomorphisme I.4.1, on obtient alors :

**Théorème I.5.4**

> *Si $(K, \leqslant)$ est un corps commutatif totalement ordonné, archimédien et complet, il existe un, et un seul,* **isomorphisme croissant** *$f$ du corps $\mathbb{R}$ dans le corps $K$, et $f$ est bijectif.*

*Démonstration :*

Si $f$ existe, ce ne peut être que l'isomorphisme de groupes additifs donné par le théorème I.4.1 qui envoie $1_{\mathbb{R}}$ sur $1_K$, et le même théorème montre que $f$ est bijectif.

Réciproquement, soit $f$ cet isomorphisme de groupes ; il s'agit de montrer que $f$ respecte le produit. Si $a \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in K$), notons $f_a$ (resp. $\varphi_\alpha$) l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a \,.\, x$ (resp. $K \longrightarrow K$, $\xi \mapsto \alpha\xi$). Alors $\varphi_{f(a)} \circ f$ et $f \circ f_a$ sont deux homomorphismes de groupes additifs *monotones :* $\mathbb{R} \longrightarrow K$. Comme ils envoient tous deux 1 sur $f(a)$, ils sont égaux, d'où, pour tout $b \in \mathbb{R}$: $f(a)\, f(b) = \varphi_{f(a)}[f(b)] = f[f_a(b)] = f(ab)$. ■

En d'autres termes, *à isomorphisme près de corps ordonnés,* **il existe un et un seul corps commutatif totalement ordonné archimédien et complet : c'est $\mathbb{R}$.**

Pour finir, notons (comme il résulte de l'étude des homomorphismes du groupe ordonné $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ dans lui-même), que les seules fonctions *monotones* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{sont les} \quad f_a : x \mapsto a \,.\, x\,.$$

Quand cela n'entraînera pas d'ambiguïté, nous noterons désormais le produit $ax$ ou $a \times x$, au lieu de $a \,.\, x$.

***Exercice 1 :*** On considère un groupe Archimédien $(G, +, \leqslant)$. Soit $a > 0$ dans $G$ et $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un, et un seul, homomorphisme de groupes $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *croissant* tel que $f(a) = \alpha$. De plus $f$ est injectif. [Utiliser le complété de Cauchy de $G$ et le théorème I.4.1.]

***Exercice 2 :*** *a*) Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et qu'entre deux rationnels distincts il existe toujours un nombre irrationnel.

*b*) On considère la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b\alpha$ où $\alpha$ désigne un nombre irrationnel donné. Montrer que $f$ est injective. Que peut-on dire de $f(\mathbb{Z}^2)$ ? Montrer que c'est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$.

*c*) Quelle condition doivent vérifier les nombres rationnels $a$, $b$, $c$, $d$ pour que $\frac{ax+b}{cx+d}$ soit rationnel

1) quel que soit le nombre réel $x$ $\left(x \neq \frac{-d}{c}\right)$ ?

2) pour au moins un $x$ irrationnel ?

***Exercice 3*** (coupures de Dedekind) : Par définition une coupure dans $\mathbb{Q}$ est une *partition* de $\mathbb{Q}$ en deux ensembles $A$ et $B$ tels que, pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait : $a < b$.

*a*) Vérifier qu'il existe des coupures où $A$ n'a pas de plus grand élément ni $B$ de plus petit élément.

*b*) Prolonger à l'ensemble des coupures la relation d'ordre usuel de $\mathbb{Q}$.

*c*) Définir une addition dans l'ensemble des coupures ainsi qu'une multiplication qui en font un corps $K$ commutatif.

Conclure en comparant $K$ et $\mathbb{R}$.

Une variante de ce procédé de construction de $\mathbb{R}$ consiste à utiliser les *sections commençantes* de $\mathbb{Q}$ (*i.e.* les parties $S$ telles que $x \in S$ et $y \leqslant x \Rightarrow y \in S$ ) *sans dernier élément.*

***Exercice 4 :*** Montrer qu'on aurait pu définir la multiplication dans le groupe Archimédien complet $\mathbb{R} = \mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ en utilisant la structure d'anneau-quotient de $\mathscr{C}/\mathscr{C}_0$ (cf. Tome 1, § VII.7).

***Exercice 5 :*** On considère l'ensemble $E$ des nombres $a + b\sqrt{2}$, avec $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que cet ensemble peut être muni de plusieurs ordres de groupe totalement ordonné archimédien distincts. Montrer également qu'on peut le doter d'un ordre non archimédien (à partir de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Q}^2$).

***Exercice 6 :*** Soit $(x_n)$ une suite de réels. Sachant que les suites extraites $(x_{2n})$, $(x_{2n+1})$ et $(x_{3n})$ sont convergentes, montrer que $(x_n)$ converge. Les deux premières hypothèses suffisent-elles ?

## § I.6 *PUISSANCES, EXPONENTIELLES, LOGARITHMES*

L'étude des §§ I.4 et I.5 nous a prouvé que les seuls homomorphismes monotones du groupe additif $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ sont les $f_a : x \mapsto ax$, pour $a \in \mathbb{R}$ ; $f_a$ est le seul de ces homomorphismes qui envoie 1 sur $a$. Si $a \neq 0$ on obtient un *isomorphisme ;* cet isomorphisme est croissant si $a > 0$, décroissant si $a < 0$. De plus $f_a$, pour $a \neq 0$, établit une bijection de l'ensemble $\mathscr{C}$ des suites convergentes de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Or, $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ est un groupe Archimédien complet. D'après le théorème I.4.1, pour tout $a \neq 1$ dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique homomorphisme $\mathscr{E}_a : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$ monotone tel que $\mathscr{E}_a(1) = a$, et un unique homomorphisme monotone $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\log_a(a) = 1$. Ce sont tous deux des **isomorphismes,** et ils sont donc **réciproques l'un de l'autre.** De plus chacun établit une bijection entre l'ensemble des suites convergentes de $(\mathbb{R}, +)$ et celui des suites convergentes dans $\mathbb{R}_+^*$ de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$; $\mathscr{E}_a$ et $\log_a$ sont **croissants** si $a > 1$, **décroissants** si $a < 1$.

**DÉFINITION I.6.1**

*Pour $a > 0$ $(a \neq 1)$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\mathscr{E}_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie ci-dessus s'appelle fonction* ***exponentielle de base a,***

*$a^x$ à la place de $\mathscr{E}_a(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ ; la fonction* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie ci-dessus s'appelle* **logarithme de base a.**
*Par convention $\mathscr{E}_1$ est la fonction constante :* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1$ ; *et* $\log_1$ *est la fonction constante :* $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$.

Du fait que $\mathscr{E}_a$ et $\log_a$ sont, pour $a \neq 1$, des isomorphismes de groupes, on déduit, pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, et $a > 0$ :

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \,.\, a^y \,; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \,; \quad a^0 = 1} \tag{1}$$

et, pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $a > 0$ :

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \,; \\ \\ \log_a(x) = -\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) \,; \quad \log_a(1) = 0 \end{array}} \,. \tag{2}$$

**Proposition I.6.1**

*Soit $a \neq 1$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$, on a :*

(3) $\quad (a^x)^y = a^{xy}$ *(règle de multiplication des exposants)*

(4) $\quad \log_a(x^y) = y \log_a(x)$ *en supposant $x > 0$.*

*Démonstration :*

L'application : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto a^{xt}$ n'est autre que $\mathscr{E}_a \circ f_x$, où $f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ envoie $t$ sur $xt$. C'est donc un homomorphisme monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et il envoie 1 sur $a^x$. Donc $\mathscr{E}_a \circ f_x = \mathscr{E}_{a^x}$, ce qui est une autre manière d'écrire (3). Même raisonnement pour (4) avec $\log_a \circ \mathscr{E}_x = f_{\log_a(x)}$. ■

***Remarque 1 :*** Une autre façon d'écrire (3) s'obtient en posant $b = a^x$ et $c = b^y$. On trouve ainsi la **formule de Chasles** [1], valable pour tous $a$, $b$, $c$ dans $\mathbb{R}_+^*$ :

$$\log_a(c) = \log_a(b) \times \log_b(c) \tag{5}$$

qui montre la proportionnalité des fonctions $\log_a$ et $\log_b$, ce qui nous incitera à choisir une base privilégiée pour exprimer toutes les autres fonctions logarithmes. Notons déjà que les logarithmes de base 10 s'appellent *logarithmes décimaux.*

---

[1] Michel *Chasles* (1793-1880), mathématicien français, auteur d'un « aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie ». Toute relati... $\overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ac}$ est appelée par extension *formule de Chasles.*

**Fonction puissance**

Les isomorphismes monotones de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même peuvent être *transportés* dans $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ à l'aide d'un $\mathscr{E}_\alpha$ bijectif (c'est-à-dire tel que $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$) particulier, par exemple $\mathscr{E}_2$.

**Proposition I.6.2**

*Soit, pour $a \in \mathbb{R}^*$, $\gamma_a$ l'application $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^a$. Alors $\gamma_a$ est un* isomorphisme monotone *du groupe $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. Chaque isomorphisme monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même s'écrit $\gamma_a$ pour un unique $a \in \mathbb{R}^*$. En adjoignant l'homomorphisme $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 1$, on obtient ainsi tous les homomorphismes monotones de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.*

*Démonstration :*

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ un homomorphisme monotone non constant. On sait (théorème I.4.1) que c'est un isomorphisme. Alors $\log_2 \circ g \circ \mathscr{E}_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un homomorphisme monotone non constant de groupes additifs, donc du type $f_a : x \mapsto ax$ pour une valeur $a \in \mathbb{R}^*$ unique. Cela signifie que $g(2^x) = 2^{ax}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais $2^{ax} = (2^x)^a$, ce qui entraîne que la fonction $g$ est la fonction définie pour tout $t > 0$ par $g(t) = t^a$, d'où $g = \gamma_a$.

Réciproquement, pour $a \in \mathbb{R}^*$ donné, on a $(\forall t > 0)$ $2^{a \log_2(t)} = [2^{\log_2(t)}]^a = t^a$. Donc $\gamma_a = \mathscr{E}_2 \circ f_a \circ \log_2$ est bien un isomorphisme monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même. La dernière assertion est élémentaire. ■

On convient de poser $\gamma_0(t) = t^0 = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

On obtient donc finalement la relation :

(6) $\quad t^a u^a = (tu)^a \quad$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tous $t$, $u$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Définition I.6.2**

*Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $\gamma_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^a$ s'appelle* **fonction puissance** *d'exposant $a$.*

Notons que, pour tous $x$, $y$ et $a$ dans $\mathbb{R}_+^*$ :

(7) $$x^y = a^{y \log_a(x)}$$

ce qui résulte immédiatement de $a^{y \log_a(x)} = (a^{\log_a(x)})^y = x^y$. On convient de poser $0^a = 0$ pour tout $a > 0$.

**Application : racines *n*-ièmes**

**Proposition I.6.3**

*Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, le nombre $\gamma_n(a)$ est bien la puissance n-ième de a au sens algébrique habituel.*

*Démonstration :*

Il suffit de le prouver avec $n > 0$ puisque $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto$ puissance $n$-ième de $x$ au sens algébrique (c'est-à-dire $x \,.\, x \,.\, \ldots \,.\, x$ avec $n$ facteurs $x$, noté ici $x^{[n]}$ provisoirement.

Alors $\varphi$ est un homomorphisme de groupes non constant. Si $0 < x < y$, on a (cf. Tome 1, § III.2) :

$$y^{[n]} - x^{[n]} = (y-x)(x^{[n-1]} + x^{[n-2]}y + \cdots + y^{[n-1]}),$$

d'où $y^{[n]} - x^{[n]} > 0$. Donc $\varphi$ est *monotone.* Donc $\varphi = \gamma_\alpha$ pour un certain réel $\alpha \neq 0$.

On a, d'après (4), $\log_2(\gamma_\alpha(t)) = \alpha \log_2(t)$ pour tout $t > 0$, mais aussi, par itération de (2) : $\log_2(t^{[n]}) = n \log_2(t)$. Donc $\alpha = n$ et $\varphi = \gamma_n$. ■

**COROLLAIRE**

*Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto x^{[n]}$, $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ n'est autre que $\gamma_n$, et c'est une bijection croissante. Sa bijection réciproque est $\gamma_{1/n}$.*

*Démonstration :*

D'après (3), pour tout $t > 0$, $(t^b)^a = t^{ab}$, d'où $\gamma_a \circ \gamma_b = \gamma_{ab}$. En particulier $\gamma_n \circ \gamma_{1/n} = \gamma_{1/n} \circ \gamma_n = \gamma_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$. ■

Ainsi la notation $a^x$ *pour* $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ est cohérente, car pour $n \in \mathbb{Z}$ la valeur de $a^n$ est bien la puissance $n$-ième ordinaire de $a$ que nous recommencerons donc à noter $a^n$ et non $a^{[n]}$. Quant à $a^{1/n}$, chacun sait que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on utilise également la notation $\sqrt[n]{a}$, et qu'en particulier on convient que $\sqrt[n]{0} = 0$.

Une conséquence intéressante de l'existence des racines $n$-ièmes est que l'*image de l'application* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}_+$. Comme application, on a le résultat suivant :

**PROPOSITION I.6.4**

*L'identité est le seul isomorphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même.*

*Démonstration :*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un isomorphisme du corps $\mathbb{R}$ dans lui-même. Puisque $f(x^2) = (f(x))^2$ pour tout $x$, ce qui précède montre que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$. Si donc $x \leq y$ ($x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$), on a : $0 \leq f(y-x) = f(y) - f(x)$, *i.e.* $f(x) \leq f(y)$, d'où : $f$ est *croissant.* On conclut par le théorème I.5.4. ■

***Exercice 1 :*** Comparer les nombres $\log_3 7 = \log_{1/3} \dfrac{1}{7}$.

***Exercice 2 :*** Simplifier l'expression $b^{\frac{\log_a(\log_a(b))}{\log_a(b)}}$.

***Exercice 3 :*** Résoudre l'équation $\log_x (10) + 2 \log_{10x} (10) + 3 \log_{100x} (10) = 0$.

***Exercice 4 :*** Etablir la formule $\log_a b \,.\, \log_b c \,.\, \log_c d \ldots \log_k l \,.\, \log_l a = 1$.

***Exercice 5 :*** Résoudre l'équation $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

***Exercice 6 :*** Résoudre l'équation $\log_a (x) - \log_{a^2} (x) + \log_{a^4} (x) = \dfrac{3}{4}$.

***Exercice 7 :*** Montrer que le nombre $\log_{10} 5 + \log_{10} 3$ est irrationnel.

***Exercice 8 :*** Résoudre l'équation $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$.

***Exercice 9 :*** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation $x^{(x^x)} > (x^x)^x$.

***Exercice 10 :*** Deux naturels distincts peuvent-ils vérifier la relation $a^b = b^a$ ?
Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Q}_+^2$ vérifiant cette égalité.
*Réponse :* si $a < b$, $a = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $b = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

***Exercice 11 :*** Soit trois réels $a$, $b$, $c$ strictement positifs. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$, $b$, $c$ pour que l'on ait :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \log_a (x) + \log_b (x) + \log_c (x) = \log_{abc} (x) .$$

# *Chapitre II*

# *SUITES. INTRODUCTION AUX SÉRIES*

## § II.1 *LIMITES DE SUITES RÉELLES*

Nous appellerons « suite réelle » toute suite *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. Récapitulons brièvement les principales définitions et propriétés vues au chapitre I.

Si $(u_n)$ est une suite réelle, un réel $\lambda$ est appelé **limite de la suite** $(u_n)$ (quand $n \longrightarrow \infty$) ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. On dit alors que $(u_n)$ **converge** vers $\lambda$ et on écrit $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \lambda$. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente** (par exemple les suites de termes généraux $u_n = \sqrt{n}$ ou $v_n = (-1)^n$ sont divergentes). Il est clair que *si une suite* $(u_n)$ *converge, elle est bornée* (la réciproque étant fausse) ; et que *toute suite stationnaire est convergente.*

*Une suite* $(u_n)$ *admet au plus une limite,* ce qui permet d'attribuer à **la** limite un symbole *fonctionnel :* $\lambda = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (u_n)$. *Si la suite réelle* $(u_n)$ *converge vers* $\lambda$*, alors* $|u_n| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} |\lambda|$, la réciproque étant encore fausse.

Si les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent respectivement vers $\lambda$ et $\mu$, alors $u_n - v_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \lambda - \mu$ et $u_n v_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \lambda \mu$, d'où il résulte que les suites convergentes forment un sous-ev du $\mathbb{R}$-ev de toutes les suites réelles et un sous-anneau de l'anneau commutatif $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Si $(u_n)$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et si elle converge vers un réel $\lambda > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\lambda}$.

Rappelons également qu'*une suite réelle* $(u_n)$ *converge ssi elle est de Cauchy,* c'est-à-dire vérifie le **critère** suivant, dit **de Cauchy :** $(\mathscr{C})$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$ dès que $N \leqslant n < p$, ce qui s'écrit, en *notation quantifiée abrégée :*

$(\forall \varepsilon > 0) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N})\, (N \leqslant n < p) \Rightarrow |u_p$

Ce critère permet de reconnaître la *nature* d'une suite (c'est-à-dire de savoir si elle converge, ou encore plus commodément si elle diverge) sans avoir aucun renseignement préalable sur la limite éventuelle. Moins générale, mais cependant très utile est la :

**PROPOSITION II.1.1**

> *Toute suite réelle $(u_n)$ croissante et majorée converge, et on a alors :* $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$.

On écrit parfois dans ce cas, en désignant par $\lambda$ le réel $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$ : $u_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} \lambda$. De même, toute suite $(u_n)$ réelle décroissante et minorée converge vers $\lambda = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$ et l'on écrit alors : $u_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} \lambda$.

Rappelons également :

**PROPOSITION II.1.2** (« passage des inégalités larges à la limite »)

> *Si les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent, et si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n$, alors* $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} (v_n)$.

En revanche les inégalités strictes ne se conservent pas en général par passage à la limite. Si $u_n < v_n$ pour tout $n$ (et si les deux suites convergent) on peut seulement affirmer que $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} (v_n)$, avec égalité possible (par exemple $0 < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, et cependant $\frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$). On prendra garde également que si $u_n \leqslant v_n$, la convergence de $(v_n)$ n'entraîne pas nécessairement celle de $(u_n)$. Cette remarque de bon sens ne donne que plus de prix au théorème suivant :

**THÉORÈME II.1.1** (« théorème des trois suites »)

> *Considérons trois suites réelles $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n$. Supposons les deux suites $(u_n)$ et $(w_n)$ convergentes et de* **même limite** *$\lambda$. Alors la suite $(v_n)$ converge vers $\lambda$.*

*Démonstration :*

$\varepsilon > 0$ étant donné arbitraire, choisissons $N \in \mathbb{N}$ pour que $|u_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$ et $|w_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$, on a : $\lambda - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \lambda + \varepsilon$, d'où $|v_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. On reconnaît la définition de $v_n \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. ■

Encore plus simple est la propriété suivante :

*Si une suite réelle $(u_n)$ converge, toute suite extraite de $(u_n)$ converge, vers la même limite.*

Illustrons l'utilisation de ces résultats par quelques exemples :

***Exemple 1 :*** A partir de $u_0 > 0$, définissons par récurrence la suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$(\forall n \geqslant 0) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right).$$

On voit tout de suite que si elle converge vers $l \neq 0$, on aura : $l = \dfrac{5}{l}$ d'où $l^2 = 5$. En formant

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{5}}{u_{n+1} + \sqrt{5}} = \frac{(u_n - \sqrt{5})^2}{(u_n + \sqrt{5})^2},$$

on s'aperçoit que, pour $n \geqslant 1$, $u_n - \sqrt{5} \geqslant 0$, et surtout que :

$$\frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}} = \left(\frac{u_0 - \sqrt{5}}{u_0 + \sqrt{5}}\right)^{2^n}.$$

Prenons pour valeur initiale $u_0 = \dfrac{5}{2}$. Alors, non seulement il est clair que $u_n - \sqrt{5} \longrightarrow 0$, mais encore on peut le majorer par $(u_n + \sqrt{5})\left(\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)^{2^n}$. Compte tenu du fait que la suite est décroissante $\left(u_{n+1} - u_n = \dfrac{5 - u_n^2}{2\,u_n} < 0\right)$ et que

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 9 - 4\sqrt{5} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} < \frac{1}{17},$$

on obtient l'encadrement

$$0 < u_n - \sqrt{5} < 4{,}5 \times \left(\frac{1}{17}\right)^{2^n},$$

ce qui donne une idée de la vitesse de convergence de cette suite qui est remarquable. Par exemple $u_3 - \sqrt{5} < 6{,}5 \,.\, 10^{-10}$. Or

$$u_1 = \frac{9}{4}, \quad u_2 = \frac{161}{72}, \quad u_3 = \frac{51\,841}{23\,184}.$$

En poussant la division jusqu'à la 10$^{\text{e}}$ décimale, on trouve sans machine, en deux minutes, que 2,2360679779 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{5}$, et donc 2,2360679771 une valeur approchée par défa s'étonner de l'extrême rapidité de la convergence. Elle provient de

$$\frac{u_{n+1}-l}{(u_n-l)^2}=\frac{u_{n+1}+l}{(u_n+l)^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2l},$$

limite finie $>0$ (on dit alors que la convergence est *quadratique*), ce qui entraîne le doublement du nombre de décimales exactes à chaque étape.

***Exemple 2 :*** Soit deux réels $a$ et $b$ avec $0<a\leqslant b$. Définissons par

$$(\forall n\geqslant 0)\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n}\,,\quad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\,.$$

Supposons prouvé qu'au rang $n$ on ait $0<u_n\leqslant v_n$. On en déduit successivement $u_n\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n$ et $u_{n+1}\geqslant u_n$ ; puis en remarquant que $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2\geqslant 0$ il vient :

$$0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant v_{n+1}\leqslant v_n\,.$$

Par récurrence ces inégalités sont donc vraies pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite $(u_n)$ est donc croissante, majorée par $v_0$. Elle converge vers $\lambda\geqslant a$. La suite $(v_n)$ est décroissante, minorée par $u_0$ et converge donc vers une limite $\mu\leqslant b$. Par passage à la limite dans $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ on déduit que $\mu=\lambda$. En fin de compte, *les deux suites* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *convergent vers une même limite* $\mu\in[a,b]$, et on a :

$$u_n\underset{n\to\infty}{\uparrow}\mu\,,\quad v_n\underset{n\to\infty}{\downarrow}\mu\,.$$

Le nombre $\mu=\mu(a,b)$ est appelé *moyenne arithmético-géométrique* (1) de $a$ et $b$. Pour apprécier la vitesse de convergence de $(u_n)$ et $(v_n)$ vers $\mu$, remarquons d'abord que $\mu(a,b)=\mu(a_N,b_N)$ pour tout entier $N$ ; puis que

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2=\frac{1}{2}\frac{(v_n-u_n)^2}{(\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n})^2}=\frac{(v_n-u_n)^2}{8\,v_{n+2}}\,.$$

Désignons par $\delta_k$ la longueur du segment $[u_k,v_k]$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Il est clair que

$$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant v_{n+1}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}\,,\quad\text{d'où}\quad\delta_k\leqslant\frac{b-a}{2^k}\,,$$

---

(1) La fonction $(a,b)\mapsto\mu(a,b)$ a été particulièrement étudiée par Gauss. On en trouvera quelques propriétés en exercice (cf. exercice 6). *Voir* [5].

ce qui montre déjà que $\delta_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Mais plus précisément, si $n \geqslant N$ :

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{8\, v_{n+2}} = \frac{\delta_{n-1}^4}{8\, v_{n+2}(8\, v_{n+1}^2)} = \cdots =$$

$$= \frac{(\delta_N)^{2^{n-N+1}}}{(8)^{2^{n-N+1}}\, v_{n+2}(v_{n+1})^2 \cdots (v_{N+2})^{2^{n-N}}}$$

et en minorant tous les $v_k$ par $u_{N+2}$, on obtient :

$$\delta_{n+1} \leqslant \frac{(\delta_N)^{2^{n-N+1}}}{(8\, u_{N+2})^{2^{n-N+1}} - 1} = 8\, u_{N+2} \left( \frac{\delta_N}{8\, u_{N+2}} \right)^{2^{n-N+1}} .$$

Il suffit de choisir $N$ pour que $\dfrac{\delta_N}{8\, u_{N+2}} \in \left]0, 1\right[$, ce qui est possible puisque $\delta_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, pour s'apercevoir qu'à partir du rang $N + 1$ la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ vers $\mu$ est extrêmement rapide. Cela tient comme dans l'exemple 1 au fait que $\dfrac{\delta_{k+1}}{(\delta_k)^2} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{8\, \mu}$, d'où une convergence quadratique.

**Limites d'exponentielles et de puissances.**

Soit $a$ un réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. Nous avons vu au § I.6 que $\mathscr{E}_a : x \mapsto a^x$ est un isomorphisme monotone entre les groupes ordonnés $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$, dont l'isomorphisme réciproque est $\log_a : x \mapsto \log_a x$. D'autre part, une suite $(t_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ *converge dans le groupe ordonné* $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ ssi elle *converge dans le groupe ordonné* $(\mathbb{R}, +, \leqslant)$ vers un réel $l > 0$. Il s'ensuit aussitôt :

Soit $a \neq 1$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Donnons-nous une suite réelle $(u_n)$, un réel $\lambda$ et posons, pour tout $n$, $t_n = a^{u_n}$ et $l = a^\lambda$.

*Pour que :* $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$, *il faut et il suffit que* $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

De même, fixons $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction puissance $t \mapsto t^\alpha$ établit un isomorphisme monotone du groupe ordonné $(\mathbb{R}_+^*, \times, \leqslant)$ sur lui-même, d'où :

*Pour qu'une suite* $(u_n)$ *de* $\mathbb{R}_+^*$ *converge dans* $\mathbb{R}$ *vers* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, *il faut et il suffit que :* $(u_n)^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda^\alpha$.

On notera que ces propriétés expriment en fait la **continuité** des fonctions exponentielle, logarithme et puissance, mais cette notion de continuité ne sera étudiée qu'au chapitre suivant.

**Suites tendant vers l'infini.**

**DÉFINITION II.1.1**

*On dit qu'une suite réelle $(u_n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \longrightarrow \infty$, et on écrit $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, ssi pour tout réel $A$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant A$ dès que $n \geqslant N$, c'est-à-dire, en notation quantifiée abrégée :*

$$(\forall A \in \mathbb{R}) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (u_n \geqslant A).$$

On définit de même une suite tendant vers $-\infty$, en remplaçant $u_n \geqslant A$ par $u_n \leqslant A$. Le lecteur n'aura aucun mal à vérifier les assertions qui suivent, et à les étendre au cas où $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$ :

- Si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, toute *suite extraite* de $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

- Pour qu'une *suite croissante tende vers* $+\infty$, il faut et il suffit qu'elle ne soit *pas majorée.* On écrit alors $u_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

- Si la suite $(v_n)$ est minorée et si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (c'est le cas en particulier si $(v_n)$ converge dans $\mathbb{R}$).
- Si $(u_n)$ est une suite dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ ssi $\dfrac{1}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

- Pour qu'une suite réelle $(u_n)$ ne soit *pas majorée,* il faut et il suffit qu'on puisse en *extraire une suite tendant vers* $+\infty$.
- Si $(\forall n) \quad v_n \geqslant a > 0$ et si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Exemple 3 :*** Soit $a$ un réel $> 1$, et $(u_n)$ une suite réelle tendant vers $+\infty$. Alors $a^{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. En effet, donnons-nous $A > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ pour que $u_n \geqslant \log_a A$ dès que $n \geqslant N$. Alors $a^{u_n} \geqslant A$ pour $n \geqslant N$, puisque la fonction $\mathscr{E}_a : x \mapsto a^x$ respecte l'ordre.

De même, pour toute suite $(t_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers $+\infty$, si $a > 1$, $\log_a (t_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En revanche, si $0 < a < 1$, on voit que $a^{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\log_a (t_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$ si $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ $(t_n > 0)$.

***Exemple 4 :*** Soit $\alpha$ un réel $> 0$ et $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers $+\infty$ ; alors $(u_n)^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $x \mapsto x^\alpha$ respectant l'ordre, pour réaliser $u_n^\alpha \geqslant A$ il suffit que $u_n \geqslant A^{1/\alpha}$, ce qui est possible dès que $r$

En revanche si $\alpha < 0$, et si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ dans $\mathbb{R}_+^*$, alors $u_n^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

On voit de même que, pour toute suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ qui tend vers 0, on a : $u_n^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pour $\alpha > 0$, et $u_n^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour $\alpha < 0$.

***Exercice 1 :*** Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$, étudier la suite définie par récurrence à partir de $u_0 > 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer en s'inspirant de l'exemple 1 que la convergence est quadratique. Imaginer un processus triplant le nombre de décimales exactes à chaque pas (*Réponse :* $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 3\,au_n}{3\,u_n^2 + a}$). Est-ce bien utile ?

*Note historique :* Il y a plus de 4000 ans les Babyloniens utilisaient l'algorithme suivant pour extraire des racines carrées : si $u$ est une valeur approchée de $\sqrt{a}$, on calcule le « reste » $a - u^2 = r$ et on pose $u' = a + \dfrac{r}{2\,a}$. Montrer que fondamentalement c'est le même algorithme que celui de l'exercice 1. Essayer d'expliquer également comment Bawdhayana (indien du 4ᵉ siècle av. J.-C.) a pu obtenir l'approximation $\sqrt{2} \simeq 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\,.\,4} - \dfrac{1}{3\,.\,4\,.\,34}$.

***Exercice 2 :*** Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'on peut calculer $\sqrt[k]{a}$ en utilisant la suite définie par récurrence à partir de $u_0 > 0$ par : $u_{n+1} = \dfrac{k-1}{k}\,u_n + \dfrac{a}{ku_n^{k-1}}$. Montrer que la convergence est encore quadratique, et que l'on a $0 \leqslant u_n - a^{1/k} \leqslant (k-1)\,(u_{n-1} - u_n)$ pour tout $n \geqslant 2$.

***Exercice 3 :*** Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'on peut calculer $\dfrac{1}{a}$ sans avoir à faire de division en utilisant la suite définie par récurrence à partir de $v_0 \in \left]0, \dfrac{2}{a}\right[$ par : $v_{n+1} = 2\,v_n - av_n^2$. Montrer que cette suite croît à partir de $v_1$ et que la convergence est encore quadratique.

*Application :* A partir de la valeur approchée de $u_3$ obtenue dans l'exemple 1, calculer $u_4 = \dfrac{1}{2}\left(u_3 + \dfrac{5}{u_3}\right)$. Trouver ainsi $\sqrt{5}$ avec 20 chiffres exacts (poser $u_3 = v_0$). (N.B. Pour élever au carré un nombre de 10 chiffres, on pourra le couper en 2 tranches de 5 chiffres.)

***Exercice 4 :*** Pour $a > 0$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'on peut encore calculer $\sqrt{a}$ en utilisant la suite définie par récurrence à partir de $u_0 \in ]0, a\sqrt{3}[$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,u_n\left(3 - \dfrac{u_n^2}{a}\right)$ et que la convergence est quadratique.

***Exercice 5 :*** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $(\forall n)\quad u_{n+1} = 4\,u_n - u_n^2$. Montrer que cette suite converge ssi elle est stationnaire.

***Exercice 6 :*** Soit $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mu(a, b)$ leur moyenne arithmético-géométrique définie dans l'exemple 2. Montrer que, pour tout $k > 0$, $\mu(ka, kb) = k\mu(a, b)$ et que $\mu(b, a) = \mu(a, b)$. Calculer avec une marge d'erreur inférieure à $10^{-3}$ les valeurs de $\mu(a, b)$ pour $a = 1$ et $b \in [\![1, 10]\!]$.

***Exercice 7 :*** Soit des réels $a$, $b$ tels que $0 < a < b$. On définit par récurrence les suites $(u_n)$, $(v_n)$ à partir de $u_0 = a$, $v_0 = b$ par : $(\forall n \geqslant 0)\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}\,v_n}$ (suites de Schwob). Montrer que ces suites convergent. Soit $\varphi \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = b\cos\varphi$. Exprimer leur limite commune en fonction de $b$ et $\varphi$.

***Exercice 8 :*** Soit $b > 1$ et la suite réelle $(u_n)$ définie par récurrence à partir de $u_0 = a$ $(a > 0)$ par $u_{n+1} = a + \dfrac{1 - b^{-n}}{2} u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée, qu'elle est croissante et trouver sa limite.

On considère ensuite une suite $(v_n)$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N} : v_{n+1} \leqslant a + \dfrac{1 - b^{-n}}{2} v_n$. Montrer que $v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la suite $(v_n)$ est majorée mais qu'elle n'est pas nécessairement convergente.

***Exercice 9 :*** Etudier les suites définies par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans les cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{2 + x} \ ; \quad f(x) = \sqrt{2 - x} \ (u_0 \in \,]0, 2]) \ ; \quad f(x) = a^x \quad \text{avec} \quad a \in \,]0, 1[\,.$$

***Exercice 10 :*** On considère une suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et la suite des moyennes $(v_n)$ de terme général $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

*a*) Montrer que si la suite $(u_n)$ croît, il en est de même pour la suite $(v_n)$.

*b*) Montrer que si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*c*) Les réciproques sont-elles vraies ?

***Exercice 11 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $u_{\sigma(n)} \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

***Exercice 12 :*** Si l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est *injective*, alors $f(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Exercice 13 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*a*) Pour chaque entier $k$, montrer que l'ensemble $\{u_n\}_{n \geqslant k}$ admet un *maximum* $M_k$. Soit $N_k$ le plus petit des entiers $n \geqslant k$ tels que $u_k = M_k$. Etudier la suite $(N_k)$. Etudier la suite $(u_{N_k})_{k \geqslant 0}$.

*b*) Pour chaque entier $k$, montrer que $\{u_n\}_{n \leqslant k}$ admet un *minimum* $m_k$. Soit $\nu_k$ le plus grand des entiers $n \leqslant k$ tels que $u_k = m_k$. Montrer que $\nu_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

***Exercice 14 :*** *a*) Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$ pour tous entiers $m$ et $n \geqslant 0$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n}$ tend vers $-\infty$ ou vers une limite finie.

*b*) Soit $(v_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+$ telle que $u_{m+n} \leqslant u_m u_n$ pour tous entiers $\geqslant 0$ $m$ et $n$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et que sa limite est $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_n)^{1/n}$.

***Exercice 15 :*** Soit $(a_n)$ une suite réelle telle que, pour tous naturels $m$ et $n$ : $a_m + a_n - 1 < a_{m+n} < a_m + a_n + 1$.

*a*) Montrer que la suite $\left(\dfrac{a_n}{n}\right)$ converge. On note $\lambda$ sa limite.

*b*) Montrer que $(\forall n)$ $\lambda n - 1 \leqslant a_n \leqslant \lambda n + 1$.

***Exercice 16 :*** *a*) Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que : $\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{u_1 + 2 u_2 + \cdots + n u_n}{n^2 u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha}{1 + \alpha}$.

*Indication :* Montrer d'abord que $n^2 u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*b*) Soit $(u_n)$ une suite réelle et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \alpha$. Montrer que $\dfrac{u_1 + 2\,u_2 + \cdots + n u_n}{n^2 u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

*Indication :* Montrer que pour $n$ assez grand, $u_n$ est de signe constant strict.

***Exercice 17 :*** *a*) Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Construire une suite $(\lambda_n)$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ et que $\lambda_n u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*b*) Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ tendant vers 0. Construire une suite $(\lambda_n)$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$ et que $\lambda_n u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 18 :*** Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles telles que $a_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$ et $b_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$. On suppose que $a_{n+1} - a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble $E = \{a_m - b_n\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est *partout dense* dans $\mathbb{R}$, *i.e.* vérifie : pour tous réels $x$ et $y$ avec $x < y$, on a : $E \cap \,]x, y[\, \neq \varnothing$.

***Exercice 19 :*** Soit deux réels $p$ et $q$ tels que $1 < p < q$. On définit, pour $\alpha > 0$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, $n \mapsto \operatorname{Ent}(n\alpha)$, c'est-à-dire la partie entière de $n\alpha$.

*a*) Montrer que $f_p$ et $f_q$ sont injectives.

*b*) Montrer : pour que $\operatorname{Im}(f_p)$ et $\operatorname{Im}(f_q)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, il faut et suffit que $p$ et $q$ soient irrationnels et que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

***Exercice 20 :*** Soit $\alpha$ un réel *irrationnel*. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{D}(k) = \operatorname*{Min}_{p \in \mathbb{Z}} \left| \alpha - \dfrac{p}{k} \right|$. Montrer que l'ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathscr{D}(k) < \dfrac{1}{k^2}$ est infini.

*Indication :* Soit Ent la fonction « partie entière » définie sur $\mathbb{R}$ et $F$ la fonction $x \mapsto x - \operatorname{Ent}(x)$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, considérer l'application $[\![0, q]\!] \longrightarrow \,]0,1[$, $k \mapsto F(k\alpha)$, en étudiant la répartition de son image dans les segments $\left[\dfrac{i}{q}, \dfrac{i+1}{q}\right]_{0 \leqslant i \leqslant q-1}$.

***Exercice 21 :*** Soit $\alpha$ un réel *irrationnel* et $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie dans l'exercice 20. On donne $a$ et $b$ réels avec $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $b - a < 1$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mu(N) = \operatorname{card}\,\{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leqslant N \text{ et } F(n\alpha) \in [a, b]\}$. Démontrer que $\dfrac{\mu(N)}{N} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} b - a$ (on dit que la suite $(F(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est *équirépartie modulo 1*).

*Indication :* On peut supposer $\alpha > 1$ et commencer par étudier le cas où $a$ et $b$ sont des rationnels $\dfrac{A}{Q}$ et $\dfrac{B}{Q}$.

***Exercice 22 :*** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que la suite $n \mapsto a_n = F(u_n)$ (où $F$ est la fonction définie dans l'exercice 20) est *partout dense* dans $[0, 1]$.

***Exercice 23 :*** On donne $u_0 > 0$ et la suite réelle définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Exercice 24 :*** Montrer que $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}}$ converge vers une limite $\lambda = 1{,}757932\ldots$ avec $|u_n - \lambda| \leqslant ((n-1)!)^{-1/2}$.

*Indication :* Pour majorer $u_n$ on pourra remplacer le *dernier* radicande $n$ pa[illegible] trouvera une suite $(v_n)$ décroissante.

***Exercice 25 :*** Une certaine suite $(u_n)$ est telle que les suites extraites $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ où $a_n = u_{3n+2}$, $b_n = u_{4n+1}$, $c_n = u_{5n+3}$ convergent. La suite $(u_n)$ converge-t-elle ?

***Exercice 26*** (moyenne arithmético-harmonique) : Etudier le couple de suites $(a_n)$, $(b_n)$ définies par la donnée de $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $b_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et de la relation de récurrence :

$$(\forall n \geqslant 0) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \qquad b_{n+1} = \frac{2\, a_n\, b_n}{a_n + b_n}.$$

Montrer que la limite commune de $(a_n)$ et de $(b_n)$ est $\leqslant$ la moyenne arithmético-géométrique de $a_0$ et de $b_0$.

## § II.2 *SUITES À VALEURS DANS $\mathbb{R}^p$ OU À VALEURS DANS $\mathbb{C}$*

Soit $p$ un entier $\geqslant 1$. Une suite $(u_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est définie de manière unique par ses **suites composantes** $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ : ce sont les suites réelles telles que

$$u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{p,n}) \quad \text{pour tout} \quad n\,.$$

**DÉFINITION II.2.1**

*Une suite $(u_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, de suites composantes $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ est dite* ***convergente*** *ssi* chaque *suite composante converge dans $\mathbb{R}$. Sinon elle est dite* ***divergente.*** *Si la suite converge, le vecteur $l \in \mathbb{R}^p$ de composantes $(l_1, l_2, \dots, l_p)$, où $l_i = \lim\limits_{n \to \infty} (u_{i,n})$ pour tout $i$, est dit* ***limite*** *de $(u_n)$, et on écrit $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.*

Il est évident, d'après les propriétés des suites réelles, qu'une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^p$ *admet au plus une limite.* En cas de convergence cette limite $l$ sera notée $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n)$, et l'on écrira : $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

Toute *suite extraite* d'une suite convergente de $\mathbb{R}^p$ converge vers la même limite. Toute suite stationnaire est convergente.

Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites convergentes de $\mathbb{R}^p$, et $(\lambda_n)$, $(\mu_n)$ deux suites convergentes dans $\mathbb{R}$, alors la suite $(\lambda_n u_n + \mu_n v_n)$ converge et sa limite est $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_n) \lim\limits_{n \to \infty} (u_n) + \lim\limits_{n \to \infty} (\mu_n) \lim\limits_{n \to \infty} (v_n)$. En particulier, les suites convergentes de $\mathbb{R}^p$ forment un sous-$\mathbb{R}$-ev du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}^p)$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

**Normes standard de $\mathbb{R}^p$**

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, nous poserons :

$$N_1(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| \,, \quad N_2(x) = \left( \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 \right)^{1/2} \,, \quad N_\infty(x) = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i| \,.$$

Ces fonctions sont appelées les **normes standard** de $\mathbb{R}^p$. Ce sont des **normes** sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^p$, en ce sens que, si $\nu$ est l'une de ces fonctions, elle vérifie les axiomes suivants qui caractérisent les normes (cf. Chap. X) :

($\mathcal{N}_0$) $\nu$ est une fonction $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}_+$

($\mathcal{N}_1$) si $x \in \mathbb{R}^p$, $\nu(x) = 0$ ssi $x = 0$

($\mathcal{N}_2$) si $x$ et $y$ sont éléments de $\mathbb{R}^p$, $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$

($\mathcal{N}_3$) si $x \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\nu(\lambda x) = |\lambda| \, \nu(x)$.

Pour $N_1$, $N_2$, $N_\infty$, la vérification de ces propriétés est aisée, la seule présentant une difficulté étant ($\mathcal{N}_2$) pour $\nu = N_2$. Utilisons pour prouver cette dernière l'identité algébrique, vraie pour $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ arbitraires dans $\mathbb{R}^p$ :

$$\left( \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \right) = \left( \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \right)^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

d'où il résulte

(1) $$\left( \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i y_i \right)^2 \leqslant \left( \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i^2 \right) \left( \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} y_i^2 \right),$$

inégalité dite **de Schwarz,** que nous retrouverons plusieurs fois. Pour en déduire $N_2(x+y) \leqslant N_2(x) + N_2(y)$, qui s'écrit explicitement :

(2) $$\left[ \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (x_i + y_i)^2 \right]^{1/2} \leqslant \left[ \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} x_i^2 \right]^{1/2} + \left[ \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} y_i^2 \right]^{1/2}$$

et que l'on appelle inégalité **de Minkowski,** il suffit d'élever les deux membres de (2) au carré et de simplifier.

La fonction $N_2$ s'appelle **norme euclidienne standard** sur $\mathbb{R}^p$. On a évidemment, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ :

(3) $$N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant p N_\infty(x)$$

(4) $$N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{p}\, N_\infty(x) \,.$$

L'intérêt de ces normes standard est de permettre une définition *globale* de la limite :

**PROPOSITION II.2.1**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{1,n}, u_{2,n}, \ldots, u_{p,n})$ une suite dans $\mathbb{R}^p$, $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ et $\nu$ l'une quelconque des normes standard sur $\mathbb{R}^p$. Pour que $(u_n)$ converge vers $l$ dans $\mathbb{R}^p$, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(u_n - l) \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. En langage quantifié abrégé, la convergence de $(u_n)$ vers $l$ s'exprime par :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geqslant N) \Rightarrow \nu(u_n - l) \leqslant \varepsilon .$$

*Démonstration :*

Pour $\nu = N_\infty$, la proposition est évidente. Pour $\nu = N_1$ ou $\nu = N_2$, il suffit de tenir compte des inégalités (3) et (4) pour se ramener au cas précédent. ■

On constate ainsi que, dans la caractérisation de la limite, la fonction $\nu$ joue le rôle de la *valeur absolue* dans le cas des suites réelles.

Voici un exemple d'application de la proposition II.2.1.

**THÉORÈME II.2.1** (*« lemme de Cesaro »*)

*Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ convergente et de limite $l$. Alors la suite $(v_n)$ des moyennes de $(u_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ converge vers $l$.*

*Démonstration :*

En remplaçant $(u_n)$ par $(u_n - l)$, ce qui a pour conséquence de remplacer $(v_n)$ par $(v_n - l)$, on se ramène au cas où $l = 0$, ce que nous supposons donc.

Notons $\nu$ une norme standard. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Choisissons $M \in \mathbb{N}^*$ pour que $\nu(u_n) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ dès que $n \geqslant M$. En écrivant

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_M) + \frac{1}{n}(u_{M+1} + \cdots + u_n) ,$$

on voit que, pour $n > M$ :

$$\nu\left[\frac{1}{n}(u_{M+1} + \cdots + u_n)\right] = \frac{1}{n}\nu(u_{M+1} + \cdots + u_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n}[\nu(u_{M+1}) + \cdots + \nu(u_n)] \leqslant \frac{n-M}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Quant à $\dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_M)$, il tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, ce qui permet de choisir l'entier $M'$ pour avoir

$$\nu\left[\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_M)\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que} \quad n \geqslant M' .$$

Finalement, pour $n \geq \text{Max}\,(M, M')$, on a $\nu(v_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. ■

### Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$

**Définition II.2.2**

> *Soit $\nu$ l'une des normes standard sur $\mathbb{R}^p (p \geq 1)$. Une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^p$ est dite* **de Cauchy** *pour $\nu$ ssi elle vérifie* le critère de Cauchy *ci-après :*
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2) \quad (N \leq n < p \Rightarrow \nu\,(u_n - u_p) \leq \varepsilon)\,.$$

Soit $\nu$ et $\nu'$ deux normes standard dans $\mathbb{R}^p$. Les inégalités (3) et (4) montrent aussitôt qu'une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^p$ est de Cauchy pour $\nu$ ssi elle est de Cauchy pour $\nu'$. En prenant $\nu = N_\infty$, on en déduit :

**Théorème II.2.2**

> *Pour qu'une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^p$ soit de Cauchy pour une norme standard $\nu$ de $\mathbb{R}^p$, il faut et il suffit que les suites composantes $(u_{i,n})$ de $(u_n)$ soient toutes de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*
> *En conséquence, une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^p$ est de Cauchy pour $\nu$ ssi elle converge dans $\mathbb{R}^p$.*

La dernière assertion (conséquence immédiate de la proposition II.2.1) peut s'exprimer en disant que $\mathbb{R}^p$, muni de la norme standard $\nu$, est un **espace normé complet.**

### Suites à valeurs complexes

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, dont $(1, i)$ est une *base.* A l'aide de cette base nous pouvons l'identifier au $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$, ce qui permet d'appliquer tous les résultats précédents. C'est ainsi que, si $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, la *convergence de la suite* $(z_n)$ dans $\mathbb{C}$ équivaut par définition à la convergence simultanée des suites $(x_n)$ et $(y_n)$ dans $\mathbb{R}$. Du fait que la norme standard $N_2$ n'est autre que le *module* des nombres complexes (cf. Tome 1, Chap. VI) on déduit :

**Proposition II.2.2**

> *Soit $(z_n)$ une suite dans $\mathbb{C}$, et $l \in \mathbb{C}$. On a : $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ ssi le critère suivant est satisfait :*
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N) \Rightarrow |z_n -$$

La notion de *limite d'une suite complexe* est *compatible avec la structure de corps* de $\mathbb{C}$. De manière précise :

**PROPOSITION II.2.3**

*Soit $(z_n)$ et $(t_n)$ des suites complexes, et $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$.*

(I) *Si* $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z$, *alors* $|z_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} |z|$.

(II) *Si* $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z$ *et* $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} t$, *alors* $z_n t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} zt$.

(III) *Si* $z_n \neq 0$ *pour tout* $x$, *si* $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z$ *et si* $z \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{z_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{z}$.

*Démonstration :*

(I) résulte de $||u| - |v|| \leqslant |u - v|$ pour tous $u$ et $v$ dans $\mathbb{C}$. (II) et (III) se démontrent exactement comme dans la proposition I.6.2, en remplaçant la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ par le module dans $\mathbb{C}$, car seules ont été utilisées les propriétés :

$$|u + v| \leqslant |u| + |v| \quad \text{et} \quad |uv| = |u|\,|v|\,. \quad \blacksquare$$

Une suite $(z_n) = (x_n + iy_n)$ de $\mathbb{C}$, où $x_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$ est de Cauchy pour l'une quelconque des normes standard du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ ssi les deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à la convergence de $(x_n)$ et de $(y_n)$, et finalement à la convergence de $(z_n)$ dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, *dans $\mathbb{C}$ muni du module des nombres complexes, les suites convergentes sont les suites de Cauchy*. On dit encore que $\mathbb{C}$ est **complet.**

***Exemple 1 :*** Etudions, pour $q \in \mathbb{C}^*$ donné, la **suite géométrique** $(z_n)_{n \geqslant 0} = (q^n)_{n \geqslant 0}$.

Si $|q| > 1$, on a : $|z_n| = |q|^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la suite diverge.

Si $|q| < 1$, on a : $|z_n| = |q|^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Supposons $|q| = 1$. De $z_{n+1} = qz_n$ on déduit que, si la suite $(z_n)$ a une limite $l$, nécessairement $l = ql$, d'où $l(1 - q) = 0$ ; et comme $|z_n| = 1$ pour tout $n$, $|l| = 1$, donc $l \neq 0$, d'où $q = 1$.

Par conséquent la suite $(q^n)_{n \geqslant 0}$ ne converge jamais pour $|q| = 1$ et $q \neq 1$. En revanche elle converge vers 1 si $q = 1$.

### Suites à valeurs dans $\mathbb{C}^p$

Soit $p$ un entier naturel non nul. Le $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^p$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}$-ev par *restriction des scalaires* à $\mathbb{R}$ (cf. Tome I, § VI.4, exemple 4). Il devient alors un $\mathbb{R}$-ev de dimension $2p$, noté $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$. La bijection $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^{2p} \longrightarrow \mathbb{C}^p$, $(x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p) \mapsto (z_1, \ldots, z_p)$, où $z_k = x_k + iy_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$, permet d'identifier $\mathbb{R}^{2p}$ et $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$.

Si $N_1$, $N_2$, $N_\infty$ désignent les normes standard de $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$, on peut leur associer trois autres fonctions $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si :

$$V = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p ,$$

on pose

$$\nu_1(V) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} |z_k| \ , \ \nu_2(V) = \left[ \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} |z_k|^2 \right]^{\frac{1}{2}} , \ \nu_\infty(V) = \underset{1 \leqslant k \leqslant p}{\mathrm{Max}} \ (|z_k|).$$

On vérifie que ces fonctions sont bien des *normes sur le* $\mathbb{R}$-ev $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire qu'elles satisfont bien aux axiomes $(\mathcal{N}_q)_{0 \leqslant q \leqslant 3}$. De plus n'importe laquelle de ces trois fonctions vérifie $\nu(\lambda V) = |\lambda| \ \nu(V)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathbb{C}^p$. On dit que *$\nu$ est une norme du* $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^p$. On remarque d'ailleurs que $\nu_2 = N_2$, norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^{2p}$. On a de plus, pour tout $V \in \mathbb{C}^p$ :

$$N_\infty(V) \leqslant \nu_\infty(V) \leqslant \sqrt{2}\, N_\infty(V) \tag{5}$$

$$\nu_1(V) \leqslant N_1(V) \leqslant \sqrt{2}\ \nu_1(V) , \tag{6}$$

ce qui permet de retranscrire la proposition II.2.1 et le théorème II.2.2, en identifiant $\mathbb{R}^{2p}$ à $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$ et en prenant pour fonction $\nu$ l'une quelconque des fonctions $N_1$, $N_2$, $N_\infty$, $\nu_1$, $\nu_2 = N_2$, $\nu_\infty$. Les fonctions $\nu_1$, $\nu_2 = N_2$ et $\nu_\infty$ seront appelées **normes standard complexes** sur $\mathbb{C}^p$.

***Exercice 1 :*** Construire une suite complexe $(z_n) = (x_n + \mathrm{i}y_n)$ telle que $(x_n)$ et $(y_n)$ admettent des suites extraites convergentes, mais que $(z_n)$ n'en admette pas.

***Exercice 2 :*** Soit $(a_n)$, $(b_n)$ deux suites complexes tendant vers 0. On suppose trouvé $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sum_{k=0}^{n} |b_k| \leqslant M$ pour tout $n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 3 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et soit $(a_n)$ une suite complexe qui converge vers $a \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \cdots + a_n u_0}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a .$$

***Exercice 4 :*** Soit $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ des réels $\geqslant 0$ tels que $(\forall n) \ \sum_{m=0}^{n} a_{m,n} = 1$ et $(\forall m) \ a_{m,n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que si $(u_n)$ est une suite complexe convergente, de limite $l$, alors $a_{0,n} u_0 + a_{1,n} u_1 + \cdots + a_{n,n} u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$. Cas particulier : $a_{m,n} = \dfrac{1}{2^n} \dbinom{n}{m}$.

***Exercice 5 :*** Si $(u_n)$ est une suite complexe qui converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors $\dfrac{2}{n(n+1)} (u_1 + 2 u_2 + \cdots + n u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

***Exercice 6 :*** Soit $A \in \mathbb{C}^*$ et $a$ l'une de ses racines carrées. On définit la suite complexe $(u_n)$ à partir de $u_0 \in \mathbb{C}$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*a*) Pour quelles valeurs de $u_0$ les $u_n$ sont-ils tous définis ?

*b*) Calculer $\dfrac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} + a}$ en fonction de $u_n$, $a$ et $n$.

*c*) En déduire une discussion de la convergence de $(u_n)$.

***Exercice 7 :*** Pour quelles valeurs de $u_0$ la suite complexe satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-elle définie ? Montrer qu'alors elle est périodique.

***Exercice 8 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_n}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et $(s_n)$ une suite complexe convergeant vers $s \in \mathbb{C}$. Prouver que $\dfrac{s_0 u_n + s_1 u_{n-1} + \cdots + s_n u_0}{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} s$.

## § II.3 *EXPONENTIELLE NATURELLE, LOGARITHME NÉPÉRIEN*

**Proposition II.3.1**

> *La suite réelle* $n \mapsto u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \geqslant 1)$ *converge, vers un réel* $> 2$.

*Démonstration :*

*a*) Montrons d'abord que cette suite est *majorée*.

De $t^2 + 2t < (t+1)^2$ on déduit $\dfrac{t+2}{t+1} < \dfrac{t+1}{t}$ pour tout réel $t > 0$.

Donc, pour $n \geqslant 1$ $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{2n+2}{2n} < \dfrac{2n+1}{2n-1} < \cdots < \dfrac{n+3}{n+1}$, d'où :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \frac{2n+2}{2n} \times \cdots \times \frac{n+3}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = 2\,\frac{2n+1}{n+2}$$

d'où $u_n < 4$ pour tout $n \geqslant 1$.

*b*) Montrons maintenant que cette suite est *croissante*, ce qui revient à prouver que $\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ pour $n \geqslant 2$, ou encore $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n$, c'est-à-dire $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

Développons le second membre par la formule du binôme :

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1-\frac{\binom{n}{1}}{n^2}+\frac{\binom{n}{2}}{n^4}-\frac{\binom{n}{3}}{n^6}+\cdots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{n^{2n}}.$$

En retranchant $1-\dfrac{1}{n}$ il reste

$$\frac{\binom{n}{2}}{n^4}-\frac{\binom{n}{3}}{n^6}+\cdots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{n^{2n}}.$$

Comme $n^2\binom{n}{2k} > \binom{n}{2k+1}$ pour $k \in \left[\!\left[1, \operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)\right]\!\right]$, il est clair, en regroupant les termes de la somme deux par deux (à l'exception du dernier qui est tout seul si $n$ est pair), que l'on a $u_n > u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

*c*) $(u_n)$ étant strictement croissante et majorée par 4, et $u_1$ étant égal à 2, l'assertion est prouvée. ■

**DÉFINITION II.3.1**

*Le nombre réel* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *s'appelle* base de l'exponentielle naturelle, *et se note* e ([1]). *L'exponentielle de base* e, *qui envoie* $x \in \mathbb{R}$ *sur* $\mathrm{e}^x$, *se note aussi* exp *et s'appelle* **exponentielle naturelle.** *La fonction logarithme de base* e *s'appelle* **logarithme népérien** ([2]) *et se note* Log *ou* ln (*dans cet ouvrage nous adopterons* Log).

Puisque $\mathrm{e} > 1$, les fonctions exp et Log sont *strictement croissantes.* Remarquons tout de suite que si l'on pose $u'_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ (ce qu'avait fait Néper avec $n = 10^7$), on constate que la suite $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers* $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. En effet, pour $n \geqslant 2$,

$$u'_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\times\frac{n-1}{n} =$$
$$= \frac{1}{u_{n-1}}\times\frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{e}}\times 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{car} \quad 1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Mais la convergence de $(u_n)$ vers e (ou celle de $(u'_n)$ vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$) est lente, et la définition ci-dessus ne se prête donc pas à un calcul précis et rapide du

---

([1]) Cette notation est due à *Euler,* qui a également favorisé l'adoption de la lettre $\pi$ pour le nombre d'Archimède (*périmètre* d'un cercle de diamètre unité).

([2]) John *Napier* ou *Neper*, baron de Merchiston, mathématicien écossais (1550-1617) est l'inventeur du premier système de logarithmes (traité paru en 1614).

nombre e. Cependant, si l'on développe $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ par la formule du binôme, on obtient

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{1}{n^n},$$

ce qui invite à considérer la suite $(s_n)$ de terme général

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \text{qui est } \textit{croissante} .$$

Bien entendu $u_n \leqslant s_n$ et l'inégalité est même stricte pour $n \geqslant 2$. Mais

$$s_n - u_n = \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}\left[1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdots \left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right],$$

et la quantité entre crochets peut être majorée par $\dfrac{1+2+\cdots+(k-1)}{n}$ (c'est vrai pour $k=2$ et cela se propage par récurrence finie jusqu'à $k=n$). On a donc

$$0 < s_n - u_n < \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{2n} \times \frac{1}{(k-2)!} .$$

Or il est très facile de majorer $\displaystyle\sum_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{(k-2)!}$ par

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-3}} \quad \text{qui vaut} \quad 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}} < 3 .$$

Finalement $0 < s_n - u_n < \dfrac{3}{2n}$ qui tend vers 0. Donc la suite $(u_n)$ a exactement *la même limite* que la suite $(s_n)$. Or on devine que la suite $(s_n)$ converge bien plus rapidement vers e que la suite $(u_n)$. Soit en effet pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$t_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} = s_n + \frac{1}{n \cdot n!} .$$

On a :

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-(n^2+n-1)}{(n+1)(n+1)!} < 0 .$$

La suite $(t_n)_{n \geqslant 1}$ est donc *décroissante*, et comme $t_n - s_n = \dfrac{1}{nn!}$ elle a bien entendu la même limite e que $(s_n)$. En résumé,

$$2 \leqslant u_n < s_n < \mathrm{e} < t_n < t_1 = 3 ,$$

ce qui permet un calcul à la fois rapide et précis du nombre e. Voici par exemple un calcul explicite pour $n = 14$, toutes les divisions étant faites « de tête » et par défaut, pour pouvoir tenir compte des erreurs d'arrondi, qui sont loin d'être négligeables :

$$
\begin{array}{ll}
1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} & = 2{,}5 \\
\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{26}{120} & = 0{,}216666666666\ldots \\
\frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{8}{5040} = \frac{1}{630} & = 0{,}001587301587\ldots \\
\frac{1}{8!} = \frac{1}{5040} : 8 & = 0{,}000024801587\ldots \\
\frac{1}{9!} = \frac{1}{8!} : 9 & = 0{,}000002755731\ldots \\
\frac{1}{10!} & = 0{,}000000275573\ldots \\
\frac{1}{11!} & = 0{,}000000025052\ldots \\
\frac{1}{12!} & = 0{,}000000002087\ldots \\
\frac{1}{13!} & = 0{,}000000000160\ldots \\
\frac{1}{14!} & = 0{,}000000000011\ldots
\end{array}
$$

$$s_{14} > 2{,}718281828454$$

et $$s_{14} < 2{,}718281828463$$

d'où $$t_{14} < 2{,}718281828464$$

En prenant $e = 2{,}71828182846$ on est sûr qu'en valeur absolue l'erreur ne dépassera pas $0{,}6 . 10^{-11}$.

A partir des fonctions exp et Log on peut exprimer simplement *toutes* les fonctions exponentielles et logarithmes définies au § I.6. En effet, pour tout $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{x^y = \exp(y \operatorname{Log} x)}.$$

Pour tout $a > 0$ $(a \neq 1)$ et $x > 0$ :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}}.$$

En particulier, entre les logarithmes décimaux et népériens relations :

$$\log_{10}(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(10)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} x = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(\mathrm{e})}.$$

Le nombre $\log_{10}(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\operatorname{Log} 10}$ se note parfois, en calcul numérique, $M$ et vaut environ 0,434294.

De $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \mathrm{e}$, on déduit l'importante propriété de la fonction Log :

$$n \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\uparrow} 1,$$

et il en résulte, pour $a>0$ et $a \neq 1$ dans $\mathbb{R}$, $n \log_a\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\operatorname{Log} a}$.

Comme $a \mapsto \operatorname{Log} a$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on a :

**Proposition II.3.2**

*Pour chaque réel $a>0$ $(a \neq 1)$, la suite $n \mapsto n \log_a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ converge, vers un réel non nul $\dfrac{1}{\Lambda(a)}$. Le nombre* e *est l'unique réel $>0$ tel que $\Lambda(\mathrm{e})=1$. La fonction $1 \mapsto 0$ et $a \mapsto \Lambda(a)$ pour $a \neq 1$ est le* logarithme népérien Log.

***Exercice 1 :*** En utilisant une méthode analogue à celle du texte, démontrer que $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<1$ (attention aux derniers termes si $n$ pair). En déduire que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\downarrow} \mathrm{e}$, puis, que $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\uparrow} \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $n$ désignant un entier $\geqslant 1$.

***Exercice 2 :*** En majorant $n$ par $\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$, trouver la limite de la suite $u_n = \sqrt[n]{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{Log} n}{n}$.

***Exercice 3 :*** Soit $a$ un nombre réel $>1$. On rappelle que $\sqrt[n]{a}>1$.

*a*) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

*b*) On considère la suite $u_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$. Montrer qu'elle est décroissante et minorée. (*Indication :* poser $t = a^{\frac{1}{n(n+1)}}$.) On pose : $\lambda(a) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

*c*) Soit $b$ un autre nombre réel $>1$. On pose $w_n = n(\sqrt[n]{a}-1)(\sqrt[n]{b}-1)$. Etudier $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$ et en déduire que $\lambda(ab) = \lambda(a)+\lambda(b)$.

*d*) On suppose $a > b > 1$. Montrer que $\dfrac{a-b}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} < \dfrac{a-b}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\lambda\left(a+\dfrac{1}{n}\right) - \lambda(a)\right]$.

*e*) Reconnaître la fonction $a \mapsto \lambda(a)$.

***Exercice 4 :*** On pose $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Si $a$ désigne un *entier fixe* $> 1$, montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = S_{na} - S_n$ est croissante et majorée. Soit $\lambda(a)$ sa limite quand $n \longrightarrow \infty$.

Si $b$ désigne un autre entier $> 1$, montrer que $S_{na} - S_{nb}$ admet une limite égale à $\lambda(a) - \lambda(b)$. Pour tout $c \in \mathbb{N}^*$ montrer que $\lambda(ac) - \lambda(bc) = \lambda(a) - \lambda(b)$. En déduire que $\lambda(a) - \lambda(b)$ est de la forme $\mu\left(\dfrac{a}{b}\right)$ et établir la propriété

$$\mu\left(\frac{a}{b}\right) + \mu\left(\frac{a'}{b'}\right) = \mu\left(\frac{aa'}{bb'}\right).$$

***Exercice 5 :*** A partir de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\downarrow} e$ (cf. exercice 1), montrer que $(n+1)\operatorname{Log}\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\downarrow} 1$ et en déduire la majoration $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \operatorname{Log} n$.

*Application :* On considère la suite $(u_n)$ définie à partir de $u_0 \in ]0, 1[$ par $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Après avoir montré que $u_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$, on cherchera la limite de $(nu_n)$.

*Indication :* Poser $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, montrer que $v_n > n$, puis que $v_{n+1} < v_n < 1 + \dfrac{2}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Achever en utilisant $\dfrac{\operatorname{Log} n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (cf. exercice 2).

***Exercice 6 :*** Soit $A$ et $B$ deux entiers qui s'écrivent avec $N$ chiffres dans le système décimal : $A = [a_{N-1}\, a_{N-2} \ldots a_0]$, $B = [b_{N-1}\, b_{N-2} \ldots b_0]$. On suppose que : $a_i = b_i$ pour $i \geqslant \operatorname{Ent}\left(\dfrac{N}{2}\right) - 2$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $\left|A^{\frac{1}{n}} - B^{\frac{1}{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

## § II.4 *COMPARAISON DES SUITES*

Dans tout ce § nous allons voir comment comparer « l'ordre de grandeur *relative* » de deux suites lorsque l'entier $n$ tend vers l'infini. Il est naturel de convenir que « *l'ordre de grandeur* d'une suite $(u_n)$ à termes réels ou complexes *ne dépasse pas* celui d'une suite de référence $(v_n)$ quand $n \longrightarrow \infty$ » ssi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ reste *bornée*, mais une telle définition ne peut s'appliquer que si la suite $(v_n)$ est *à termes tous* $\neq 0$. Avec cette même restriction il est naturel de considérer que « $(u_n)$ est *infiniment petit devant* $(v_n)$ quand $n \longrightarrow \infty$ » ssi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ *tend vers zéro*. Pour éviter d'être obligés de nous en tenir à des suites $(v_n)$ à termes tous $\neq 0$. nous allons donner une définition un peu plus générale :

**DÉFINITION II.4.1**

*Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites complexes.*

(I) *On dit que la suite $(u_n)$ est* **dominée par** $(v_n)$, *et l'on écrit :* $|u_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n|$, *ou :* $u \preccurlyeq v$, *ssi il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n| \leqslant A|v_n|$ pour tout $n$.*

(II) *On dit que la suite $(u_n)$ est* **négligeable devant** $(v_n)$, *et l'on écrit :* $|u_n| \underset{n \to \infty}{\ll} |v_n|$, *ou :* $u \ll v$, *ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$ dès que $n \geqslant N$.*

Si les $v_n$ sont tous $\neq 0$, il est clair que :

$$|u_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n| \quad \text{ssi la suite} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \qquad \text{est } \textit{bornée} \,,$$

et que :

$$|u_n| \underset{n \to \infty}{\ll} |v_n| \quad \text{ssi} \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

## Notations de Landau

Fixons la suite $v = (v_n)$. On désigne par $O(v)$ ou $O((v_n))$ que l'on abrège en $O(v_n)$ *l'ensemble* des suites $(u_n)$ telles que $|u_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n|$.

On désigne par $o(v)$ ou $o((v_n))$ que l'on abrège en $o(v_n)$ l'ensemble des suites $(u_n)$ telles que $|u_n| \underset{n \to \infty}{\ll} |v_n|$.

Avec ces notations, dues à Landau [1], les deux écritures $|u_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n|$ et $u_n \underset{n \to \infty}{\in} O(v_n)$ sont *équivalentes,* de même que $|u_n| \underset{n \to \infty}{\ll} |v_n|$ et $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$. Nous utiliserons dans cet ouvrage les deux types d'écriture ci-dessus selon les circonstances. Observons tout de suite que $u_n \underset{n \to \infty}{\in} O(v_n)$ ssi $|u_n| \underset{n \to \infty}{\in} O(|v_n|)$ et que $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$ ssi $|u_n| \underset{n \to \infty}{\in} o(|v_n|)$.

• Si la suite $v = (v_n)$ est fixée, à termes réels (resp. complexes), $O(v)$ et $o(v)$ sont des *sous*-$\mathbb{R}$-ev (resp. *sous*-$\mathbb{C}$-ev) de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$) de toutes les suites réelles (resp. complexes). De

---

[1] Edmund Georg Hermann *Landau*, mathématicien allemand (1877-1938), auteur de travaux en théorie analytique des nombres et sur la fonction $\zeta$ de Riemann.

plus $o(v) \subset O(v)$. Autrement dit, les relations $|u_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n|$ et $|u'_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v'_n|$ impliquent, pour tous $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\in \mathbb{C}^2$), $|\lambda u_n + \lambda' u'_n| \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} |v_n|$ et il en est de même si on remplace $\preccurlyeq$ par $\ll$.

• En particulier $O(1)$ *est l'ensemble des suites bornées ;* $o(1)$ *est l'ensemble des suites qui tendent vers* 0. Quant à $O(0) = o(0)$ c'est l'ensemble des suites *stationnaires vers* 0, *i.e. à support fini.*

• Si $u$, $v$, $w$ sont trois suites, les relations $u \in O(v)$ et $v \in O(w)$ entraînent $u \in O(w)$ (autrement dit, la relation $\preccurlyeq$ *est transitive*). Chacune des relations « $u \in O(v)$ et $v \in o(w)$ » et « $u \in o(v)$ et $v \in O(w)$ » entraîne $u \in o(w)$ et *a fortiori* la relation $\ll$ est aussi transitive.

• Soit $(u_{1,n})_n$, $(u_{2,n})_n$, $\ldots$, $(u_{p,n})_n$ ; $(v_{1,n})_n$, $\ldots$, $(v_{p,n})_n$ des suites complexes : si $(u_{k,n}) \underset{n \to \infty}{\in} O(v_{k,n})$ pour tout $k$, alors $u_{1,n} u_{2,n} \ldots u_{p,n} \underset{n \to \infty}{\in} O(v_{1,n} \ldots v_{p,n})$. Si de plus il existe $k$ tel que $u_{k,n} \underset{n \to \infty}{\in} o(v_{k,n})$, alors $u_{1,n} \ldots u_{p,n} \underset{n \to \infty}{\in} o(v_{1,n} \ldots v_{p,n})$. La vérification est immédiate, compte tenu de la propriété du module des nombres complexes $|zt| = |z|\,|t|$, qui est également vérifiée par la valeur absolue des nombres réels.

• Supposons enfin $u_n \underset{n \to \infty}{\in} O(v_n)$ (resp. $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$). Alors pour toute suite $(N_p)$ *strictement croissante* dans $\mathbb{N}$, on a :

$$u_{N_p} \underset{p \to \infty}{\in} O(v_{N_p}) \quad (\text{resp. } u_{N_p} \underset{p \to \infty}{\in} o(v_{N_p}))\,.$$

***Exemple 1 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels avec $\alpha < \beta$. Alors (cf. exemple 4 du § II.1) $n^{\alpha - \beta} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $n^{\alpha} \underset{n \to \infty}{\in} o(n^{\beta})$. En particulier, si $P \in \mathbb{C}_N[X]$, pour tout réel $\gamma > N$, on a $P(n) \underset{n \to \infty}{\in} o(n^{\gamma})$.

***Exemple 2 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels avec $\alpha < \beta$ et soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers $+\infty$. Alors $u_n^{\alpha} \in o(u_n^{\beta})$.

***Exemple 3 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels avec $0 < \alpha < \beta$. On sait (cf. exemple 3 du § II.1) que $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\alpha^n \underset{n \to \infty}{\in} o(\beta^n)$. Plus généralement on a : $\alpha^{u_n} \underset{n \to \infty}{\in} o(\beta^{u_n})$ pour toute suite $(u_n)$ tendant vers $+\infty$.

***Remarque 1 :*** Les relations $u \underset{n \to \infty}{\preccurlyeq} v$ et $u \underset{n \to \infty}{\ll} v$ ne sont que des relations de **préordre** sur l'ensemble des suites réelles (resp. complexes), car l'antisymétrie fait défaut. Si l'on a à la fois $u \preccurlyeq v$ et $v \preccurlyeq u$, cela entraîne qu'il existe un entier $N$ tel que les ensembles $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \text{ et } u_n = 0\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \text{ et } v_n = 0\}$ *coïncident.* D'autre part, les relations $u \ll v$ et $v \ll u$ ont lieu simultanément ssi $u$ et $v$ sont toutes deux *stationnaires vers* 0, c'est-à-dire à support fini. Pour obtenir avec $\ll$ une véritable relation d'**ordre,** il suffit de se limiter à l'ensemble des suites *à support infini* (cf. exercice 4).

***Exemple 4 :*** Soit $(u_n)$, $(v_n)$ des suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $u_n \underset{n \to \infty}{\in} O(v_n)$ (resp. $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$). Alors pour $\alpha$ réel $> 0$, on a : $(u_n)^\alpha \underset{n \to \infty}{\in} O((v_n)^\alpha)$ (resp. $u_n^\alpha \in o(v_n^\alpha)$). Si $\alpha < 0$, $v_n^\alpha \in O(u_n)$ (resp. $v_n^\alpha \in o(u_n^\alpha)$).

***Exemple 5 :*** Soit $(u_n)$, $(v_n)$ des suites de $\mathbb{R}_+^*$ telles que $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$. Alors $\exp(u_n) \underset{n \to \infty}{\in} o(\exp(v_n))$. En effet

$$\frac{\exp(u_n)}{\exp(v_n)} = \exp(u_n - v_n) = \exp\left(v_n\left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right)\right). \quad \text{Or} \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Donc

$$v_n\left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty, \quad \text{d'où} \quad \exp(u_n - v_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

**Comparaison à l'infini des exponentielles et des puissances**

**Théorème II.4.1**

*Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*

$$\frac{e^{u_n}}{(u_n)^\alpha} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

*Démonstration :* Soit $k$ un entier $> \alpha$. Alors, dès que $u_n \geqslant 1$ on a : $0 < \dfrac{e^{u_n}}{u_n{}^k} \leqslant \dfrac{e^{u_n}}{u_n{}^\alpha}$, donc il suffit de prouver le théorème avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Désignons par $K_n$ la partie entière de $u_n$ pour tout $n$. On a :

$$\frac{e^{u_n}}{(u_n)^\alpha} \geqslant \frac{e^{K_n}}{(K_n + 1)^\alpha} = \frac{(1+h)^{K_n}}{(K_n + 1)^\alpha} \quad \text{avec} \quad h = e - 1 > 0$$

Choisissons $N \in \mathbb{N}$ pour que $K_n \geqslant \alpha + 1$ dès que $n \geqslant N$. Si $n \geqslant N$, en développant $(1+h)^{K_n}$ par la formule du binôme et en le minorant par son terme en $h^{\alpha+1}$, on obtient :

$$\frac{(1+h)^{K_n}}{(K_n+1)^\alpha} \geqslant \frac{\binom{K_n}{\alpha+1} h^{\alpha+1}}{(K_n+1)^\alpha} =$$

$$= K_n \frac{(K_n-1)(K_n-2)\dots(K_n-\alpha)}{(K_n+1)(K_n+1)\dots(K_n+1)} h^{\alpha+1} = K_n A_n h^{\alpha+1}.$$

Il est clair que $K_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, que $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $h^{\alpha+1}$ est une constante $>0$, d'où $K_n A_n h^{\alpha+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *A fortiori* $\dfrac{e^{u_n}}{(u_n)^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ■

En particulier, pour tout réel $\alpha > 0$, $\dfrac{e^n}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et plus généralement, pour $a > 1$ : $\dfrac{a^n}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, car $\dfrac{a^n}{n^\alpha} = \dfrac{e^{n \operatorname{Log} a}}{(n \operatorname{Log} a)^\alpha} \times (\operatorname{Log} a)^\alpha$, ce qu'on peut retenir sous la forme :

*pour $a > 1$ et $\alpha > 0$, la puissance $n^\alpha$ est négligeable devant $a^n$.*

***Exemple 6 :*** Montrons, pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $a > 1$, que : $n^\alpha \in o(e^{n^\beta})$. Il suffit pour cela de poser $v_n = n^\beta$, d'où $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n^\alpha = (v_n)^{\alpha/\beta}$, et d'appliquer le théorème II.4.1 avec la suite $(v_n)$ et le réel $\dfrac{\alpha}{\beta} > 0$.

en prenant pour suite $(u_n)$ la suite $\operatorname{Log}(n^\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{Log} n$, où $\varepsilon$ est un réel $>0$ donné, on obtient : $\dfrac{n^\varepsilon}{\varepsilon^\alpha \operatorname{Log}^\alpha n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, autrement dit :

*pour tous réels $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Log}^\alpha n$ est négligeable devant $n^\varepsilon$.*

### Equivalence de suites

**DÉFINITION II.4.2**

*Nous dirons qu'une suite $(u_n)$ est* ***équivalente*** *à une suite $(v_n)$, et nous écrirons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ pour exprimer que : $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\in} o(v_n)$.*

**THÉORÈME II.4.2**

> *Sur l'ensemble des suites complexes, la relation binaire* $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ *est une* **relation d'équivalence.** *Si* $v_n \neq 0$ *pour tout* $n$, *cette relation équivaut à :* $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$

*Démonstration :*

La relation $\sim$ est évidemment réflexive. Montrons qu'elle est *symétrique*. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|$ dès que $n \geqslant N$, d'où

$$|v_n| - |u_n| \leqslant \big||v_n| - |u_n|\big| \leqslant |u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|$$

et donc $|v_n| \leqslant 2|u_n|$. Par suite $v_n \underset{n\to\infty}{\in} O(u_n)$. Compte tenu de l'hypothèse $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\in} o(v_n)$ et de $v_n \underset{n\to\infty}{\in} O(u_n)$, il s'ensuit que $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\in} o(u_n)$, et par conséquent $v_n \sim u_n$, d'où la symétrie. La transitivité se prouve facilement : de $u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\in} o(v_n)$ et $v_n - w_n \underset{n\to\infty}{\in} o(v_n)$ on tire par addition $u_n - w_n \in o(v_n)$, et comme $v_n \in O(w_n)$, on a : $u_n - w_n \underset{n\to\infty}{\in} o(w_n)$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$. Enfin, si $v_n \neq 0$ pour tout $n$, la relation $u_n - v_n \in o(v_n)$ signifie que $\dfrac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que : $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$ ■

***Remarque 2 :*** Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, on vient de voir que $v_n \underset{n\to\infty}{\in} O(u_n)$, et bien sûr $u_n \underset{n\to\infty}{\in} O(v_n)$. Il en résulte qu'au-delà d'un entier $N$ convenable, les termes $u_n$ et $v_n$ s'annulent, ou non, en même temps.

Le lecteur vérifiera sans peine la validité des mécanismes suivants :

- Si $u_n = v_n$ pour tout $n$ sauf au plus un nombre fini, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

- Soit $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors, pour que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)$ existe dans $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n)$ existe, et si c'est le cas, ces limites sont égales. En effet, si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, la suite $(u_n)$ est bornée, donc $(v_n)$ aussi. Or

$u_n - v_n \underset{n \to \infty}{\in} o(v_n)$. Donc $u_n - v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. En d'autres termes, **dans une recherche d'existence et de valeur de limite de suite, on peut remplacer cette suite par une suite équivalente.**

• Soit $(u_{1,n})_n$, …, $(u_{p,n})_n$ ; $(v_{1,n})_n$, …, $(v_{p,n})_n$ des suites complexes. Si $u_{k,n} \underset{n \to \infty}{\sim} v_{k,n}$ pour tout $k$, alors

$$u_{1,n} \cdot u_{2,n} \cdot \ldots \cdot u_{p,n} \underset{n \to \infty}{\sim} v_{1,n} \ldots v_{p,n} .$$

On le démontre par récurrence, en commençant par établir que $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$ entraîne $u_n w_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n w_n$.

• Si $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{n \to \infty}{\sim} |v_n|$, conséquence de

$$\big| |u_n| - |v_n| \big| \leqslant |u_n - v_n| ,$$

mais attention ! la réciproque est fausse.

• Si $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$ et si $(N_k)$ est une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$, alors $u_{N_k} \underset{k \to \infty}{\sim} v_{N_k}$.

• Si $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pour tout $n$ et si $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$. En effet $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ entraîne $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Dans le cas de suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

• Si $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $v_n \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $n$, et si $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$, alors quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on a : $u_n^\alpha \underset{n \to \infty}{\sim} v_n^\alpha$.

En effet $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Si de plus $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$), on a $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$).

• Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites équivalentes dans $\mathbb{R}_+^*$, alors si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, $\operatorname{Log} u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \operatorname{Log} v_n$. De même si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\operatorname{Log} u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \operatorname{Log} v_n$. En effet

$$\operatorname{Log} u_n - \operatorname{Log} v_n = \operatorname{Log}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \operatorname{Log} 1 = 0$$

et d'autre part $|\operatorname{Log} u_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc *a fortiori* $\operatorname{Log} u_n - \operatorname{Log} v_n \in o(\operatorname{Log} u_n)$.
On remarque que $\operatorname{Log} u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \operatorname{Log} v_n$ reste vraie si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$, à condition que $l \neq 1$, mais attention ! si $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$) *on n'a pas* en général $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n \to \infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n}$.

***Exemple 7 :*** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Nous avons déjà vu (proposition II.3.2) que $n \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\operatorname{Log} a}$. Donc $\log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n \operatorname{Log} a}$.
Retenons en particulier

$$\boxed{\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n}}\,.$$

Le nombre e est le seul $a > 0$ et $\neq 1$ tel que $\log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

***Exemple 8 :*** Soit $P(X)$ un polynôme de degré $M$ à coefficients complexes :

$$P(X) = a_M X^M + a_{M-1} X^{M-1} + \cdots + a_0\,, \quad \text{avec} \quad M \geqslant 0 \text{ et } a_M \neq 0\,.$$

Alors, pour tout $k < M$, $a_k n^k \underset{n \to \infty}{\in} o(a_M n^M)$, donc par addition $a_0 + a_1 n + \cdots + a_{M-1} n^{M-1} \underset{n \to \infty}{\in} o(a_M n^M)$ et par suite : $P(n) \underset{n \to \infty}{\sim} a_M n^M$. Autrement dit, *une fonction polynomiale de n, non nulle, est équivalente à son terme de plus haut degré.*

Si maintenant $Q(X) = b_N X^N + \cdots + b_0$ est un autre polynôme, de degré $N \geqslant 0$, avec $b_N \neq 0$, la suite $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ est définie pour $n$ assez grand, et $\frac{P(n)}{Q(n)} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{a_M}{b_N} n^{M-N}$ : *une fonction rationnelle de n est équivalente, à l'infini, au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.*

***Exemple 9 :*** Considérons les suites définies, pour $n \geqslant 1$, par :

$$u_n = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\dots\,.\;2n}\,,\quad v_n = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\dots\,.\;2n}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,\dots\,.\,(2n+1)}\quad \text{et } \rho_n = \frac{u_n}{v_n}\,,$$

suites que nous rencontrerons plusieurs fois dans ce volume. Il est clair que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont décroissantes et minorées par 0. Mais essayons de préciser, en utilisant encore l'inégalité $\frac{t}{t+1} < \frac{t+1}{t+2}$, valable pour tout réel $t > -1$. On obtient :

$$u_n^2 = \frac{1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\;2n} \times \frac{1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\;2n} < \frac{1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\;2n} \times$$
$$\times \frac{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\;2n}{3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}$$

et de même

$$u_n^2 > \frac{1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\;2n} \times \frac{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\,(2n-2)}{3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2n-1)} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4n}\,,$$

d'où l'encadrement

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,.$$

Par le même procédé, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n < \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,,$$

à moins que l'on ne préfère utiliser $v_n = \frac{1}{(2n+1)\,u_n}$ qui donne l'encadrement légèrement amélioré $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < v_n < \frac{2\sqrt{n}}{2n+1}$. On constate déjà que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ tendent vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. Mais il y a mieux :

$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = \frac{(2n+1)\,(2n+3)}{(2n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(2n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(2n+2)^2} < 1\,.$$

Donc la suite $(\rho_n)$ est décroissante, et d'autre part

$$\rho_n = \frac{u_n}{v_n} = (2n+1)\,u_n^2 > \frac{2n+1}{4n} > \frac{1}{2}\,,$$

ce qui prouve que la suite $(\rho_n)$ converge vers un réel $W \geqslant \frac{1}{2}$. Il en résulte que $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} W v_n$. Mais

$$u_n\, v_n = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2n} \underset{n \to \infty}{\sim} W v_n^2.$$

Cela prouve que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ admettent pour équivalents respectivement $\dfrac{\sqrt{W}}{\sqrt{2n}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{W}\sqrt{2n}}$, de la forme $\dfrac{a}{n^{1/2}}$ et $\dfrac{b}{n^{1/2}}$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Quant à $W$, c'est

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{[1 \,.\, 3 \,.\, \dots \,.\, (2n-1)]^2 \times (2n+1)}{[2 \,.\, 4 \,.\, \dots \,.\, 2n]^2},$$

dont nous déterminerons plus loin la valeur grâce aux intégrales de Wallis [1].

***Exercice 1 :*** On définit par récurrence la suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}_+$ à partir de $u_0 = a \geqslant 0$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \dfrac{1}{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*a*) Etudier les cas particuliers $a = 0$ et $a = 1$.

*b*) Pour $a \notin \{0, 1\}$ calculer $u_{n+2} - 1$ et $u_{n+2} - u_n$ et en déduire que les suites $(u_{2p+1})$ et $(u_{2p})$ sont monotones et convergentes.

*c*) Si $a \in \,]0, 1[$, la suite converge. Peut-elle être monotone ?

*d*) Si $a > 1$ montrer que $0 < u_{2p+2} - 1 < (u_{2p} - 1)\dfrac{2p+1}{2p+2}$. En déduire (cf. exemple 9) que $u_{2p} \underset{p \longrightarrow \infty}{\downarrow} 1$, puis, que la suite $(u_n)$ converge.

***Exercice 2 :*** Soit $(u_{p,n})_{p \geqslant 0, n \geqslant 0}$ une *suite double* de réels $\geqslant 0$. Montrer qu'on peut trouver une suite $(v_n)$ de $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad u_{p,n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(v_n).$$

***Exercice 3 :*** Soit deux suites de $\mathbb{R}_+^*$, $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(v_n)$. Construire une suite $(w_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(w_n)$ et $w_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(v_n)$.

***Exercice 4 :*** Sur l'ensemble des suites à support infini (*i.e.* non stationnaires vers 0), la relation binaire « $u = v$ **ou** $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(v_n)$ » est une relation d'ordre. Pour cette relation d'ordre, comparer les suites ci-après :

$$n \mapsto n^n \,; \quad n \mapsto (\operatorname{Log} n)^{n^\alpha}, \text{ où } \alpha > 0 \,; \quad n \mapsto n^{(\operatorname{Log} n)^\beta}, \text{ où } \beta > 0 \,;$$
$$n \mapsto [\operatorname{Log}(\operatorname{Log} n)]^{(n^{\operatorname{Log} n})} \,; \quad n \mapsto (\operatorname{Log} n)^{n^{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} n)}} \,; \quad n \mapsto \exp(n^\lambda), \text{ où } \lambda > 0 \,;$$
$$n \mapsto (\operatorname{Log} n)^{n^{(\operatorname{Log} n)^\alpha}}, \text{ où } \alpha > 0 \,.$$

***Exercice 5 :*** Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites à termes réels $> 0$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que si $a_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\sim} b_k$ et si $B_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\uparrow} +\infty$, alors $A_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} B_n$.

[1] John *Wallis,* mathématicien anglais (1616-1703), qui a donné une expression du nombre $\pi$ sous forme de produit infini. (Voir § VIII.2).

***Exercice 6 :*** Soit $x_0 = 5$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $45 < x_{1000} < 45{,}1$. Plus généralement, soit $x_0 > 0$ et la suite définie par $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 7 :*** Soit $(x_n)$ la suite réelle définie par la donnée de $x_1 > 0$ et de la relation $x_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{x_n}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $1 \leqslant x_n \leqslant n$, puis que la suite $\left(\dfrac{n}{x_n}\right)$ est croissante ainsi que la suite $(x_n)$. En déduire que pour $n \geqslant 3$,

$$x_n \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} \quad \text{et pour } n \geqslant 4\,, \quad x_n \geqslant \frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}}\,.$$

Prouver enfin que $x_n - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2} \underset{n \to \infty}{\in} o(1)$.

***Exercice 8 :*** On définit par récurrence une suite $(u_n)$ par : $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$ et $(\forall n \geqslant 1)$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}$. On pose $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$ $(n \geqslant 0)$.

Montrer d'abord que $u_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$, puis que $s_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et enfin que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. (On poura utiliser le lemme de Cesaro.)

***Exercice 9 :*** Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{3 + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$. Montrer que $u_n - \sqrt{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

## § II.5 *PREMIÈRES NOTIONS SUR LES SÉRIES*

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe. Si $(u_n)$ est à support fini, la somme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n$ existe. Nous cherchons à étendre le nombre de cas où l'on peut donner un sens précis à ce symbole $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$. Pour cela nous appellerons **suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$** la suite $(S_n)$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n$.

**DÉFINITION II.5.1**

*Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite complexe, et $(S_n)$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. On dit que* **la série $\sum u_n$ converge** *ssi la suite $(S_n)$ converge dans $\mathbb{C}$. Sinon on dit que* **la série $\sum u_n$ diverge.**

*Lorsque la série $\sum u_n$ est* convergente, *le nombre* $S = \lim (S_n)$

*s'appelle* **somme** *de la série* $\sum u_n$, *et se note* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *(la lettre k jouant ici le rôle d'un indice muet), et la suite* $(R_n)$ *définie par* $R_n = S - S_n$ *s'appelle* **suite des restes** *de la série* $\sum u_n$. *Pour n donné, nous dirons que* $R_n$ *est le* **reste d'ordre n.**

Etudier une série $\sum u_n$ (on dit aussi série **de terme général $u_n$**), c'est en premier lieu chercher à savoir si elle converge ou si elle diverge (on dit que l'on cherche *sa nature*). Si elle diverge, on peut étudier le comportement de la suite $(S_n)$ des sommes partielles, au mieux trouver un équivalent simple de $S_n$. Si elle converge, on cherche à obtenir le maximum de renseignements sur *la somme* $S$ (calcul exact ou valeurs approchées) et sur la *vitesse de convergence* (c'est-à-dire sur la vitesse de convergence vers 0 du reste d'ordre $n$).

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $n \geqslant 1$ :

$$\boxed{u_n = S_n - S_{n-1}}\,, \quad \text{d'où} \quad u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $S_n$ et $S_{n-1}$ ont la même limite $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ pour $n \longrightarrow \infty$.

Nous obtenons donc une **condition nécessaire de convergence** pour la série $\sum u_n$, à savoir : **pour que $\sum u_n$ converge, il faut que** $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Mais, même si elle est satisfaite, cette condition ne suffit pas à assurer la convergence comme le montre l'exemple suivant : posons, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \operatorname{Log} \dfrac{n+1}{n} = \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. On sait bien que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et cependant $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \operatorname{Log}(n+1) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où la divergence de la série $\sum u_n$.

L'étude d'une série $\sum u_n$ est singulièrement facilitée si l'on est capable de trouver une expression explicite simple pour la somme partielle $S_n$ car on est alors ramené à la recherche de $\lim\limits_{n \to \infty} (S_n)$. Cela se produit rarement, mais en voici deux exemples :

***Exemple 1 :*** Etudier la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n \geqslant 1)$. En utilisant $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, on obtient après simplification

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1$$

Puisque $1 - \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, on voit que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est 1.

***Exemple 2 :*** *Séries géométriques.* On appelle ainsi toute série de terme général $az^n$, où $a \neq 0$ et $z$ sont des nombres complexes donnés ($z$ s'appelle *la raison* de la série géométrique).

Il est clair que si $|z| \geqslant 1$, alors $az^n \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$ et la série $\sum az^n$ diverge. Supposons maintenant $|z| < 1$. Alors la somme partielle $S_n$ vaut (cf. Tome 1, § III.2) $a \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, et dans ce cas, on sait que $z^{n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (cf. exemple 1 du § II.2), d'où $S_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \dfrac{1}{1-z}$. Nous avons donc prouvé que la série géométrique $\sum az^n$ converge ssi $|z| < 1$. Retenons la formule importante :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{si} \quad |z| < 1\,.}$$

Remarquons de plus que dans le cas où $|z| < 1$, le reste d'ordre $n$. $R_n$ de la série $\sum az^n$ s'exprime, pour tout $n$, *sous forme exacte :*

$$R_n = \frac{a}{1-z} - a(1 + z + \cdots + z^n) = a \frac{z^{n+1}}{1-z}\,.$$

En particulier la convergence de $R_n$ vers 0 est d'autant plus rapide que $|z|$ est petit.

***Remarque 1 :*** Si l'on modifie un nombre **fini** des termes $u_n$ d'une série $\sum u_n$, on ne modifie évidemment pas sa *nature,* car au-delà d'un certain rang la différence entre la nouvelle et l'ancienne somme partielle devient constante. En particulier supposons la série $\sum u_n$ convergente. Pour chaque entier $n$, son reste d'ordre $n$ est lui-même la somme d'une série, celle obtenue en remplaçant par 0 les termes $u_i$ d'indice $i \leqslant n$, soit $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

***Remarque 2 :*** L'étude de la série $\sum u_n$ se ramène à celle de la suite $(S_n)$ de ses sommes partielles. Mais inversement, pour étudier une suite donnée $(S_n)$ il arrive parfois qu'il soit très commode de la considérer comme *suite des sommes partielles d'une série associée* $\sum u_n$ : il suffit de poser $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. L'intérêt de cette méthode provient du fait que pour l'étude des séries nous disposerons bientôt d' techniques faciles à mettre en œuvre. Soit par exemple à étudier la suite

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1\,.$$

Posons $u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}\,.$$

Déjà on voit que la suite $(S_n)$ est décroissante, mais la recherche d'un minorant n'est pas évidente, tandis que le majorant $\frac{1}{n^{3/2}}$ de $|u_n|$ est immédiat, ce qui permettra d'appliquer les théorèmes II.5.3 et II.5.4 ci-dessous qui prouvent la convergence de la série $\sum u_n$, donc de la suite $(S_n)$.

**Groupement de termes consécutifs**

Etant donnée une série $\sum u_n$, soit $(N_k)$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$. Formons une nouvelle série $\sum v_k$ en posant

$$v_0 = \sum_{i=0}^{N_0} u_i \quad \text{et} \quad v_k = \sum_{i=1+N_{k-1}}^{N_k} u_i \quad \text{pour} \quad k \geqslant 1\,.$$

On dit qu'elle est obtenue *par groupement de termes consécutifs* à partir de la série $\sum u_n$, suivant les « paquets » de termes à indice dans $[\![0, N_0]\!]$ et dans $[\![N_{k-1}, N_k]\!]$ $(k \geqslant 1)$. Notons $(S_n)$ et $(T_k)$ les sommes partielles respectives des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_k$. Par construction il est clair que $T_k = S_{N_k}$ pour tout $k$. Donc, **si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_k$ converge et a même somme.** Bien entendu la réciproque est fausse ([1]), comme le prouve l'exemple $u_n = (-1)^n$ et $v_k = u_{2k} + u_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La série $\sum v_k$ converge tandis que la série $\sum u_n$ diverge puisque $u_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$. Remarquons d'ailleurs qu'en posant $w_0 = u_0$ et $w_k = u_{2k+1} + u_{2k+2}$ on aurait obtenu une somme différente. Il ne faut donc utiliser les groupements de termes qu'avec précaution, et à plus forte raison on doit éviter de modifier l'ordre des termes d'une série aveuglément. Il y a cependant une manipulation qu'on peut effectuer sans risque :

---

([1]) Toutefois, si les $u_n$ sont tous **réels $\geqslant 0$,** la convergence de la série $\sum v_k$ *équivaut* à celle de la série $\sum u_n$ (cf. théorème II.5.2).

### Suppression des termes nuls

Supposons la suite $(u_n)$ *à support infini* (c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S} = \{n \mid u_n \neq 0\}$ est infini. Notons $(N_k)$ l'unique suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'image $\mathcal{S}$, et posons $v_k = u_{N_k}$ pour tout $k$. Alors $\sum_{k=0}^{p} v_k = \sum_{i=0}^{N_p} u_i$ pour tout $p$, et si $N_k \leq n < N_{k+1}$, $\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{j=0}^{k} v_j$. On en déduit que **les séries** $\sum u_n$ et $\sum v_k$ **convergent ou divergent ensemble,** et qu'en cas de convergence, **elles ont même somme :** la série $\sum v_k$ est dite obtenue à partir de $\sum u_n$ *par suppression des termes nuls.*

### Linéarité de la somme

Munissons l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-ev : la somme de deux suites $(u_n)$, $(v_n)$ est la suite $(u_n + v_n)$ et la suite $\lambda(u_n)$ est $(\lambda u_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. L'opération qui associe, à une suite $(u_n)$, la suite $(S_n)$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est évidemment linéaire (et bijective). A partir de deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$, formons $(S_n)$ et $(T_n)$, suites des sommes partielles associées. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda S_n + \mu T_n .$$

Les propriétés des limites vues au § II.2 montrent alors que si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes $S$ et $T$, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et a pour somme $\lambda S + \mu T$. En conséquence : **l'ensemble des suites $(u_n)$ telles que la série $\sum u_n$ converge forme un sous-$\mathbb{C}$-ev** du $\mathbb{C}$-ev $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, et sur ce $\mathbb{C}$-ev, **l'application** $(u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ **est une forme linéaire.**

### Le critère de Cauchy

Soit $(S_n)$ la suite des sommes partielles d'une série $\sum u_n$. On sait que la suite $(S_n)$ converge ssi elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ (cf. § II.2). Ecrivons pour cette suite le critère de Cauchy en remplaçant, pour $n < p$, $S_p - S_n$ par sa valeur $\sum_{k=n+1}^{p} u_k$. On obtient :

**Théorème II.5.1**

*Soit $(u_n)$ une suite complexe. Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut et il suffit qu'elle vérifie le* ***critère de Cauchy des séries :***

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad (N \leq n < p) \Rightarrow \left| \sum_{k=} u_k \right| < \varepsilon$$

L'importance de ce théorème provient du fait qu'il constitue la seule C.N.S. connue qui s'applique de façon *générale* à toute série convergente. C'est à lui qu'on recourt en dernier lieu quand aucune méthode plus simple n'est applicable.

**Séries à termes réels $\geqslant 0$**

Supposons la suite $(u_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ : on dit alors que la suite $\sum u_n$ est *à termes positifs.* Dans ce cas, si $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, on a pour tout $n$ :

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n .$$

Donc la suite $(S_n)$ est *croissante.* En utilisant le fait qu'une suite convergente est bornée et la proposition II.1.1, on obtient :

**THÉORÈME II.5.2**

> *Pour qu'une série $\sum u_n$* **à termes positifs** *converge, il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée.*

Remarquons qu'*en cas de divergence* d'une série à termes positifs, *la suite $(S_n)$ n'est pas quelconque,* mais vérifie $S_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

***Exemple 3 :*** *Série harmonique :* Considérons la série à termes positifs, dite **harmonique,** de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$. Si

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \text{on a} \quad S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent la suite $(S_n)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy et ne peut donc pas converger. Par suite **la série harmonique diverge,** et de plus $S_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

**Comparaison des séries à termes $\geqslant 0$**

**THÉORÈME II.5.3**

> *Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de $\mathbb{R}_+$ telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge, et on a :*
> $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$, *et pour tout $n$ la* **majoration du reste**
> $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k$.
> *(En conséquence, si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum$*

*Démonstration :*

Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De $u_n \leqslant v_n$ on déduit $S_n \leqslant T_n$. Si la série $\sum v_n$ converge, la suite $(T_n)$ est majorée (théorème II.5.2), donc la suite $(S_n)$ l'est aussi et par conséquent la série $\sum u_n$ converge. De plus le passage des inégalités larges à la limite fournit :

$$\lim_{n \to \infty} S_n \leqslant \lim_{n \to \infty} T_n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k .$$

Fixons $n$, et appliquons ce dernier résultat aux deux séries $\sum u'_k$ et $\sum v'_k$, où on a posé $u'_k = u_k$ et $v'_k = v_k$ si $k > n$ et $u'_k = v'_k = 0$ si $k \leqslant n$. Elles vérifient bien $0 \leqslant u'_k \leqslant v'_k$ pour tout $k$, et l'on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k . \quad \blacksquare$$

***Exemple 4 :*** *Séries de Riemann :* Donnons-nous un réel $\alpha > 0$ et étudions la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ $(n \geqslant 1)$, dite **série de Riemann** [1].

Si $\alpha \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ pour tout $n$, et puisqu'on sait que la série harmonique diverge, le théorème de comparaison II.5.3 montre que la série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\alpha}}$. On a, si $n \geqslant 1$ :

$$S_{2^n} = \sum_{k=1}^{n} v_k \text{ avec } v_k = \sum_{q=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{q^{\alpha}} \text{ pour tout } k \geqslant 2 \text{ et } v_1 = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} .$$

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)$ décroît, on a :

$$v_k \leqslant \sum_{q=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha}} = \frac{1}{(2^{k-1})^{\alpha-1}} = \frac{2^{\alpha-1}}{(2^{\alpha-1})^k} \quad (k \geqslant 2) .$$

---

[1] Georg Friedrich Bernhard *Riemann,* mathématicien allemand de génie (1826-1866) auteur de travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications précieuses sur la répartition des nombres premiers. Son hypothèse : « les zéros non triviaux de la fonction $\zeta$ sont de partie réelle $\frac{1}{2}$ » n'a pas encore été démontrée ni infirmée.

Mais $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, donc la série géométrique $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ converge ; si $\sigma$ est sa somme, on a : $S_{2^n} \leqslant \sigma$ pour tout $n$, d'où on déduit que la suite croissante $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle-même majorée par $\sigma$, et donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, ce qui prouve :

**THÉORÈME II.5.4**

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha \leqslant 1$ la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et si $\alpha > 1$, cette série converge.*

***Remarque 1 :*** Le théorème précédent permet de *définir une fonction* notée $\zeta$ : $]1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ appelée **fonction dzéta de Riemann.** Sa définition peut être étendue à des valeurs complexes de l'exposant $s$ et elle joue un rôle essentiel en théorie des nombres et en théorie des fonctions analytiques.

**Convergence absolue**

**DÉFINITION II.5.2**

*Soit $(u_n)$ une suite complexe. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** ssi la série $\sum |u_n|$ converge.*

Le théorème de comparaison II.5.4 montre immédiatement que l'ensemble des suites $(u_n)$ telles que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente est *un sous*-$\mathbb{C}$-ev du $\mathbb{C}$-ev des suites complexes. Ce sous-$\mathbb{C}$-ev est noté $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Il admet comme sous-$\mathbb{R}$-ev l'ensemble des suites *réelles* $(u_n)$ telles que $(u_n) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Ce sous-$\mathbb{R}$-ev se note $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

**THÉORÈME II.5.5**

*Toute série absolument convergente est convergente.*

*Démonstration :*

Soit $u = (u_n) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Par hypothèse $\sum |u_k|$ converge, ce qui signifie qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon$ dès que $N \leqslant n < p$. Or

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leqslant \varepsilon$$

pour ces valeurs de $n$ et $p$. Donc la suite $(u_n)$ satisfait au critère de Cauchy des séries (cf. théorème II.5.1) et par conséquent la série $\sum u_n$ c

On peut même préciser que si $u = (u_n) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on a, pour tous $n$ et $p$ naturels, $n < p$ :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leq \rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k| \ ,$$

d'où en fixant $n$ et en faisant tendre $p$ vers l'infini :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| = |R_n| \leq \rho_n \, .$$

C'est la **majoration des restes,** complément indispensable au théorème II.5.5.

***Exemple 5 :*** Les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ $(n \geq 1)$ avec $\alpha > 1$, ou $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ $(n \geq 2)$ avec $\alpha > 1$, sont absolument convergentes, donc convergentes.

Signalons cependant dès maintenant qu'il existe des séries qui sont *convergentes sans être absolument convergentes :* elles sont dites **semi-convergentes :**

***Exemple 6 :*** La série *harmonique alternée* de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \geq 1)$ n'est pas absolument convergente (cf. exemple 3). Cependant elle converge car si l'on considère la suite $(S_n)$ des sommes partielles, on constate immédiatement que les segments $[S_{2p}, S_{2p+1}]$ sont *emboîtés,* de longueur

$$S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

qui tend vers 0 quand $p$ tend vers l'infini. Donc les suites $(S_{2p})$ et $(S_{2p+1})$ ont la même limite $l$, et c'est la somme de la série $\sum u_n$, qui est donc convergente.

De la même manière on démontre que la *série de Riemann alternée* de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $(n \geq 1)$ est *semi-convergente* pour $\alpha \in \, ]0, 1]$.

***Exercice 1 :*** On vient de voir (cf. exemple 6) que la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente. Soit $l$ sa somme. Montrer que si l'on permute les termes de cette série en prenant un terme positif suivi de deux termes négatifs, et ainsi de suite indéfiniment, on obtient une nouvelle série convergente, mais dont la somme est $\dfrac{l}{2}$. Que se passe-t-il si l'on prend deux termes positifs suivis d'un négatif, indéfiniment ? Et si l'on prend $2^k$ termes po[illegible] négatif $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ?

*Indication :* Penser à faire des paquets de termes consécutifs. Dans la dernière question on trouve une série divergente.

**Exercice 2 :** On considère la suite $(x_n)$ définie à partir de $x_0 > 0$ par $x_{n+1} = x_n + x_n^2$. Après avoir montré que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, prouver l'existence d'un nombre réel $\xi = \xi(x_0) > 1$ tel que $x_n \underset{n \to \infty}{\sim} \xi^{2^n}$.

**Exercice 3 :** Calculer la somme des séries de terme général

$$u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}\ ;\quad v_n = \frac{n^4-(n+1)^3}{n!}\ ;\quad w_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}\ ;$$

$$x_n = \mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\quad (n \geqslant 2)\ ;\quad y_n = \mathrm{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\ ;\quad z_n = (-1)^n \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(pour $\sum z_n$ on utilisera le nombre de Wallis défini dans l'exemple 9 du § II.4).

**Exercice 4 :** Si $(a_n)$ est une suite positive, et si $u_n = \dfrac{a_n}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$, alors la série $\sum u_n$ converge. *Exemple :* $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**Exercice 5 :** Pour $|z| < 1$, sommer la série de terme général $u_n = \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$ (on pourra utiliser l'identité $\dfrac{u}{1-u^2} = \dfrac{1}{1-u} - \dfrac{1}{1-u^2}$).

**Exercice 6 :** Soit $p_n$ le $n$-ième naturel *premier* ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc...).

*a*) Montrer que $p_n < 2^{2^n}$ pour tout $n$.

*b*) En déduire que la série $\sum 10^{-2^n} p_n$ converge. Soit $s$ sa somme, et $(R_n)$ la suite des restes. Prouver : $(\forall n \geqslant 1)\ R_n < 10^{-2^n}$, puis $p_n = \mathrm{Ent}\,(10^{2^n} s) - 10^{2^{n-1}}\,\mathrm{Ent}\,(10^{2^{n-1}} s)$. Cette formule donnant la valeur du $n$-ième nombre premier a-t-elle une quelconque utilité ?

**Exercice 7 :** Soit $(q_j)$ la suite des naturels dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 9. Montrer que $(\forall n)\ \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{q_j} \leqslant 80$ et qu'en conséquence la série $\sum \dfrac{1}{q_j}$ converge.

**Exercice 8 :** Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application *injective.* Montrer que, pour tout $N > 1$, $\sum_{n=1}^{N} \dfrac{f(n)}{n^2} \geqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{N}$, et qu'en conséquence la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^2}$ diverge.

**Exercice 9 :** Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des *suites croissantes* d'entiers $(q_i)_{i \geqslant 1}$ telles que $q_1 \geqslant 2$.

*a*) Si $s = (q_i)_{i \geqslant 1}$ appartient à $\mathscr{S}$, montrer que la série $\sum \dfrac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}$ converge. Soit $\Phi(s)$ sa somme.

*b*) Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{S} \longrightarrow\ ]0, 1]$ est *bijective.*

*Indication :* Pour la surjectivité, si $x \in\ ]0, 1]$ on pourra poser $q_1 = 1 + \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, puis, si $u_n = \left(x - \dfrac{1}{q_1} - \dfrac{1}{q_1 q_2} - \cdots - \dfrac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n}\right) q_1 q_2 \dots q_n$, prendre $q_{n+1} = 1 + \mathrm{Ent}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

*c*) Soit $s = (q_i) \in \mathscr{S}$. Montrer que $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$ ssi $(q_i)$ est *stationnaire.*

**Exercice 10 :** Soit $\sum u_n$ une série *convergente* à termes dans $\mathbb{C}$ $(n \geqslant 1)$. On lui associe la série de terme général $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)}$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et a la même somme que $\sum u_n$.

*Indication :* On peut mettre $\sum_{n=1}^{N} v_n$ sous la forme $\dfrac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N+1}$ et utiliser le lemme de Cesaro (théorème II.2.1).

***Exercice 11 :*** Soit $\sum u_n$ une série à termes $\geqslant 0$ convergente.

*a*) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum (u_n)^\alpha$ converge.

*b*) Montrer que si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, la série $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}$ converge.

*c*) Montrer par un exemple que la série $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n^{1/2}}$ peut diverger.

***Exercice 12 :*** Le terme général d'une série est défini, pour $n \geqslant 1$, par $(n+1)^2 u_n = (n-1) u_{n-1} + n$. Chercher un encadrement simple de $u_n$, et en déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

***Exercice 13 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$.

*a*) Si la série $\sum u_n$ converge, construire une suite $(\lambda_n)$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} +\infty$ et que la série $\sum \lambda_n u_n$ converge.

*b*) Si la série $\sum u_n$ diverge, construire une suite $(\lambda_n)$ de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$ et que la série $\sum \lambda_n u_n$ diverge.

***Exercice 14 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$.

*a*) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*b*) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1}).$$

***Exercice 15 :*** Soit $(u_n)$ une suite *décroissante* dans $\mathbb{R}_+^*$.

*a*) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ convergent ou divergent simultanément.

*b*) Plus généralement, si $(N_k)$ est une suite strictement croissante d'entiers et $M$ un réel $> 0$ tels que $N_{k+1} - N_k \leqslant M(N_k - N_{k-1})$ pour tout $k$, les séries $\sum u_n$ et $\sum (N_{k+1} - N_k) u_{N_k}$ convergent ou divergent simultanément.

***Exercice 16 :*** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $c_n$ le nombre de chiffres de $n$ dans son écriture décimale habituelle (pour $n = \cdots 0010\,680$ on compte 5 chiffres). Trouver la nature des séries $\sum u_n$, où $u_n = \dfrac{1}{n^{(c_n)^a}}$, $\sum v_n$, où $v_n = 2^{-c_n}$, et $\sum w_n$, où $w_n = \dfrac{n}{c_n!}$.

***Exercice 17 :*** *a*) Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels par récurrence : $a_1 = 1 + z$ et $(\forall n \geqslant 1)\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Vérifier que $a_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} +\infty$, puis montrer que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{z}$. Donner une majoration simple, mais précise, du reste $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{a_k}$. (*Réponse :* $\rho_n \leqslant \dfrac{1}{z^{n+1}(1+z)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$ ).

*b*) Soit $x \in \,]0, 1]$. On note $a_1 = a_1(x)$ le plus petit entier $k$ tel que $\dfrac{1}{k} < x$.

définis les entiers $a_1 = a_1(x)$, $a_2$, ..., $a_n = a_n(x)$ tels que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < x$, on note $a_{n+1} = a_{n+1}(x)$ le plus petit des entiers $k$ tels que $\frac{1}{k} < x - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$.

Vérifier que la série $\sum \frac{1}{a_i}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n(x)} = x$. Majorer $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k(x)}$. Vérifier qu'il existe une unique suite d'entiers $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ non nuls tels que $(\forall n)$ $a_{n+1}(x) = a_n^2(x) - a_n(x) + \nu_n$.

*c*) Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers $\geqslant 1$. Montrer que l'application $\Phi : ]0, 1] \longrightarrow [\![2, +\infty[\![ \times \mathscr{S}$, $x \mapsto (a_1(x), (\nu_n(x))_{n\geqslant 1})$ est bijective. Prouver que $x \in ]0, 1]$ est *irrationnel* ssi l'ensemble $\mathscr{E}(x) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \nu_n(x) > 1\}$ est infini. Comparer avec l'exercice 9.

***Exercice 18 :*** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels $\geqslant 0$. Nature de la série de terme général $v_n = \sqrt{u_n u_{2n}}$.

***Exercice 19 :*** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes réels $\geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons : $v_n = \sup_{p\geqslant n} u_p$. La série $\sum v_n$ converge-t-elle nécessairement ?

## § II.6 *DÉVELOPPEMENTS DE BASE DONNÉE D'UN RÉEL POSITIF*

Nous avons vu dans le tome d'Algèbre (cf. § III.3) comment tout entier naturel, aussi grand soit-il pouvait être représenté à l'aide d'un petit nombre de symboles (dix chiffres dans le système décimal de numération). Nous allons étendre ce procédé de manière à pouvoir représenter, avec ces mêmes symboles, tous les réels $\geqslant 0$.

Soit donc $t$ un entier $\geqslant 2$ qui sera la *base* d'un système de numération comportant exactement $t$ symboles distincts pour les entiers de $[\![0, t-1]\!]$.

Notons $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ l'ensemble des rationnels qui peuvent s'écrire d'au moins une manière sous la forme $\frac{k}{t^m}$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ : c'est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, donc de $\mathbb{R}$. Du fait que $\frac{1}{t^m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ résulte que l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ est *partout dense* dans $\mathbb{R}$ : en effet, pour chaque réel $x$ et chaque $m \in \mathbb{Z}$, soit $k_m(x) = E(t^m x)$, où $E$ désigne la fonction $z \mapsto$ partie entière de $z$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$. On a :

$$(1) \qquad t^{-m} k_m(x) \leqslant x < t^{-m}(k_m(x) + 1)$$

d'où $|x - t^{-m} k_m(x)| \leqslant \frac{1}{t^m}$, et comme $\frac{1}{t^m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on voit qu'on peut approcher $x$ aussi près qu'on le veut par des éléments de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$

**DÉFINITION II.6.1**

*Soit $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$. L'élément $t^{-m} k_m(x)$ de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$, où $k_m(x) = E(t^m x)$, est appelé* ***l'approximation de base t par défaut à $t^{-m}$ près de x.***

**Les ensembles $\mathscr{D}_t'$ et $\mathscr{D}_t$**

Nous noterons $\mathscr{D}_t'$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'entiers telles que

(P₁) $(\forall n) \quad a_n \in [\![0, t-1]\!]$ et

(P₂) l'ensemble $\{n \leqslant 0 \mid a_n \neq 0\}$ est *fini* .

La condition (P₂) s'exprime en disant que « le support de $(a_n)$ est *minoré* ».

Nous noterons $\mathscr{D}_t$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathscr{D}_t'$ telles que de plus :

(P₃) l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < t-1\}$ est infini .

L'ensemble $\mathscr{D}_t'$ est muni de manière naturelle de l'**ordre lexicographique**, noté $\preccurlyeq$, qui est **total**. Rappelons que par définition, si $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ appartiennent à $\mathscr{D}_t'$, $a \preccurlyeq b$ signifie : « ou bien $a = b$, ou bien en désignant par $\omega = \omega(a, b)$ le plus petit entier $n$ tel que $a_n \neq b_n$, on a : $a_\omega < b_\omega$ ». On observera que cette définition de $\preccurlyeq$ a bien un sens, car si $a \neq b$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq b_n\}$ est *non vide*, et il est *minoré* à cause de (P₂), donc cet ensemble admet bien un minimum dans $\mathbb{Z}$.

**Les applications $\Phi'$ et $\Phi$**

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de $\mathscr{D}_t'$. On a : $\quad 0 \leqslant \dfrac{a_n}{t^n} \leqslant \dfrac{t-1}{t^n}$

pour tout $n$, et en particulier pour $n \geqslant 0$. Or la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t^n}$ converge, puisque $0 < \frac{1}{t} < 1$. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{a_n}{t^n}$ converge. Quant à la somme $\sum_{n \in \mathbb{Z}, n<0} \frac{a_n}{t^n}$, elle est finie à cause de (P₂).

On peut donc définir l'élément de $\mathbb{R}_+$ : $\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}, n<0} \frac{a_n}{t^n}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^n}$, que nous écrirons, pour abréger, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{t^n}$. On a ainsi construit une application $\Phi'$ :

$$\mathscr{D}_t' \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad a = (a_n) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{t^n}\,.$$

Nous noterons $\Phi$ la restriction $\Phi'|_{\mathscr{D}_t}$ de $\Phi'$ à $\mathscr{D}_t$.

**Lemme 1**

*Soit $\sum u_n$ une série à termes réels absolument convergente (donc convergente). Alors $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ ssi ou bien $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$, ou bien $u_n \leqslant 0$ pour tout $n$.*

*Démonstration :*

On a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right) - \sum_{n=\infty}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|u_n| - u_n),$$

et $|u_n| - u_n \geqslant 0$ pour tout $n$, donc $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right) - \sum_{n=0}^{\infty} u_n \geqslant 0$,

l'égalité ne pouvant avoir lieu que ssi $u_n = |u_n|$ pour tout $n$, *i.e.* $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$.

De même $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right) + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \geqslant 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que ssi $u_n \leqslant 0$ pour tout $n$.

Dans tous les autres cas $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| > \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right|$. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les fonctions $\Phi'$ et $\Phi$.

**Théorème II.6.1**

*L'application $\Phi : \mathscr{D}_t \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une* **bijection croissante.** *Si $a = (a_n) \in \mathscr{D}_t$, on a : $\Phi(a) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ ssi $(a_n)$ est* **à support fini,** *et $\Phi(a) \in \mathbb{N}$ ssi $a_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.*

*Démonstration :*

Montrons d'abord que $\Phi$ est *strictement croissante* (donc *injective*). Soit $a = (a_n) \in \mathscr{D}_t$, $b = (b_n) \in \mathscr{D}_t$, avec $a \leqslant b$ et $a \neq b$. Notons $\omega = \omega(a, b)$ l'entier Min $\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq b_n\}$, d'où $a_\omega < b_\omega$. On a :

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \frac{b_\omega - a_\omega}{t^\omega} + \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{t^n} = \frac{b_\omega - a_\omega}{t^\omega} + U,$$

avec

$$|U| \leqslant \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{|b_n - a_n|}{t^n} \leqslant (t-1) \sum_{n=\omega+1}^{\infty} \frac{1}{t^n} = (t-1)\frac{1}{t^{\omega+1}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{t}} = \frac{1}{t^\omega},$$

car $|b_n - a_n| \leqslant t - 1$ pour tout $n$. De plus, d'après le lemme 1. l'égalité n'est possible que si $b_n - a_n = t - 1$ pour tout $n \geqslant$

$b_n - a_n = -(t-1)$ pour tout $n > \omega$. Chacune de ces éventualités entraîne $a \in \mathscr{D}_t' \setminus \mathscr{D}_t$ ou $b \in \mathscr{D}_t' \setminus \mathscr{D}_t$, ce qui est exclu par hypothèse, donc on a en fait $|U| < \dfrac{1}{t^\omega}$ tandis que $\dfrac{b_\omega - a_\omega}{t^\omega} \geqslant \dfrac{1}{t^\omega}$, donc $\Phi(b)$ est bien strictement supérieur à $\Phi(a)$.

Montrons maintenant que $\Phi$ est *surjective*. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Si $x = 0$, $x = \Phi((0))$ où $(0)$ désigne la suite dont tous les termes sont nuls. Supposons $x > 0$. Avec la notation (1) nous écrirons $k_m = k_m(x)$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Si $t^m x < 1$, on a $k_m = 0$, autrement dit tous les $k_m(x)$ sont nuls pour $m$ assez « petit » dans $\mathbb{Z}$. De plus

$$k_m \leqslant t^m x < k_m + 1\,, \quad k_{m+1} \leqslant t^{m+1} x < k_{m+1} + 1\,,$$

d'où en multipliant la première relation par $t$ : $tk_m \leqslant t^{m+1} x < t(k_m+1)$, ce qui entraîne $tk_m \leqslant k_{m+1}$ et $t(k_m+1) \geqslant 1 + k_{m+1}$, c'est-à-dire $tk_m \leqslant k_{m+1} < tk_m + t$. Si l'on pose $k_{m+1} - tk_m = a_{m+1}$ on en déduit que $a_m \in [\![0, t-1]\!]$ pour tout $m$, et comme le support de la suite $(a_m)$ est minoré, on voit que $a = (a_m) \in \mathscr{D}_t'$.

Pour chaque $N \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n \leqslant N} \frac{a_n}{t^n} = \sum_{n \leqslant N} \frac{k_n - tk_{n-1}}{t^n} = \sum_{n \leqslant N} \left( \frac{k_n}{t^n} - \frac{k_{n-1}}{t^{n-1}} \right) = \frac{k_N}{t^N}$$

(car $k_n = 0$ dès que $n$ est assez petit dans $\mathbb{Z}$). Donc la somme partielle $S_N$ d'ordre $N$ de $\sum \dfrac{a_n}{t^n}$ est $\dfrac{k_N}{t^N}$. Puisque $\dfrac{k_N}{t^N} \leqslant x < \dfrac{1}{t^N} + \dfrac{k_N}{t^N}$, il s'ensuit que $S_N \underset{N \to +\infty}{\uparrow} x$, et en particulier : $x = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \dfrac{a_n}{t^n} = \Phi'(a)$. De plus, pour chaque $N$, le reste d'ordre $N$ de $\sum \dfrac{a_n}{t^n}$ est $R_N = \sum\limits_{N+1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{t^n} = x - \dfrac{k_N}{t^N} < \dfrac{1}{t^N}$, donc les $(a_n)_{n > N}$ *ne sont pas tous égaux à* $t-1$ (car s'ils l'étaient, on en déduirait $R_N = (t-1) \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{t^n} = \dfrac{1}{t^N}$). Donc $a \in \mathscr{D}_t$ et $x = \Phi(a)$, ce qui prouve que $\Phi$ est surjective.

Si $a \in \mathscr{D}_t$ est à support fini (resp. à support inclus dans $\mathbb{Z}_-$), il est clair que $\Phi(a) \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{t}\right]$ (resp. $\Phi(a) \in \mathbb{N}$). Réciproquement, si $x = \Phi(a) \in \mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{t}\right]$, on a $k_m = t^m x$ pour $m$ assez grand, d'où $a_m = k_m - tk_{m-1} = 0$ pour $m$ assez grand, et il en résulte que $a$ est à support fini.

Et si $x \in \mathbb{N}$, on a : $k_m = t^m x$ pour $m \geqslant 0$, d'où $a_m = 0$ pour $m \geqslant 1$. ■

**DÉFINITION II.6.2**

*Si* $x \in \mathbb{R}_+$, *on appelle* **développement propre de base t** *du réel* $x$ *l'unique suite* $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathscr{D}_t$ *telle que* $\Phi(a) = x$.

Pour $t =$ *deux*, on parle de **développement dyadique** ; pour

**développement triadique ;** pour $t = huit$, de **développement octal ;** pour $t = dix$, de **développement décimal** (le plus usuel dans la vie courante) ; pour $t = seize$, de **développement hexadécimal** (plus commode dans les calculatrices).

Bien entendu, pour $x \in \mathbb{N}$, le théorème II.6.1 redonne le développement de base $t$ d'un entier naturel (cf. Tome 1, § III.3).

***Remarque 1 :*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$ ayant pour développement propre de base $t$ la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On a vu au cours de la démonstration du théorème II.6.1 que, pour tout $N \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{k_N(x)}{t^N} \leqslant x < \frac{k_N(x)}{t^N} + \frac{1}{t^N}, \quad \text{et} \quad \frac{k_N(x)}{t^N} = \sum_{n \leqslant N} \frac{a_n}{t^n}.$$

Cela prouve que la connaissance de $k_N(x)$ détermine celle des $(a_n)_{n \leqslant N}$ de manière unique, car $(a'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $a'_n = 0$ si $n > N$ et $a'_n = a_n$ pour $n \leqslant N$ est **le** développement propre de $\dfrac{k_N(x)}{t^N}$. Soit alors un réel $y \in \left[ \dfrac{k_N(x)}{t^N}, \dfrac{k_N(x)+1}{t^N} \right[$. On a évidemment $k_N(y) = k_N(x)$, donc **le développement propre** $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ **de** $y$ vérifie $b_n = a_n$ pour $n \leqslant N$, autrement dit il **coïncide, jusqu'au terme de rang N, avec celui de x.** C'est un résultat très simple, mais capital, lorsqu'on travaille sur les développements de réels.

**A nouveau l'application $\Phi'$**

**THÉORÈME II.6.2**

> *L'application $\Phi' : \mathcal{D}'_t \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante et surjective. Si $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ ou si $x = 0$, alors $\Phi'^{-1}(x)$ contient un unique élément : le développement propre de x. Si $x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ et $x > 0$, $\Phi'^{-1}(x)$ est formé d'exactement deux éléments : le développement propre $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de x, et la suite $b = (b_n)$ telle que $b_n = a_n$ si $n < \nu$, $b_\nu = a_\nu - 1$ et $b_n = t - 1$ si $n > \nu$, $\nu$ désignant* Max $\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$.

*Démonstration :*

La croissance de $\Phi'$ se prouve de la même manière que la croissance stricte de $\Phi$.

Soit $c = (c_n) \in \mathcal{D}'_t \backslash \mathcal{D}_t$. Cela signifie qu'à partir d'un certain rang (disons $N + 1$) tous les $c_n$ sont égaux à $t - 1$. Mais alors

$$\Phi'(c) = \left( \sum_{n \leqslant N} \frac{c_n}{t^n} \right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{t-1}{t^n} = \sum_{n \leqslant N} \frac{c_n}{t^n} + \frac{1}{t^N} \in \mathbb{Z}\left[ \frac{1}{t} \right]$$

On en conclut déjà que si $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$, $\Phi'^{-1}(x)$ n'est formé que d'éléments de $\mathscr{D}_t$ ; c'est donc un singleton d'après le théorème II.6.1. Quant au cas où $x = 0$ : $x$ ne peut être l'image que de la suite nulle.

Il reste à examiner le cas où $x > 0$ est élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$. Notons $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son développement propre. Il n'est pas nul, donc puisqu'il est à *support fini*, l'entier $\nu = \operatorname{Max}\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$ est défini. Un élément $c \in \mathscr{D}'_t$ tel que $c \neq a$ et $\Phi'(c) = x$ ne peut appartenir à $\mathscr{D}_t$. C'est donc nécessairement $c = (c_n)$ avec un certain $N \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n = t - 1$ pour $n > N$ et $c_N < t - 1$ (car $\{n \mid c_n < t - 1\}$ est non vide et majoré dans $\mathbb{Z}$). Calculons $\Phi'(c)$ comme ci-dessus :

$$\Phi'(c) = \sum_{n \leqslant N} \frac{c_n}{t^n} + \frac{1}{t^N} = \sum_{n < N} \frac{c_n}{t^n} + \frac{1 + c_n}{t^N} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d_n}{t^n},$$

avec $d_n = 0$ pour $n > N$, $d_N = 1 + c_N$, $d_n = c_n$ si $n < N$. Alors $(d_n) \in \mathscr{D}_t$ et $\Phi((d_n)) = x$, donc (d'après le théorème II.6.1) $(d_n) = (a_n)$, donc $(c_n)$ a nécessairement la forme $(b_n)$ unique figurant dans l'énoncé du théorème II.6.2. La vérification que $(b_n) \in \mathscr{D}'_t \backslash \mathscr{D}_t$ et que $\Phi'((b_n)) = x$ est immédiate. ■

**DÉFINITION II.6.3**

*Soit $x > 0$ un élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$. On appelle* ***développement impropre de base t*** *de $x$ l'unique $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathscr{D}'_t \backslash \mathscr{D}_t$ tel que $\Phi'(b) = x$.*

**Représentation des nombres réels > 0**

L'entier $t$ étant toujours fixé, attribuons des *codes,* que nous appellerons **chiffres,** aux entiers de $[\![0, t-1]\!]$. Lorsque $t \leqslant$ *seize*, ces symboles sont les $t$ premiers de la liste : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$.

Soit $x$ un réel $> 0$, et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un élément de $\mathscr{D}'_t$ tel que $\Phi'(a) = x$. Si les $a_n$ sont tous nuls pour $n \leqslant 0$, on convient que l'écriture

$$(2) \qquad 0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots,$$

où $\bar{a}_i$ est le chiffre attaché à $a_i$ pour tout $i$, représente le réel $x$. Plus généralement, soit $N$ le plus petit $i \in \mathbb{Z}$ tel que $a_i \neq 0$. On convient que l'écriture

$$(3) \qquad \bar{a}_N \bar{a}_{N+1} \dots \bar{a}_{-1} \bar{a}_0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n \dots,$$

où $\bar{a}_i$ est le chiffre attaché à $a_i$ pour $i \geqslant N$, représente le réel $x$. Les écritures (2) et (3) permettent de représenter tous les réels $\geqslant 0$ en vertu des théorèmes II.6.1 et II.6.2. Cette représentation est même unique si on se limite à des développements propres. Comme on le voit, elle que l'utilisation d'un nombre fini de symboles représentant les entiers de $[\![0, t-1]\!]$ et d'une virgule (ou un point dans les pays anglo-saxons). Les représentations (2) et (3) sont dites *à virgule fixe,* parce que la virgule est placée conventionnellement après le chiffre de rang 0 (dans l'écriture (3) la partie située à gauche de la virgule est parfois appelée la *mantisse*). Dans tous les cas, $\bar{a}_i$ est appelé le **chiffre de rang *i*** du développement considéré de $x$. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est attachée à un élément $x$ de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$, on convient de ne pas écrire les chiffres 0 par lesquels s'achève la suite $(a_n)$ situés à droite de la virgule. Par exemple la base $t$ du système de numération se représente toujours en base $t$ par l'écriture 10. Notons enfin que pour représenter un réel $x < 0$, on représente $|x|$ comme il vient d'être dit et on fait précéder cette écriture du signe $-$ ; (mais il existe des procédés plus élaborés : cf. [20]).

**Chiffres exacts et approximations**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ l'un des développements (propre ou éventuellement impropre) du réel $x > 0$ en base $t$. On suppose connue une **approximation stricte** $y$ de $x$ à $t^{-N}$ près, c'est-à-dire que par hypothèse

$$\operatorname{Max}\,(0, x - t^{-N}) < y < x + t^{-N} \quad (N \in \mathbb{Z})$$

$y$ est donné par l'un de ses développements $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ en base $t$.

Il s'agit de savoir sur quels $a_n$ on peut compter pour $x$. On se place évidemment dans le cas où l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq b_n\}$ est non vide et où son minimum, noté $\nu$, est $< N$.

Si $x = y$, le théorème II.6.2 montre que $|a_\nu - b_\nu| = 1$, que $x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ et que soit $a_n = 0$ et $b_n = t-1$ pour $n > \nu$, soit $a_n = t-1$ et $b_n = 0$ pour $n > \nu$.

Si $x > y$, alors $a_\nu > b_\nu$. Nécessairement $a_\nu - b_\nu = 1$ (car sinon on aurait $x - y \geqslant \frac{2}{t^\nu} - \sum_{n=\nu+1}^{+\infty} \frac{t-1}{t^n} = \frac{1}{t^\nu} > \frac{1}{t^N}$, ce qui est contraire à l'hypothèse).

Nécessairement encore $a_{\nu+1} = 0$ et $b_{\nu+1} = t-1$ (car sinon $x - y \geqslant \frac{1}{t^\nu} - \frac{t-2}{t^{\nu+1}} - \sum_{n=\nu+2}^{+\infty} \frac{t-1}{t^n} = \frac{1}{t^{\nu+1}} \geqslant \frac{1}{t^N}$, ce qui est encore contraire à l'hypothèse).

Par récurrence, on voit que

$$a_\nu = b_\nu + 1 \; ; \quad a_{\nu+1} = \cdots = a_N = 0 \; ; \quad b_{\nu+1} = \cdots = b_N = t-1 \, .$$

Si $x < y$ on obtient de même

$$b_\nu = a_\nu + 1 \; ; \quad b_{\nu+1} = \cdots = b_N = 0 \; ; \quad a_{\nu+1} = \cdots = a_N = t-1 \, .$$

On conclut de tout cela la règle simple suivante :

| |
|---|
| si $b_N \neq 0$ et $b_N \neq t-1$, alors $a_n = b_n$ pour r |

autrement dit, les chiffres de $x$ de rang $< N$ coïncident avec ceux de $y$. Bien entendu, cette règle est d'une totale inefficacité dans le cas des développements dyadiques. Elle ne présente un intérêt que pour $t \geqslant 3$, intérêt d'autant plus grand que $t$ est lui-même plus grand. Enonçons de manière précise :

**THÉORÈME II.6.3**

> *Soit $x$ et $y$ deux réels $> 0$ et $N \in \mathbb{Z}$ tels que $|x-y| < t^{-N}$. Alors, si un développement (propre ou non) $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $y$ en base $t$ vérifie $1 \leqslant b_N < t-1$, tout développement $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $x$ en base $t$ vérifie $a_n = b_n$ pour $n < N$.*

Pratiquement, cela signifie que la connaissance des chiffres $(b_n)$ **jusqu'au rang $N$** donne des **chiffres exacts** pour un développement $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $x$ **jusqu'au rang $N-1$,** si on a la chance que $b_N$ vérifie $1 \leqslant b_N < t-1$.

Si par malchance $b_N = 0$ ou $b_N = t-1$, il se peut que les développements de $x$ et de $y$ n'aient aucun chiffre commun après les zéros de la gauche. Par exemple, en base *dix*, les nombres $x = 1{,}000111\ldots$ et $y = 0{,}999990909\ldots$ vérifient $|x-y| < \ 3.10^{-4} < 10^{-3}$, et pourtant ils n'ont pas de chiffre commun, pas plus ceux de rang 0, 1, 2, 3 que les autres. Cela a été rendu possible par le fait que la troisième décimale du développement de $y$ est un 9.

Nous savons que les développements en base $t$ des réels $\geqslant 0$ se prêtent parfaitement à la comparaison de deux nombres. Nous laisserons de côté le problème de savoir s'ils se prêtent aussi bien aux opérations usuelles (nombres de chiffres exacts dans la somme, la différence, le produit, le quotient de deux réels connus à $10^{-N}$ près) ainsi que l'écriture des nombres en *virgule flottante* qui sont plutôt du domaine de la pratique du calcul numérique, pour aborder un problème plus théorique :

### Caractérisation des rationnels

**THÉORÈME II.6.4**

> *Soit $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$. Pour que $x$ soit* **rationnel,** *il faut et il suffit que son développement propre $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en base $t$ soit* **périodique à droite,** *i.e. qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $a_n = a_{n+d}$ pour tout $n \geqslant N$.*

*Démonstration :*

Vérifions d'abord que toute suite de chiffres périodique à droite représente bien un rationnel. Soit donc $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $a_n = a_{n+d}$ pour $n \geqslant N$. Alors $\left(\sum_{n<N} \frac{a_n}{t^n}\right) + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{a_n}{t^n}$ peut s'écrire en regroupant dans la série de droite les termes par paquets de $d$ termes consécutifs :

$$\left(\sum_{n<N} \frac{a_n}{t^n}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^N} \left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{a_{N+kd+i}}{t^{kd+i}}\right)$$

où l'on reconnaît une somme d'un nombre *fini* de séries géométriques d'où la somme

$$S = \left(\sum_{n<N} \frac{a_n}{t^n}\right) + \frac{1}{t^N}\sum_{i=0}^{d-1} a_{N+i}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{t^{kd+i}}\right) = \left(\sum_{n<N} \frac{a_n}{t^n}\right) + \frac{1}{t^N}\sum_{i=0}^{d-1} a_{N+i}\,\frac{t^{d-i}}{t^d-1}$$

qui est bien un nombre rationnel.

Réciproquement, soit à développer un rationnel $x$, qui se présente sous la forme d'un représentant irréductible $x = \frac{U}{V}$, $U \in \mathbb{N}^*$, $V \in \mathbb{N}^*$. Ecrivons $V = DF$, où $D$ est le produit des facteurs premiers de $V$ qui divisent $t$ (comptés autant de fois que leur multiplicité dans $V$), et où $F$ est *premier avec* $t$. D'après le théorème d'Euler (cf. Tome 1, théorème IV.3.5) on a : $t^{\varphi(F)} \equiv 1 \bmod (F)$, en désignant par $\varphi$ l'indicateur d'Euler ; et de plus on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $D \mid t^k$. Choisissons $k$ ainsi et notons $d$ le plus petit diviseur de $\varphi(F)$ tel que $t^d \equiv 1 \bmod (F)$ (autrement dit, $d$ est l'ordre de la classe de $t$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/F\mathbb{Z}$).

On a alors : $x = \frac{U_1}{t^k(t^d-1)}$, avec $U_1 \in \mathbb{N}^*$. Après *division euclidienne* de $U_1$ par $t^d - 1$, on en déduit $x = \frac{A}{t^k} + \frac{B}{t^k(t^d-1)}$, avec $A \in \mathbb{N}$ et $B \in [\![0, t^d - 1[\![$. Développons $B$ en base $t$ et posons $N = k + 1$ :

$$B = \sum_{i=0}^{d-1} b_{N+i}\, t^{d-1-i} \quad \text{d'où} \quad x = \frac{A}{t^k} + \frac{1}{t^k}\sum_{i=0}^{d-1} b_{N+i}\, t^{d-1-i} \times \frac{1}{t^d\left(1 - \frac{1}{t^d}\right)}$$

$$= \frac{A}{t^k} + \frac{1}{t^k}\sum_{i=0}^{d-1} b_{N+i}\, t^{-1-i}\left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{t^{dj}}\right) = \frac{A}{t^k} + \frac{1}{t^{k+1}}\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{b_{N+i}}{t^{dj+i}}\right).$$

Il suffit d'écrire un développement propre de $\frac{A}{t^k}$ en base $t$ pour avoir trouvé un développement qui est forcément propre car $x \notin \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ et qui est *périodique à droite* pour $x$ en base $t$. ■

Cette démonstration fournit en outre un *moyen concret* (sans avoir besoin de « poser » la division de $U$ par $V$) d'obtenir ce développement, et on peut prouver que l'entier $d$ qui y figure est la meilleure période possible (cf. exercice 3).

Quant aux éléments de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ on peut dire que leur deux développements (propre et impropre) sont aussi périodiques à droite, puisqu'ils se terminent soit par une infinité de 0, soit par une infinité de $(t-1)$ (la période est $d = 1$).

***Exemple 1 :*** Soit à développer $\frac{1}{23}$ en numération décimale. Avec les notations ci-dessus, on a $D = 1$, $F = 23$, $\varphi(F) = 22$, et on peut prendre $k = 0$. On a $d = 22$, d'où $\frac{1}{23} = \frac{B}{10^{22}-1}$, l'entier $B$ valant $\frac{10^{22}-1}{23}$. En effectuant la division, on trouve : $B = 434\,782\,608\,695\,652\,173\,913$. Par suite, le développement de $\frac{1}{23}$ est :

$$0{,}\overline{0434782608695652173913}\ ,$$

la barre signifiant qu'il faut répéter indéfiniment à droite ce paquet de 22 chiffres.

Ici il n'y a pas de partie « irrégulière », la période commençant juste après la virgule.

***Exercice 1 :*** Utiliser les développements propres en base $t$ des nombres réels de l'intervalle $E = [0, 1[$ pour démontrer que cet ensemble $E$ n'est **pas dénombrable.**

***Exercice 2 :*** Soit, pour $x \in [0, 1[$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^n}$ son développement *propre* décimal. On note $(N_k) = (N_k(x))_{k \geqslant 0}$ la suite strictement croissante des $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_n(x) < 9$. On associe à chaque $x$ deux suites $(b_n)_{n \geqslant 1}$ et $(c_n)_{n \geqslant 1}$ ainsi définies : pour obtenir $(b_n)$ on écrit dans l'ordre d'abord les $a_n(x)$ tels que $n \in [\![1, N_0]\!]$, puis tels que $n \in ]\!]N_1, N_2]\!]$, ..., que $n \in ]\!]N_{2p+1}, N_{2p+2}]\!]$, etc. ; pour obtenir $(c_n)$ on écrit dans l'ordre les chiffres restants. On pose alors $\Phi(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} \right)$.

Montrer que l'application $\Phi : [0, 1[ \longrightarrow [0, 1[ \times [0, 1[$ est *bijective.*

***Exercice 3 :*** Reprendre la démonstration du théorème II.6.4 où l'on a appelé $d$ l'ordre de la classe de $t$ dans le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/_{F\mathbb{Z}}$. Prouver que $d$ est la plus petite période possible pour le développement du rationnel $x$.

***Exercice 4 :*** On remarque que $\frac{1}{37} = 0{,}\overline{027}$ et $\frac{1}{27} = 0{,}\overline{037}$, où les chiffres surmontés de la barre sont répétés indéfiniment.

*a*) Expliquer ce phénomène.

*b*) Plus généralement, soit $p$ entier $\geqslant 3$ donné. Trouver les couples $(a, b)$ d'entiers $\in [\![1, 10^p[\![$ tels que, si on les écrit en numération décimale

$$a = \bar{a}_{p-1}\,\bar{a}_{p-2} \dots \bar{a}_1\,\bar{a}_0 \quad \text{et} \quad b = \bar{b}_{p-1}\,\bar{b}_{p-2} \dots \bar{b}_1\,\bar{b}_0 ,$$

on ait :
$$\frac{1}{a} = 0, \overline{b_{p-1}\,b_{p-2} \dots b_1\,b_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{b} = 0, \overline{a_{p-1}\,a_{p-2} \dots a_1\,a_0} .$$

Former effectivement tous ces couples pour $p \in \{3, 4, 5, 6\}$.

***Exercice 5 :*** Soit $t$ un entier $\geqslant 2$, $\mathscr{D}_t$ et $\mathscr{D}'_t$ les ensembles définis au début du § II.6. $\mathscr{D}'_t$ est muni de l'ordre lexicographique noté $\preccurlyeq$.

*a*) Montrer qu'il n'existe aucune bijection croissante de $(\mathscr{D}'_t, \preccurlyeq)$ sur $(\mathbb{R}_+, \leqslant)$.

*b*) Montrer que dans l'ensemble $(\mathscr{D}'_t, \preccurlyeq)$ toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure. Est-ce qu'une partie non vide et minorée possède toujours une borne inférieure ?

***Exercice 6 :*** Pour chaque entier $n \geqslant 0$ on pose $a_n = \sum_{k=1+n^2}^{\infty} \frac{1}{10^k}$.

*a*) Calculer les cent une premières décimales de $S_{10^5} = \sum_{p=0}^{10^5} a_p$.

*b*) Montrer que la série $\sum a_n$ converge. Soit $S$ sa somme. Etudier le développement décimal de $S$.

***Exercice 7 :*** On écrit le développement décimal d'un *rationnel* $r > 0$ $\left( r \notin \mathbb{Z}\left[ \frac{1}{10} \right] \right)$, soit $r = \frac{A}{10^k} + \frac{1}{10^k(10^d - 1)}(a_{d-1} + 10\,a_{d-2} + \dots + 10^{d-1}\,a_0)$ avec $A \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{Z}$ et des $a_i$ dans $[\![0, 9]\!]$, l'entier $d$ étant *la période* de ce développement. La liste $(a_0, a_1, \dots, a_{d-1})$ s'appellera *liste des chiffres périodiques* de $r$.

*a*) Soit $r$ et $r'$ deux rationnels $> 0$. On suppose que $r$ et $r'$ ont le même dénominateur *premier* et que $d = p - 1$. Montrer que les listes de chiffres périodiques de $r$ et $r'$ se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire. *Exemple : $p = 7$.*

*b*) $r$ et $r'$ ayant le même dénominateur premier, on suppose que $d < p - 1$. Montrer qu'il existe alors non pas un, mais plusieurs cycles de chiffres périodiques. *Exemple : $p = 13$* ou $p = 11$.

*c*) Si $r = \frac{1}{p}$ ($p$ premier) a pour période $d$, que peut-on dire de la période de $\frac{1}{p^2}$ ? $p = 2, 3$ ou $5$ font exception à la règle. Pourquoi ?

*d*) Que peut-on dire des périodes de $r$ et $r'$ si leurs formes irréductibles ont le même dénominateur ? Et si cette période vaut $\varphi(F)$ ?

***Exercice 8 :*** Soit $a$ un entier *impair,* non divisible par 5. Montrer que $a$ possède toujours un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1 en numération décimale.

***Exercice 9 :*** Trouver tous les rationnels $r > 0$ tels que $r^3$ ait pour période 3, et préciser les listes de chiffres périodiques possibles.

*Indication :* Chercher d'abord ceux de ces rationnels $r$ tels que $r - \mathrm{Ent}(r) = 0, \overline{abc}$, $(a, b, c)$ désignant la liste des chiffres périodiques.

***Exercice 10 :*** Soit des rationnels $r_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ écrits sous forme irréductible : $r_i = \frac{p_i}{q_i}$.

*a*) On suppose que pour $i \neq j$, $q_i$ et $q_j$ n'admettent pas de facteur premier commun autre que 2 et 5. On pose $q = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i$ et on désigne par $p$ un entier premier avec $q$. Connaissant les périodes $d_i$ des $r_i$, calculer la période de $\frac{p}{q}$.

*b*) On pose $Q = \underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{ppcm}} (q_i)$ et on considère un entier $P \geqslant 1$ premier avec $Q$. Montrer que la période de $\frac{P}{Q}$ est $\underset{1 \leqslant i \leqslant m}{\mathrm{ppcm}} (d_i)$.

***Exercice 11 :*** Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des nombres réels du segment $[0, 1]$ qui peuvent s'écrire en base *trois,* en utilisant seulement les chiffres 0 et 2.

*a*) Montrer que $[0, 1] \setminus \mathscr{C}$ est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

*b*) Montrer qu'il n'existe aucun intervalle ouvert non vide inclus dans $\mathscr{C}$.

*c*) Montrer que $\mathscr{C}$ a la puissance du continu.

*d*) Montrer que $\mathscr{C} + \mathscr{C} = [0, 2]$.

• *Voici, présentées sous forme d'exercices, quelques notions fondamentales sur les fractions continues qui seront particulièrement utiles aux futurs enseignants. La notation matricielle est commode à utiliser. Nous désignerons par* G *le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ *formé des matrices* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *à coefficients entiers de déterminant égal à* $+1$ *ou à* $-1$.

***Exercice 12*** (fractions continues pour les nombres rationnels)

I) Soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel *non entier,* avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et pgcd $(p, q) = 1$. L'algorithme des divisions successives (cf. Tome d'Algèbre, § IV.2), appliqué à $p$ et $q$, donne :

$$p = qq_0 + r_1 \ (0 < r_1 < q), \ldots, r_{d-2} = r_{d-1} q_{d-1} + r_d,$$

avec $r_d$ dernier reste non nul $(0 < r_d < r_{d-1})$, et donc $r_d = \mathrm{pgcd}(p, q) = 1$, $d$ étant un entier $\geqslant 1$.

*a*) Vérifier l'égalité
$$r = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{d-1} + \cfrac{1}{r_{d-1}}}}}}$$

et montrer qu'en désignant par $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ le produit des matrices

$$\begin{bmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} q_{d-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{d-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

cela revient à dire que $r = \frac{a}{c}$, avec $c \neq 0$ et pgcd $(a, c) = 1$.

*b*) Réciproquement, supposons qu'on ait trouvé des entiers : $d' \geqslant 1$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_{d'}$ dans $\mathbb{N}^*$, avec $a_{d'} > 1$, tels que :

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{d'-1} + \cfrac{1}{a_{d'}}}}}$$

c'est-à-dire que $r = \dfrac{\alpha}{\gamma}$ avec $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{d'-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{d'} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Démontrer que $d' = d$ et que $a_i = q_i$ pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$, et bien entendu $a_{d'} = r_{d-1}$.

*c*) Conclusion : Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites *finies* du type $(a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^*)^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire, et où $a_d > 1$. Si à chaque $a = (a_0, a_1, \ldots, a_d) \in \mathcal{S}$ on associe le rationnel

$$\mathcal{F}(a) = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + a_{d-2} + \cfrac{1}{a_{d-1} + \cfrac{1}{a_d}}}}$$

l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ est *bijective.* Si $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_d)$ qui lui correspond sera appelée le *développement propre de r en fraction continue* et on écrira :

$$r = [a_0, a_1, \ldots, a_d] .$$

II) Soit $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$. Supposons qu'on ait trouvé des entiers : $d' \geqslant 1$, $b_0 \in \mathbb{Z}$ et $b_1$, $b_2, \ldots, b_d$, dans $\mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{\alpha}{\gamma}$, avec $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_{d'} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Montrer que : ou bien $[b_0, b_1, \ldots, b_{d'}]$ est le développement propre de $r$ en fraction continue, ou sinon c'est que $d' = d + 1$, que $b_i = a_i$ pour $i \in [\![0, d-1]\!]$, que $b_d = a_d - 1$ et enfin que $b_{d+1} = 1$. Dans ce dernier cas on écrira encore $r = [b_0, b_1, \ldots, b_{d,1}]$ et la suite correspondante sera appelée le *développement impropre de r en fraction continue,* reconnaissable au fait que le dernier terme est égal à 1.

III) Soit $r \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$ et $r = [a_0, a_1, \ldots, a_d]$ son développement propre en fraction continue. Pour $1 \leqslant i \leqslant d$, on note $\begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}$ la *première colonne* de la matrice $\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. On vérifiera que $q_i \neq 0$ et que le nombre $\dfrac{p_i}{q_i} = x_i$ est donc bien défini. On appelle ce nombre $x_i$ *la i-ième réduite* ou *la i-ième convergente* de $r$.

Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant d-1$, on a $r - x_i = \dfrac{(-1)^i}{q_i(q_{i-1} + q_i a'_{i+1})}$, où $a'_j = \dfrac{\alpha_j}{\gamma_j}$ si l'on note

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_d & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant d .$$

En déduire $|r - x_i| \leqslant \dfrac{1}{q_i q_{i+1}} < \dfrac{1}{q_i^2}$ pour $1 \leqslant i \leqslant d-1$, les deux inégalités étant même strictes si $i < d-1$.

***Exercice 13*** (fractions continues pour les nombres irrationnels)

Désignons par $\mathcal{I}$ l'ensemble des nombres réels irrationnels : $\mathcal{I} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. On utilisera la fonction Ent : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto$ partie entière de $x$, et la fonction $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x - \mathrm{Ent}(x)}$.

L'application $G \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$, qui associe à $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ et à $x \in \mathcal{I}$ le réel $M * x = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, définit une *action à gauche* de $G$ sur $\mathcal{I}$, c'est-à-dire que $I_2 * x$

$x \in \mathscr{I}$, et que $M * (N * x) = (MN) * x$ pour tout $x \in \mathscr{I}$ et toutes matrices $M$ et $N$ dans $G$. On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble de toutes les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $y_0 \in \mathbb{Z}$ et $(\forall n \geqslant 1)\ y_n \in \mathbb{N}^*$.

I) Soit $a \in \mathscr{S}$, $a = (a_i)_{i \geqslant 0}$. Si $i \in \mathbb{N}$ la matrice $\begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sera notée $A_i(a)$, ou en abrégé $A_i$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $N \leqslant n$, le produit $A_N A_{N+1} \dots A_n$ sera noté $M_{n,N}$, et en particulier $M_{n,0}$ sera abrégé en $M_n (= M_n(a))$. Enfin la première colonne de $M_n(a)$ sera notée $\begin{bmatrix} \alpha_n(a) \\ \gamma_n(a) \end{bmatrix}$ ou en abrégé $\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \gamma_n \end{bmatrix}$.

*a*) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\gamma_n(a) \in \mathbb{N}^*$, et que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad M_n(a) = \begin{bmatrix} \alpha_n(a) & \alpha_{n-1}(a) \\ \gamma_n(a) & \gamma_{n-1}(a) \end{bmatrix}.$$

Dans la suite le rationnel $\dfrac{\alpha_n(a)}{\gamma_n(a)}$ sera noté $r_n(a)$, pour tout $n \geqslant 0$.

*b*) Soit $a \in \mathscr{S}$ fixé. Pour $n \geqslant 1$, calculer $\alpha_n \gamma_{n-1} - \alpha_{n-1} \gamma_n$. Qu'en déduit-on pour les entiers $\alpha_n$ et $\gamma_n$ ?

Montrer que les suites $(\gamma_n)$ et $(r_{2p})$ sont strictement croissantes, que la suite $(r_{2p+1})$ est strictement décroissante, que la suite $(r_n)$ converge. On désignera par $\hat{a}$ la limite de $(r_n)$ pour $n$ infini.

*c*) • Etablir que $|\hat{a} - r_n| < \dfrac{1}{\gamma_n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire que $\hat{a} \in \mathscr{I}$.

• Pour $n$ fixé, soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\left| \dfrac{p}{q} - \hat{a} \right| < |r_n - \hat{a}|$. Montrer que $q > \gamma_n$ (Autrement dit $r_n$ est la *meilleure approximation* de $\hat{a}$ par des rationnels *de dénominateur* $\leqslant \gamma_n$.)

• Pour $n$ fixé, soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que pgcd $(p, q) = 1$ et $\gamma_n < q < \gamma_{n+1}$. Est-ce que $\left| \dfrac{p}{q} - \hat{a} \right| > |r_n - \hat{a}|$ ? (autrement dit, si $\dfrac{p}{q}$ irréductible est une approximation de $\hat{a}$ meilleure que tous les rationnels de dénominateur $\leqslant q$, est-ce que $\dfrac{p}{q}$ est l'un des $r_n$ ?).

*d*) Notons $\Phi$ l'application $\mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{I}$, $a \mapsto \hat{a}$.

Pour $a = (a_n)$ donné dans $\mathscr{S}$, et pour chaque $N \in \mathbb{N}$, désignons par $b^{(N)}$ l'élément de $\mathscr{S}$ défini par $b^{(N)} = (a_{N+i})_{i \geqslant 0}$. Démontrer que : $(\forall p \geqslant 1, \forall N \geqslant 0)$ $r_p(b^{(N)}) = b_N + \dfrac{1}{r_{p-1}(b^{(N+1)})}$. En déduire : $(\forall N \geqslant 0)\ a_N = (\Phi(b^{(N)}))$, et enfin que l'application $\Phi$ *est injective.*

*e*) Pour $x$ donné dans $\mathscr{I}$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = f^{\langle n \rangle}(x)$. Montrer que la suite $y = (y_n)_{n \geqslant 0}$ est élément de $\mathscr{S}$. On peut donc utiliser les notations définies au début de I). Pour $n$ fixé, exprimer $x$ sous la forme $\dfrac{\alpha_n f^{\langle n+1 \rangle}(x) + \alpha_{n-1}}{\gamma_n f^{\langle n+1 \rangle}(x) + \gamma_{n-1}}$ et $r_{n+1}$ sous la forme $\dfrac{\alpha_n y_{n+1} + \alpha_{n-1}}{\gamma_n y_{n+1} + \gamma_{n-1}}$. En déduire $(\forall p)\ r_{2p} < x < r_{2p+1}$, puis $x = \Phi(y)$. Conclure que $\Phi$ *est bijective*. Si on note $\Psi = \Phi^{\langle -1 \rangle}$, la suite $\Psi(x) = (y_n(x))_{n \geqslant 0}$ est appelée le *développement de l'irrationnel x en fraction continue* et l'on écrit :

$$x = [y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots];$$

$r_i = [y_0(x), y_1(x), \dots, y_i(x)]$est appelée *la i-ième réduite de x* (N.B. $y_i(x)$ peut valoir 1).

*f*) Soit $x \in \mathscr{I}$. Indiquer comment, à partir de $\Psi(x) = (y_n)_{n \geqslant 0}$, on peut former $\Psi(x + a)\ (a \in \mathbb{Z})$ ; $\Psi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ; $\Psi(f^{\langle p \rangle}(x))\ (p \in \mathbb{N})$ ; $\Psi(-x)$.

*g*) Montrer que les ensembles $\mathscr{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ sont équipotents et non dénombrables.

II) *a*) Soit $\Gamma$ l'ensemble des matrices du type $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\Gamma$ engendre le groupe $G$.

*b*) Soit $x \in \mathscr{I}$ et $x' \in \mathscr{I}$ admettant pour développements en fraction continue $\Psi(x) = (y_n)$ et $\Psi(x') = (y'_n)$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions $(P_1)$ et $(P_2)$ :

$(P_1)$ $$\exists A \in G \ \mid \ x' = A * x$$

$(P_2)$ $$\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N} \ \mid \ \forall k \in \mathbb{N} \quad y_{p+k} = y'_{q+k}\,.$$

Montrer que la relation $x' \mathscr{R} x$ ssi $(P_1)$ est réalisée est une relation d'équivalence dans $\mathscr{I}$.

***Exercice 14*** (fractions continues périodiques)

On note encore $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $y_0 \in \mathbb{Z}$ et $(\forall n \geq 1)$ $y_n \in \mathbb{N}^*$. Un élément $y = (y_n) \in \mathscr{S}$ est dit *périodique* ssi $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists T \in \mathbb{N}^*$ tels que $y_{n+T} = y_n$ pour $n \geq \mathbb{N}$.

*a*) Soit $x \in \mathscr{I}$ et $y = (y_n) = \Psi(x)$ supposé $T$-périodique à partir de $N$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose : $z^{(k)} = (y_{k+i})_{i \geq 0}$. Comparer $\Phi(z^{(N)})$ et $\Phi(z^{(N+T)})$. On pose $A_i = \begin{bmatrix} y_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pour tout $i$ et $A = A_0 A_1 \dots A_{N-1}$ (si $N = 0$, $A = I_2$), et $P = A_N A_{N+1} \dots A_{N+p-1}$. Démontrer que $A^{-1} * x = (P^{-1} A^{-1}) * x$. En déduire que $x$ est racine d'une équation du *second degré* à coefficients *entiers*.

*b*) Réciproquement, soit $x \in \mathscr{I}$ *algébrique de degré 2,* c'est-à-dire racine d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, de discriminant $\neq 0$. On se propose de démontrer que le développement de $x$ en fraction continue est périodique (théorème de Lagrange). Par hypothèse, il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{Z}^3$ avec $\lambda > 0$, $\nu \neq 0$ et $\lambda x^2 + \mu x + \nu = 0$. Si $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$, on posera :

$$\lambda (aX + b)^2 + \mu (aX + b)(cX + d) + \nu (cX + d)^2 = \lambda_g X^2 + \mu_g X + \nu_g\,,$$

de discriminant $\Delta_g = \mu_g^2 - 4\, \lambda_g\, \nu_g$.

1) Montrer que pour toute $g \in G$, $\Delta_g = \mu^2 - 4\, \lambda \nu$ (en abrégé $= \Delta$).

2) Montrer qu'on peut supposer $x > 0$ (cf. exercice 13, question I.*f*).

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{Z}^3$ tel que : $a_n > 0$, $b_n^2 - 4\, a_n c_n = \Delta$ et $f^{\langle n \rangle}(x)$ est l'une des racines de $P_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$.

4) On suppose $\nu < 0$. Montrer qu'alors : $(\forall n)$ $a_n c_n < 0$. Montrer que si $n$ décrit $\mathbb{N}$, il n'y a qu'un nombre *fini* de triplets $(a_n, b_n, c_n)$ distincts et en déduire que $\Psi(x)$ est périodique.

5) On suppose $\nu > 0$. Soit $x$ la racine de $\lambda X^2 + \mu X + \nu$ autre que $x$, $\Psi(x') = (y'_n)$ son développement en fraction continue. Soit $N = \mathrm{Min}\ \{k \in \mathbb{N} \mid y_k \neq y'_k\}$. Montrer que, pour $n \leq N$, les racines de $P_n(X)$ sont $f^{\langle n \rangle}(x)$ et $f^{\langle n \rangle}(x')$. Soit alors $q$ l'entier compris entre $f^{\langle N \rangle}(x)$ et $f^{\langle N \rangle}(x')$ tel que $q - \mathrm{Min}\ (f^{\langle N \rangle}(x), f^{\langle N \rangle}(x')) < 1$ (on s'assurera que $q$ existe). On pose : $z = f^{\langle N \rangle}(x) - q$ et $z' = f^{\langle N \rangle}(x') - q$.

Si $f^{\langle N \rangle}(x) > f^{\langle N \rangle}(x')$ prouver à l'aide de 4) que $\Psi(z)$ est périodique et en déduire que $\Psi(x)$ est périodique.

Si $f^{\langle N \rangle}(x) < f^{\langle N \rangle}(x')$ prouver que $\Psi\left(\dfrac{1}{z+1} - 1\right)$ est périodique et en déduire que $\Psi(x)$ l'est aussi.

Faire la synthèse de la question *b*).

*c*) Déterminer les développements en fraction continue des nombres $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ; $x = \sqrt{2} + 1$ ; $x = \sqrt{3} + 1$ ; $x = \sqrt{2}$ ; $x = \sqrt{3}$ ; $x = \sqrt{5}$ ; $x = \sqrt{7}$ ; $x = \dfrac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 + 4r})$, avec $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

***Exercice 15*** (équation de Pell-Fermat)

On reprend les notations de l'exercice 13, avec $x \in \mathscr{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

*a*) Montrer que, de deux réduites *consécutives* du développement de $x$ en fraction continue, l'une au moins vérifie l'inégalité $\left| \dfrac{p}{q} - x \right| < \dfrac{1}{2q^2}$. En déduire que si un couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ vérifie l'inégalité $\left| \dfrac{p}{q} - x \right| < \dfrac{1}{2q^2}$, $\dfrac{p}{q}$ est nécessairement l'une des réduites du développement en fraction continue de $x$ (on pourra remplacer $\frac{p}{q}$ par son développement soit propre, soit impropre).

*b*) Soit $A$ un entier $\geqslant 2$ *non carré parfait* (d'où $\sqrt{A} \in \mathscr{I}$). On considère l'équation $(\mathscr{E})\quad x^2 - Ay^2 = 1$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, cas particulier de l'équation « de Pell-Fermat », et l'on note $S$ l'ensemble de ses solutions.

Vérifier que l'application, $g : S \longrightarrow \mathbb{R}^*$, $(x, y) \mapsto x + y\sqrt{A}$ est *injective*. On notera $\mathscr{G} = \operatorname{Im}(g)$.

Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$, et que $\mathscr{G}_+ = \mathscr{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe de $\mathscr{G}$.

Il en résulte notamment que, muni de l'ordre induit par celui de $\mathbb{R}$, le groupe $(\mathscr{G}_+, \times)$ devient totalement ordonné et archimédien.

*c*) Il s'agit de prouver que $\mathscr{G}_+$ ne se réduit pas à son élément neutre $\{1\}$.

1) En utilisant le *a*) montrer qu'il existe une infinité de couples $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $|x^2 - Ay^2| \leqslant \operatorname{Ent}(1 + 2\sqrt{A})$.

2) En déduire l'existence d'un entier $K$ tel que $0 < |K| < \operatorname{Ent}(1 + 2\sqrt{A})$ et de deux couples *distincts* $(x_i, y_i) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x_i^2 - Ay_i^2 = K$ pour $i \in \{1, 2\}$. Une fois $K$, $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ choisis on pose : $x' = x_1 x_2 - Ay_1 y_2$, $y' = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Montrer que $x' \in K\mathbb{Z}$, $y' \in K\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $x'^2 - Ay'^2 = K^2$. En déduire que si $x = \frac{x'}{K}$, $y = \left|\frac{y'}{K}\right|$, alors $x + y\sqrt{A} \in \mathscr{G}_+ \setminus \{1\}$.

*d*) Démontrer que le groupe archimédien $(\mathscr{G}_+, \times, \leqslant)$ est *discret*, c'est-à-dire que l'ensemble $\{u \in \mathscr{G}_+ \mid u > 1\}$ possède un plus petit élément $\alpha$.

Montrer que $\alpha$ est aussi le réel $x + y\sqrt{A} \in \mathscr{G}$ tel que $x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$ et que $x$ (resp. $y$) *soit le plus petit possible*. En déduire que $\mathscr{G}_+$ est le *groupe monogène* engendré par $\alpha$. Décrire ensuite le groupe $\mathscr{G}$. Le couple $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\alpha = a + b\sqrt{A}$ s'appelle *solution fondamentale* de $(\mathscr{E})$.

*e*) Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ une solution de $(\mathscr{E})$ (*i.e.* $x + y\sqrt{A} \in \mathscr{G}_+$). Démontrer que $\left|\sqrt{A} - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{2y^2}$ et en utilisant le *a*) en déduire que $\frac{x}{y}$ est l'une des réduites du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue. Comme on sait que ce développement a une période finie $T$ (cf. exercice 14), montrer qu'on peut en déduire un procédé *effectif* pour trouver la solution fondamentale de $(\mathscr{E})$.

Effectuer ce calcul pour $A = 41$ (*Réponse : $a = 2\,049$, $b = 320$*) et pour $A = 46$ (*Réponse : $a = 24\,335$, $b = 3\,588$*), valeurs pour lesquelles une recherche par tâtonnements serait fastidieuse.

*Remarque :* Pour $A = 41$, il serait plus rapide de chercher d'abord une solution de $x^2 - Ay^2 = -1$ ($x = 32$, $y = 5$ convient) et d'en déduire la solution fondamentale de $(\mathscr{E})$, mais le procédé n'est pas général car si la période $T$ de $\sqrt{A}$ est paire, l'équation $x^2 - Ay^2 = -1$ n'a pas de solution (par exemple $x^2 - 3y^2 = -1$ est impossible). Si la période $T$ de $\sqrt{A}$ est impaire, la méthode du *e*) donnera la solution fondamentale, d'où on pourra déduire la solution fondamentale de $(\mathscr{E})$. On peut montrer que celle-ci s'obtient en arrêtant le développement juste un rang avant la fin de la 1[re] période.

# *Chapitre III*

# *TOPOLOGIE DE* $\mathbb{R}$

## § III.1 *ENSEMBLES ADJACENTS ET COUPURES DANS* $\mathbb{R}$

**DÉFINITION III.1.1**

*Soit $G$ et $D$ deux parties* non vides *de* $\mathbb{R}$. *On dit qu'elles sont* **adjacentes** *ssi on a : $x \leqslant y$ pour tout $(x, y) \in G \times D$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (x, y) \in G \times D \,|\, y - x < \varepsilon$. On dit que $G$ et $D$ forment* **une coupure** *ssi on a : $x < y$ pour tout $(x, y) \in G \times D$, et $G \cup D = \mathbb{R}$.*

**PROPOSITION III.1.1**

*Si $(G, D)$ est une coupure de $\mathbb{R}$, $G$ et $D$ sont adjacents.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Prenons $a \in G$ et $b \in D$, d'où $b - a > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{N} \leqslant \varepsilon$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) et posons

$$a_i = a + i\,\frac{b-a}{N} \qquad (0 \leqslant i \leqslant N)\,.$$

L'entier $k = \operatorname{Min}\{i \in [\![0, N]\!] \,|\, a_i \in D\}$ est défini et au moins égal à 1. Alors $x = a_{k-1} \in G$, $y = a_k \in D$ et $y - x \leqslant \varepsilon$. ■

**THÉORÈME III.1.1**

*Soit $G$ et $D$ deux ensembles adjacents dans $\mathbb{R}$. Alors* sup $(G) =$ inf $(D)$, *et ce réel est l'unique $M \in \mathbb{R}$ qui à la fois majore $G$ et minore $D$.*

*Démonstration :*

$G$ et $D$ sont non vides. Tout $y \in D$ majore $G$, tout $x \in G$ minore $D$, donc sup $(G)$ et inf $(D)$ existent. Comme tout $y \in D$ doit majorer sup $(G)$ et que tout $x \in G$ doit minorer inf $(D)$ on a nécessairement sup $(G) \leqslant$ inf $(D)$. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $(x, y) \in G \times D$ tel qu

Alors $x \leqslant \sup(G) \leqslant \inf(D) \leqslant y$, donc $0 \leqslant \inf(D) - \sup(G) \leqslant \varepsilon$. Mais comme ces inégalités doivent être vérifiées pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\sup(G) = \inf(D)$. Enfin, si un réel $M$ majore $G$ (resp. minore $D$), on a : $M \geqslant \sup(G)$ (resp. $M \leqslant \inf(D)$), d'où la dernière assertion. ■

**DÉFINITION III.1.2**

*Si les ensembles $G$ et $D$ sont* adjacents *dans* $\mathbb{R}$, *l'unique réel $M$ majorant $G$* **et** *minorant $D$ est dit* **défini par** $(G, D)$.

***Exemple 1 :*** Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Si on pose $D =$ ensemble des majorants de $E$, et $G = \mathbb{R} \backslash D$, alors $(G, D)$ est une *coupure* de $\mathbb{R}$, et le réel qu'elle définit est $\sup(G) = \sup(E)$.

Les ensembles $(E, D)$ sont *adjacents* et définissent aussi le réel $\sup(E)$.

***Exercice 1 :*** Décrire les différentes sortes de coupures qui existent dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 2 :*** Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_j)_{j \in J}$ deux familles non vides de réels.

*a*) Pour que la famille $(u_i + v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ soit majorée, il faut et il suffit que chacune des familles $(u_i)$ et $(v_j)$ le soit.

*b*) On suppose la famille $(u_i + v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ majorée. Montrer que $\sup\limits_{(i,j) \in I \times J} (u_i + v_j) = \sup\limits_{i \in I} (u_i) + \sup\limits_{j \in J} (v_j)$.

Si $I = J$, que dire de $\sup\limits_{i \in I} (u_i + v_i)$ ?

*c*) On suppose les $u_i$ et les $v_j$ dans $\mathbb{R}_+$. Enoncer et prouver une propriété analogue avec les *produits* $u_i\, v_j$.

***Exercice 3 :*** Soit $I$ et $J$ deux ensembles non vides et $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels. Montrer que cette famille est majorée ssi : pour tout $i$, la famille $(u_{i,j})_{j \in J}$ est majorée *et* la famille $\left(\sup\limits_{j \in J} (u_{i,j})\right)_{i \in I}$ est majorée. Si c'est le cas, prouver que : $\sup\limits_{(i,j) \in I \times J} (u_{i,j}) = \sup\limits_{i \in I} \left(\sup\limits_{j \in J} (u_{i,j})\right)$.

## § III.2 *OUVERTS, FERMÉS ET VOISINAGES DANS* $\mathbb{R}$

### Intervalles ouverts de $\mathbb{R}$

Notons $\mathscr{C}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de l'un des 5 types suivants : $\varnothing$ ; $\mathbb{R}$ ; $]x, y[$ avec $x < y$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; $]-\infty, x[$ avec $x \in \mathbb{R}$ ; $]x, +\infty[$ avec $x \in \mathbb{R}$.

**DÉFINITION III.2.1**

*Une partie $\omega$ de $\mathbb{R}$ est dite* **ouverte** *(on dit aussi que c'est un* **ensemble ouvert***) ssi c'est une réunion d'intervalles éléments de $\mathscr{C}$.*

L'ensemble des parties ouvertes de $\mathbb{R}$ sera noté $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$. La définition même montre que $\varnothing \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$. De plus chacun des interv élément de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire de l'un des 5 types cités, est un ouvert particulier. Mieux :

**PROPOSITION III.2.1**

> *Si un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble ouvert, il est nécessairement élément de $\mathscr{C}$.*

*Démonstration :*

Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est une partie ouverte. Il s'agit de prouver que, si $J \neq \varnothing$ et $J \neq \mathbb{R}$, alors $J$ ne contient aucune de ses extrémités, ce qui éliminera les autres types d'intervalles bornés ($[x, y[$, $]x, y]$, $[x, y]$) ou non bornés ($[x, +\infty[$, $]-\infty, x]$). Supposons par exemple $J$ minoré, de borne inférieure $a$. Si l'on avait $a \in J$, puisque $J$ est union d'intervalles éléments de $\mathscr{C}$, on aurait $x$ et $y$ réels tels que $x < a < y$ et $]x, y[ \subset J$. Il en résulterait que $\frac{x+a}{2}$, qui est $< a$, serait dans $J$, ce qui contredit l'hypothèse que $a$ est la borne inférieure de $J$. ■

Les 5 types d'intervalles éléments de $\mathscr{C}$ sont donc les seuls à mériter l'épithète d'**intervalles ouverts** de $\mathbb{R}$.

## Ensembles ouverts de $\mathbb{R}$

**THÉORÈME III.2.1**

> *L'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ des parties ouvertes de $\mathbb{R}$ est stable par union quelconque et par intersection* finie.

*Démonstration :*

La première assertion est conséquence immédiate de l'*associativité* de la réunion d'ensembles (cf. Tome 1, définition I.4.5, formule (1)). La deuxième vient de la distributivité de l'intersection d'ensembles par rapport à la réunion d'ensembles, et du fait, élémentaire, que toute intersection finie d'intervalles ouverts est un intervalle ouvert. ■

Le lecteur fera bien attention au fait qu'une intersection non finie d'ouverts n'est *en général* pas un ouvert. Par exemple l'intersection dénombrable $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ est l'ensemble $\{0\}$, et dans $\mathbb{R}$, aucun singleton n'est ouvert ($[a, a]$ figure parmi les intervalles éliminés !). Cependant $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right[ = \varnothing$ qui est un ouvert.

Nous utiliserons souvent la caractérisation suivante des ouverts :

**PROPOSITION III.2.2**

> *Soit $\omega$ une partie de $\mathbb{R}$. Pour que $\omega$ soit ouverte, il faut et il suffit que, pour chaque $x \in \omega$, il existe un $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha,$*

Nous exprimerons plus loin cette propriété en disant que chaque point de $\omega$ lui est *intérieur* (cf. définition III.3.1).

*Démonstration :*

La condition est nécessaire à cause de la définition III.2.1. Montrons qu'elle suffit : pour chaque $x \in \omega$, choisissons $\alpha_x > 0$ tel que $]x - \alpha_x, x + \alpha_x[ \subset \omega$. Alors, du fait que pour tout $x \in \omega$, $x \in ]x - \alpha_x, x + \alpha_x[$, on déduit $\omega \subset \bigcup_{x \in \omega} ]x - \alpha_x, x + \alpha_x[ \subset \omega$, d'où $\omega = \bigcup_{x \in \omega} ]x - \alpha_x, x + \alpha_x[$ qui est une réunion d'intervalles ouverts, et donc $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$. ∎

L'ensemble $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ définit ce qu'on appelle une **structure d'espace topologique sur** $\mathbb{R}$ (dont $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ est l'*ensemble des parties ouvertes*) ou en abrégé : $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ définit **une topologie** sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas la seule topologie possible sur $\mathbb{R}$, mais c'est la plus naturelle : on l'appelle **la topologie usuelle** de $\mathbb{R}$. Parmi les autres topologies possibles citons la *topologie grossière,* où les seuls ouverts sont les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}$, et la *topologie discrète* où toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont des ouverts (le théorème III.2.1 est bien satisfait pour ces choix de $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$).

**Bases de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$**

Un ensemble $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de $\mathbb{R}$ est appelé **une base** de la topologie (usuelle) de $\mathbb{R}$ ssi tout ouvert $\omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ peut être écrit, lorsqu'il est non vide, comme union d'éléments de $\mathcal{B}$.

***Exemple 1 :*** L'exemple $\mathscr{C}$ des intervalles ouverts forme une base d'ouverts de $\mathbb{R}$.

***Exemple 2 :*** L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ des intervalles ouverts de l'un des cinq types déjà mentionnés, mais tels que $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$, est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, par associativité de l'union d'ensembles, il suffit de voir que tout *intervalle ouvert J* de $\mathbb{R}$ est union de certains éléments de $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$. Or c'est le cas de $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]-n, +n[$ ; de $]x, +\infty[$ avec $x \in \mathbb{R}$ qu'on peut mettre sous la forme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]x_n, +\infty[$, où $(x_n)$ désigne une suite décroissante de rationnels tendant vers le réel $x$, et ainsi des autres. Ce qui est remarquable, c'est que $\mathscr{C}_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable au même titre que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. On a donc ainsi une *base dénombrable d'ouverts de* $\mathbb{R}$.

L'exemple 2 peut facilement se généraliser :

***Exemple 3 :*** Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ *partout dense dans* $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ des intervalles ouverts dont toute extrémité appartient à $\mathscr{D}$ est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$. En effet pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, $\mathscr{D} \cap ]x, y[ \neq \varnothing$ , ce qui revient à dire que *tout ouvert no* *rencontre* $\mathscr{D}$. En choisissant par exemple $\mathscr{D} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$, où $t$ est un entier $\geqslant 2$, on obtient une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.

**Ensembles fermés de $\mathbb{R}$**

DÉFINITION **III.2.2**

*Une partie $F$ de $\mathbb{R}$ est dite* **fermée** *ssi son complémentaire $\mathbb{R}\backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Les propriétés des fermés de $\mathbb{R}$ se déduisent donc *par dualité* de celles des ouverts de $\mathbb{R}$. On a par exemple :

THÉORÈME **III.2.2**

*L'ensemble $\mathscr{F}_{\mathbb{R}}$ des parties fermées de $\mathbb{R}$ est stable par intersection quelconque et par union* finie.

On ne manquera pas de remarquer que les ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts (définition III.2.1) et fermés (définition III.2.2).

***Exemple 4 :*** Les seuls **intervalles fermés** de $\mathbb{R}$ sont, outre $\varnothing$ et $\mathbb{R}$, ceux des types suivants : $[x, +\infty[$ avec $x \in \mathbb{R}$ ; $]-\infty, y]$ avec $y \in \mathbb{R}$ ; et $[x, y]$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $x \leqslant y$. Par exemple

$$\mathbb{R}\backslash[x, y] = \,]-\infty, x[\, \cup \,]y, +\infty[$$

est un ouvert, donc $[x, y]$ est un fermé, et ainsi des autres.

Il reste donc deux types d'intervalles sur les dix qui ne sont ni ouverts, ni fermés : ce sont $[x, y[$ et $]x, y]$ où $x < y$ (on les appelle parfois semi-ouverts à droite (resp. à gauche)).

Comme exemple de parties fermées de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas des intervalles, citons les parties finies (de cardinal $\geqslant 2$). En revanche l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{\frac{1}{n}\right\}$ n'est pas fermé car dans son complémentaire, 0 met en défaut la proposition III.2.2. De même $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \geqslant 2}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = \,]0, 1[$ n'est pas un fermé.

**Voisinages d'un point**

DÉFINITION **III.2.3**

*Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* **voisinage de x** *(pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$) toute partie $V$ de $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un ouvert $\omega$ de $\mathbb{R}$ vérifiant : $x \in \omega \subset V$.*

L'ensemble des voisinages d'un point $x \in \mathbb{R}$ sera noté $\mathscr{V}_x$. Cet ensemble est très fourni. Parmi ses éléments il y a $\mathbb{R}$.

La proposition III.2.2 montre que $V \in \mathscr{V}_x$ ssi il existe un $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[\, \subset V$ (ou, ce qui revient au même, $\exists \beta > 0$ tel que $[x-\beta, x+\beta] \subset V$). On peut la reformuler ainsi :

**Théorème III.2.3**

*Une partie $\omega$ de $\mathbb{R}$ est un* ouvert *ssi c'est un voisinage de chacun de ses points.*

A partir de la définition et du théorème III.2.1 on obtient :

**Théorème III.2.4**

*Soit $x \in \mathbb{R}$.*
*(I) Si $V \in \mathscr{V}_x$ et $V \subset W \subset \mathbb{R}$, alors $W \in \mathscr{V}_x$ (« l'ensemble $\mathscr{V}_x$ est héréditaire à droite pour l'inclusion »).*
*(II) $\mathscr{V}_x$ est stable par intersections finies.*
*(III) Si $V \in \mathscr{V}_x$, alors $x \in V$.*
*(IV) Si $V \in \mathscr{V}_x$, il existe $U \in \mathscr{V}_x$ tel que $U \subset V$ et que $V \in \mathscr{V}_y$ pour tout $y \in U$.*

*Démonstration :*

Seule (IV) mérite qu'on s'y arrête. Soit $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[\, \subset V$ : l'ensemble $U = \,]x-\alpha, x+\alpha[$ répond alors à la question, puisque, étant ouvert, il est voisinage de chacun de ses points. ■

Considérons maintenant deux nombres réels $x$ et $y$ *distincts*. Posons $\alpha = |x-y|$. Les ensembles $\left]x - \frac{\alpha}{3}, x + \frac{\alpha}{3}\right[$ et $\left]y - \frac{\alpha}{3}, y + \frac{\alpha}{3}\right[$ sont ouverts, ne se rencontrent pas, et contiennent respectivement $x$ et $y$ : ce sont des voisinages *disjoints* de $x$ et $y$, ce qui prouve :

**Proposition III.2.3**

*Si $x$ et $y$ sont deux réels distincts, on peut trouver $V \in \mathscr{V}_x$ et $W \in \mathscr{V}_y$ tels que $V \cap W = \varnothing$.*

En raison de cette propriété on dit que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est **séparée** (*i.e.* « si $x \neq y$, on peut *séparer* $x$ et $y$ par des voisinages de $x$ et $y$ »). Il en résulte notamment que, si $x \in \mathbb{R}$, $\bigcap_{V \in \mathscr{V}_x} V = \{x\}$.

## Système fondamental de voisinages d'un point

**Définition III.2.4**

*Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle* **système fondamental de voisinages de x** *(ou :* **base** *de voisinages de $x$) tout ensemble $\mathscr{B}_x$ de parties de $\mathbb{R}$ tel que : chaque $U \in \mathscr{B}_x$ est un voisinage de $x$ et, pour tout $V \in \mathscr{V}_x$, il existe $U \in \mathscr{B}_x$ tel que $U \subset V$.*

Cette notion se révélera très utile dans toutes les questions concernant les limites dans $\mathbb{R}$ car il suffira presque toujours de se borner à des systèmes fondamentaux de voisinages des points étudiés.

***Exemple 5 :*** Si $x \in \mathbb{R}$, les ensembles *ouverts* contenant $x$ forment une base de voisinages de $x$. Plus simplement les ensembles $\{]x-\alpha, x+\alpha[\}_{\alpha>0}$ (resp. $\{[x-\alpha, x+\alpha]\}_{\alpha>0}$) forment une telle base. De même les voisinages *fermés* de $x$ forment une base de voisinages de $x$ (tout ensemble de voisinages de $x$ contenant une base est une base).

***Exemple 6 :*** Si $x \in \mathbb{R}$, soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors les ensembles $\{]x-\alpha_n, x+\alpha_n[\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{[x-\alpha_n, x+\alpha_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des bases de voisinages de $x$. En effet, soit $V \in \mathscr{V}_x$. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[ \subset V$. En prenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}\alpha$ on a bien $[x-\alpha_n, x+\alpha_n] \subset V$ et *a fortiori* $]x-\alpha_n, x+\alpha_n[ \subset V$. Cet exemple est d'une grande utilité pratique, car il prouve :

**PROPOSITION III.2.4**

*Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la topologie usuelle, tout point x admet une base* dénombrable *de voisinages.*

## Structure des ouverts de $\mathbb{R}$

Soit $\omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Sur $\omega$, on peut définir la relation binaire $\mathscr{R}$ suivante : $x \mathscr{R} y$ ssi l'intervalle d'extrémités $x$ et $y$ est inclus dans $\omega$. On voit que c'est une relation d'équivalence. On a alors :

**THÉORÈME III.2.5**

*Les classes d'équivalence de* $\mathscr{R}$ *sont des intervalles ouverts. Ce sont les intervalles de* $\mathbb{R}$ *inclus dans* $\omega$ *et maximaux pour l'inclusion.*

*Démonstration :*

Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi les relations $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant y$ entraînent $[x, y] \subset I$. Il en résulte que chaque classe de $\mathscr{R}$ est un intervalle.

Soit $I$ une telle classe et $a \in I$. Choisissons $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[ \subset \omega$ : alors $a \mathscr{R} b$ pour tout $b \in ]a-\alpha, a+\alpha[$, d'où $]a-\alpha, a+\alpha[ \in I$, donc $I$ est un ensemble ouvert (cf. théorème III.2.3), donc c'est un intervalle ouvert (proposition III.2.1).

Enfin, soit $J$ un intervalle non vide inclus dans $\omega$ : on a $a \mathscr{R} b$ pour tous $a$ et $b$ dans $J$, donc $J$ est contenu dans l'une des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$. Ces classes sont donc bien maximales pour l'inclusion. ∎

Les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ seront appelées les **composantes connexes** de $\omega$. Notons $\mathscr{I}_\omega$ l'ensemble de ces composantes connexes. Si $I \in \mathscr{I}_\omega$, $I \cap \mathbb{Q}$ est non vide : choisissons $r_I \in I \cap \mathbb{Q}$ ; alors l'application $\mathscr{I}_\omega \longrightarrow \mathbb{Q}$, $I \mapsto r_I$ est injective.
Cela prouve que $\mathscr{I}_\omega$ est *fini ou dénombrable.*

Soit $I \in \mathscr{I}_\omega$ et $J \in \mathscr{I}_\omega$, $I \neq J$, alors $I \cap J = \varnothing$ , donc ou bien $x < y$ pour tout $(x, y) \in I \times J$, ou bien $x > y$ pour tout $(x, y) \in I \times J$. Nous écrirons $I \preccurlyeq J$ si l'on se trouve dans le premier cas ou encore si $I = J$. Alors $(\mathscr{I}_\omega, \preccurlyeq)$ devient un ensemble totalement ordonné et l'application $I \mapsto r_I$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\mathscr{I}_\omega$ sur le sous-ensemble $\{r_I\}_{I \in \mathscr{I}_\omega}$ de $\mathbb{Q}$. Mais, bien que $\mathscr{I}_\omega$ soit dénombrable, il faut se garder d'une erreur grossière fréquente chez les débutants : l'ensemble $(\mathscr{I}_\omega, \preccurlyeq)$ n'est, *en général,* pas isomorphe à $(\mathbb{N}, \leqslant)$ ; en général il n'est *même pas bien ordonné.*

**La propriété de Borel-Lebesgue** (1)

**Lemme 1**

*Soit deux réels $a$, $b$ $(a \leqslant b)$ et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Alors il existe une sous-famille* finie *$(\Omega_i)_{i \in J}$ ($J$ fini) telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$.*

Autrement dit, de tout **recouvrement** ouvert du segment $[a, b]$ on peut extraire un sous-recouvrement ouvert *fini.*

*Démonstration :*

Notons $E$ l'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que, pour un ensemble fini $J \subset I$ convenable, on ait $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Il est clair que $E$ est non vide puisque $a \in E$. L'ensemble $E$ est majoré par $b$. Il admet donc une borne supérieure $c \in [a, b]$. Soit $i_0 \in I$ tel que $c \in \Omega_{i_0}$, et soit $\alpha$ un réel $> 0$ tel que $]c - \alpha, c + \alpha[ \subset \Omega_{i_0}$. Prenant $x \in E \cap \, ]c - \alpha, c]$ et une partie finie $J$ de $I$ telle que $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$, on voit que $c \in E$, car $[a, c] \subset \bigcup_{i \in J \cup \{i_0\}} \Omega_i$. Si l'on avait $c < b$, en notant $c' = c + \operatorname{Min}\left(\dfrac{b - c}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$ on aurait $c' > c$ et $[a, c'] \subset \bigcup_{i \in J \cup \{i_0\}} \Omega_i$, d'où $c' \in E$, mais c'est contradictoire avec le fait que $c = \sup (E)$. Il ne reste donc que la possibilité $c = b$. ■

Remarquons tout de suite que l'énoncé de ce lemme ne peut s'étendre ni à des intervalles non bornés, ni à des intervalles non fermés. Par exemple $]0, 1]$ est bien recouvert par les $\Omega_i = \left]\dfrac{1}{i}, 2\right[$, où $i \in \mathbb{N}^*$ mais certainement pas par une sous-suite finie de ces $\Omega_i$.

**Théorème III.2.6** (Borel-Lebesgue)

*Soit $F$ une partie de $\mathbb{R}$. Pour que $F$ soit* **fermée** *et* **bornée,** *il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante :*

---

(1) Emile, Félix, Edouard, Justin *Borel,* mathématicien français (1871-1956), mais aussi homme politique, connu par ses travaux fondamentaux sur la théorie des fonctions et en probabilités mais également par ses ouvrages de vulgarisation.

Henri Léon *Lebesgue,* mathématicien français (1875-1941) et grand pédagogue, a attaché son nom à la théorie de l'intégration et de la mesure (voir Chap. VII).

(BL) *Pour toute famille* $(\Omega_i)_{i \in I}$ *d'ouverts de* $\mathbb{R}$ *telle que* $F \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, *il existe une sous-famille* finie $(\Omega_i)_{i \in J}$ *(J fini) telle que* $F \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$.

*Démonstration :*

Supposons $F$ fermée et bornée ; soit $a$ et $b$ deux réels $(a \leqslant b)$ tels que $F \subset [a, b]$. Posons $G = \mathbb{R} \backslash F$ ; c'est un ouvert, et on a : $[a, b] \subset G \cup \left(\bigcup_{i \in I} \Omega_i\right)$. Appliquons le lemme 1 : soit $J \subset I$, ($J$ *fini*) tel que $[a, b] \subset \left(\bigcup_{i \in J} \Omega_i\right) \cup G$ ; alors $F \subset \bigcup_{i \in J} \Omega_i$.

Supposons, inversement, satisfaite la propriété (BL) : d'abord $F$ est bornée, car sinon la suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou $\Omega_n = ]-n, n[$, mettrait (BL) en défaut. Ensuite $F$ est fermée, car sinon soit $a \in \mathbb{R} \backslash F$ qui infirme la proposition III.2.2 : alors la suite d'ouverts $\left(\mathbb{R} \backslash \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]\right)_{n \geqslant 1}$ mettrait (BL) en défaut. ■

Ce théorème III.2.6 est capital. On dit que *les fermés et bornés de* $\mathbb{R}$ *en sont les* **parties compactes** (voir Chap. XI). Par exemple, pour $a$ et $b$ réels avec $a \leqslant b$, au lieu de parler du *segment* $[a, b]$, on utilise aussi, par référence au théorème III.2.6, l'expression *intervalle compact* $[a, b]$.

En passant aux ensembles complémentaires des $\Omega_i$, et en remarquant que l'intersection avec $F$ d'un fermé est un fermé, on voit que le théorème III.2.6 entraîne l'assertion suivante :

*Soit F une partie fermée et bornée de* $\mathbb{R}$. *Si* $(F_i)_{i \in I}$ *est une famille de fermés de F contenus dans F tels que* $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$ , *alors il existe une sous-famille finie* $(F_i)_{i \in J}$ *(J fini) telle que* $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$ .

En particulier :

**COROLLAIRE**

*Soit* $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite* ***décroissante*** *pour l'inclusion de parties de* $\mathbb{R}$ ***fermées, bornées*** *et* ***non vides.*** *Alors* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ *est* ***non vide.***

On reconnaît une généralisation du théorème des segments emboîtés.

*Démonstration :*

Supposons $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$ . En appliquant l'assertion qui précède le corollaire à $F_0$, on aurait une partie finie $J$ de $\mathbb{N}$, qu'on peut supposer non vide, telle que $\bigcap_{n \in J} F_n = \varnothing$ . En posant $N = \underset{n \in J}{\text{Max}}\,(n)$, il en résulterait $F_N = \varnothing$ (puisque $F_N \subset F_n$ pour $n \leqslant N$), ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

***Exercice 1 :*** Démontrer en détail que les seuls *intervalles fermés* de $\mathbb{R}$ sont bien ceux donnés dans l'exemple 4.

***Exercice 2 :*** Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

*a*) Montrer que si $G$ est *ouvert,* alors $G = \mathbb{R}$.

*b*) Supposant $G \neq \mathbb{R}$, montrer que $G$ est *fermé* dans $\mathbb{R}$ ssi $G$ est *discret.*

***Exercice 3 :*** On appelle *voisinage d'une partie E* de $\mathbb{R}$ tout ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe un *ouvert* $\omega$ vérifiant $E \subset \omega \subset V$.

*a*) Des propriétés du théorème III.2.4 lesquelles restent vraies pour les voisinages d'une partie ?

*b*) Si $E \subset \mathbb{R}$, on appelle système fondamental de voisinages de $E$ tout ensemble $\mathscr{B}$ de voisinages de $E$ tel que, pour tout voisinage $V$ de $E$, il existe $W \in \mathscr{B}$ vérifiant $W \subset V$. Montrer que $\mathbb{N}$ n'admet aucun système fondamental *dénombrable* de voisinages.

***Exercice 4 :*** Soit $\omega$ un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que pour $A > 0$ convenable, on a $\lambda\omega \subset \omega$ pour tout $\lambda \geqslant A$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $[M, +\infty[ \subset \omega$. Prouver de même que si, pour $B > 0$ convenable, on a $\lambda\omega \subset \omega$ dès que $\lambda \in ]0, B]$, alors il existe $m > 0$ tel que $]0, m[ \subset \omega$.

***Exercice 5 :*** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose trouvés des intervalles ouverts $I_1, I_2, \dots, I_n$ en nombre fini tels que $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} I_i = I$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\bigcup\limits_{j \neq i} I_j$ soit un intervalle. Montrer grâce à un exemple que cette propriété ne peut pas être étendue à une suite infinie $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $\bigcup\limits_{k \geqslant 0} I_k = I$.

***Exercice 6 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. On donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un fermé $F_n$ de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus [-u_n, u_n]$. Montrer que $F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 7 :*** Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une partie $J$ de $I$ *au plus dénombrable* telle que $\bigcup\limits_{i \in J} \Omega_i = \bigcup\limits_{i \in I} \Omega_i$.

***Exercice 8 :*** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_\Omega$ l'ensemble de ses composantes connexes supposées *toutes bornées*. Pour chaque partie finie $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}_\Omega$ on note $S_\mathscr{E} = \sum\limits_{I \in \mathscr{E}} \Lambda(I)$, où $\Lambda(I)$ désigne la *longueur* de $I$ (par définition si $I = ]a, b[$, $\Lambda(I) = b - a$). On notera $\mathscr{F}_\Omega$ l'ensemble des parties finies de $\Omega$. On dit que $\Omega$ est *de mesure finie* ssi il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $S_\mathscr{E} \leqslant M$ pour tout $\mathscr{E} \in \mathscr{F}_\Omega$. Dans ce cas, le réel $\sup\limits_{\mathscr{E} \in \mathscr{F}_\Omega} S_\mathscr{E}$ sera appelé la *mesure de Lebesgue* de $\Omega$ et noté $\Lambda(\Omega)$.

*a*) On suppose $\Omega$ de *mesure finie* et $\mathscr{C}_\Omega$ infini (donc dénombrable). Montrer que, pour *toute* bijection $n \mapsto I_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{C}_\Omega$, la série $\sum \Lambda(I_n)$ converge et a pour somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda(I_n) = \Lambda(\Omega)$.

*b*) On suppose $\Omega \subset [a, b]$, avec $a$ et $b$ réels et $a < b$. Montrer que si $\Lambda(\Omega) < b - a$, alors l'inclusion de $\Omega$ dans $]a, b[$ est stricte. Plus généralement, si $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux ouverts de mesure finie et si $\Lambda(\Omega) < \Lambda(\Omega')$ et $\Omega \subset \Omega'$, alors l'inclusion de $\Omega$ dans $\Omega'$ est stricte.

*c*) Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante pour l'inclusion d'ouverts de mesure finie tels que la suite $(\Lambda(\Omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Montrer que $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ est de mesure finie et que $\Lambda(\Omega) = \lim\limits_{n \to \infty} \Lambda(\Omega_n)$.

*d*) Si $\Omega$ et $\Omega'$ sont deux ouverts de mesure finie, montrer que

$$\Lambda(\Omega \cup \Omega') = \Lambda(\Omega) + \Lambda(\Omega') - \Lambda(\Omega \cap \Omega').$$

***Exercice 9 :*** On reprend les notations de l'exercice 8. Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de mesure finie telle que la série $\sum \Lambda(\Omega_n)$ converge. Montrer que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$ est de mesure finie et que $\Lambda(\Omega) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda(\Omega_n)$ (inégalité de Boole). Montrer que si les $(\Omega_n)$ sont deux à deux disjoints on a : $\Lambda(\Omega) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Lambda(\Omega_n)$ (propriété dite de « $\sigma$-additivité »).

***Exercice 10 :*** *a*) Soit $l \in \mathbb{R}_+^*$. A tout réel $x$ on associe $I(x) = \left]x - \frac{l}{2}, x + \frac{l}{2}\right[$. On donne deux réels $a$ et $b$ $(a < b)$. Montrer qu'il existe un ensemble *fini* $E$ tel que $[a, b] \subset \bigcup_{x \in E} I(x)$ et $l$ card $(E) \leq l + 2(b - a)$.

*b*) Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $\exists i \in I \mid ]x - l, x + l[ \subset \Omega_i$. En utilisant *a*), donner une nouvelle démonstration du lemme 1.

## § III.3 *ENSEMBLES DE RÉELS*

**DÉFINITION III.3.1**

*Soit E une partie de* $\mathbb{R}$.
*On appelle* **point adhérent** *à E tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que tout voisinage de x rencontre E. L'ensemble des points adhérents à E s'appelle* **adhérence de E** *et se note* Adh $(E)$ *(ou simplement* $\bar{E}$ *si aucune confusion n'est possible).*
*On appelle* **point intérieur** *à E tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que E soit voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à E s'appelle* **intérieur de E** *et se note* Int $(E)$ *(ou simplement* $\mathring{E}$ *si aucune confusion n'est possible).*
*L'ensemble* Int $(\mathbb{R}\backslash E)$ *s'appelle l'***extérieur de** *E et se note* Ext $(E)$.
*L'ensemble* Adh $(E) \cap$ Adh $(\mathbb{R}\backslash E)$ *s'appelle* **frontière de E** *et se note* Fr $(E)$. *Ses points sont les* **points-frontière** *de E.*

On remarque immédiatement que Int $(\mathbb{R}\backslash E)$ et Adh $(E)$ sont des *ensembles complémentaires.* Par conséquent, on passe des propriétés de l'adhérence à celles de l'intérieur, et vice versa, par *dualité.*

**THÉORÈME III.3.1**

*Soit E une partie de* $\mathbb{R}$. Adh $(E)$ *est un fermé contenant E : pour l'inclusion, c'est même le plus petit fermé de* $\mathbb{R}$ *contenant E.*
Int $(E)$ *est un ouvert inclus dans E : pour l'inclusion, c'est même le plus grand ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenu dans E.*

*Démonstration :*

Prouvons par exemple la seconde assertion. Soit $x \in$ Int $(E)$ et $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[ \subset E$. Alors $E$ est voisinage de tout point de $]x - \alpha, x + \alpha[$, donc $]x - \alpha, x + \alpha[ \subset$ Int $(E)$. Par conséquent, Int $(E)$, qui est voisinage de chacun de ses points, est un ouvert. D'après sa définition Int $(E) \subset E$, et tout ouvert $\omega$ de $\mathbb{R}$ inclus dans $E$ est nécessairement contenu dans Int $(E)$. ■

**COROLLAIRE**

*Une partie E de* $\mathbb{R}$ *est* **fermée** *ssi* $E =$ Adh $(E)$. *Une partie E de* $\mathbb{R}$ *est* **ouverte** *ssi* $E =$ Int $(E)$.

Du théorème III.3.1 on déduit que *la frontière* de $E$, qui est l'intersection de deux fermés, est elle-même *un fermé.*

Le corollaire montre que, pour tout $E$,

$$\text{Adh}\,(\text{Adh}\,(E)) = \text{Adh}\,(E) \quad \text{et} \quad \text{Int}\,(\text{Int}\,(E)) = \text{Int}\,(E)\,.$$

L'extérieur de $E$ est un ouvert. Les ensembles Int $(E)$, Fr $(E)$ et Ext $(E)$ sont deux à deux *disjoints* et leur réunion est $\mathbb{R}$.

**DÉFINITION III.3.2**

*Une partie $E$ de $\mathbb{R}$ est dite* **partout dense** *dans $\mathbb{R}$ ssi* Adh $(E) = \mathbb{R}$.
*Elle est dite* **rare** *ssi* Adh $(E)$ *a un intérieur vide.*

***Exemple 1 :*** $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{t}\right]$ ($t$ entier $\geqslant 1$) sont partout denses dans $\mathbb{R}$ ; $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est dense ; $\mathbb{Z}$ est rare ; $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est rare ; $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sont partout denses.

Le lecteur ne devra pas se laisser induire en erreur par la consonance familière des mots utilisés :

***Exemple 2 :*** Adh $(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et Int $(\mathbb{Q}) = \varnothing$ semblent intuitifs, mais Ext $(\mathbb{Q}) = \varnothing$ et Fr $(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ le sont moins.

Voici d'autres exemples d'utilisation de ces mots :

***Exemple 3 :*** Soit $x$ et $y$ deux réels $(x < y)$, et soit $J$ l'un quelconque des 4 intervalles d'extrémités $x$ et $y$. Alors Adh $(J) = [x, y]$, Int $(J) = ]x, y[$, Fr $(J) = \{x, y\}$, Ext $(J) = ]-\infty, x[\, \cup\, ]y, +\infty[$.

***Exemple 4 :*** Soit $E$ une partie non vide et majorée dans $\mathbb{R}$. Alors sup $(E) \in$ Adh $(E)$. Si de plus $E$ est fermée, alors sup $(E) \in E$ et dans ce cas $E$ admet un *maximum.* On notera en particulier que *si $E$ est à la fois* **fermée, bornée** et **non vide,** *alors $E$ possède un plus grand et un plus petit élément,* tandis que si $E$ est seulement non vide et majorée, on peut tout au plus affirmer que sup $(E)$ = sup (Adh (E)) = Max (Adh $(E)$).

***Exemple 5 :*** Soit $E$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $E \subset [a, b]$ avec $a$ et $b$ réels. Alors Adh $(E) \subset [a, b]$.

Un point $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à une partie non vide $E$ de $\mathbb{R}$ ssi, pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble $[x - \alpha, x + \alpha] \cap E$ est non vide (car $\{[x - \alpha, x + \alpha]_{\alpha > 0}\}$ est une base de voisinages de $x$). Cette propriété signifie aussi que $\inf\limits_{t \in E} |x - t| = 0$. Ainsi, lorsque $E \neq \varnothing$,

$$\text{Adh}\,(E) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \inf_{t \in E} |x - t| = 0\right\}.$$

## Points d'accumulation. Points isolés d'une partie

**DÉFINITION III.3.3**

> *Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$.*
> *On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un* **point d'accumulation de $E$** *si tout voisinage $V$ de $a$ contient un point de $E$ autre que $a$. On dit que $a \in E$ est un* **point isolé de $E$** *s'il existe au moins un voisinage $V$ de $a$ tel que $V \cap E = \{a\}$. La partie $E$ est dite* **discrète** *ssi tous ses points sont isolés.*

***Exemple 6 :*** Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des parties *discrètes* de $\mathbb{R}$. Les deux premiers sont fermés, mais pas le troisième. L'ensemble des points isolés de $E = \mathbb{Q}_- \cup \mathbb{N}$ est $\mathbb{N}^*$.

On remarquera qu'une partie $E$ de $\mathbb{R}$ peut être discrète et avoir néanmoins des points d'accumulation. C'est le cas par exemple pour $E = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont 0 est point d'accumulation.

On voit par cet exemple qu'un point d'accumulation de $E$ n'appartient pas toujours à $E$. En revanche, il est clair qu'il appartient nécessairement à Adh $(E)$. De manière précise, Adh $(E)$ est l'union disjointe de l'ensemble des points d'accumulation de $E$ et de l'ensemble des points isolés de $E$.

**PROPOSITION III.3.1**

> *Pour que $a \in \mathbb{R}$ soit point d'accumulation d'une partie $E$ de $\mathbb{R}$ il faut et il suffit que pour tout voisinage $V$ de $a$, $V \cap E$ soit infini.*

*Démonstration :*

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit $V$ un voisinage donné, arbitraire, de $a$ et $V_0 = ]a - \alpha_0, a + \alpha_0[ \subset E$. Il existe dans $V_0$ un point de $E$ autre que $a$, soit $x_0$. Posons $|a - x_0| = \alpha_1$. Dans $V_1 = ]a - \alpha_1, a + \alpha_1[$, il existe un point $x_1 \neq a$ et $x_1 \in E$, et ainsi de suite. Or tous ces $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont dans $V$. ∎

L'ensemble des points d'accumulation d'une partie $E$ de $\mathbb{R}$ s'appelle parfois *ensemble dérivé* de $E$ et peut se noter $E'$ s'il n'y a pas de confusion possible.

**THÉORÈME III.3.2** (théorème de Bolzano-Weierstrass) ([1])

> *Toute partie $E$ de $\mathbb{R}$ qui est* **infinie** *et* **bornée** *admet* au moins un *point d'accumulation.*

---

([1]) Bernhard *Bolzano,* mathématicien tchèque d'origine italienne (1781-1848), était aussi prêtre et philosophe. A fourni le 1[er] exemple de fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

Karl Theodor Wilhelm *Weierstrass,* grand mathématicien allemand (1815-1897), spécialiste de la théorie des fonctions, mais également du calcul matriciel.

*Démonstration :*

Soit $G$ l'ensemble des réels $x$ tels que $[x, +\infty[ \cap E$ soit infini et $D = \mathbb{R}\backslash G$ son complémentaire. Il est clair que $G$ est non vide (car $E$ est infini et minoré) et $D$ est non vide (car $E$ est majoré). De plus $x \in G$ et $x' \leqslant x$ entraîne $x' \in G$. Donc si $x \in G$ et $y \in D$, on a $x < y$. Donc $(G, D)$ est une *coupure* de $\mathbb{R}$. Soit $l$ le réel qu'elle définit. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $l - \varepsilon \in G$ et $l + \varepsilon \in D$, donc l'ensemble $[l - \varepsilon, +\infty[ \cap E$ est infini, tandis que l'ensemble $[l + \varepsilon, +\infty[$ est fini, et par suite la différence $[l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \cap E$ est infinie. Donc $l$ est point d'accumulation de $E$. ■

On remarquera que le point $l$ figurant dans cette démonstration est *le plus grand* point d'accumulation de $E$ car l'ensemble *fini* $E \cap [l + \varepsilon, +\infty[$ ne peut évidemment avoir de point d'accumulation.

On peut donner du théorème III.3.2 l'énoncé équivalent suivant : *Toute partie E de* $\mathbb{R}$ *qui est* **bornée** *et qui n'admet* **aucun** *point d'accumulation est nécessairement* **finie.**

En voici une démonstration qui n'utilise pas la notion de coupure : Soit $E \subset [a, b]$. Tout $x \in [a, b]$ possède un voisinage ouvert $V_x$ contenant *au plus* un point de $E$, à savoir $x$ lui-même. L'ensemble de ces $V_x$ constitue un recouvrement ouvert de $[a, b]$. D'après le lemme qui a servi à démontrer le théorème de Borel-Lebesgue (cf. § III.2) il existe un nombre *fini* de ces $V_x$, soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ qui recouvrent $[a, b]$. Donc $E$ contient *au plus* les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**PROPOSITION III.3.2**

|| *Pour toute partie E de* $\mathbb{R}$, *l'ensemble dérivé E' est* fermé.

*Démonstration :*

Il s'agit de prouver que $U = \mathbb{R}\backslash E'$ est ouvert, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Si $a \in U$, soit $\alpha$ un réel $> 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[ \cap E$ soit vide ou réduit à $\{a\}$. Alors, pour tout $b \in ]a - \alpha, a + \alpha[$, $]a - \alpha, a + \alpha[$ est un voisinage de $b$ qui rencontre $E$ au plus au point $a$. Donc $b \notin E'$, et par suite $]a - \alpha, a + \alpha[ \subset U$, ce qui prouve que $U$ est voisinage de $a$. ■

**COROLLAIRE**

|| *Pour qu'une partie E de* $\mathbb{R}$ *soit fermée, il faut et il suffit que* $E' \subset E$.

*Démonstration :*

On sait que $\mathrm{Adh}\,(E) = E' \cup E$. On reconnaît qu'une partie $E$ de $\mathbb{R}$ est fermée à l'égalité $E = \mathrm{Adh}\,(E)$ (corollaire du théorème III.3.1). Cela équivaut à $E = E' \cup E$, ce qui équivaut à $E' \subset E$. ■

Un ensemble fermé est donc un ensemble contenant ses points d'accumulation. De manière précise une partie *fermée E* de $\mathbb{R}$ est l'unio l'ensemble $E'$ (fermé) de ses points d'accumulation et de l'ensemble (non nécessairement fermé) de ses points isolés.

**Définition III.3.4**

*Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit* ***parfait*** *ssi $E$ est* ***fermé*** *et* ***sans point isolé.***

Il revient au même de dire que $E$ est non vide et qu'il est *égal* à son ensemble dérivé.

***Exemple 7 :*** Tout *intervalle fermé* non vide et non singleton est un ensemble parfait. Toute union *finie* d'ensembles parfaits est un ensemble parfait.

**Utilisation de suites**

**Théorème III.3.3**

*Pour qu'un point $x \in \mathbb{R}$ soit* ***adhérent*** *à une partie $E$ de $\mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'il existe une* ***suite*** *$(a_n)$* ***de points de E*** *qui converge vers $x$.*

*Démonstration :*

La condition est *suffisante :* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $E$ telle que $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Alors $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} |x - a_n| = 0$ et *a fortiori* $\inf\limits_{t \in E} |x - t| = 0$, donc $x \in \mathrm{Adh}\,(E)$.

La condition est *nécessaire :* Soit $x \in \mathrm{Adh}\,(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[ \cap E$ est non vide, ce qui permet d'y choisir un point $a_n$. Alors la suite $(a_n)$ vérifie $|x - a_n| < \frac{1}{n}$ pour tout $n$, d'où $x - a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. ■

**Corollaire**

*Une partie $E$ de $\mathbb{R}$ est* ***fermée*** *ssi toute limite d'une suite de points de $E$ convergente dans $\mathbb{R}$ appartient à $E$.*

En effet on reconnaît une partie *fermée* à $E = \mathrm{Adh}\,(E)$. On reconnaîtra que $\Omega$ est *un ouvert* au fait que $\mathbb{R} \setminus \Omega$ est fermé.

**Définition III.3.5**

*On appelle* ***valeur d'adhérence*** *d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tout $a \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \in \mathbb{N} \,|\, p \geqslant n \quad \text{et} \quad |u_p - a| \leqslant \varepsilon\,.$$

Autrement dit, si grand que soit $n$, pour tout voisinage $V$ de $a$, on peut trouver un $p \geqslant n$ tel que $u_p \in V$.

**THÉORÈME III.3.4**

*Pour que $a \in \mathbb{R}$ soit valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)$ de réels, il faut et il suffit que $(u_n)$ admette une* **suite extraite** qui converge vers *$a$.*

*Démonstration :*

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : soit $a$ une valeur d'adhérence de $(u_n)$. Choisissons un entier $N_1$ tel que $|u_{N_1} - a| \leqslant 1$ et supposons trouvés $N_1, \dots, N_k$ entiers, avec $N_1 < N_2 < \cdots < N_k$, tels que $|u_{N_i} - a| \leqslant \frac{1}{i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Par hypothèse l'ensemble $\left\{ j \in \mathbb{N} \mid j > N_k \text{ et } |u_j - a| \leqslant \frac{1}{k+1} \right\}$ est non vide. En désignant par $N_{k+1}$ son plus petit élément, on a pu construire par récurrence une suite extraite $(u_{N_k})_{k \geqslant 1}$ de $(u_n)$ qui converge vers $a$, puisque $u_{N_k} - a \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. ■

On remarque que *toute valeur d'adhérence a d'une suite $(u_n)$ est un point adhérent à l'ensemble $\{u_n\}$ des valeurs prises,* mais les valeurs prises par la suite en sont rarement des valeurs d'adhérence, par exemple parmi les nombres $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ aucun n'est valeur d'adhérence de la suite $\left( \frac{1}{n} \right)_{n \geqslant 1}$ ; seul 0 est valeur d'adhérence de la suite, et par conséquent point adhérent à l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$. Cependant, pour $u_n = (-1)^n$, les deux valeurs prises par la suite en sont aussi des valeurs d'adhérence. Soyons un peu plus précis :

**PROPOSITION III.3.3**

*Soit $U$ l'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs prises par une suite $(u_n)$. Tout* point d'accumulation *de $U$ est valeur d'adhérence de la suite.*

*Démonstration :*

Soit $a$ un point d'accumulation de $U$. L'ensemble $]a-1, a+1[ \cap (U \setminus \{a\})$ est non vide. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_1}$ lui appartienne. On peut, comme dans la démonstration précédente, construire une suite strictement croissante $(N_k)$ telle que $|u_{N_k} - a| \leqslant \frac{1}{k}$ et $u_{N_k} \neq a$ pour tout $k$. On a ainsi une suite $(u_{N_k})$ extraite de $(u_n)$ qui converge vers $a$. ■

Bien entendu la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple d'une suite stationnaire puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

**THÉORÈME III.3.5** (Bolzano-Weierstrass)

*De toute suite* **bornée** *on peut extraire une suite convergente.*

Autrement dit, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

*Démonstration :*

Soit $U$ l'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des valeurs prises par la suite *bornée* $(u_n)$. Si $U$ est infini, il admet au moins un point d'accumulation (théorème III.3.2) et un tel point est valeur d'adhérence de la suite (proposition III.3.3). Si $U$ est fini, il est clair qu'on peut extraire de $(u_n)$ une suite *stationnaire,* donc convergente. ∎

**Application aux parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$**

THÉORÈME **III.3.6**

> *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour que $A$ soit* **fermée et bornée,** *il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété suivante, dite de Bolzano-Weierstrass :*
>
> (BW) *Toute suite de points de $A$ admet au moins une suite extraite qui converge vers un point de $A$.*

*Démonstration :*

Montrons que la condition (BW) est *suffisante*. Si $A$ n'est pas bornée, on peut construire soit une suite de points de $A$ qui tend vers $+\infty$, soit une suite de points de $A$ qui tend vers $-\infty$, et une telle suite met (BW) en défaut. Si $A$ n'est pas fermé, on peut trouver une suite $(x_n)$ de points de $A$ qui converge vers $a \in \mathbb{R} \backslash A$ (corollaire du théorème III.3.3). Une telle suite met également (BW) en défaut puisque toutes ses suites extraites convergent aussi vers $a$ et que $a \notin A$. Donc, si $A$ vérifie (BW), elle est nécessairement fermée et bornée.

Réciproquement, supposons $A$ fermée et bornée, et soit $(x_n)$ une suite de points de $A$. On peut en extraire une suite $(x_{N_k})$ convergente dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème III.3.5, et la limite d'une telle suite appartient nécessairement à $A$ puisque $A$ est fermée. ∎

Il résulte des théorèmes III.2.6 et III.3.6 que pour $F \subset \mathbb{R}$, les propriétés (BL) (cf. théorème III.2.6) et (BW) du théorème III.3.6 sont *équivalentes,* ce qui est un cas particulier d'une propriété générale des espaces métriques (voir Chap. XI).

Notons qu'on peut directement déduire le corollaire du théorème III.2.6 de la propriété (BW) : en effet, soit $(F_n)$ une suite décroissante pour l'inclusion de parties fermées, bornées et non vides de $\mathbb{R}$. En choisissant un point $x_n$ dans chaque $F_n$, et en extrayant de $(x_n)$ une suite convergente $(x_{N_k})$, on s'aperçoit que $\lim\limits_{k \to \infty} (x_{N_k}) = x \in \bigcap\limits_n F_n$, qui est donc non vide, puisque $x \in \text{Adh}\,(F_{N_k}) = F_{N_k}$ pour tout $k$.

Rappelons que les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$ sont appelées **parties compactes** de $\mathbb{R}$.

**L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite**

D'après le théorème III.3.4 toute valeur d'adhérence d'une *suite extraite* d'une suite $(u_n)$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$. Mo

**THÉORÈME III.3.7**

*L'ensemble $\mathscr{A}$ des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)$ de réels est* un fermé *de* $\mathbb{R}$.

*Démonstration :*

Revenons à la définition III.3.5. Elle signifie :

$$\mathscr{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N} \mid p \geqslant n \quad \text{et} \quad |u_p - x| \leqslant \varepsilon\} ,$$

soit

$$\mathscr{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, (\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in [\![n, +\infty[\![ \mid |u_p - x| \leqslant \varepsilon)\} .$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'ensemble des $x$ tels que $\forall \varepsilon > 0$, $|u_p - x| \leqslant \varepsilon$ pour au moins un entier $p \geqslant n$, n'est autre que Adh $(U_n)$, en posant $U_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$. Donc $\mathscr{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in \text{Adh } (U_n)\}$, autrement dit $\mathscr{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Adh } (U_n)$ et $\mathscr{A}$ est fermé comme intersection de fermés. ∎

**Application aux suites dans $\mathbb{R}^p$ et dans $\mathbb{C}$**

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^p$ (où $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$) est dit **borné** ssi il existe $A > 0$ tel que $E \subset [-A, A]^p$, ce qui revient à dire que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la $i$-ième projection de $E$ est bornée dans $\mathbb{R}$. En utilisant la norme standard $N_\infty$ de $\mathbb{R}^p$, $E$ est borné ssi il existe $A > 0$ tel que $N_\infty(x) \leqslant A$ pour tout $x \in E$, autrement dit ssi $E$ est **borné pour la norme $N_\infty$**, mais il revient au même de dire que $E$ est borné pour l'une quelconque des normes standard $\nu$ définies au § II.2.

L'union d'un nombre *fini* d'ensembles bornés est bornée. Toute partie d'un ensemble borné est évidemment bornée.

Une suite de $\mathbb{R}^p$ est dite bornée ssi l'ensemble de ses valeurs est borné.

**THÉORÈME III.3.8** (Bolzano-Weierstrass)

*De toute suite* **bornée** *de* $\mathbb{R}^p$ *on peut extraire une suite convergente.*

*Démonstration :*

Soit $(x^{(n)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$ une suite bornée de $\mathbb{R}^p$. Chacune des suites $(x_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ est bornée. Pour toute suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments d'un ensemble quelconque $E$, convenons, si $I$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, de noter $(X_k)_{k \in I}$ la suite extraite $(X_{N_q})_{q \in \mathbb{N}}$ de $(X_k)$, où $q \mapsto N_q$ est l'unique bijection croissante de $\mathbb{N}$ sur $I$. Avec cette notation, soit $J_1$ une partie infinie de $\mathbb{N}$ telle que $(x_1^{(n)})_{n \in J_1}$ converge, ce qui est possible d'après le théorème III.3.5 puisque $(x_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors la suite $(x_2^{(n)})_{n \in J_1}$ est bornée. On peut donc en extraire une suite convergente $(x_2^{(n)})_{n \in J_2}$, où $J_2$ est une partie infinie de $J_1$. On continue ainsi jusqu'à $J_p \subset J_{p-1} \ldots \subset J_2 \subset J_1$ et l'on obtient une suite $(x^{(n)})_{n \in J_p}$ extraite de $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et telle que, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$ la suite $(x_i^{(n)})_{i \in}$

composantes de cette suite est extraite de $(x_i^{(n)})_{n \in J_i}$ et donc converge. Finalement la suite $(x^{(n)})_{n \in J_p}$ converge. ■

**COROLLAIRE**

> *De toute suite bornée dans* $\mathbb{C}$, *on peut extraire une suite convergente. Si* $p \in \mathbb{N}$ *et* $p \geqslant 2$, *de toute suite bornée de* $\mathbb{C}^p$, *on peut extraire une suite convergente.*

***Exercice 1 :*** Soit $(x_n)$ une suite convergente de réels, et $x$ sa limite. Montrer que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ est un compact de $\mathbb{R}$.

***Exercice 2 :*** Montrer qu'une partie *discrète* de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

***Exercice 3 :*** Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est non vide et *parfait* (cf. définition III.3.4) ne peut pas être dénombrable.

***Exercice 4 :*** Soit $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de nombres à valeurs dans $\{-1, +1\}$. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \ (n \geqslant 0)$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$.

***Exercice 5 :*** Déterminer les points d'accumulation de l'ensemble $E$ formé par les points $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{m+n}$, où $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *Réponse :* 0 et $e$.

***Exercice 6 :*** Trouver l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble $E$ des réels dont le développement propre *décimal* s'écrit uniquement avec des 0 et des 1.

***Exercice 7 :*** Soit $E$ une partie de $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points d'accumulation est dénombrable. Montrer que $E$ est dénombrable.

***Exercice 8 :*** Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2)$ $(m \neq n) \Rightarrow \mathrm{Adh}\,(I_m) \cap \mathrm{Adh}\,(I_n) = \varnothing$ . Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est *parfait* et non vide. Réciproque ?

***Exercice 9 :*** Soit 0, $a_1$, $a_2 \dots a_n$ le développement décimal propre d'un réel $x \in [0, 1[$. On pose : $S_n(x) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et on donne $\lambda \in [0, 9[$. Montrer que l'ensemble des $x$ tels que $S_n(x) \leqslant \lambda n$ pour tout $n$ est compact, sans point isolé et ne contient aucun intervalle.

***Exercice 10 :*** Soit, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $E_N$ l'ensemble des réels

$$\left\{\frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{\alpha_N}}\right\}_{0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N} \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N .$$

*a*) Trouver les ensembles *dérivés* itérés $E_N'$, $E_N''$, …, $E_N^{(k)}$, … $(k \in \mathbb{N}^*)$.
*Indication :* Utiliser les développements dyadiques des réels.
*b*) *Application :* Construire une partie $E$ de $\mathbb{R}$ telle que la suite $(E^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ soit *strictement décroissante* pour l'inclusion.

***Exercice 11 :*** Soit $F$ une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une partie $E$ de $\mathbb{R}$ dont $F$ soit l'ensemble des points d'accumulation.

***Exercice 12 :*** On donne deux suites de réels $(u_n)$ et $(\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n + \varepsilon_n$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est *un intervalle.*

***Exercice 13 :*** Deux suites réelles *équivalentes* ont les mêmes valeurs d'adh

***Exercice 14 :*** Soit $F$ une partie fermée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)$ dont $F$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence.

***Exercice 15 :*** On désigne par $l_\infty$ le $\mathbb{R}$-ev des suites *bornées* de réels $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et on considère l'application $f : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, $x = (x_n) \mapsto y = (y_n)$ telle que

$$(\forall n \geqslant 1) \quad y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

*a*) Si $x = (x_n) \in l_\infty$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(y_n) = f(x)$ est un intervalle (cf. exercices 12 et 13).

*b*) $f$ est-elle bijective ?

*c*) Montrer : pour tous réels $a$ et $b$ avec $a < b$, il existe une suite $x = (x_n) \in l_\infty$ telle que $(\forall n)\ x_n \in \{0, 1\}$ et que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(y_n) = f(x)$ soit le segment $[a, b]$.

***Exercice 16 :*** Si $E$ et $F$ sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note $E'$, $F'$ les dérivés de $E$ et $F$, et $(E + F) = \{x + y\}_{(x, y) \in E \times F}$.

Soit $A$ et $B$ deux parties *bornées* de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(A + B)' = (A' + B') \cup (A' + B) \cup (A + B').$$

***Exercice 17 :*** Montrer qu'il n'existe aucune *partition dénombrable* du segment $[0, 1]$ en sous-ensembles fermés non vides.

***Exercice 18 :*** On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0, 2\}$.

*a*) Montrer que l'application $f : \mathscr{S} \longrightarrow [0, 1]$, $a = (a_n) \mapsto f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ est injective. On notera $\mathscr{C}$ son image.

*b*) Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie non vide, compacte et *parfaite* de $\mathbb{R}$ ($\mathscr{C}$ est appelé l'ensemble triadique de Cantor). Trouver $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \cap \mathscr{C}$.

*c*) Soit $\Omega = [0, 1] \backslash \mathscr{C}$. Montrer que c'est un ouvert de *mesure finie* (cf. § III.2, exercice 8). Décrire $\Omega$. Montrer que la mesure de $\Omega$ est $\Lambda(\Omega) = 1$.

***Exercice 19 :*** Pour chacun des ensembles $E \subset \mathbb{R}$ suivants, déterminer l'intérieur, l'adhérence, la frontière, l'ensemble dérivé en précisant éventuellement si $E$ est parfait.

*a*) $E$ est l'ensemble des réels $x \in [0, 1]$ dont le développement décimal propre $(a_n(x))_{n \geqslant 0}$ est tel que $\frac{1}{n} \operatorname{card} \{k \in [\![1, n]\!] \mid a_k(x) = q\}$ admette une limite donnée $l \in [0, 1]$, le nombre $q \in [\![0, 9]\!]$ étant donné.

*b*) $(d_n)$ étant une suite de naturels telle que $d_0 = 1$ et que chaque terme divise *strictement* le suivant, chaque réel $\in [0, 1]$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{d_n}$, où $u_n \in \left[\!\left[0, \frac{d_n}{d_{n-1}}\right[\!\right[$. $E$ est l'ensemble des réels $\in [0, 1]$ tels que $u_n \neq 1$ pour tout $n$.

***Exercice 20 :*** On convient de désigner par $\mathring{E}$ l'intérieur d'une partie $E$ de $\mathbb{R}$, et par $\bar{E}$ l'adhérence de $E$.

*a*) Montrer que, pour $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, si $A$ est ouvert, on a toujours $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

*b*) Donner des exemples d'ensembles *ouverts A et B* tels que les quatre ensembles $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ soient tous différents.

*c*) Donner des exemples *d'intervalles* $A$, $B$ tels que $A \cap \bar{B}$ ne soit pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

*d*) Donner un exemple d'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que les sept ensembles $A$, $\mathring{A}$, $\bar{A}$, $\mathring{\bar{A}}$, $\bar{\mathring{A}}$, $\mathring{\bar{\mathring{A}}}$, $\bar{\mathring{\bar{A}}}$ soient tous distincts et n'aient pas d'autres relations d'inclusion que les suivantes : $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, $\mathring{\bar{\mathring{A}}} \subset \mathring{\bar{A}}$, $\bar{\mathring{A}} \subset \bar{\mathring{\bar{A}}}$, $\mathring{A} \subset \mathring{\bar{\mathring{A}}} \subset \bar{\mathring{A}} \subset \bar{A}$, $\mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}} \subset \bar{\mathring{\bar{A}}} \subset \bar{A}$.

***Exercice 21 :*** A chaque $n \in \mathbb{N}$ on associe le réel $u_n = \sqrt{n} - \operatorname{Ent}(\sqrt{n})$

l'ensemble des valeurs prises par $(u_n)$ est *dense* sur $[0, 1[$. Trouver le plus petit entier $n$ tel que $\sqrt{n} = \cdots, 1\,987\ldots$ (*Réponse :* 8 686).

Question analogue avec $v_n = \sqrt[k]{n} - \text{Ent}\,(\sqrt[k]{n})$, où $k$ est un entier $\geqslant 2$.

## § III.4 *CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE*

Une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une **fonction numérique.** Une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ est appelée fonction de variable réelle. Nous allons ci-dessous nous occuper de *fonctions numériques de variable réelle.*

**Définition III.4.1**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est* ***continue au point*** *$a \in A$ ssi pour tout voisinage $W$ de $f(a)$ il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.*
*On dit que $f$ est* ***discontinue*** *au point $a \in A$ ssi elle n'est pas continue en ce point.*
*La fonction $f$ est dite* ***continue*** *ssi elle est continue en tout point de $A$.*

Soit $a \in A$ et $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$) une base de voisinages de $a$ (resp. $f(a)$). On peut se contenter, dans la définition, d'utiliser des voisinages $W \in \mathscr{B}'$ et $V \in \mathscr{B}$ ; on obtient en particulier les définitions suivantes de la continuité de $f$ en $a$ équivalentes à la définition III.4.1 :

(1) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } |x - a| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)\,.$$

(2) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } |x - a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\,.$$

Nous utiliserons de préférence la forme (1) pour la simple raison que les inégalités larges sont d'un maniement plus commode et plus sûr que les inégalités strictes qui sont souvent plus délicates à établir et que l'on n'emploiera donc que lorsqu'elles sont indispensables.

En prenant en particulier $\varepsilon = 1$ dans (1), on voit qu'il existe un voisinage $V = [a - \eta_1, a + \eta_1]$ de $a$ tel que $|f(x) - f(a)| \leqslant 1$ pour $x \in V \cap A$, d'où l'on déduit $|f(x)| \leqslant 1 + |f(a)|$, ce qui signifie que $f|_{V \cap A}$ est *bornée* (c'est-à-dire a une image bornée dans $\mathbb{R}$) :

**Proposition III.4.1**

*Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in A$ (avec $A \subset \mathbb{R}$), alors $f$ est bornée « au voisinage » de $a$.*

***Exemple 1 :*** Toute fonction constante est continue. La fonction $A \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto x$ est continue. La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est contin

***Exemple 2 :*** En vertu de la définition, si $a$ est un *point isolé* de $A$, toute fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a$.

***Exemple 3 :*** La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ est continue en tout point $a \neq 0$, mais n'est pas continue en 0 (cf. fig. 1). La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $g(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point (prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ dans la définition (1)).

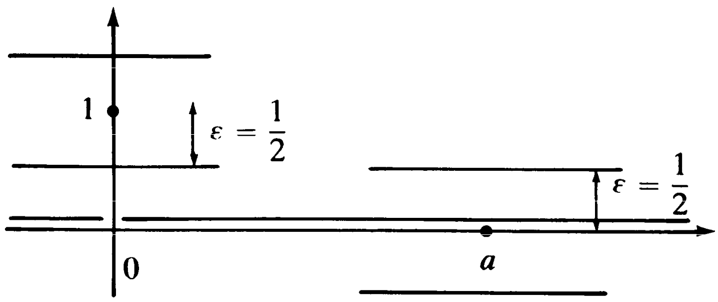



**Fig. 1.**

La *discontinuité* de $f$ en un point $a \in A$ se traduit par :

(3) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$,

$$(x \in A \text{ et } |x - a| \leqslant \eta) \not\Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon)$$

autrement dit :

(4) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$ on peut trouver au moins un $x$ dans $A$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$ et que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$.

**Modules de continuité**

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* en $a \in A$. Si $\varepsilon$ est un réel $> 0$ on appelle **module de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$** tout nombre réel $\eta > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } |x - a| \leqslant \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon).$$

Il est clair que si $\eta$ est un tel nombre, tout nombre $\eta' \in ]0, \eta]$ en est aussi un. L'ensemble de ces nombres est donc un *intervalle* $\mathcal{M}_c(a, \varepsilon, f) \subset \mathbb{R}_+^*$, non vide et de borne inférieure 0. Si cet ensemble est majoré, il admet une borne supérieure qui, selon le cas, peut *a priori* faire — ou non — partie de l'ensemble. Cette notion prend un intérêt si l'on considère un nombre *fini* de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ continues en $a$, car alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un module de continuité commun aux $f_i$ pour $\varepsilon$ en $a$ : il suffit de prendre $\eta = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Min}} \eta_i$, où, pour tout $i$, $\eta_i$ est *un* module de continuité de $f_i$ en $a$ pour $\varepsilon$.

### Utilisation de suites

**THÉORÈME III.4.1**

> *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
>
> (I) *$f$ est continue en $a$.*
>
> (II) *Pour toute suite $(x_n)$ de points de $A$ qui converge vers $a$, on a : $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$.*
>
> (III) *Pour toute suite $(x_n)$ de points de $A$ qui converge vers $a$, la suite $(f(x_n))$ converge.*

*Démonstration :*

(I) entraîne (II) : soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\eta$ un module de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - a| \leqslant \eta$ pour $n \geqslant N$. Alors $|f(x_n) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Donc $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$.

(II) entraîne (III) est évident.

(III) entraîne (I) : par l'absurde, si (I) n'est pas vrai, choisissons $\varepsilon > 0$ tel qu'aucun $\eta > 0$ ne soit module de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$. Cela voudrait dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pourrait trouver $x_n \in A$ tel que

$$|x_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et que} \quad |f(x) - f(a)| > \varepsilon\,.$$

Mais alors la suite $(y_n)$ définie par $y_{2n} = a$ et $y_{2n+1} = x_n$ pour tout $n$ converge vers $a$ tandis que la suite $(f(y_n))$, à cause de $|f(y_{2n}) - f(y_{2n+1})| > \varepsilon$, ne converge pas, ce qui est contraire à l'hypothèse (III). Donc $f$ est continue en $a$. ■

**COROLLAIRE**

> *Les fonctions exponentielles de base quelconque, les fonctions logarithmes de base quelconque sont* **continues.** *De même, pour tout réel $a$, la fonction puissance $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^a$ est continue.*

Il suffit d'appliquer les résultats sur les suites obtenues au Chapitre II (transformation des suites convergentes par les fonctions exponentielles, puissances et logarithmes).

De manière plus précise, *les seuls homomorphismes de groupes* **continus** de $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R}, +)$ *sont les $x \mapsto ax$ (où $a \in \mathbb{R}$). De* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, *ce sont les $x \mapsto a^x$. De* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *dans* $(\mathbb{R}, +)$, *ce sont les* $\log_a$. *De* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *dans* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, *ce sont les $x \mapsto x^a$.* Comme on passe de $(\mathbb{R}, +)$ à $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ par la bijection continue $x \mapsto \mathrm{e}^x$, et de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ à $(\mathbb{R}, +)$ par la bijection continue $x \mapsto \operatorname{Log} x$, il nous suffira de démontrer la première assertion : soit $f$ un homomorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. On a donc $f(0) = 0$. Posons $f(1) = a$. Il vient immédiatement $f(n) = an$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$, et enfin $f\left(\frac{p}{q}\right) =$

$\frac{p}{q}a$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, soit : $f(r) = ar$ pour $r \in \mathbb{Q}$. Dès lors deux cas se présentent : *si* $a = 0$, on a $f(r) = 0$ pour tout rationnel $r$, et pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ il suffit de choisir une suite de rationnels tendant vers $x$ pour prouver $f(x) = 0$ : c'est l'homomorphisme nul. Si $a \neq 0$, la même méthode conduit, en prenant la suite $(r_n)$ de rationnels de limite $x \in \mathbb{R}$, à :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} (ar_n) = a \lim_{n \to \infty} (r_n) = ax .$$

**Continuité d'une restriction**

Soit $A$ et $B$ des parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$, et $a \in A$. Si une fonction $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a$, alors la définition III.4.1 montre immédiatement que $f|_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a$. En particulier, *si f est continue* (*i.e.* continue en tout point de $B$), *toute restriction de f est aussi continue.* Il suffit de reprendre l'exemple 3 pour constater que les réciproques sont fausses : la fonction $g$ qui y est définie n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$, et pourtant ses restrictions $g|_{\mathbb{Q}}$ et $g|_{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$ sont constantes, donc continues. En conséquence, nous éviterons d'écrire des phrases ambiguës du genre « $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $A$ », préférant une rédaction plus claire : « $f|_A$ est continue » ou, selon le cas, « $f$ est continue en tout point de $A$ ».

**Caractère local de la continuité**

D'après la définition III.4.1, pour que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue en $a \in A$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f|_{V \cap A}$ soit continue en $a$. En particulier, $f$ est **continue** ssi **tout point** $a \in A$ possède au moins un voisinage $V$ tel que $f|_{V \cap A}$ soit continue. On traduit cette propriété en disant que la continuité a un caractère **local,** car, pour que $f$ soit continue, il faut et il suffit, comme on dit pour abréger ce qui précède, qu'elle le soit **au voisinage** de chaque point $a$ de $A$.

**Composée de fonctions continues**

Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$ et une application $f : A \longrightarrow B$. On peut lui associer la fonction $\hat{f} : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ayant même graphe que $f$. Nous dirons que $f$ est continue en $a \in A$ (resp. continue) ssi $\hat{f}$ l'est. En notant $j_B : B \longrightarrow \mathbb{R}$ l'injection canonique $x \mapsto x$, nous voyons que $\hat{f} = j_B \circ f$ ; $f$ est donc continue en $a \in A$ (resp. continue) ssi $j_B \circ f$ l'est. Pour exprimer cela, nous pouvons utiliser les relations (1), (2) et le théorème III.4.1.

**THÉORÈME III.4.2**

> *Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. Si $f$ est continue en $a \in A$, et si $g$ est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$. En particulier, si $f$ et $g$ sont continues, $g \circ f$ est continue.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ un réel $> 0$. Choisissons un module de continuité $\eta_1 > 0$ de $g$ en $b$ pour $\varepsilon$ ; puis, un module de continuité $\eta > 0$ de $f$ en $a$ pour $\eta_1$. Alors, si $x \in A$ et $|x - a| \leqslant \eta$, on a : $|f(x) - f(a)| \leqslant \eta_1$, d'où

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| \leqslant \varepsilon$$

et la continuité de $g \circ f$ en $a$ est prouvée. ■

Dans le cas particulier où $A \subset B \subset \mathbb{R}$, en désignant par $f : A \longrightarrow B$ l'injection canonique (continue !), on retrouve que $g|_A = g \circ f$ est continue en $a \in A$ si $g$ l'est.

### L'algèbre des fonctions continues sur une partie de $\mathbb{R}$

Nous avons vu dans le tome 1 que, pour tout ensemble non vide $X$, l'ensemble $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ constitue *une* $\mathbb{R}$*-algèbre* dès qu'on le munit des lois naturelles (cf. Tome 1, § VI.4, exemple 5).

**THÉORÈME III.4.3**

> *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in A$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues en $a$. Alors, $\lambda f + \mu g$ est continue en $a$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ; $fg$ est continue en $a$.*
> *Si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en $a$.*

*Démonstration :*

Il suffit d'utiliser le théorème III.4.1, et les théorèmes correspondants sur les suites convergentes et leurs limites (cf. Chap. II). ■

En conséquence, si $f$ et $g$ sont continues, $\lambda f + \mu g$ l'est pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $fg$ l'est, et si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{f}$ est continue. Comme toute fonction constante sur $A$ est continue, on en déduit :

**COROLLAIRE**

> *L'ensemble des fonctions continues $A \longrightarrow \mathbb{R}$, où $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.*

La $\mathbb{R}$-algèbre définie dans ce corollaire sera notée $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$ ou en abrégé $\mathscr{C}^0(A)$.

***Remarque 1 :*** Le théorème III.4.3 montre que toute fonction monôme $A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ (où $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et $n \in \mathbb{N}$) est continue (produit *fini* de fonctions continues), puis par combinaison linéaire, toute *fonction polynomiale* sur $A$ (à coefficients dans $\mathbb{R}$) est continue. Enfin *toute fonction rationnelle* définie sur $A$ (ce qui suppose qu'aucun pôle de la fraction associée n'appartient à $A$) *est continue* (cf. Tome 1, § VIII.3).

fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ définies sur $A$ est donc une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Les théorèmes III.4.1, III.4.2 et III.4.3 suffisent dans la plupart des cas à établir la continuité des fonctions qui se présentent en pratique.

***Exemple 4 :*** Soit à prouver que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left[\dfrac{x}{1 + \operatorname{Log}^2(1 + x^2)}\right]$ est continue. On montre successivement :

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x^2$ est continue (polynôme)

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Log}(1 + x^2)$ est continue (fonction composée, mais bien vérifier que $1 + x^2 > 0$)

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \operatorname{Log}^2(1 + x^2)$ est continue (somme et produit)

$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{f_3(x)}$ est continue ($f_3$ prend ses valeurs sur $\mathbb{R}^*$)

$f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x f_4(x)$ est continue (produit)

$f_6 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp[f_5(x)]$ est continue (fonction composée).

Dans la pratique on abrège ce raisonnement en parlant de théorèmes « généraux », on se contente de surveiller les radicandes qui risquent d'être $< 0$, les dénominateurs qui doivent être $\neq 0$, les arguments des logarithmes, qui ne peuvent être que $> 0$, ...

***Remarque 2 :*** Il résulte du théorème sur la composition des fonctions continues que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction $|f| : A \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire la fonction qui à tout $x \in A$ associe $|f(x)|$, est aussi continue. A titre d'application, considérons deux fonctions $f$ et $g$, définies sur la même partie $A$ de $\mathbb{R}$, et continues. Alors $\sup(f, g)$ (définie par $(\sup(f, g))(x) = \operatorname{Max}(f(x), g(x))$ pour chaque $x \in A$) et $\inf(f, g)$ sont aussi continues. En effet on peut écrire :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

qui sont des combinaisons linéaires de fonctions continues.

En particulier, si $f$ est continue, $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$ sont aussi continues.

**Caractérisation globale de la continuité**

**DÉFINITION III.4.2**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Une partie $\omega$ de $A$ est appelée un ouvert* relativement à *$A$ (en abrégé : un* **ouvert relatif** *de $A$) ssi il existe un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$ tel que $\Omega \cap A = \omega$. Une partie $\Phi$ de $A$ est appelée un fermé* relativement à *$A$ (en abrégé : un* **fermé relatif** *de $A$) ssi il existe un fermé $F$ de $\mathbb{R}$ tel que $F \cap A = \Phi$.*

Si l'on note $\mathscr{O}_A$ (resp. $\mathscr{F}_A$) l'ensemble des ouverts (resp. fer de $A$, on a donc $\mathcal{O}_A = \{\Omega \cap A\}_{\Omega \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}}$ et $\mathcal{F}_A = \{F \cap A\}_{F \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}}$. Il est clair que $\mathcal{O}_A$ est stable par unions quelconques et intersections finies et que $\mathcal{F}_A$ est stable par intersections quelconques et par unions finies. Bien sûr $\varnothing$ et $A$ appartiennent à la fois à $\mathcal{O}_A$ et à $\mathcal{F}_A$.

D'ailleurs $\mathcal{F}_A = \{A \backslash \omega\}_{\omega \in \mathcal{O}_A}$.

**PROPOSITION III.4.2**

*Si $A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, les ouverts relatifs de $A$ sont les ouverts de $\mathbb{R}$ inclus dans $A$.*
*Si $A$ est un fermé de $\mathbb{R}$, les fermés relatifs de $A$ sont les fermés de $\mathbb{R}$ inclus dans $A$.*

Il suffit pour le voir de se reporter aux théorèmes III.2.1 et III.2.2. Mais en général les ouverts (resp. fermés) relatifs d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ n'ont aucune raison d'être des ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$.

***Exemple 5 :*** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$. Prenons $A = ]a, b[$. $A$ est un fermé relatif de $A$ sans être un fermé de $\mathbb{R}$. De même, pour tout $c \in ]a, b[$, $]a, c]$ est un fermé relatif de $A$ (comme intersection de $A$ avec $]-\infty, c[$) sans être un fermé de $\mathbb{R}$. Si maintenant on prend $A' = [a, b]$, $A'$ ouvert relatif de $A'$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, $[a, c[$ est un ouvert relatif de $A'$ sans être un ouvert de $\mathbb{R}$.

***Exemple 6 :*** Prenons $A = \mathbb{Q}$. Les ouverts relatifs de $A$ sont les réunions quelconques d'intervalles de $\mathbb{Q}$ du type $J \cap \mathbb{Q}$, où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. A part $\varnothing$ , aucun ouvert relatif de $\mathbb{Q}$ n'est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Une caractérisation simple des ouverts relatifs résulte de la proposition III.2.2.

**PROPOSITION III.4.3**

*Pour qu'une partie $\omega$ d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ soit un ouvert relatif de $A$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in \omega$, on puisse trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[ \cap A \subset \omega$.*

De même, le corollaire du théorème III.3.3 entraîne :

**PROPOSITION III.4.4**

*Pour qu'une partie $\Phi$ d'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ soit un fermé relatif de $A$, il faut et il suffit que tout point de $A$ qui est limite d'une suite convergente dans $\mathbb{R}$ de points de $\Phi$ appartienne à $\Phi$.*

**THÉORÈME III.4.4**

*Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(I) *$f$ est continue ;*
(II) *pour tout ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert relatif de $A$ ;*
(III) *pour tout fermé $F$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est un fermé*

*Démonstration :*

(II) et (III) sont équivalentes car $\Omega \subset \mathbb{R}$ est ouverte ssi $F = \mathbb{R} \backslash \Omega$ est fermée. Or $f^{-1}(\mathbb{R} \backslash Y) = A \backslash f^{-1}(Y)$ pour toute partie $Y$ de $\mathbb{R}$. Et de plus $\omega \subset A$ est un ouvert relatif de $A$ ssi $A \backslash \omega$ est un fermé relatif de $A$.

(I) entraîne (III). En effet, soit $f$ continue et $F$ un fermé de $\mathbb{R}$. Posons $\Phi = f^{-1}(F)$. Soit $(x_n)$ une suite de points de $\Phi$ qui converge dans $\mathbb{R}$ vers un point $a \in A$. On a $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$ d'après le théorème III.4.1. Puisque $f(x_n) \in F$ pour tout $n$, cela entraîne : $f(a) \in F$ (corollaire du théorème III.3.3). Donc $a \in \Phi$ et cela prouve que $\Phi$ est un fermé relatif de $A$ (proposition III.4.4).

Enfin (II) entraîne (I). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $W = ]f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(W)$ est un ouvert relatif de $A$. Choisissons donc (cf. proposition III.4.3) un réel $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[ \cap A \subset f^{-1}(W)$. Alors, pour $x \in A$ et $|x - a| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ on a : $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Donc $f$ est bien continue en un point $a$ arbitrairement fixé dans $A$. ■

***Exemple 6 :*** Avec les notations du théorème précédent, *si f est continue,* les ensembles $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ et $\{x \in A \mid f(x) \geqslant 0\}$ sont respectivement ouvert et fermé relativement à $A$, puisque $]0, +\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et $[0, +\infty[$ fermé dans $\mathbb{R}$.

Si $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ est toujours un *fermé relatif* de $A$ car $\{y\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. En particulier, si $f$ est continue, l'*ensemble des zéros* de $f$, *i.e.* $\{x \in A \mid f(x) = 0\}$, est toujours un fermé relatif de $A$.

***Exemple 7 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions *continues.* Supposons que $f(x) = g(x)$ en tout point $x$ d'une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ *partout dense* dans $\mathbb{R}$. Alors $f = g$ car l'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ est l'ensemble des zéros de la fonction continue $f - g$. Comme il contient $\mathscr{D}$, il contient Adh $(\mathscr{D}) = \mathbb{R}$.

### Continuité à droite ou à gauche

**DÉFINITION III.4.3**

*Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est* ***continue à droite*** *(resp.* ***à gauche****) en un point $a \in A$ ssi $f|_{A \cap [a, +\infty[}$ (resp. $f|_{A \cap ]-\infty, a]}$) est continue en a.*

*On dit que f est* continue à droite (*resp.* à gauche) *ssi elle l'est en* tout *point $a \in A$.*

*On dit que f est* ***discontinue à droite*** *en $a \in A$ (resp.* ***à gauche****) ssi elle n'est pas continue à droite (resp. à gauche) en ce point.*

Puisque la continuité à droite ou à gauche se ramène à la continuité tout court, les théorèmes du § III.4 (à l'exception bien sûr du théorème III.4.4 qui était global) s'appliquent. On vérifie facilement que, *po* *continue en a, il faut et il suffit qu'elle soit continue à droite et à gauche en a* (attention ! ne pas dire : à gauche *de a*).

***Exemple 8 :*** La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \text{Ent}(x)$ est continue à droite en tout point. Elle est discontinue à gauche en tout point $a \in \mathbb{Z}$. Elle est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

***Exercice 1 :*** Démontrer directement (sans utiliser des suites convergentes, mais seulement la définition de la continuité) toutes les assertions du théorème III.4.3.

***Exercice 2 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est continue ssi, pour tout réel $a$, les ensembles $f^{-1}(]-\infty, a[)$ et $f^{-1}(]a, +\infty[)$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 3 :*** On donne un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, une fonction continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, un point $a \in I$ et un réel $> 0$. Déterminer l'ensemble des modules de continuité $\mathscr{M}_c(a, \varepsilon, f)$ dans les cas suivants :

*a)* $I = \mathbb{R}_+, f : x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha$ est un réel $> 0$)
*b)* $I = \mathbb{R}_+^*, f : x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha$ réel $< 0$)
*c)* $I = \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

***Exercice 4 :*** Trouver toutes les fonctions *continues* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Peut-on affaiblir l'hypothèse de continuité de $f$?

***Exercice 5 :*** Soit une partie $E$ de $\mathbb{R}$, réunion *finie* de fermés relatifs $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de $E$. Pour que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ soit continue, il faut et il suffit que, pour tout $i$, $f|_{F_i}$ le soit. Donner des contre-exemples dans le cas où les $F_i$ ne sont pas des fermés relatifs de $E$.

***Exercice 6 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction *croissante*. Construire une fonction *continue* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f \leqslant g$ (*i.e.* $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \leqslant g(x)$).

***Exercice 7 :*** Soit $E$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*. Montrer que, pour tout $a \in E$ et tout $\varepsilon$ réel $> 0$, l'ensemble $\mathscr{M}_c(a, \varepsilon, f)$ est fermé dans $\mathbb{R}_+^*$. S'il est borné, on peut donc parler *du* plus grand module de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$.

***Exercice 8 :*** Notons $Y$ la fonction « échelon unité » définie sur $\mathbb{R}$ par $Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $Y(x) = 1$ si $x > 0$. Soit par ailleurs $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$. Etudier les points de continuité, les points de continuité à droite ou à gauche, de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{Y(x - r_n)}{2^n}$.

***Exercice 9 :*** Pour chaque réel $x \in [0, 1[$ on note $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n(x)}{10^n}$ son développement décimal propre. Etudier la continuité, la continuité à droite et à gauche de la fonction $f : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{2n}(x)}{10^n}$.

***Exercice 10 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $f^{-1}(]\varepsilon, +\infty[)$ soit *fini* pour tout $\varepsilon > 0$.

*a)* Montrer que $f$ admet des *zéros* (*i.e.* des points $x$ tels que $f(x) = 0$) sur tout intervalle ouvert non vide de $[0, 1]$.
*b)* En tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, montrer que $f$ est continue.

***Exercice 11 :*** Soit $F$ une partie fermée de $\mathbb{R}$, et $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'on peut *prolonger* $f$ en $\bar{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

*Indication :* Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Omega = \mathbb{R}\backslash F$. Pour $I \in \mathscr{C}$, si $I = ]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ on posera $\bar{f}(x) = f(a)$ pour $x \in I$ ; si $I = ]a, b[$ on posera $\bar{f}(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ pour $x \in I$.

*Application :* On prend pour $F$ l'ensemble triadique de Cantor, c'est-à-dire l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{3^n}$, avec $a_n \in \{0, 2\}$. A chaque $x \in F$ on associe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{2^n}$ avec $b_n = \dfrac{a_n}{2}$ pour tout $n$. Montrer que $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue*. Que peut-on dire de $\bar{f}$ ?

**Exercice 12 :** Soit $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble $A$ de tous les nombres rationnels $x$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Pour $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, on définit la fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x) = \sum_{r_n < x} \dfrac{1}{2^n}$, la somme étant étendue à tous les $n$ pour lesquels $r_n < x$.

On pose $B = E\backslash A$. Montrer que $f|_B$ est continue, mais qu'on ne peut pas la prolonger en une fonction continue de $E$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 13 :** On définit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x$ est irrationnel et $f(x) = \dfrac{1}{q}$ si $x$ est un rationnel de représentant irréductible $\dfrac{p}{q}$ $(q > 0)$ et enfin $f(0) = 1$. Etudier en quels points $f$ est continue.

**Exercice 14 :** *a*) Si $F$ est un fermé de $\mathbb{R}$, construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(0) = F$ et qui soit continue (on utilisera les composantes connexes de $\mathbb{R}\backslash F$).

*b*) On prend pour $F$ l'ensemble triadique de Cantor (cf. § III.3, exercice 18). Construire $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f^{-1}(0) = F$ de telle sorte que $\forall x \in F$, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, le signe de $f$ ne soit constant sur aucun des intervalles $]x - \varepsilon, x[ \cap [0, 1]$, $]x, x + \varepsilon[ \cap [0, 1]$ pour $0 < x < 1$.

**Exercice 15 :** Trouver toutes les fonctions continues et *non nulles* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x + y) f(x - y) = f^2(x) f^2(y)$.

*Indication :* Montrer que $f$ a nécessairement un signe fixe, puis calculer $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$, utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et vérifier que les fonctions obtenues conviennent.

**Exercice 16 :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On suppose qu'il existe *un* intervalle $]a, b[$, avec $a < b$, où $f$ est *majorée*. Montrer qu'alors $f$ est aussi minorée dans cet intervalle $]a, b]$ (*indication :* si $c \in ]a, b[$ considérer les couples $(x, y)$ de $]a, b[$ tels que $x < c < y$ et que $\dfrac{y - c}{c - x}$ soit rationnel). Montrer que $f$ est bornée dans tout intervalle compact. Montrer que $f$ est nécessairement continue, d'où son expression. (Autrement dit les solutions de $f(x + y) = f(x) + f(y)$ qui ne sont pas linéaires ne sont bornées dans *aucun* intervalle, si petit soit-il.)

**Exercice 17 :** Soit $G$ l'ensemble $]-1, +\infty[ \subset \mathbb{R}$.

*a*) Montrer que $(u, v) \mapsto u * v = u + v + uv$ définit sur $G$ une structure de groupe abélien.

*b*) Trouver tous les homomorphismes de groupes continus $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, *)$. Montrer qu'on a une bijection naturelle entre $G$ et l'ensemble $\mathscr{H}$ de ces homomorphismes.

**Exercice 18 :** Soit $E = [0, 1]$. Existe-t-il une fonction continue $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x)$ soit rationnel pour $x$ irrationnel et que $f(x)$ soit irrationnel pour $x$ rationnel ?

## § III.5 *LES THÉORÈMES DE HEINE* [1]

### Extrema d'une fonction

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ présente, au point $a \in A$ :

- un **maximum** ssi $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout $x \in A$,
- un **maximum strict** ssi $f(x) < f(a)$ pour $x \in A$ et $x \neq a$,
- un **minimum** ssi $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in A$,
- un **minimum strict** ssi $f(x) > f(a)$ pour $x \in A$ et $x = a$,
- un **extremum** (resp. un extremum **strict**) ssi $f$ présente en $a$ un maximum ou un minimum (resp. un maximum ou un minimum strict),
- un **maximum local** (resp. un maximum local strict, un minimum local, un minimum local strict, un extremum local, un extremum local strict) ssi il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f|_{V \cap A}$ présente en $a$ un maximum (resp. un maximum strict, un minimum, un minimum strict, un extremum, un extremum strict).

### Fonctions continues sur une partie compacte de $\mathbb{R}$

Rappelons qu'une partie compacte de $\mathbb{R}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$.

**Théorème III.5.1**

> *Soit $A$ une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* continue. *Alors $f(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$, et en particulier $f$ présente sur $A$ au moins un minimum et au moins un maximum.*

*Démonstration :*

Soit $(y_n)$ une suite de points de $f(A)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ choisissons $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n$. Extrayons de $(x_n)$ une suite $(x_{N_k})$ qui converge vers un point $a \in A$ (propriété de Bolzano-Weierstrass du théorème III.3.6). Alors $f(x_{N_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$, puisque $f$ est continue en $a$.

La suite $(f(x_{N_k})) = (y_{N_k})$ extraite de $(y_n)$ converge donc vers $f(a) \in f(A)$. Le théorème III.3.6 montre donc que $f(A)$ est compact.

Comme $f(A) \neq \varnothing$ , l'exemple 4 du § III.3 prouve que $f(A)$ possède un plus grand et un plus petit élément (si $f(A) = K$, $K$ est bornée et $\sup(K) \in \operatorname{Adh}(K) = K$, et de même pour $\inf(K)$). ■

---

[1] Eduard *Heine*, mathématicien allemand (1821-1861) de l'école de *Jacobi* a mérité que son nom reste attaché aux théorèmes III.5.1, III.5.2 et III.5.3.

## Continuité uniforme

**DÉFINITION III.5.1**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* **uniformément continue** *ssi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x$ et $y$ dans $A$ vérifiant $|x - y| \leqslant \alpha$, autrement dit :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \mid ((x, y) \in A^2 \text{ et } |x - y| \leqslant \alpha) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon).$$

C'est sans doute la définition qui se rapproche le plus de l'idée naïve que se fait un non-mathématicien du concept de fonction continue : il imagine $\mathbb{R}$ comme un espace métrique et pense que si $x$ et $y$ sont assez proches, leurs images ne peuvent pas être très éloignées l'une de l'autre.

D'après la définition III.5.1, si $f$ est uniformément continue sur $A$, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f) = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall (x, y) \in A^2 (|x - y| \leqslant \alpha) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\}$$

est non vide (et réciproquement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f) \neq \varnothing$, c'est que $f$ est uniformément continue). Bien entendu, si $\alpha \in \mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f)$, tout réel $\alpha' \in ]0, \alpha]$ est encore élément de $\mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f)$ qui est donc un *intervalle non vide* inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et de borne inférieure 0. Les éléments de $\mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f)$ s'appellent **modules de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$.**

**PROPOSITION III.5.1**

*Soit $A \subset \mathbb{R}$.* Si *$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors $f$ est continue.*

*Démonstration :*

Soit $a \in A$. Donnons-nous un réel $> 0$, et soit $\alpha$ un élément de $\mathcal{M}_{cu}(\varepsilon, f)$. Alors en particulier pour $x \in A$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, on a $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve la continuité de $f$ au point $a$. Comme $a \in A$ est quelconque, $f$ est continue. ■

Mais la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant :

***Exemple 1 :*** La fonction $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue, mais elle n'est pas uniformément continue. Cela signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe un couple $(x, y) \in A^2$ vérifiant $|x - y| \leqslant \alpha$ tel que $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Ici $\varepsilon = 1$ convient. En effet donnons-nous un réel $\alpha > 0$ quelconque, mais qu'on peut supposer $< 1$. Alors en choisissant $x = \dfrac{\alpha}{2}$ et $y = \alpha$, on a bien $|x - y| < \alpha$ et cependant $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} > 1$. (Si $\alpha \geqslant 1$ on pourra utiliser le couple $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 1$.)

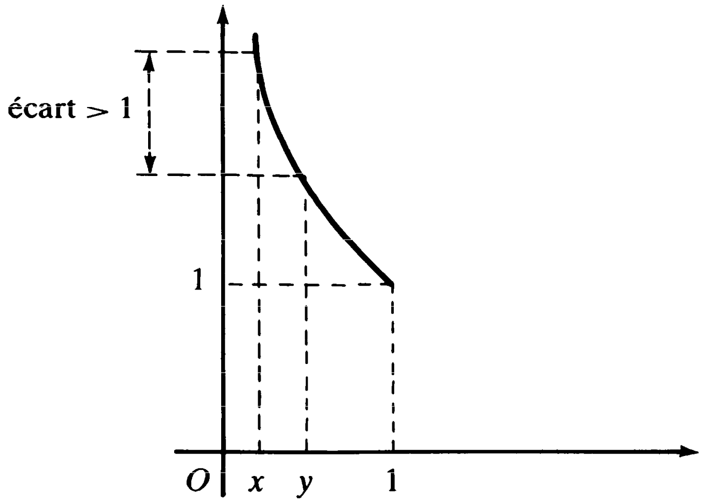



**Fig. 2.**

***Exemple 2 :*** La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est continue, mais elle n'est pas uniformément continue. En effet donnons-nous $\alpha > 0$ arbitraire. En choisissant $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $y = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{2}$ on réalise bien $|x - y| = \dfrac{\alpha}{2} < \alpha$ et cependant $|x^2 - y^2| = 1 + \dfrac{\alpha^2}{4} > 1$. Dans ces exemples $A$ est borné mais non fermé (exemple 1) ou fermé mais non borné (exemple 2), mais cela n'aurait pu arriver si $A$ était un fermé borné de $\mathbb{R}$ car :

**THÉORÈME III.5.2**

> *Soit $A$ une partie* compacte *de* $\mathbb{R}$, *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* continue. *Alors $f$ est uniformément continue.*

*Démonstration :*

Si $f$ n'était pas uniformément continue, il existerait un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{M}_{cu}(\varepsilon, f) = \varnothing$. Pour cet $\varepsilon$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\dfrac{1}{n} \notin \mathscr{M}_{cu}(\varepsilon, f)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ choisissons donc $x_n$ et $y_n$ dans $A$ tels que $|x_n - y_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Extrayons de $(x_n)$ une suite $(x_{N_k})$ qui converge vers un point $a \in A$ (cf. théorème III.3.6). Alors $y_{N_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a$ (en effet $N_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} +\infty$ et $x_{N_k} - y_{N_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$). Mais puisque $f$ est continue en $a$, nécessairement $f(x_{N_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$ et $f(y_{N_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$. Donc $f(x_{N_k}) - f(y_{N_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est contradictoire avec $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ pour tout $n$, et en particulier $\left|f(x_{N_k}) - f(y_{N_k})\right| > \varepsilon$ pour tout $k$. Donc $f$ est uniformément continue. ■

**Fonctions continues sur un intervalle**

**THÉORÈME III.5.3** (théorème des valeurs intermédiaires)

> *Soit $A$ un* intervalle *de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* continue. *Alors $f(A)$ est un intervalle.*

*Démonstration :*

Rappelons d'abord qu'une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi, pour tous $x$ et $y$ dans $I$ tels que $x \leqslant y$, on a : $[x, y] \subset I$. Pour prouver le théorème il suffit donc de montrer : *si $a$ et $b$ sont des réels tels que $a < b$ et si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors* Im $(f)$ *contient tous les réels compris entre $f(a)$ et $f(b)$*, d'où le nom de théorème des valeurs intermédiaires. Soit alors $a \in A$, $b \in A$, $a < b$. Si $f(a) = f(b)$ il n'y a rien à prouver. Pour fixer les idées supposons que $f(a) < f(b)$ et désignons par $m$ une valeur quelconque de $]f(a), f(b)[$.

Si $$f^{-1}(]-\infty, m]) = \{x \in [a, b] \,|\, f(x) \leqslant m\}$$
est noté $F$, il est clair que $F$ est non vide (car $a \in F$), que c'est un fermé relatif de $[a, b]$ d'après le théorème III.4.4, donc un fermé de $\mathbb{R}$ car $[a, b]$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Finalement $F$ est fermé, borné et non vide, donc (§ III.3, exemple 4) possède un plus grand élément que nous notons $c$, d'où $f(c) \leqslant m$. Il s'ensuit : $c < b$ puisque $f(b) > m$. D'ailleurs, pour tout $x \in ]c, b]$, on est sûr que $f(x) > m$, par définition de $c$. Considérons alors la fonction $g = f|_{[c, b]}$ : c'est une fonction continue de $[c, b]$ dans $\mathbb{R}$, donc, toujours d'après le théorème III.4.4, l'ensemble $\{x \in [c, b] \,|\, g(x) \geqslant m\}$ est un fermé relatif de $[c, b]$, et cet ensemble contient $]c, b]$, donc il contient $c$, d'où $g(c) = f(c) \geqslant m$. Finalement $f(c) \leqslant m$ et $f(c) \geqslant m$, d'où $f(c) = m$. ■

***Remarque 1 :*** Le théorème des valeurs intermédiaires traduit un autre aspect de l'idée intuitive contenue dans le concept de continuité au sens courant de ce mot (une file continue de véhicules est une file ininterrompue, le graphe d'une fonction continue sur un intervalle doit pouvoir être tracé d'un trait continu, c'est-à-dire sans lever le crayon). Cependant cette propriété est loin de caractériser les fonctions continues car il existe des classes entières de fonction *non continues* qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires, *i.e.* transforment tout intervalle en un intervalle :

***Exemple 3 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 0$, $f\left(\dfrac{1}{2^p}\right) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{3}{2^{p+2}}\right) = 0$ $(p \in \mathbb{N})$ et qui est affine sur chaque intervalle $\left[\dfrac{1/2}{2^p}, \dfrac{3/4}{2^p}\right]$ et sur $\left[\dfrac{3/4}{2^p}, \dfrac{1}{2^p}\right]$ $(p \in \mathbb{N})$. (cf. fig. 3). Alors il est clair que $f$ est discontinue au point 0 et cependant l'image de tout intervalle de $[0, 1]$ par $f$ est un intervalle. On trouvera même en exercice une fonction qui satisfait au théorème des valeurs intermédiaires et qui n'est continue en *aucun* point (cf. exercice 11).

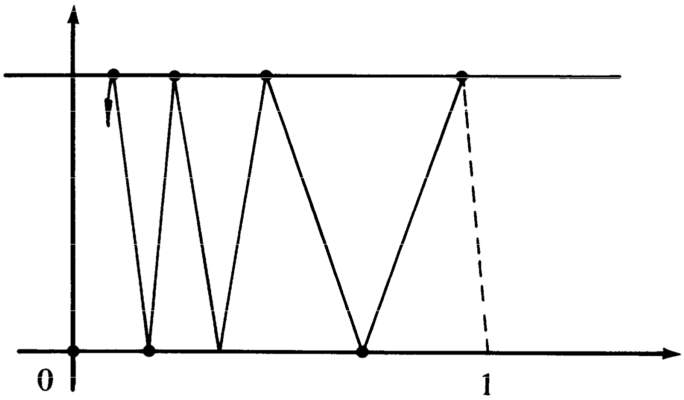



**Fig. 3.**

***Remarque 2 :*** Le lecteur attentif de la démonstration du théorème III.5.3 n'aura pas manqué de remarquer que la propriété essentielle qui est utilisée est la suivante : l'**image réciproque** d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue $f$ est un fermé relatif de $A$. En revanche on ne peut rien dire d'analogue pour les images *directes*. Par exemple l'application $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ transforme $\mathbb{R}$ qui est à la fois ouvert et fermé en $]0, 1]$ qui n'est ni ouvert ni fermé. Dans une application aussi simple qu'une fonction constante, l'image de tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est un singleton, c'est-à-dire un fermé de $\mathbb{R}$. Cependant :

**THÉORÈME III.5.4**

> *Soit* $S = [a, b]$, *avec* $a < b$ *un* segment *de* $\mathbb{R}$, *et* $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* continue. *Alors* $f(S)$ *est un segment, i.e.* $f(S) = [A, B]$, *avec* $A \leqslant B$.

Cela est dû au fait que les segments sont les seuls intervalles compacts de $\mathbb{R}$. Or, d'après le théorème III.5.3, $f(S)$ doit être un intervalle, et d'après le théorème III.5.1, ce doit être un compact.

***Exercice 1 :*** Montrer que si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *uniformément continue*, alors $|f|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ par une fonction du type $x \mapsto a + b|x|$ $(a \geqslant 0, b > 0)$.

***Exercice 2 :*** *a*) Trouver les fonctions $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues à droite* telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) \quad f(x) = f(x^2).$$

*b*) Trouver les fonctions $f: ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues* telles que, pour tout $x \in ]0, 1[$, $f(x) = f(x^2)$. (On en trouvera beaucoup, chacune étant déterminée de manière unique par sa restriction à un intervalle du type $[a^2, a]$, où $a \in ]0, 1[$.)

*c*) Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles qui sont uniformément continues ?

***Exercice 3 :*** Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions $f: [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *uniformément* continues. On note

$$\mathcal{U}^* = \{ f \in \mathcal{U} \mid \forall g \in \mathcal{U}, fg \in \mathcal{U} \}.$$

Soit $f: [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer : $(f \in \mathcal{U}^*) \Leftrightarrow$ (la fonction $g: [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x f(x)$ appartient à $\mathcal{U}$). (On montrera d'abord que $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}^*$.)

***Exercice 4 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue*, telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. On donne $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = f\left(x + \frac{1}{p}\right)$ a au moins une solution sur le segment $\left[0, 1 - \frac{1}{p}\right]$.

***Exercice 6 :*** Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $(\forall a \in I)$ $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)$ $\exists x \in I \cap \,]a, a + \varepsilon[$ tel que $f(x) \geqslant f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$). Montrer que $f$ est croissante (resp. strictement croissante).

***Exercice 7 :*** Soit $I$ un intervalle ouvert non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose $f(I) = J$ *ouvert*, et $(\forall y \in \mathbb{R})$, card $(f^{-1}(y)) \leqslant 2$. Montrer que $f$ est strictement monotone.

***Exercice 8 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, telle que $f(a) = f(b) = 0$.

*a*) Montrer que l'ensemble des longueurs des composantes connexes de $\Omega = [0, 1] \setminus f^{-1}(0)$ admet un plus grand élément, qu'on notera $c$ $(c > 0)$.

*b*) Montrer : $\forall t \in \,]0, c[$, l'équation $(\mathscr{E}_t) : x \in [a, b - t]$ et $f(x + t) = f(x)$ possède au moins une solution. Prouver aussi que $(\mathscr{E}_c)$ admet au moins une solution.

***Exercice 9 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $T$-périodique, avec $T > 0$, c'est-à-dire $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x + T) = f(x)$. Montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et que $f$ est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 10 :*** Donner du théorème de Heine III.5.2 une démonstration qui n'utilise pas les suites convergentes.

*Indication :* On pourra, à chaque $\varepsilon > 0$, et à chaque $x \in A$ associer l'intervalle ouvert $I_x = \,]x - \alpha_x, x + \alpha_x[$ tel que $y \in I_x \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On obtient ainsi un recouvrement ouvert de $A$ dont on peut extraire (théorème III.2.6 de Borel-Lebesgue) un recouvrement *fini*. On désignera par $\alpha$ le *diamètre* minimum de ces intervalles en nombre fini et on montrera que si $x \in A$, $y \in A$ vérifient $|x - y| < \frac{\alpha}{2}$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

***Exercice 11 :*** On considère la fonction $f : [0, 10[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie : $x$ étant donné par son développement décimal propre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, si l'ensemble des décimales de rang impair de $x$ n'est pas périodique, on pose $f(x) = 0$. Si cet ensemble est périodique à partir du rang $2n - 1$, on pose $f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2n+2p}}{10^p}$. Montrer que, quels que soient $x_1$ et $x_2$ distincts, $f(]x_1, x_2[)$ contient toutes les valeurs comprises entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, et que, cependant, cette fonction $f$ n'est continue en aucun point de $[0, 10[$.

***Exercice 12 :*** A chaque suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0, 2\}$ on fait correspondre le nombre $f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. On obtient ainsi une bijection de $\mathscr{S}$ sur $f(\mathscr{S}) = \mathscr{C}$ (ensemble triadique de Cantor, cf. l'exercice 18 du § III.3). Soit $F$ cette bijection et $G = F^{\langle -1 \rangle}$.

*a*) Soit $x \in \mathscr{C}$ et $a(x) = (a_n(x))$ son image par $G$. On pose :

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}(x)}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}(x)}{2^{n+1}}.$$

Montrer que les fonctions $\alpha$ et $\beta$ sont continues sur $\mathscr{C}$ et à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que l'application $\mathscr{C} \mapsto [0, 1] \times [0, 1]$, $x \mapsto (\alpha(x), \beta(x))$ est *surjective*.

*b*) En utilisant l'exercice 11 du § III.4, montrer qu'on peut prolonger $\alpha$ (resp. $\beta$) en une fonction continue $\varphi$ (resp. $\psi$) : $[0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. (Pour chaque choix de $\varphi$ et $\psi$ on obtient une « courbe de Peano », courbe continue passant en tous les points d'un carré.)

***Exercice 13 :*** On reprend les notations de l'exercice 12. On do

$(u_n) \in l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R})$ telle que $u_n > 0$ pour tout $n$. Si $x \in \mathscr{C}$, on pose $a(x) = (a_n(x))_n = G(x)$ et $S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, u_n$. Démontrer que l'application $S : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

En déduire que l'ensemble des sommes $\sum_{k=1}^{\infty} u_{N_k}$, où $(N_k)$ est une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}^*$, est une partie *compacte* de $\mathbb{R}$.

***Exercice 14 :*** Soit $x$ un zéro d'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On dit que *f change de signe en x* ssi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour un $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ convenable, on ait $\varepsilon f(t) < 0$ pour $t \in ]x, x+\alpha[$ et $\varepsilon f(t) > 0$ pour $t \in ]x-\alpha, x[$.

*a*) On suppose que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *continue*, $T$-périodique avec $T > 0$, et change de signe en tous ses zéros. Montrer que si $f(0) = f(T) = 0$, alors $(\forall a \in \mathbb{R})$ $f$ a au moins trois zéros sur $[a, a+T]$. Donner des contre-exemples si $f$ ne change pas de signe en tous ses zéros.

*b*) $f$ étant supposée continue et de période $T > 0$, on lui prête en outre les propriétés suivantes : $f(0) = 0$, $f$ présente en 0 un extremum local et $f$ possède sur $]0, T[$ un zéro où elle change de signe. Montrer que $f$ s'annule au moins deux fois sur $]0, t[$, et possède sur $]0, T[$ au moins trois extrema locaux.

***Exercice 15 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A$ l'ensemble des points $a$ où $f$ présente un maximum local. Montrer que $f(A)$ est au plus dénombrable.

## § III.6 *LA DROITE NUMÉRIQUE ACHEVÉE*

Ajoutons à $\mathbb{R}$ deux points supplémentaires ([1]), notés $-\infty$ et $+\infty$. On obtient un nouvel ensemble appelé la **droite achevée** et noté $\bar{\mathbb{R}}$. On prolonge à $\bar{\mathbb{R}}$ l'ordre usuel de $\mathbb{R}$ en convenant que $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \bar{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi un **ordre total** sur $\bar{\mathbb{R}}$, dit **usuel,** pour lequel $+\infty$ est *le plus grand élément* de $\bar{\mathbb{R}}$ et $-\infty$ est son plus petit élément, et qui induit bien sûr sur $\mathbb{R}$ l'ordre usuel. On voit facilement que dans $\bar{R}$ toute partie $E$ non vide possède une borne supérieure et une borne inférieure : en effet c'est clair si $E \subset \{-\infty, +\infty\}$ et dans le cas général, ou bien $E \cap \mathbb{R}$ est majorée et alors $\sup(E \cap \mathbb{R})$ existe dans $\mathbb{R}$, d'où $\sup(E)$ égal soit à $+\infty$, soit à $\sup(E \cap R)$, ou bien $E \cap R$ n'est pas majorée, et alors $\sup(E)$ est égal à $+\infty$, et de même pour la borne inférieure.

On essaie ensuite de prolonger à $\bar{\mathbb{R}}$ l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, en convenant que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (+\infty) + x = +\infty = x + (+\infty)\ ; \quad (-\infty) + x = -\infty = x + (-\infty)$$

$$(\forall x \in \mathrm{R}_+^*) \quad (+\infty) \times x = +\infty = x \times (+\infty)\ ; \quad (-\infty) \times x = -\infty = x \times (-\infty)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) \quad (+\infty) \times x = -\infty = x \times (+\infty)\ ; \quad (-\infty) \times x = +\infty = x \times (-\infty)$$

---

([1]) Pour une définition rigoureuse cf. Tome 1, § I.4 : *somme* (ou union disjointe) de deux ensembles.

et enfin :

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty\ ;\quad (-\infty)+(-\infty)=-\infty$$
$$(+\infty)\times(+\infty)=+\infty\ ;\quad (-\infty)\times(-\infty)=+\infty\ ;$$
$$(+\infty)\times(-\infty)=-\infty=(-\infty)\times(+\infty)\,.$$

Mais on ne peut définir sans incohérence $(-\infty)+(+\infty)$ ni $0\times(+\infty)$ ni $0\times(-\infty)$ et on aboutit donc à des lois de composition *non partout définies.* Cependant l'introduction de $\bar{\mathbb{R}}$ est utile, ne serait-ce que pour unifier beaucoup de raisonnements sur les limites qui, autrement, nécessiteraient la distinction fastidieuse entre de nombreux cas.

**Ouverts, fermés et voisinages dans $\bar{\mathbb{R}}$**

Grâce à la structure d'ordre total de $\bar{\mathbb{R}}$ il est facile de définir sur $\bar{\mathbb{R}}$ une **topologie.** Commençons par préciser que les *intervalles ouverts* de $\bar{\mathbb{R}}$ sont, outre les 5 types d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, ceux des trois types suivants : $\bar{\mathbb{R}}$, $[-\infty, a[$ pour $a\in\mathbb{R}$ et $]a, +\infty]$ pour $a\in\mathbb{R}$. On pose alors :

**DÉFINITION III.6.1**

*On appelle* ***partie ouverte*** *de $\bar{\mathbb{R}}$ toute réunion d'intervalles ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$, et* ***partie fermée*** *de $\bar{\mathbb{R}}$ toute partie $F$ de $\bar{\mathbb{R}}$ telle que $\bar{\mathbb{R}}\backslash F$ soit un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$. Si $a\in\bar{\mathbb{R}}$, on appelle* ***voisinage de a*** *dans $\bar{\mathbb{R}}$ toute partie $V$ de $\bar{\mathbb{R}}$ telle qu'il existe une partie ouverte $\omega$ de $\bar{\mathbb{R}}$ vérifiant $a\in\omega\subset V$.*

On vérifie alors sans difficulté que les intervalles de $\bar{\mathbb{R}}$ qui en sont des parties ouvertes sont bien ceux des 8 types annoncés ci-dessus et qu'ils méritent donc leur nom.

En cherchant les parties fermées de $\bar{\mathbb{R}}$ qui sont des intervalles, on trouve, outre $\bar{\mathbb{R}}$ et $\varnothing$, tous les intervalles $[a, b]$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a\leqslant b$, ainsi que les intervalles des types $[-\infty, a]$ et $[a, +\infty]$ avec $a\in\mathbb{R}$, soit en tout 5 types seulement. Enonçons quelques propriétés résultant de la définition III.6.1 :

- L'ensemble $\mathcal{O}_{\bar{\mathbb{R}}}$ des parties ouvertes de $\bar{\mathbb{R}}$ est stable par union quelconque et par intersection finie, et par *dualité* dans $\mathcal{P}(\bar{\mathbb{R}})$, l'ensemble $\mathcal{F}_{\bar{\mathbb{R}}}$ des parties fermées de $\bar{\mathbb{R}}$ est stable par intersection quelconque et par union finie.

- Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les *traces* sur $\mathbb{R}$ des ouverts de $\bar{\mathbb{R}}$, *i.e.* les ensembles $\omega\cap\mathbb{R}$, où $\omega$ est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$. Par dualité les fermés de $\mathbb{R}$ sont les *traces* sur $\mathbb{R}$ des fermés de $\bar{\mathbb{R}}$.

• Si $a \in \mathbb{R}$, une partie $V$ de $\bar{\mathbb{R}}$ est un voisinage de $a$ ssi elle contient un ensemble du type $]a - \alpha, a + \alpha[$ avec $\alpha$ réel $> 0$, autrement dit ssi $V \cap \mathbb{R}$ est voisinage de $a$ dans $\mathbb{R}$.

• Une partie $V$ de $\bar{\mathbb{R}}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi elle contient au moins un intervalle du type $[A, +\infty]$ avec $A \in \mathbb{R}$ (resp. $[-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$).

• Les voisinages des divers points de $\bar{\mathbb{R}}$ satisfont aux propriétés (I) à (IV) du théorème III.2.4 ainsi qu'à la propriété de *séparation :* si $x$ et $y$ sont deux éléments distincts dans $\bar{\mathbb{R}}$, on peut trouver $V$ et $W$, voisinages respectifs de $x$ et $y$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tels que $V \cap W = \varnothing$.

On peut définir dans $\bar{\mathbb{R}}$ les notions de *point adhérent* à une partie, de *point intérieur,* de *point frontière,* de *point d'accumulation,* par exemple :

**Définition III.6.2**

*Soit $E$ une partie de $\bar{\mathbb{R}}$. Un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ est dit* **adhérent à $E$ dans $\bar{\mathbb{R}}$** *ssi, pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, on a $V \cap E \neq \varnothing$. L'ensemble des points adhérents à $E$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ s'appelle adhérence de $E$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et se note* $\mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E)$.

On obtient alors immédiatement :

• Si $E \subset \bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R} \cap \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E) =$ adhérence de $E \cap \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• Une partie fermée de $\bar{\mathbb{R}}$ se reconnaît à la C.N.S. : $E = \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E)$. De manière générale, pour toute partie $E$ de $\bar{\mathbb{R}}$, $\mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E)$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$.

• Soit $E$ une partie de $\bar{\mathbb{R}}$ qui rencontre $\mathbb{R}$. On a $+\infty \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E)$ ssi $\mathbb{R} \cap E$ est *non majorée dans* $\mathbb{R}$ ; $-\infty \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(E)$ ssi $\mathbb{R} \cap E$ est *non minorée dans* $\mathbb{R}$.

**Proposition III.6.1**

*Une partie non vide $E$ de $\bar{\mathbb{R}}$* **fermée dans $\bar{\mathbb{R}}$** *admet un plus grand et un plus petit élément dans $\bar{\mathbb{R}}$.*

*Démonstration :*

Si $+\infty \in E$, c'est évidemment le plus grand élément de $E$. Sinon ou bien $E = \{-\infty\}$ et la proposition est évidente, ou bien $\mathbb{R} \cap E \neq \varnothing$. C'est alors un fermé de $\mathbb{R}$, non vide, et majoré dans $\mathbb{R}$ qui admet dans $\mathbb{R}$ un plus grand élément (c'est l'exemple 4 du § III.3). Si on le note $M$, c'est aussi le plus grand élément de $E$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. La démonstration est analogue pour l'existence du plus petit élément. ■

**Suites de réels dans $\bar{\mathbb{R}}$**

**DÉFINITION III.6.3**

*Soit $(x_n)$ une suite à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que $(x_n)$* **converge vers** *$l$* **dans $\bar{\mathbb{R}}$** *ssi, pour tout voisinage $V$ de $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ dès que $n \geq N$.*

Une suite de $\bar{\mathbb{R}}$ qui n'a pas de limite est dite **divergente.** Quand une suite de $\bar{\mathbb{R}}$ converge, grâce à la propriété de séparation on voit qu'elle a **au plus une limite** et l'on écrit alors $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ mais on peut attribuer à $l$ un symbole fonctionnel et écrire aussi :

$$l = \lim_{n \to \infty} (x_n).$$

L'avantage de l'introduction de $\bar{\mathbb{R}}$ va se manifester maintenant en permettant de rapprocher des notions relatives à des **suites de réels.**

**PROPOSITION III.6.2**

*Soit $(x_n)$ une suite de réels. Pour qu'elle converge dans $\bar{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit qu'on soit dans l'un des trois cas suivants incompatibles entre eux :*

1) *elle converge dans $\mathbb{R}$ (et alors ses limites dans $\mathbb{R}$ et dans $\bar{\mathbb{R}}$ sont les mêmes)*
2) *elle tend vers $+\infty$ au sens du Chapitre II (et alors sa limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ est $+\infty$)*
3) *elle tend vers $-\infty$ au sens du Chapitre II (et alors sa limite dans $\bar{\mathbb{R}}$ est $-\infty$).*

*Démonstration* (abrégée) :

Dans le cas où $l \in \mathbb{R}$, les deux assertions $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ *dans* $\mathbb{R}$ et $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ *dans* $\bar{\mathbb{R}}$ expriment toutes deux que, pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, on a $|x_n - l| < \varepsilon$ dès que $n > N_\varepsilon$ et sont donc équivalentes. Pour $l = +\infty$, dire que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ signifie que, pour tout réel $A$, il existe $N$ tel que $x_n \in [A, +\infty]$ dès que $n \geq N$, mais comme $x_n \in \mathbb{R}$, cela signifie que $x_n \geq A$ pour $n \geq N$, ce qui est la définition de $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ dans $\mathbb{R}$. De même pour $l = -\infty$. ∎

Cette proposition montre que, quand on étudie une suite de réels $(x_n)$, quand on écrit $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$, où $l$ est un élément de $\bar{\mathbb{R}}$, on préoccuper de savoir si on raisonne dans $\mathbb{R}$ ou dans $\bar{\mathbb{R}}$. Elle établit aussi une distinction entre deux modes de divergence (dans $\mathbb{R}$) des suites réelles.

**Valeurs d'adhérence d'une suite de réels**

**Définition III.6.4**

*Soit $(x_n)$ une suite dans $\bar{\mathbb{R}}$. Un élément $l \in \bar{\mathbb{R}}$ est appelé une* ***valeur d'adhérence*** *de $(x_n)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout voisinage $V$ de $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, il existe au moins un $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant N$ tel que $x_p \in V$.*

Il est facile de décrire les valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ d'une suite de réels en utilisant les propriétés des voisinages d'un point de $\bar{\mathbb{R}}$ :

• Si $l \in \mathbb{R}$, $l$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$ de réels *dans* $\bar{\mathbb{R}}$ ssi $l$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ *dans* $\mathbb{R}$.

• Si $l = +\infty$, $l$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi la suite $(x_n)$ est non majorée dans $\mathbb{R}$, ce qui équivaut au fait qu'on puisse extraire de $(x_n)$ une suite tendant vers $+\infty$ au sens du chapitre II.

• Si $l = -\infty$, $l$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ ssi $(x_n)$ est non minorée dans $\mathbb{R}$, *i.e.* ssi on peut en extraire une suite tendant vers $-\infty$.

En résumé :

**Proposition III.6.3**

*Un élément $l \in \bar{\mathbb{R}}$ est valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ d'une suite $(x_n)$ de réels ssi on peut extraire de $(x_n)$ une suite $(x_{N_k})$ telle que $x_{N_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} l$.*

Considérons une suite $(u_n)$ de réels. En raisonnant comme pour le théorème III.3.8, et en posant $U_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$ pour tout $n$, on voit que l'ensemble $\mathscr{A}_{\bar{\mathbb{R}}}$ des valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ de la suite $(u_n)$ est $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(U_n)$. En particulier, c'est un *ensemble fermé dans* $\bar{\mathbb{R}}$. D'ailleurs, compte tenu de la proposition III.6.3, on a : $\mathscr{A}_{\bar{\mathbb{R}}} \cap \mathbb{R} = \mathscr{A}$ = ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ dans $\mathbb{R}$. Mais s'il arrive qu'une suite réelle n'ait aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ (par exemple $(u_n)$ définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), cela est impossible dans $\bar{\mathbb{R}}$, car :

**Théorème III.6.1**

*L'ensemble $\mathscr{A}_{\bar{\mathbb{R}}}$ des valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ d'une suite $(u_n)$ de réels est non vide.*

*Démonstration :*

Si $(u_n)$ est bornée, cela résulte de l'étude précédente et du théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème II.3.8). Si $(u_n)$ est non bornée, on peut en extraire une suite tendant vers $+\infty$, ou une suite tendant vers $-\infty$, et on applique la proposition III.6.3. ■

### Limite supérieure et limite inférieure d'une suite de réels

Considérons une suite $(u_n)$ de réels. Nous venons de voir que l'ensemble $\mathscr{A}_{\bar{\mathbb{R}}}$ est non vide, et fermé dans $\bar{\mathbb{R}}$. Il admet donc (proposition III.6.1) un plus grand et un plus petit élément dans $\bar{\mathbb{R}}$.

**DÉFINITION III.6.5**

*On appelle **limite supérieure** (resp. **limite inférieure**) d'une suite $(u_n)$ de réels, et on note $\limsup\limits_{n \to \infty} (u_n)$ (resp. $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n)$, la plus grande) (resp. la plus petite) valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ de $(u_n)$.*

On a : $\limsup\limits_{n \to \infty} (u_n) < +\infty$ ssi la suite $(u_n)$ est majorée dans $\mathbb{R}$. De même $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) > -\infty$ ssi $(u_n)$ est minorée dans $\mathbb{R}$. Dire que $(u_n)$ est *bornée* revient donc à dire que $\limsup\limits_{n \to \infty} (u_n)$ et $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n)$ sont dans $\mathbb{R}$. Bien entendu $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} (u_n)$. Peut-il y avoir égalité ?

**THÉORÈME III.6.2**

*Pour qu'une suite $(u_n)$ de réels converge dans $\bar{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) = \limsup\limits_{n \to \infty} (u_n)$. Si c'est le cas, $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) = \limsup\limits_{n \to \infty} (u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (u_n)$.*

*Démonstration :*

Si la suite $(u_n)$ converge dans $\bar{\mathbb{R}}$, on sait que sa limite est sa seule valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ car toutes les suites extraites de $(u_n)$ convergent vers la même limite, donc $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) = \limsup\limits_{n \to \infty} (u_n) = \lim (u_n)$. Réciproquement, si $\liminf\limits_{n \to \infty} (u_n) = \limsup\limits_{n \to \infty} (u_n) = l \in \bar{\mathbb{R}}$, montrons que $(u_n)$ converge vers $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Le seul cas que nous examinerons est celui où $l < +\infty$ (par symétrie on aurait l'étude du cas $l > -\infty$ qui s'applique en particulier à la valeur manquante $l = +\infty$). Soit un réel $A > l$. Il n'existe aucune suite extraite de $(u_n)$ à valeurs dans $[A, +\infty[$ car une telle suite aurait au moins une valeur d'adhérence dans $[A, +\infty]$, et ce serait une valeur d'adhérence de $(u_n)$, ce qui contredirait l'hypothèse $\limsup\limits_{n \to \infty} (u_n) = l$. Donc on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant A$ pour $n \geqslant N$. Si $l = -\infty$, il en résulte que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l$. Si $l \in \mathbb{R}$, soit $B <$ '

l'hypothèse $\liminf_{n \to \infty} (u_n) = l$ pour trouver $N' \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant B$ pour $n \geqslant N'$, ce qui prouve que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$ (on prend $n \geqslant \text{Max}\,(N, N')$). ■

**THÉORÈME III.6.3**

*Soit* $(u_n)$ *une suite réelle. La suite* $(v_n) = \sup_{p \geqslant n} (u_p)$ *converge dans* $\bar{\mathbb{R}}$, *et on a :*

$$\lim_{n \to \infty} (v_n) = \limsup_{n \to \infty} (u_n)\,.$$

*De même, la suite* $\left(\inf_{p \geqslant n} (u_p)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *et sa limite est* $\liminf_{n \to \infty} (u_n)$.

*Démonstration :*

Bornons-nous à prouver la première partie du théorème. Si $(u_n)$ n'est pas majorée, on a $v_n = +\infty$ pour tout $n$, et $\limsup_{n \to \infty} (u_n) = +\infty$ et dans ce cas l'assertion est démontrée. Il reste à considérer le cas où $v_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n$. Comme $\{u_p\}_{p \geqslant n+1} \subset \{u_p\}_{p \geqslant n}$ pour tout $n$, on a $v_{n+1} \leqslant v_n$ pour tout $n$, ce qui signifie que la suite $(v_n)$ est décroissante dans $\mathbb{R}$, ce qui laisse deux possibilités selon que cette suite est — ou non — minorée dans $\mathbb{R}$.

Si $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$, *a fortiori* $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$, puisque $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n$, et dans ce cas $\limsup_{n \to \infty} (u_n) = -\infty = \lim_{n \to \infty} (v_n)$.

Si $v_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors, comme $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n$, $(u_n)$ ne peut admettre de valeur d'adhérence $> l$. Mais $l$ est valeur d'adhérence de $(u_n)$ car, si un réel $\varepsilon > 0$ est donné et si $N \in \mathbb{N}$ est donné, il existe d'abord un entier $n_1 \geqslant N$ tel que $l \leqslant v_{n_1} \leqslant l + \varepsilon$, puis un entier $p \geqslant n_1$ tel que $v_{n_1} - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant v_{n_1}$, d'où l'existence de $p \geqslant N$ tel que $l - \varepsilon \leqslant u_p \leqslant l + \varepsilon$. Donc $l = \limsup_{n \to \infty} (u_n)$. ■

Le théorème III.6.3 permet, dans bien des cas, de ramener des problèmes sur les lim sup et lim inf de suites à des problèmes plus simples de limites. Voici par exemple quelques propriétés élémentaires.

- Si les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont *bornées,* on a :

$$\limsup_{n \to \infty} (u_n) + \liminf_{n \to \infty} (v_n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} (u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} (u_n) + \limsup_{n \to \infty} (v_n)\,,$$

et si de plus la suite $(v_n)$ converge on a :

$$\limsup_{n \to \infty} (u_n + v_n) = \limsup_{n \to \infty} (u_n) + \lim_{n \to \infty} (v_n)\,.$$

- Si les suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont *bornées* et *positives,* on a :

$$\limsup_{n \to \infty} (u_n) + \liminf_{n \to \infty} (v_n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} (u_n\, v_n) \leqslant \limsup_{n \to \infty} (u_n) + \lim$$

et si de plus la suite $(v_n)$ converge, on a :

$$\limsup_{n \to \infty} (u_n v_n) = \limsup_{n \to \infty} (u_n) \lim_{n \to \infty} (v_n) .$$

- Si $u_n > 0$ pour tout $n$, et en convenant *ici* que $\frac{1}{0} = +\infty$, on a :

$$\limsup_{n \to \infty} \left( \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{\liminf_{n \to \infty} (u_n)}, \quad \text{même si le dénominateur est nul.}$$

*Démonstration :*

Bornons-nous à la première assertion, laissant les autres au lecteur à titre d'exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{p \geq n} (u_p) + \inf_{p \geq n} (v_p) \leq \sup_{p \geq n} (u_p + v_p) \leq \sup_{p \geq n} (u_p) + \sup_{p \geq n} (v_p) ,$$

d'où en prenant les limites quand $n \longrightarrow \infty$ et en tenant compte du théorème III.6.3

$$\lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{p \geq n} (u_p) + \inf_{p \geq n} (v_p) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{p \geq n} (u_p) \right] + \lim_{n \to \infty} \left[ \inf_{p \geq n} (v_p) \right] =$$

$$= \limsup_{n \to \infty} (u_n) + \liminf_{n \to \infty} (v_n) \leq \lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{p \geq n} (u_p + v_p) \right] = \limsup_{n \to \infty} (u_n + v_n)$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{p \geq n} (u_p) \right] + \lim_{n \to \infty} \left[ \sup_{p \geq n} (v_p) \right] = \limsup_{n \to \infty} (u_n) + \limsup_{n \to \infty} (v_n) .$$

Quant au cas d'égalité, on l'étudie en utilisant le théorème III.6.2. ■

Voici pour terminer une dernière propriété caractérisant la limite supérieure d'une suite réelle. Le lecteur établira aisément l'énoncé relatif à la limite inférieure.

**THÉORÈME III.6.4**

*Soit $(u_n)$ une suite réelle.*

(I) *Pour que $L \in \mathbb{R}$ soit égal à* $\limsup_{n \to \infty} (u_n)$, *il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > L + \varepsilon\}$ soit fini et que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq L - \varepsilon\}$ soit infini.*

(II) $+\infty = \limsup_{n \to \infty} (u_n)$ *ssi $(u_n)$ est non majorée.*

(III) $-\infty = \limsup_{n \to \infty} (u_n)$ *ssi* $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$.

*Démonstration :*

On a déjà établi (II) et (III) (après la définition III.6.5 et dans la démonstration du théorème III.6.3.

Pour prouver (I) montrons d'abord que la condition énoncée est nécessaire. Soit $L = \limsup_{n \to \infty} (u_n)$ un réel et soit $\varepsilon$ un réel $> 0$. Puisque $L$ est valeur d'adhérence de $(u_n)$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq L - \varepsilon\}$ est infini. Mais $(u_n)$ n'admet extraite à valeurs dans $[L+\varepsilon, +\infty[$ car une telle suite admettrait une valeur d'adhérence dans $[L+\varepsilon, +\infty]$ et ce serait une valeur d'adhérence de $(u_n)$ contrairement à la définition de $L = \limsup_{n\to\infty} (u_n)$. Donc l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq L + \varepsilon\}$ est fini.

Réciproquement la condition énoncée entraîne que $\limsup_{n\to\infty} (u_n)$ est au moins égale à $L - \varepsilon$ et au plus égale à $L + \varepsilon$, et cela pour tout $\varepsilon$. C'est donc $L$. ■

***Exercice 1 :*** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite *bornée* de réels. On pose $v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$ pour $n \geq 1$.

Montrer :
$$\liminf_{n\to\infty} (u_n) \leq \liminf_{n\to\infty} (v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (v_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (u_n)\,.$$

***Exercice 2 :*** Démontrer les assertions concernant $\limsup_{n\to\infty} (u_n v_n)$ et $\limsup_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ situées après le théorème III.6.3.

***Exercice 3 :*** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et *croissante*. On donne une suite $(u_n)$ de réels telle que $\liminf_{n\to\infty} (u_n) = \alpha \in I$ et $\limsup_{n\to\infty} (u_n) = \beta \in I$. Montrer que
$$f(\alpha) = \liminf_{n\to\infty} f(u_n) \quad \text{et} \quad f(\beta) = \limsup_{n\to\infty} f(u_n)\,.$$

***Exercice 4 :*** Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle, et $\alpha$ un réel $> 0$. On pose
$$\mu_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n) \quad \text{et} \quad t_n = \alpha s_n + (1-\alpha)\,\mu_n \quad (n \geq 0)\,.$$
On se propose de prouver que si $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*a*) Vérifier d'abord que si $s_n \leq \mu_n$, alors $\mu_{n-1} \geq \mu_n$ ; et si $s_n \geq \mu_n$, alors $\mu_{n-1} \leq \mu_n$.

*b*) Prouver : $\limsup_{n\to\infty} (\mu_n) \in \mathbb{R}$ (si par exemple on avait $\limsup_{n\to\infty} (\mu_n) = +\infty$, on aurait $(\forall A \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}^*)\ (\mu_p > A) \Rightarrow (\exists n < p \mid t_n > A)$).

*c*) Prouver : $\limsup_{n\to\infty} (\mu_n) = \liminf_{n\to\infty} (\mu_n)$ et conclure.

***Exercice 5 :*** Calculer $\liminf_{n\to\infty} (u_n)$ et $\limsup_{n\to\infty} (u_n)$ pour chacune des suites ci-après :

*a*) $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n \quad (n \geq 1)$.

*b*) $u_n = (2+\sqrt{3})^n - \text{Ent}\,(2+\sqrt{3})^n$.

*c*) $u_n = \left(1 + \dfrac{n\theta - \text{Ent}\,(n\theta)}{n}\right)^n$ ($n \geq 1$, $\theta$ étant un réel donné dans $]0,1[$).

*d*) $u_n = \dfrac{1}{2} + (-1)^n \dfrac{n^2}{n^2+4}$.

***Exercice 6 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute suite $(u_n)$ de réels, on ait : $f\left(\limsup_{n\to\infty} (u_n)\right) = \limsup_{n\to\infty} f(u_n)$. Etudier $f$.

# *Chapitre IV*

# *FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE*

## § IV.1 *LIMITES*

Les fonctions que nous considérons ici sont du type $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour éviter des longueurs inutiles il est commode de regarder $\mathbb{R}$ comme étant plongé dans *la droite numérique achevée* $\bar{\mathbb{R}}$. Rappelons qu'au § III.6 nous avons défini la notion de voisinage d'un point de $\bar{\mathbb{R}}$, les notions de partie ouverte ou fermée de $\bar{\mathbb{R}}$, d'adhérence d'une partie, etc. Cela nous permet d'exprimer la notion de *limite* sous une forme très générale.

**DÉFINITION IV.1.1**

*Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point* adhérent *à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Un élément $l \in \bar{\mathbb{R}}$ est dit* **limite en a** *d'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi, pour tout voisinage $W$ de $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.*

***Remarque 1 :*** En imposant la condition « $a$ est un point adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ » on est assuré que, pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $V \cap A$ est *non vide.*

***Remarque 2 :*** Dans le cas particulier où $a$ est élément de $A \subset \mathbb{R}$, la fonction $f$ est définie au point $a$. La définition IV.1.1 montre que *si $f$ est continue en $a$,* $f(a)$ est limite en $a$ de $f$.

**PROPOSITION IV.1.1**

*Avec les notations de la définition IV.1.1, une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admet* au plus une *limite en $a$.*

*Démonstration :*

Soit $l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ et $l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$, tous deux supposés limites en $a$ de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Si l'on avait $l_1 \neq l_2$, on pourrait choisir $W_1$ et $W$

respectifs de $l_1$ et $l_2$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tels que $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ (propriété de séparation). Pour un tel choix, et pour chaque $i \in \{1, 2\}$, soit $V_i$ un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(V_i) \subset W_i$. En posant $V = V_1 \cap V_2$, on voit que $V$ est un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(V \cap A) \subset W_1 \cap W_2 = \varnothing$ , ce qui est absurde puisque $V \cap A \neq \varnothing$ . Donc $l_1 = l_2$. ■

Lorsque $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite en $a$, la proposition IV.1.1 permet d'utiliser un *symbole fonctionnel* pour noter cette limite, par exemple $\lim\limits_a f$. On préfère écrire $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$, et si cette limite existe et vaut $l$, on écrit aussi $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$.

***Remarque 3 :*** Si l'on prend $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$ ( $+\infty$ est bien adhérent à $\mathbb{N}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, c'est même le seul point d'accumulation de $\mathbb{N}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$), on retrouve comme cas particulier de limite de fonction la notion déjà étudiée au § II.1 de *limite d'une suite réelle.* Nous retrouverons ainsi certaines propriétés déjà rencontrées, mais replacées dans un cadre plus général.

**La traduction concrète de la notion de limite**

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, admettant en $a$ (adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$) une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Selon que $a = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ et que $l = -\infty$, $l \in \mathbb{R}$ ou $l = +\infty$, on obtient, en *notation quantifiée abrégée,* 9 traductions distinctes de la relation $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$. Contentons-nous d'en expliciter 4, laissant le soin au lecteur d'écrire les 5 autres qui s'en déduisent de manière évidente :

(I) Si $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, dire que $l$ est limite en $a$ de la fonction $f$ signifie que, pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $(x \in \bar{A}$ et $|x - a| \leqslant \alpha) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon)$, ce qui s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \text{ et } |x - a| \leqslant \alpha) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon) .$$

(II) De même, si $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$, $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$ se traduit par :

$$\forall M > 0 \quad \exists \alpha > 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \quad \text{et} \quad |x - a| \leqslant \alpha) \Rightarrow (f(x) \geqslant M) .$$

(III) Si $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} l$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \quad \text{et} \quad x \geqslant M) \Rightarrow (|f(x) - l| \leqslant \varepsilon) .$$

(IV) Si $a = +\infty$ et $l = +\infty$, $f(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ s'exprime par :

$$\forall C > 0 \quad \exists M > 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R})(x \in A \quad \text{et} \quad x \geqslant M) \Rightarrow (f(x) \geqslant C) .$$

***Exemple 1 :*** Reprenons le cas d'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in A$. Nous savons maintenant que $f(a)$ est **la** limite en $a$ de $f$. Réciproquement soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ et supposons que la limite $l$ de $f$ en $a$ existe, alors cette limite $l$ *ne peut être que* $f(a)$ car tout voisinage $V$ de $a$ contient $a$, et d'après la traduction (I) de $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, on voit que $|f(a) - l| \leqslant \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, d'où $l = f(a)$. En résumé, **la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in A$ ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ce qui équivaut à $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$.**

***Exemple 2 :*** Soit $\text{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction « signe de $x$ » définie par : $0 \mapsto 0$, $x \mapsto -1$ si $x < 0$, $x \mapsto +1$ si $x > 0$. Pour tout réel $\alpha > 0$, on a : $\text{sgn}(\alpha) - \text{sgn}(-\alpha) = 2$, $\text{sgn}(\alpha) > 0$ et $\text{sgn}(-\alpha) < 0$, d'où il résulte que sgn n'admet en 0 aucune limite, ni finie ni infinie.

**Utilisation de suites**

Il est possible de caractériser l'existence — ou la non-existence — d'une limite en $a$ pour une fonction $f$ par le simple examen des suites $f(u_n)$, où $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ ($n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$). De façon précise :

**Théorème IV.1.1**

*Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide $A$ de $\mathbb{R}$, et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Pour que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $A$ qui converge vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente dans $\bar{\mathbb{R}}$.*

*Démonstration :*

La condition est *nécessaire :* supposons que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ ($l \in \bar{\mathbb{R}}$) et soit $(u_n)$ une suite de points de $A$ convergente vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Au voisinage $W$ de $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ correspond un voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(V \cap A) \subset W$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geqslant N) \Rightarrow (u_n \in V)$. Dès que $n \geqslant N$ on a donc $f(u_n) \in W$, autrement dit $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

*Réciproquement,* supposons la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans $\bar{\mathbb{R}}$ pour *toute* suite $(u_n)$ de points de $A$ qui converge vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Il est d'abord clair que la limite d'une telle suite $(f(u_n))$ ne dépend pas du choix de $(u_n)$ : en effet si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$, en posant $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$ pour tout $n$, on obtient une suite $(w_n)$

vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ ; si $\lambda = \lim\limits_{n \to \infty} f(w_n)$, les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$, toutes deux extraites de $(f(w_n))$ convergent vers $\lambda$, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(v_n)$. Désignons par $l$ la valeur commune des $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n)$ pour toutes ces suites $(u_n)$ et prouvons par l'absurde que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. Pour cela, posons, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$,

$$V_k = A \cap \left[a - \frac{1}{k}, \quad a + \frac{1}{k}\right] \quad \text{si } a \in \mathbb{R} \,,$$

$$V_k = A \cap [k, +\infty] \quad \text{si } a = +\infty \,,$$

$$V_k = A \cap [-\infty, -k] \quad \text{si } a = -\infty \,.$$

Supposons que $l$ ne soit pas limite en $a$ de $f$ : il existerait alors un voisinage $W$ de $l$ tel que $f(V_k \cap A) \not\subset W$ pour tout $k$. Avec ce $W$, soit $u_k \in V_k \cap A$ tel que $f(u_k) \in W$ $(k \in \mathbb{N})$. Alors d'une part $u_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a$ et d'autre part $f(u_k) \underset{k \to \infty}{\not\longrightarrow} l$, ce qui contredit la définition de $l$. Donc $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. ■

***Remarque 4 :*** Dans un but de simplification nous avons défini les limites dans $\bar{\mathbb{R}}$. Mais en pratique on distingue les limites finies et infinies. Par exemple, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et est *finie,* alors *$f$ est bornée au voisinage de $a$,* c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f|_{V \cap A}$ soit *bornée,* ce qui n'est pas sans importance.

**Opérations algébriques sur les limites**

Résumons dans un tableau le comportement des limites de fonctions relativement à l'addition, le produit par un scalaire réel, la multiplication, le passage à l'inverse. Dans ce tableau, $f$ et $g$ désignent deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur la même partie $A$ non vide de $\mathbb{R}$, que l'on étudie au voisinage d'un point $a \in \bar{\mathbb{R}}$ adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} g(x)$) existe, on la notera $l$ (resp. $l'$). Alors :

| Fonction | Hypothèses sur $f$ et $g$ | Conclusion |
|---|---|---|
| $f+g$ | $l$ et $l'$ existent, $l \in \mathbb{R}$, $l' \in \mathbb{R}$ | $f(x)+g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l+l'$ |
| $f+g$ | $f$ minorée au voisinage de $a$, $l'$ existe et vaut $+\infty$ | $f(x)+g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ |
| $f+g$ | $f$ majorée au voisinage de $a$, $l'$ existe et vaut $-\infty$ | $f(x)+g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ |
| $\lambda f$ | $\lambda \in \mathbb{R}$, $f$ a une limite finie $l$ | $(\lambda f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda l$ |
| $fg$ | $l$ et $l'$ existent, $l \in \mathbb{R}$, $l' \in \mathbb{R}$ | $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} ll'$ |
| $fg$ | $f$ minorée par $\alpha > 0$ au v. de $a$, $l' = +\infty$ (resp. $-\infty$) | $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$) |
| $fg$ | $f$ majorée par $\beta < 0$ au v. de $a$, $l' = +\infty$ (resp. $-\infty$) | $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ (resp. $+\infty$) |
| $\dfrac{1}{f}$ | $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, $l$ existe, $l \neq 0$ | $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l}$ (1) |
| $\dfrac{1}{f}$ | $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$), $l = 0$ | $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $-\infty$) |

A titre d'exemple, démontrons deux des assertions relatives au produit de deux fonctions, celles des lignes 5 et 6 du tableau. Faisons l'hypothèse : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ $(l \in \mathbb{R})$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l'$ $(l' \in \mathbb{R})$.

Pour prouver que $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} ll'$, on écrit $f(x)g(x) - ll'$ sous la forme $\Delta = (f(x) - l)\,g(x) + l\,(g(x) - l')$. Or, d'après les hypothèses, $f$ et $g$ sont bornées au voisinage de $a$, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $V_1$ de $a$ et un réel $M > 0$ tels que $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M$ pour $x \in V_1 \cap A$. De plus, $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe un voisinage $V_2$ de $A$ tel que $|f(x) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$ et $|g(x) - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$ pour $x \in V_2 \cap A$. Au total, en prenant $V = V_1 \cap V_2$, il est clair que, pour $x \in V \cap A$, on a : $|\Delta| \leq \varepsilon$.

Faisons maintenant l'hypothèse que $f$ est minorée par $\alpha > 0$ au voisinage $V'$ de $A$ (on notera que rien n'est dit sur la limite éventuelle de $f$ en $a$ dont l'existence n'est pas exigée) et que $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. Soit $M$ arbitraire dans $\mathbb{R}_+^*$. Il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $g(x) \geq \dfrac{M}{\alpha}$ pour $x \in V \cap A$. Pour

(1) Nous avons convenu que $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

$x \in V' \cap V \cap A$ on a donc $f(x)g(x) \geq M$, et par conséquent $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. ■

***Remarque 4 :*** On déduit en particulier du tableau précédent que l'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ($a$ adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$) *une limite finie* est une **sous-$\mathbb{R}$-algèbre** de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.

***Remarque 5 :*** Le lecteur s'est sûrement aperçu de l'absence dans le tableau de certains cas qui peuvent néanmoins se présenter et sur lesquels nous serons amenés à revenir (formes « indéterminées » $\infty - \infty$, $0 \times \infty$). C'est qu'il n'existe dans ces cas-là aucune règle générale permettant de conclure. Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f(x) = x$, $g_1(x) = -x + 1$ et $g_2(x) = -x + \operatorname{Log} x$. Alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g_1(x)$ (resp. $g_2(x)$) $\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, mais $f(x) + g_1(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ tandis que $f(x) + g_2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Composition des limites**

**Théorème IV.1.2**

*Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a$ un point adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, et $l \in \bar{\mathbb{R}}$.*

(I) *Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, alors $b$ est adhérent à $B$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.*

(II) *Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} l$ (cette dernière relation ayant un sens d'après* (I)*), alors $(g \circ f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.*

*Démonstration :*

Soit d'abord $V$ un voisinage de $b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $U$ un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(U \cap A) \subset V$. Alors $f(U \cap A) \subset V \cap B$ et $f(U \cap A) \neq \varnothing$, d'où *a fortiori* $V \cap B \neq \varnothing$, ce qui prouve bien que $b$ est adhérent à $B$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Soit ensuite $W$ un voisinage de $l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. On choisit d'abord un voisinage $V$ de $b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $g(V \cap B) \subset W$, puis un voisinage $U$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(U \cap A) \subset V$. On a alors : $f(U \cap A) \subset V \cap B$, d'où $g[f(U \cap A)] \subset g(V \cap B) \subset W$. Donc $g[f(x)] \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. ■

***Exemple 3 :*** Nous savons déjà que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto |y|$ est continue. Soit alors $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant une limite $b \in \bar{\mathbb{R}}$

adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Le théorème IV.1.2 permet d'affirmer que : si $b \in \mathbb{R}$, alors $|f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} |b|$ et si $b \in \{-\infty, +\infty\}$, alors $|f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

**Cas particulier : restriction**

Supposons $A \subset B$. Si $a$ est adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, il est évidemment adhérent à $B$. Prenons pour $f$ *l'injection canonique* $j : A \longrightarrow B$. Alors, $g \circ j$ n'est autre que $g|_A$ et le théorème IV.1.2 donne :

**COROLLAIRE**

*Soit $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Si une fonction $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en $a$ une limite $l$, alors $g|_A(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.*

Il est bien entendu possible que $g|_A$ admette en $a$ une limite, même si $g$ n'en possède pas. Si par exemple $A = ]0, +\infty[$ et si $g$ est la fonction « signe de $x$ », il est clair qu'au point $a = 0$, la restriction de $g$ à $A$ admet pour limite $+1$. Au lieu d'écrire $\lim\limits_{x \to a} (g|_A)(x) = \lambda$, il est commode de noter $\lambda = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g(x)$ ou encore $g(x) \underset{x \to a, x \in A}{\longrightarrow} \lambda$, mais en gardant présent à l'esprit le fait que cette écriture n'entraîne nullement l'existence d'une limite en $a$ pour la fonction $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Considérons par exemple la fonction $\mathscr{D} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \mapsto 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Il est clair que $\mathscr{D}(x) \underset{x \to 0, x \in \mathbb{Q}}{\longrightarrow} 1$ mais que $\mathscr{D}$ n'a aucune limite en 0.

De manière encore plus particulière soit $a$ un *point d'accumulation* de $B$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et prenons $A = B \setminus \{a\} \subset B$. On est alors assuré que $a$ est un point *adhérent* à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, ce qui permet de définir la notion de limite en $a$ pour une fonction : $A \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, si $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, et si $\lim\limits_{x \to a, x \in B \setminus \{a\}} g(x)$ existe, on note cette limite $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} g(x)$, et si elle vaut $l$, on écrit $g(x) \underset{x \to a, x \neq a}{\longrightarrow} l$.

De même, si $a$ est adhérent à $B \cap ]a, +\infty[$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a \in \mathbb{R}$ (ce qui revient à dire que $a \in \mathbb{R}$ et que $a$ est *point d'accumulation* de $B \cap ]a, +\infty[$), alors si $\lim\limits_{x \to a, x \in B \cap ]a, +\infty[} g(x)$ existe et vaut $l$, on écrit $g(x) \underset{x \to a, x > a}{\longrightarrow} l$ ou $\lim\limits_{x \to a, x > a} g(x) = l$ abrégé parfois en $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} g(x) = l$. On dit alors que $l$ est *limite à droite* au sens strict de $g$ en $a$ et cette limite se note aussi $g(a+0)$ ou $g(a^+)$. On définit de manière analogue l

$\lim\limits_{x \to a,\, x<a} g(x) = g(a-0)$, l'écriture $g(x) \underset{x \to a,\, x<a}{\longrightarrow} l'$ dans le cas où $a$ est point d'accumulation de $B \cap \,]-\infty, a[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $l'$ s'appelle *limite à gauche* (au sens strict) de $g$ en $a$. On définirait de même les écritures (d'usage beaucoup moins courant) $\lim\limits_{x \to a,\, x \leqslant a} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a,\, x \geqslant a} g(x)$.

**Passage d'inégalités larges à la limite**

Le théorème IV.1.2 montre que si $A$ et $B$ sont deux parties de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $A$ dans $B$, toute limite de $f$ appartient à l'adhérence $\mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}\, B$ de $B$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. En particulier, **si $B$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$, toute limite d'une fonction $f : A \longrightarrow B$ appartient à $B$.**

Soit par exemple $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ prenant ses valeurs dans $[\alpha, +\infty[$. Alors, toute limite de $f$ est $\geqslant \alpha$, d'où résulte :

**Théorème IV.1.3**

> *Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}\, A$, et deux fonctions $f$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in A$.*
> *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}$, on a*
> $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$ (passage des inégalités larges à la limite).

*Démonstration :*

On considère la fonction $f - g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ il n'y a rien à prouver. Dans le dernier cas restant, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l' \in \mathbb{R}$ et $(f-g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l - l' \geqslant 0$ d'après ce qui précède. ■

Ce théorème très simple est d'un usage constant, mais on prendra bien garde que l'inégalité stricte $(\forall x)\ f(x) > g(x)$ donne seulement par passage à la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$, l'égalité des limites étant tout à fait possible.

**Application à la continuité**

**Proposition IV.1.2**

> *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in A$ est un* **point d'accumulation** *de $A$. Alors $f$ est* **continue** *en $a$ ssi $f(x) \underset{x \to a,\, x \neq a}{\longrightarrow} f(a)$.*

*Démonstration :*

Le corollaire du théorème IV.1.2 montre que la condition est nécessaire. Réciproquement, supposons $f(x) \underset{x \to a,\, x \neq a}{\longrightarrow} f(a)$. Si $a$ réel

$> 0$ est donné, et si $V$ est un voisinage de $a$ tel que $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \in V \cap A \setminus \{a\}$, il est clair que $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ dès que $x \in V \cap A$ puisque $f(a) - f(a) = 0 < \varepsilon$. ■

Si maintenant on suppose que $a \in \mathbb{R}$ est un *point d'accumulation* de $A$, mais n'appartenant pas à $A$ (ce qui revient à dire que $a \in \mathbb{R}\setminus A$ et est *adhérent à $A$ dans* $\mathbb{R}$), et que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ possède en $a$ une *limite finie* $l$, la proposition IV.1.2 montre que la fonction $\tilde{f} : A \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge $f$ et vaut $l$ en $a$ est *continue en $a$* : on dit que l'on a **prolongé $f$ en $a$ par continuité.** Lorsqu'un tel prolongement existe, il est bien sûr unique à cause de la proposition IV.1.1.

### Discontinuités de première espèce

Prenons ici le cas d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où $I$ est un *intervalle non trivial* de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire *non vide* et *non réduit à un point*) et soit $a \in I$.

- Si $a$ est intérieur à $I$, pour que $f$ soit continue en $a$, il faut et il suffit que $f(a-0)$ et $f(a+0)$ existent et que $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$.
- Si $a = \text{Max}\,(I)$, $f$ est continue en $a$ ssi $f(a-0)$ existe et vaut $f(a)$.
- Si $a = \text{Min}\,(I)$, $f$ est continue en $a$ ssi $f(a+0)$ existe et vaut $f(a)$.

**Définition IV.1.2**

> *Avec les notations ci-dessus, $a \in I$ est appelé un **point de discontinuité de première espèce** de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi celles des limites $f(a-0)$ et $f(a+0)$ qui peuvent être définies existent, appartiennent à $\mathbb{R}$ et si de plus $f$ n'est pas continue en $a$.*

***Exemple 4 :*** La fonction $\text{Ent} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Les points $x \in \mathbb{Z}$ sont points de discontinuité de première espèce pour Ent. En chacun de ces points $f(x+0) = f(x)$ et $f(x-0) = f(x) - 1 \neq f(x)$.

De même une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui serait définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ présenterait en 0 une discontinuité de première espèce malgré l'égalité de $f(x+0)$ et de $f(x-0)$.

En revanche la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ présente bien en 0 une discontinuité, mais pas de première espèce à cause des limites infinies. De même la fonction qui a été donnée en exemple 3 au § III.5 (cf. fig. 3) admet en 0 un point de discontinuité qui n'est pas de première espèce à cause de l'absence de limite.

Les propriétés des limites étudiées plus haut montrent immédiatement :

**PROPOSITION IV.1.3**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{R}_I$ des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n'admettant que des points de continuité ou des discontinuités de première espèce est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Le sous-ensemble $\mathcal{CM}_0(I, \mathbb{R})$ de $\mathcal{R}_I$ constitué des $f \in \mathcal{R}_I$ dont l'ensemble des points de discontinuité est* ***fini*** *est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathcal{R}_I$.*

$\mathcal{R}_I$ peut être considéré comme l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x+0)$ (resp. $f(x-0)$) existe en tout point où elle peut être définie.

**DÉFINITION IV.1.3**

*Soit $I$ un* ***intervalle compact*** *de $\mathbb{R} : I = [a, b]$ avec $a < b$. La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{R}_I$ définie ci-dessus s'appelle* ***algèbre des fonctions réglées sur I.*** *La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{CM}_0(I, \mathbb{R})$ définie dans la proposition IV.1.3 s'appelle algèbre des* ***fonctions continues par morceaux*** *sur $I$.*

Dire que $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ revient à dire qu'on peut trouver un entier $p \geqslant 1$ et des $a_i \in I$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$ tels que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ et que, pour chaque $i \in [\![0, p-1]\!]$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ admette un *prolongement par continuité* sur $[a_i, a_{i+1}]$, c'est-à-dire soit la restriction à $]a_i, a_{i+1}[$ d'une fonction $g_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue*, cette $g_i$ étant évidemment définie de manière unique par $g_i(x) = f(x)$ si $x \in ]a_i, a_{i+1}[$, $g_i(a_i) = f(a_i + 0)$ et $g_i(a_{i+1}) = f(a_{i+1} - 0)$, d'où le nom donné à $f$ de fonction « continue par morceaux ».

### Le critère de Cauchy pour les fonctions

De même que le critère de Cauchy permet de reconnaître les suites convergentes dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) sans avoir besoin de savoir à l'avance combien vaut la limite, un critère analogue permet de caractériser l'existence théorique d'une **limite finie** pour une fonction sans nécessiter une connaissance *a priori* de cette limite.

**THÉORÈME IV.1.4**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $a$ un point adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour que $f$ admette en $a$ une* ***limite finie,*** *il faut et il suffit que le critère suivant, dit* ***de Cauchy,*** *soit satisfait : $\forall \varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ tel que,*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ (x \in V \cap A \text{ et } y \in V \cap A) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon .$$

*Démonstration :*

Il va de soi que la condition est nécessaire. Supposons-la satisfaite et considérons une suite $(u_n)$ de points de $A$ qui converge vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Alors la suite $(f(u_n))$ est de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon$

voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x \in V \cap A$ et $y \in V \cap A$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in V$ dès que $n \geqslant N$ : on a $|f(u_n) - f(u_p)| \leqslant \varepsilon$ pour $N \leqslant n < p$. Donc la suite $(f(u_n))$, qui est de Cauchy, converge vers une limite *élément de* $\mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème IV.1.1 pour prouver que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, et nous venons de voir que cette limite est nécessairement finie. ■

***Exercice 1 :*** Soit $A$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer : pour que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)$ de points de $A$ telle que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, on ait : $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Exercice 2 :*** Donner un exemple d'une suite réelle $(x_n)$ qui n'est pas convergente, et telle cependant que, pour chaque $k \geqslant 2$, la suite extraite $(x_{kn})_{n \geqslant 0}$ soit convergente.

***Exercice 3 :*** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$.

*a*) On donne trois fonctions $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$(\forall x) \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)\,.$$

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}$ et sont égales. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

*b*) On donne $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x$ et on suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. Que peut-on dire sur $g$ ?

***Exercice 4 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ existent. Montrer que $f$ est *uniformément continue.*

***Exercice 5 :*** *a*) Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée* sur tout intervalle borné. On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

*b*) Soit $f : [x, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *minorée* sur tout intervalle borné. On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Exercice 6 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x$ réel, $\lim\limits_{y \to x,\, y \neq x} f(y)$ existe et vaut $g(x)$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue.

***Exercice 7 :*** On donne une fonction *croissante* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et un réel $a > 1$ tels que $f(ax) - f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{\operatorname{Log} x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 8 :*** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et une fonction arbitraire $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On supposera $A$ sans point isolé. On note $\mathscr{D}_0$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $\lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} f(x)$ existe et soit *distincte* de $f(a)$. Montrer que $\mathscr{D}_0$ est au plus dénombrable.

***Exercice 9 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue* telle que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \exists \alpha_x > 0$ vérifiant

$$f(x) = \frac{1}{2}\,[f(x + \alpha_x) + f(x - \alpha_x)]\,.$$

Montrer que $f$ est affine.

***Exercice 10 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, *surjective,* telle que $f^{-1}(y)$ soit borné pour tout $y \in \mathbb{R}$.

*a*) Montrer que l'on est dans l'un ou l'autre des cas suivants : ou bien $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ou bien $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

*b*) Montrer que pour toute partie fermée $F$ de $\mathbb{R}$, $f(F)$ est fermée dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 11 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que

$$(\forall x, \forall y)\ (x > 0, y > 0)\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

(fonction sous-additive). Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t}$ existe et vaut $\inf\limits_{t>0} \left( \dfrac{f(t)}{t} \right)$.

***Exercice 12 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tous réels $a$, $b$ avec $a < b$, on pose

$$\Gamma_{a,b}(f) = \sup\ \{m \in \mathbb{N} \mid \exists (s_1, s_2, \dots, s_{2m}) \in I^{2m},\ s_1 < s_2 < \cdots < s_{2m} \text{ et } f(s_1) > b,\ f(s_2) < a, \dots, f(s_{2m-1}) > b,\ f(s_{2m}) < a\}\ .$$

*a*) Si $\Gamma_{a,b}(f)$ est fini pour tous $a$, $b$ $(a < b)$ montrer que $f$ est réglée sur $I$.

*b*) Si $I$ est compact et si $f$ est réglée sur $I$, alors $\Gamma_{a,b}(f)$ est fini pour tous $a$, $b$ $(a < b)$.

***Exercice 13 :*** Soit $(\alpha_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$ et $f$ une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f \in \mathscr{P}$ ssi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x + \alpha_n) = 0$.

*a*) Soit $f \in \mathscr{P}$ uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ est borné. Montrer qu'alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

*b*) Soit $f \in \mathscr{P}$ continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\alpha_{n+1} - \alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

*c*) Etudier des réciproques.

## § IV.2 *FONCTIONS MONOTONES*

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel. Rappelons (cf. Tome d'Algèbre, § I.6) qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante. Nous nous occuperons plus particulièrement des fonctions croissantes, c'est-à-dire celles qui vérifient

$$(\forall x \in A)\ (\forall y \in A) \quad (x \leqslant y) \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\ ,$$

laissant au lecteur le soin d'adapter les résultats obtenus au cas des fonctions décroissantes (si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, alors $-f : x \mapsto -f(x)$ est croissante ainsi que $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$ définie sur $\tilde{A} = \{-a\}_{a \in A}$).

**THÉORÈME IV.2.1**

> *Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $a \in \bar{\mathbb{R}}$ :*
>
> (I) *Si $a$ est adhérent à $A \cap\, ]a, +\infty[$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, avec $a < +\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a,\, x > a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et vaut $\inf\limits_{x > a,\, x \in A} f(x)$. Si $a$ est adhérent à $A \cap\, ]-\infty, a[$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, avec $a > -\infty$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a,\, x < a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et vaut $\sup\limits_{x < a,\, x \in A} f(x)$.*
>
> (II) *Si $a \in A$ et si $a$ est adhérent à $A \cap\, ]a, +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a,\, x > a} f(x) \in \mathbb{R}$, et cette limite est $\geqslant f(a)$. On a une propriété analogue du côté gauche.*
>
> (III) *Si $a \in A$ est adhérent aux deux ensembles $A \cap\, ]a, +\infty[$ et $A \cap\, ]-\infty, a[$ on a : $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$, les égalités ayant lieu toutes deux ssi $f$ est continue en $a$.*

*Démonstration :*

(I) L'ensemble $A \cap\, ]a, +\infty[$ étant non vide, son image par $f$ admet dans $\bar{\mathbb{R}}$ une borne inférieure que nous noterons $\Lambda$ (évidemment $\Lambda < +\infty$). Soit $Y$ un réel $> \Lambda$. Il existe dans $A$ au moins un $X$ tel que $X > a$ et $f(X) \leqslant Y$. Alors, pour $x \in A$ tel que $a < x \leqslant X$, on a, par croissance de $f$ et par définition de $\Lambda$ : $\Lambda \leqslant f(x) \leqslant f(X) \leqslant Y$. Cela prouve bien que $f(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x > a}{\longrightarrow} \Lambda$. En particulier, si $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a,\, x > a} f(x) = f(a+0)$ (notation définie au § IV.1).

Le reste de l'assertion (I) se prouve de manière symétrique.

(II) Cette fois-ci $a \in A$ et $f(a)$ est donc défini. Pour tout $x \in A$ $(x > a) \Rightarrow (f(x) \geqslant f(a))$ à cause de la croissance de $f$. En reprenant le raisonnement précédent on obtient $f(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x > a}{\longrightarrow} \Lambda = f(a+0)$, avec $\Lambda \geqslant f(a)$ et donc $\Lambda \neq -\infty$, c'est-à-dire $f(a+0) \in \mathbb{R}$.

La démonstration est analogue pour $f(a-0) \in \mathbb{R}$ et $f(a-0) \leqslant f(a)$.

(III) C'est une conséquence de (II) et des considérations qui précèdent la définition IV.1.2. ■

**COROLLAIRE**

> *Soit $a$, $b$ deux réels ($a < b$). Toute fonction* **monotone** *$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est* **réglée.**

En réalité l'étude des fonctions monotones sur une partie $A$ de $\mathbb{R}$ se ramène aisément à celle des fonctions monotones *sur un intervalle.* En effet, soit $\widehat{A}$ *l'enveloppe convexe* de $A$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire le plus petit intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $A$ : c'est $\widehat{A} = \bigcup\limits_{(a,b) \in A^2,\, a \leqslant b} [a, b]$. Si $f : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante,

$f$ se prolonge au moins d'une manière en $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante : il suffit par exemple de prendre $\widehat{f}(x) = \inf\limits_{y \in A,\, y \geqslant x} f(y)$. De même si $f$ est décroissante.

De plus, *pour tout prolongement* $\widehat{f} : \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $f$ en une fonction monotone, et pour tout $a \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $f(a+0)$ (resp. $f(a-0)$) existe, on a : $\widehat{f}(a+0)$ existe et est égal à $f(a+0)$ (resp. $\widehat{f}(a-0)$ existe et est égal à $f(a-0)$). C'est pourquoi dans ce qui suit nous nous en tiendrons aux fonctions monotones sur un intervalle.

**Proposition IV.2.1**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. L'ensemble des points de discontinuité de $f$ est* fini ou dénombrable.

*Démonstration :*

Que $I$ soit borné ou non, même s'il est ouvert ou semi-ouvert, on peut toujours écrire $I = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ où $(I_n)$ est une suite *croissante* pour l'inclusion d'intervalles *compacts.* Or tout point de discontinuité de $f$ est point de discontinuité de l'une au moins des $f|_{I_n}$ et l'on sait que toute union dénombrable d'ensembles au plus dénombrable est elle-même au plus dénombrable. Il suffit donc de prouver la proposition lorsque $I = [a, b]$, avec $a < b$, et $f$ croissante.

Dans ce cas, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathscr{D}_p$ l'ensemble des $x \in \,]a, b[$ tels que $f(x+0) - f(x-0) \geqslant \dfrac{1}{p}$. Alors l'ensemble $\mathscr{D}$ des points de discontinuité de $f$ est inclus dans $\{a, b\} \cup \left(\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{D}_p\right)$. Or, supposons trouvés, pour $p$ fixé, des points $x_1, \ldots, x_q \in \mathscr{D}_p$ avec $a < x_1 < \cdots < x_q < b$. On a :

$$f(a) \leqslant f(x_1 - 0) \leqslant f(x_1 + 0) \leqslant \cdots \leqslant f(x_q - 0) \leqslant f(x_q + 0) \leqslant f(b)\,,$$

d'où

$$f(b) - f(a) \geqslant \sum_{i=1}^{q} (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) \geqslant \frac{q}{p}\,.$$

On a donc $q \leqslant p(f(b) - f(a))$, ce qui prouve que l'ensemble $\mathscr{D}_p$ est *fini,* de cardinal $\leqslant p(f(b) - f(a))$. On en déduit que $\bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}^*} \mathscr{D}_p$ est au plus dénombrable, et *a fortiori,* $\mathscr{D}$ est au plus dénombrable. ■

C'est là une propriété générale des fonctions réglées dont les fonctions monotones constituent un cas particulier élémentaire. En un point de discontinuité (nécessairement de première espèce) d'une telle fonction, le nombre $s = f(x+0) - f(x-0)$ est appelé *saut* de la fonction au point $x$. Pour une fonction monotone les sauts éventuels sont tous de même signe, ce qui a permis la démonstrati

### Fonctions continues et strictement monotones

**THÉORÈME IV.2.2**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue** *et* **strictement croissante.** *Alors :*
>
> (I) *$J = f(I)$ est un intervalle. Si $I$ est compact, $J$ l'est aussi.*
>
> *Si $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$,*
>
> $$J = \left[ f(a), \lim_{x \longrightarrow b,\, x < b} f(x) \right[ \ ;$$
>
> *si $I = ]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$,*
>
> $$J = \left] \lim_{x \longrightarrow a,\, x > a} f(x), \lim_{x \longrightarrow b,\, x < b} f(x) \right[ \ ;$$
>
> *si $I = ]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$,*
>
> $$J = \left[ \lim_{x \longrightarrow a,\, x > a} f(x),\ f(b) \right] .$$
>
> (II) *Soit $g$* la bijection réciproque *de $f|^J : I \longrightarrow J$, $x \mapsto f(x)$. Alors $g$ est* **strictement croissante** *et* **continue.**

*Démonstration :*

La première assertion a déjà été établie au § III.5. $f$ étant *strictement* croissante est injective, et donc $f|^J$ est bijective. Il est clair que la bijection réciproque $g$ est strictement croissante. Pour le reste, étudions par exemple le cas où $I = [a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Posons $\alpha = f(a)$ et $\beta = \lim_{x \longrightarrow b,\, x < b} f(x)$ : $\beta$ existe et est égal à sup $(J)$ d'après le théorème IV.2.2. Si $y_0 \in J$, on a : $y_0 = f(x_0)$, où $x_0 = g(y_0) \in I$. Or si $x \in ]x_0, b[$, alors $y_0 < f(x)$, et comme $f(x) \in J$ on a : $f(x) \leqslant \beta$. Finalement $y_0 < \beta$. Cela prouve que $\beta \notin J$ et on a bien $J = [\alpha, \beta[$. Il reste à prouver la *continuité* de $g$ en $y_0 \in J$. Raisonnons dans le cas où $y_0$ est *intérieur* à $J$, les autres cas relevant de méthodes analogues. Alors $x_0 = g(y_0)$ est intérieur à $I$. Soit $\varepsilon$ un réel $> 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. On a : $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$ et d'après la croissance stricte de $g$, pour tout $y \in [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)]$ on a :

$$x_0 - \varepsilon = g[f(x_0 - \varepsilon)] \leqslant g(y) \leqslant g[f(x_0 + \varepsilon)] = x_0 + \varepsilon ,$$

ce qui prouve bien la continuité de $g$ en $y_0$. ■

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et d'établir le théorème concernant les fonctions continues strictement décroissantes.

Il peut être utile de compléter le théorème IV.2.2 en montrant que l'on a trouvé toutes les applications continues et injectives définies sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

THÉORÈME IV.2.3

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue** *et* **injective.** *Alors $f$ est* **strictement monotone** *(et le théorème* IV.2.2 *s'applique donc à $f$).*

*Démonstration :*

Désignons par $\Delta$ l'ensemble des couples $(x, y) \in I^2$ tels que $x < y$. Il s'agit de prouver que si $(x, y)$ décrit $\Delta$, le nombre $f(y) - f(x)$ reste soit constamment $> 0$, soit constamment $< 0$. Fixons un couple de référence $(x_1, y_1) \in \Delta$ et soit $(x_2, y_2) \in \Delta$ un couple arbitraire. Pour $t \in [0, 1]$ posons $u(t) = (1-t)\,x_1 + tx_2$ et $v(t) = (1-t)\,y_1 + ty_2$. Il est clair que $(u(t), v(t)) \in \Delta$ pour tout $t \in [0, 1]$, et les fonctions $u$ et $v$ sont continues sur $[0, 1]$.

De plus la fonction $G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(v(t)) - f(u(t))$ est continue. Or $G(0) = f(y_1) - f(x_1)$, $G(1) = f(y_2) - f(x_2)$ et $G$ ne peut pas s'annuler puisque $u(t) < v(t)$ et que $f$ est supposée *injective.*

Donc $G(0)\,G(1) > 0$ (sinon le théorème des valeurs intermédiaires obligerait $G$ à s'annuler). Finalement $f(y_2) - f(x_2)$ garde constamment le même signe, ce qui prouve bien que $f$ est strictement monotone. ■

## Opérations sur les fonctions monotones

Les opérations usuelles sur les fonctions monotones ne donnent pas toujours des résultats aussi simples que ceux sur les fonctions continues. En particulier le produit de deux fonctions croissantes n'est pas forcément monotone (par exemple $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone sur $[-1, +1]$).

Il est cependant évident que la somme de deux fonctions croissantes sur $I$ est elle-même croissante (par exemple $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x} = x + \dfrac{-1}{x}$ est croissante). De même le produit d'une fonction croissante par un scalaire *positif.* Si $f$ et $g$ sont deux fonctions *positives* croissantes, alors $fg$ est croissante. Si $f$ est croissante et *strictement positive,* alors $\dfrac{1}{f}$ est décroissante.

Le lecteur établira lui-même facilement les résultats concernant la composée $g \circ f$ de deux fonctions monotones.

## Comportement à l'infini des exponentielles et logarithmes

Parmi les fonctions monotones les plus importantes figurent les fonctions exponentielles : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto a^x$ définies dès le § I.6, et nous avons vu au Chapitre II qu'on pouvait toutes les exprimer à l'aide de l'exponentielle de base e, $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$, dont on a prouvé la continuité au Chapitre III, et qui est strictement croissante.

Les théorèmes IV.1.1 et IV.2.2 joints aux résultats concernant les suites permettent d'obtenir :

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

De même, pour $a > 1$ $\quad a^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad a^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$

et pour $a < 1$ $\qquad a^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad a^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

La bijection réciproque de $\mathscr{E}_a : x \mapsto a^x$ (où $a > 0$ et $a \neq 1$) est $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, pour laquelle il est immédiat que :

$$\text{si } a > 1, \quad \log_a(x) \underset{x \to 0,\, x > 0}{\longrightarrow} -\infty, \quad \log_a(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\text{si } a < 1, \quad \log_a(x) \underset{x \to 0,\, x > 0}{\longrightarrow} +\infty, \quad \log_a(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty\,.$$

**Comportement à l'infini des fonctions puissances**

Soit $\alpha$ un réel $\neq 0$ et $\gamma_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ la fonction puissance d'exposant $\alpha$ définie au § I.6. On sait que $\gamma_\alpha$ est strictement monotone. On a prouvé sa continuité au Chapitre III. Le théorème IV.2.2 entraîne donc :

$$\text{si } \alpha > 0, \quad \gamma_\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad \gamma_\alpha(x) \underset{x \to 0,\, x > 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{si } \alpha < 0, \quad \gamma_\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \gamma_\alpha(x) \underset{x \to 0,\, x > 0}{\longrightarrow} +\infty\,.$$

En particulier, pour $\alpha > 0$, $\gamma_\alpha$ se *prolonge par continuité en* 0 en posant $\tilde{\gamma}_\alpha(0) = 0^\alpha = 0$ et la fonction prolongée $\tilde{\gamma}_\alpha$ est encore strictement croissante, continue et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

On notera que la formule déjà vue $(x^\alpha)^{1/\alpha} = x^1 = x$, valable pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ signifie que $\gamma_\alpha$ et $\gamma_{1/\alpha}$ sont des *bijections réciproques* l'une de l'autre.

**Comparaison à l'infini des puissances et exponentielles**

**THÉORÈME IV.2.4**

*Pour tout réel $\alpha > 0$, on a :*

$$\boxed{\frac{e^x}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}\,.$$

*Démonstration :*

On sait déjà que $\dfrac{e^n}{n^\alpha} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ (cf. théorème II.4.1).

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, désignons alors par $n(x)$ la partie entière Ent $(x)$ de $x$. Compte tenu de la croissance des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^\alpha$, on a :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} \geqslant \frac{e^{n(x)}}{(n(x)+1)^\alpha} = \frac{1}{e}\,\frac{e^{n(x)+1}}{(n(x)+1)^\alpha}\,.$$

Or, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (n(x)+1) = +\infty$. Donc $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$, minoré par une suite dont la limite est $+\infty$, a aussi pour limite $+\infty$. ■

On en déduit immédiatement, en posant $x^\alpha = \operatorname{Log} t$, $\dfrac{t^{\frac{1}{\alpha}}}{\operatorname{Log} t} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout réel $\alpha > 0$, et en posant maintenant $t = \dfrac{1}{u}$, $u^\beta \operatorname{Log} u \underset{u \longrightarrow 0,\, u>0}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $\beta > 0$.

***Exercice 1 :*** Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction *croissante*. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

***Exercice 2 :*** *a*) Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille non vide de fonctions croissantes : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$). On suppose $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) < +\infty$ pour tout $x \in I$. Montrer que $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ est croissante. Si toutes les $f_\lambda$ sont continues, est-il sûr que $g$ le soit ?

*b*) Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue. On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissantes et telles que $f(x) \leqslant F(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que $\sup\limits_{f \in \mathscr{E}} f(x) = g(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in I$, et que $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante et *continue*.

***Exercice 3 :*** *a*) Trouver toutes les fonctions *continues* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f[f(x)] = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (*Indication :* une telle fonction est nécessairement strictement monotone, pourquoi ?)

*b*) Soit $a \in ]0,1[$. Existe-t-il $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f[f(x)] = \dfrac{1}{a}x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ?

*c*) Chercher les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f[f(x)] = x + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est donné.

*d*) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Existe-t-il $f$ continue : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f[f(x)] = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ? (*Indication :* Commencer par montrer l'impossibilité dans le cas où $a < 0$).

***Exercice 4 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que $f$ est continue ssi $f(I)$ est un intervalle. En déduire une autre démonstration du théorème IV.2.2, assertion (II).

***Exercice 5 :*** Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ croissante, telle que $f(0) = 0$. On suppose que $f(x) < x$ pour $0 < x \leqslant 1$. Partant de $u_0 \in ]0,1]$, on définit une suite $(u_n)$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\downarrow} 0$.

***Exercice 6*** (fonction des sauts) : Soit $a$ et $b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $I = ]a,b[$. On donne une fonction *croissante* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

*a*) Soit $x \in I$. Montrer que si $\mathscr{F}_x$ désigne l'ensemble des parties finies de $]a,x[$, alors $\sup\limits_{J \in \mathscr{F}_x} \left( \sum\limits_{y \in J} f(y+0) - f(y-0) \right) < +\infty$. On notera $\delta_f(x)$ cette borne supérieure.

*b*) On pose $S_f(x) = \delta_f(x) + f(x+0) - f(x-0)$ $(x \in I)$. Montrer les propriétés suivantes : $S_f$ est croissante ; $f - S_f$ est croissante et continue ; si $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante telle que $g$ soit continue, alors $g \geqslant S_f$.

N.B. : C'est $S_f$ qui est appelée la *fonction des sauts* de $f$ (1).

(1) Un théorème dû à *Lebesgue* permet de mettre la fonction $f - S_f$ sous forme de somme d'une fonction « absolument continue » et d'une fonction « continue singulière », toutes deux croissantes.

***Exercice 7 :*** Soit $A = \mathbb{N} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$. On définit $f : A \longrightarrow A$, $0 \mapsto 0$, $2n \mapsto n$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $2n+1 \mapsto \frac{1}{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

*a*) Vérifier que $f$ est bijective et continue.

*b*) La fonction réciproque $g = f^{\langle -1 \rangle}$ est-elle continue ? Conclusion ?

***Exercice 8 :*** On reprend la fonction $f$ définie dans l'exercice 12 du § III.4. Vérifier qu'elle est croissante, et calculer $f(x+0) - f(x-0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de la suite $(r_n)$.

***Exercice 9 :*** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. On note $I$ le plus petit intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $A$ ($I = \bigcup_{(a,b) \in A^2, a \leqslant b} [a, b]$). Etudier si on peut trouver $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant $f$, croissante et continue. Montrer qu'une telle $g$ existe ssi $f$ admet un prolongement $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continu.

***Exercice 10 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante, et $A = \mathrm{Im}\,(f)$. On posera $J = \bigcup_{(a,b) \in A^2, a \leqslant b} [a, b]$. En utilisant l'exercice 9, étudier s'il existe $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(*Réponse :* il en existe toujours.)

***Exercice 11 :*** Pour $x \in [0, 1[$, on note $(a_n(x))_{n \geqslant 1}$ le développement décimal propre de $x$. On fait correspondre à $x$ le réel $y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{20^n}$ ainsi défini : $|b_n| = 2a_{2n-1}$ si $a_{2n} \in \{0, 2, 4\}$ ; $b_n = 2a_{2n-1} + 1$ si $a_{2n}$ est impair ; $|b_n| = 2a_{2n-1} + 2$ si $a_{2n} \in \{6, 8\}$ ; à partir de $b_1 \geqslant 0$, on attribue à $b_n$ le signe de $b_{n-1}$ si $a_{2n} \in \{0, 2, 4, 5, 7, 9\}$ et le signe contraire si $a_{2n-2} \in \{1, 3, 6, 8\}$. Montrer que $f : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue, mais qu'elle n'est monotone sur aucun intervalle de longueur $> 0$ (Singh, 1930).

***Exercice 12 :*** (Exemple de Peano, 1890). Pour $t \in [0, 1[$, soit $(a_n(t))_{n \geqslant 1}$ le développement propre de $t$ en base 3. Soit $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$, où $b_1 = a_1$, et (si $n \geqslant 2$), $b_n = a_{2n-1}$ si $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}$ est pair, et $b_n = 2 - a_{2n-1}$ si $a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n-2}$ est impair. Montrer que $f : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est continue mais n'est monotone sur aucun intervalle de longueur $> 0$.

***Exercice 13 :*** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit une fonction $f_n : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ décroissante et continue telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $(\forall n)\ \frac{f_n(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 14 :*** Soit $g$ une application de l'intervalle $]0, 1]$ dans l'intervalle $[-1, +1]$. On suppose que $\lim_{x \to 0, x > 0} g(x) = 0$. Montrer qu'il existe une application continue décroissante $g_1 : [0, 1] \longrightarrow [-1, +1]$ et une application continue croissante $g_2 : [0, 1] \longrightarrow [-1, +1]$ telles que $g_1(0) = g_2(0) = 0$ et $g_1(x) \leqslant g(x) \leqslant g_2(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$.

*Indication :* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérer $\inf_{x \in ]0,1]} \left\{ x \mid g(x) \geqslant \frac{1}{n} \right\} = x_n$.

## § IV.3 *VALEURS D'ADHÉRENCE D'UNE FONCTION*

**DÉFINITION IV.3.1**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $A$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Un élément $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ est dit* **valeur d'adhérence** *de $f$ en $a$ ssi, pour tous voisinages $V$ de $\lambda$ et $U$ de $a$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a : $f(U \cap A) \cap V \neq \varnothing$.*

Un critère simple permet de reconnaître les valeurs d'adhérence :

**THÉORÈME IV.3.1**

*Les notations $A$, $f$ et $a$ étant celles de la définition* IV.3.1, *pour que $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ soit valeur d'adhérence de $f$ en $a$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(u_n)$ de points de $A$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ et $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$.*

*Démonstration :*

Il est facile de voir que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons donc que $\lambda$ est valeur d'adhérence de $f$ en $a$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ définissons un voisinage $U_n$ de $a$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la manière suivante : si $a \in \mathbb{R}$ on pose $U_n = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ ; si $a = -\infty$ (resp. $+\infty$) on pose $U_n = [-\infty, -n]$ (resp. $U_n = [n, +\infty]$). Définissons de la même façon les voisinages $(V_n)_{n \geq 1}$ de $\lambda$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n \in A \cap U_n$ tel que $f(u_n) \in V_n$, ce qui est toujours possible par hypothèse. Alors $(\forall n)$ $u_n \in A \cap U_n$, $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ et $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. ■

On en déduit immédiatement (cf. théorème III.3.4).

**COROLLAIRE 1**

*Avec les notations du théorème* IV.3.1, *soit $(u_n)$ une suite de points de $A$ qui converge vers $a$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Toute valeur d'adhérence de la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est valeur d'adhérence de $f$ en $a$.*

Et plus généralement :

**COROLLAIRE 2**

*Soit $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $b \in \overline{\mathbb{R}}$) un point adhérent à $A$ (resp.* à *$B$) dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions. On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$. Alors toute valeur d'adhérence $\lambda$ de $g \circ f$ en $a$ est valeur d'adhérence de $g$ en $b$.*

*Démonstration :*

En effet, soit $(u_n)$ une suite de points de $A$ telle que $g(f(u_n)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. On a : $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$ (théorème IV.1.1) et le théorème IV.3.1 permet de conclure que $\lambda$ est valeur d'adhérence de $g$ en $b$. ■

Tandis qu'une fonction $f$ n'admet pas toujours en $a$ une limite, elle admet toujours une ou plusieurs valeurs d'adhérence. Plus précisément :

**THÉORÈME IV.3.2**

> *Avec les notations du théorème* IV.3.1, *l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ en $a$ est une partie* **fermée** *et* **non vide** *de* $\bar{\mathbb{R}}$.

*Démonstration :*

Soit $\mathscr{A}_{f,a}$ cet ensemble. Puisque $a$ est adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, il existe au moins une suite $(u_n)$ de points de $A$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$ : pour une telle suite, la suite $(f(u_n))$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ et le corollaire 1 du théorème IV.3.1 montre donc que $\mathscr{A}_{f,a} \neq \varnothing$ .

D'autre part $\mathscr{A}_{f,a} = \{\lambda \in \bar{\mathbb{R}} \mid \forall U$ voisinage de $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, $\forall V$ voisinage de $\lambda$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, $f(U \cap A) \cap V \neq \varnothing \}$. Pour $U$ fixé, la relation « $\forall V$ voisinage de $\lambda$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, $f(U \cap A) \cap V \neq \varnothing$ » signifie que $\lambda$ est adhérent à $f(U \cap A)$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. Donc $\mathscr{A}_{f,a} = \bigcap_{U \text{ voisinage de } a \text{ dans } \bar{\mathbb{R}}} \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}\,(f(U \cap a))$. Ainsi $\mathscr{A}_{f,a}$ apparaît comme une intersection de fermés de $\bar{\mathbb{R}}$. C'est donc un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$. ■

**THÉORÈME IV.3.3**

> *Avec les notations du théorème* IV.3.1, *pour que* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe dans* $\bar{\mathbb{R}}$, *il faut et il suffit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ en $a$ soit un singleton* $\{\lambda\}$.
> *Si c'est le cas,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda$.

*Démonstration :*

Le théorème IV.1.1 montre que la condition est nécessaire. Prouvons qu'elle est suffisante : soit $(u_n)$ une suite de points de $A$ qui converge vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. *Toute* valeur d'adhérence de $(u_n)$ étant valeur d'adhérence de $f$ en $a$, la suite $(u_n)$ n'a dans $\bar{\mathbb{R}}$ qu'une valeur d'adhérence possible : $\lambda$. C'est donc qu'elle converge dans $\bar{\mathbb{R}}$ et l'on conclut en utilisant le théorème IV.1.1. ■

Soit toujours $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$, adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$. On a vu au § III.6 que toute partie fermée non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ admet un plus grand et un plus petit élément. Le théorème IV.3.2 montre donc que $f$ possède en $a$ *une plus grande* et *une plus petite valeur d'adhérence dans* $\bar{\mathbb{R}}$.

**DÉFINITION IV.3.2**

> *Avec les notations du théorème* IV.3.1, ***la plus grande*** *(resp.* ***petite****) valeur d'adhérence de $f$ en $a$ s'appelle* ***limite supérieure*** *de $f$ en $a$ (resp.* ***limite inférieure*** *de $f$ en $a$) et se note* $\limsup\limits_{x \to a} f(x)$ *(resp.* $\liminf\limits_{x \to a} f(x)$*).*

On a toujours $\liminf\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x \to a} f(x)$ et le théorème IV.3.3 peut s'énoncer ainsi : **pour que $f$ admette en $a$ une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$, il faut et il suffit que** $\limsup\limits_{x \to a} f(x) = \liminf\limits_{x \to a} f(x)$, la valeur commune étant alors égale à [illegible]

On déduit aussitôt de la définition IV.3.1 que : $\limsup_{x \to a} f(x) < +\infty$ ssi *f est majorée au voisinage de a* (i.e. ssi il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $M$ réel $> 0$ tel que $f(x) \leqslant M$ dès que $x \in V \cap A$).

De même, $\liminf_{x \to a} f(x) > -\infty$ ssi *f est minorée au voisinage de a*. En conséquence, pour que $f$ soit *bornée au voisinage de a,* il faut et il suffit que $\liminf_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ et $\limsup_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

On s'assure aisément que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$ ssi $\limsup_{x \to a} f(x) = -\infty$ et que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ ssi $\liminf_{x \to a} f(x) = +\infty$.

De la même manière que nous avons défini une limite à droite d'une fonction $f$ au point $a$ en supposant que $a$ est adhérent à $A \cap ]a, +\infty[$ (avec $a < +\infty$) par la considération de la fonction $f|_{A \cap ]a, +\infty[}$, on peut maintenant, grâce aux valeurs d'adhérence de cette fonction, définir les notations $\limsup_{x \to a, x > a} f(x)$ et $\liminf_{x \to a, x > a} f(x)$. On définit également, lorsque $a$ est adhérent à $A \cap ]-\infty, a[$, les notations $\limsup_{x \to a, x < a} f(x)$ et $\liminf_{x \to a, x < a} f(x)$, ainsi que $\limsup_{x \to a, x \geqslant a} f(x)$ pour $a$ adhérent à $A \cap [a, +\infty[$, etc.

L'intérêt des valeurs d'adhérence d'une fonction $f$ en un point $a$ est de donner une idée du comportement de $f$ au voisinage de $a$, que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe ou non : plus il y a de valeurs d'adhérence, « plus on s'écarte » du cas où $f$ admet en $a$ une limite.

***Exercice 1 :*** Soit $(r_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $r_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $N(x) = \operatorname{Max} \{n \in \mathbb{N} \mid r_n \leqslant x\}$. Montrer que :

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} = \limsup_{n \to \infty} \frac{n}{r_n} \quad \text{et} \quad \liminf_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} = \liminf_{n \to \infty} \frac{n}{r_n}.$$

***Exercice 2 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.* On donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par $(\forall n \geqslant 0) \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés (I) et (II) ci-après :

(I) la suite $(u_n)$ converge dans $\mathbb{R}$,
(II) la suite $(u_n)$ possède *dans* $\mathbb{R}$ une unique valeur d'adhérence.

***Exercice 3 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0,1]$ *continue.* A partir de $u_0 \in [0, 1]$, on définit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par $(\forall n) \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés (I) et (II) :

(I) $u_{n+1} - u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, (II) la suite $(u_n)$ converge.

*Indication :* Si $u_{n+1} - u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est un intervalle (cf. exercice du Chap. II).

***Exercice 4 :*** Soit $a$ un réel $> 0$, et $I = ]0, a[$. On donne $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*

*a*) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ en 0 est un intervalle fermé de $\bar{\mathbb{R}}$.

*b*) Montrer que tout intervalle fermé non vide de $\bar{\mathbb{R}}$ peut être obtenu de cette manière.

***Exercice 5 :*** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $A$. Si $f :$

fonction et si, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $V_n$, soit $\left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right]$ pour $a \in \mathbb{R}$, soit $[-\infty, -n]$ pour $a = -\infty$, soit $[n, +\infty]$ pour $a = +\infty$ et on appelle $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, montrer que :

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \inf_{V \in \mathscr{V}_a} \left( \sup_{x \in V \cap A} f(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \sup_{x \in V_n \cap A} f(x) \right).$$

Enoncer et prouver la formule analogue avec $\liminf_{x \to a} f(x)$.

***Exercice 6 :*** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ telle que 0 soit adhérent à la fois à $A \cap ]0, +\infty[$ et à $A \cap ]-\infty, 0[$. On donne $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, et on note $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_+$, et $\mathscr{A}_-$ respectivement les ensembles des valeurs d'adhérence en 0 de $f$, $f|_{A \cap ]0, +\infty[}$ et $f|_{A \cap ]-\infty, 0[}$. Montrer que si $a \notin A$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_+ \cup \mathscr{A}_-$ et que si $a \in A$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_+ \cup \mathscr{A}_- \cup \{f(a)\}$.

Généraliser l'idée de cet exercice.

***Exercice 7 :*** Si $A$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on appelle **oscillation de $f$ sur $A$** l'élément $\sup_{(x, y) \in A^2} |f(x) - f(y)|$ de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, que l'on note $\omega_A(f)$.

Si $a \in \bar{\mathbb{R}}$ est adhérent à $A$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, on appelle **oscillation de $f$ en $a$** l'élément, noté $\omega(f\,; a)$, de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ égal à $\inf_{V \in \mathscr{V}_a} \omega_{A \cap V}(f)$, où $\mathscr{V}_a$ désigne l'ensemble des voisinages de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

*a*) Si $f$ est bornée au voisinage de $a$, montrer que :

$$\omega(f\,; a) = \limsup_{x \to a} f(x) - \liminf_{x \to a} f(x).$$

*b*) Montrer que si $f$ n'est pas bornée au voisinage de $a$, il n'y a aucune façon raisonnable d'étendre le résultat du *a*). (On pourra réfléchir sur l'exemple $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, au voisinage de 0.)

***Exercice 8 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $\mathscr{L} : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \liminf_{t \to x} f(t)$ est *semi-continue inférieurement,* ce qui signifie qu'elle vérifie, en chaque $x_0 \in I$ : $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \mid (\forall t \in \mathbb{R}) \ |t - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow \mathscr{L}(t) \geqslant \mathscr{L}(x_0) - \varepsilon$.

***Exercice 9 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $E$ des $a \in \mathbb{R}$ tels que $\limsup_{x \to a, x \geqslant a} f(x) \neq \limsup_{x \to a, x \leqslant a} f(x)$ est au plus dénombrable.

## § IV.4 *LIMITES DE FONCTIONS À VALEURS DANS $\mathbb{R}^p$ OU $\mathbb{C}^p$*

Soit $p$ un entier $\geqslant 1$ et $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ ; une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est définie de manière unique par ses **fonctions composantes** $f_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ ; ce sont les fonctions $f_k : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ pour tout $x \in A$. On note :

$$f = (f_1, \ldots, f_k, \ldots, f_p).$$

**Définition IV.4.1**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide et $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$.*

(I) *Une fonction $f = (f_1, \dots, f_p) : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet $l = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ pour* **limite en a** *ssi $f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l_k$ pour tout $k$.*

(II) *Si $a \in A$, $f$ est dite* **continue en a** *ssi chaque $f_k$ est continue en $a$ ; et $f$ est dite* **continue** *ssi chaque $f_k$ est continue (i.e. $f$ continue en tout point de $a$).*

A partir de cette définition, on obtient sans difficulté :

- l'**unicité** de la limite, notée $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, et on écrit $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ ;
- la **linéarité** de l'application $\varphi \mapsto \lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$, où $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est un élément du sous-$\mathbb{R}$-ev des fonctions admettant en $a$ une limite dans $\mathbb{R}^p$ (sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$) ;
- la **limite du produit** d'une fonction « vectorielle » par une fonction « scalaire » ;
- l'utilisation de **suites** $(u_n)$ convergentes vers $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ pour assurer l'existence de $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ;
- la limite d'une fonction **composée :** si $\varphi : B \longrightarrow A$ admet en $b \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(B)$ la limite $a$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, alors $f \circ \varphi(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} l$, et à partir de là on peut définir les limites de *restrictions* de $f$ : soit $B \subset A$ et $\varphi : B \longrightarrow A$ l'injection naturelle $x \mapsto x$, alors $f \circ \varphi = f|_B$ et si $l = \lim\limits_{x \to a} (f|_B)(x)$ existe, on la note $l = \lim\limits_{x \to a,\, x \in B} f(x)$ et on écrit $f(x) \underset{x \to a,\, x \in B}{\longrightarrow} l$. En particulier :

$$(1) \quad \boxed{\text{si } f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l, \text{ alors } f(x) \underset{x \to a,\, x \in B}{\longrightarrow} l \ (B \subset A, a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(B))}.$$

Lorsque $a \in A$ et que $a$ est un **point d'accumulation** de $A$ (*i.e.* $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$), on peut prendre $B = A \setminus \{a\}$, ce qui donne les nouvelles notations :

$$l = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to a,\, x \neq a}{\longrightarrow} l\,.$$

Si $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$ et $a \leqslant +\infty$ et si de plus $a$ est adhérent à $B = A \cap\, ]a, +\infty[$ (resp. $B = A \cap [a, +\infty[$) on emploie les notations

$l = \lim\limits_{x \to a,\, x > a} f(x)$, $f(x) \underset{x \to a,\, x > a}{\longrightarrow} l$

$\Big($resp. $l = \lim\limits_{x \to a,\, x \geqslant a} f(x)$, $f($ ... $l\Big)$

et on parle alors de **limite à droite** au sens strict (resp. large) de $f$ en $a$. Lorsque la limite à droite au sens strict existe, et que $a \in \mathbb{R}$, on la note $f(a+0)$. On définit de même les *limites à gauche* au sens strict (notée $f(a-0)$) et au sens large. On obtient encore sans effort :

• $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est *continue en* $a \in A$ ssi $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$ (*i.e.* ssi $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe).

• Si $a \in A$ est **point d'accumulation** de $a$, alors $f$ est continue en $a$ ssi $f(x) \underset{x \longrightarrow a, x \neq a}{\longrightarrow} f(a)$.

• Si $a \in A$ est à la fois adhérent à $A \cap \,]a, +\infty[$ et $A \cap \,]-\infty, a[$, $f$ est *continue en a* ssi $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$.

• Les fonctions $A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues en $a$ (resp. continues) forment un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(A, \mathbb{R}^p)$.

• Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\varphi : B \longrightarrow A$ sont continues, alors $f \circ \varphi$ l'est aussi.

• Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors $\varphi f$ est aussi continue.

### Utilisation de normes standard sur $\mathbb{R}^p$

On aimerait pouvoir définir *globalement* les notions de limite et de continuité sans avoir recours chaque fois à l'utilisation des fonctions composantes. Il suffit, comme au § II.2 de recourir aux normes standard de $\mathbb{R}^p$. Le raisonnement qui a conduit à la proposition II.2.1 peut être repris presque sans modification, d'où :

**PROPOSITION IV.4.1**

> *Soit $\nu$ l'une quelconque des normes standard sur $\mathbb{R}^p$, $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour que $l \in \mathbb{R}^p$ soit limite de $f$ en un point $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$, il faut et il suffit que soit satisfaite la condition suivante :*
>
> $$(\forall \varepsilon > 0) \quad \exists V \quad \text{voisinage de } a \text{ dans } \bar{\mathbb{R}} \mid \forall x \in V \cap A \quad \nu(f(x) - l) \leqslant \varepsilon .$$

Bien entendu le théorème des valeurs intermédiaires ne peut pas s'étendre à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour $p \geqslant 2$. En revanche les notions d'ensemble borné et de fonction uniformément continue sont très faciles à généraliser.

On dit qu'une partie $E$ de $\mathbb{R}^p$ est **bornée** ssi il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $E \subset [-M, +M]^p$, c'est-à-dire ssi les images de $E$ par les projections canoniques $\psi_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_i$ sont toutes des parties bornées de $\mathbb{R}$. Globalement, cela revient à dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $(\forall x \in E) \quad N_\infty(x) \leqslant M$, en désignant par $N_\infty$ la norme standard du § II.2. Mais, compte tenu des inégalités entre normes standard obtenues précédemment, il est clair que, si $\nu$ désigne *l'une quelconque* des normes standard de $\mathbb{R}^p$, *$E$ est borné ssi*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E \quad \nu(x) \leqslant M .$$

Toute partie d'un borné est bornée et l'union de toute famille *finie* de bornés de $\mathbb{R}^p$ est évidemment bornée.

On peut dire de la même façon qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ $(A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset)$ est **uniformément continue** ssi chaque fonction composante de $f$ est uniformément continue. Mais cela peut s'exprimer, en utilisant la norme standard $N_\infty$, par : $f$ est uniformément continue ssi pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $\alpha$ réel $> 0$ tel que $N_\infty(f(x) - f(y)) \leq \varepsilon$ dès que $x \in A$ et $y \in A$ vérifient $|x - y| < \alpha$. Compte tenu des inégalités entre normes standard, si $\nu$ désigne l'une quelconque d'entre elles, on voit que *la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est uniformément continue ssi elle vérifie la condition suivante :*

$$(2) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \alpha > 0) \quad (\forall (x, y) \in A^2) \quad (|x - y| < \alpha) \Rightarrow (\nu(f(x) - f(y)) < \varepsilon).$$

On a alors une généralisation des théorèmes de Heine :

**PROPOSITION IV.4.2**

> *Soit $A$ une partie non vide* **compacte** *de $\mathbb{R}$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$* **continue.** *Alors $f$ est* **uniformément continue,** *et l'image $f(A)$ est une partie* **bornée** *de $\mathbb{R}^p$.*

*Démonstration :*

Notons $(f_1, \ldots, f_p)$ les composantes de $f$. Chaque $f_k$ est continue, donc uniformément continue (théorème de Heine du § III.5), donc $f$ est uniformément continue. De plus $f_k(A)$ est un ensemble borné (théorème III.5.1) et $f_k(A)$ est la $k$-ième projection naturelle de $f(A)$ dans $\mathbb{R}$, donc $f(A)$ est bornée dans $\mathbb{R}^p$. ■

**Discontinuités de première espèce**

Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de composantes $f_k$ $(1 \leq k \leq p)$. Un point $a \in I$ où $f$ n'est pas continue est appelé un point de *discontinuité de première espèce* ssi celles des limites $f(a + 0)$ et $f(a - 0)$ qui peuvent être définies existent dans $\mathbb{R}^p$. Pour cela il faut et il suffit que : *a*) l'une au moins des fonctions $f_k$ soit discontinue en $a$ ; *b*) pour tout $k$, $a$ soit pour $f_k$ point de continuité, ou discontinuité de première espèce.

**DÉFINITION IV.4.2**

> *Si $I$ est un* **intervalle compact** *de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite* **réglée** *ssi tous ses points de discontinuité sont de première espèce. Elle est dite* **continue par morceaux** *ssi l'ensemble de* **ces** *points de discontinuité est fini ($f$ étant réglée).*

Cela revient à dire que chacune des fonctions composantes est elle-même réglée (rep. continue par morceaux). Les fonctions réglées sur $I$ forment un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^p)$ et les fonctions continues par morceaux sur $I$ un sous-$\mathbb{R}$-ev noté $\mathcal{CM}_0(I, \mathbb{R}^p)$ du précédent.

**Fonctions à valeurs complexes**

Comme d'habitude, nous identifions $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la base $(1, \mathrm{i})$ de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-ev. *Tout ce qui précède peut alors être appliqué à une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, où $A$ est une partie non vide de* $\mathbb{R}$. Notons seulement que si $u$ et $v$ sont les parties réelle et imaginaire de $f$, $(f = u + \mathrm{i}v)$, alors pour que $l \in \mathbb{C}$ soit limite de $f$ en $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$, il faut et il suffit que $u(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}\,(l)$ et $v(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}\,(l)$. La norme standard $N_2$ de $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-ev n'est autre que le *module* des nombres complexes et la condition précédente s'écrit alors, compte tenu de la proposition IV.4.1 :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } \bar{\mathbb{R}} \mid (\forall x \in V \cap A) \quad |f(x) - l| \leqslant \varepsilon .$$

Mais $\mathbb{C}$ possède également une structure de corps qui est compatible avec la notion de limite de fonction, dans le sens suivant :

**Théorème IV.4.1**

*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ sont données, ainsi que $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$ :*

(I) *Si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$, alors $|f(x)| \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} |l|$.*

(II) *Si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l'$, alors $f(x)\,g(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} ll'$.*

(III) *Si $f(x) \neq 0$ pour tout $x$, si $l \neq 0$ et si $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$, alors*

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \frac{1}{l} .$$

*Démonstration :*

(I) se prouve en utilisant $||u| - |v|| \leqslant |u - v|$, vrai $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2$.

(II) a été prouvé pour les fonctions à valeurs réelles (cf. § IV.1).

Il suffit d'y interpréter le symbole $|\ |$ comme désignant maintenant le module de nombres complexes qui a exactement les mêmes propriétés qu'une valeur absolue : $|u + v| \leqslant |u| + |v|$ et $|uv| = |u|\,|v|$.

(III) utilise le fait que, $l$ étant $\neq 0$, il existe un voisinage $V$ de $a$ sur lequel $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|l|$, ce qui permet de majorer $\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right|$ par $\frac{2}{|l|^2}|f(x) - l|$ qu'on peut rendre $\leqslant \varepsilon$ réel $> 0$ donné à l'avance. ■

L'ensemble des fonctions $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ admettant une limite en $a$ dans $\mathbb{C}$ forme donc une **sous-$\mathbb{C}$-algèbre** de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$.

**Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^p$**

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}^p$ une fonction ; $f$ é manière unique par ses *fonctions composantes* $f_k : A \longrightarrow \mathbb{C}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ telles que

$$(\forall x \in A) \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) .$$

Comme expliqué au § II.2 on peut identifier $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$ à $\mathbb{R}^{2p}$. Si $l = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe dans $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$, on dit que $l$ est *limite de $f$ en $a$ dans* $\mathbb{C}^p$ et l'on écrit : $l = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$ (dans $\mathbb{C}^p$). Il est clair que *l'existence de cette limite équivaut à celle, pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, de $l_k = \lim_{x \longrightarrow a} f_k(x)$* dans $\mathbb{C}$ et qu'alors $l = (l_1, l_2, \dots, l_p)$.

Tous les résultats énoncés au début du § IV.4 concernant les limites et la continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ *restent valables* pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ (en remplaçant partout $\mathbb{R}^p$ par $\mathbb{C}^p$). Il en est de même pour ce qui concerne l'utilisation des normes standard (la lettre $\nu$ désignant maintenant l'une quelconque des normes standard *complexes*) et nous ne ferons aucun autre commentaire à ce sujet.

### Le critère de Cauchy

A partir du théorème IV.1.4, on obtient un critère analogue d'*existence* de limites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (resp. $\mathbb{C}^p$).

**THÉORÈME IV.4.2**

> *Soit $\nu$ une norme standard sur $\mathbb{R}^p$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction définie sur une partie non vide $A$ de $\mathbb{R}^p$, et $a \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(A)$. Pour que $f$ admette une limite en $a$, il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère suivant, dit* de Cauchy.
>
> $$(\forall \varepsilon > 0) \quad \exists V \textit{ voisinage de } a \textit{ dans } \bar{\mathbb{R}} \mid \forall (x, y) \in A^2 \quad \nu(f(x) - f(y)) \leqslant \varepsilon .$$

*Démonstration :*

Si $\nu$ est la norme $N_\infty$, il suffit d'appliquer le théorème IV.1.4 aux composantes de $f$. Si $\nu$ est une norme quelconque, on se ramène à la norme $N_\infty$ grâce aux inégalités entre normes standard. ■

***Exercice 1 :*** Construire $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue* telle que $|f(t)| \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais que

$$|\mathrm{Im}\,(f(t))| \underset{t \longrightarrow +\infty}{\not\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad |\mathrm{Re}\,(f(t))| \underset{t \longrightarrow +\infty}{\not\longrightarrow} +\infty .$$

***Exercice 2 :*** On donne $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$, et une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^N$. Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$, de limite $\alpha \leqslant +\infty$. On note $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^N$ la fonction continue telle que $f(\alpha_n) = u_n$ pour tout $n$ et qui est affine sur chaque segment $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ $(n \geqslant 0)$. Montrer : $\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n \text{ existe}\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{t \longrightarrow \alpha} f(t) \text{ existe}\right)$.

En cas d'existence, ces limites sont égales.

## § IV.5 *FONCTIONS PÉRIODIQUES*

**DÉFINITION IV.5.1**

*Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Un réel $\tau$ est appelé* **une période** *de $f$ ssi $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x + \tau) = f(x)$. On dit alors que $f$ est* **$\tau$-périodique.**
*$f$ est dite* **périodique** *si elle admet* au moins une *période non nulle, et sinon $f$ est dite* **apériodique.**

Fixons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, et notons $\mathscr{P}_f$ l'ensemble de ses périodes. Il est clair que $0 \in \mathscr{P}_f$ et que, si $\tau_1 \in \mathscr{P}_f$ et $\tau_2 \in \mathscr{P}_f$, alors $\tau_1 - \tau_2 \in \mathscr{P}_f$. Donc $\mathscr{P}_f$ est un *sous-groupe additif* de $\mathbb{R}$, appelé **groupe des périodes** de $f$. On sait d'après le § I.5 que trois cas seulement sont possibles :

- ou bien $\mathscr{P}_f = \{0\}$ : alors $f$ est apériodique
- ou bien $\mathscr{P}_f \neq \{0\}$ et $\mathscr{P}_f$ est discret : dans ce cas, on a $\mathscr{P}_f = T\mathbb{Z}$, avec $T > 0$ défini de manière unique par $T = \text{Min}\ (\mathscr{P}_f \cap \mathbb{R}_+^*)$. On dit alors que $T$ est **la plus petite période** de $f$
- ou bien $\mathscr{P}_f$ est partout dense dans $\mathbb{R}$ : dans ce cas, $f$ est périodique et admet des périodes non nulles aussi petites que l'on veut.

***Exemple 1 :*** Si $f$ est constante, alors $\mathscr{P}_f = \mathbb{R}$, et réciproquement. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ vaut 1 pour $x \in \mathbb{Q}$ et 0 pour $x \notin \mathbb{Q}$, on a $\mathscr{P}_f = \mathbb{Q}$, ce qui relève du troisième cas ci-dessus.

***Exemple 2 :*** Soit $G$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $G \subset \mathscr{P}_f$ forme une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Celles parmi ces fonctions qui sont à valeurs réelles constituent une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

***Exemple 3 :*** Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [a, a + T[ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Il existe une, et une seule, fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui prolonge $\varphi$ et qui soit $T$-périodique : c'est $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \varphi\left(x - T \times \text{Ent}\left(\dfrac{x - a}{T}\right)\right)$. On dit que $f$ est obtenue en **prolongeant $\varphi$ par $T$-périodicité.** Par exemple, à partir de $\varphi : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x$, on obtient la fonction $f : x \mapsto x - \text{Ent}\ (x)$ qui est réglée. A partir de $\varphi : [0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x}{1 - x}$ on obtient une fonction $f$ non bornée.

Le théorème suivant montre que, dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique, une fonction périodique admettra une plus petite période :

**THÉORÈME IV.5.1**

*Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction* **périodique** *et* **non constante.** *Si $f$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ en au moins un point $a \in \mathbb{R}$, alors $f$ admet une plus petite période.*

*Démonstration :*

Par hypothèse, le groupe $\mathscr{P}_f$ des périodes de $f$ est $\neq \{0\}$ ; il s'agit de montrer qu'il est discret. Soit $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, et $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) \neq l$. Puisque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, il existe un intervalle $J = ]a, a + r]$, avec $r > 0$, tel que

$$|f(x) - l| \leqslant \frac{1}{2} |f(b) - l| \quad \text{pour tout} \quad x \in J .$$

Ayant ainsi choisi $J$, pour tout réel $T \in ]0, r[$, l'ensemble $J + T\mathbb{Z} = \{x + nT\}_{(x, n) \in J \times \mathbb{Z}}$ n'est autre que $\mathbb{R}$. Si $T \in ]0, r[$ était période de $f$, on aurait donc $|f(b) - l| \leqslant \frac{1}{2} |f(b) - l|$, ce qui n'est pas. Donc $\mathscr{P}_f \cap ]0, r[ = \varnothing$ et le groupe $\mathscr{P}_f$ est bien discret. ■

Dans la démonstration précédente, si $f$ est à valeurs réelles, le signe $|\ |$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Le lecteur aura pu remarquer que l'on n'a utilisé que l'hypothèse de l'existence d'une limite à droite de $f$ en $a$.

Une conséquence immédiate est que, si $f$ est *continue par morceaux sur tout intervalle compact,* ou même seulement *réglée sur tout intervalle compact* et si $f$ est de plus périodique et non constante, alors elle admet une plus petite période.

L'étude précédente se généralise sans peine au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.

**Généralisation de la notion de fonction périodique**

On est parfois obligé de considérer des fonctions périodiques *non partout définies* sur $\mathbb{R}$. Précisons cette notion.

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\tau$ un réel que l'on peut supposer $> 0$. Nous dirons que l'*ensemble $A$ est $\tau$-périodique* ssi

$$(\forall a \in A) \quad a + \tau\mathbb{Z} \subset A$$

(autrement dit ssi $A$ est globalement invariant dans la translation par $\tau$). Il revient au même de dire que la fonction indicatrice $\chi_A$ de $A$, définie par $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ si $x \in A$ et $x \mapsto 0$ si $x \notin A$ est $\tau$-périodique. Sous cette forme on voit que l'ensemble des $T \in \mathbb{R}$ tel que $A$ soit $T$-périodique est un sous-groupe additif $\mathscr{T}_A$ de $\mathbb{R}$, égal au groupe des périodes de $\chi_A$ (1). Trois cas seulement sont possibles :

- ou bien $\mathscr{T}_A = \{0\}$ et on dit alors que $A$ est *apériodique*
- ou bien $\mathscr{T}_A$ est *discret*, donc de la forme $T\mathbb{Z}$ avec $T > 0$ défini de manière unique et on dit alors que $A$ est *périodique de plus petite période $T$*
- ou bien $\mathscr{T}_A$ est *partout dense* dans $\mathbb{R}$ : dans ce cas on dit encore que $A$ est périodique, mais il y a des périodes non nulles aussi petites que l'on veut.

Si $x \in \mathbb{R} \backslash A$, on a : $(x + \mathscr{T}_A) \cap A = \varnothing$ . Par conséquent, lorsque $\mathscr{T}_A$ est partout dense dans $\mathbb{R}$, si $A \neq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \backslash A$ est lui aussi partout dense

(1) Donc aussi de $\chi_{\mathbb{R} \backslash A} = \chi_{\mathbb{R}} - \chi_A$, d'où $\mathscr{T}_A = \mathscr{T}_{\mathbb{R} \backslash A}$.

dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, **lorsque Int (A) $\neq \varnothing$ , ou bien $A$ est apériodique, ou bien $A$ admet une plus petite période.**

Dans la pratique, les domaines de définition des fonctions que l'on étudie ont généralement des points intérieurs, ce qui entraîne que l'on se trouve nécessairement dans l'un de ces deux cas.

**DÉFINITION IV.5.2**

*Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_A$ le groupe des périodes de $\chi_A$ et $\tau \in \mathcal{T}_A$. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **$\tau$-périodique** ssi $(\forall x \in A) \quad f(x + \tau) = f(x)$. On dit aussi que $\tau$ est **une période** de $f$.*

*$f$ est dite **périodique** ssi elle admet une période* non nulle, *sinon $f$ est dite **apériodique.***

Pour $A = \mathbb{R}$, on retrouve bien la notion ordinaire étudiée au début du § IV.5. Il est clair que l'ensemble $A$ peut être périodique (resp. $\tau$-périodique) sans que $f$ le soit, mais dans tous les cas l'ensemble des périodes de $f$ constitue un **sous-groupe** $G_f$ de $\mathcal{T}_A$, éventuellement réduit à $\{0\}$ ssi $f$ est apériodique.

Lorsque $f$ est périodique, $G_f \neq \{0\}$ est soit discret, soit dense dans $\mathbb{R}$. Dans le cas discret, on a $G_f = \omega\mathbb{Z}$, avec $\omega > 0$, $\omega \in \mathcal{T}_A$ étant défini de manière unique par $f$: on dit alors que $\omega$ est *la plus petite période* de $f$.

Lorsque Int $(A)$ est non vide, que $A$ est périodique et $\neq \mathbb{R}$, on a : $\mathcal{T}_A = T\mathbb{Z}$, où $T$ est la plus petite période *de $A$*. Dans ce cas, si une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique, on a nécessairement $G_f = \omega\mathbb{Z}$, avec $\omega = kT$, $k \in \mathbb{N}^*$ étant défini de manière unique par $f$.

***Exemple 4 :*** Soit $\varphi$ la fonction définie par $x \mapsto -1$ si $x \in ]-1, 0[$ et $x \mapsto 1$ si $x \in ]0, 1[$ et $f$ la fonction 2-périodique qui prolonge $\varphi$. Sa période 2 est le double de la période de son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

***Exemple 5 :*** Soit $\theta$ un nombre *irrationnel* supposé période d'une fonction donnée $f$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\theta\mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $g : x \mapsto f(x) + \; f(\theta x)$ est *apériodique.*

*Solution :* Soit $D$ cet ensemble et $A = \mathbb{R}\backslash D = \theta\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}$. On a : $\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_A$. Or si $T \in \mathcal{T}_A$ il est de la forme $m + n\theta$, avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Si le translaté de 0, c'est-à-dire $T$, est élément de $\mathbb{Z}$, alors $n = 0$ et $T = m$, mais alors le translaté de $\theta \in A$ est $m + \theta$ qui ne peut appartenir à $A$ que si $m = 0$, d'où $T = 0$. On raisonne de même si $T \in \theta\mathbb{Z}$ avec la même conclusion $T = 0$.

***Exercice 1 :*** Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ périodique et admettant une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$ ?

Et d'une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et qui serait périodique ? Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (resp. de $\mathbb{C}[X]$) peut-il donner naissance à une fonction polynomiale périodique ?

***Exercice 2 :*** Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est *continue* et périodique, montrer qu'elle est uniformément continue ; si $f$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que son image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle compact.

***Exercice 3 :*** Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique, non constante, monotone sur au moins un intervalle de longueur $> 0$ admet une plus petite période.

***Exercice 4 :*** *a*) Soit un réel $T > 0$. Trouver les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $g(t + T) = -g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

*b*) Soit $k \in \mathbb{R}^*$, $k \neq 1$. Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $g(t + T) = kg(t)$ ? (On distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$.)

*c*) Soit $\zeta \in \mu_n$ $(n \geqslant 2)$. Quelles sont les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $g(t + T) = \zeta g(t)$ ? (On admettra, pour cette question *c*), les propriétés connues de $z \mapsto \exp(z)$ qui ne seront établies qu'au Chapitre V.)

***Exercice 5 :*** Soit $A$ un réel $> 0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p :$ $]A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions rationnelles, et $a_1, \ldots, a_p$ des réels $(a_1 > a_2 > \cdots > a_p ; p \geqslant 1)$. Peut-il exister une fonction périodique $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui coïncident sur $]A, +\infty[$ avec la fonction $t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(t) \exp(a_i t)$, $]A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ?

***Exercice 6 :*** Soit $A$ un réel $> 0$, $p$ un entier $\geqslant 1$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p :$ $]A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions rationnelles et $P_1, \ldots, P_p :$ $]A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ des fonctions polynomiales. Peut-il exister $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique qui coïncide sur $]A, +\infty[$ avec la fonction $]A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(t) \operatorname{Log} P_i(t)$ ?

***Exercice 7 :*** Soit deux fonctions $f_1$ et $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *continues,* périodiques et non constantes, de plus petites périodes respectives $T_1$ et $T_2$.

*a*) Si $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$, quelle est la plus petite période de $f_1 + f_2$ ? L'inclusion $\mathscr{P}_f \cap \mathscr{P}_g \subset \mathscr{P}_{f+g}$ peut-elle être stricte ?

*b*) Si $\dfrac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, alors les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont *algébriquement indépendantes* sur $\mathbb{C}$ (cf. Tome 1, § X.1), autrement dit, les relations $n \geqslant 1$,

$$A_i \in \mathbb{C}[X], \ldots, A_n \in \mathbb{C}[X] \quad \text{et} \quad A_0(f_1) + A_1(f_1)\, f_2 + \cdots + A_n(f_1)\,(f_2)^n = 0$$

entraînent $A_0 = A_1 = \cdots = A_n = 0$.

***Exercice 8 :*** Soit deux fonctions $f_1$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continues,* périodiques et non constantes, de plus petites périodes respectives $T_1$ et $T_2$, avec $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $f_1 + f_2$ est apériodique.

## § IV.6 *DÉRIVÉES*

La notion de dérivée n'est pas plus difficile à exposer pour les fonctions « vectorielles » à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ou même dans $\mathbb{C}^p$ que pour les fonctions numériques. Aussi, dans tout ce § nous désignerons indifféremment par $K$ soit le corps $\mathbb{R}$ des réels, soit le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

**DÉFINITION IV.6.1**

*Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $I$ un* intervalle *non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K^p$ une fonction. On dit que $f$ est* **dérivable en un point** $t_0 \in I$ s

*$I \setminus \{t_0\} \longrightarrow K^p$, $t \mapsto \dfrac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0))$ admet en $t_0$ une limite dans $K^p$ ; si c'est le cas, cette limite est appelée* **dérivée** *de $f$ en $t_0$ et notée $f'(t_0)$. On dit que $f$ est* **dérivable** *(sur $I$) ssi elle l'est en tout point de $I$, et dans ce cas, la fonction $I \longrightarrow K^p$, $t \mapsto f'(t)$ s'appelle (fonction)* **dérivée** *de $f$ et se note $f'$. On écrit aussi : $f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$ $(t \in I)$.*

Avec ces notations, soit $(f_1, \ldots, f_p)$ les composantes de $f$. La définition même des limites des fonctions à valeurs dans $K^p$ montre que *$f$ est dérivable en $t_0 \in I$ ssi $f_k$ est dérivable en $t_0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$*, et que, si c'est le cas, on a $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_p'(t_0))$.

On notera que la définition précédente s'applique non seulement si $t_0$ est un point intérieur à $I$, mais également si c'est une extrémité de l'intervalle $I$.

**Interprétation géométrique**

Avec les notations ci-dessus, si $f$ est dérivable en $t_0$, et si $t_0$ est *intérieur* à $I$, la droite affine réelle de représentation paramétrique $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times K^p$, $\lambda \mapsto (t_0, f(t_0)) + (\lambda, \lambda f'(t_0))$ s'appelle la *tangente* en $(t_0, f(t_0))$ *au graphe* $\Gamma_f$ de $f$ dans $\mathbb{R} \times K^p$. La demi-droite obtenue quand $\lambda$ décrit $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$) s'appelle *demi-tangente à droite* à $\Gamma_f$ en ce point $(t_0, f(t_0))$ (resp. *demi-tangente à gauche* en ce même point à $\Gamma_f$). Quand $I$ est minoré et fermé à gauche, pour $t_0 = \text{Min}(I)$ on ne retient que les notions de tangente et de demi-tangente à droite en $(t_0, f(t_0))$. Quand $I$ est majoré et fermé à droite, si $t_0 = \text{Max}(I)$, ce sont bien sûr les notions de tangente et de demi-tangente à gauche qui sont retenues. Nous approfondirons la notion de « *tangente* » dans le tome de Géométrie, mais nous pouvons déjà visualiser ces notions pour $K = \mathbb{R}$ et $p = 1$ à l'aide d'un dessin :

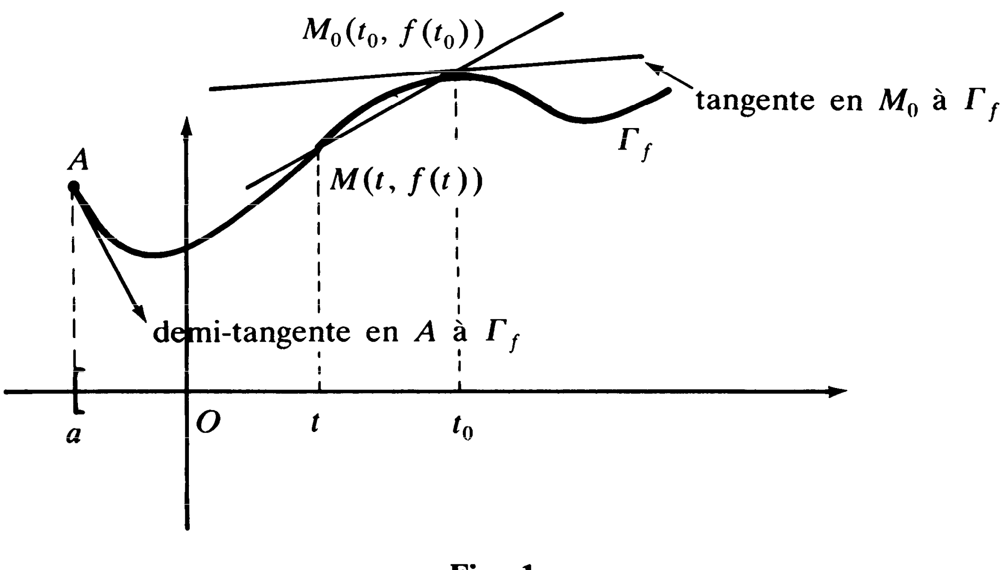



**Fig. 1.**

Sur cette figure (où l'on a supposé que $I$ admet un minimum $a \in \mathbb{R}$), on peut interpréter $\frac{1}{t - t_0}(f(t) - f(t_0))$ qui est ici un nombre réel comme étant le *coefficient angulaire* de la droite affine qui joint $M_0 = M(t_0) = (t_0, f(t_0))$ au point $M = M(t) = (t, f(t))$, avec $t \in I \setminus \{t_0\}$.

**Interprétation cinématique**

Prenons $K = \mathbb{R}$ et $p = 3$ et identifions $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ à l'Univers de la relativité restreinte, les axes canoniques de $\mathbb{R}^4$ étant ceux d'un référentiel galiléen $\mathcal{G}$ fixé une fois pour toutes, l'axe $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ étant celui du *temps propre lié à ce référentiel ;* le graphe $\Gamma_f$ s'interprète comme l'ensemble des positions, dans cet Univers, d'un certain point mobile qui, à la date $t$ de $\mathcal{G}$, occupe la position $f(t)$ dans l'ensemble $\{t\} \times \mathbb{R}^3$ des points-Univers de date $t$ dans ce référentiel $\mathcal{G}$. Si $f$ est dérivable en $t_0 \in I$, le vecteur $(1, f'(t_0)) \in \mathbb{R}^4$ est le *vecteur-vitesse spatio-temporel* du mobile en le point $(t_0, f(t_0)) \in \Gamma_f$ ; et $f'(t_0)$ est le *vecteur-vitesse spatial,* à la date $t_0$ de $\mathcal{G}$, relatif à $\mathcal{G}$ (c'est ce dernier vecteur qui est le vecteur-vitesse ordinaire du point mobile en Mécanique « classique », où $t$ désigne alors le temps « absolu »).

**Dérivées à droite ou à gauche**

DÉFINITION **IV.6.2**

*Avec les notations de la définition* IV.6.1, *si $t_0 \in I$ et n'est pas minimum (resp. maximum) de I, on dit que f est* **dérivable à gauche en $t_0$** *(resp. dérivable à droite en $t_0$), ssi $g = f|_{I \cap ]-\infty, t_0]}$ est dérivable en $t_0$ (resp. $g = f|_{I \cap [t_0, +\infty[}$ est dérivable en $t_0$). L'élément $g'(t_0)$ s'appelle alors* **dérivée à gauche** *(resp. à droite) de $f$ en $t_0$ et se note $f'_g(t_0)$ (resp. $f'_d(t_0)$). On dit que f est* **dérivable à gauche** *(resp. à droite) sur $I$ si $f'_g(t_0)$ (resp. $f'_d(t_0)$) existe en tout point $t_0$ où on peut la définir. Dans ce cas la fonction $t \mapsto f'_g(t)$ (resp. $t \mapsto f'_d(t)$), définie sur l'intervalle formé par ces points, est appelée* **dérivée à gauche** *(resp. à droite) de f.*

On notera que si $a \in I$ est l'extrémité gauche de $I$, on ne peut pas définir en ce point de dérivée à gauche, mais qu'en revanche les notions de dérivée de $f$ en $a$ et de dérivée à droite de $f$ en $a$ coïncident.

Enfin, lorsque $t_0$ est intérieur à $I$, il est clair que $f'(t_0)$ *existe* ssi $f'_g(t_0)$ et $f'_d(t_0)$ *existent et sont égales* (cf. § IV.4), et si c'est le cas, on a : $f(t_0) = f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$.

Si $f$ est dérivable à gauche en $t_0 \in I$, la demi-tangente à gauche en $M_0$ $(t_0, f(t_0))$ au graphe de $f|_{I \cap ]-\infty, t_0]}$ s'appelle **demi-tangente à gauche** en $M_0$ à $\Gamma_f$. On définit de même, lorsque $f'_d(t_0)$ existe, la notion de *demi-tangente à droite* en $M_0$ à $\Gamma_f$ et ces notions coïncident avec celles définies précédemment dans le cas où $f'(t_0)$ existait, mais mainten envisager le cas où $f'_g(t_0) \neq f'_d(t_0)$ et l'on dit alors que $\Gamma_f$ présente en $M_0$ un *point anguleux*.

**Dérivabilité et continuité**

Conservons les notations de la définition IV.6.1 et soit $\nu$ une norme standard de $K^p$. Dire que $f'(t_0)$ existe ($t_0 \in I$) se traduit, en utilisant la proposition IV.4.1 (et son analogue avec $\mathbb{C}$), par :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \alpha > 0) \quad (\forall t \in I)$$
$$(|t - t_0| < \alpha) \Rightarrow (\nu(f(t) - f(t_0)) \leqslant \varepsilon |t - t_0|)\,.$$

On voit bien que cette relation entraîne $f(t) - f(t_0) \underset{t \longrightarrow t_0}{\longrightarrow} 0$. **La dérivabilité de $f$ en un point $t_0 \in I$ entraîne donc sa continuité en ce point.** De même, si $f'_d(t_0)$ (resp. $f'_g(t_0)$) existe, alors $f$ est continue à droite (resp. à gauche) en $t_0$.

Il est facile de se convaincre que les réciproques de ces propriétés sont fausses, $f$ pouvant parfaitement être continue en $t_0$ sans y être dérivable, comme le montre l'exemple de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.

***Exemple 1 :*** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est évidemment continue en 0. Pour savoir si elle y est dérivable, on forme

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \longrightarrow 0,\, x > 0}{\longrightarrow} +\infty$ et n'a donc pas de limite *dans* $\mathbb{R}$ pour $x \longrightarrow 0$. $f$ n'est donc pas dérivable (ni même dérivable à droite) en 0.

On sait, depuis maintenant plus d'un siècle, construire des fonctions continues en tout point d'un intervalle qui ne sont dérivables nulle part. Si certains mathématiciens ont pu « se détourner avec horreur » de ce type de fonctions, force est de constater qu'elles redeviennent d'actualité et suscitent de nos jours un grand intérêt surtout avec l'apparition de la théorie des *fractals* ([1]) de B. Mandelbrot, et l'utilisation des ordinateurs.

Signalons également que le fait pour une fonction $f$ d'être dérivable sur $I$ n'entraîne pas nécessairement que sa dérivée $f'$ soit une fonction continue sur $I$ (un exemple sera donné au Chapitre V, exercice 3 du § V.4).

**Calcul de dérivées**

Ci-après, nous désignerons par $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et par $u$, $v$, ... des fonctions $I \longrightarrow K^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

---

([1]) Les fractals sont des objets géométriques caractérisés par une « dimension » non entière, et le plus souvent par une « similitude interne » qui leur confère une étrange beauté et leur permet d'imiter des formes compliquées rencontrées dans la nature. L'exemp[illegible] est la courbe « flocon de neige » de *Von Koch* (1904).

• *Dérivée d'une fonction constante.* Il est clair qu'une telle fonction est partout dérivable, et que sa dérivée est *nulle*.

• *K-linéarité de l'opérateur de dérivation.* Soit $t_0 \in I$. Si $u'(t_0)$ et $v'(t_0)$ existent, alors pour tous $(\lambda, \mu) \in K^2$, $(\lambda u + \mu v)'(t_0)$ existe et vaut $\lambda u'(t_0) + \mu v'(t_0)$. C'est une conséquence immédiate de la linéarité du passage à la limite (cf. § IV.4). Cette propriété entraîne donc que l'ensemble des fonctions $I \longrightarrow K^p$ dérivables en $t_0$ (resp. sur $I$) est un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(I, K^p)$ et que l'application $f \mapsto f'(t_0)$ (resp. $f \mapsto f'$) définie sur ce sous-$K$-ev est linéaire.

• *Dérivée du produit de deux fonctions scalaires.* Soit $p = 1$. Si $u'(t_0)$ et $v'(t_0)$ existent, alors $(uv)'(t_0)$ existe et vaut $u(t_0)\,v'(t_0) + u'(t_0)\,v(t_0)$. Il suffit pour le voir d'écrire

$$\frac{1}{t - t_0}\,[(uv)(t) - (uv)(t_0)]$$

sous la forme
$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0}\,v(t) + \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}\,u(t_0)$$

et de passer à la limite. *L'ensemble des fonctions dérivables* en $t_0$ (resp. sur $I$) *forme donc une sous-algèbre* de $\mathscr{F}(I, K)$.

• *Dérivée du quotient de deux fonctions scalaires.* Soit encore $p = 1$. Si $u$ est une fonction $I \longrightarrow K$ qui ne s'annule pas sur $I$ et si $u'(t_0)$ existe, alors $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(t_0)$ existe et vaut $\dfrac{-u'(t_0)}{u^2(t_0)}$.

Il suffit d'écrire, pour $t \in I \setminus \{t_0\}$, $\dfrac{1}{t - t_0}\left(\dfrac{1}{u(t)} - \dfrac{1}{u(t_0)}\right)$ sous la forme $\dfrac{-1}{u(t_0)\,u(t)} \cdot \dfrac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0}$ et de prendre la limite pour $t \longrightarrow t_0$, $t \neq t_0$. A partir de là on déduit le théorème sur la dérivée du quotient $\dfrac{u}{v}$ qu'on écrit $u \times \dfrac{1}{v}$, ce qui donne la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ (en supposant $u$ et $v$ dérivables et $v(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

• *Dérivée du produit d'une fonction vectorielle par une fonction scalaire.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda$ une fonction « scalaire » : $I \longrightarrow K$ et $u$ une fonction « vectorielle » : $I \longrightarrow K^p$. Si $\lambda'(t_0)$ et $u'(t_0)$ existent, alors la fonction $\lambda u$ est dérivable en $t_0$ et $(\lambda u)'(t_0) = \lambda'(t_0)\,u(t_0) = \lambda(t_0)\,u'(t_0)$. En effet, en écrivant

$$\frac{1}{t - t_0}\,[(\lambda u)(t) - (\lambda u)(t_0)] = \frac{1}{t - t_0}\,[u(t) - u(t_0)]\,\lambda(t) + \frac{\lambda(t) - \lambda(t_0)}{t - t_0}\,u(t_0)$$

et en utilisant les propriétés des limites, on a bien le résulta

• *Dérivée d'une fonction composée.* Soit $I$ et $J$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f : I \longrightarrow J$, $x_0 = f(t_0)$ et $g : J \longrightarrow K^p$. Si $f'(t_0)$ et $g'(x_0)$ existent, alors $(g \circ f)'(t_0)$ existe et vaut $f'(t_0) \times g'(x_0)$.

En effet, soit $\Delta : J \longrightarrow E$ telle que : si $x \neq x_0$, $\Delta(x) = \dfrac{1}{x - x_0}(g(x) - g(x_0))$ et $\Delta(x_0) = g'(x_0)$. La fonction $\Delta$ ainsi définie est continue en $x_0$.

Pour $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a :

$$\frac{1}{t - t_0}(g \circ f(t) - g \circ f(t_0)) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}(\Delta \circ f(t)),$$

et un passage à la limite pour $t \longrightarrow t_0$ permet maintenant de conclure, l'introduction de la fonction auxiliaire $\Delta$ ayant permis d'éviter le piège de dénominateurs nuls $x - x_0$.

• *Dérivée d'une fonction réciproque.* Soit $I$ et $J$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow J$ une *bijection* continue et strictement monotone de $I$ sur $J$. Désignons par $g$ la bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle}$. Supposons $f$ dérivable en $x_0 \in I$ et $f'(x_0) \neq 0$. Alors $g$ est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$, et on a :

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

En effet, soit $\Delta : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Pour $y \in J \setminus \{y_0\}$, on a

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f \circ g(y) - f \circ g(y_0)} = \frac{1}{\Delta(g(y))}.$$

Or on sait que $g$ est continue (cf. théorème IV.2.2), d'où $g(y) \underset{y \longrightarrow y_0,\, y \neq y_0}{\longrightarrow} x_0$.

De plus $\Delta(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$ par hypothèse.

En utilisant le théorème IV.1.2 (composition des limites) et la limite de l'inverse (cf. tableau du § IV.1), on peut alors conclure.

**Dérivabilité de quelques fonctions usuelles**

Commençons par examiner les plus simples des fonctions définies sur un intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ et à déterminer leurs dérivées.

Rappelons qu'une fonction constante a pour dérivée la fonction nulle. Soit ensuite $\psi : I \longrightarrow K$, $t \mapsto t$. Elle est évidemment dérivable sur $I$ et a pour dérivée $\psi' : I \longrightarrow K$, $t \mapsto 1$. La $K$-algèbre engendrée par cette fonction dans $\mathscr{F}(I, K)$ est celle des *fonctions polynomiales* sur $I$. Il résulte dérivation que nous venons d'établir que *toute fonction polynomiale sur I à valeurs dans K est dérivable.* De plus si l'on désigne par $\psi_k$ la fonction $t \mapsto t^k$ (où $k \in \mathbb{N}^*$), on voit facilement par récurrence que $\psi_k$ a pour dérivée $k\psi_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 2$ (dérivée d'un produit). Il en résulte (par linéarité) que la dérivée de la fonction polynomiale $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ ($a_k \in K$ pour tout $k$) est la fonction polynomiale $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$.

En utilisant ensuite la dérivation d'un quotient, on s'aperçoit que *toute fonction rationnelle $f : I \longrightarrow K$ est dérivable :* si $f(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$, avec $P$ et $Q$ polynomiales et $Q(t) \neq 0$ pour $t \in I$, on a :

$$f'(t) = \frac{Q(t)\,P'(t) - P(t)\,Q'(t)}{Q^2(t)},$$

et cela montre, que $f'$ est encore rationnelle sur $I$. En particulier on retiendra que, si $0 \notin I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est dérivable, de dérivée $\dfrac{-1}{t^2}$.

**THÉORÈME IV.6.1**

> *La fonction* $\mathrm{Log} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable, et l'on a :* $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $(\mathrm{Log})'(x) = \dfrac{1}{x}$.

*Démonstration :*

Commençons par démontrer que Log est dérivable au point 1. Pour cela posons, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_p = p \,\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{p}\right)$. Nous avons vu au § II.3 que $u_p \underset{p \to \infty}{\uparrow} 1$. Soit alors $t$ un réel $> 1$, dont la partie entière Ent $(t)$ sera désignée par $n(t)$, ou plus brièvement par $n$. On sait que la fonction Log est croissante, d'où :

$$\frac{t}{n+1} u_{n+1} = t \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant t \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{t}\right) \leqslant$$
$$\leqslant t \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{t}{n} u_n .$$

Or $n = n(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $\dfrac{t}{n(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{t}{n(t)+1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ car $0 \leqslant t - n(t) < 1$ et on vient de rappeler que $u_{n(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. L'encadrement ci-dessus montre donc que $t \,\mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et en posant $t = \dfrac{1}{x}$, on en déduit que la fonction Log est *dérivable à droite* en 1 et que $(\mathrm{Log})'_d(1) = 1$.

Si maintenant $x \in \,]0, 1[$ on peut écrire

$$\frac{\operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log} 1}{x - 1} = \frac{\operatorname{Log}(1 - u)}{-u} = \frac{1}{u} \operatorname{Log} \frac{1}{1 - u} =$$
$$= \frac{1}{u} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{u}{1 - u}\right) = \frac{1 + \theta}{\theta} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{\theta}\right)$$

en posant $\theta = \dfrac{1 - u}{u} \underset{u \to 0,\, u > 0}{\longrightarrow} +\infty$ et, compte tenu du résultat précédent

$$\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1\,.$$

Donc $\dfrac{\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} 1}{x - 1} \underset{x \to 1,\, x < 1}{\longrightarrow} 1$, Log est *dérivable à gauche* en 1 et $(\operatorname{Log})'_g(1) = 1$. En résumé $(\operatorname{Log})'(1)$ existe et vaut 1.

Il est maintenant facile de prouver la dérivabilité au point $x_0 > 0$. En effet, pour $x > 0$ et $x \neq x_0$, on a

$$\frac{\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} x_0}{x - x_0} = \frac{\operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{x - x_0}{x_0}\right)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{\operatorname{Log}(1 + X)}{X}\,,$$

en posant $X = \dfrac{x - x_0}{x_0}$, d'où immédiatement

$$\frac{\operatorname{Log} x - \operatorname{Log} x_0}{x - x_0} \underset{x \to x_0,\, x \neq x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{x_0}\,,$$

qui est le résultat annoncé. ■

**COROLLAIRE**

(I) *Pour* $a > 0$, $a \neq 1$, *la fonction* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dérivable et sa dérivée est* $\dfrac{1}{x \operatorname{Log} a}$ *pour tout* $x > 0$.

(II) *Pour* $a > 0$, $a \neq 1$, *la fonction* $\mathscr{E}_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ *est dérivable et on a* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \operatorname{Log} a$. *En particulier* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$.

(III) *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ *est dérivable et sa dérivée est* $\alpha x^{\alpha - 1}$ *pour tout* $x$.

*Démonstration :*

Pour $x > 0$ on a $\log_a x = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a}$, d'où immédiatement (I).

Par ailleurs, on sait que $x \mapsto a^x$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la fonction réciproque de $\log_a$, qui est continue, bijective, strictement monotone et dérivée $\dfrac{1}{x \operatorname{Log} a}$ pour tout $x > 0$. La fonction réciproque est donc dérivable, puisque la dérivée de $\log_a$ est partout $\neq 0$, et la dérivée de $x \mapsto a^x$ au point $x \in \mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{(\log_a)'(a^x)} = a^x \operatorname{Log} a$. En particulier $(\exp)'(x) = \exp(x)$. Enfin, pour $x > 0$, $x^\alpha$ s'écrit $\exp(\alpha \operatorname{Log} x)$, d'où par dérivation d'une fonction composée $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable pour tout $x > 0$, de dérivée

$$\frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \operatorname{Log} x) = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}. \quad \blacksquare$$

Le dernier résultat est bien en accord avec le calcul antérieur de la dérivée d'une fonction rationnelle dans le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où $\alpha > 0$ on peut prolonger la fonction $x \mapsto x^\alpha$ par continuité en posant $f(0) = 0$. Mais attention ! la fonction ainsi prolongée n'est dérivable au point 0 que si $\alpha \geqslant 1$, et alors sa dérivée en 0 est nulle si $\alpha > 1$ (et vaut 1 si $\alpha = 1$).

A partir des résultats précédents, on obtient facilement la dérivabilité des fonctions $f$ du type $x \mapsto [u(x)]^{v(x)}$, où $u$ est définie sur un intervalle $I$ où elle est dérivable mais ne prend que des valeurs $> 0$, $v$ étant définie sur $I$ et dérivable. On écrit

$$f(x) = \exp[v(x) \operatorname{Log} u(x)],$$

ce qui prouve la dérivabilité de $f$ et donne la valeur de la dérivée au point $x_0$ :

$$f'(x_0) = f(x_0)\left[v'(x_0) \operatorname{Log}(u(x_0)) + v(x)\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}\right];$$

mais pour ce type de fonction il paraît utile d'introduire une notion nouvelle :

### Dérivée logarithmique

Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable en $x_0$. La fonction $x \mapsto \operatorname{Log} u(x)$ est donc dérivable en $x_0$, de dérivée $\dfrac{u'(x_0)}{u(x_0)}$. On dit que $\dfrac{u'(x_0)}{u(x_0)}$ est la *dérivée logarithmique* de $u$ en $x_0$. Le plus remarquable, c'est que si $v$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$ et si l'on calcule la dérivée de $\operatorname{Log}|v|$ au point $x_0$, on obtient $\dfrac{-v'(x_0)}{-v(x_0)}$, soit encore $\dfrac{v'(x_0)}{v(x_0)}$, comme dans le cas d'une fonction à valeurs $> 0$.

L'intérêt de cette notion est qu'elle se prête bien au calcul de la dérivée d'une fonction $f$ définie comme produit et quotient de fonctions plus simples. Par exemple, si $u_1, u_2, \ldots, u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ (ou pour cer elles $I \longrightarrow \mathbb{R}_-^*$) sont dérivables en $x_0$ et si on pose $u = u_1 u_2 \dots u_n$, alors $u$ est dérivable en $x_0$, et

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k'(x_0)}{u_k(x_0)},$$

autrement dit : *la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques des facteurs.* Il suffit de le vérifier pour deux facteurs et de l'étendre par récurrence à un nombre fini quelconque de facteurs. De même la dérivée logarithmique d'un *quotient* est la différence des dérivées logarithmiques du numérateur et du dénominateur. Enfin la dérivée logarithmique d'une *puissance* $u^\alpha$ est égale à $\alpha \dfrac{u'}{u}$, comme nous l'avons déjà remarqué.

Résumons dans un tableau les résultats les plus importants du § IV.6.

| | |
|---|---|
| $(u+v)' = u' + v'$ | $(\lambda u)' = \lambda u'$ si $\lambda$ est constant |
| $(uv)' = u'v + uv'$ | $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$ | $(\lambda u)' = \lambda' u + \lambda u'$ |
| $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$ | $(f^{\langle -1 \rangle})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{\langle -1 \rangle}}$ |
| $(\mathrm{Log}\, \lvert u \rvert)' = \dfrac{u'}{u}$ | $(\exp)' = \exp$ |
| $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ | $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ |

Ce tableau pourra être complété plus loin.

***Exercice 1 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et $L \in \mathbb{R}$. Pour que $f'(0)$ existe et soit égal à $L$, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \exists \alpha > 0 \mid \forall h \in ]0, \alpha], \quad \forall k \in ]0, \alpha], \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - L \right| \leqslant \varepsilon .$$

***Exercice 2 :*** Soit $a$ un réel $> 0$ $(a \neq 1)$. Montrer que les graphes $\Gamma_1$ et $\Gamma_a$ des fonctions $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Log}\, x$ et $x \mapsto a\, \mathrm{Log}\, x$, ont une et une seule tangente commune.

Montrer qu'il existe une et une seule homothétie affine $h$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $h(\Gamma_1) = \Gamma_a$, et l'expliciter (centre et rapport).

***Exercice 3 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0, et $C$ un réel $> 1$. Montrer que $f'(0)$ existe ssi $L = \lim\limits_{x \to 0,\, x \neq 0} \dfrac{f(Cx) - f(x)}{x}$ existe. Si c'est le cas, quelle est la relation entre $L$ et $f'(0)$ ?

***Exercice 4 :*** Montrer que la fonction continue $f : ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans l'exercice 11 du § IV.2 n'est dérivable en aucun point.

***Exercice 5 :*** Pour $x \in ]0, 1[$, soit $(a_n(x))_{n \geq 1}$ le développement décimal *propre* de $x$. On pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{10^{2n}}$. Démontrer les propriétés suivantes : $f$ est strictement croissante, continue en tout $x \in ]0, 1[ \setminus \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$, continue à droite partout.

Si $x_0 \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$, c'est-à-dire s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_0 = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n(x_0)}{10^n}$, et si tous les $a_n(x_0)$ sont $\geq 1$, alors $f(x_0+0) - f(x_0-0) = \frac{9}{10^{2m+1}}$.

Enfin, si les $a_n(x)$ sont tous $\leq 8$ sauf un nombre fini, $f'_d(x)$ existe et vaut 0 ; si les $a_n(x)$ sont tous $\geq 1$ sauf un nombre fini, $f'_g(x)$ existe et vaut 0.

***Exercice 6 :*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, à partir de $\varpi_1(x) = x$, on définit $\varpi_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varpi_n(x) = x^{\varpi_{n-1}(x)}$ $(n \geq 2)$. Montrer que $\varpi_n$ est dérivable et exprimer $\varpi'_n$ en fonction de $\varpi_1$, $\varpi_2$, ..., $\varpi_n$.

***Exercice 7 :*** Soit $f$ et $g$ deux fonctions *rationnelles* sur $\mathbb{R} \setminus E$ ($E$ fini), à valeurs réelles. On désigne par $\Phi$ la fonction obtenue en prolongeant par continuité, partout où c'est possible, la fonction $\mathbb{R} \setminus E \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) \exp g(t)$. Etudier la dérivabilité de $\Phi$.

***Exercice 8 :*** *a*) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable à droite au point $a \in I$. Montrer que $|f|$ est dérivable à droite en $a$ et calculer cette dérivée.

*b*) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable à droite au point $a \in I$. On désigne par $|f(x)|$ le module de $f(x)$. Montrer que $|f|$ est dérivable à droite au point $a$ et que $\left| |f|'_d(a) \right| \leq |f'_d(a)|$.

***Exercice 9 :*** Soit $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$. A-t-on nécessairement $\lim_{x \to b} f'(x) = +\infty$ ? Réciproque ?

***Exercice 10 :*** *a*) Montrer que la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow K^p$ qui est paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

*b*) Etudier les réciproques.

*c*) Sachant que $f$ est dérivable et que $\varphi$ définie par $\varphi(x) = 2f(x) - xf'(x)$ est paire, montrer que $f$ est paire.

N.B. On admettra que seules les fonctions constantes ont une dérivée nulle, ce qui sera prouvé au Chapitre V.

***Exercice 11 :*** Montrer que toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant en $x_0 \in I$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche admet aussi en ce point une « *dérivée symétrique* », c'est-à-dire que $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ a une limite finie, que l'on calculera, quand $h \longrightarrow 0$, $h \neq 0$. On note cette limite $f'_s(x_0)$. Prouver sur un exemple qu'une fonction $f$ peut avoir en un point une dérivée symétrique sans admettre en ce point ni dérivée à droite ni dérivée à gauche. Prouver que si $f$ est croissante et a une dérivée symétrique, cette dérivée symétrique est $\geq 0$.

Prouver enfin que si $f$ et $g$ sont *continues* en $x_0$ et ont des dérivées symétriques en ce point, $f+g$ et $fg$ aussi. Calculer $(f+g)'_s$ et $(fg)'_s$.

***Exercice 12 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0, avec $f(0) = 0$. Quelle est la limite des suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ ?

## § IV.7 *DÉRIVÉES SUCCESSIVES*

Continuons à désigner par $K$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**DÉFINITION IV.7.1**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $p$ un entier $\geqslant 1$, et $f : I \longrightarrow K^p$ une fonction. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on dit que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ ssi il existe une suite finie $f_0, f_1, \ldots, f_n$ de fonction $I \longrightarrow K^p$ telles que $f_0 = f$ et, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_i$ est dérivable et $f_i' = f_{i+1}$.*

Il est bien évident que si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$, la suite $f_0, f_1, \ldots, f_n$ vérifiant la définition précédente *est unique.* En conséquence, le terme d'indice $n$ de cette suite est alors bien défini et ne dépend que de $f$ et de $n$. On le notera $f^{(n)}$, en convenant que $f^{(0)} = f$ (on rencontre aussi les notations $\mathrm{D}^n f$ et $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$).

Il est également évident que *si $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$* avec $n \geqslant 2$, *alors pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$, $f$ est $m$ fois dérivable sur $I$* et la suite correspondant à l'entier $m$ est $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$. Quant à la fonction $f_m = f^{(m)}$, il est clair qu'elle est $n-m$ fois dérivable sur $I$, la suite correspondant à $f^{(m)}$ pour l'entier $n-m$ étant $(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)$. En particulier $f^{(n)} = (f^{(m)})^{(n-m)}$. *Réciproquement,* si $f$ est $m$ fois dérivable et si $f^{(m)}$ est $n-m$ fois dérivable, alors $f$ est $n$ fois dérivable et on a $f^{(n)} = (f^{(m)})^{(n-m)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, *l'ensemble $\mathscr{D}^n(I, K^p)$ des fonctions $n$ fois dérivables sur $I$ à valeurs dans $K^p$ est un sous-$K$-*ev *de $\mathscr{F}(I, K^p)$, et l'application $\mathscr{D}^n(I, K^p) \longrightarrow \mathscr{F}(I, K^p)$, $f \mapsto f^{(n)}$ est $K$-linéaire.*

Toutes ces assertions se vérifient par récurrence, la dernière utilisant en outre la $K$-linéarité de l'opérateur de dérivation : $g \mapsto g'$.

Si en plus, $f$ étant $n$ fois dérivable sur $I$, $f^{(n)}$ est dérivable en un certain point $x_0 \in I$, nous conviendrons de noter $(f^{(n)})'(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$.

**DÉFINITION IV.7.2**

*Reprenons les notations de la définition* IV.7.1, *avec $n \in \mathbb{N}$.*

(I) *$f : I \longrightarrow K^p$ est dite* **de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$** *(ou* **$n$ fois continûment dérivable** *sur $I$) ssi : elle est $n$ fois dérivable sur $I$,* **et** *$f^{(n)}$ est continue sur $I$.*

(II) *$f : I \longrightarrow K^p$ est dite* **de classe** *$\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ ssi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f$ est $m$ fois dérivable sur $I$.*

Soit $m$ et $n$ deux entiers, $0 \leqslant m < n$. Pour que $f$ soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$, il faut et il suffit que $f$ soit de classe $\mathscr{C}^m$ et $f^{(m)}$ de classe $\mathscr{C}^{n-m}$ car on sait que la dérivabilité d'une fonction entraîne sa

De même, dire que $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ revient à dire que $f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et que toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant n$ sont continues.

$f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ ssi $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n$. Les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) forment un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(I, K^p)$ qu'on notera $\mathscr{C}^n(I, K^p)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I, K^p)$).

***Exemple 1 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow K$ une fonction *rationnelle*. On a vu au § IV.6 que $f$ est dérivable et que sa dérivée est rationnelle. Il s'ensuit, par récurrence, que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$ et a toutes ses dérivées rationnelles. Prenons en particulier, avec $a \in K \backslash I$ et $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction rationnelle $f : I \longrightarrow K$, $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$. Il est clair que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, et le calcul de $f^{(n)}(x)$ s'effectue simplement et donne

$$(\forall n) \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(x-a)^{n+k}} .$$

Cela prouve qu'on pourra toujours calculer les dérivées successives d'une fonction rationnelle à condition de savoir décomposer la fraction rationnelle correspondante *en éléments simples sur* $\mathbb{C}$.

***Exemple 2 :*** Le corollaire du théorème IV.6.1 montre que, pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition :

$x \mapsto \log_a x$, qui vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \log_a(x) =$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \operatorname{Log} a} \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^* ,$$

$$x \mapsto a^x, \text{ qui vérifie } \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(a^x) = a^x (\operatorname{Log} a)^n ,$$

et enfin :

$x \mapsto x^\alpha$, qui vérifie $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^\alpha) =$

$$= \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) x^{\alpha-n} = n! \binom{\alpha}{n} x^{\alpha-n} .$$

Pour la fonction puissance, on remarquera que, même dans le cas $\alpha > 0$ où on peut prolonger en 0 par continuité, la fonction ainsi prolongée n'est jamais de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ lorsque $\alpha \notin \mathbb{N}$.

**THÉORÈME IV.7.1**

*Les notations $I$ et $p$ sont celles de la définition* IV.7.1 *et $n$ est un entier $\geqslant 1$.*

(I) *Si $f : I \longrightarrow K$ et $g : I \longrightarrow K^p$ sont $n$ fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$), $fg$ l'est aussi.*

(II) *Soit $J$ un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$. *Si* $f : J \longrightarrow I$ *est $n$ fois dérivable (resp. de classe* $\mathscr{C}^n$, *de classe* $\mathscr{C}^\infty$), $g \circ f$ *l'est aussi.*
(III) *Soit $J$ un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$ *et soit* $f : I \longrightarrow J$ *une bijection $n$ fois dérivable (resp. de classe* $\mathscr{C}^n$, *de classe* $\mathscr{C}^\infty$) *telle que* $(\forall x \in I)\ f'(x) \neq 0$. *Alors* $g = f^{\langle -1 \rangle} : J \longrightarrow I$ *est $n$ fois dérivable (resp. de classe* $\mathscr{C}^n$, *de classe* $\mathscr{C}^\infty$).

*Démonstration :*

Bornons-nous à établir (par récurrence sur $n$) les assertions relatives aux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$. Les assertions relatives aux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ s'en déduisent. Quant à celles relatives aux fonctions $n$ fois dérivables, elles se prouvent de manière analogue.

(I) Pour $n = 1$, on a vu au § IV.6 que $(fg)' = f'g + fg'$ aussi bien dans le cas où $f$ et $g$ sont scalaires que dans le cas où $f$ est scalaire et $g$ une fonction « vectorielle », donc si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, $fg$ aussi. Supposons $n \geqslant 2$ et l'assertion vraie à l'ordre $n-1$. Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, elles sont *a fortiori* de classe $\mathscr{C}^1$, donc $fg$ aussi, et $(fg)' = f'g + fg'$. Mais $f'$, $g$, $f$ et $g'$ sont de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, donc par hypothèse de récurrence $(fg)'$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et par conséquent $(fg)$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

(II) Pour $n = 1$, on a vu que $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times (g'(f(x)))$, c'est-à-dire $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$. Comme produit et composée de fonctions continues, $(g \circ f)'$ l'est aussi et donc $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons $n \geqslant 2$ et l'assertion vraie à l'ordre $n - 1$ ; $g$ et $f$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $g \circ f$ aussi. Mais $f'$, $g'$ et $f$ sont de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. L'hypothèse de récurrence montre alors que $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et la propriété (I) montre que $f' \cdot (g' \circ f)$ l'est aussi, donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et $g \circ f$ de classe $\mathscr{C}^n$.

(III) Pour $n = 1$, on a vu que $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$. Comme $f'$ et $g$ sont continues, $f' \circ g$ l'est aussi, ainsi que $g'$. Donc $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons $n \geqslant 2$ et l'assertion vraie à l'ordre $n - 1$. Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc $f'$, qui est continue et jamais nulle, prend ses valeurs soit dans $\mathbb{R}_+^*$, soit dans $\mathbb{R}_-^*$, disons dans $S$. Soit alors $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On sait que $\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (cf. exemple 1). La fonction $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $g' = \dfrac{1}{f' \circ g} = \Phi \circ f' \circ g$. L'hypothèse de récurrence exprime que $g$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, mais $f'$ et $\Phi$ le sont aussi, et en utilisant la propriété (II) on voit que $\Phi \circ f' \circ g$ l'est aussi, et puisque $g'$ est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, c'est donc que $g$ est de classe $\mathscr{C}^n$. ■

**COROLLAIRE**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$. *Les ensembles* $\mathscr{D}^n(I, K)$ *et* $\mathscr{C}^n(I, K)$ *ainsi que* $\mathscr{C}^\infty(I, K)$ *sont des sous-K-algèbres de* $\mathscr{F}(I, K)$.

Bien entendu l'énoncé du théorème IV.7.1 a un aspect th aimerait bien, dans chacun des trois cas examinés, disposer de formules permettant *d'expliciter* la dérivée $n$-ième (de $fg$, de $g \circ f$ ou de $f^{\langle -1 \rangle}$) en fonction des dérivées d'ordre $\leqslant n$. En fait, ces formules existent : pour la dérivée $n$-ième de $f^{\langle -1 \rangle}$ c'est la *formule de réversion de Lagrange* qui a de nombreuses applications et que nous prouvons au tome 3, § III.1 ; pour la dérivée $n$-ième de $g \circ f$ c'est la formule de Faa di Bruno (cf. § VI.5). Nous nous bornerons ici à citer la **formule de Leibniz** qui donne la dérivée $n$-ième du produit $fg$ :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

et que le lecteur n'aura aucune peine à établir par récurrence en utilisant la relation de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, et que nous démontrerons plus loin par un procédé entièrement différent.

## Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux

**DÉFINITION IV.7.3**

*Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $p$ un entier $\geqslant 1$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une fonction $f : I \longrightarrow K^p$ est dite de* ***classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux*** *ssi il existe une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $I$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$ telle que, pour chaque $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[} = \varphi_i|_{]a_i, a_{i+1}[}$, où $\varphi_i : [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow K^p$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

Avec ces notations, chacune des $\varphi_i$ est unique, puisque nécessairement $\varphi_i(a_i) = \lim\limits_{x \to a_i,\, x > a_i} f(x)$ et $\varphi_i(a_{i+1}) = \lim\limits_{x \to a_{i+1},\, x < a_{i+1}} f(x)$. Il est clair que si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$, elle est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux.

Pour qu'une fonction vectorielle soit de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux, il faut et il suffit que ses composantes le soient.

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux, appelons subdivision *$f$-admissible* de $[a, b]$ toute subdivision de $[a, b]$ qui vérifie la définition IV.7.3. Alors si une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ est $f$-admissible, toute subdivision $\sigma' = (b_0, b_1, \ldots, b_N)$ de $[a, b]$ *plus fine* que $\sigma$ (c'est-à-dire telle que $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \{b_0, b_1, \ldots, b_N\}$) est aussi $f$-admissible.

Un nombre *fini* de fonctions $[a, b] \longrightarrow K^p$ de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux étant donné, il est facile de trouver une subdivision de $[a, b]$ qui soit admissible pour *toutes* ces fonctions. On en déduit sans peine que l'ensemble $\mathscr{C}\mathscr{M}_k([a, b], K^p)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux de $I$ dans $K^p$ forme un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(I, K^p)$ qui contient en particulier $\mathscr{C}^k([a, b], K^p)$. Pour $p = 1$, $\mathscr{C}\mathscr{M}_k([a, b], K^p)$ est même une sous-$K$-algèbre de $\mathscr{F}([a, b], K)$.

***Exercice 1 :*** Soit $I$ et $J$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, et $f$ une bijection de $I$ sur $J$ de classe $\mathscr{C}^3$ sur $I$. Calculer explicitement les dérivées seconde et troisième de la fonction réciproque $g = f^{<-1>}$.

***Exercice 2 :*** Soit $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow K^p$ une fonction $n$ fois dérivable. On pose $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que $h$ est $n$ fois dérivable et que

$$h^{(n)}(x) = (-1)^n \left[ \frac{1}{x^{2n}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{(n-1)\binom{n}{1}}{x^{2n-1}} f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)\dots(n-p)\binom{n}{p}}{x^{2n-p}} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + \frac{n!}{x^{n+1}} f'\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

***Exercice 3 :*** Soit $f : ]-1, +1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

*a*) Vérifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que sa dérivée $n$-ième ($n \geqslant 1$) s'écrit : $f^{(n)}(t) = P_n(t)(1 - t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_n$ ayant la parité de $n$ et son terme dominant valant $n!\, X^n$ (on posera aussi $P_0 = 1$).

*b*) Vérifier la relation $(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0$ et en déduire, pour $n \geqslant 1$ et $x \in ]-1, +1[$ les relations

(1) $$P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x P_n(x) + n^2(1 - x^2)\, P_{n-1}(x)$$

(2) $$P_n'(x) = n^2 P_{n-1}(x)$$ et

(3) $$(1 - x^2)\, P_n''(x) + (2n-1)\, x P_n'(x) - n^2 P_n(x) = 0\,.$$

*c*) A partir de (3) calculer les coefficients de $P_n$. En déduire que, pour $x \in ]0, 1[$, $f^{(n)}(x) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on dit que la fonction $f$ est absolument monotone sur $]0, 1[$).

***Exercice 4 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2}$. Montrer que la dérivée $n$-ième $f^{(n)}$ est donnée par $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1 + t^2)^{n+1}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. On explicitera les coefficients de $P_n$.

En utilisant les fonctions circulaires, montrer que $P_n$ est dissocié à facteurs simples dans $\mathbb{R}[X]$, et préciser ses racines.

***Exercice 5 :*** Montrer que, sur $]0, +\infty[$, la dérivée $n$-ième de $f_n$ définie par $f_n(x) = x^{n-1} e^{1/x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(-1)^n \dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.

Prouver de même que la dérivée $n$-ième de $g_n(x) = x^{n-1} \operatorname{Log} x$ est $\dfrac{(n-1)!}{x}$.

***Exercice 6 :*** Soit $u$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions $n$ fois dérivables ($n \geqslant 1$), $I$ étant un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On suppose $v(t) \neq 0$ pour tout $t$ et on pose $w_n(t) = (-1)^n v^{n+1}(t) \left(\dfrac{u}{v}\right)^{(n)}(t)$ $(t \in I)$.

$$\text{Montrer que } w_n(t) = \begin{vmatrix} u & v & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ u' & v' & v & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u'' & v'' & 2v' & v & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & v \\ u^{(n)} & v^{(n)} & \binom{n}{1} v^{(n-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{n}{n-1} v' \end{vmatrix}$$

***Exercice 7 :*** Soit $\alpha$ un réel $> 0$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \leqslant 0$ et $x \mapsto e^{-1/x^\alpha}$ si $x > 0$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer $f^{(n)}(0)$.

Prouver de même que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\frac{-1}{(b-x)(x-a)}}$ pour $x \in \,]a, b[$, $a$ et $b$ donnés avec $a < b$, et $x \mapsto 0$ pour $x \notin \,]a, b[$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer $g^{(n)}(a)$ et $g^{(n)}(b)$.

***Exercice 8 :*** *a*) On donne $T > 0$ et $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $f(0) = f(T)$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Soit $\tilde{f}$ la prolongée de $f$ par $T$-périodicité. Quelle est la C.N.S. pour que $\tilde{f}$ soit de classe $\mathscr{C}^k$ ?

*b*) *Application.* On prolonge $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 0$ et si $0 < x < 1$ $x \mapsto \exp\left(\dfrac{-1}{x(1-x)}\right)$ par 1-périodicité. Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, non constante.

*c*) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Etudier la dérivabilité successive en 0 de $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto x^k \tilde{f}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

*d*) On désigne par $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \exp\dfrac{-1}{|x|}$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$. Etudier la dérivabilité de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)\, \tilde{f}\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)$.

*Réponse :* $g$ est dérivable, et l'ensemble des valeurs d'adhérence en 0 de $g'$ est $\mathbb{R}$ ; en particulier, $g'$ n'est pas continue en 0.

# *Chapitre V*

# *VARIATION DES FONCTIONS. FONCTIONS USUELLES*

## § V.1 *ÉGALITÉS ET INÉGALITÉS D'ACCROISSEMENTS FINIS*

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ de borne inférieure $a$, de borne supérieure $b$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons que $f$ admette en $x_0$ un *extremum local,* disons par exemple un maximum local (s'il s'agit d'un minimum on remplace $f$ par $-f$). Si $x_0 < b$, alors $f'_d(x_0)$ existe et vaut $f'(x_0)$. Or pour $x \in I$, $x > x_0$ et $x$ suffisamment voisin de $x_0$, on a : $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$, d'où $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$, et en passant à la limite pour $x \longrightarrow x_0$, $x > x_0$, il vient $f'(x_0) \leqslant 0$. De même, si $x_0 > a$, alors $f'_g(x_0)$ existe et vaut $f'(x_0)$. Or pour $x \in I$, $x < x_0$ et $x$ assez voisin de $x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x} \geqslant 0$, d'où à la limite $f'(x_0) \geqslant 0$. Finalement si $a < x_0 < b$, on a à la fois $f'(x_0) \leqslant 0$ et $f'(x_0) \geqslant 0$, d'où $f'(x_0) = 0$.

On a donc prouvé :

**THÉORÈME V.1.1**

> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* ***dérivable*** *sur l'intervalle non trivial $I$. Si $f$ admet en un point $x_0$* ***intérieur*** *à $I$ un* extremum *local, alors $f'(x_0) = 0$.*

On prendra garde au fait qu'une fonction dérivable sur $I$ peut très bien ne pas avoir de maximum ni de minimum, même local (par exemple $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$), qu'elle peut aussi avoir un maximum (resp. un minimum) en un point où la dérivée ne s'annule pas (s'il est atteint à une extrémité de l'intervalle $[a, b] = I$) et qu'enfin si la dérivée s'annule en un point, cela ne signifie nullement que $f$ présente en ce point un extremum local.

***Exemple 1 :*** La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et dérivable. On a $f'(x) = 3\,x^2$ pour tout $x$, d'où $f'(0) = 0$ et cependant $f$ n'admet pas en 0 d'extremum local.

**THÉORÈME V.1.2** (théorème de Rolle [1])

> *Soit $a$ et $b$ deux réels ($a < b$) et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue.** *Supposons que $f(a) = f(b)$ et que $f$ est* **dérivable sur** $]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$. *Alors il existe au moins un point $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

*Démonstration :*

Si $f$ est constante, n'importe quelle valeur de $c$ prise dans $]a, b[$ convient. Sinon, on sait (cf. théorème III.5.1) que $f$ possède un maximum $M = \max\limits_{x \in [a, b]} f(x)$ et un minimum $m = \min\limits_{x \in [a, b]} f(x)$, et parmi ces deux nombres l'un au moins est distinct de $f(a)$. Il y a donc un $c \in\ ]a, b[$ tel que $f$ admette en $c$ un extremum global et *a fortiori* un extremum local. En un tel point $c$, d'après le théorème V.1.1, on a : $f'(c) = 0$. ■

Pour que le théorème de Rolle s'applique, peu importe que la fonction continue $f$ soit dérivable ou non aux extrémités du segment $[a, b]$ (par exemple $f : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ satisfait bien aux conditions), mais il suffirait d'*un* point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ où $f$ n'est pas dérivable pour le mettre en défaut (par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ a une dérivée qui n'est jamais nulle). On devine l'importance que peut revêtir le théorème de Rolle quand il s'agit d'établir l'existence de zéros de certaines fonctions.

***Exemple 2 :*** Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable ($n \geqslant 2$). Posons $f(x) = x^n(1 - x)^n g(x)$. La fonction $f$ est $n$ fois dérivable et une récurrence immédiate montre que $f^{(k)}(x) = x^{n-k}(1 - x)^{n-k} g_k(x)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, avec $g_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $n - k$ fois dérivable ($g_0 = g$).

Le théorème de Rolle montre que $g_1$ s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$. Supposons $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, et que $g_k$ s'annule en au moins $k$ points $x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,k}$ de $]0, 1[$ ($0 < x_{k,1} < \dots < x_{k,k} < 1$). Le théorème de Rolle, appliqué à $f^{(k)}$ sur chacun des intervalles $[0, x_{k,1}]$, $[x_{k,1}, x_{k,2}]$, ..., $[x_{k,k}, 1]$ montre que $f^{(k+1)}$ admet au moins un zéro à l'intérieur de chacun de ces intervalles et donc que $g_{k+1}$ s'annule en au moins $k + 1$ points de $]0, 1[$. Par récurrence, il en résulte que $g_n$ *s'annule au moins $n$ fois dans* $]0, 1[$, avec $g_n = f^{(n)}$.

**THÉORÈME V.1.3 (théorème des accroissements finis,** avec *valeur moyenne*)

> *Soit $a$ et $b$ deux réels ($a < b$) et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue.** *Si $f$ est* **dérivable sur** $]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$, *il existe au moins un*

[1] Michel *Rolle,* mathématicien français (1652-1719) qui s'intéressait surtout aux racines des équations algébriques.

*$c \in \,]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

*Démonstration :*

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\,x$, qui en vérifie toutes les hypothèses, et dont la dérivée sur $]a, b[$ est $x \mapsto f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ■

Le nom de valeur moyenne donné au nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ provient du fait que, lorsque $f'$ est continue, c'est la *valeur moyenne* de la fonction $f'$ telle que nous la définissons au chapitre de l'intégrale.

*Interprétation géométrique*

Soit $\Gamma_f$ le graphe de $f$. Pour $x \in [a, b]$ notons $M_x$ le point de $\Gamma_f$ d'abscisse $x$. Le nombre $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, *taux d'accroissement* de $f$ entre $a$ et $b$ est le coefficient angulaire de la droite $M_aM_b$. Quant à $f'(x)$ $(a < x < b)$ c'est le coefficient angulaire de la tangente en $M_x$ à $\Gamma_f$. Le théorème V.1.3 signifie qu'il existe au moins un $c \in \,]a, b[$ tel que la tangente en $M_c$ à $\Gamma_f$ soit **parallèle** à $M_aM_b$ (cf. fig. 1).

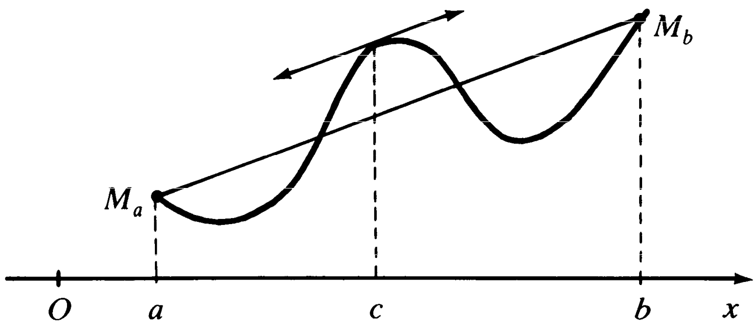



**Fig. 1.**

Cette interprétation suggère la possibilité d'une généralisation aux courbes planes données par *une représentation paramétrique,* c'est-à-dire aux fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

**COROLLAIRE 1**

*Soit $a$ et $b$ deux réels $(a < b)$, et deux fonctions $f$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Il existe $c \in \,]a, b[$ tel que*

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0\,.$$

*Démonstration :*

Si $g(b) = g(a)$, tout $c \in ]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ convient. Sinon, on applique le théorème V.1.2 à la fonction auxiliaire

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)\ . \quad \blacksquare$$

Bien que le théorème des accroissements finis, appliqué à $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, exprime l'existence de $c \in ]a, b[$ vérifiant l'égalité

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)} \tag{1}$$

le peu de renseignements que l'on possède en général sur la position exacte des points $c$, ne permet d'exploiter ce théorème que sous une forme affaiblie.

**COROLLAIRE 2** (inégalités d'accroissements finis)

*Soit $a$, $b$ deux réels $(a < b)$, et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :*

$$(b - a) \inf_{x \in ]a, b[} f'(x) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant (b - a) \sup_{x \in ]a, b[} f'(x)\ , \tag{2}$$

*et en conséquence :*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant (b - a) \sup_{x \in ]a, b[} |f'(x)|\ . \tag{3}$$

On fera attention au fait que dans la pratique on peut ignorer lequel des deux nombres $a$ et $b$ est le plus grand, ce qui n'empêche pas la formule (1) d'être exacte dans les deux cas, et si l'on a besoin d'une majoration, on écrira :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |b - a| \sup_{x \in ]a, b[} |f'(x)|\ . \tag{3'}$$

### Extension aux fonctions dérivables à droite

**THÉORÈME V.1.4**

*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction* ***continue*** *sur $[a, b]$ et* ***dérivable à droite*** *sur $]a, b[$. Il existe $\lambda$ et $\mu$ dans $]a, b[$ tels que*

$$f'_d(\lambda) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_d(\mu)\ .$$

*Démonstration :*

On se ramène au cas où $f(a) = f(b) = 0$ en remplaçant $f$ par la fonction $x \mapsto f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ dont l'interprétation géométrique est évidente. Supposons donc cette condition $f(a) = f(b) = 0$ réalisée et occupons-nous seulement du cas où $f$ n'est pas constante, qui conduit à envisager deux éventualités :

1[er] *cas :* $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x$. Alors nous avons déjà constaté dès le début du § V.1 qu'en tout point $c \in ]a, b[$ tel que $f(c) = \operatorname*{Min}_{x \in [a,b]} f(x)$, on a $f'_d(c) \geqslant 0$. Pour avoir l'autre inégalité il suffit de prendre la restriction $f|_{[a,c]}$ et de considérer l'ensemble $E = \left\{x \in [a,c] \mid f(x) = \frac{1}{2} f(c)\right\}$. C'est un ensemble non vide (théorème des valeurs intermédiaires), borné fermé, donc il admet un maximum $x_0$, avec $a < x_0 < c$, ce qui signifie que pour $x \in [x_0, c]$ on a : $f(x) \leqslant \frac{1}{2} f(c)$. Or par définition

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \longrightarrow x_0,\, x \in ]x_0, c]} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0.$$

On a donc trouvé un $\lambda \in ]a, b[$ où $f'_d(\lambda) \leqslant 0$. Démonstration analogue si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x$.

2[e] *cas :* $f(x)$ prend à la fois des valeurs $< 0$ et aussi des valeurs $> 0$. Alors, en un point $\mu$ où $f$ atteint son minimum qui est certainement $< 0$, on a $f'_d(\mu) \geqslant 0$ et en un point $\lambda$ où $f$ atteint son maximum qui est $> 0$, on a $f'_d(\lambda) \leqslant 0$. ■

**COROLLAIRE 1**

*Avec les notations et hypothèses du théorème* V.1.4, *si* $f'_d(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in ]a, b[$, *on a* $f(b) \geqslant f(a)$.

**COROLLAIRE 2**

*Soit $f$ une fonction numérique* ***continue*** *sur un intervalle $I$ de* $\mathbb{R}$ *et* ***dérivable à droite*** *sur l'intérieur de $I$. Si* $f'_d(x) \geqslant 0$ *(resp.* $\leqslant 0$*) pour tout* $x \in \operatorname{Int}(I)$, *alors $f$ est* ***croissante*** *(resp. décroissante). Si* $f'_d(x) = 0$ *pour tout* $x \in \operatorname{Int}(I)$, *alors $f$ est constante.*

*Démonstration :*

Soit $[\alpha, \beta]$ un sous-intervalle compact arbitraire de $I$ $(\alpha < \beta)$. Appliquons le corollaire 1 à la fonction $g = f|_{[\alpha,\beta]}$ qui vérifie $g'_d(x) = f'_d(x) \geqslant 0$ $\forall x \in ]\alpha, \beta[$. On obtient $f(\beta) \geqslant f(\alpha)$.

Si $f'_d(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \operatorname{Int}(I)$ on applique le même corollaire à la fonction $-f$. Enfin si $f'_d(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Int}(I)$, c'est que $f$ est à la fois croissante et décroissante, donc constante sur $I$. ■

On notera qu'en pratique, ce corollaire est le plus souvent utilisé avec des fonctions *dérivables* sur Int $(I)$ car elles sont *a fortiori* dérivables à droite.

**COROLLAIRE 3**

> *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ *et deux fonctions* $f$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continues*** *sur* $[a, b]$ *et* ***dérivables à droite*** *sur* $]a, b[$. *Si* $|f'_d(x)| \leqslant g'_d(x)$ *pour tout* $x \in\ ]a, b[$, *alors* $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$.

*Démonstration :*

Il suffit d'appliquer le corollaire 1 aux fonctions $g - f$ et $g + f$. ■

**Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$**

**THÉORÈME V.1.5**

> *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ($p$ *entier* $\geqslant 1$) *de composantes* $f_1, \ldots, f_p$ *une fonction* ***continue*** *sur* $[a, b]$ *et* ***dérivable à droite*** *sur* $]a, b[$. *Soit ensuite* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable à droite sur* $]a, b[$ *et* $\nu$ *l'une des normes standard de* $\mathbb{R}^p$ *(si* $p = 1$, $\nu$ *désigne la valeur absolue des réels). Si* $\nu(f'_d(x)) \leqslant g'_d(x)$ *pour tout* $x \in\ ]a, b[$, *alors*
>
> $$g(b) - g(a) \geqslant \nu(f(b) - f(a)) .$$

*Démonstration :*

Si $\nu = N_\infty$, il suffit d'appliquer le corollaire 3 ci-dessus à chacune des composantes $f_i$.

Si $\nu = N_2$, commençons par poser $\tau_i = \dfrac{f_i(b) - f_i(a)}{b - a}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ et $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$ et remarquons que si $\tau = 0$, ce qui équivaut à $\nu(\tau) = 0$, le théorème a déjà été prouvé (cf. corollaire 1 du théorème V.1.4). Supposons donc $\tau \neq 0$ et considérons la fonction $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{p} \tau_i f_i(x)$ qui est continue sur $[a, b]$, dérivable à droite sur $]a, b[$.

Pour $a < x < b$, on a : $\varphi'_d(x) = \sum_{i=1}^{p} \tau_i (f'_i)_d\,(x)$, d'où en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà rencontrée :

$$|\varphi'_d(x)| \leqslant N_2(\tau)\, N_2(f'_d(x)) \leqslant N_2(\tau)\, g'_d(x) .$$

Le corollaire 3 du théorème V.1.4 montre alors que

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant N_2(\tau)(g(b) - g(a)) ,$$

ce qui s'écrit :

$$(N_2(\tau))^2\,(b - a) \leqslant N_2(\tau)(g(b) - g(a)) ,$$

d'où finalement :

$$N_2(f(b) - f(a)) \leqslant g(b) - g(a).$$

Si $\nu = N_1$, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, posons $\varepsilon_i = +1$ si $\tau_i \geqslant 0$ et $\varepsilon_i = -1$ si $\tau_i < 0$. On introduit la fonction auxiliaire $\varphi : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i f_i(x)$ qui est continue sur $[a, b]$, dérivable à droite sur $]a, b[$ et on raisonne exactement comme pour $\nu = N_2$, ce qui donne :

$$\forall x \in ]a, b[\,, \quad |\varphi'_d(x)| = \left| \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i (f'_i)_d\,(x) \right| \leqslant N_1(f'_d(x)),$$

d'où le résultat. ■

***Remarque 1 :*** Nous verrons au chapitre XI que le théorème des accroissements finis, tel qu'il vient d'être énoncé, reste valable pour une fonction définie sur un intervalle compact $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé. Cependant il convient de remarquer dès maintenant que ce théorème sous sa forme générale pourrait, tout comme ici le théorème V.1.5, être déduit du théorème V.1.4, et nous le proposons au lecteur, dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, de le déduire de l'exercice 11 du § X.6.

**COROLLAIRE 1**

*Avec les notations du théorème* V.1.5, *soit* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *S'il existe un nombre* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que, pour tout* $x \in ]a, b[$,

$$\nu(f'(x)) \leqslant M\,, \quad \text{alors} \quad \nu(f(b) - f(a)) \leqslant M(b - a).$$

Il suffit d'appliquer le théorème V.1.5 avec $g(x) = Mx$.

**COROLLAIRE 2**

*Soit* $I$ *un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *une fonction continue sur* $I$ *et dérivable à droite sur* Int $(I)$. *Si* $f'_d(x) = 0$ *pour tout* $x \in$ Int $(I)$, *alors* $f$ *est constante.*

(On peut aussi appliquer le corollaire 2 du théorème V.1.4 à chaque composante de *f*).

**COROLLAIRE 3**

*Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *continues sur* $[a, b]$ *et dérivables à droite sur* $]a, b[$. *Si* $|f'_d(x)| \leqslant g'_d(x)$ *pour tout* $x \in ]a, b[$, *alors* $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$. *En particulier, si* $|f'_d(x)| \leqslant M$ $(M \in \mathbb{R}_+)$ *pour* $x \in ]a, b[$, *on a :* $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a)$, *et bien sûr si* $f'_d(x) = 0$ *pour tout* $x \in ]a, b[$, *alors* $f$ *est constante.*

*Démonstration :*

Il suffit d'appliquer le théorème V.1.5 en remarquant que si $z \in \mathbb{C}$, le module de $z$, noté $|z|$, n'est autre que $N_2(z)$ où $N_2$ est la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^2$ identifié à $\mathbb{C}$. La deuxième assertion en découle, avec $g(x) = Mx$; et la troisième est un cas particulier du corollaire 2. ■

**COROLLAIRE 4**

*Le théorème* V.1.5 *et ses corollaires* 1 *et* 2 *restent vrais si l'on y remplace* $\mathbb{R}^p$ *par* $\mathbb{C}^p$ *et si* $\nu$ *désigne l'une des normes standard de* $\mathbb{C}^p$.

*Démonstration :*

Si $\nu = \nu_2$, c'est la norme standard $N_2$ sur le $\mathbb{R}$-ev $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$ et le corollaire 4 ci-dessus résulte immédiatement du théorème V.1.5 appliqué à $(\mathbb{C}^p)_{(\mathbb{R})}$.

Si $\nu = \nu_\infty$ il suffit de considérer chacune des composantes de $f$.

Si $\nu = \nu_1$ le seul changement à apporter à la démonstration du théorème V.1.5 (cas où $\nu = N_1$) consiste à définir $\varepsilon_i$ ainsi : pour chaque $i$, $\varepsilon_i$ est un nombre complexe de module 1 tel que $\varepsilon_i \tau_i = |\tau_i|$. ■

***Remarque 2 :*** Il est bien évident que l'on peut remplacer dans les théorèmes V.1.4, V.1.5 et leurs corollaires « dérivable à droite » par « dérivable à gauche » car si $f$ est dérivable à droite en $x_0$, la fonction $\hat{f} : x \mapsto -f(-x)$ est dérivable à gauche en $-x_0$ et l'on a : $\hat{f}'_g(-x_0) = f'_d(x_0)$.

**Fonctions lipschitziennes** [1]

Désignons par $p$ un entier $\geqslant 1$, par $K$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et par $\nu$ une norme standard de $K^p$ (si $K = \mathbb{R}$ et $p = 1$, $\nu$ est la *valeur absolue* des réels).

**DÉFINITION V.1.1**

*Soit* $A$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow K^p$ *une fonction.*

(I) *Si* $C \in \mathbb{R}_+$, *on dit que* $f$ *est* ***C-lipschitzienne*** *pour* $\nu$ *ssi on a :*

$$(\forall (x, y) \in A^2) \qquad \nu(f(x) - f(y)) \leqslant C\,|x - y| .$$

(II) $f$ *est dite* ***lipschitzienne*** *pour la norme* $\nu$ *ssi il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $f$ *soit* $C$*-lipschitzienne.*

Les inégalités entre normes standard de $K^p$ du § II.2 montrent immédiatement que les ensembles $\mathrm{Lip}_\nu(A, K^p)$ et $\mathrm{Lip}_{\nu'}(A, K^p)$ des fonctions lipschitziennes pour $\nu$ (resp. $\nu'$) sont égaux, ce qui permet de parler, sans préciser la norme choisie, de *fonction lipschitzienne à valeurs dans*

---

[1] Rudolf Otto Sigismund *Lipschitz*, mathématicien allemand (1832-1903) qui s'est intéressé à beaucoup de branches des mathématiques et de la physique mathématiqu

$K^p$, dont l'ensemble sera noté Lip $(A, K^p)$ et constitue un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(A, K^p)$.

En particulier, pour $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \in$ Lip $(A, \mathbb{C})$ ssi $\exists C \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$(\forall (x, y) \in A^2) \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y| \,.$$

Pour qu'une fonction $f : A \longrightarrow K^p$ soit lipschitzienne, il faut et il suffit que ses composantes $f_1, \ldots, f_p$ le soient.

Si $A$ est borné, et si $f \in$ Lip $(A, K^p)$, alors $f$ est bornée. Mieux : *si $A$ est borné,* et si $f \in$ Lip $(A, K)$ et $g \in$ Lip $(A, K^p)$, alors $fg \in$ Lip $(A, K^p)$; On en déduit que Lip $(A, K)$ *est une sous-K-algèbre de* $\mathscr{F}(A, K)$. (Mais cette propriété tombe en défaut si $A$ n'est pas bornée, comme le montre l'exemple $x \mapsto x^2$).

Pour $\nu$ fixée et $C \in \mathbb{R}_+$, les fonctions $C$-lipschitziennes de $A$ dans $(K^p, \nu)$ forment un sous-ensemble de Lip $(A, K^p)$ que nous noterons $\mathrm{Lip}_C\,(A, K^p, \nu)$. Il est clair que si

$$C_1 \leqslant C_2\,, \quad \mathrm{Lip}_{C_1}(A, K^p, \nu) \subset \mathrm{Lip}_{C_2}(A, K^p, \nu)\,,$$

et que $\mathrm{Lip}\,(A, K^p) = \bigcup_{C \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Lip}_C\,(A, K^p, \nu)$.

**THÉORÈME V.1.6**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ ; $f : I \longrightarrow K^p$ une fonction continue sur $I$ et dérivable à droite dans* Int $(I)$, *et $C \in \mathbb{R}_+$. Pour que $f \in \mathrm{Lip}_C\,(A, K^p, \nu)$, il faut et il suffit que $\nu(f'_d(x)) \leqslant C$ pour tout $x \in$* Int $(I)$. *En particulier, si $f$ est dérivable sur $I$, on a :*

$$(f \in \mathrm{Lip}_C\,(A, K^p, \nu)) \Leftrightarrow ((\forall x \in \mathrm{Int}\,(I))\,, \quad \nu(f'(x)) \leqslant C)\,.$$

*Démonstration :*

Si $f$ est continue et si $\nu(f'_d(x)) \leqslant C$ pour $x \in$ Int $(I)$, on applique le théorème V.1.5 (ou son corollaire 4) à $f$ sur tout segment $[a, b]$ $(a \in I, b \in I, a < b)$, avec $g : x \mapsto Cx$, d'où $f \in \mathrm{Lip}_C\,(I, K^p, \nu)$.

Réciproquement, supposons que $f \in \mathrm{Lip}_C\,(I, K^p, \nu)$. Soit $x_0 \in$ Int $(I)$. Pour $x \in I$, $x > x_0$, on a :

$$\nu\left(\frac{1}{x - x_0}\,(f(x) - f(x_0))\right) = \frac{1}{x - x_0}\,\nu(f(x) - f(x_0)) \leqslant C\,.$$

En passant à la limite pour $x \longrightarrow x_0$ $(x > x_0)$, tenant compte de l'existence de $f'_d(x_0)$, il vient : $\nu(f'_d(x_0)) \leqslant C$. ■

Noter qu'on peut remplacer, dans l'énoncé de ce théorème, « $f$ dérivable à droite » par « $f$ dérivable à gauche ».

Si $f$ est de classe $C^1$ et si $I$ est *compact*, la fonction $f'$ est bornée sur $I$. D'où :

**COROLLAIRE**

> *Toute fonction $f : I \longrightarrow K^p$* **de classe $\mathscr{C}^1$** *sur un intervalle* **compact** *$I$ est* **lipschitzienne.**

***Remarque 3 :*** La définition même d'une fonction lipschitzienne montre que **toute fonction lipschitzienne est uniformément continue** (si $f$ est $C$-lipschitzienne (avec $C > 0$), pour $\varepsilon > 0$ donné, il est clair que $\eta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ est un module de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$). Or *la réciproque est fausse,* une fonction peut être uniformément continue sans être liptschitzienne, comme le montre l'exemple « grossier » de $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, pour lequel on a $f(x)/x \underset{x \longrightarrow 0,\, x > 0}{\longrightarrow} +\infty$.

### Prolongement en un point d'une fonction

**THÉORÈME V.1.7**

> *Soit $a$ et $b$ deux réels ($a < b$), $p$ un entier $\geqslant 1$, et $f : [a, b] \longrightarrow K^p$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable à droite sur $]a, b[$. Si $\lim\limits_{x \longrightarrow a,\, x > a} f'_d(x)$ existe dans $K^p$ et vaut $L$, alors $f'(a)$ existe et vaut $L$.*

*Démonstration :*

Il suffit de prouver le théorème pour chaque composante de $f$. On suppose donc que $f'_d(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x > a}{\longrightarrow} l \in K$ et on se ramène au cas où $l = 0$ en remplaçant $f$ par $g : x \mapsto f(x) - lx$. Soit $\varepsilon$ un réel $> 0$. Prenons $\alpha > 0$ ($\alpha < b - a$) tel que $|f'_d(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $a < x \leqslant a + \alpha$. La fonction $f : [a, a + \alpha] \longrightarrow K$ est $\varepsilon$-lipschitzienne d'après le théorème V.1.6, d'où, pour $a < x \leqslant a + \alpha$ : $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|$. On reconnaît la définition de la dérivabilité de $f$ en $a$ avec $f'(a) = 0$. ■

Dans le cas particulier d'une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b]$, ce théorème s'interprète en disant que la tangente au point d'arrêt $M_a$ et la limite de la tangente « voisine » en $M_x$ à $\Gamma_f$. La démonstration précédente laisse de côté le cas particulier où $f'(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x > a}{\longrightarrow} +\infty$ $\left(\text{resp. } f'(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x > a}{\longrightarrow} -\infty\right)$ pour lequel la fonction $f$ n'est plus $\varepsilon$-lipschitzienne, mais une application directe du théorème des accroissements finis montre qu'alors $\Gamma_f$ admet en $M_a$ une tangente parallèle à $Oy$.

**THÉORÈME V.1.8**

> *Soit $a$ et $b$ deux réels ($a < b$), $p$ un entier $\geqslant 1$, et $f : ]a, b] \longrightarrow K^p$ une fonction continue sur $]a, b]$ et dérivable à droite sur $]a, b[$. Si $f'_d$ est* **bornée,** *alors $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe dans $K^p$, autrement dit on peut* **prolonger $f$ par continuité** *en $a$.*

*Démonstration :*

Il suffit encore de considérer le cas $p = 1$. Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|f'_d(x)| \leqslant C$ pour $x \in ]a, b[$. Alors, d'après le théorème V.1.6, $f$ est $C$-lipschitzienne. On en déduit que $f$ satisfait au *critère de Cauchy des fonctions* (cf. théorème IV.1.4), car si $\varepsilon > 0$ est donné, en prenant $\alpha = \operatorname{Min}\left(b - a, \dfrac{\varepsilon}{C}\right)$, on a : $\alpha > 0$ et $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ dès que $a < x < y < a + \alpha$, puisqu'alors $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\alpha \leqslant \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe. ■

Visiblement, si dans l'énoncé du théorème V.1.8 on suppose seulement $f'_d$ *bornée au voisinage de a,* la conclusion subsiste. En remarquant qu'une fonction admettant une limite *dans* $K^p$ en un point de $\bar{\mathbb{R}}$ est bornée au voisinage de ce point, on obtient :

**COROLLAIRE 1**

> *Soit* $f : ]a, b] \longrightarrow K^p$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ p \geqslant 1)$ *une fonction continue sur* $]a, b]$, *dérivable à droite sur* $]a, b]$, *telle que* $\lim\limits_{x \to a} f'_d(x) = L$ *existe dans* $K^p$. *Alors* $f$ *est prolongeable par continuité en a, et si* $\tilde{f}$ *est ce prolongement,* $\tilde{f}'(a)$ *existe et vaut L. En particulier, si f est dérivable sur* $]a, b[$ *et si* $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ *existe dans* $K^p$, $f$ *est prolongeable par continuité en a, et si* $\tilde{f}$ *est ce prolongement,* $\tilde{f}'(a)$ *existe et vaut L.*

Par une récurrence évidente, les théorèmes V.1.7 et V.1.8 entraînent :

**COROLLAIRE 2**

> *Soit* $I = [a, b]$ $(a < b)$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}$ *une partie finie de I, et* $f : I \longrightarrow K^p$ *(p entier* $\geqslant 1$) *une fonction de classe* $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *dans chaque composante connexe de* $I \setminus (\mathscr{D} \cup \{a, b\})$. *Pour que f soit de classe* $\mathscr{C}^k$ *par morceaux sur I, il faut et il suffit que pour chaque composante connexe* $J = ]\alpha, \beta[$ *de* $I \setminus (\mathscr{D} \cup \{a, b\})$, *les limites* $\lim\limits_{x \to \alpha, x > \alpha} f^{(k)}(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to \beta, x < \beta} f^{(k)}(x)$ *existent dans* $K^p$.

***Exercice 1*** (théorème de Rolle à l'infini) : Soit $f : [A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]A, +\infty[$ et telle que $f(A) = l$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer qu'il existe $c > A$ tel que $f'(c) = 0$.

De même si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable, et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (dans $\bar{\mathbb{R}}$), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

***Exercice 2 :*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

*a*) On suppose que $P$ possède $k$ zéros réels distincts. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $P - \alpha P'$ possède au moins $k$ zéros réels distincts. (*Indication :* On pourra utiliser $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{x}{\alpha}} P(x)$.)

*b*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et *dissocié* sur $\mathbb{R}$ : $P = X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p$. Montrer que $Q = P + a_1 P' + \cdots + a_p P^{(p)}$ possède au moins autant de zéros réels que $P$. En déduire que si $P$ est dissocié à facteurs simples dans $\mathbb{R}[X]$, il en est de même de $Q$.

***Exercice 3 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ *à support compact* c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble borné, et *non identiquement nulle.* Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ et $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ f^{(n)}(a_i)\, f^{(n)}(a_{i+1}) < 0$.

***Exercice 4 :*** *a*) Soit $P_1, \dots, P_r$ des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $m_1 - 1, \dots, m_r - 1$ ($m_i \geqslant 1$ pour tout $i$, donc $(\forall i)\ P_i \neq 0$), et des réels $a_1, \dots, a_r$ distincts. Prouver que $g : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\, e^{a_i x}$ possède dans $\mathbb{R}$ au plus $m_1 + m_2 + \cdots + m_r - 1$ zéros distincts.

*Indication :* Le théorème étant supposé établi pour $r - 1$, utiliser la fonction $\frac{d^{m_r}}{dx^{m_r}}(e^{-a_r x} g(x)$ et appliquer le théorème de Rolle).

*b*) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$. Montrer que $\det\,[e^{\alpha_i \beta_j}] > 0$ (on utilisera le *a*) avec $P_1, \dots, P_n$ constants).

***Exercice 5 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable et admettant au moins $(n + 1)$ zéros distincts.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ *dissocié* dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que : $\exists \xi \in I$ tel que $a_0 f(\xi) + \cdots + a_n f^{(n)}(\xi) = 0$.

***Exercice 6 :*** On donne $f$ deux fois dérivable sur $[0, 1]$, avec $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $a \in \,]0, 1[$ tel que $|f''(a)| \geqslant 4$.

***Exercice 7 :*** Montrer que la fonction $R_n : ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) définie par $(1 + x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + R_n(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ne s'annule qu'en $x = 0$.

***Exercice 8 :*** Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $|f'|$ est monotone, montrer que $f'$ est continue.

***Exercice 9 :*** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

*a*) On suppose $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$.

*b*) On suppose $f(x) + f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

***Exercice 10 :*** Soit $f : ]-1, +1[ \longrightarrow [-1, +1]$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $m_1 = \inf\limits_{x \in ]-1, 0]} |f'(x)|$ et $m_2 = \inf\limits_{x \in [0, 1[} |f'(x)|$. Montrer que $m_1 < 2$ et $m_2 < 2$.

***Exercice 11 :*** Soit $a, b$ deux réels ($a < b$). On donne trois fonctions $f, g, h$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in \,]a, b[$ tel que

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0 .$$

***Exercice 12*** (théorème de Darboux) : Soit $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ ($\alpha < \beta$) et admettant une dérivée à droite en tout point de $]\alpha, \beta[$. On pose $m = \inf\limits_{x \in ]\alpha, \beta[} f'_d(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in ]\alpha, \beta[} f'_d(x)$.

*a*) Montrer que si $f$ n'est pas une fonction affine, l'ensemble $\mathscr{D}$ de tc

$\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ où $x$ et $y$ sont des nombres arbitraires de $[\alpha, \beta]$ tels que $x \neq y$ est identique à $]m, M[$.

*Indication :* Après soustraction d'une fonction convenable $t \mapsto \lambda t + \mu$, on se ramènera à prouver que si $f'_d(\gamma)\, f'_d(\delta) < 0$ avec $\gamma < \delta$, il existe dans $]\gamma, \delta[$ deux points distincts où $f$ prend la même valeur.

*b*) On suppose en outre que $f$ possède une dérivée à gauche en tout point de $]\alpha, \beta[$. Montrer qu'alors les bornes inférieures (resp. supérieures) de $f'_g$ et $f'_d$ dans $]\alpha, \beta[$ sont les mêmes.

*c*) En déduire que si $f$ est dérivable sur $]\alpha, \beta[$, l'image par $f'$ d'un intervalle $I$ contenu dans $]\alpha, \beta[$ est un intervalle, autrement dit qu'une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elle soit ou non continue.

*d*) Donner une démonstration directe de cette dernière propriété en utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour une valeur de $h$ convenablement choisie.

***Exercice 13 :*** Pour tout intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{L}_I$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions lipschitziennes : $I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $I$ est donné et $f \in \mathscr{L}_I$, soit $K_f$ le minimum des $C \in \mathbb{R}_+$ tels que $(\forall (u, v) \in I^2)\ |f(u) - f(v)| \leqslant C\,|u - v|$ (on justifiera le fait qu'il s'agit bien d'un minimum).

*a*) Si $f \in \mathscr{L}_I$, alors $|f| \in \mathscr{L}_I$. Si $f \in \mathscr{L}_I$, $g \in \mathscr{L}_J$, avec $J$ intervalle contenant Im $(f)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}_I$.

*b*) Soit $f \in \mathscr{L}_I$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ tels que $|f(b) - f(a)| = K_f\,|b - a|$. Montrer que $f|_{[a,b]}$ est affine.

*c*) Pour $I$ fixé et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ on suppose trouvés $C \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall (u, v) \in I^2 \quad |u - v| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leqslant C\,|u - v| .$$

Alors $f \in \mathscr{L}_I$.

*d*) Pour $I$ fixé, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *localement lipschitzienne* ssi $(\forall a \in I)\, \exists \alpha > 0\ |f|_{I \cap [a-\alpha, a+\alpha]}$ est lipschitzienne sur $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$. Si $f$ est localement lipschitzienne, est-elle lipschitzienne ?

*e*) Soit $f \in \mathscr{L}_I$ supposée *dérivable à droite*. Montrer que $K_f = \sup\limits_{x \in \operatorname{Int}(I)} |f'_d(x)|$. Si $f$ est dérivable, étudier le graphe $\Gamma_f$ de $f$ au voisinage d'un point $x_0 \in I$ tel que $|f'(x_0)| = K_f$. Montrer par un exemple qu'il peut ne pas exister $x_0 \in I$ tel que $|f'(x_0)| = K_f$.

***Exercice 14 :*** Appliquer la formule des accroissements finis sur $[n, n+1]$, où $n \in \mathbb{N}^*$, à la fonction $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x(\operatorname{Log} x)}$. En déduire un encadrement de la somme $S_n = \dfrac{1}{2(\operatorname{Log} 2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{n(\operatorname{Log} n)^2}$ et la convergence de la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\operatorname{Log} n)^2}$.

Appliquer la même méthode pour trouver un équivalent de la somme $\dfrac{1}{2 \operatorname{Log} 2} + \dfrac{1}{3 \operatorname{Log} 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \operatorname{Log} n}$ et prouver la divergence de la série $\sum \dfrac{1}{n \operatorname{Log} n}$.

***Exercice 15 :*** Soit $f$ définie, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $0 < a < b$. On suppose $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in\ ]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$. Interprétation géométrique.

***Exercice 16 :*** Montrer que, pour tout $t$ réel $> 0$, il existe un unique $\theta \in\ ]0, 1[$ tel que $\operatorname{Log} \dfrac{1-t}{1+t} = \dfrac{-2t}{1 - \theta^2 t^2}$. En déduire l'inégalité $e^{2t} \dfrac{1-t}{1+t} \leqslant 1$, valable pour $t \geqslant 0$.

***Exercice 17 :*** Soit $f : [a, a + 2h] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable ($a \in \mathbb{R}$, $h > 0$). Montrer qu'il existe un réel $\theta$ compris strictement entre 0 et 1 tel que $f(a) - 2f(a+h) + f(a+2h) = h^2 f''(a + 2\theta h)$.

***Exercice 18 :*** Soit $g$ une application *impaire* et 5 fois dérivable du segment $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\theta \in\ ]0, 1[$ tel que $g(1) = \dfrac{1}{3}\,[g'(1) + 2g'(0)] - \dfrac{1}{180}\, g^{(5)}$

***Exercice 19 :*** Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $\xi \in ]a, b[$ tel que, pour $x \in [a, b]$,

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2} f''(\xi).$$

*Application :* $a = n \in \mathbb{N}^*$, $x = n + h$ $(0 < h < 1)$, $b = n + 1$ et $f$ est par exemple la fonction $\log_{10}$. Quel est un majorant de l'erreur d'interpolation linéaire commise quand on remplace $\log_{10}(n + h)$ par $\log_{10} n + \Delta h$ ($\Delta$ = différence tabulaire). Pourquoi les tables de logarithmes usuelles étaient-elles à 5 décimales ?

## § V.2 *VARIATION DES FONCTIONS*

Intéressons-nous plus particulièrement aux fonctions numériques d'une variable réelle, $\mathbb{R}$ étant muni de son ordre usuel.

**THÉORÈME V.2.1**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable à droite sur* Int $(I)$.
>
> (I) *Pour que $f$ soit* **croissante** *(resp. décroissante), il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in$* Int $(I)$ *(resp. $f'_d \leqslant 0$ pour tout $x \in$* Int $(I)$).
>
> (II) *Pour que $f$ soit* **constante,** *il faut et il suffit que $f'_d(x) = 0$ pour tout $x \in$* Int $(I)$.

*Démonstration :*

La condition est nécessaire : si $f$ est croissante (resp. décroissante), on a pour $a \in$ Int $(I)$ : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pour $x \in I$ et $x \neq a$, d'où en particulier $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow a,\, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$), et cette limite est nulle si $f$ est constante.

Réciproquement, si $f'_d(a) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) pour tout $a \in$ Int $(I)$, le corollaire 2 du théorème V.1.4 montre que $f$ est croissante (resp. décroissante). ■

En pratique le théorème précédent s'emploie essentiellement avec des fonctions **dérivables** sur $I$, ce qui entraîne leur continuité et aussi leur dérivabilité à droite sur Int $(I)$.

**COROLLAIRE**

> *Avec les notations et hypothèses du théorème* V.2.1, *pour que $f$ soit* **strictement croissante,** *il faut et il suffit qu'on ait simultanément :*
>
> a) $f'_d(x) \geqslant 0$ *pour $x \in$* Int $(I)$,
>
> b) *l'ensemble $E = \{x \in$ Int $(I) \mid f'_d(x) > 0\}$ est* **partout dense dans** **$I$** *(autrement dit, $I \backslash E$ ne contient aucun intervalle de lo*

*Démonstration :*

Les conditions $a$) et $b$) sont nécessaires. En effet si $f$ est strictement croissante, c'est d'une part qu'elle est croissante, donc $f'_d(x) \geqslant 0$ pour $x \in \text{Int}\ (I)$, mais d'autre part $f'_d(x)$ peut bien s'annuler en certains points, mais pas sur tout un intervalle $]a, b[$ avec $a \in I$, $b \in I$, $a < b$, car d'après le théorème V.2.1 cela signifierait que $f(a) = f(b)$ ce qui est incompatible avec une croissance stricte.

Réciproquement, si les conditions $a$) et $b$) sont satisfaites, alors d'après $a$) $f$ est croissante. Si jamais il existait deux points $a$ et $b$ dans $I$, avec $a < b$, tels que $f(a) = f(b)$, cela entraînerait que $f$ est constante sur $[a, b]$ et donc que $f'_d(x) = 0$ pour $a < x < b$, ce qui contredirait $b$). ■

Bien sûr le théorème V.2.1 et son corollaire restent vrais si on remplace « dérivable à droite » par « dérivable à gauche ».

**Tableaux de variations**

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie non vide $A$ de $\mathbb{R}$. Même dans le cas simple où $A$ est un intervalle, et même si $f$ vérifie de larges hypothèses de continuité ou dérivabilité (par exemple si $f$ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$), *il n'est pas toujours possible de partager A en sous-intervalles sur chacun desquels f est monotone,* car il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, non monotones par segments en nombre fini, mais ce ne sont (pour le moment) que des curiosités sans grand intérêt pratique dont nous nous contenterons de donner quelques exemples en exercices.

Pour les fonctions qui se rencontrent le plus couramment en mathématiques appliquées, le théorème V.2.1 et son corollaire permettent généralement de partager $A$ en sous-intervalles sur chacun desquels $f$ est monotone (resp. strictement monotone). Il est alors commode de consigner dans un *tableau de variations* ces intervalles, en écrivant leurs extrémités de gauche à droite dans l'ordre usuel des réels. On réserve une ligne pour noter le signe de $f'$ dans chaque colonne relative à ces intervalles et une autre ligne pour indiquer par une flèche le sens de variation correspondant de $f$ (flèche montante si $f$ croît, descendante si $f$ décroît). Les zéros de $f'$ figureront sur le tableau, même si en ces points $f'$ ne change pas de signe (renseignement intéressant pour le graphe $\Gamma_f$). Les points de Adh $(A) \backslash A$ autres que $-\infty$ et $+\infty$ sont signalés par une double barre verticale et lorsque c'est possible, il faut toujours mentionner les limites de $f$ en ces points, ainsi que les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Il est utile de mentionner également dans le tableau les valeurs de $x$ pour lesquelles $f'(x)$ n'est pas définie, surtout si $f'$ a une limite finie ou infinie en ces points à droite ou à gauche.

L'avantage de la présentation sous forme de tableau est qu'on peut rajouter des lignes supplémentaires parfois utiles par exemple pour étudier le signe de $f'$, ou ses variations, et que l'on peut embrasser tous ces renseignements d'un seul coup d'œil, ce qui permet de détecter rapidement des erreurs éventuelles. Bien sûr les extrema locaux s'y lisent facilement.

On notera que sur tout intervalle non trivial où $f'$ est continue et strictement monotone, $f$ s'annule au plus une fois, l'existence d'un zéro de $f$ dépendant des valeurs des limites de $f$ aux extrémités de cet intervalle (cf. théorème des valeurs intermédiaires III.5.3). Ainsi le tableau de variations permet de repérer l'emplacement des *zéros* de $f$ (*i.e.* les $x \in A$ tels que $f(x) = 0$). Le même princ

$f'$ (ou à une fonction qui a le même signe que $f'$) permet également de repérer les zéros de $f'$, d'où facilement son signe si $f'$ est continue.

Un tableau de variations peut être agrémenté de valeurs particulières intéressantes pour $f$ (valeurs de $f$ en ses extrema locaux ou en d'autres points remarquables : zéros de $f$, $f'$, éventuellement de $f''$, ...). Ce n'est qu'après l'étude personnelle d'un grand nombre d'exemples variés que le lecteur acquerra l'expérience nécessaire. Bornons-nous à illustrer ce qui précède par quelques exemples simples.

***Exemple 1 :*** Etudier pour $\alpha$ entier donné $\geqslant 2$ la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Log}^\alpha x$.

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On commence par remarquer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (cf. § IV.1) et que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ si $\alpha$ est pair, mais que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$ si $\alpha$ est impair. On calcule ensuite la dérivée $f'(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{Log}^{\alpha-1} x (\alpha - \operatorname{Log} x)$, ce qui permet de dresser les tableaux de variation (en prenant garde de placer correctement les nombres $e^\alpha > 1$ où $f'$ s'annule.

1$^{\text{er}}$ *cas :* $\alpha$ pair

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_\alpha$ | $\searrow$ | $0$ |

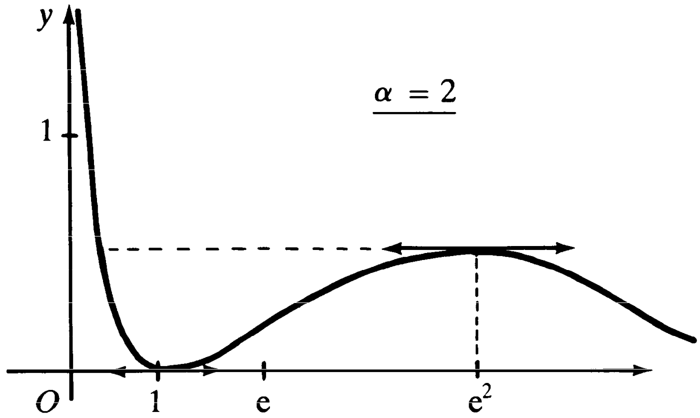
2$^{\text{e}}$ *cas :* $\alpha$ impair

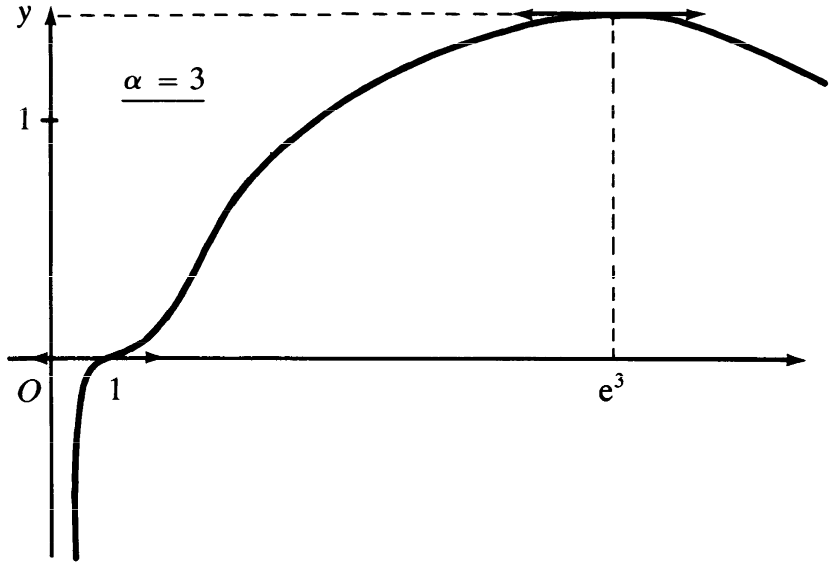
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_\alpha$ | $\searrow$ | $0$ |

On calcule $M_\alpha = \alpha^\alpha e^{-\alpha}$ et $f(1) = 0$.

On constate que dans le premier cas, $f$ présente en $x = 1$ un minimum local unique (c'est le minimum global de $f$) et en $x = e^\alpha$ un maximum local unique (non global) de valeur $M_\alpha$ tandis que dans le second cas on a un seul extremum local : c'est le maximum global de $f$, de valeur $M_\alpha$, obtenu au point $x = e^\alpha$.

On achève généralement l'étude en dessinant le graphe $\Gamma_f$ de $f$. Si $\alpha$ est impair, le point d'inflexion à tangente $Ox$ ne peut pas passer inaperçu, ainsi que les asymptotes d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$. Nous reviendrons plus tard sur l'étude plus poussée des branches infinies et de la concavité.




***Exemple 2 :*** Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\,e^x + \lambda}{x+1}$, où $\lambda$ désigne un paramètre $> 0$.

La fonction $f$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur chaque intervalle $I = ]-\infty, -1[$, $J = ]-1, +\infty[$. Pour $x \neq -1$ on calcule la dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2+x+1)-\lambda}{(x+1)^2}$ qui a le signe de son numérateur. $N(x) = e^x(x^2+x+1)-\lambda$, où $N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il vaut donc mieux commencer par étudier les variations de $N$ (pour avoir son signe). Or $N'(x) = e^x(x^2+3x+2) = e^x(x+1)(x+2)$, d'où le premier tableau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $N(x)$ | $-\lambda$ | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

avec $M = 3\,e^{-2} - \lambda$
$m = e^{-1} - \lambda$ .

*Un premier cas* se présente, avec $M > 0$ et $m < 0$, c'est-à-dire $e^{-1} < \lambda < 3\,e^{-2}$ ($\lambda$ proche de 0,4), pour lequel $N$ admet un zéro dans chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, -1[$, $]-1, +\infty[$ que r rons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Comme $N(0) = 1 - \lambda > 0$, on peut même préciser que $\gamma \in ]-1, 0[$. Le signe de $f'(x)$ s'en déduit sur $I$ et $J$, d'où le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-2\beta$ | | $-1$ | | | $\gamma$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $A$ | $\nearrow$ | $B$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | | $\searrow$ | $C$ | $\nearrow$ | $\lambda$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + \dfrac{\lambda}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = +\infty\,, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + \dfrac{\lambda}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 0\,.$$

Pour une valeur numérique de $\lambda$, on achèverait en calculant des valeurs approchées des racines $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de l'équation $N(x) = 0$ et en en déduisant les valeurs correspondantes $A$, $B$, $C$ de $f$.

*Un deuxième cas* est celui où $\lambda \geqslant 3\,e^{-2}$, car alors $M \leqslant 0$ et le signe de $y'$ reste le même sur $I$ (à noter le point d'inflexion à tangente parallèle à $Ox$ pour $x = -2$ dans le cas particulier $\lambda = 3\,e^{-2}$), d'où un tableau de variations plus simple :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\gamma$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $C$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

A noter le cas particulier $\lambda = 1$ pour lequel $\gamma = 0$ et $C = 1$.

*Un troisième cas* est celui où $0 < \lambda \leqslant e^{-1}$ pour lequel $M > 0$ et $m \geqslant 0$, le seul changement de signe de $y'$ ayant lieu sur $]-\infty, -2[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $A$ | $\nearrow$ | | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## Règles de l'Hôpital [1]

Voici une application du théorème des accroissements finis qui peut rendre des services dans l'étude concrète des fonctions, à condition de ne pas en faire un mauvais usage.

**Théorème V.2.2**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que $b \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(I)$. Soit $f$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que $g(t) \neq 0$, que $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. Si $f(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} 0$, $g(t) \underset{t \to b}{\longrightarrow} 0$, et $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} \underset{t \to b}{\longrightarrow} \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{t \to b}{\longrightarrow} \lambda$.*

*Démonstration :*

Etudions d'abord le cas où $b \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon$ un réel $> 0$. On peut choisir $\alpha > 0$ tel que $\left| \dfrac{f'(t)}{g'(t)} - \lambda \right| \leqslant \varepsilon$ pour $t \in I \cap [b-\alpha, b+\alpha]$. Soit alors $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les prolongements par continuité au point $b$ de $f$ et de $g$. Appliquons à $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ le corollaire 1 du théorème V.1.3 sur le segment $[b, t]$ si $t > b$ (resp. $[t, b]$ si $t < b$), $t \in I \cap [b-\alpha, b+\alpha]$, $t \neq b$ : il existe $c \in ]b, t[$ (resp. $]t, b[$) ($c$ non nécessairement unique ; $c$ dépendant de $t$) tel que $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, d'où $\left| \dfrac{f(t)}{g(t)} - \lambda \right| \leqslant \varepsilon$, et c'est vrai pour tout $t \in I \cap [b-\alpha, b+\alpha]$. On a donc prouvé que $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{t \to b}{\longrightarrow} \lambda$.

Etudions ensuite le cas où $b = +\infty$ (resp. $-\infty$). On se ramène au cas précédent en considérant les fonctions $u$ et $v$ : $\left[ \dfrac{-1}{A}, 0 \right[ \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $u(t) = f\left( \dfrac{-1}{t} \right)$, $v(t) = g\left( \dfrac{-1}{t} \right)$, le réel $A$ étant choisi dans $\mathbb{R}_+^* \cap I$. ■

C'est le théorème V.2.2 qui constitue la *« règle de l'Hôpital »* (à distance finie si $b \in \mathbb{R}$, à l'infini si $b = +\infty$ ou $-\infty$).

***Exemple 3 :*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Etudier au voisinage de 1 la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Log}\,(x + \sqrt{1+x^2}) - \mathrm{Log}\,(1+\sqrt{2})}{x^\alpha - 1}$. $\varphi(x)$ se présente sous la forme $\dfrac{F(x) - F(1)}{G(x) - G(1)}$, mais on hésite à expliciter $\varphi'(x)$ qui n'apporterait que des complications. Les conditions d'application de la règle de l'Hôpital se trouvant satisfaites par les fonctions $f : x \mapsto F(x) - F(1)$ et $g : x \mapsto G(x) - G(1)$, on écrit le rapport des dérivées $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\alpha x^{\alpha-1}}$ dont la limite quand $x \longrightarrow 1$, $x \neq 1$ est évidemment $\dfrac{1/\sqrt{2}}{\alpha}$. Il s'ensuit que $\varphi(x) \underset{x \to 1, x \neq 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2}}$. En fait ici, il aurait été

---

[1] Guillaume François Antoine de *l'Hospital,* marquis de Sainte-Mesme (1661-1704) officier et mathématicien français, élève de Johann *Bernoulli.*

aussi simple d'appliquer le théorème des accroissements finis séparément au numérateur et au dénominateur, mais il peut arriver que des simplifications se produisent dans $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, rendant la règle de l'Hôpital avantageuse, ou même qu'on puisse l'appliquer une seconde fois à $\dfrac{f'}{g'}$. Cependant il ne faut pas en abuser, et l'on peut remarquer qu'*elle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes* (cf. exercice 6 du § V.4).

**Fonctions hyperboliques dans le champ réel**

Nous avons défini dès les premiers chapitres de cet ouvrage les fonctions exponentielles : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ et en particulier l'exponentielle naturelle de base e : $x \mapsto \exp x$ ou plus brièvement $x \mapsto \mathrm{e}^x$. La partie paire de cette dernière fonction s'appelle le **cosinus hyperbolique** et la partie impaire le **sinus hyperbolique.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on a donc par définition :

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2},$$

d'où

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit aussi la **tangente hyperbolique** par $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

Ces fonctions sont toutes trois de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme exp.

On vérifie immédiatement que, pour tout $x$ :

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1} \tag{1}$$

ce qui justifie le qualificatif d'*hyperboliques,* puisque la représentation $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ constitue un paramétrage d'une branche d'hyperbole.

Du fait que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$ on déduit immédiatement leurs dérivées :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x \,;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \,;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x}\,.$$

Les tableaux de variations sont très simples : $\operatorname{ch} x > 0$, th fonction impaire et $|\operatorname{th} x| < 1$ résultent immédiatement des définitions.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sh}' x$ | | | $+$ | | |
| $\operatorname{sh} x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{ch}' x$ | | $-$ | | $+$ | |
| $\operatorname{ch} x$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | | |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\text{th}'\,x$ | | | $+$ | | |
| $\text{th}\,x$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+1$ |

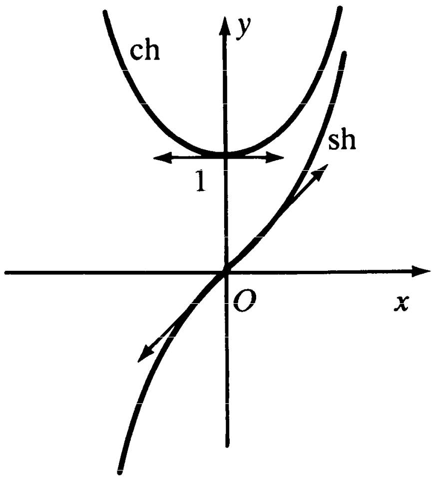



**Fig. 1.**

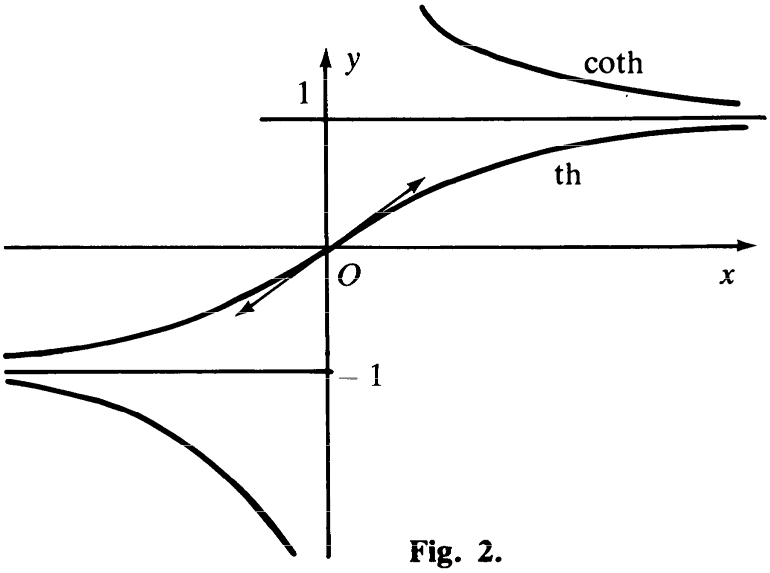



**Fig. 2.**

On remarque de plus que $\text{ch}\,x - \text{sh}\,x = e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\text{ch}\,x - \text{sh}\,x > 0 \ (\forall x)$.

On définit aussi parfois la cotangente hyperbolique $\left(\text{coth}\,x = \dfrac{1}{\text{th}\,x}\right)$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et dont la dérivée est $\dfrac{-1}{\text{sh}^2\,x}$.

Des calculs algébriques très simples, à partir de $e^{x+y} = e^x \times e^y$, permettent d'obtenir des *formules d'addition :*

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad \boxed{\begin{array}{ll} (2) & \text{ch}\,(a+b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b \\ (3) & \text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,b\,\text{ch}\,a \\ (4) & \text{th}\,(a+b) = \dfrac{\text{th}\,a + \text{th}\,b}{1 + \text{th}\,a\,\text{th}\,b} \end{array}}$$

la dernière s'obtenant par division membre à membre de (3) par (2). On en déduit les formules de transformation de produits en sommes :

$$\begin{aligned} 2\,\text{ch}\,a \times \text{ch}\,b &= \text{ch}\,(a+b) + \text{ch}\,(a-b) \\ 2\,\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b &= \text{ch}\,(a+b) - \text{ch}\,(a-b) \\ 2\,\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b &= \text{sh}\,(a+b) + \text{sh}\,(a-b) \end{aligned}$$

et de sommes en produits : $\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q &= 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \\
\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q &= 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2} \\
\operatorname{th} p + \operatorname{th} q &= \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q} .
\end{aligned}$$

Plus utiles encore sont les *formules de duplication :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \begin{aligned}
&(5) \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \\
&(6) \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
&(7) \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}
\end{aligned}$$

et l'expression de $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ en fonction de $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$ :

$$(8) \qquad \boxed{\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}} \, .$$

Il ne faudrait pas croire que beaucoup de fonctions (vérifiant des conditions de dérivabilité suffisantes) satisfassent à des « relations d'addition » de ce type. En fait, il n'y a que les fonctions rationnelles par rapport aux fonctions *hyperboliques* (ou, ce qui revient au même, par rapport aux fonctions *circulaires,* étudiées au § suivant), et les *fonctions elliptiques* ([1]), qui sont hors sujet dans ce livre.

Nous laissons au lecteur le soin de calculer si le besoin s'en fait sentir des formules pour $\operatorname{ch}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ ou pour $\operatorname{ch} n\theta$ (partie paire de $e^{n\theta} = (e^{\theta})^n = (\operatorname{ch} \theta + \operatorname{sh} \theta)^n$), etc...

Revenons aux fonctions hyperboliques proprement dites :

$x \mapsto \operatorname{ch} x$ établit une bijection strictement croissante continue de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$,
$x \mapsto \operatorname{sh} x$ définit une bijection strictement croissante continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
$x \mapsto \operatorname{th} x$ définit une bijection strictement croissante continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +1[$.

On peut donc définir des bijections réciproques continues strictement croissantes, respectivement de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et de $]-1, +1[$ sur $\mathbb{R}$. On les appelle respectivement fonction **argument cosinus**

---

([1]) De façon plus précise, soit $f$ une fonction *méromorphe* sur $\mathbb{C}$ ; s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ *irréductible* tel qu'on ait identiquement $P(f(z_1 + z_2), f(z_1), f(z_2)) = 0$, alors $f$ est soit une *fonction elliptique,* soit une fonction rationnelle en sin $az$ et cos $az$ pour $a \in \mathbb{C}^*$ convenable. Ce théorème est dû à *Weierstrass.* Voir par exemple [1

**hyperbolique** (notée Arg ch), **argument sinus hyperbolique** (notée Arg sh) et **Argument tangente hyperbolique** (notée Arg th). Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ respectivement sur $]1, +\infty[$, sur $\mathbb{R}$ et sur $]-1, +1[$. Le théorème de dérivation des fonctions réciproques fournit les dérivées de ces fonctions :

$(\forall x \in ]1, +\infty[)$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arg\,ch} x = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Arg\,ch} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Arg\,ch} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arg\,sh} x = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{Arg\,sh} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$(\forall x \in ]-1, +1[)$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arg\,th} x = \operatorname{ch}^2(\operatorname{Arg\,th} x) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Arg\,th} x)} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

En réalité les fonctions Arg ch, Arg sh et Arg th peuvent s'exprimer simplement à l'aide de la fonction Log. En effet, pour $x \in [1, +\infty[$ si $y = \operatorname{Arg\,ch} x$, c'est que $x = \operatorname{ch} y \geqslant 1$ et $y \geqslant 0$, d'où $2x = \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}$ et $\mathrm{e}^{2y} - 2x\,\mathrm{e}^y + 1 = 0$. Le trinôme $X^2 - 2Xx + 1$ a deux racines positives $x + \varepsilon\sqrt{x^2 - 1}$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$. Leur produit étant égal à 1, il faut choisir pour $\mathrm{e}^y$ $(\geqslant 1)$ la plus grande de ces deux racines, soit $\mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$, et par suite :

$$(\forall x \in [1, +\infty[) \quad \operatorname{Arg\,ch} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

On obtient par une méthode identique

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \operatorname{Arg\,sh} x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

et enfin

$$(\forall x \in ]-1, +1[) \quad \operatorname{Arg\,th} x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Voici deux dessins représentant les graphes de ces trois fonctions :

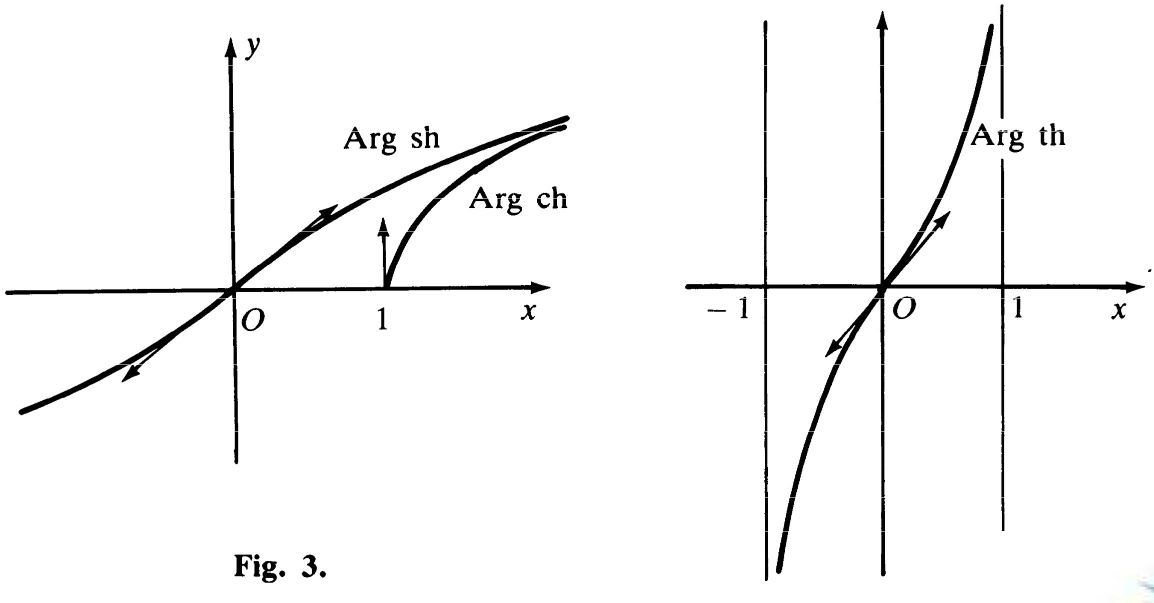



**Fig. 3.**

***Exercice 1 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow ]-1, +1[$ une fonction non constante, *continue en* 0, telle que $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2)\ f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. Trouver $f$.

***Exercice 2 :*** Calculer la dérivée $n$-ième de $x \mapsto e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$, où $a \in \mathbb{R}$ est donné.

***Exercice 3 :*** Simplifier les expressions suivantes, où $x \in \mathbb{R}$ :

*a*) $\operatorname{Arg\,ch} \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x + 1}{2}} - \dfrac{x}{2}$, *b*) $\operatorname{Arg\,ch}(4x^3 - 3x)$ et $\operatorname{Arg\,sh}(3x + 4x^3)$

*c*) $\operatorname{Log} \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}} - x$, *d*) $\operatorname{Arg\,th} \sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$.

***Exercice 4 :*** Montrer que $\forall x \in ]0, 1[,\ 1 + x < e^{\operatorname{sh} x} < \dfrac{1}{1-x}$. En déduire que, si $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé, la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} + \operatorname{sh}\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \operatorname{sh}\dfrac{1}{kn}$ converge, et donner sa limite.

***Exercice 5 :*** Discuter l'équation $\exp(-a\,e^{-ax}) = x$, où le paramètre $a$ est un réel $> 0$ donné.

***Exercice 6 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes, en précisant chaque fois l'ensemble de définition :

*a*) $x \mapsto e^x + e^{1+\frac{1}{x}}$ *b*) $x \mapsto e^{1/x} - 3\,e^{3/x} + 3\,e^{5/x} - e^{7/x}$ (signe de $f''$)

*c*) $x \mapsto \dfrac{a^x + 1}{e^x + 1}\ (a > 1)$ *d*) $x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$

*e*) $x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x} e^{1/x}$ *f*) $x \mapsto 1 - x - \dfrac{2x \operatorname{Log}|x|}{x+1}$ (signe de $f''$) .

***Exercice 7 :*** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant e^t - 1 - t \leqslant \dfrac{t^2}{2} e^{|t|}$ et que, pour $t < 0$ on a même : $0 < e^t - 1 - t < \dfrac{t^2}{2}$.

***Exercice 8 :*** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $(1+x)^{1/4} \geqslant 1 + \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{32}x^2$.

***Exercice 9 :*** Montrer que si $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ on peut mettre $\operatorname{Log}(1+x)$ sous la forme $x - \dfrac{x^2}{2} + x^3 u(x)$, avec $|u| \leqslant \dfrac{7}{12}$. Cette inégalité est-elle la meilleure possible ?

***Exercice 10 :*** Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $0 < \sqrt[3]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{9} < \dfrac{5}{81}x^3$.

***Exercice 11 :*** Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 3$, montrer que l'on a : $x^n + (1+2x)^{n/2} \leqslant (1+x)^n$.

***Exercice 12 :*** Trouver la borne inférieure de l'ensemble des nombres $\sqrt{x+y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$, où $x$ et $y$ sont deux réels $> 0$ arbitraires.

***Exercice 13 :*** Montrer qu'il existe un réel $b > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, b]$ on ait : $1 + x < -\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log}(1-x)} < 1 + x + x^2$. Comment déterminer la borne supérieure de l'ensemble de ces $b$ ?

***Exercice 14 :*** Pour $x > 0$ et $y > 0$ quelconques, on a : $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^y < e^x < \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$.

***Exercice 15 :*** Pour $x$ suffisamment grand il est évident que $(x+1)^x < x^{x+1}$. Comment déterminer la borne inférieure des $x$ vérifiant cette inégalité ?

***Exercice 16 :*** On applique la formule des accroissements finis à la fonction e le segment $[0, x]$ si $x > 0$ et sur $[x, 0]$ si $x < 0$. Montrer qu'on définit ainsi sur $\mathbb{R}^*$ une fonction $\theta$ telle que $e^x - 1 = x\, e^{x\theta(x)}$.

*a*) Expliciter $\theta$. Compléter $\theta$ par continuité au point 0. Etudier les variations de cette fonction $\theta$ ainsi complétée (cf. exemple 2 du § V.5).

*b*) On pose $\theta_1(0) = \frac{1}{3}$ et $\theta_1(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x - 1 - x}{x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. Etudier les variations de $\theta_1$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \theta_1(x) < \theta(x)$.

***Exercice 17 :*** *a*) Trouver les réels $x$ tels que $2 \operatorname{Arg\,sh} x + \operatorname{Arg\,th} \frac{1}{2} = \operatorname{Arg\,ch} 3$.

*b*) Résoudre l'équation $\operatorname{Arg\,ch} x = \operatorname{Arg\,sh}\ (x - 2)$.

*c*) Soit $y = \frac{1}{2} \operatorname{Arg\,sh} \frac{4\sqrt{x}(1+x)}{(1-x)^2}$. Calculer $\operatorname{ch} 2y$, $e^y$ et $y$ à l'aide de $x$.

***Exercice 18 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes en précisant chaque fois l'ensemble de définition :

*a*) $x \mapsto \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{x+1}$ *b*) $x \mapsto (x-1)^{\frac{1}{x-\lambda}}$ ($\lambda$ paramètre) *c*) $x \mapsto \frac{x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{\operatorname{ch} x}$

*a*) $x \mapsto x^{\frac{1-x}{x}}$ *e*) $x \mapsto |x|^{1+\frac{1}{x}}$ *f*) $x \mapsto \frac{\operatorname{Arg\,sh} \sqrt{-x}}{\sqrt{x(x-1)}}$.

***Exercice 19*** (suites de Farey) : On appelle suite de Farey d'ordre $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) la suite *croissante* des fractions $\geq 0$ *irréductibles* $\frac{a}{b}$ dont le dénominateur $b \in [\![1, n]\!]$.

*a*) Montrer pour $n$ fixé l'existence et l'unicité d'une telle suite $(F_n)$. Combien de termes de $(F_n)$ appartiennent-ils à $[0, 1]$ ? Expliciter ces termes pour $n \in [\![1, 5]\!]$.

*b*) On donne deux fractions positives $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ telles que $ps - qr = 1$. Soit $n$ un entier tel que $\operatorname{Max}(q, s) \leq n < q + s$. Montrer que $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux termes *consécutifs* de la suite $(F_n)$. (On pourra utiliser la fonction auxiliaire $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{p + rt}{q + st}$.) Montrer que $\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}$ sont trois termes consécutifs de la suite $(F_{q+s})$.

*c*) Réciproquement, si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux termes consécutifs dans $(F_n)$, où $n$ et fixé, montrer que $|ps - qr| = 1$ (on procédera par récurrence).

*d*) On se propose de démontrer le *théorème d'Hurwitz : soit* $\xi$ un irrationnel ; il existe une infinité de couples $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\operatorname{pgcd}(x, y) = 1$ et $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, y^2}$.

*d*$_1$) A tout rationnel $\frac{a}{b}$ irréductible et à tout $c \in \mathbb{R}_+^*$ on associe le segment $I_c\left(\frac{a}{b}\right) = \left[\frac{a}{b} - \frac{1}{cb^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{cb^2}\right]$. Soit $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\xi \in \left]\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right[$, où $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont deux termes consécutifs de $(F_n)$. On pose $J_g^{(n)} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}\right]$ et $J_d^{(n)} = \left[\frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}\right]$ et $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Montrer que $I_c\left(\frac{p}{q}\right) \cap I_c\left(\frac{r}{s}\right)$ est non vide ssi $c \leq g\left(\frac{s}{q}\right)$ et que $I_c\left(\frac{p}{q}\right) \cap I_c\left(\frac{p+r}{q+s}\right)$ est non vide ssi $c \leq g\left(1 + \frac{s}{q}\right)$. En déduire que l'ensemble des $\operatorname{Max}_{x \in \mathbb{R}_+^*}(g(x), g(1+x))$ admet un plus petit élément $c_0$. Calculer $c_0$.

*d*$_2$) Montrer que si $c \leq \sqrt{5}$, alors : $J_g^{(n)} \subset I_c\left(\frac{p}{q}\right) \cup I_c\left(\frac{p+r}{q+s}\right) \cup I_c\left(\frac{r}{s}\right)$ et que $J_d^{(n)} \subset I_c\left(\frac{p}{q}\right) \cup I_c\left(\frac{p+r}{q+s}\right) \cup I_c\left(\frac{r}{s}\right)$.

Montrer que l'un au moins des trois nombres $\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}$ vérifie l'inégalité *stricte* $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, y^2}$.

$d_3$) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n$ tels que $\xi \in J_g^{(n)}$ et une infinité d'entiers $n$ tels que $\xi \in J_d^{(n)}$. En déduire le théorème d'Hurwitz.

N.B. On note traditionnellement $M(\xi)$ la borne supérieure des $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'inéquation $\left|\xi - \dfrac{x}{y}\right| < \dfrac{1}{\lambda y^2}$ possède une infinité de solutions $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Pour $\xi$ donné, $M(\xi)$ peut être $> \sqrt{5}$ (le théorème d'Hurwitz montre que $M(\xi) \geqslant \sqrt{5}$) ; on peut avoir $M(\xi) = +\infty$, mais aussi $M(\xi) = \sqrt{5}$ ; par exemple $M\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$, et si $\xi = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} \dfrac{1}{2^{k!}}$, alors $M(\xi) = +\infty$. Voir [14] par exemple.

***Exercice 20 :*** Soit $(\lambda_k)_{k \geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit par récurrence la suite de polynômes $(P_n)$ à coefficients réels ainsi : $P_0 = 1$ ; $P_1 = X$ et $(\forall n \geqslant 2)$ $P_n(X) = XP_{n-1}(X) + \lambda_{n-2} P_{n-2}(X)$.

*a*) Vérifier que $P_{2p}(X) = F_p(X^2)$ et $P_{2p+1}(X) = XG_p(X^2)$, où $F_p$ et $G_p$ sont des polynômes de degré $p$ à coefficients $> 0$ $(p \in \mathbb{N})$.

*b*) Montrer que pour $p \geqslant 1$, $F_p$ et $G_p$ sont dissociées en facteurs simples dans $\mathbb{R}[X]$, leurs racines étant strictement négatives.

*Indication :* On raisonnera par récurrence sur $p$, après avoir exprimé $F_{p+1}$ en fonction de $F_p$ et $G_p$, puis $G_{p+1}$ en fonction de $F_{p+1}$ et $G_p$, on dressera les tableaux de variations de $F_p$ et $G_p$ sur $\mathbb{R}_-$ ; le raisonnement par récurrence montrera alors que $F_p$ et $G_p$ ont $p$ racines simples dans $\mathbb{R}_-^*$, et que si on les note respectivement $(\alpha_{p,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ et $(\beta_{p,k})_{1 \leqslant k \leqslant p}$ dans l'ordre strictement croissant, on a :

$$\beta_{p,1} < \alpha_{p,1} < \beta_{p,2} < \alpha_{p,2} < \cdots < \beta_{p,p} < \alpha_{p,p} < 0) .$$

*Application :* Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, étudier $\Delta_n(X)$ :

$$\Delta_n(X) = \det \begin{bmatrix} X & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & X & a_3 & & \vdots \\ 0 & -b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & X \end{bmatrix}$$

où $a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ sont donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

***Exercice 21 :*** On donne $k \in \mathbb{R}$. Discuter l'inéquation : $x \in \mathbb{R}_+^*$ $x^{kx} \leqslant e^{x^2+k}$. (On discutera suivant la valeur de $k$.)

## § V.3 *L'EXPONENTIELLE COMPLEXE, FONCTIONS HYPERBOLIQUES ET CIRCULAIRES COMPLEXES*

Nous avons vu au Chapitre II que le nombre e était la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n!}$. Prenons $z \in \mathbb{C}$ et étudions la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$. En choisissant un entier $N$ tel que $N > 2|z|$, il est clair que pour tout $n \geqslant N$ on a :

$$\frac{|z|^n}{n!} \leqslant \left(\frac{|z|^N}{N!} 2^N\right) \times \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{A}{2^n},$$

et comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que la série à termes positifs $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge aussi (cf. théorème II.5.3). Par suite, **la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente, donc convergente** (cf. théorème II.5.5).

Nous noterons provisoirement sa somme $\mathscr{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(z \in \mathbb{C})$. Pour $(a, z) \in \mathbb{C}^2$ fixé, nous allons étudier la fonction $\Phi_{a,z} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathscr{E}(a + zt)$. On remarque tout de suite que $\Phi_{a,z}(0) = \mathscr{E}(a)$, et que $\Phi_{a,0}(t) = \mathscr{E}(a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, comme $\mathscr{E}(0) = 1$, $\Phi_{0,0}(t) = 1$ pour tout $t$ réel et $\Phi_{0,z}(0) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

**PROPOSITION V.3.1**

> *Soit $(a, z) \in \mathbb{C}^2$. La fonction $\Phi_{a,z}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $(\Phi_{a,z})' = z\Phi_{a,z}$.*

*Démonstration :*

La propriété est évidente si $z = 0$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ ; notons, pour abréger, $f$ la fonction $\Phi_{a,z}$, avec $z \neq 0$.

1[er] *cas : si* $a + t_0 z = 0$. Pour $u \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |u| \leqslant |z|$ on a :

$$\left| \frac{f(t_0 + u) - f(t_0)}{u} - z \right| = \left| \frac{\mathscr{E}(uz) - \mathscr{E}(0)}{u} - z \right| = \left| u \sum_{n=2}^{\infty} u^{n-2} \frac{z^n}{n!} \right|$$

$$\leqslant |u| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{2n-2}}{n!} \underset{u \longrightarrow 0,\, u \neq 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

En effet la série $\sum \frac{|z^2|^n}{n!}$ converge dans $\mathbb{R}$ et par conséquent le nombre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^{2n-2}}{n!}$ est bien défini dans $\mathbb{R}$. On a donc prouvé que $f'(t_0)$ existe et vaut $z$.

2[e] *cas : si* $a + t_0 z \neq 0$. Pour $u \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |u| \leqslant |z|$, la *formule du binôme* donne, en posant pour simplifer $A = a + t_0 z$ :

$$|(A + uz)^n - A^n - nA^{n-1} uz| = \left| u^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} u^{k-2} z^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant |u|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |A|^{n-k} |z|^{2k-2} \leqslant \frac{|u|^2}{|z|^2} (|A| + |z|^2)^n\,.$$

Soit $S$ la somme de la série convergente $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(|A| + |z|^2)^n}{n!}$. Alors :

$$\left| \frac{f(t_0+u)-f(t_0)}{u} - zf(t_0) \right| =$$

$$= \frac{1}{|u|} \left| \sum_{n=2}^{\infty} ((A+uz)^n - A^n - nA^{n-1}uz) \times \frac{1}{n!} \right|$$

$$\leqslant \frac{|u|}{|z|^2} S \underset{u \to 0,\, u \neq 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Donc $f'(t_0)$ existe et vaut $zf(t_0)$. ■

**COROLLAIRE 1**

*Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a $\mathscr{E}(z_1+z_2) = \mathscr{E}(z_1) \times \mathscr{E}(z_2)$.*

*Démonstration :*

Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto \mathscr{E}(tz)\,\mathscr{E}(a-tz) = \Phi_{0,z}(t) \cdot \Phi_{a,-z}(t)\,.$$

Cette fonction $g$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables à valeurs dans $\mathbb{C}$ (cf. § IV.6), et

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad g'(t) = z\Phi_{0,z}(t) \cdot \Phi_{a,-z}(t) - z\Phi_{0,z}(t)\, \Phi_{a,-z}(t) = 0$$

par application de la proposition V.3.1. Il en résulte que $g$ est constante, égale à $g(0) = \mathscr{E}(a)$. En particulier, $g(0) = g(1)$, ce qui donne : $\mathscr{E}(z)\,\mathscr{E}(a-z) = \mathscr{E}(a)$, et le corollaire 1 s'en déduit en posant $a = z_1 + z_2$ et $z = z_1$. ■

**COROLLAIRE 2**

*Soit $(z, \lambda) \in \mathbb{C}^2$. La fonction $\lambda\,\Phi_{0,z}$ est l'unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(0) = \lambda$ et $f'(t) = zf(t)$ pour tout réel $t$.*

*Démonstration :*

La fonction $h = \lambda\,\Phi_{0,z}$ vérifie bien les propriétés énoncées. Réciproquement, soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui les vérifie. Alors $\Phi_{0,-z} \times f = \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\varphi' = -z\Phi_{0,-z} \times f + \Phi_{0,-z} \times f' = \Phi_{0,-z}(f' - zf) = 0\,,$$

donc $\varphi$ est constante et égale à $\varphi(0) = \lambda$. En multipliant $\varphi$ par $\Phi_{0,z}$, il en résulte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lambda\,\Phi_{0,z}(t)$. ■

**PROPOSITION V.3.2**

*La restriction de $\mathscr{E}$ à $\mathbb{R}$ est l'exponentielle naturelle ; autrement dit :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

*Démonstration :*

Soit $f = \mathscr{E}|_{\mathbb{R}}$ $(f = \Phi_{0,1})$. Alors $f$ est dérivable, $f(0) = 1$ et $f' = f$. Comme la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ vérifie ces mêmes propriétés, compte tenu du corollaire 2 ci-dessus qui montre l'unicité d'une teldle fonction, on en déduit $f(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ■

***Remarque 1 :*** Une autre démonstration pourrait consister à utiliser la propriété vérifiée par $f : f(x+y) = f(x)\,f(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et à chercher les fonctions *dérivables* qui satisfont cette identité sans être identiquement nulles. Compte tenu de $f(1) = \mathscr{E}(1) = \mathrm{e}$, la seule solution possible est $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. On peut également utiliser cette identité pour calculer $f\left(\frac{p}{q}\right)$ pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et achever de déterminer $f$ grâce à sa *continuité,* ou même seulement grâce à sa *croissance,* car il est évident que pour $x > 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1$, d'où $\frac{f(x) - 1}{x} > 0$.

**DÉFINITION V.3.1**

*On appelle* **exponentielle** (complexe) *la fonction* $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$z \mapsto \mathscr{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

*et on la note* **exp.** *On écrit aussi* $\exp(z) = \mathrm{e}^z$.

Cette terminologie et ces notations se justifient à cause de la proposition V.3.2, qui montre qu'on a **prolongé à $\mathbb{C}$ l'exponentielle** déjà définie dans $\mathbb{R}$ en conservant la propriété capitale « d'addition des exposants »

$$\boxed{\forall (z_1\, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)} . \tag{1}$$

Comme $\exp(0) = 1$ il en résulte comme conséquences :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \exp(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} .$$

En particulier :

**THÉORÈME V.3.1**

*L'application* $z \mapsto \exp(z)$ *est un homomorphisme du groupe* $(\mathbb{C}, +)$ *dans le groupe* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Nous verrons au § V.4 que cet homomorphisme est surjectif. Rappelons d'autres propriétés importantes déjà rencontrées :

- Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(zt)$ est dérivable, et

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(zt)) = z \exp(zt)} . \tag{2}$$

Il s'ensuit évidemment que cette fonction et de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\exp(zt)) = z^k \exp(zt)$.

• Si $(\lambda, z) \in \mathbb{C}^2$, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda \exp(zt)$ est l'unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(0) = \lambda$ et $(\forall t \in \mathbb{R})$ $f'(t) = zf(t)$.

**Fonctions usuelles dans $\mathbb{C}$**

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit :

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

et pour

$$\operatorname{ch} z \neq 0 \text{ (resp. } \operatorname{sh} z \neq 0) \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \left(\text{resp. } \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right).$$

Les fonctions ainsi obtenues d'une variable complexe s'appellent *fonctions hyperboliques* (complexes) et se nomment respectivement **cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, tangente hyperbolique, cotangente hyperbolique,** les deux dernières n'étant définies que sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ch} z \neq 0\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{sh} z \neq 0\}$ ). Compte tenu de la proposition V.3.2, l'expression même des fonctions hyperboliques montre que **ce sont des prolongements des fonctions hyperboliques réelles** étudiées au § V.2.

On définit également des **fonctions circulaires** (complexes) par les formules d'Euler :

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}},$$

et pour $\cos z \neq 0$ (resp. $\sin z \neq 0$ ), $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Ces fonctions s'appellent respectivement **cosinus, sinus, tangente, cotangente** ([1]).

On remarque que $\cos z = \operatorname{ch} iz$ et $i \sin z = \operatorname{sh} iz$. Comme $\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = e^z$ et $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = e^{-z}$, il vient en effectuant le produit

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \ (z \in \mathbb{C})},$$

d'où en remplaçant $z$ par $iz$ :

$$\text{(5)} \qquad \begin{gathered} \cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz}, \\ \boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ (z \in \mathbb{C})}. \end{gathered}$$

([1]) On rencontre aussi les notations : **tan** pour **tg** et **cot** pour **cotg** et de mên

De leur définition on déduit aussi que $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\cos z$, $\sin z$ sont pour $z \in \mathbb{C}$ exprimables comme sommes de séries absolument convergentes :

$$(6) \qquad \boxed{\begin{array}{c} \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\[2ex] \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}} \, .$$

On remarque alors que, si $z \in \mathbb{R}$, $\cos z \in \mathbb{R}$ et $\sin z \in \mathbb{R}$ (d'où également $\operatorname{tg} z \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{cotg} z \in \mathbb{R}$ s'ils sont définis).

A partir de (2), on voit que pour $z \in \mathbb{C}$, les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \operatorname{ch} zt$, $t \mapsto \operatorname{sh} zt$, $t \mapsto \cos zt$, $t \mapsto \sin zt$ sont de classes $\mathscr{C}^{\infty}$, leurs dérivées premières étant : $t \mapsto z \operatorname{sh} zt$, $t \mapsto z \operatorname{ch} zt$, $t \mapsto -z \sin zt$, $t \mapsto z \cos zt$. Les fonctions hyperboliques et circulaires complexes vérifient des *formules d'addition,* conséquences de (1), (4) et (5). Pour les fonctions hyperboliques, le formulaire de base est *identique* à celui qui a été établi au § V.2, à la différence près que les arguments des fonctions : $a$, $b$, $p$, $q$, $x$ sont maintenant complexes, et que ces fonctions peuvent ne pas être définies en certains points.

On pourra s'y reporter et obtenir un formulaire concernant les fonctions circulaires par le simple changement de $a$ en $ia$ et de $b$ en $ib$, par exemple :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{aligned}$$

d'où, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, si $\cos a \cos b \neq 0$ et $1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \neq 0$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

puis des formules de « transformation » :

$$\begin{aligned} 2 \cos a \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2 \sin a \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ 2 \sin a \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad \forall (p, q) \in \mathbb{C}^2 \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q &= \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q} \qquad (\text{si } \cos p \cos q \neq 0) \end{aligned}$$

et de *duplication :*

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad (\text{si } \cos x \neq 0 \text{ et } \cos 2x \neq 0)
\end{aligned}$$

enfin l'expression de $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ en fonction de $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ :

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \operatorname{tg} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} (\text{si } t \notin \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\})\ ;\ \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} (\text{si } t^2 \neq 1)}$$

et la *formule de De Moivre,* déduite de (5)

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad (\cos z + \mathrm{i} \sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i} \sin nz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

**L'exponentielle comme limite de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$**

Soit $a$ un réel. La fonction $t \mapsto \operatorname{Log}(1 + at)$ est définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable en $t = 0$ (cf. § IV.6) et sa dérivée en $t = 0$ vaut $a$, ce qui revient à dire que $\dfrac{1}{t} \operatorname{Log}(1 + at) \underset{t \to 0,\, t \neq 0}{\longrightarrow} a$. En prenant l'exponentielle (on sait que exp est continue sur $\mathbb{R}$) il vient : $(1 + at)^{1/t} \underset{t \to 0,\, t \neq 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$, ou, ce qui revient au même $\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$ et $\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$. En particulier $\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On peut se demander si ce résultat reste vrai pour $a \in \mathbb{C}$.

**Proposition V.3.3**

*Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :* $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \underset{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}^*}}{\longrightarrow} \mathrm{e}^z.$

*Démonstration :*

Si $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, développons $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ par la formule du binôme. Il vient :

$$\mathrm{e}^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{z^k}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)$$

d'où

$$\left|e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{|z|^k}{k!}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right)$$
$$= e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n .$$

Or, en posant $|z| = a$, on sait que $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^a$, d'où *a fortiori*, $e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$ ■

Cette proposition permet d'exprimer $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{coth} z$, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$ sous forme de limites intéressantes, par exemple :

$$\operatorname{ch} z = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n\right],$$

$$\sin z = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[\left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}z}{n}\right)^n\right]$$

sont chacun limites d'une suite de polynômes.

**Fonction $x^\alpha$**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ ; pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, définissons $f_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} x)$. (Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, on retrouve la fonction puissance déjà définie au chapitre I.)

La fonction $f_\alpha$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Log} x$, et $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $u \mapsto \exp(\alpha u)$ le sont.

Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, on a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$x^{\alpha+\beta} = \exp((\alpha + \beta)\operatorname{Log} x) = \exp(\alpha \operatorname{Log} x)\exp(\beta \operatorname{Log} x) = x^\alpha x^\beta ;$$

d'autre part pour $\alpha$ fixé, et pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$(xy)^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(xy)) = \exp(\alpha(\operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y)) = x^\alpha y^\alpha .$$

Par composition de dérivées, on a immédiatement :

$$f'_\alpha(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} ;$$

par récurrence, on en déduit, pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x > 0$ :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n(x^\alpha)}{\mathrm{d}x^n} = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)\,x^{\alpha-n}}\ .$$

### Fonctions $t \mapsto \exp(f(t))$

**PROPOSITION V.3.4**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Notons $F(t) = \exp(f(t))$ $(t \in I)$.*
*Si $f$ est continue en $t_0 \in I$, $F$ est continue en $t_0$.*
*Si $f$ est dérivable en $t_0 \in I$, $F$ est aussi dérivable en $t_0$, et sa dérivée y est donnée par :*

$$F'(t_0) = f'(t_0)\, F(t_0)\,.$$

*Démonstration :*

Soit $u$ et $v$ les parties réelle et imaginaire de $f$. De : $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ $(t \in I)$, on déduit :

$$F(t) = [\exp(u(t))]\exp(\mathrm{i}v(t))\,.$$

Si $f$ est continue en $t_0 \in I$, $u$ et $v$ le sont aussi. Comme les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$ sont continues, on voit par composition que $\exp(u(t))$ et $\exp(\mathrm{i}v(t))$ sont continues en $t_0$, donc leur produit $F(t)$ l'est aussi.

Supposons $f$ dérivable en $t_0 \in I$ : $u$ et $v$ le sont aussi, et $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$. Les fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \exp(\mathrm{i}x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}x)$ (proposition V.3.1). Par composition les dérivées de $\exp(u(t))$ et $\exp(\mathrm{i}v(t))$ existent en $t_0$, et y valent respectivement $u'(t_0)\exp(u(t_0))$ et $\mathrm{i}v'(t_0)\exp(\mathrm{i}v(t_0))$. Donc leur produit $F(t)$ est dérivable en $t_0$, et sa dérivée y vaut :

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= u'(t_0)\exp(u(t_0))\exp(\mathrm{i}v(t_0)) + \mathrm{i}v'(t_0)\exp(u(t_0))\exp(\mathrm{i}v(t_0)) \\ &= (u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0))\,F(t_0) = f'(t_0)\,F(t_0)\,. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

***Exercice 1 :*** Montrer que *les seuls* homomorphismes de groupes dérivables $h : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ sont les fonctions $h : t \mapsto \mathrm{e}^{zt}$, où $z \in \mathbb{C}$.

***Exercice 2 :*** Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ $(x = \mathrm{Re}\,(z), y = \mathrm{Im}\,(z))$.

*a*) Exprimer simplement $|\cos z|^2$ et $|\sin z|^2$ à l'aide des fonctions hyperboliques et circulaires de $x$ et de $y$ (*réponse :* $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$, $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y$). En déduire que $\cos z \neq 0$ et $\sin z \neq 0$ pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

*b*) Si $\cos z \neq 0$, montrer que $\mathrm{tg}\, z = \dfrac{\sin 2x + \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\, 2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}\, 2y}$ , $1 + |\mathrm{tg}\, z|^2 = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2\, y}$ .

Si $\sin z \neq 0$, montrer que $\mathrm{cotg}\, z = \dfrac{\sin 2x - \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\, 2y}{\mathrm{ch}\, 2y - \cos x}$ , $1 + |\mathrm{cotg}\, z|^2 = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2y}{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y}$ .

*c*) Etablir des formules analogues pour $|\mathrm{ch}\, z|^2$, $|\mathrm{sh}\, z|^2$ et $\mathrm{th}\, z$, $\mathrm{coth}\, z$.

***Exercice 3 :*** Vérifier : $(\forall z \in \mathbb{C})$ $|\exp(z)| \leqslant \exp(|z|)$, $|\cos z| \leqslant \mathrm{ch}\,|z|$, $|\sin z| \leqslant \mathrm{sh}\,|z|$. Pour quels $z$ a-t-on l'égalité ?

***Exercice 4 :*** Vérifier que pour tout $x$ réel $|\mathrm{e}^x - 1| \leqslant \mathrm{e}^{|x|} - 1 \leqslant |x|\, \mathrm{e}^{|x|}$. Ces inégalités restent-elles valables pour $x \in \mathbb{C}$ ?

***Exercice 5 :*** *a)* Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite *bornée* dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour $\alpha$ réel, $\alpha > 1$, on a : $\left(1 + \dfrac{A_n}{n^\alpha}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

*b)* En déduire, à l'aide de la proposition V.3.3, une nouvelle démonstration de la propriété fondamentale $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

***Exercice 6 :*** On donne un intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$ et des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(n \geqslant 1)$ tous distincts. Soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-ev des fonctions $I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, et $D$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{E})$ qui associe à $f \in \mathscr{E}$ sa dérivée. Enfin, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $\Phi_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\lambda t}$.

*a)* Si $f \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(D - \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})(f\Phi_\lambda) = f' \, \Phi_\lambda$. En déduire que, pour tout polynôme $F \in \mathbb{C}[X]$, $F(D)[f\Phi_\lambda] = [F(D + \lambda \, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})(f)] \, \Phi_\lambda$.

*b)* Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{C}[X]$. Utiliser *a)* pour montrer que la relation $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k \, \Phi_{\lambda_k} = 0$ entraîne $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$.

*Indication :* Soit, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, $d_k$ un entier $\geqslant 1$ tel que $P_k \in \mathbb{C}_{d_k - 1}[X]$ ; se servir de l'opérateur $F_j(D)$, où $F_j = \left[\prod\limits_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n \\ l \neq j}} (X - \lambda_l)^{d_l}\right] (X - \lambda_j)^{d_j - 1}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

***Exercice 7 :*** Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tendant vers 0. Montrer que $\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ ; en déduire, si $a \in \mathbb{C}$ : $\left(1 + \dfrac{a + \varepsilon_n}{n}\right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^a$.

## § V.4 *FONCTIONS CIRCULAIRES D'UNE VARIABLE RÉELLE*

Nous avons remarqué au § précédent que les fonctions cos, sin, tg, cotg prennent *des valeurs réelles* si on se restreint à des valeurs réelles de la variable (sous réserve d'existence pour tg et cotg). Etudions ces fonctions de variable réelle, en commençant par cos et sin.

On sait déjà que cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x .$$

Rappelons que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 , \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} ,$$

que
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(d'où $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$).
On remarque que cos *est une fonction paire* et sin *impaire.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$, d'où $e^{ix} \cdot e^{-ix} = |e^{ix}|^2 = 1$, et donc $e^{ix} \in \mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1. Puisque $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ pour tous réels $x$, $y$, c'est que **l'application** $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, $x \mapsto$

**homomorphisme du groupe** $(\mathbb{R}, +)$ **dans le groupe** $(\mathbb{U}, \times)$. Nous allons étudier cet homomorphisme $\Psi$ ; dans ce but, établissons quatre lemmes :

**LEMME 1**

|| *On a :* $\cos 2 < 0$.

*Démonstration :*

$$\cos 2 = 1 - 2 + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \frac{-1}{3} - s,$$ en désignant par $s$ la somme de la série $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{4^n}{(2n)!}$. En regroupant dans $s$ les termes consécutifs deux par deux dans le même ordre il vient : $s = \sum_{k=2}^{\infty} a_k$, avec

$$a_k = \frac{4^{2k-1}}{(4k-2)!} - \frac{4^{2k}}{(4k)!} = \frac{4^{2k-1}}{(4k-2)!}\left(1 - \frac{4}{(4k-1)4k}\right).$$

Comme $a_k > 0$ pour $k \geqslant 2$, c'est que $s > 0$ et donc $\cos 2 < \frac{-1}{3} < 0$. ■

**LEMME 2**

|| *Si* $x \in ]0, 2]$, *on a :* $\sin x > 0$.

*Démonstration :*

$$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots\right] = xS(x),$$

avec
$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x),$$

où

$$b_k(x) = \frac{x^{4k}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+2}}{(4k+3)!} = \frac{x^{4k}}{(4k+1)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k+2)(4k+3)}\right).$$

Comme $1 - \frac{4}{(4k+2)(4k+3)} > 0$, *a fortiori* $b_k(x) > 0$ pour $x \in ]0, 2]$, d'où $S(x) > 0$ et $\sin x > 0$. ■

On peut donc dresser le tableau des variations de la fonction cos sur $[0, 2]$ puisqu'on sait que sa dérivée est $x \mapsto -\sin x$, donc $< 0$ pour $x \in ]0, 2]$. De plus $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ :

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\sin x$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $\cos x$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\cos 2 < 0$ |

D'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction cos s'annule nécessairement sur $]0, 2[$, mais comme cos est strictement décroissante, donc *injective,* elle s'annule exactement une fois sur $]0, 2[$.

**DÉFINITION V.4.1**

*On appelle* **pi** *et on note* $\pi$ *le double de l'unique racine* $\omega$ *de l'équation* $\cos x = 0$ *comprise entre* 0 *et* 2.

La méthode déjà utilisée pour les lemmes 1 et 2 montre que $\cos \sqrt{2} > 0$, ce qui permet d'encadrer $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ entre $\sqrt{2}$ et 2, précision dont nous nous contenterons provisoirement.

Partageons alors le plan d'Argand-Cauchy en quatre quadrants :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \geqslant 0, \mathrm{Im}\,(z) \geqslant 0\}\ , \\
Q_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 0, \mathrm{Im}\,(z) \geqslant 0\}\ , \\
Q_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 0, \mathrm{Im}\,(z) \leqslant 0)\ , \\
Q_4 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) \geqslant 0, \mathrm{Im}\,(z) \geqslant 0\}\ ,
\end{aligned}$$

et posons $\mathbb{U}_i = Q_i \cap \mathbb{U}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$.

**LEMME 3**

$\Psi|_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$ *définit une bijection de* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *sur* $\mathbb{U}_1$.

*Démonstration :*

La restriction de $\Psi$ à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ associant à $x$ son image $\Psi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ est évidemment injective puisque c'est déjà le cas de $\cos|_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$. Montrons qu'elle est surjective après avoir vérifié que $\Psi(x)$ est bien dans $\mathbb{U}_1$, ce que prouve le tableau de variations ci-dessus. Soit donc $z = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{U}_1$. Il existe un $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ unique tel que $\cos \theta = u$. De $u^2 + v^2 = 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$, et du fait que $v \geqslant 0$ (par hypothèse), $\sin \theta \geqslant 0$ (lemme 2), on conclut $\sin \theta = v$, d'où $\Psi(\theta) = u + \mathrm{i}v = z$, d'où la surjectivité de $\Psi|_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$. ■

**LEMME 4**

$\Psi|_{[0, 2\pi[}$ *définit une bijection de* $[0, 2\pi[$ *sur* $\mathbb{U}$.

*Démonstration :*

Si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ car $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i} \sin \dfrac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i}\left(\sin \dfrac{\pi}{2} > 0\right)$. L'application $z \mapsto \mathrm{i}z$ indu tion de $\mathbb{U}_1$ sur $\mathbb{U}_2$, de $\mathbb{U}_2$ sur $\mathbb{U}_3$, de $\mathbb{U}_3$ sur $\mathbb{U}_4$, de $\mathbb{U}_4$ sur $\mathbb{U}_1$ :

$$e^{i\pi} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1\,,\quad e^{3i\pi/2} = -i \quad \text{et} \quad e^{2i\pi} = i^4 = 1\,.$$

A l'aide du lemme 3, on en déduit que, pour $1 \leqslant k \leqslant 4$, $\Psi|_{\left[(k-1)\frac{\pi}{2},\, k\frac{\pi}{2}\right]}$ définit une bijection de $I_k = \left[(k-1)\dfrac{\pi}{2},\, k\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{U}_k$. Le recollement bout à bout de ces bijections est possible, et en supprimant l'extrémité $2\pi$ de $I_4$ on obtient bien la bijection annoncée. ■

**Théorème V.4.1**

(I) *L'homomorphisme* $\Psi$ *est surjectif et son noyau est* $2\pi\mathbb{Z}$.
(II) *L'homomorphisme* $\exp : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ *est surjectif et son noyau est* $2i\pi\mathbb{Z}$.

*Démonstration :*

(I) La surjectivité de $\Psi$ a déjà été prouvée par le lemme 4. De plus $e^{2i\pi} = 1$, d'où $2\pi\mathbb{Z} \subset \operatorname{Ker}\Psi$. Réciproquement soit $\theta \in \operatorname{Ker}\Psi$. En posant $k = \operatorname{Ent}\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)$, on a $\Psi(\theta) = \Psi(\theta - 2k\pi) = 1$, mais $\theta - 2k\pi \in [0, 2\pi[$, donc d'après le lemme 4, $\theta - 2k\pi = 0$. Finalement $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\operatorname{Ker}\Psi = 2\pi\mathbb{Z}$.

(II) Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$. On a :

$$\exp(z) = e^x e^{iy}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{|\exp(z)| = |e^x|\,|e^{iy}| = e^x}\,.$$

Puisque $e^{2i\pi} = 1$, on a déjà $e^{2in\pi} = 1$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $e^z = 1$, alors $|e^z| = 1 = e^x$, d'où $x = 0$. Ensuite $e^{iy} = 1$ et $y \in \mathbb{R}$, d'où $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ d'après (I), et donc $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Il reste à prouver que $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On a $\dfrac{Z}{|Z|} \in \mathbb{U}$. Posons $x = \operatorname{Log}|Z|$ et soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $e^{iy} = \dfrac{Z}{|Z|}$. Alors $e^{x+iy} = Z$. ■

**Corollaire 1**

*Le groupe des périodes de* $\Psi$ *est* $2\pi\mathbb{Z}$.

*Démonstration :*

Soit $G$ ce groupe. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, de $e^{i(x+2n\pi)} = e^{ix}$ on tire : $\operatorname{Ker}\Psi = 2\pi\mathbb{Z} \subset G$. Mais $\Psi(0) = 1$, d'où $G \subset \operatorname{Ker}\Psi$ et finalement $\operatorname{Ker}\Psi = G = 2\pi\mathbb{Z}$. ■

On en déduit que **cos et sin sont $2\pi$-périodiques.**

L'ensemble des $\tau \in \mathbb{C}$ tels que $\exp(z + \tau) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ appelé *groupe des périodes dans*

**Corollaire 2**

|| *Le groupe des périodes dans* $\mathbb{C}$ *de* exp *est* $2\,\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.

*Démonstration :*

Soit $\Gamma$ ce groupe. Il est clair que $2\,\mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \subset \Gamma$. Mais comme $\exp(0) = 1$, tout $z \in \Gamma$ vérifie nécessairement $\mathrm{e}^z = 1$, d'où $\Gamma = 2\,\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. ■

***Remarque 2 :*** Considérons $\mathbb{C}$ comme *plan euclidien* (cf. tome 1, Chap. VI). $\mathbb{U}$ est un cercle de rayon 1, qui dans la base canonique $(1, \mathrm{i})$ est *représenté paramétriquement* par $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto M(x)$, où $M$ est le point de coordonnées $(\cos x, \sin x)$. Si $x$ décrit $[a, b]$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$), la *longueur* parcourue par $M(x)$ est $b - a$ (voir Tome 4). En particulier (cf. lemme 4) la longueur de $\mathbb{U}$ est $2\,\pi$ et on reconnaît bien en $\pi$ le nombre d'Archimède, rapport de la circonférence au diamètre dans un plan euclidien. Autrement dit la variable $x$ de l'homomorphisme $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est bien la variable angulaire, mesurée en radians, correspondant à l'intuition géométrique de chacun d'entre nous.

### Variation des fonctions circulaires sur $\mathbb{R}$

Nous avons déjà étudié la fonction cos sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme elle est *paire,* on en déduit ses variations sur $[-\pi, +\pi]$. En utilisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, on obtient $\cos(x + \pi) = -\cos x$, ce qui permet d'étudier cos sur un intervalle d'amplitude $2\,\pi$, ce qui est suffisant puisqu'on sait qu'elle est $2\,\pi$-périodique. Enfin, en utilisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$, on obtient $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, ce qui permet de déduire les variations de sin de celles de cos. Voici le tableau et les graphes $\Gamma_c$ et $\Gamma_s$ correspondants :

| $x$ | $-\pi$ | | $-\pi/2$ | | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ |
| $\sin x$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

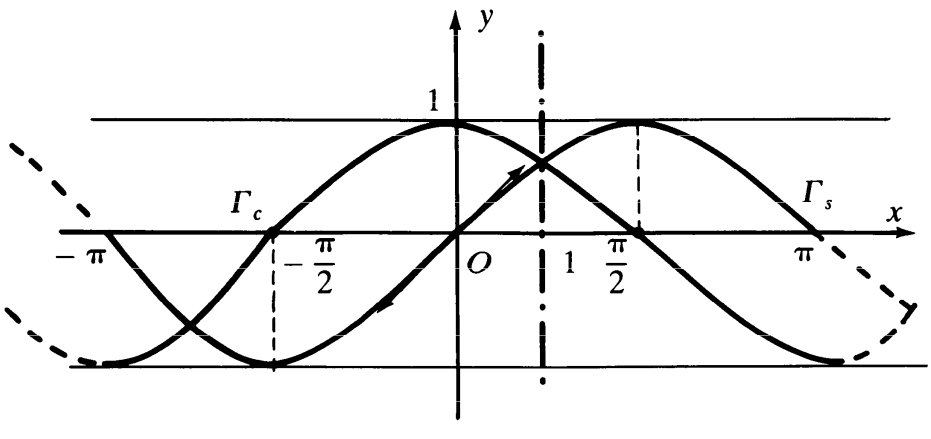



**Fig. 1.**

Outre le fait que $\Gamma_s$ se déduit de $\Gamma_c$ par la **translation** de $\dfrac{+\pi}{2}$ parallèlement à $Ox$, on notera en particulier leur **symétrie** par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{4}$. En effet :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

et bien entendu $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ (le **cosinus** de $x$ est égal au **sinus du complément,** c'est-à-dire de $\dfrac{\pi}{2} - x$). Il est clair que $2\pi$ *est leur plus petite période.* Compte tenu de cette périodicité, on voit que **l'ensemble des zéros de cos est** $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, et **l'ensemble des zéros de sin est** $\pi\mathbb{Z}$.

Etudions maintenant la fonction tangente. Elle est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ qui est une partie périodique de $\mathbb{R}$ admettant $\pi$ pour plus petite période. Or justement si $x \in \mathscr{D}$, on a : $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$, ce qui montre que tg est **périodique, de plus petite période $\pi$.** De plus elle est **impaire.** C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$, et $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x \in \mathscr{D})$. Cette dérivée étant $> 0$ on déduit immédiatement ses variations sur $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et son graphe $\Gamma_t$ (cf. fig. 2)

| $x$ | $-\pi/2$ | $0$ | $+\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{tg} x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

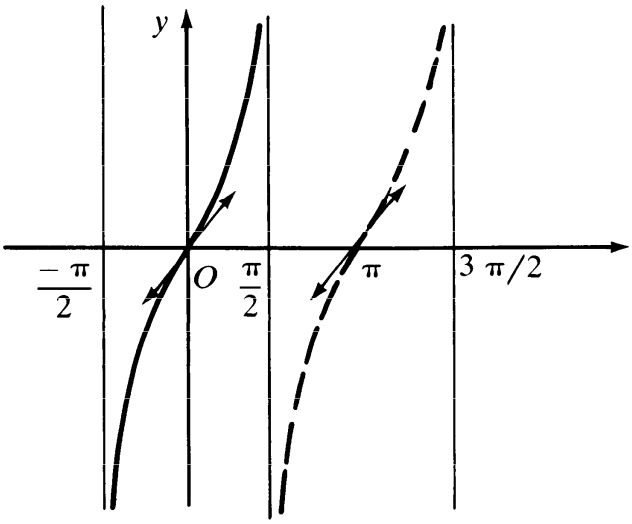



**Fig. 2.**

On notera également, grâce aux dérivées :

- que $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$ (ou si l'on préfère on utilisera la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$),

- que $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, ce qui permet de préciser les graphes, et enfin
- que $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ car il a même limite que $\dfrac{\sin x}{2x}$ (règle de l'Hôpital).

**Fonctions circulaires réciproques**

Il résulte de ce qui précède que sin définit une bijection strictement croissante $S$ de $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$, que cos définit une bijection strictement décroissante $C$ de $[0, \pi]$ sur $[-1, +1]$ et que tg définit une bijection strictement croissante $T$ de $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Les bijections réciproques $S^{\langle -1 \rangle}$, $C^{\langle -1 \rangle}$ et $T^{\langle -1 \rangle}$ sont respectivement appelées **Arc sinus, Arc cosinus** et **Arc tangente** et notées Arc sin, Arc cos et Arc tg (ou $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\operatorname{tg}^{-1}$ dans les pays anglo-saxons). Leur graphe est représenté dans les figures 3 et 4.

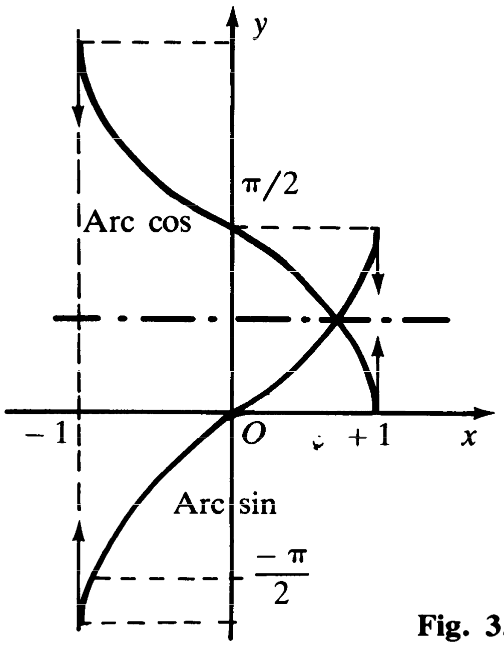



**Fig. 3.**

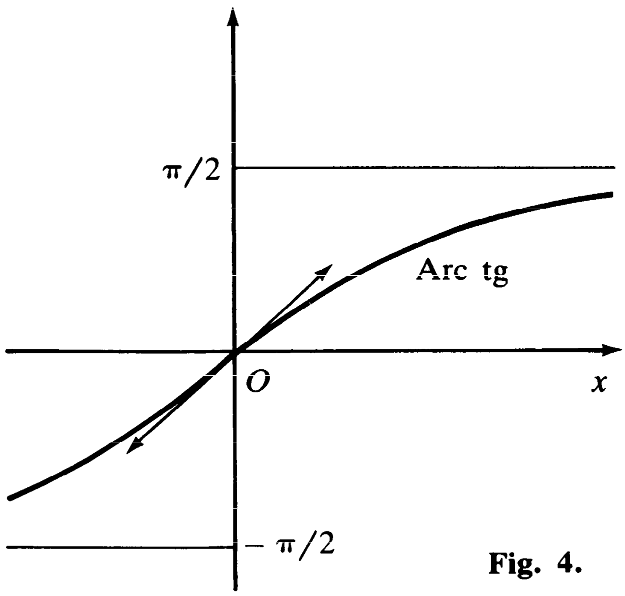



**Fig. 4.**

Puisque sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, il en est de même de Arc sin et Arc cos sur $]-1, +1[$. Calculons leurs dérivées. Pour $x \in\ ]-1, +1[$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arc\,sin} x = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{Arc\,sin} x\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{car}$$

$$(y = \operatorname{Arc\,sin} x) \Leftrightarrow \left(x = \sin y \text{ et } y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \quad \text{d'où} \quad \cos y \geqslant 0 .$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arc\,cos} x = \frac{-1}{\sin\left(\operatorname{Arc\,cos} x\right)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{car} \quad \operatorname{Arc\,cos} x \in\ ]0, \pi[$$

et son sinus est $> 0$. Ces relations montrent d'ailleurs que $\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\sin x$ reste constant sur $]-1, +1[$, la valeur prise en 0 étant $\frac{\pi}{2}$, d'où

$$\boxed{\operatorname{Arc}\cos x + \operatorname{Arc}\sin x = \frac{\pi}{2} \quad \text{valable même sur } [-1, +1]}$$

On a dessiné sur la figure 3 l'axe de symétrie $y = \frac{\pi}{4}$ de la réunion des deux graphes. Quant à la fonction Arc tg, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}$.

On notera que $(y = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x) \Leftrightarrow \left(x = \operatorname{tg} y \text{ et } y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$. Si on calcule, pour $x \in \mathbb{R}^*$, la dérivée de $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$, on trouve 0. En examinant la limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), on en déduit

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\forall x > 0) & \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \\ (\forall x < 0) & \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x + \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-\pi}{2} \end{array}}\,.$$

De même, si $a \in \mathbb{R}^*$, pour $t \neq \frac{1}{a}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Arc}\operatorname{tg} t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+t}{1-at}$, d'où la constance de $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\frac{a+t}{1-at} - \operatorname{Arc}\operatorname{tg} t$ sur chaque intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$ et $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$. On en déduit les formules

$$\begin{array}{lll} \text{si } a > 0\,, & \left(\forall b < \dfrac{1}{a}\right) & \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{1-ab} \\ \text{si } a < 0\,, & \left(\forall b > \dfrac{1}{a}\right) & \operatorname{Arc}\operatorname{tg} a + \operatorname{Arc}\operatorname{tg} b = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{1-ab}\,. \end{array}$$

Dans les autres cas, il faudra ajouter (resp. retrancher) $\pi$ au second membre.

On utilise plus rarement la fonction cotangente, définie pour $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, de dérivée $\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$, car elle se déduit immédiatement de la tangente grâce à $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

**Argument principal d'un nombre complexe**

C'est dans le Tome 1, au § VI.8, qu'ont été définis les arguments d'un nombre complexe non nul, et en particulier l'argument principal d'un nombre complexe $z \notin \mathbb{R}_-$. Nous nous contentons d'y renvo faisant remarquer que la théorie esquissée dans le Cours d'Algèbre se trouve maintenant complètement justifiée, de même que la théorie des racines $n$-ièmes développée dans le § VI.8 du Tome 1. Ajoutons un complément utile :

**PROPOSITION V.4.1**

> *Soit* $z = x + iy \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$. *On a :* $\operatorname{Arg}(z) = 2 \operatorname{Arc tg} \dfrac{y}{1+x}$.

*Démonstration :*

L'étude de la fonction Arc tg montre déjà que $\theta = 2 \operatorname{Arc tg} \dfrac{y}{1+x} \in ]-\pi, +\pi[$. De plus $\cos \theta = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta/2} = \dfrac{(1+x)^2 - y^2}{(1+x)^2 + y^2}$ et, en remplaçant $y^2$ par $1 - x^2$, cela donne $\cos \theta = x$. On trouve de même $\sin \theta = y$, d'où $e^{i\theta} = x + iy = z$. ■

Remarquons que si $Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on se ramène à l'hypothèse de la proposition V.4.1 en divisant $Z$ par son module $|Z|$.

## Le théorème de D'Alembert

Le théorème de D'Alembert, parfois appelé théorème fondamental de l'Algèbre (cf. Tome 1, théorème VII.4.5), ne peut se démontrer sans une part plus ou moins grande d'Analyse. Proposons-en ici une démonstration.

**THÉORÈME V.4.2** (théorème de D'Alembert)

> *Si* $P \in \mathbb{C}[X]$ *est un polynôme non constant, P possède au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

*Démonstration :*

Sans perte de généralité, on peut supposer que $P = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, avec $n = \deg(P) \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

*a*) Notons d'abord que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| \geq 3(1 + |a_1| + \cdots + |a_n|)$ alors

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |z|^n \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right| \\
&\geq 3(1 + |a_1| + \cdots + |a_n|)\left(1 - \frac{|a_1| + \cdots + |a_n|}{|z|}\right) \\
&\geq 3(1 + |a_1| + \cdots + |a_n|)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&\geq 2(1 + |a_1| + \cdots + |a_n|) \geq 2|a_n| .
\end{aligned}$$

*b*) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$ ; $z_0$ est un zéro de $P(X) - P(z_0)$. Notons $p$ sa multiplicité, d'où $1 \leq p \leq n$ et $P^{(p)}(z_0) \neq 0$. Notant $Q_{z_0}(X)$ un polynôme dépendant de $z_0$, et $A_p(z_0) = \dfrac{1}{p!} \dfrac{P^{(p)}(z_0)}{P(z_0)}$, on a :

$$\frac{P(z)}{P(z_0)} = 1 + u^p(A_p(z_0) + uQ_{z_0}(z)) \quad \text{pour} \quad z = z_0 + u \ (u \in$$

En développant $Q_{z_0}$, on voit que pour $|z - z_0| \leqslant 1$, on peut majorer $|Q_{z_0}(z)|$ par une constante strictement positive $R_{z_0}$. Soit alors $\varepsilon$ réel $> 0$ tel que $\varepsilon \leqslant \operatorname{Min}\left(1, \dfrac{1}{2^p}\dfrac{|A_p(z_0)|^{p+1}}{(R_{z_0})^p}\right)$. Si $u_\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ vérifie $(u_\varepsilon)^p = -\dfrac{\varepsilon}{A_p(z_0)}$, on a pour $z = z_0 + u_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}|1 + u^p(A_p(z_0) + uQ_0(z))| &\leqslant 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{|A_p(z_0)|}\,|u|R_{z_0} \leqslant 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\\ &\leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1\,, \quad \text{d'où} \quad |P(z_0 + u_\varepsilon)| < |P(z_0)|\,.\end{aligned}$$

*c*) Soit alors $\mu$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $|P(z)|$ quand $z \in \mathbb{C}$ décrit le disque $|z| \leqslant 3(1 + |a_1| + \cdots + |a_n|) = A$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, soit $z_k \in \mathbb{C}$ tel que $|z_k| \leqslant A$ et $|P(z_k)| \leqslant \mu + \dfrac{1}{k}$. La suite $(z_k)$ étant bornée dans $\mathbb{C}$, on peut en extraire une suite convergente $(w_q) = (z_{k_q})$ dans $\mathbb{C}$ (cf. théorème III.3.8), de limite $w \in \mathbb{C}$ nécessairement telle que $|w| \leqslant A$. Les théorèmes du § II.2 sur les limites de suites à valeurs dans $\mathbb{C}$ montrent que

$$|P(w_q)| \underset{q \to \infty}{\longrightarrow} |P(w)|\,, \quad \text{d'où} \quad |P(w)| = \mu\,.$$

Par la définition de $\mu$, on a $0 \leqslant \mu \leqslant |a_n|$ puisque $P(0) = a_n$, d'où forcément $|w| < A$ à cause du résultat établi en *a*). Il reste à prouver que $P(w) = 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, d'après le résultat établi en *b*), il existerait un nombre $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $|u| < A - |w|$ et que $|P(w+u)| < |P(w)| = \mu$, ce qui est contradictoire avec la définition de $\mu$. ■

***Exercice 1 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes (en précisant chaque fois l'ensemble de définition) :

*a*) $x \mapsto x^\alpha \sin x$ (pour $\alpha = -1$ on prouvera $|f^{(k)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{k+1}$)

*b*) $x \mapsto \operatorname{Log}(1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2)$, où $\lambda$ est un paramètre réel)

*c*) $x \mapsto e^{-x}\cos x$ *d*) $x \mapsto \dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$ *e*) $x \mapsto \dfrac{(1 + \cos\alpha)\sin x}{1 + \cos\alpha\cos x} - x$

*f*) $x \mapsto |\operatorname{tg} x|^{\cos x}$ *g*) $x \mapsto \dfrac{\cos 4x}{\cos^4 x}$ *h*) $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$.

***Exercice 2 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes :

*a*) $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin}\dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$ *b*) $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg}\dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{x - \sqrt{1-x^2}}$

*c*) $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$ *d*) $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc\,sin} x}{4x^2 - 1}$

*e*) $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$ *f*) $x \mapsto \operatorname{Arc\,cos}(8x^4 - 8x^2 + 1)$.

***Exercice 3 :*** *a*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}$ si $x > 0$ et $0 \mapsto 0$, où $\alpha$ est un réel $> 0$ donné. Vérifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. On pose $\alpha = \lambda + 2p$ avec $0 < \lambda \leqslant 2$ et $p \in \mathbb{N}$. Tracer le graphe approximatif de $f$ au voisinage de 0 en dist[illegible] $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 1$ et $1 < \lambda \leqslant 2$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur [illegible]

$\lambda = 2$, $f^{(p+1)}(0)$ existe, mais $f^{(p+1)}$ n'est pas continue en 0. Cependant $f^{(p+1)}$ est bornée au voisinage de 0.

Si $1 < \lambda < 2$, $f^{(p+1)}(0)$ existe, mais $f^{(p+1)}$ n'est bornée dans aucun voisinage de 0.

Si $0 < \lambda \leqslant 1$, $f^{(p+1)}(0)$ n'existe pas.

*b*) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto x \sin(\operatorname{Log} x)$ si $x > 0$. Montrer que $f$ est lipschitzienne. Calculer le $K_f$ défini dans l'exercice 13 du § V.1, et montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0.

*c*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}} \sin \dfrac{1}{|x|}$ pour $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer les $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour chaque $n$, pour tout réel $\alpha > 0$, $f^{(n)}$ s'annule une infinité de fois sur $[0, \alpha]$, et que 0 est le seul point d'accumulation de l'ensemble des zéros de $f^{(n)}$.

***Exercice 4 :*** *a*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^3\left(2 + \sin \dfrac{1}{t}\right)^2$ si $t \neq 0$, $0 \mapsto 0$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

*b*) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^5 \sin \dfrac{1}{t}$ si $t \neq 0$, $0 \mapsto 0$ est de classe $\mathscr{C}^2$, mais il n'existe aucune fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $(\forall t)\ g^2(t) = t^{14} + f^2(t)$ (ENS Ulm, 1986, écrit).

***Exercice 5 :*** Soit $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Montrer que l'ensemble $E$ des zéros de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto A(x) \cos x + B(x) \sin x$ est *discret.*

*Indication :* Il suffit de prouver que 0 n'est pas point d'accumulation de $E$.

***Exercice 6 :*** Soit $f$ (resp. $g$) : $\mathbb{R} \longrightarrow C^*$, $t \mapsto \exp(-t + i e^t)$ (resp. $t \mapsto \exp(-t + i e^{2t})$). Montrer que $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ n'a aucune limite quand $t \longrightarrow +\infty$, que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, que $g(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que cependant $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (autrement dit, la règle de l'Hôpital est en défaut pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).

***Exercice 7 :*** Résoudre les équations suivantes, où $x \in \mathbb{R}$ est l'inconnue :

*a*) $\operatorname{Arc\,tg} x + 2 \operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) = \dfrac{\pi}{2}$ *b*) $2 \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arc\,sin} x = \dfrac{\pi}{2}$

*c*) $2 \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-x}{x}} + \operatorname{Arc\,sin}(2x - 1) = \dfrac{\pi}{2}$

*d*) $\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{x-3} + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{x} + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{\pi}{4}$

*e*) $4 \operatorname{Arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{239}$ *f*) $\operatorname{Arc\,tg}(x-3) + \operatorname{Arc\,tg} x + \operatorname{Arc\,tg}(x+3) = \dfrac{\pi}{4}$.

***Exercice 8 :*** Soit $(x, y, z) \in [0, 1]^3$. Montrer l'équivalence des conditions (I) et (II) suivantes :

(I) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0$.

(II) Il existe $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ dans $\{-1, +1\}$ dont deux au moins valent $+1$ tels que $\varepsilon \operatorname{Arc\,cos} x + \varepsilon' \operatorname{Arc\,cos} y + \varepsilon'' \operatorname{Arc\,cos} z \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$.

***Exercice 9 :*** Démontrer les égalités suivantes :

*a*) $\operatorname{Arc\,sin} \dfrac{4}{5} + \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{5}{13} + \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{16}{65} = \dfrac{\pi}{2}$ *b*) $3 \operatorname{Arc\,tg}(2 - \sqrt{3}) = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{3}$

*c*) $5 \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{7} + 2 \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{3}{79} = \dfrac{\pi}{4}$ *d*) $2 \cos^2\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg} x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \pm \dfrac{1 + x\sqrt{3}}{2\sqrt{1 + x^2}}$

*e*) $2 \operatorname{Arc\,tg} x + 2 \operatorname{Arc\,tg} y = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$ (pour des valeurs de $x$ et $y$ à préciser)

*f*) $\dfrac{x^3}{2 \sin^2\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{x}{y}\right)} + \dfrac{y^3}{2 \cos^2\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{y}{x}\right)} = (x+y)(x^2+y^2)$.

***Exercice 10 :*** Calculer la somme des séries :

*a)* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Log} \cos \frac{x}{2^n}$ *b)* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Log} \left(2 \cos \frac{x}{2^n} - 1\right)$ *c)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$

*d)* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{2n^2}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2}{n^2}$ *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n^2+3n+3}$.

***Exercice 11 :*** Calculer $\operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1}$ pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{tg} x$ soit défini et que $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 \neq 0$ (préciser exactement ces valeurs en fonction de $\pi$).

***Exercice 12 :*** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xyz - x - y - z = 0$. Calculer $\operatorname{Arc\,tg} x + \operatorname{Arc\,tg} y + \operatorname{Arc\,tg} z$.

***Exercice 13 :*** Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels et la fonction $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(a_1 + x)}{1} + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \cdots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}$. Montrer que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ implique que $x_1$ et $x_2$ sont congrus modulo $\pi$.

***Exercice 14 :*** Le calcul numérique de $\pi$ avec des centaines de décimales s'effectue facilement sur micro-ordinateur à partir du développement en série entière de $\operatorname{Arc\,tg} x$ (cf. Tome 3). Il est particulièrement agréable si $x$ est *l'inverse d'un nombre entier,* ce qui conduit à rechercher des formules (que l'on vérifiera) telles que : $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3}$ ; $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{4} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{20} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{1\,985}$ ; $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239}$ (c'est la célèbre formule de *Méchin* (1706)).

Démontrer en particulier que *le seul* couple $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{p} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{q}$ est justement le couple $(5, -239)$.

***Exercice 15*** (problème de la vache) : On attache une vache à un pieu à l'aide d'une corde de longueur $\lambda R$ sur le bord d'un champ plat circulaire de rayon $R$ supposé recouvert d'une herbe uniforme et homogène. Calculer $\lambda$ avec 10 décimales exactes pour que la vache puisse brouter exactement la moitié de la surface du champ.

***Exercice 16 :*** On se propose de déterminer un réel $x$ vérifiant l'équation : $2 \operatorname{Arc\,tg} x + n \operatorname{Arc\,tg} \alpha = \frac{\pi}{4}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ donnés). Ecrire l'équation du second degré en $x$ permettant le calcul de $x$. Achever la résolution pour $n = 2$, $\alpha = \frac{1}{7}$ ; pour $n = 3$, $\alpha = \frac{1}{7}$.

***Exercice 17 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes :

*a)* $x \mapsto \operatorname{Arc\,cos} \frac{\cos \alpha - x}{\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}} + \operatorname{Arc\,sin} \frac{\sin a}{\sqrt{1 - 2x\cos\alpha + x^2}}$ (où $\alpha \in ]-\pi, \pi[$)

*b)* $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$ *c)* $x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$ donné)

*d)* $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin} (\sin x) + \operatorname{Arc\,cos} (\cos x)$.

***Exercice 18 :*** Soit $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ avec $(u, v) \neq (0, 0)$. Trouver une C.N.S. pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ rencontre le graphe de $x \mapsto \operatorname{ch} x$.

***Exercice 19 :*** Démontrer les relations suivantes, en précisant au besoin les valeurs de $x$ et $y$ :

*a)* $\operatorname{Arc\,tg} (\operatorname{sh} x) = \operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ *b)* $2 \operatorname{Arg\,th} (\operatorname{tg} x) = \operatorname{Arg\,th} (\sin 2x)$

*c)* $\operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 2y} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \operatorname{Arc\,tg} (\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y)$.

***Exercice 20 :*** Soit $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. On pose $x = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ et on demande de calculer $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de $\theta$.

***Exercice 21 :*** *a*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ un homomorphisme de groupes *continu*. Montrer qu'on peut choisir un réel $\tau > 0$ tel que $\forall t \in [-2\tau, 2\tau]$ on ait $f(t) \neq -1$ ; $\tau$ étant ainsi fixé, pour $t \in [-2\tau, 2\tau]$, soit $\theta(t) = \operatorname{Arg}(f(t))$. Montrer que $\theta : [-2\tau, 2\tau] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie : $\forall t_1 \in [-\tau, \tau]$, $\forall t_2 \in [-\tau, \tau]$, $\theta(t_1 + t_2) = \theta(t_1) + \theta(t_2)$. Montrer ensuite que la fonction $\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \theta\left(x - \tau \operatorname{Ent}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \theta(\tau) \operatorname{Ent}\left(\frac{x}{2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que c'est un homomorphisme de groupes, et que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $f(t) = \exp(i\Theta(t))$. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $f(t) = e^{i\lambda t}$.

*b*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorphisme de groupes : $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ *continu*. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $f(t) = e^{at}$.

*c*) Soit $g : \mathbb{U} \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ un homomorphisme de groupes tel que l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto g(e^{it})$ soit *continue*. Montrer l'existence de $q \in \mathbb{Z}$ tel que $(\forall u \in \mathbb{U})$ $g(u) = u^q$.

***Exercice 22 :*** *a*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x$. Montrer que $f^{(n)}(x)$ peut se mettre sous la forme $(n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right)$.

*b*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de $(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ peut se mettre sous la forme $(-1)^{n-1} \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{n} \sin(n \operatorname{Arc} \cos x)$ (*Ulm*, 1960).

***Exercice 23 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto x^3(1-x) \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$. Montrer que $f$ est dérivable, que $f'$ est bornée, mais que $f'([0, 1])$ *n'est pas un intervalle fermé* (et pourtant c'est un intervalle : cf. exercice 12 du § V.1 (théorème de Darboux)).

***Exercice 24 :*** *a*) Soit $\lambda \in C^*$ et $f : ]-1, +1[ \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \sin(\lambda \operatorname{Arc} \sin t)$. Vérifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Former une équation différentielle du second ordre vérifiée par $f$. En déduire les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $f$ est polynomiale. Pour ces valeurs, utiliser l'équation obtenue pour calculer explicitement les coefficients du polynôme.

*b*) Résoudre les mêmes questions avec $t \mapsto \cos(\lambda \operatorname{Arc} \cos t)$, $t \mapsto \frac{\sin(\lambda \operatorname{Arc} \cos t)}{\sin(\operatorname{Arc} \cos t)}$.

***Exercice 25 :*** *a*) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'existence de l'une des limites $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(n\alpha)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \cos(n\alpha)$ entraînerait celle de l'autre, et que cela conduirait à une contradiction. De manière plus précise étudier les valeurs d'adhérence de ces deux suites en distinguant le cas où $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et le cas où $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

*b*) Plus généralement si $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ dans $\mathbb{R}$ avec $x_{n+1} - x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, montrer que l'ensemble des valeurs prises par la suite $(\sin x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. par la suite $(\cos x_n)$) est dense dans $[-1, +1]$.

***Exercice 26 :*** Etudier les suites de terme général :

*a*) $u_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ *b*) $u_n = \left(\cos \frac{a}{n} + b \sin \frac{a}{n}\right)^n$

*c*) $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)+1+i}{k(k+1)+1-i}$ *d*) $u_n = \sup\limits_{x \in [0,1]} x^n \cos \frac{\pi x}{2}$.

***Exercice 27 :*** Déterminer le polynôme de degré $n$ dont les racines sont les nombres $x_k = \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ k \in [\![1, n]\!])$ et tel que $P_n(0) = (-1)^n$. Calcul

$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$ et à l'aide d'un encadrement très simple, en déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Voir Tome 1, § VI.7, exemple 5.)

***Exercice 28 :*** Résoudre pour $z$ complexe les équations :
*a*) $\operatorname{tg} z = i$ *b*) $\operatorname{ch} z = -1$ *c*) $\cos z = 1 - i$ *d*) $\sin z = 3$
*e*) $\cos z = \operatorname{ch} z$ *f*) $\operatorname{ch} z = \operatorname{th} z$ *g*) $\operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{th}^2 z = 1$.

***Exercice 29 :*** *a*) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $A = f(a)$, $B = f(b)$, $C = f(c)$. Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, trouver un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ de degré le plus bas possible, tel que $a + b + c = 0 \Rightarrow P(f(a), f(b), f(c)) = 0$.

(I) $f(x) = \cos x$ ; (II) $f(x) = \sin x$ ; (III) $f(x) = \frac{1}{1 + \lambda \cos x}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*, \lambda^2 \neq 1)$ ; (IV) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

(*Réponses :* Pour (I), $P = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XYZ - 1$ ; pour (II), $P = X^4 + Y^4 + Z^4 - 2(Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2) + 4X^2Y^2Z^2$ ; pour (IV), $P = 2X^2Y^2Z^2(X^2 + Y^2 + Z^2) + 8X^2Y^2Z^2 + 2(Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2) - X^4 - Y^4 - Z^4$).

*b*) Pour chaque $P$ trouvé en *a*), trouver tous les $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P(f(a), f(b), f(c)) = 0$.

***Exercice 30 :*** Etudier la continuité de $f : ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sin n\pi x)$ ; donner $\inf_{x \in ]0,1[} f(x)$.

## § V.5 *FONCTIONS CONVEXES*

### Parties convexes d'un $\mathbb{R}$-ev

**DÉFINITION V.5.1**

> *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev. Une partie $A$ de $E$ est dite* **convexe** *ssi*
> $$(\forall (x, y) \in A^2), \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in A .$$

Si $(x, y) \in E^2$, $[0, 1] \longrightarrow E$, $\lambda \mapsto (1 - \lambda)x + \lambda y$ est une représentation paramétrique du *segment de droite affine* $[x, y]$ joignant $x$ à $y$. $A$ est donc convexe ssi $(\forall (x, y) \in A^2)$ $[x, y] \subset A$.

Il est évident que toute intersection de parties convexes de $E$ est convexe. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ en sont les intervalles.

**THÉORÈME V.5.1**

> *Pour qu'une partie $A$ d'un $\mathbb{R}$-ev $E$ soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $n$ entier $\geqslant 2$, pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ éléments de $A$ et tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on ait : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A$.*

*Démonstration :*

En prenant $n = 2$, il est clair que la condition énoncée assure que $A$ est convexe. Réciproquement si $A$ est convexe notons $(\mathscr{C}_n)$ la condition énoncée, alors $(\mathscr{C}_2)$ est vraie par définition. Supposons prouvée $(\mathscr{C}_{n-1})$ avec $n-1 \geqslant 2$, et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Posons $S = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ et prenons $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$. Si $S = 0$ il n'y a rien à prouver. Si $S > 0$, soit $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{S}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. L'hypothèse de récurrence assure que $y = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i x_i \in A$, mais alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = Sy + (1-S)x_n \in A$ par définition de la convexité $(\lambda_n = 1 - S \geqslant 0, S \geqslant 0)$, d'où $(\mathscr{C}_n)$. Le théorème est prouvé par récurrence. ■

**Fonctions convexes**

**DÉFINITION V.5.2**

*Soit $I$ un* intervalle *non trivial de* $\mathbb{R}$. *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* **convexe** *ssi :*

(I) $\forall (x, y) \in I^2, \quad (x < y), \quad \forall y \in [0, 1] \quad f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y),$

*$f$ est dite* **strictement convexe** *si $f$ est convexe et si les inégalités* (I) *sont strictes pour $\lambda \in ]0, 1[$. $f$ est dite* **concave** *(resp. strictement concave) ssi $-f$ est convexe (resp. strictement convexe).*

$f$ est donc *concave* ssi :

$$(\forall (x, y) \in I^2), \quad (x < y), \quad \forall y \in [0, 1]$$
$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] \geqslant (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Soit $\Gamma_f$ le graphe de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Notons

$$\Gamma_f^+ = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$$

et

$$\Gamma_f^- = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \leqslant f(x)\}.$$

On vérifie immédiatement :

**PROPOSITION V.5.1**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. $f$ est convexe ssi $\Gamma_f^+$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ ; $f$ est concave si $\Gamma_f^-$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

En notant $M_x(f)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in I$, nous pouvons utiliser un langage imagé pour caractériser les fonctions convexes (resp. concaves) en disant que, pour tout $(a, b) \in I^2$, $a < b$ **le segment** $[M_a, M_b]$ **est situé tout entier au-dessus** (resp. au-dessous) **d**

$f|_{[a,b]}$. De même pour les fonctions *strictement* convexes (resp. concaves). Notons que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est affine ssi elle est à la fois convexe et concave.* Dans la suite nous ne considérerons que des fonctions convexes.

**THÉORÈME V.5.2**

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Pour que f soit convexe, il faut et il suffit que pour tout n entier $\geqslant 2$, tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on ait :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

*Démonstration :*

Observons d'abord que l'énoncé a un sens, car l'intervalle $I$ étant convexe, le théorème V.5.1 montre qu'on a bien $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$ sous les hypothèses postulées. Cela dit, la condition énoncée est suffisante pour que $f$ soit convexe (prendre $n = 2$), et cette condition est nécessaire à cause du théorème V.5.1 appliqué à $\Gamma_f^+$. ■

***Remarque 1 :*** Supposons *f strictement convexe*. Par une récurrence facile on voit que pour $n$ entier $\geqslant 2$, si les $x_i \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ne sont pas tous égaux et si les $\lambda_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont tous $> 0$ et vérifient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

**PROPOSITION V.5.2**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $x \in I$ notons $\Phi_x : I \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$. Pour que f soit* ***convexe*** *(resp. strictement convexe), il faut et il suffit que chaque fonction $\Phi_x$ $(x \in I)$ soit* ***croissante*** *(resp. strictement croissante).*

*Démonstration :*

*a*) La condition est *suffisante*. En effet, soit $x$, $x_1$ et $x_2$ dans $I$ $(x < x_1 < x_2)$, d'où $x_1 = tx + (1-t)x_2$ avec $0 < t < 1$. Alors, par l'hypothèse

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{(1-t)(x_2 - x)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

d'où $\qquad f(x_1) - f(x) \leqslant (1-t)[f(x_2) - f(x)]$ ,

autrement dit $\qquad f(x_1) \leqslant (1-t)\, f(x_2) + t f(x)$ ,

et les inégalités sont strictes si les $\Phi_z$ sont strictement croissantes. Donc $f$ et convexe (resp. strictement convexe).

*b*) La condition est *nécessaire*. Soit en effet $x \in I$ et $x_1$, $x_2$ dans $I \setminus \{x\}$ tels que $x_1 < x_2$. Distinguons trois cas :

- Si $x < x_1 < x_2$, on a $x_1 = tx + (1-t)x_2$ avec $t \in \,]0,1[$, d'où par hypothèse

$$f(x_1) \leqslant t f(x) + (1-t)\, f(x_2)\,. \quad \text{Or} \quad x_1 - x = (1-t)(x_2 - x)\,,$$

d'où

$$\Phi_x(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{(1-t)(x_2-x)} \leqslant \frac{(t-1)\, f(x) + (1-t)\, f(x_2)}{(1-t)(x_2-x)} \leqslant \Phi_x(x_2)$$

(l'inégalité du milieu étant stricte lorsque $f$ est strictement convexe).

- Si $x_1 < x_2 < x$ on raisonne de même.
- Si $x_1 < x < x_2$ on a $\Phi_x(x_1) = \Phi_{x_1}(x) \leqslant \Phi_{x_1}(x_2) = \Phi_{x_2}(x_1)$ et d'après le premier cas envisagé, $\Phi_{x_2}(x_1) \leqslant \Phi_{x_2}(x) = \Phi_x(x_2)$, d'où finalement $\Phi_x(x_1) \leqslant \Phi_x(x_2)$, l'inégalité étant stricte si $f$ est strictement convexe. ■

**COROLLAIRE 1**

> *Soit I* **un intervalle ouvert** *non vide de* $\mathbb{R}$, *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* **convexe.** *Alors f est dérivable à droite et à gauche sur I, et pour tous x, y dans I* $(x < y)$, *on a :*
>
> $$f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)\,.$$
>
> *Si f est* strictement *convexe, on a de plus* (*avec* $x < y$) :
>
> $$f'_d(x) < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < f'_g(y)\,.$$

*Démonstration :*

Notons toujours, pour $z \in I$, $\Phi_z : I \setminus \{z\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(z) - f(t)}{z - t}$. Soit $x \in I$. Puisque $\Phi_x$ est croissante et puisque $x$ est point d'accumulation de $I \cap \,]-\infty, x[$ et de $I \cap \,]x, +\infty[$, le théorème IV.2.0 montre que $\Phi_x(x+0)$ et $\Phi_x(x-0)$ existent, appartiennent à $\mathbb{R}$, et que $\Phi_x(x-0) \leqslant \Phi_x(x+0)$. Cela signifie que $f'_g(x)$ et $f'_d(x)$ existent et vérifient $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$. En outre

$$f'_d(x) = \inf_{t \in I,\, t > x} \Phi_x(t) \quad \text{et} \quad f'_g(y) = \sup_{t \in I,\, t < y} \Phi_y(t)$$

d'où, si $x < y$ $(x \in I, y \in I)$ $f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'_g(y)$.

Si $f$ est strictement convexe, il suffit de choisir une valeur $t \in \,]x, y[$ pour vérifier que

$$f'_d(x) \leqslant \frac{f(t) - f(x)}{t - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(y) - f(t)}{y - t} \leqslant f'_g(y),$$

ce qui donne bien des inégalités strictes. ■

**COROLLAIRE 2**

*Avec les notations ci-dessus, si $I$ est* ***ouvert*** *et si $f$ est convexe sur $I$, alors $f$ est* ***continue*** *sur $I$. De plus on a $f'_g(x) = f'_d(x)$ (et donc $f$ dérivable en $x$) en tout $x \in I$ sauf sur un ensemble au plus dénombrable.*

*Démonstration :*

Le corollaire 1 montre déjà que $f$ est continue à droite et à gauche en chaque point de $I$, donc continue. De plus on voit que $f'_d$ et $f'_g$ sont *croissantes* sur $I$ (et même strictement croissantes si $f$ est strictement convexe). Comme $I$ et ouvert, $f'_d(x+0)$ et $f'_d(x-0)$ existent dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in I$ (ainsi que $f'_g(x+0)$ et $f'_g(x-0)$). Montrons que $f'_d(x+0) = f'_d(x)$ (l'égalité $f'_d(x-0) = f'_g(x)$ se prouve de la même façon). Soit donc $x \in I$, et $z$ fixé dans $I$ tel que $z > x$. Pour $y \in \,]x, y[$ on a : $\dfrac{f(y) - f(z)}{y - z} \geqslant f'_d(y)$, d'où en passant à la limite quand $y \longrightarrow x$ $(y > x)$ : $\dfrac{f(x) - f(z)}{x - z} \geqslant f'_d(x+0)$. C'est vrai pour tout $z \in I$, $z > x$, d'où en repassant à la limite pour $z \longrightarrow x$, $z > x$ : $f'_d(x) \geqslant f'_d(x+0)$. L'inégalité $f'_d(x) \leqslant f'_d(x+0)$ résultant simplement de la croissance de $f'_d$, on a bien $f'_d(x) = f'_d(x+0)$ qui est l'égalité désirée.

Or $f'_d$ étant croissante, on sait d'après le § IV.2 qu'il existe une partie $\mathscr{D}$ de $I$ au plus dénombrable telle que $f'_d$ soit *continue* en tout pour $x \in I \backslash \mathscr{D}$. Si $x \in I \backslash \mathscr{D}$ on a donc :

$$f'_g(x) = f'_d(x-0) = f'_d(x) = f'_d(x+0),$$

et en particulier en ces points-là $f'(x)$ existe. ■

***Remarque 2 :*** Si $I$ n'est pas ouvert, $f$ peut être convexe sans être continue (mais elle l'est nécessairement en tout point intérieur à $I$), comme par exemple la fonction $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 1$ et $x \mapsto 0$ pour $x > 0$.

**PROPOSITION V.5.3**

*Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* ***continue*** *et* ***dérivable à droite*** *sur $I$. Pour que $f$ soit convexe, il faut et il suffit que le graphe de $f$ soit* ***au-dessus*** *de toute tang*

*Démonstration :*

Soit $x_0 \in I$. Une équation cartésienne de la tangente à droite $\mathcal{T}_+(x_0)$ au point $M_{x_0}(f) = M_{x_0}$ du graphe $\Gamma_f$ de $f$ est : $y = f(x_0) + (x - x_0) f'_d(x_0) = \psi_{x_0}(x)$.

Si $f$ est convexe, alors $f'_d$ est croissante, donc $g = f - \psi_{x_0}$ vérifie :

$$g'_d(x) = f'_d(x) - f'_d(x_0) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0 ,$$

d'où par le théorème des accroissements finis (corollaire 2 du théorème V.1.4), $f(x) \geqslant \psi_{x_0}(x)$ pour $x \geqslant x_0$. Le même raisonnement montre que $g'_d(x) \leqslant 0$ pour $x \leqslant x_0$ d'où encore $f(x) \geqslant \psi_{x_0}(x)$ pour $x \leqslant x_0$. *Le graphe $\Gamma_f$ est donc au-dessus de la droite d'équation $y = \psi_{x_0}(x)$ sur tout l'intervalle I.*

Réciproquement, supposons que $\Gamma_f$ soit au-dessus de toute tangente à droite. Soit $x \in I$ et $\Phi_x : I \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Cette fonction $\Phi_x$ est *continue* et dérivable à droite comme $f$, et sa dérivée à droite est égale, en $t \in I \setminus \{x\}$, à $\dfrac{f'_d(t)(t-x) - f(t) + f(x)}{(t-x)^2}$. Or d'après l'hypothèse cette équation est $\geqslant 0$ pour $t \in I \setminus \{x\}$. Donc $\Phi_x$ est croissante d'après le corollaire 1 du théorème V.1.4 sur $I \cap \,]-\infty, x[$. Mais comme c'est vrai pour tout $x \in I$, cela suffit à assurer que $f$ est convexe (cf. proposition V.5.2). ■

### Caractère local de la convexité

**THÉORÈME V.5.3**

> *Soit $I$ un intervalle* **ouvert** *non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction* **continue** *et* **dérivable à droite.** *Pour que $f$ soit* **convexe** *(resp. strictement convexe) il faut et il suffit que $f'_d$ soit* **croissante** *(resp. strictement croissante).*

*Démonstration :*

Au cours de la démonstration du corollaire 1 de la proposition V.5.2 nous avons vu que la condition était nécessaire. Réciproquement supposons $f'_d$ croissante (resp. strictement croissante) et considérons deux points quelconques $x_1$ et $x_2$ de $I$, avec $x_1 < x_2$. Pour $\lambda \in \,]0, 1[$ soit $x = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2$. D'après le théorème V.1.4 appliqué au segment $[x_1, x]$ il existe $\mu \in \,]x_1, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant f'_d(\mu)$, c'est-à-dire $f(x_1) \geqslant f(x) + (x_1 - x) f'_d(\mu)$. L'autre face de ce théorème appliqué à $[x, x_2]$ montre l'existence de $\nu \in \,]x, x_2[$ tel que $f(x_2) \geqslant f(x) + (x_2 - x) f'_d(\nu)$.

Multiplions la première inégalité par $1 - \lambda > 0$ et la

$\lambda > 0$. Il vient :

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\,f(x_1)+\lambda f(x_2) &\geqslant f(x)+(\lambda-1)(x_2-x_1)\,\lambda f'_d(\mu)\\ &\quad+\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)\,f'_d(\nu)\\ &\geqslant f(x)+\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'_d(\nu)-f'_d(\mu)]\end{aligned}$$

et comme $f'_d(\nu) \geqslant f'_d(\mu)$ (resp. $> f'_d(\mu)$) on obtient bien : $(1-\lambda)\,f(x_1)+\lambda f(x_2) \geqslant f(x)$ (resp. $> f(x)$) qui prouve la convexité (resp. la stricte convexité) de $f$. ■

**COROLLAIRE**

> *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est* **deux fois dérivable** *sur un intervalle non trivial $I$, alors $f$ est* **convexe** *(resp. strictement convexe) ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ (resp. ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ et si l'ensemble des $x$ tels que $f''(x) > 0$ est partout dense dans $I$).*

*Démonstration :*

Pour $I$ ouvert, c'est une conséquence immédiate du théorème V.5.3, les conditions énoncées ne faisant que traduire la croissance (resp. la croissance stricte) de $f'$ sur $I$, et l'existence de $f'$ entraîne la continuité de $f$. Pour $I$ non ouvert il n'y a non plus aucune difficulté vu que les hypothèses d'existence de $f''$ assurent la continuité de $f$ sur $I$. Cependant, comme c'est ce critère de convexité qui sera le plus souvent utilisé en pratique, nous allons en donner une démonstration directe. D'abord, si $f$ est convexe et deux fois dérivable, on a vu que $f'$ doit être croissante (corollaire 1 de la proposition V.5.2), donc que $f'' \geqslant 0$. Réciproquement, supposons $f'' \geqslant 0$ et considérons deux points quelconques $a$ et $b$ de $I$, avec $a < b$. Etudions les variations de

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad t \mapsto (1-t)\,f(b)+tf(a)-f[(1-t)\,b+ta]\,,$$
$$g(t)=\overline{M_xN_x}\,,$$

$M_x$ et $N_x$ étant les points d'abscisse $x=(1-t)\,b+ta$ respectivement sur $\Gamma_f$ et sur la corde $[M_a(f), M_b(f)]$.

| $t$ | $0$ | | | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $g''$ | | $\leqslant 0$ | | |
| $g'$ | | $+$ | $\searrow$ | $-$ |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $0$ |

$$g''(t)=-\,f''[(1-t)\,b+ta](a-b)^2 \leqslant 0\,.$$

Il est possible que $g$ soit constamment nulle (et alors $f$ est affine sur $[a,b]$).Sinon le théorème de Rolle montre que $g'$ s'annule en au moins un point et comme elle est décroissante, c'est que $g'(t) > 0$ sur $[0, \alpha[$, nulle éventuellement sur $[\alpha, \beta]$, et négative strictement sur $]\beta, 1]$, c que $g(t) > 0$ si $t \in \,]0, 1[$. Il en résulte bien que $f$ est convexe puisque $\Gamma_f|_{[a,b]}$ est en dessous de la corde $[M_a(f), M_b(f)]$. ■

***Remarque 3 :*** Lorsque $f$ est deux fois dérivable, les points $x \in I$ tels que $f''(x) = 0$ avec changement de signe correspondent à des points $M_x$ dits **d'inflexion** sur le graphe de $f$ car en ces points il y a changement de concavité et $\Gamma_f$ « traverse » sa tangente.

***Exemple 1 :*** Soit à étudier les variations et la concavité de $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - x^e$.

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, mais sur $[0, +\infty[$ elle n'est que de classe $\mathscr{C}^2$ car $f^{(3)}(0)$ n'existe pas $(2 < e < 3)$. Pour $x > 0$, $f^{(4)}(x) = e^x - e(e-1)(e-2)(e-3)\,x^{e-4}$ reste $> 0$, ce qui entraîne que $f^{(3)}(x) = e^x - e(e-1)(e-2)\,x^{e-3}$ croît strictement. Or $f^{(3)}(0+0) = -\infty$ et $f^{(3)}(+\infty) = +\infty$, ce qui ne laisse aucun doute sur le signe de $f^{(3)}$, donc sur le sens de variation de $f''$. Or

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $1$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f''(x) = e^x - e(e-1)\,x^{e-2}$ vaut 1 pour $x = 0$ et $f''(1) = e - e(e-1) < 0$, ce qui entraîne, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que $f''$ s'annule une première fois en $\alpha \in \,]0, 1[$ et une deuxième fois en $\beta \in \,]1, +\infty[$. On peut même préciser, en utilisant le théorème de Rolle appliqué à $x \mapsto f'(x) = e^x - ex^{e-1}$ qui vérifie $f'(1) = f'(e) = 0$, que $1 < \beta < e$.

On peut maintenant dresser un tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | $1$ | $\beta$ | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $M$ | $0$ | $m$ | $0$ | | $+\infty$ |
| signe de $f'(x)$ | | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | | $\nearrow$ | $e-1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

et construire le graphe $\Gamma_f$, avec ses deux points d'inflexion d'abscisses $\alpha = 0{,}14 + \varepsilon_1$ et $\beta = 2{,}06 + \varepsilon_2$, d'ordonnées $f(\alpha) = 1{,}15 + \varepsilon_3$ et $f(\beta) = 0{,}71 + \varepsilon_4$, $(\forall i)(\varepsilon_i) \leq 10^{-2}$ (les tangentes en ces points ont des pentes voisines de 1,06 et de $-1{,}56$) et sa *branche parabolique*
(car $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^x}{x} - x^{e-1} = x^{e-1}\left(\dfrac{e^x}{x^e} - 1\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$).

La concavité est donnée par le signe de $f''$.

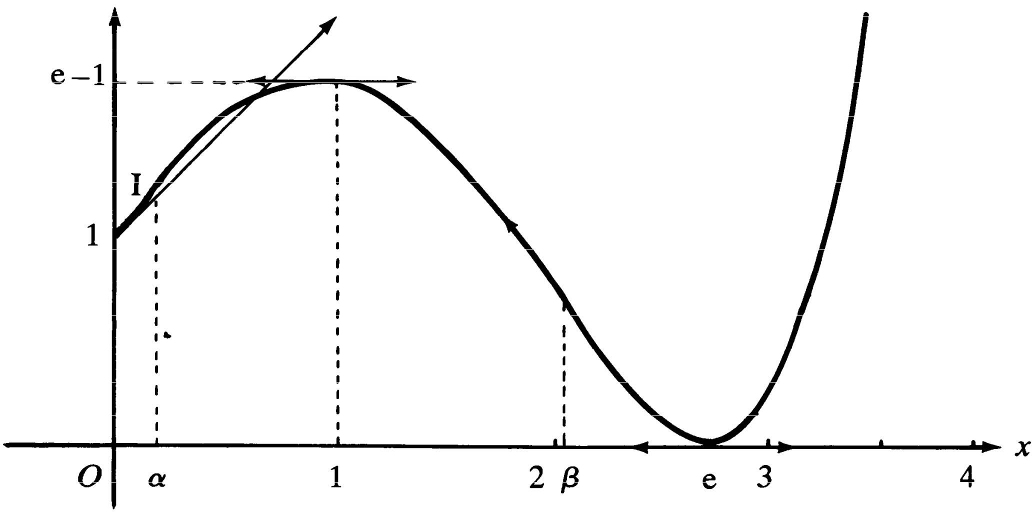



**Fig. 1.**

***Exemple 2:*** Etudier les variations de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$, $0 \mapsto 1$ et montrer qu'elle est convexe.

Cette fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, et même de classe $\mathscr{C}^\infty$. En écrivant

$$f(x) + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{2}{e^x - 1} + 1\right) = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\coth\frac{x}{2},$$

il est intéressant de remarquer que $x \mapsto f(x) + \dfrac{x}{2}$ est une fonction paire, ce qui se traduit sur $\Gamma_f$ par une symétrie oblique par rapport à $Oy$, et comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient une *asymptote oblique* d'équation $y = -x$ quand $x \longrightarrow -\infty$ (symétrique de l'asymptote $Ox$ quand $x \longrightarrow +\infty$).

Pour $x \neq 0$ on calcule

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\coth\frac{x}{2} - \frac{\dfrac{x}{4}}{\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}}$$

et

$$f''(x) = \frac{-1}{4\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}} - \frac{1}{4\operatorname{sh}^4\dfrac{x}{2}}\left(\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} - x\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{sh}^3\dfrac{x}{2}}\left(\frac{x}{2} - \operatorname{th}\frac{x}{2}\right).$$

Or le signe de $\dfrac{x}{2} - \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$ (fonction strictement croissante qui s'annule en 0) est évidemment le signe de $x$, et c'est aussi le signe de $\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}$, donc $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Pour $x \longrightarrow 0$, la limite de $\dfrac{\dfrac{x}{2} - \operatorname{th}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh}^3\dfrac{x}{2}}$ se calcule facilement avec la règle de l'Hôpital et vaut $\frac{1}{3}$, d'où $f''(0) = \frac{1}{6}$. Il résulte de tout cela que $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $f'(+\infty) = 0$, on a : $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où le sens de variation de $f$, et son graphe.

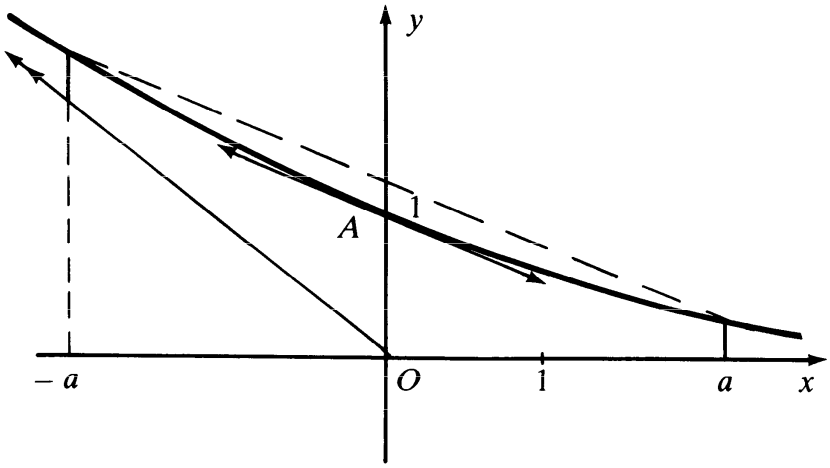



**Fig. 2.**

La pente de la tangente en $A(0, 1)$ s'obtient à partir de $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{sh} x - x}{4 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}$ par la règle de l'Hôpital qui donne $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

***Exemple 3 :*** Etudions les variations et la concavité (un peu moins évidentes) de la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto \frac{1}{2}$, $x \mapsto \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$. Cet exemple semblera un peu moins gratuit si l'on remarque que le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction exponentielle, prouve, pour $x \neq 0$, l'existence d'un $\theta \in ]0, 1[$ tel que $\frac{e^x - 1}{x} = e^{\theta x}$. A cause de l'injectivité de l'exponentielle, ce $\theta$ est unique, et son calcul montre qu'il a justement pour expression $g(x)$. Cette remarque a l'avantage de montrer que les valeurs prises par $g$ appartiennent toutes à $]0, 1[$. On peut écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = \frac{-1}{x} \operatorname{Log} f(x)$ pour profiter des calculs de l'exemple 2, $f$ désignant la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ complétée en 0 par continuité, mais on remarque au préalable que

$$g(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \left[ \operatorname{Log} \frac{e^x - 1}{x} - \operatorname{Log} (e^{x/2}) \right] = \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} x/2}{x/2},$$

ce qui montre que le point $I\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour $\Gamma_g$ et permet de limiter l'étude de $g$ à l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sh} x/2}{x/2} + \frac{1}{x^2} \left( \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} - 1 \right)$$

a le signe de $\quad z = -\operatorname{Log}\dfrac{\operatorname{sh} x/2}{x/2} + \dfrac{x}{2}\coth\dfrac{x}{2} - 1$ .

Or $\quad z' = \dfrac{-1}{x}\left(\dfrac{x}{2}\coth\dfrac{x}{2} - 1\right) + \dfrac{1}{2}\coth\dfrac{x}{2} - \dfrac{x/4}{\operatorname{sh}^2 x/2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x/4}{\operatorname{sh}^2 x/2}$

qui a le signe de $\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ ou de $\operatorname{sh}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}$, qui est évidemment $> 0$. Donc $z$ croît à partir de $z(0) = 0$, ce qui prouve que sur $]0, +\infty[$, $z$ reste $> 0$, et donc $g'(x) > 0$, d'où la croissance de $g$. On vérifie que $g(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que $g$ est continue en 0. Quant à $g'(x)$, sa limite en 0 est la même que celle de

$$\frac{z'}{2x} = \frac{\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{2x^2\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sh}\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}}{2x\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{2}} \times \frac{\operatorname{sh}\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}}{x}.$$

Une application répétée de la règle de l'Hôpital (nous verrons au Chapitre VI une méthode plus pratique) donne $g'(0) = \dfrac{1}{24}$, d'où le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $1/24$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1/2$ | $\nearrow$ | $1$ |

A partir de $g'(x) = \dfrac{z}{x^2}$, en prenant sa dérivée logarithmique, on obtient $\dfrac{g''(x)}{g'(x)} = \dfrac{z'}{z} - \dfrac{2}{x}$ et donc $g''(x)$ a le signe de $xz' - 2z$ pour $x > 0$, c'est-à-dire de $u = 1 - \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{sh}^2 x/2} + 2\operatorname{Log}\dfrac{\operatorname{sh} x/2}{x/2} - x\coth\dfrac{x}{2} + 2 \quad (u(0) = 0)$. Les variations de $u$ sur $]0, +\infty[$ s'étudient à partir du signe de

$$u' = 2\left(\frac{\operatorname{sh} x/2}{x/2}\right)^{-3}\frac{x\operatorname{ch}\dfrac{x}{2} - 2\operatorname{sh}\dfrac{x}{2}}{x^2} + 2\left(\frac{1}{2}\coth\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) - \\ - \coth\frac{x}{2} + \frac{x/2}{\operatorname{sh}^2 x/2}$$

qui se simplifie immédiatement en $u' = \dfrac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\operatorname{ch}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sh}^3\dfrac{x}{2}} - \dfrac{2}{x}$. Pour $x > 0$, en posant $\frac{x}{2} = t$, $u'$ a le signe de $t^3 - \frac{\operatorname{sh}^3 t}{\operatorname{ch} t}$, c'est-à-dire celui de $t - \frac{\operatorname{sh} t}{(\operatorname{ch} t)^{1/3}} = v(t)$. Une nouvelle fois nous aurons le signe de $v(t)$ en remarquant que $v(0) = 0$ et en étudiant ses variations. Or

$$v' = 1 - \frac{(\operatorname{ch} t)^{4/3} - \frac{1}{3}\operatorname{sh}^2 t\,(\operatorname{ch} t)^{-2/3}}{(\operatorname{ch} t)^{2/3}}$$

a le signe de $N = 3(\operatorname{ch} t)^{4/3} - 3(\operatorname{ch} t)^{6/3} + \operatorname{ch}^2 t - 1$, ou, en posant $(\operatorname{ch} t)^{2/3} = X$,

$$N = -2X^3 + 3X^2 - 1 = (X-1)^2(-2X+1),$$

et comme $X \geqslant 1$, $N < 0$, d'où le tableau

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $v$ | $0$ $\searrow$ | |

Donc $v(t) < 0$, c'est-à-dire $u' < 0$ pour $x > 0$, et comme $u(0) = 0$ et que $u$ décroît sur $[0, +\infty[$, $u(x) < 0$, soit enfin $g''(x) < 0$. La fonction $g$ est donc *concave* (strictement sur $[0, +\infty[$, et par symétrie elle est *convexe* sur $]-\infty, 0]$, d'où le graphe $\Gamma_g$ avec son point d'inflexion $I$.

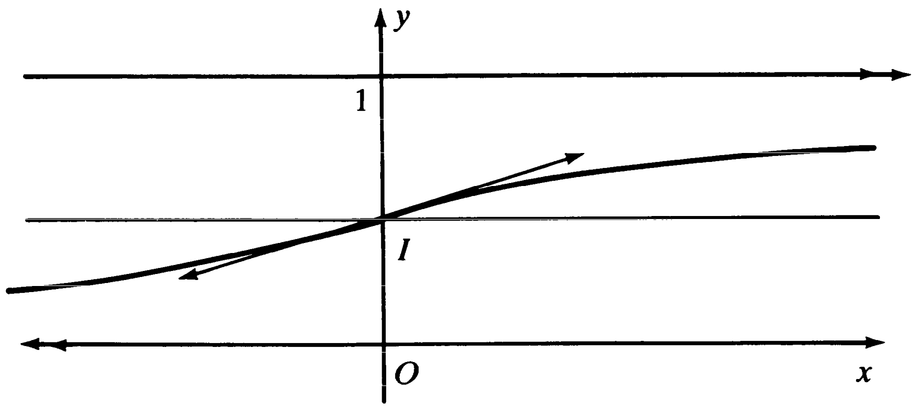



**Fig. 3.**

On peut remarquer que toutes les fonctions apparues au cours de cette étude, comme $z$, $u$, $v$, mais surtout $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**Inégalités de convexité**

Le théorème V.5.2 peut servir à établir une foule d'inégalités remarquables, dites de convexité. Nous nous limiterons à quelques exemples.

***Exemple 4 :*** La fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque sa dérivée seconde est $\frac{-1}{x^2} < 0$. D'où, en prenant $n$ n

$> 0$ quelconques $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n$ entier $\geqslant 2$) et $n$ nombres réels $\geqslant 0$ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et en appliquant le théorème V.5.2

$$\operatorname{Log}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{Log} x_i ,$$

soit en exponentiant : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} (x_i^{\lambda_i})$ .

On peut même préciser que l'inégalité est stricte si les $\lambda_i$ sont $\neq 0$ et si les $x_i$ ne sont pas tous égaux. Prenons en particulier $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$. Il vient :

$$(1) \qquad \boxed{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. La relation (1) s'appelle **inégalité arithmético-géométrique.** Elle signifie que la *moyenne géométrique* de $n$ réels $> 0$ est toujours inférieure ou égale à leur *moyenne arithmétique,* et peut se prouver de bien des façons par des voies dont certaines plus élémentaires, d'autres plus sophistiquées (mais la méthode utilisée ici est particulièrement simple). Ses applications sont très nombreuses.

***Exemple 5*** *(Inégalité de Hölder pour des suites finies) :* Reprenons l'inégalité $\prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\lambda_i} \leqslant \sum \lambda_i x_i$ dans le cas particulier $n = 2$, en posant $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ (donc $p$ et $q$ sont des réels $> 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $x_1^{\lambda_1} = u$ et $x_2^{\lambda_2} = v$. Il vient :

$$\boxed{uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}} .$$

Désignons alors par $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels $> 0$ et posons :

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} .$$

Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on a, $\frac{a_i}{\alpha}$ jouant le rôle de $u$ et $\frac{b_i}{\beta}$ celui de $v$ :

$$\frac{a_i b_i}{\alpha\beta} \leqslant \frac{a_i^p}{p\alpha^p} + \frac{b_i^q}{q\beta^q} ,$$

et par sommation de $i = 1$ jusqu'à $i = n$ :

$$\sum \frac{a_i\, b_i}{\alpha \beta} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 ,$$

d'où l'**inégalité,** dite **de Hölder :**

$$(2) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}$$

qui joue un rôle central en théorie des espaces vectoriels normés. Elle est vraie pour tous réels $> 0$, $p$ et $q$ vérifiant de plus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On remarque que l'égalité n'est possible que si les deux suites $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont *proportionnelles*.

***Exemple 6*** *(Inégalité de Minkowski pour des suites finies) :* Il n'est pas difficile de déduire l'inégalité de Minkowski à partir de (2) (à condition de penser à écrire $(x_i + y_i)^p = (x_i + y_i)^{p-1} x_i + (x_i + y_i)^{p-1} y_i$), mais pour montrer la puissance du théorème V.5.2, établissons-la directement en étudiant la fonction $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto (1 + t^p)^{1/p}$ où $p$ est un réel $\geqslant 1$. Cette fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour $t > 0$, et :

$$f'(t) = (1 + t^p)^{\frac{1}{p} - 1} \times t^{p-1}$$

et
$$\frac{f''(t)}{f'(t)} = \frac{1-p}{p}\,\frac{pt^{p-1}}{1+t^p} + \frac{p-1}{t} = \frac{(p-1)(1 + t^p - t^p)}{t(1+t^p)} .$$

Donc $f''(t) > 0$ pour $p > 1$ et $f$ est *convexe.* Pour $n$ entier $\geqslant 2$, des $\lambda_i \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, et des $t_i \geqslant 0$, on a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, t_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(t_i) ,$$

c'est-à-dire :
$$\left[1 + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, t_i\right)^p\right]^{1/p} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i^p + \lambda_i^p\, t_i^p)^{1/p} .$$

En posant $\lambda_i = \dfrac{a_i^{1/p}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/p}}$ (dont la somme vaut 1, pour tous $a_i \geqslant 0$) et $a_i^{1/p}\, t_i = b_i^{1/p}$, il vient (après avoir « chassé » le dénominateur et élevé les deux membres à la puissance $p$)

$$(3) \qquad \boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{1/p})\right)^p + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^{1/p}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{1/p}\right)^p}$$

qui est l'une des formes de l'**inégalité de Minkowski.**

L'autre forme, plus habituelle, s'obtient avec la même fonction $f$, mais pour $p$ réel, $0 < p < 1$. Alors $f$ est *concave* strictement sur $\mathbb{R}_+$. La même technique que ci-dessus, avec les mêmes $\lambda_i$ et $t_i$, fournit, avec $\alpha = \dfrac{1}{p}$ :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}\ , \tag{4}$$

inégalité valable pour tous réels $a_i$, $b_i \geqslant 0$ et, pour $\alpha > 1$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si les suites $(a_i)$ et $(b_i)$ sont proportionnelles.

***Exercice 1 :*** Soit $f : [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction *concave*. Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \;\; f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

***Exercice 2 :*** Soit $\Gamma$ le graphe d'une fonction convexe deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I$. Quel est le nombre de tangentes qu'on peut mener à $\Gamma$ d'un point de $\mathbb{R}^2$ ?

***Exercice 3 :*** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$ dont la dérivée seconde $f''$ s'annule en exactement $n$ points $(n \geqslant 0)$, et $\Gamma$ son graphe.

*a*) Quel est le nombre maximum de points d'intersection de $\Gamma$ avec une droite ? (***réponse :*** $n + 2$).

*b*) Quel est le nombre maximum de tangentes que l'on peut mener à $\Gamma$ depuis un point du plan ? (cf. exercice 2) (***réponse :*** $n + 2$).

***Exercice 4 :*** *a*) Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions convexes sur un intervalle $I$. On suppose que $\forall x \in I \; \sup\limits_{j \in J} f_j(x) < +\infty$. On note $g(x)$ ce sup. Prouver que $g$ est convexe (on l'appelle l'***enveloppe supérieure*** des $f_j$).

*b*) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ une fonction croissante et *continue*. On considère l'enveloppe supérieure des fonctions convexes sur $[a, b]$ et majorées par $f$. Montrer que $g$ est continue sur $[a, b]$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $(a < b)$.

*a*) On suppose $(\forall (u, v) \in [a, b]^2 \; (u < v)) \; \exists \lambda \in \, ]0, 1[$ tel que

$$f((1-\lambda)\, u + \lambda v) \leqslant (1-\lambda)\, f(u) + \lambda f(v)\,.$$

Montrer que $f$ est convexe.

*b*) On suppose que $(\forall x \in [a, b]) \; \exists p_x \in \mathbb{R}$ tel que, pour $t$ assez voisin de $x$, on ait $f(t) \geqslant f(x) + p_x(t - x)$. Montrer que $f$ est convexe.

*c*) On suppose $f$ dérivable et que $(\forall (u, v) \in [a, b]^2 \; (u < v))$ il existe *un seul* $c \in \, ]u, v[$ tel que $f(v) - f(u) = (u - v)\, f'(c)$. Montrer que $f$ est soit convexe soit concave.

***Exercice 6 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $(a < b)$ et telle que

$$\forall x \in \, ]a, b[ \; \limsup_{h \longrightarrow 0,\, h \neq 0} \frac{1}{h^2}\,(f(x+h) + f(x-h) - 2\, f(x)) \geqslant 0\,.$$

Montrer que $f$ est convexe.

*Indication :* On établira que, pour tout $\varepsilon > 0$, $g_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon x^2$ est convexe.

***Exercice 7 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Pour $x, y, z$ dans $I$ tels que $x < y < z$, quel est le signe du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix}$ ?

***Exercice 8 :*** Si $f$ et $g$ sont convexes sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et s'il existe des réels $\geqslant 0$, $a$ et $b$ tels que $af + bg$ soit affine, alors $f$ et $g$ sont affines.

***Exercice 9 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que $f$ est **logarithmiquement convexe** ssi $\operatorname{Log} f$ est convexe.

*a*) Si $f$ est logarithmiquement convexe, $f$ est convexe. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

*b*) Montrer que, pour que $f$ soit logarithmiquement convexe, il faut et il suffit que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $f^\alpha$ soit convexe.

***Exercice 10 :*** *a*) La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ?

*b*) Soit $f$ une fonction continue strictement croissante d'un intervalle $I$ sur un intervalle $J$, et soit $g = f^{\langle -1 \rangle}$. Montrer que $f$ est convexe ssi $g$ est concave.

***Exercice 11 :*** Soit $f$ une fonction convexe croissante dans $]0, +\infty[$. Montrer que : ou bien $f$ est constante, ou bien $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

***Exercice 12 :*** Soit $a$ un réel $> 0$ et $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$. Montrer que, lorsque cette limite est $\leqslant 0$, la fonction $f$ est décroissante sur $[a, +\infty[$.

***Exercice 13 :*** Soit $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

*a*) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - x f'_d(x)$ est décroissante et en donner une interprétation géométrique.

*b*) On suppose que $f(x) - x f'_d(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \beta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on est dans l'un des trois cas suivants :

(I) $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

(II) $\varphi$ est croissante sur $]0, +\infty[$

(III) Pour $a > 0$ convenable, $\varphi$ est décroissante de $0$ à $a$, puis croissante de $a$ à $+\infty$.

*c*) En déduire que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \varphi(x) = \alpha$ existe dans $\mathbb{R}$.

*d*) Montrer que $f(x) - (\alpha x + \beta) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ en restant $\geqslant 0$.

***Exercice 14 :*** Soit $a$ et $b$ réels $> 0$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions convexes $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = a$, $f(1) = b$ et $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) \geqslant 0$.

*a*) Vérifier que $\mathscr{C}$ est une partie convexe de l'espace vectoriel $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$.

*b*) On dit qu'un élément $f \in \mathscr{C}$ est *extrémal* ssi les relations $f_1 \in \mathscr{C}$, $f_2 \in \mathscr{C}$ et $\dfrac{f_1 + f_2}{2} = f$ entraînent $f_1 = f_2 = f$. Trouver les éléments extrémaux de $\mathscr{C}$.

***Exercice 15 :*** Soit $(a_i)$, $(b_i)$ des nombres réels $> 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que $0 < m \leqslant \dfrac{b_i}{a_i} \leqslant M$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

*a*) Montrer que $b_i^2 + mMa_i^2 \leqslant (M + m)\, a_i\, b_i$, et par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + mM \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant (M + m) \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\,.$$

*b*) En déduire que : $\dfrac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2} \leqslant \dfrac{(M + m)^2}{4\,Mm}$.

***Exercice 16 :*** On se propose de trouver une fonction $g : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *à dérivée croissante* telle que $g(1) = 0$ et $g(x + 1) - g(x) = \operatorname{Log} x$ pour $x > 0$.

*a*) Calculer $g(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $x \in ]0, 1]$ on a :

$$\operatorname{Log}(n - 1) \leqslant g'(n) \leqslant \frac{g(n + x) - g(n)}{x} \leqslant \operatorname{Log} n\,.$$

En déduire que $g'(1)$ est égal à $-\gamma$, où $\gamma$ désigne la constante d'Euler, c'est-à-dire la limite de la suite *convergente* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$.

*b*) En désignant par $\psi$ la fonction $g'$, montrer que $\psi(n+x) - \psi(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que $\psi(x) = \psi(1) - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right]$, où $v_k(x) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est le terme général d'une série *convergente* de somme $s(x)$. Vérifier que $s$ est une fonction croissante et conclure à l'existence et l'unicité d'une solution $g$ du problème posé au départ, sous réserve de pouvoir trouver une primitive de $s$.

*c*) Vérifier que la fonction $s : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien continue.

***Exercice 17*** *: Préliminaires.* Pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, soit $I_t$ l'intervalle translaté $I - t$ et $J_t$ l'intervalle $I \cap I_t$. A toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et à tout $t \in \mathbb{R}$, on associe les fonctions $T_t : I_t \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+t)$ et $\Delta_t : J_t \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+t) - f(x)$. On pose $\Delta_t^0 f = f$ et par récurrence on définit $\Delta_t^k f$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par : $\Delta_t^k f = \Delta_t(\Delta_t^{k-1} f)$. Vérifier que les fonctions $\Delta_{t_1}^k(\Delta_{t_2}^l f)$ et $\Delta_{t_2}^l(\Delta_{t_1}^k f)$ sont égales, là où elles sont définies.

*a*) Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x \in I$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $x + tp \in I$ pour $p \in [\![0, k]\!]$. Démontrer :

(1) $$(\Delta_t^k f)(x) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} f(x+kp).$$

*b*) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in I$ tel que $x + kt \in I$. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

(2) $$(\Delta_t^k f)(x) = \sum_{p_1 \in [\![0, n-1]\!], \ldots, p_k \in [\![0, n-1]\!]} (\Delta_{t/n}^k f)\left(x + (p_1 + p_2 + \cdots + p_k)\frac{t}{n}\right).$$

On dira que $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ *vérifie l'hypothèse* $H_k$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) ssi $f$ est *continue* et, pour tous $x \in I$ et $t \in \mathbb{R}_+$ tels que $x + kt < b$, $(\Delta_t^k f)(x) \geqslant 0$.

1^re^ *Partie :* On suppose que $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie l'hypothèse $H_2$.

*a*) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que les fonctions $]a, b-t[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\Delta_t^f)(x)$ et $]a+t, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\Delta_t^f)(x-t)$ sont croissantes.

*b*) On donne $x \in ]a, b[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x + t < b$. Pour tous entiers $m$, $n$ tels que $0 \leqslant m < n$ démontrer : $\dfrac{f\left(x + \frac{mt}{n}\right) - f(x)}{\frac{mt}{n}} \leqslant \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t}$.

En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(\Delta_t f)(x)$ est croissante sur $]0, b-x[$, que $t \mapsto \frac{1}{t}(\Delta_t f)(x)$ est croissante sur $]a-x, 0[$, que $t \mapsto \frac{1}{t}(\Delta_t^f)(x-t)$ est décroissante sur $]0, x-a[$.

*c*) On donne des réels tels que $0 < t < u$ ; $a < z < x < y < b$ ; $z - u > a$ et $y + u < b$. Démontrer :

$$\frac{1}{u}(\Delta_u f)(z-u) \leqslant \frac{1}{u}(\Delta_u f)(x-u) \leqslant \frac{1}{t}(\Delta_t f)(x-t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{t}(\Delta_t f)(x) \leqslant \frac{1}{u}(\Delta_u f)(x) \leqslant \frac{1}{u}(\Delta_u f)(y).$$

En déduire que $f$ est dérivable à gauche en $z$ et $x$, à droite en $x$ et $y$, et que $f_g'(z) \leqslant f_g'(x) \leqslant f_d'(x) \leqslant f_d'(y)$ (utiliser *b*)).

Montrer que la fonction $f$ est *convexe.*

2^e^ *Partie :* Soit $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ une fonction convexe.

*a*) $f$ vérifie-t-elle l'hypothèse $H_2$ ?

*b*) Montrer que $f$ admet en $a$ et $b$ des limites dans $\bar{\mathbb{R}}$.

*c*) Si $l = \lim_{x \to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, montrer que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - l}{x - a}$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$.

*d*) Si $f$ et dérivable sur $]a, b[$, alors montrer que $f'$ est continue.

3[e] *Partie :* On se propose de prouver le théorème suivant : ($\mathscr{B}$) Si une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie $(H_p)$ sur l'intervalle $I$ avec $p > 2$, alors $F$ est $p-2$ fois dérivable sur $I$, et $F^{(p-2)}$ est convexe sur $I$.

Soit donc $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, et $k$ un entier $\geqslant 2$ tel que $f$ vérifie $(H_k)$.

*a*) On donne $t \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]a, b[$ tels que $x + \dfrac{t}{n} + (k-1)\,t < b$. En exprimant $(\Delta_t^{k-1} f)(x)$ à l'aide de (2) prouver que $(\Delta_{\frac{t}{n}}\, \Delta_t^{k-1} f)(x) \geqslant 0$. En déduire que la fonction $x \mapsto (\Delta_t^{k-1} f)(x)$ est croissante, puis par récurrence sur $k$ :

Si $x \in ]a, b[$ et si $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $x + t_1 + \cdots + t_k < b$, alors

$$(\Delta_{t_1}\, \Delta_{t_2} \dots \Delta_{t_k} f)(x) \geqslant 0 \,. \tag{3}$$

*b*) En utilisant (3) montrer que les fonctions suivantes sont croissantes, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$]a, b-(k-1)\,u[ \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (\Delta_u^{k-1} f)(x)\,;$$
$$]a+u, b-(k-2)\,u[ \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (\Delta_u^{k-1} f)(x-u)\,.$$

*A partir d'ici, on suppose $k > 2$.*

*c*) Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on note $(\mathscr{P}_q)$ la propriété suivante, pour $x$ donné dans $]a, b[$ : $(\mathscr{P}_q)$ la fonction $\left]0, \dfrac{b-x}{q-1}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^{q-1}}\,(\Delta_t^{q-1} f)(x)$ est croissante. On fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\varphi : ]a, b-(k-2)\,t[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (\Delta_t^{k-2} f)(x)$ vérifie $(H_2)$. En déduire que si $x$ est fixé dans $]a, b-(k-2)\,t[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u}\,(\Delta_u\, \varphi)(x)$ est croissante sur $]a, b-(k-2)\,t-x[$.

Si $u \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé, prouver que $\Delta_u f$ vérifie $(H_{k-1})$ sur $]a, b-u[$. Soit $x \in ]a, b[$ fixé et $t$, $u \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < u$ et $x + (k-1)\,u < b$. On suppose que $(\mathscr{P}_{k-1})$ est universellement vraie. Démontrer les relations :

$$\frac{1}{u^{k-1}}\,(\Delta_u^{k-1} f)(x) \geqslant \frac{1}{u^{k-2}}\,\frac{1}{t}\,(\Delta_t\, \Delta_u^{k-2} f)(x) = \frac{1}{t}\,\frac{1}{u^{k-2}}\,(\Delta_u^{k-2}\, \Delta_t f)(x)\,.$$

En déduire :
$$\frac{1}{t}\,\frac{1}{u^{k-2}}\,(\Delta_u^{k-2}\, \Delta_t f)(x) \geqslant \frac{1}{t^{k-1}}\,(\Delta_t^{k-1} f)(x)$$

et prouver $(\mathscr{P}_k)$ en raisonnant par récurrence sur $k$.

*d*) On note $E = \{x \in ]a, b[ \mid \forall t \in \mathbb{R} \quad (0 < (k-1)\,t < b-x) \Rightarrow (\Delta_t^{k-1} f)(x) \geqslant 0\}$ et $F = ]a, b[ \setminus E$. Montrer que si $y \in F$ et $z \in E$, alors $y < z$ (utiliser *b*)). On suppose $F$ non vide. Soit $c = \sup(F)$. Pour chaque $x \in ]a, c[$ montrer que le réel $\varepsilon(x) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+^* \mid x + (k-1)\,t < b \text{ et } (\Delta_t^{k-1} f)(x) > 0\}$ est défini, et que la fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ est décroissante sur $]a, c[$ (utiliser *b*) et *c*)). Soit alors $x \in ]a, c[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(k-1)\,t < c-x$ et $y \in ]x + (k-1)\,t, c[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{t}{n} < \varepsilon(y)$. Exprimer $(\Delta_t^{k-1} f)(x)$ en fonction des $(\Delta_{t/n}^{k-1} f)\left(x + \dfrac{qt}{n}\right)$, $q \in [\![0, n-1]\!]$. En déduire que $-f$ vérifie $(H_{k-1})$ sur $]a, c[$.

*e*) Déduire de *d*) qu'on peut trouver $p \in [\![1, 2^{k-1}]\!]$ et $x_0, x_1, \dots, x_p \in [a, b]$, avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ tels que sur chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, avec $0 \leqslant j \leqslant p-1$, $f$ ou $-f$ vérifie $(H_2)$. Dans la suite on fixe $p$ et les $x_j$ ainsi.

*f*) Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{> \\ t \to 0}} \frac{1}{t}\,(\Delta_t f)(x_j)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{< \\ u \to 0}} \frac{1}{u}\,(\Delta_u f)(x_j)$ existent dans $\bar{\mathbb{R}}$. Soit $\lambda$ et $\mu$ ces limites.

Si $\lambda = +\infty$, on fixe $t$ tel que $x_{j-1} < x_j - kt < x_j + t < x_{j+1}$. Montrer que

$$\lim_{\substack{> \\ u \to 0}} \frac{1}{u}\,(\Delta_t^{k-1}\, \Delta_u f)(x_j - (k-2)\,t) = -\infty$$

et en tirer une contradiction à l'aide de (3). Si $\lambda = -\infty$, on fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_{j-1} < x_j - (k-1)\,t < x_j$. Prouver de même que $\displaystyle\lim_{\substack{> \\ u \to 0}} \frac{1}{u}\,(\Delta_u\, \Delta_t^{k-1}(x_j - (k-1)\,t)) = -\infty$ et en tirer contradiction.

Finalement montrer que $f$ est dérivable à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$.

*g*) On fixe $x \in ]a, b[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a + kt < x < b - 2t$. Soit $q \in \{k-2, k-1\}$. A l'aide de (1) exprimer $(\Delta_t^k f)(x - qt)$ en fonction des $f(x + (i-q)t)$, $i \in [\![0, k]\!]$. En déduire
$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ i \neq q}} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{f(x + (i-q)t) - f(x)}{(i-q)t} (i-q) \geq 0,$$
puis $A_q f'_g(x) + B_q f'_d(x) \geq 0$, où $A_q = \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (i-q)$ et $B_q = \sum_{i=q}^{k}$. Calculer $A_q + B_q$. Calculer $A_{k-2}$, $B_{k-2}$, $A_{k-1}$, $B_{k-1}$. En déduire que $f'_g(x) = f'_d(x)$, puis, que $f'$ existe et est continue sur $]a, b[$ (cf. 2[e] partie).

*h*) Utiliser (3) pour montrer que, pour $x \in ]a, b[$, $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x + (k-1)t < b$, on a $(\Delta_t^{k-1} f')(x) \geq 0$. Montrer que $f'$ vérifie $(H_{k-1})$ sur $]a, b[$. Par une récurrence convenable, prouver enfin le théorème $(\mathscr{B})$.

# Chapitre VI

# FORMULES DE TAYLOR. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

## § VI.1 *PROPRIÉTÉS LOCALES D'UNE FONCTION*

Dans tout ce qui suit, $K$ désignera soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$, et $N, N_1, \ldots, N_p, \ldots$ des entiers $\geqslant 1$.

**Germes de fonctions en un point**

Soit $D$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un *point d'accumulation* de $D$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ (par exemple $D = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$). Nous noterons $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ l'ensemble des fonctions $f$ à valeurs dans $K^N$ et définies sur un ensemble de la forme $V \cap D$, où $V$ est un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, ensemble *qui peut varier avec f.* (Ainsi les diverses fonctions $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ n'admettent pas de domaine de définition commun à toutes car l'intersection de tous les voisinages de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ est $\{a\}$, et n'est donc pas de la forme $V \cap D$ ci-dessus).

Quand on considère un élément $f$ de $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ on dit qu'on se donne une fonction (à valeurs dans $K^N$) **définie au voisinage de *a* dans *D*.** Tout voisinage $W$ de $a$ tel que $f$ soit définie en tout point $x \in W \cap D$ sera alors appelé **un voisinage de définition de *f*.**

Fixons $D$, $a$ et $N$. Pour $F \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$, convenons d'écrire $f \mathscr{R} g$ ssi la relation suivante est satisfaite :

(1) Il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f$ et $g$ soient définies sur $V \cap D$ et que : $(\forall t \in V \cap D)\ f(t) = g(t)$. Alors $\mathscr{R}$ est une *relation d'équivalence* sur $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ (la transitivité provient du fait que l'intersection de *deux* voisinages de $a$ est un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$). On dit en abrégé que $f$ et $g$ sont **égales au voisinage de *a*.**

**DÉFINITION VI.1.1**

*Avec les notations qui précèdent :*

- *Les classes d'équivalence de la relation* $\mathscr{R}$ *définie par* (1) *sont appelées* **germes en *a* de fonctions** *de* $D$ *dans* $K^N$.

• *Si $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$, la classe d'équivalence de $f$ mod $(\mathcal{R})$ est appelée* ***le germe de f en a.***

• *On appelle* ***propriété locale au point a*** *d'une fonction $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$ toute propriété qui ne dépend que du germe de $f$ en $a$. On dit encore d'une telle propriété qu'elle est (ou n'est pas)* ***vérifiée par f au voisinage de a.***

Le germe au point $a$ d'une fonction $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$ est parfaitement déterminé par la connaissance d'*une quelconque* des restrictions $f|_{V \cap \mathcal{D}_f}$, où $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble de définition de $f$, et où $V$ est un voisinage quelconque de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

***Exemple 1 :*** Soit $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$. L'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ainsi que la valeur de cette limite $l$ lorsqu'elle existe, sont des propriétés locales de $f$ au point $a$, ce qui incite à écrire $l = \lim\limits_{a} f$.

***Exemple 2 :*** Si $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$, la propriété : « Il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $\mathbb{R}$ tel que $(\forall t \in V) \quad f(t) \neq 0$ » est locale au point $a$. On l'exprime par la phrase : « $f$ ne s'annule jamais au voisinage de $a$ ». Si c'est le cas, et si $N = 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{f(t)}$ est définie au voisinage de $a$ et son germe en $a$ ne dépend que de celui de $f$.

***Exemple 3 :*** Supposons que $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$ admette au point $a$ une *limite non nulle*. Alors $f$ ne s'annule jamais au voisinage de $a$.

### Opérations sur les germes

Fixons $D$ et $a$ comme ci-dessus. Bien que les fonctions définies dans $D$ au voisinage de $a$ n'aient pas toutes le même ensemble de définition, la relation $(\mathcal{R})$ permet de leur appliquer les opérations mathématiques de base (somme, produit, composition de fonctions, ...) moyennant quelques précautions. En effet, tant qu'on n'opère que sur un nombre **fini** de fonctions définies dans $D$ au voisinage de $a$, on peut toujours trouver un ensemble de définition commun de la forme $V \cap D$ (où $V$ est un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$).

De façon précise, soit $\varphi \in \mathcal{F}_D(a, K)$, $f \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$, $g \in \mathcal{F}_D(a, K^N)$. On a :

**Proposition VI.1.1**

*Avec les notations ci-dessus la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ (resp $x \mapsto \varphi(x) f(x)$) est définie dans $D$ au voisinage de $a$, et son germe au point $a$ ne dépend que des germes en $a$ de $f$ et $g$ (resp. de $\varphi$ et $f$).*

Dans ces conditions, nous noterons $f+g$ (resp. $\varphi f$) l'une quelconque des fonctions $x \mapsto f(x)+g(x)$ (resp. $x \mapsto \varphi(x) f(x)$) définies dans la proposition VI.1.1, et nous dirons d'une telle fonction que c'est la *somme de* $f$ *et* $g$ (*resp. le produit de* $\varphi$ *par* $f$) *au voisinage de* $a$.

Remarquons que si $\lambda \in K$ et $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$, le produit de $f$ par le scalaire $\lambda$ se définit naturellement sans avoir besoin de la notion de germe.

Si $\varphi$ et $\psi$ sont éléments de $\mathscr{F}_D(a, K)$, et $f, g, h$ éléments de $\mathscr{F}_D(a, K^N)$, il est facile de vérifier les propriétés suivantes *au voisinage de a :*

$$f+g=g+f\,;\quad (f+g)+h=f+(g+h)\,;\quad (\varphi+\psi)f=\varphi f+\psi f\,;$$
$$\varphi(f+g)=\varphi f+\varphi g\,.$$

A partir de là, en considérant, au lieu de *fonctions* éléments d'ensembles du type $\mathscr{F}_D(a, K^N)$, *des germes en a* de telles fonctions, on retrouve les structures algébriques de $K$-ev et d'algèbre attachées ordinairement aux ensembles de fonctions (cf. exercices 1 et 2). Mais nous ne développerons pas ce point de vue pour ne pas alourdir l'exposé.

Etudions, pour finir, la *composition des fonctions :*

Soit $\Delta$ et $D$ deux parties infinies de $\mathbb{R}$, $\alpha$ un point d'accumulation de $\Delta$ dans $\mathbb{R}$, $a$ un point d'accumulation de $D$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, et $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une fonction vérifiant la condition fondamentale :

(2) $\varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$, dont on remarquera qu'elle est *locale pour* $\varphi$ *en* $\alpha$.

**PROPOSITION VI.1.2**

> *Avec les hypothèses et notations qui précèdent, soit* $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$. *Alors la fonction* $t \mapsto f\circ\varphi(t)$ *est définie au voisinage de* $\alpha$ *dans* $\Delta$, *et le germe de cette fonction en* $\alpha$ *ne dépend que du germe de* $\varphi$ *en* $\alpha$ *et du germe de* $f$ *en* $a$.

*Démonstration* (abrégée) :

Soit $V$ un voisinage de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $f$ soit définie sur $V \cap D$. La condition (2) permet de trouver un voisinage $W$ de $\alpha$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que $\varphi(W\cap\Delta) \subset V \cap D$, et alors la fonction $W\cap\Delta \longrightarrow K^N$, $t \mapsto f(\varphi(t))$ est bien définie. Les autres assertions sont évidentes. ■

Dans les conditions de la proposition VI.1.2 on peut donc parler sans ambiguïté de *la fonction* $f\circ\varphi$ *au voisinage de* $a$. En particulier, si $\Delta \subset D$, $\alpha = a$ et $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ injection canonique, $f\circ\varphi$ est *la restriction de* $f$ *à* $\Delta$ au voisinage de $a$.

Notons enfin, sous les hypothèses précédant la proposition VI.1.2, que $\forall f \in \mathscr{F}_D(a, K^K)$, $\forall g \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$, $\forall \mu \in \mathscr{F}_D(a, K)$, on a, *au voisinage de a :*

$$(\mu\circ\varphi)(f\circ\varphi)=(\mu f)\circ\varphi \quad \text{et aussi} \quad (f+g)\circ\varphi = f\circ\varphi$$

***Exercice 1 :*** Soit $D$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de $D$.

*a*) On donne $N \in \mathbb{N}^*$, et on désigne par $G_D(a, K^N)$ l'ensemble quotient $\mathscr{F}_D(a, K^N)/_{\mathscr{R}}$ (ensemble des germes en $a$ de fonctions de $D$ dans $K^N$). Montrer qu'on peut définir des lois sur $G_D(a, K^N)$ ainsi :

Si $u \in G_D(a, K^N)$ et $v \in G_D(a, K^N)$, $u + v =$ germe de l'une quelconque des $f + g$ avec $f \in u$, $g \in v$ ;

Si $\lambda \in K$ et $u \in G_D(a, K^N)$, $\lambda u =$ germe de l'une quelconque des $\lambda f$ ($f \in u$). Vérifier que ces lois définissent sur $G_D(a, K^N)$ une structure de $K$-ev.

*b*) Montrer qu'on peut définir en outre un *produit* sur $G_D(a, K)$ par : si $u \in G_D(a, K)$ et $v \in G_D(a, K)$, on pose : $uv =$ germe de l'une quelconque des $fg$ avec $f \in u$, $g \in v$.

Montrer qu'alors $G_D(a, K)$ devient une $K$-algèbre. Cette $K$-algèbre est-elle intègre ?

***Exercice 2 :*** On reprend les notations de l'exercice précédent.

*a*) Montrer que l'ensemble $GC_D(a, K)$ des germes en $a$ de fonctions de $D$ dans $K$ ayant en $a$ une limite est une sous-$K$-algèbre de $G_D(a, K)$. Quels sont les éléments inversibles de $GC_D(a, K)$ ? En déduire que l'ensemble $\mathfrak{M}_D(a, K)$ des éléments non inversibles de $GC_D(a, K)$ est l'unique *idéal maximal* de $GC_D(a, K)$.

Quel est le corps $GC_D(a, K)/_{\mathfrak{M}_D}(a, K)$ ?

*b*) A chaque polynôme $F \in K[X]$ on associe le germe en $a$ $\gamma_a(F)$ de la fonction polynomiale $F|_D$ ; on suppose $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\gamma_a$ est un homomorphisme *injectif* de $K$-algèbres de $K[X]$ dans $GC_D(a, K)$.

*c*) On suppose toujours $a \in \mathbb{R}$. A chaque fonction *continue* $f : \mathbb{R} \longrightarrow K$ on associe le germe en $a$ (noté $\Psi_a(f)$) de la fonction $f|_D$. Montrer que $\Psi_a : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, K) \longrightarrow GC_D(a, K)$ est un homomorphisme de $K$-algèbres et donner une C.N.S. portant sur $D$ pour que Ker ($\Psi_a$) soit l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, K)$ de germe nul en $a$.

***Exercice 3 :*** On reprend les notations de l'exercice 2 et l'on suppose $a = 0$ et $0 \notin D$. Montrer qu'à toute fraction rationnelle $\Phi \in K(X)$ on peut associer le germe $\Gamma_0(\Phi)$ au point 0 de la fonction rationnelle définie par $\Phi$ sur $D \setminus \{$pôles de $\Phi\}$. Prouver alors que $\Phi \mapsto \Gamma_0(\Phi)$ est un isomorphisme de $K$-algèbres de $K(X)$ sur une sous-algèbre de $G_D(a, K)$ qu'on notera $R_D(a, K)$. Trouver l'intersection $R_D(a, K) \cap GC_D(a, K)$.

## § VI.2 *COMPARAISON DES FONCTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT ; NOTATIONS DE LANDAU*

Dans ce qui suit, $D$ désigne toujours une partie infinie de $\mathbb{R}$, et $a$ un point d'accumulation de $D$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ ($a \in \bar{\mathbb{R}}$).

### Définition VI.2.1

*Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $N' \in \mathbb{N}^*$, et $f$ et $g$ des fonctions définies au voisinage de $a$ dans $D$, à valeurs respectivement dans $K^N$ et $K^{N'}$. Notons $\nu$ et $\nu'$ les normes standard $\nu_\infty$ dans $K^N$ et dans $K^{N'}$.*

a) *On dit que* ***f est dominée par g au voisinage de a*** (*ou que* ***f est au plus de l'ordre de g au voisinage de a***) *ssi il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et un voisinage $V$ de $a$, de définition pour $f$ et $g$, tels que :*

(1) $$(\forall x \in D \cap V) \quad \nu(f(x)) \leqslant M\nu'(g(x)).$$

*On écrit alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{\preccurlyeq} g(x), \quad ou \quad f \underset{a}{\preccurlyeq} g\,.$$

b) *On dit que* **f est négligeable devant g au voisinage de a** *(ou que* **f est infiniment petite devant g au voisinage de a***) ssi : pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f$ et $g$ soient définies sur $D \cap V$ et vérifient*

$$(2) \qquad (\forall x \in D \cap V) \quad \nu(f(x)) \leqslant \varepsilon \nu'(g(x))\,.$$

*On écrit alors* $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$, *ou* $f \underset{a}{\ll} g$.

A cause des inégalités entre normes standard, on voit qu'on obtient une définition équivalente en prenant pour $\nu$ et $\nu'$ des normes standard *quelconques* sur $K^N$ et $K^{N'}$.

En prenant $D = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on retrouve les définitions analogues déjà données pour des suites (cf. § II.4).

Il est clair que chacune des relations $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ et $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ est **locale** au point $a$ : pour qu'elle soit vraie avec $f$ et $g$, il faut et il suffit qu'elle le soit avec $f_1$ et $g_1$, où $f_1$ et $f$ (resp. $g_1$ et $g$) sont *égales au voisinage de a*.

Pour $N = N' = 1$, les inégalités (1) et (2) prennent la forme :

$$|f(x)| \leqslant M|g(x)| \quad \text{et} \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|\,.$$

**Notations de Landau**

Dans la définition VI.2.1, fixons $N$, $N'$ et $g$. L'ensemble des $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ qui sont au plus de l'ordre de $g$ (resp. infiniment petites devant $g$) au voisinage de $a$ est désigné par $O_a(g)$ (resp. $o_a(g)$), ou plus brièvement si aucune confusion n'est possible par $O(g)$ (resp. $o(g)$).

Grâce à cette notation (due à Landau), la relation $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ s'écrit : $f \in O_a(g)$, ou $f \underset{a}{\in} O(g)$, ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\in} O(g(x))$. De même, la relation $f \underset{a}{\ll} g$ s'écrit :

$$f \in o_a(g)\,, \quad \text{ou} \quad f \underset{a}{\in} o\,(g), \quad \text{ou encore} \quad f(x) \underset{x \to a}{\in} o\,(g(x)).$$

Bien que l'ensemble $O_a(g)$ dépende de $N$, l'écriture $f \in O_a(g)$ ne laisse aucun doute sur l'ensemble dont il s'agit car on sait bien quel est l'espace des valeurs pour $f$.

On rencontre fréquemment l'abus d'écriture consistant à remplacer le signe = dans $f \in O_a(g)$. Même si c'est parfois commode nous recommandons d'éviter cet abus car il est bien évident qu'il ne s'agit pas d'une égalité au sens habituel et cela risque d'entraîner des erreurs.

**Opérations élémentaires concernant *o* et *O***

Les assertions ci-après se vérifient toutes sans aucune difficulté à partir de la définition VI.2.1.

($L_1$) Si $g \in \mathscr{F}_D(a, K^{N'})$ est fixée, ainsi que $N$, on a : $o_a(g) \subset O_a(g)$.

($L_2$) Fixons $g \in \mathscr{F}_D(a, K^{N'})$. Pour $f_1$ et $f_2$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$:

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(g)$ et $f_2 \underset{a}{\in} O(g)$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\in} O(g)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} o(g)$ et $f_2 \underset{a}{\in} o(g)$, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \underset{a}{\in} o(g)$.

($L_3$) Pour $f, g, h$ à valeurs respectivement dans $K^N$, $K^{N'}$, $K^{N''}$ et définies au voisinage de $a$ dans $D$ :

Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$, alors $f \underset{a}{\in} O(h)$.

Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} o(h)$, alors $f \underset{a}{\in} o(h)$.

Si $f \underset{a}{\in} o(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$, alors $f \underset{a}{\in} o(h)$.

($L_4$) Soit $f$ et $g$ à valeurs dans $K^N$ et $K^{N'}$, définies dans $D$ au voisinage de $a$. Supposons que $g$ ne s'annule jamais au voisinage de $a$, et soit $\nu'$ une norme standard de $K^{N'}$ (de sorte que $\dfrac{1}{\nu'(g)}$ est définie au voisinage de $a$ dans $D$). On a :

$$f \underset{a}{\in} O(g) \quad \text{ssi} \quad \frac{1}{\nu'(g)} f \text{ est } \textbf{bornée au voisinage de a .}$$

et
$$f \underset{a}{\in} o(g) \quad \text{ssi} \quad \frac{1}{\nu'(g(x))} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \, .$$

En particulier, pour $N' = 1$, ces relations signifient respectivement que $\dfrac{f(x)}{|g(x)|}$ est bornée au voisinage de $a$ et que $\dfrac{f(x)}{|g(x)|} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

En notant 1 toute fonction constante égale à 1, on écrit :

$f \underset{a}{\in} O(1)$ ssi $f$ est bornée au voisinage de $a$ ; $f \underset{a}{\in} o(1)$ ssi $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

($L_5$) Soit $f_i \in \mathscr{F}_D(a, K)$ et $g_i \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ avec $i \in \{1, 2\}$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_2 \underset{a}{\in} O(g_2)$, alors $f_1 g_2 \underset{a}{\in} O(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} o(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} O(g_2)$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} o(g_2)$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$ (pour vérifier ces assertions ($L_5$) on notera le rôle essentiel de l'égalité $\nu(f(x)\,g(x)) = |f(x)|\,\nu(g(x))$.

($L_6$) (*Composition à droite*). Soit $\Delta$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de $\Delta$ et $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ telle que $\varphi(t) \underset{t \longrightarrow \alpha}{\longrightarrow} a$.

Si $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$, et $g \in \mathscr{F}_D(a, K^{N'})$, alors

$$\left(f \underset{a}{\in} O(g)\right) \Rightarrow \left(f \circ \varphi \underset{\alpha}{\in} O(g \circ \varphi)\right) ;$$

et
$$\left(f \underset{a}{\in} o(g)\right) \Rightarrow \left(f \circ \varphi \underset{\alpha}{\in} o(g \circ \varphi)\right) .$$

En particulier, si $\Delta \subset D$, $\alpha = a$ et $\varphi(t) = t$ pour tout $t \in \Delta$, alors $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont les restrictions à $\Delta$ de $f$ et $g$ au voisinage de $\alpha$.

***Exemple 1 :*** L'étude au voisinage de $+\infty$ des fonctions exp, Log et $x \mapsto x^\alpha$ (cf. § IV.2) nous donne :

$$\text{si } \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha \underset{x \longrightarrow +\infty}{\in} o(e^x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} x \underset{x \longrightarrow +\infty}{\in} o(x^\alpha),$$

d'où en utilisant ($L_6$), avec $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$ :

$$\frac{1}{t^\alpha} \underset{\substack{> \\ t \longrightarrow 0}}{\in} o\left(\exp\left(\frac{1}{t}\right)\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} t \underset{\substack{> \\ t \longrightarrow 0}}{\in} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

***Exemple 2 :*** Si $f \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$, si $g(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} +\infty$ et si $f \underset{a}{\in} o(g)$, alors $\exp(f(x)) \underset{x \longrightarrow a}{\in} o(\exp(g(x)))$. En effet, pour $x$ tel que $g(x) > 0$,

$$\frac{\exp(f(x))}{\exp(g(x))} = \exp(f(x) - g(x)) = \exp\left[g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)\right] \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$$

puisque
$$g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty .$$

***Exemple 3 :*** Supposons $f$ et $g$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, définies au voisinage de $a$ dans $D$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$f \underset{a}{\in} O(g) \Leftrightarrow f^\alpha \underset{a}{\in} O(g^\alpha) \quad \text{et} \quad f \underset{a}{\in} o(g) \Leftrightarrow f^\alpha \underset{a}{\in} o(g^\alpha)$$

Si $\alpha < 0$, on voit de même :

$$f \underset{a}{\in} O(g) \Leftrightarrow g^{\alpha} \underset{a}{\in} O(f^{\alpha}) \quad \text{et} \quad f \underset{a}{\in} o(g) \Leftrightarrow g^{\alpha} \underset{a}{\in} o(f^{\alpha}).$$

**Fonctions équivalentes**

**DÉFINITION VI.2.2**

*Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $f$ et $g$ dans $\mathcal{F}_D(a, K^N)$. On dit que* ***f est équivalente à g au voisinage de a*** *ssi :*

$$f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\in} o(g(x)).$$

*On écrit alors : $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, ou : $f \underset{a}{\sim} g$.*

Dans le cas particulier où $D = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on reconnaît *l'équivalence des suites* déjà définie et étudiée au § II.4.

La relation $f \underset{a}{\sim} g$ traduit une **propriété locale** du couple $(f, g)$ au point $a$.

Cette définition paraît dissymétrique en $f$ et $g$, mais il n'en est rien, car :

**THÉORÈME VI.2.1**

*Sur l'ensemble $\mathcal{F}_D(a, K^N)$, la relation $f \underset{a}{\sim} g$ est une* ***relation d'équivalence.***

*Démonstration :*

La réflexivité de la relation est évidente. Montrons sa *symétrie* : supposant $f \underset{a}{\sim} g$, soit $V$ un voisinage de $a$, de définition pour $f$ et $g$, tel que (en notant $\nu$ une norme standard de $K^N$) :

$$(\forall t \in D \cap V) \quad \nu(f(t) - g(t)) \leqslant \frac{1}{2}\, \nu(g(t)).$$

On en déduit, pour ces valeurs de $t$ :

$$\nu(g(t)) \leqslant \frac{1}{2}\, \nu(g(t)) + \nu(f(t)) \quad \text{d'où} \quad \nu(g(t)) \leqslant 2\, \nu(f(t)).$$

Il s'ensuit que $g \underset{a}{\in} O(f)$. Mais $f - g \underset{a}{\in} o(g)$, d'où en utilisant $(\mathrm{L}_3)$ : $f - g \underset{a}{\in} o(f)$ et donc finalement $g \underset{a}{\sim} f$.

Il reste à vérifier la *transitivité*. D'après ce qui précède, lorsque $f \underset{a}{\sim} g$, on a $O_a(f) = O_a(g)$, et donc (par $(\mathrm{L}_3)$) $o_a(f) = o_a(g)$

Soit alors $f$, $g$, $h$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$. Alors $f - g \underset{a}{\in} o(g)$ et $g - h \underset{a}{\in} o(g)$, d'où par addition $f - h \underset{a}{\in} o(g)$, donc $f - h \underset{a}{\in} o(h)$, c'est-à-dire $f \underset{a}{\sim} h$. ■

La terminologie de « fonctions équivalentes au voisinage de $a$ » pour $f \underset{a}{\sim} g$ est donc parfaitement justifiée. On dit encore que $f$ et $g$ sont **des équivalents au voisinage de $a$.**

**Opérations sur les fonctions équivalentes**

Les assertions qui vont suivre, bien qu'étant très faciles à établir (ce qui nous permettra de nous limiter à de brèves indications) sont d'une grande importance pratique.

($E_1$) Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $O_a(f) = O_a(g)$ et $o_a(f) = o_a(g)$ (égalités vraies dans $\mathscr{F}_D(a, K^{N_1})$, où $N_1$ est fixé).

($E_2$) Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$. Pour toute norme standard $\nu$ de $K^N$, si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $\nu(f) \underset{a}{\sim} \nu(g)$. En particulier lorsque $N = 1$, si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $|f(x)| \underset{x \to a}{\sim} |g(x)|$.

(C'est une conséquence du fait que, si $f$ et $g$ sont définies en $x \in D$, on a : $|\nu(f(x)) - \nu(g(x))| \leqslant \nu(f(x) - g(x))$).

($E_3$) Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors *au voisinage de $a$ les fonctions $f$ et $g$ s'annulent aux mêmes points*. En particulier $f \underset{a}{\sim} 0$ ne signifie rien d'autre que « $f$ est nulle dans $D$ au voisinage de $a$ » (en effet si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(f)$).

($E_4$) (*Composition à droite*). Soit $\Delta$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $\alpha$ un point d'accumulation de $\Delta$ dans $\mathbb{R}$, puis $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ telle que $\varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$.

Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, alors $f \circ \varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\sim} g \circ \varphi(t)$.

En particulier, si $\Delta \subset D$, $\alpha = a$ et $\varphi$ injection canonique de $\Delta$ dans $D$, $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont les restrictions au voisinage de $a$ de $f$ et $g$ dans $\Delta$.

($E_5$) Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K)$ ne s'annulant jamais au voisinage de $a$. Alors $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

En effet soit $V$ un voisinage de $a$, de définition pour $f$ e

$f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ si $x \in V \cap D$. On a : $f \underset{a}{\sim} g$ ssi, pout tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $U$ de $a$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ tel que :

$$(\forall x \in U \cap V \cap D) \quad |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| \,.$$

Cette inégalité équivaut à $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon$ ; autrement dit $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$ ssi $f \underset{a}{\sim} g$.

(E$_6$) Soit $f_1$ et $f_2$ dans $\mathscr{F}_D(a, K)$, et $g_1$ et $g_2$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$.
Si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2$.

En effet,

$$f_1 g_1 - f_2 g_2 = (f_1 - f_2) g_1 + f_2(g_1 - g_2) \underset{a}{\in} o(f_2 g_1) = o(f_2 g_2)$$

(à noter le rôle joué par (L$_5$), c'est-à-dire en dernier ressort par $\nu(\lambda \mu) = |\lambda| \, \nu(\mu)$). Cela signifie que *dans un produit* du type $fg$, où $f$ est à valeurs dans $K$ et $g$ à valeurs dans $K^N$, *on peut remplacer $f$ et $g$ par des équivalents pour trouver un équivalent du produit.*

Il est à noter que *pour la somme* de deux fonctions (à valeurs dans $K^N$), on n'a pas de propriété aussi simple, par exemple $1 \underset{0}{\sim} 1$ et $-\cos x \underset{0}{\sim} -1$ sont vrais, mais $1 - \cos x \underset{0}{\sim} 1 - 1$ est faux.

(E$_7$) Si $f \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ sont à valeurs $> 0$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (utiliser (E$_5$)).

(E$_8$) Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ à valeurs $> 0$. Si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ et si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $\mathrm{Log}\,(f(x)) \underset{a}{\sim} \mathrm{Log}\,(g(x))$. En effet

$$\frac{\mathrm{Log}\,(f(x))}{\mathrm{Log}\,(g(x))} - 1 = \frac{\mathrm{Log}\,(f(x)) - \mathrm{Log}\,(g(x))}{\mathrm{Log}\,(g(x))} \,.$$

Or $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$, donc le numérateur $\mathrm{Log}\,\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et le dénominateur $\mathrm{Log}\,(g(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

De même, si $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{Log}\,(f) \underset{a}{\sim} \mathrm{Log}\,(g)$, ce que l'on résume en disant : *si $f$ et $g$ sont deux fonctions $> 0$ infiniment petites (resp. infiniment grandes) équiv* *leurs logarithmes sont des équivalents*. Il est à noter qu'on n'a pas de propriété aussi simple si l'on exponentie $f$ et $g$, infiniment grands équivalents.

L'équivalence des fonctions constitue en particulier un outil puissant pour le calcul des limites, grâce au théorème suivant :

**THÉORÈME VI.2.2**

> *Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Pour que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe, et en cas d'existence, ces limites sont égales.*

*Démonstration :*

Soit $L \in K^N$ ; si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$, d'abord $f(x) \underset{x \to a}{\in} O(1)$. Puisque $g - f \underset{a}{\in} o(f)$, il s'ensuit (par ($L_3$)) $g - f \underset{a}{\in} o(1)$, d'où $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} L$. ■

**Principaux équivalents usuels**

Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K^N$ une fonction *dérivable* en un point $a \in I$. Par hypothèse $\dfrac{1}{x-a}(f(x) - f(a)) \underset{x \to a,\, x \neq a}{\longrightarrow} f'(a)$ d'où, si $f'(a) \neq 0$ :

$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} (x-a)\, f'(a)}\,.$$

En appliquant cette remarque au point $a = 0$ aux fonctions usuelles de variable *réelle* étudiées aux §§ V.2, V.3 et V.4, on obtient les équivalents usuels suivants

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{Pour } \alpha \in \mathbb{C}^*, \quad e^{\alpha x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \quad \sin \alpha x \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \\[2ex]
\operatorname{sh} \alpha x \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \quad \operatorname{tg} \alpha x \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \quad \operatorname{th} \alpha x \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x \\[2ex]
\operatorname{Log}(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \\[2ex]
\operatorname{Arg\,sh} x \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \operatorname{Arg\,th} x \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \operatorname{Arc\,sin} x \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \operatorname{Arc\,tg} x \underset{x \to 0}{\sim} x.
\end{array}}$$

A partir de $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$ et $\operatorname{ch} x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 \dfrac{x}{2}$, on en

$(E_6)$):

$$\boxed{1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}\,;\quad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}\,.$$

Si $\theta = \operatorname{Arc}\cos x$, de $\theta \underset{x\to 1, x<1}{\longrightarrow} 0$ et de $1-\cos\theta \underset{\theta\to 0}{\sim} \frac{\theta^2}{2}$, on déduit (puisque $\theta \in [0,\pi]$), que $\operatorname{Arc}\cos x \underset{x \xrightarrow{<} 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ ; et de même $\operatorname{Arg}\operatorname{ch} x \underset{x \xrightarrow{>} 1}{\sim} \sqrt{2(x-1)}$.

Notons enfin que si $A \in \mathbb{R}[X]$, $A = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \cdots + a_0$ (avec $a_m \neq 0$), alors $A(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_m t^m$ et aussi $A(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} a_m t^m$, d'où l'on déduit (conséquences de $(E_5)$ et $(E_6)$) qu'une *fonction rationnelle* $f$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) au rapport de ses termes de plus haut degré : $f(t) = \frac{A(t)}{B(t)} \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{a_m}{b_n} t^{m-n}$. Ces résultats élémentaires, combinés avec les règles $(L_1)$ à $(L_6)$ et $(E_1)$ à $(E_8)$ constituent la base d'un efficace *calcul sur les équivalents*. En combinant par exemple $e^{\alpha x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ (pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$) et la règle $(E_4)$, on obtient : pour toute fonction $u \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ *tendant vers* 0 *quand* $x$ *tend vers* $a$, et tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $e^{\alpha u(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha u(x)$.

***Exemple 4 :*** Soit à étudier $f(x) = \left(\frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\operatorname{Log} x}\right)^x - 1$ au voisinage de $+\infty$. On a :

$$\operatorname{Log}(1+f(x)) = x \operatorname{Log}\left[\frac{\operatorname{Log} x + \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x}\right] = x \operatorname{Log}(1+u(x))\,.$$

Mais $\qquad u(x) = \dfrac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{Log} x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x \operatorname{Log} x} \qquad$ (par $(E_6)$) ,

d'où $\qquad \operatorname{Log}(1+u(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\operatorname{Log} x} \qquad$ (par $(E_4)$) ,

et par suite (par $(E_6)$) :

$$\operatorname{Log}(1+f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\operatorname{Log} x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Il s'ensuit que

$$f(x) = e^{\operatorname{Log}(1+f(x))} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{Log}(1+f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{I}}$$

***Exemple 5 :*** Soit à étudier $f(x) = \left(\dfrac{\text{Arc tg }(1+x)}{\text{Arc tg }x}\right)^x - 1$ au voisinage de $+\infty$

$$\text{Log}\,\frac{\text{Arc tg }(1+x)}{\text{Arc tg }x} = \text{Log }(1+u(x)) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} u(x) =$$

$$= \frac{\text{Arc tg }(1+x) - \text{Arc tg }x}{\text{Arc tg }x} = \frac{\text{Arc tg }\dfrac{1}{1+x+x^2}}{\text{Arc tg }x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1/x^2}{\pi/2}$$

d'où $\quad v(x) = x\,\text{Log}\,\dfrac{\text{Arc tg }(1+x)}{\text{Arc tg }x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$

On termine en écrivant $f(x) = e^{v(x)} - 1 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} v(x) \sim \dfrac{2}{\pi x}$.

***Exemple 6 :*** *Constante d'Euler :* Pour $n$ entier $\geqslant 1$ posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \text{Log}\,n$ et étudions la suite $(u_n)$. On a $u_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$, $\quad u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \text{Log}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ ; et l'étude de la fonction $f : ]0, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \text{Log }(1-x)$ montre immédiatement que la suite $(u_n)$ est *décroissante.* Pour trouver un minorant, remarquons que $u_n > v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \text{Log }(n+1)$. Or $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \text{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) > 0$ (la fonction $x \mapsto \text{Log}\,x$ est concave). Donc $u_n > v_n > v_{n-1} > \cdots > v_1 = 1 - \text{Log}\,2$.

La suite décroissante $(u_n)$, minorée par $v_1$, est donc convergente, vers une limite que l'on notera $\gamma$ et qui est appelée la **constante d'Euler.** Comme $\text{Log}\,n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il résulte de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \text{Log}\,n$.

Pour être plus précis, on a :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \text{Log}\,n + \gamma + o(1)}\,.$$

Pour le lecteur qui est prêt à se précipiter sur sa calculette pour avoir une valeur précise de $\gamma$, conseillons un peu de patience, car la convergence de la suite $(u_n)$ est très lente (une légère amélioration consiste à utiliser la suite $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \text{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right)$) et indiquons les premières décimales : $\gamma = 0{,}577215664\ldots$ (Voir un calcul exercice 21 du § IX.1).

***Exercice 1 :*** Utiliser les équivalents pour calculer :

*a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/x+1})$  *b*) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \operatorname{ch} \sqrt[4]{x^4+1}$

*c*) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(\operatorname{Log}(1+x))^\alpha - (\operatorname{Log} x)^\alpha]$ $(\alpha > 0)$  *d*) $\lim\limits_{x \to c} (\operatorname{Log} x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2c}}$.

***Exercice 2 :*** Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K)$. Pour qu'on ait $f \in o(g)$ (resp. $f \underset{a}{\in} O(g)$), il faut et il suffit qu'il existe $u \in \mathscr{F}^a_D(a, K)$ telle que $f = ug$ et $u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (resp. $f = ug$ et $u$ est *bornée au voisinage de* 0).

***Exercice 3 :*** Soit $D$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, et $a \in \bar{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de $D$. On donne $u \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{C})$, de parties réelle et imaginaire $f$ et $g$ $(u = f + ig)$. On suppose que $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Démontrer que $e^{u(x)} - 1 \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, et aussi que $\sin u(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, $\operatorname{sh} u(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, $\operatorname{tg} u(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$, $\operatorname{th} u(x) \underset{x \to a}{\sim} u(x)$.

***Exercice 4 :*** Donner un équivalent simple des fonctions suivantes définies au voisinage de 0 soit dans $\mathbb{R}$, soit dans $\mathbb{R}^*$, soit dans $\mathbb{R}_+^*$ :

*a*) $x \mapsto (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$  *b*) $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \operatorname{Log} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x}{\cos x}}\right) - 1$

*c*) $x \mapsto (1 - \cos x)^{x^2} - x^{1-\cos x}$  *d*) $x \mapsto \left(\sin \frac{\pi x}{2x+1}\right)^{x^2}$

*e*) $x \mapsto \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ (où $0 < b < a$ et $x > 0$),

ou plus généralement $x \mapsto \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{1/x}$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}(x \cos^2 x + \sin^2 x)$.

Démontrer que $f$ est strictement croissante au voisinage de $+\infty$, et que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ; mais que $f \underset{x \to +\infty}{\notin} O(\sqrt{x}\, e^{x^2})$ et que $\sqrt{x}\, e^{x^2} \underset{x \to +\infty}{\notin} O(f)$.

***Exercice 6 :*** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, décroissante, telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(\forall n)$ $f_n \underset{+\infty}{\in} o(f)$.

***Exercice 7 :*** *a*) Soit $u$ une fonction : $I \longrightarrow \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}^*$ admettant 0 pour point d'accumulation. On suppose que $u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, et que pour des réels $\lambda \in ]0, 1[$, $A \neq 0$ et $\alpha > 0$, on a : $u(x) - u(\lambda x) \underset{x \to 0}{\sim} A x^\alpha$. Démontrer que $u(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{A}{1 - \lambda^\alpha} x^\alpha$.

*b*) En partant de $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et en multipliant par une fonction convenable, montrer en utilisant *a*) que $x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^3}{6}$.

*c*) Démontrer de la même manière que $\operatorname{sh} x - x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$ et en déduire $\operatorname{tg} x - x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$ et $x - \operatorname{th} x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

***Exercice 8 :*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

*a*) La fonction continue $x \mapsto x \operatorname{Log}^\alpha x$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$. Soit $\varphi_\alpha$ sa réciproque au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\varphi_\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{\operatorname{Log}^\alpha x}$.

*b*) De même, la fonction $x \mapsto x^\alpha \exp(x)$ admet une réciproque locale $\psi_\alpha$ définie au voisinage de $+\infty$. Montrer que : $\psi_\alpha(x) - \operatorname{Log} x \underset{x \to +\infty}{\sim} -\alpha \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$.

***Exercice 9 :*** *a*) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sin x = \dfrac{1}{x}$ admet une racine unique $x_n$ sur $\left[2n\pi, 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$ et une racine unique $\xi_n$ sur $\left[2n\pi + \dfrac{\pi}{2}, (2n+1)\pi\right]$. Montrer que $x_n - 2n\pi \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ et $(2n+1)\pi - \xi_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

*b*) Trouver un équivalent simple de $x_n - 2n\pi$ et de $(2n+1)\pi - \xi_n$ quand $n \longrightarrow \infty$.

***Exercice 10 :*** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $r_n$ le nombre des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + y^2 = n$. Montrer que $\dfrac{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}{n} - \pi \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

N.B. Les notions de *longueur d'un cercle* et *aire d'un disque* sont supposées connues.

***Exercice 11 :*** Soit $a$ un réel $>0$ et $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que : $(\forall n)\quad e^{-t_{n+1}} \leq a(t_{n+1} - t_n) \leq e^{-t_n}$.
Montrer d'abord que $t_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ensuite que $e^{t_n} \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{n}{a}$.

*Indication* : On pourra utiliser le *lemme de Cesaro.*

***Exercice 12 :*** Dans un plan affine euclidien, deux cercles de rayons fixés $R > 0$ et $R' > 0$ se coupent sous un ange $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (cela signifie qu'on peut en leurs points communs choisir des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ tangents à ces cercles tels que $(\vec{\tau} \mid \vec{\tau}') = \cos\theta$).

Trouver un équivalent simple de l'aire commune aux deux disques limités par ces cercles au voisinage de $\theta = 0$.

***Exercice 13 :*** *a*) Montrer que l'équation $\operatorname{cotg} x = \operatorname{Log} x$ possède, pour chaque entier $n \geq 0$, une unique racine $x_n$ dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ et que $x_n - n\pi \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*b*) Montrer que $x_n - n\pi \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\operatorname{Log} n}$.

***Exercice 14 :*** Soit $a$ un réel $>1$. Montrer par un raisonnement direct que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k \operatorname{Log} k \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{a^{n+1} \operatorname{Log} n}{a-1}$.

***Exercice 15 :*** Soit $\alpha \in ]0, 1[$.

*a*) Montrer, *sans utiliser d'intégrales,* que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k^\alpha} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha} e^{n^\alpha}}{\alpha}$.

*b*) En utilisant l'intégrale montrer qu'on a une solution plus rapide.

## § VI.3 *FORMULES DE TAYLOR*

Ci-après, $K$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

**Polynôme de Taylor d'ordre $n$ en un point**

Considérons une fonction $f : I \longrightarrow K^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), où $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$, $n$ un entier $\geqslant 1$ et supposons que $f$ admette au point $a$ une dérivée $n$-ième (cela suppose l'existence des dérivées $k$-ièmes de $f$ au voisinage de $a$ pour $k \leqslant n - 1$).

Nous appellerons alors **polynôme de Taylor** [1] **d'ordre $n$ en $a$** de $f$ la fonction polynomiale, à coefficients dans $\mathbb{R}_n^N$, notée $T_{n,f,a}$ définie par :

$$I \longrightarrow \mathbb{R}^N , \quad x \mapsto T_{n,f,a}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) .$$

Par convention $T_{0,f,a}$ est la fonction constante de valeur $f(a)$ sur $I$. La fonction $T_{n,f,a}$ est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, et l'on a : $T_{n,f,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ si $k \leqslant n$ et $T_{n,f,a}^{(k)}(a) = 0$ si $k > n$. C'est la seule fonction polynomiale de degré $\leqslant n$ (à coefficients dans $\mathbb{R}^N$) vérifiant ces conditions.

Lorsque $n \geqslant 1$, les hypothèses faites sur $f$ entraînent que $f'$ admet en $a$ une dérivée $(n-1)$-ième, et l'on constate que, pour tout $x \in I$ :

$$\text{(1)} \qquad \boxed{T_{n-1,f',a}(x) = T'_{n,f,a}(x)} .$$

Le polynôme de Taylor d'ordre $n$ en $a$ de $f$ étant destiné à fournir une approximation de $f$, nous appellerons la fonction $R_{n,f,a} : I \longrightarrow K^N$, $x \mapsto f(x) - T_{n,f,a}(x)$ **reste d'ordre $n$ de $f$ au point a.** Nous allons donner ci-dessous plusieurs expressions de $R_{n,f,a}$ dépendant de l'usage qu'on veut en faire (expression valable sur tout un intervalle de longueur finie, ou seulement au voisinage de $a$) en laissant pour le chapitre VII l'expression de $R_{n,f,a}$ sous forme d'intégrale.

**THÉORÈME VI.3.1** (formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions numériques).

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ et $n+1$ fois dérivable sur* Int $(I)$. *Pour tous $a$ et $b$ dans $I$, il existe $c$ strictement compris entre $a$ et $b$ tel que :* $R_{n,f,a} = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$, *soit :*

$$\text{(2)} \qquad \boxed{f(b) = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)} .$$

[1] Brook *Taylor,* mathématicien anglais (1685-1731) qui a développé ... différences finies de Newton et de Gregory.

*Démonstration :*

Si $a = b$, l'égalité (2) est évidente.

Si $b < a$, on remplace la fonction $f$ par $f_1 : x \mapsto f(-x)$ qui vérifie les mêmes hypothèses que $f$ sur le symétrique $I_1$ de $I$ par rapport à l'origine, et pour laquelle on a :

$$\frac{1}{k!}\left((-b)-(-a)\right)^k f_1^{(k)}(-a) = \frac{1}{k!}(b-a)^k f^{(k)}(a) \quad \text{pour tout} \quad k \leqslant n\,.$$

Il suffit donc de prouver le théorème avec $a < b$. Pour cela, considérons la fonction auxiliaire $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A\,,$$

où la constante $A$ est choisie pour que $\varphi(a) = 0$ $(= \varphi(b))$, de sorte que $\varphi$ vérifie sur $[a, b]$ toutes les conditions du théorème de Rolle, ce qui permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \,]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or le calcul de $\varphi'$ donne comme résultat :

$$\varphi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!} A\,,$$

les autres termes s'étant réduits deux à deux, et comme $c \neq b$, il vient $A = f^{(n+1)}(c)$. En portant dans $\varphi(a) = 0$ on obtient exactement la formule (2). ■

Le reste $R_{n, f, a}$ ainsi obtenu est appelé le **reste de Lagrange.** En posant $b = a + h$, la formule (2) devient :

$$(2') \qquad f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

où $\theta$ désigne un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$.

Lorsque $a = 0$ et $b = x$, on retient la formule (2) sous sa nouvelle forme connue sous le nom de **formule de Mac-Laurin** ([1]) qui s'écrit :

$$(3) \qquad \boxed{f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)}$$

avec $0 < \theta < 1$, la formule étant valable pour tout $x \in I$ lorsque $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ et $n+1$ fois dérivable dans Int $(I)$, avec $0 \in I$.

***Remarque 1 :*** Le réel $c$ figurant dans la formule (2) (resp. $\theta$ figurant dans (2′) ou dans (3)) n'est en général pas unique. De plus l'ensemble des valeurs $c$ vérifiant (2) (resp. $\theta$ vérifiant (2′)) dépend non seulement de $f$ mais également de $a$ et $b$ (cf. exercice 11).

([1]) Colin *Mac-Laurin,* mathématicien écossais (1698-1746).

***Remarque 2 :*** On n'était pas obligé de prendre le dernier terme de $\varphi(x)$ sous la forme $-\dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$. On aurait pu choisir la fonction auxiliaire $\psi$ :

$$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{p+1}}{n!(p+1)} A\,,$$

où $p$ est un entier naturel que l'on choisit à sa guise et où $A$ est choisie pour que $\psi(a) = 0$. On a alors :

$$\psi'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(b-x)^p}{n!} A$$

et l'application du théorème de Rolle donne $A = (b-c)^{n-p} f^{(n+1)}(c)$. Bien sûr, pour $p = n$, on retrouve le reste de Lagrange ; mais pour $p = 0$ on obtient le reste de Cauchy $R_{n,f,a} = \dfrac{(b-a)(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$ (avec un $c$ différent de celui de Lagrange). Les autres valeurs de $p$ ne sont guère utilisées.

***Remarque 3 :*** Si $f$ est une fonction polynomiale on retrouve évidemment les formules de Mac-Laurin et de Taylor étudiées en Algèbre. En particulier si le polynôme associé à $f$ a un degré $\leq n$, le reste de Lagrange est identiquement nul.

Comme en général on n'a pas de renseignement précis sur l'emplacement de $c$, la formule (2) ne présente un intérêt majeur que si l'on connaît le comportement global de $f^{(n+1)}$ sur $I$ (penser par exemple à des fonctions $f$ telles que $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = e^x$). De manière précise :

**COROLLAIRE**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ et $n+1$ fois dérivable dans* Int $(I)$. *Supposons $f^{(n+1)}$* **bornée sur I.** *Alors, pour tous $a$ et $b$ dans $I$ :*

$$(4) \quad |f(b) - T_{n,f,a}(b)| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in \mathrm{Int}\,(I)} |f^{(n+1)}(x)|\,.$$

Sous cette forme affaiblie, on peut étendre le théorème de Taylor aux fonctions vectorielles (à valeurs dans $K^N$, avec $N \geq 1$).

**THÉORÈME VI.3.2** (inégalité de Taylor-Lagrange)

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K^N$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ et $n+1$ fois dérivable dans* Int $(I)$. *Supposons la dérivée $f^{(n+1)}$ bornée sur $I$. Alors, pour tous $a$ et $b$ dans $I$ et pour toute norme standard $\nu$ sur $K^N$, on a :*

$$(5) \quad \nu[f(b) - T_{n,f,a}(b)] \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x \in \mathrm{Int}\,(I)} \nu(f^{(n+1)}(x))\,.$$

*Démonstration :*

Fixons $a$ et $b$. Soit

$$g : I \longrightarrow K^N\,, \quad x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\,;$$

$g$ est continue sur $I$, dérivable dans Int $(I)$ et l'on vérifie que :

$$(\forall x \in \operatorname{Int}(I)) \quad g'(x) = -\frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,,$$

d'où :

$$\nu(g'(x)) \leqslant M_{n+1} \frac{|b-x|^n}{n!} \quad \text{avec} \quad M_{n+1} = \sup_{x \in \operatorname{Int}(I)} \nu(f^{(n+1)}(x))\,.$$

Mais le membre de droite est la dérivée de la fonction $h : I \longrightarrow K^N$, $x \mapsto M_{n+1} \dfrac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$ si $x \geqslant b$, $x \mapsto -\dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$ si $x \leqslant b$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.

Le théorème des accroissements finis V.1.5 et son corollaire 4 s'appliquent donc à $g$ et $h$ entre $a$ et $b$, d'où :

$$\nu(g(b)-g(a)) \leqslant |h(b)-h(a)| = M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

soit $$\nu\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) \leqslant M_{n+1} \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,. \quad \blacksquare$$

***Remarque 4 :*** En fait, le théorème VI.3.2 n'est, tout comme le théorème V.1.5 et ses corollaires, qu'un cas particulier d'un théorème général s'appliquant aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé.

Les formules (2), (4) et (5) fournissent une *estimation globale* du reste d'ordre $n$ en un point. Par exemple, elles mettent bien en évidence le fait que *$f$ est polynomiale de degré $\leqslant n$ sur $I$ ssi sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle sur $I$.*

***Exemple 1 :*** Soit $f$ une fonction numérique deux fois dérivable sur un intervalle non trivial $I$ et *supposons $f$ convexe* (c'est-à-dire $(\forall x \in I)$ $f''(x) \geqslant 0$ comme on l'a vu au § V.6).

Pour $a$ et $x$ dans $I$, écrivons la formule de Taylor-Lagrange :
$(\exists c$ entre $a$ et $x \mid f(x) - f(a) - (x-a) f'(a) = \dfrac{1}{2} (x-a)^2 f''(c))$.

Il vient : $f(x) \geqslant f(a) + (x-a) f'(a)$ et l'on retrouve ainsi le fait que le graphe $\Gamma_f$ de $f$ est au-dessus de toute tangente à ce graphe.

***Exemple 2 :*** Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ et $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ stable par addition, par exemple $[0, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$ tout entier.

Soit $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions numériques $n$ fois dérivables sur $I$. Donnons-nous deux réels $M_0$ et $M_n$ et soit $\mathscr{F}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ formé des $f \in \mathscr{E}$ telles que $|f(x)| \leqslant M_0$ et $|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n$ pour tout $x \in I$. Montrons qu'il existe des réels $M_1, \ldots, M_{n-1} \geqslant 0$ tels que :

$$(\forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in I) \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant M_k \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

En effet, soit $a_1, \ldots, a_{n-1}$ des réels distincts dans $I$. Posons, pour $x \in I$, $U_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_i^k}{k!} f^{(k)}(x)$ et appliquons la formule de Taylor-Lagrange (4) avec $a = x$ et $b = x + a_i$ à l'ordre $n - 1$ :

$$|f(x + a_i) - f(x) - U_i(x)| \leqslant \frac{|a_i|^n}{n!} M_n ,$$

d'où

$$(\forall x \in I) \quad |U_i(x)| \leqslant |f(x + a_i) - f(x)| + \frac{|a_i|^n}{n!} M_n \leqslant 2\, M_0 + \frac{|a_i|^n}{n!} M_n .$$

Mais la matrice $V = \left[\frac{a_i^k}{k!}\right]_{\left\{\substack{i \in [\![1, n-1]\!] \\ k \in [\![1, n-1]\!]}\right.}$ étant inversible dans $\mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ (on reconnaît qu'à un facteur près non nul, det $(V)$ est le Vandermonde des $a_i$), soit $W = [b_{kl}]_{\left\{\substack{k \in [\![1, n-1]\!] \\ l \in [\![1, n-1]\!]}\right.}$ son inverse. On a alors :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n-1} b_{kj}\, U_j(x) ,$$

d'où, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ :

$$(\forall x \in I) \quad |f^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} |b_{kj}| \left(2\, M_0 + \frac{|a_j|^n}{n!} M_n\right) = M_k .$$

**Formule de Taylor-Young** ([1])

**THÉORÈME VI.3.3**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K^N$ $(N \geqslant 1)$ une fonction $n$ fois dérivable sur $I$ et admettant en un point $a \in I$ une dérivée n-ième $(n \geqslant 0)$. Alors :*

$$(6) \qquad \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0 .$$

*Démonstration :*

En prenant les composantes de $f$ dans le $\mathbb{R}$-ev $(K^N)_{(\mathbb{R})}$, on se ramène au cas où $f$ est numérique ([2]), ce que nous supposerons désormais. Pour $n = 0$, (6) exprime la continuité de $f$ au point $a$ ; pour $n = 1$ on reconnaît la définition même de l'existence de la dérivée

---

([1]) William Henry *Young*, mathématicien anglais (1863-1942).

([2]) On pourrait aussi utiliser une norme standard de $K^N$ et faire une démonstration analogue à celle du théorème VI.3.2, mais nous avons tenu à mieux souligner ainsi la différence de nature de ces deux théorèmes.

$f'(a)$. Procédons alors par récurrence sur $n$, en supposant $n \geqslant 2$ et le théorème vrai à l'ordre $n-1$. Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f'(x) - T_{n-1, f', a}(x) = f'(x) - T'_{n, f, a}(x) .$$

Comme $f'$ est $(n-1)$ fois dérivable sur $I$ et admet en $a$ une dérivée $n$-ième, l'hypothèse de récurrence signifie que, pour $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha$ tel que

$$\forall x \in I \cap\ ]a-\alpha, a+\alpha[ \quad |g(x)| \leqslant n\varepsilon |x-a|^{n-1} .$$

Soit alors $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varepsilon(x-a)^n$ si $x \geqslant a$, $x \mapsto -\varepsilon(a-x)^n$ si $x \leqslant a$ ; $h$ est dérivable sur $I$ et $h'(x) = n\varepsilon|x-a|^{n-1}$. On a donc :

$$\forall x \in I \cap\ ]a-\alpha, a+\alpha[ \quad |g(x)| \leqslant h'(x) .$$

Fixons alors $x \in I \cap\ ]a-\alpha, a+\alpha[$. Pour tout réel $t$ entre $a$ et $x$, on a $|g(t)| \leqslant h'(t)$. Appliquons alors le théorème des accroissements finis sous la forme V.1.3 à $f - T_{n,f,a}$ et à $h$, entre $a$ et $x$. On obtient :

$$|f(x) - T_{n,f,a}(x)| \leqslant |h(x)| = \varepsilon |x-a|^n$$

et cela, $\forall x \in I \cap\ ]a-\alpha, a+\alpha[$, ce qui démontre le théorème à l'ordre $n$. ■

***Remarque 5 :*** Il est évident qu'on pourrait tirer (6) comme conséquence de l'inégalité (5), après division par $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, mais pour établir (5) on a supposé l'existence d'une dérivée $(n+1)$-ième bornée sur $I$, tandis que pour (6) les hypothèses sont réduites au minimum : tout juste l'existence de la dérivée $n$-ième *au point a*.

Avec les notations de Landau, la relation (6) s'écrit :

(7) $$\boxed{f(x) - T_{n,f,a}(x) \underset{x \longrightarrow a}{\in} o((x-a)^n)}$$

tandis que la relation (5) prend la forme (si $f^{(n+1)}$ est bornée au voisinage de $a$)

$$f(x) - T_{n,f,a}(x) \underset{x \longrightarrow a}{\in} O((x-a)^{n+1})$$

qui est un peu plus précise, car l'inclusion $O((x-a)^{n+1} \subset o((x-a)^n))$ est stricte.

**Division des fonctions**

A propos des notations de Landau, remarquons que si $D$ est une partie de $\mathbb{R}$ admettant 0 pour point d'accumulation et $N$ un entie

$f \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$, l'appartenance de $f$ à $O(x^n)$ (resp. $o(x^n)$) entraîne celle de $\dfrac{f}{x^p}$ (si $0 \notin D$ et si $p$ est un entier $\leqslant n$) à $O(x^{n-p})$ (resp. $o(x^{n-p})$).

En particulier sur l'ensemble des fonctions $\{x \mapsto x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, considérées comme éléments de $\mathscr{F}_D(0, \mathbb{R})$, la relation « $f = g$ ou $f \underset{0}{\in} o(g)$ » est une *relation d'ordre total* que nous écrirons $\mathscr{L}$, et l'on a : $x^n \mathscr{L} x^p$ ssi $n \leqslant p$. On dit que ces fonctions forment une *échelle de comparaison* dans $\mathscr{F}_D(0, \mathbb{R})$, idée que nous approfondirons plus loin. Voici d'abord une importante application du théorème VI.3.3.

**Théorème VI.3.4** *(de division)*

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$, et $f : I \longrightarrow K^N$ $(N \geqslant 1)$ une fonction $n$ fois dérivable $(n \geqslant 0)$ sur $I$, admettant en $0$ une dérivée $(n+1)$-ième et telle que $f(0) = 0$. Alors la fonction $g : I \longrightarrow K^N$, $0 \mapsto f'(0)$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ est $n$ fois dérivable sur $I$, et l'on a :*

$$(\forall k \in [\![0, n]\!]) \quad g^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(0)\,.$$

*En outre, $g^{(n)}$ est continue en $0$.*

*Démonstration :*

La fonction $F : x \mapsto f(x) - T_{n+1, f, 0}(x)$ vérifie sur $I$ les mêmes hypothèses que $f$, et en plus $F^{(k)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Soit $G : 0 \mapsto 0$, $x \mapsto \dfrac{1}{x} F(x)$ si $x \neq 0$. Il est clair que $G$ est continue en $0$ et $n$ fois dérivable sur $I \setminus \{0\}$, la dérivée $k$-ième pouvant être calculée (pour $k \in [\![0, n]\!]$) par la formule de Leibniz :

$$G^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \frac{(k-j)!}{x^{k+1-j}} F^{(j)}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^k\, k!}{x^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} x^j F^{(j)}(x)\,.$$

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$, puis $j \in [\![0, k]\!]$. La fonction $F^{(j)}$ est $k-j$ fois dérivable sur $I$, admet une dérivée $(k-j+1)$-ième en $0$ et toutes ses dérivées en $0$ d'ordre $\leqslant k-j+1$ sont nulles. D'après le théorème de Taylor-Young, on a donc $F^{(j)}(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\in} o(x^{k-j+1})$, d'où $G^{(k)}(x) \underset{x \longrightarrow 0,\, x \neq 0}{\in} o(1)$, autrement dit $G^{(k)}(x) \underset{x \longrightarrow 0,\, x \neq 0}{\longrightarrow} 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Il s'ensuit (cf. théorème V.1.7) à l'aide d'une récurrence immédiate que $G$ est $n$ fois dérivable sur $I$ tout entier et que $G^{(k)}(0) = 0$ pour $k \leqslant n$. En outre, $G^{(n)}(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, donc

$G^{(n)}$ est continue en 0. Cela dit, on a :

$$(\forall x \in I) \quad g(x) = G(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0) ,$$

donc $g$ a les mêmes propriétés que $G$ sur $I$, et $g^{(k)}(0) = \dfrac{1}{(k+1)} f^{(k+1)}(0)$. ■

**Corollaire**

> *Avec les notations du théorème* VI.3.4, *si $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I$, $g$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$ ; si $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, il en est de même de $g$.*

**Extrema locaux d'une fonction numérique**

Soit $f : I \longrightarrow K^N$ une fonction $n$ fois dérivable sur un intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$. Les points $a \in I$ tels que $f(a) = 0$ sont appelés les *zéros* de $f$. Un zéro $a$ de $f$ est dit *de multiplicité* $\geqslant p$ (où $1 \leqslant p \leqslant n+1$ ssi $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k < p$. Lorsque $p \leqslant n$, un zéro $a$ sera dit de *multiplicité* $p$ (exactement) ssi $(\forall k \in [\![0, p-1]\!])$ $f^{(k)}(a) = 0$ **et** si $f^{(p)}(a) \neq 0$. Lorsque $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, nous dirons que $f$ est *plate* au point $a$ ssi $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par exemple $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ complétée par continuité en 0 est plate au point 0). Approfondissons le cas : $N = 1$, $K = \mathbb{R}$.

**Théorème VI.3.5**

> *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable $(n \geqslant 2)$ sur l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $a$ un zéro de $f'$ de multiplicité $p$ exactement $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$, le point $a$ étant* intérieur *à $I$.*
> *Si $p$ est pair, $f$ possède en $a$ un extremum local strict.*
> *Si $p$ est impair, $f$ n'a pas d'extremum local au point $a$.*

*Démonstration :*

En utilisant le théorème VI.3.3, on peut écrire :

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{p!}(x-a)^p f^{(p)}(a) + (x-a)^p \varphi(x) ,$$

où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varphi(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$. Soit $\alpha$ un réel tel que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$ et que

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2(p!)} |f^{(p)}(a)| \quad \text{pour} \quad |x-a| \leqslant \alpha .$$

On voit que, pour $|x-a| \leqslant \alpha$ et $x \neq a$, on a :

$$A \leqslant \frac{1}{(x-a)^p}(f(x) - f(a)) \leqslant 3A , \quad \text{en posant} \quad A = \frac{1}{2(p!}$$

Si $f^{(p)}(a) > 0$, l'encadrement ci-dessus prouve que, pour $p$ pair, $f$ possède en $a$ un minimum local strict. Si $p$ pair et $f^{(p)}(a) < 0$, $f$ admet en $a$ un maximum local strict. Si $p$ est impair on constate que $f(x) - f(a)$ change de signe quand $x$ traverse la valeur $a$ : le graphe de $f$ présente un point d'inflexion à tangente parallèle à $Ox$. ∎

***Exercice 1 :*** La fonction $f : x \mapsto e^x - 1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = 0$. D'après le théorème de division la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$, $0 \mapsto 1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que toutes les dérivées de $g$ sont partout $> 0$ sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 2 :*** Démontrer que pour $\alpha$ et $\beta$ réels $> 0$ donnés, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $-1 \mapsto 0$, $1 \mapsto 0$ et $x \mapsto \exp\left( \dfrac{-1}{|x|^\alpha \, |\operatorname{Log}|x||^\beta} \right)$ si $x \notin \{-1, 0, 1\}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

***Exercice 3 :*** Si $\varphi : ]-\alpha, \beta[ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction ($0 < \alpha \leqslant +\infty$, $0 < \beta \leqslant +\infty$), pour tout réel $h$ tel que $|h| < \operatorname{Min}(\alpha, \beta)$ notons $\Delta_h \varphi$ la fonction :

$$]-\alpha + |h|, \beta - |h|[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

On donne un réel $R > 0$ et une fonction $f : ]-R, R[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable ($n \geqslant 1$).

*a*) Soit $h_1, \ldots, h_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} |h_i| < R$. Montrer qu'il existe des réels $\theta_i \in ]0, 1[$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) tels que :

$$\Delta_{h_n} \circ \Delta_{h_{n-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{h_1} f(0) = h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(\theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \cdots + \theta_n h_n).$$

*b*) Soit $h$ un réel tel que $n|h| < R$. Montrer qu'il existe $\theta \in ]0, 1[$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(a + (n-k)h) = h^n f^{(n)}(n\theta h).$$

***Exercice 4 :*** On reprend les notations de l'exercice 3. On donne $R \in \bar{\mathbb{R}}$ ($0 < R \leqslant +\infty$) et $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'une fonction $f : ]-R, +R[ \longrightarrow K^N$ ($N \geqslant 1$) $n-1$ fois dérivable sur $]-R, +R[$ et telle que $f^{(n)}(0)$ existe. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ $\left( \alpha < \dfrac{1}{n} R \right)$ tel que $(\forall (h_1, \ldots, h_n) \in [-\alpha, \alpha]^n)$ :

$$\nu[(\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n} f)(0) - h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(0)] \leqslant \varepsilon |h_1 h_2 \ldots h_n|,$$

où $\nu$ désigne une norme standard de $K^N$.

***Exercice 5 :*** Soit $I = ]-a, +a[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $0 < a \leqslant +\infty$. On donne une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, telle que $f$ et $f''$ soient bornées sur $I$. On pose $M_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in I} |f''(x)|$.

*a*) On étudie d'abord le cas $a = +\infty$. Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{\alpha} + \dfrac{1}{2} M_2 \alpha$.

*Indication :* Utiliser Taylor-Lagrange sur $[x - \alpha, x]$ et sur $[x, x + \alpha]$.

En déduire : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$.

*b*) On étudie maintenant le cas $a < +\infty$. Démontrer que si les réels $\alpha$, $x$ et $t$ sont tels que $\alpha + t \in I$, $-\alpha + t \in I$, $0 < \alpha < a$ et $x \in I$, alors : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{\alpha} + \dfrac{M_2}{2\alpha} (\alpha^2 + (t - x)^2)$. En déduire que : $(\forall x \in I)$ $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{\alpha} + M_2 \alpha$ et montrer enfin que, si $\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}} \leqslant a$, on a : $\sup_{x \in I} |f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.

*c*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable, avec $n \geqslant 3$, telle que $f$ et $f'$

sur $\mathbb{R}$. Retrouver par une méthode analogue le résultat obtenu dans l'exemple 2, à savoir que les dérivées $k$-ièmes de $f$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ sont toutes bornées. Si on pose $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, montrer l'existence de constantes $\lambda_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ indépendantes de $f$ telles que $(\forall k \in [\![1, n-1]\!])$ $M_k \leqslant \lambda_{n,k} M_0^{\frac{n-k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.

N.B. Cet exercice peut être repris pour des fonctions $f$ à valeurs dans $K^N$ ou à valeurs dans un espace vectoriel normé quelconque.

***Exercice 6 :*** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$, et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. On suppose trouvé $\alpha > 0$ tel que $x^\alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x^\alpha f^{(n)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer, en s'inspirant de l'exemple 2, que $(\forall k \in [\![1, n-1]\!])$ $x^\alpha f^{(k)}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 7 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Si $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $N$ fois dérivable $(N \geqslant 0)$, et si $a \in I$ est un zéro de $g$, on pose $\omega_N(a, g) = N+1$ si les $g^{(i)}(a)$ sont nuls pour $i \in [\![0, N]\!]$ ; sinon on pose $\omega_N(a, g)$ = multiplicité de $a$ comme zéro de $g$ (en particulier $\omega_0(a, g) = 1$ ssi $g(a) = 0$). Enfin, on définit $\mu_N(g) = \sum_{a \in I} \omega_N(a, g)$ (c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

*a*) On donne $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable $(n \geqslant 2)$. Montrer que $\mu_{n-1}(f') \geqslant \mu_n(f) - 1$. En déduire que si $\mu_n(f) \geqslant n+1$, alors $\mu_0(f^{(n)}) \geqslant 1$, autrement dit que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $I$ (N.B. c'est la généralisation optimale du théorème de Rolle).

*b*) On donne alors $p$ entiers $\geqslant 1 : \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ $(p \geqslant 1)$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$ ; pour chaque $i \in [\![i, p]\!]$ une suite $(\lambda_{i,0}, \ldots, \lambda_{i,\alpha_i - 1}) \in \mathbb{R}^{\alpha_i}$ et enfin des éléments $x_1, \ldots, x_p$ distincts dans $I$.

Soit $P$ l'unique polynôme élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que (cf. tome 1, exercice 6 du § VII.5) $(\forall i \in [\![1, p]\!])$ $(\forall j \in [\![0, \alpha_i - 1]\!])$ $P^{(j)}(x_i) = \lambda_{i,j}$. Déduire du *a*) que, pour tout $x \in I$, il existe $\zeta \in I$ tel que

$$(*) \quad f(x) = P(x) + \frac{1}{n!} \left( \prod_{i=1}^{p} (x - x_i)^{\alpha_i} \right) f^{(n)}(\zeta)$$

(« formule de Taylor-Lagrange à $p$ points » qui généralise le théorème VI.3.1. Un cas particulier important est celui où les $\alpha_i$ sont tous égaux à 1).

***Exercice 8 :*** On considère la fonction $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

*a*) Montrer que pour $n \geqslant 1$ $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$, où $P_{n-1}$ est un polynôme de degré $n-1$ à coefficients réels (et même entiers). Etablir les relations

(1) $$P_n(x) = x^2 P'_{n-1}(x) - (2nx - 1) P_{n-1}(x)$$

(2) $$P'_n(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x)$$

(3) $$x^2 P''_n(x) - (2nx - 1) P'_n(x) + n(n+1) P_n(x) = 0$$

et déduire de (3), le calcul des coefficients de $P_n$.

*b*) En appliquant le théorème de Rolle à $f'$ sur $[0, +\infty]$ montrer que $P_1$ admet une racine réelle sur $]0, +\infty[$, puis par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, le polynôme $P_n$ est dissocié dans $\mathbb{R}[X]$, que ses racines sont simples et sont toutes $> 0$, et *séparées* par celles de $P_{n-1}$. On range les racines $(\zeta_{n,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de $P_n$ par ordre croissant, de sorte que $0 < \zeta_{n,1} < \zeta_{n,2} < \ldots < \zeta_{n,n}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que $\zeta_{n,p} \underset{n \to \infty, n \geqslant p}{\downarrow} 0$, la décroissance étant stricte.

*Indication :* Montrer d'abord que $\zeta_{n,1} \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ par l'absurde, en utilisant $P_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{4n^2} P'_{n-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$ puis montrer que l'ensemble des $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\zeta_{n,k} \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ n'est pas majoré).

*c*) Pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, étudier de même la suite $(\zeta_{n,n-q})_{n \in \mathbb{N}, n \geqslant q}$.

***Exercice 9 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

*a*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(x) = P_n(x)(1+x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n$. Vérifier les relations valables pour $n \geq 1$ :

(1) $$P_{n+1}(X) = -(2n+1)XP_n(X) - n^2(1+X^2)P_{n-1}(X)$$

(2) $$P_n'(X) = -n^2 P_{n-1}(X)$$

(3) $$(1+X^2)P_n''(X) - (2n-1)XP_n'(X) + n^2 P_n(X) = 0$$

En déduire $P_n(X) = \sum\limits_{2p \leq n} a_p X^{n-2p}$, avec $a_0 = (-1)^n n!$ et

$$a_p = (-1)^{n+p} n! \, \frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{(2^p p!)^2} \quad \text{si} \quad p \geq 1 .$$

*b*) Montrer que $P_n(1) \neq 0$ pour tout $n$. Montrer que chaque $P_n$ est dissocié et à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Préciser la position par rapport à 1 de la plus petite racine $> 0$ de $P_n$ et montrer que sa plus grande racine $> 0$ tend vers $+\infty$ quand $n \longrightarrow \infty$. Est-il vrai que la plus petite racine $> 0$ tend vers 1 quand $n \longrightarrow \infty$ ?

***Exercice 10 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable ($n \geq 2$). On suppose $f^{(n)}$ bornée sur $I$, on pose $C = \sup\limits_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$.

*a*) On suppose $f$ nulle en $t_1 \in I$. Soit $f_1(t) = \dfrac{1}{t_1 - t} f(t)$ prolongée par continuité en $t_1$, de sorte que $f_1$ est $n-1$ fois dérivable sur $I$ (cf. théorème I.3.4). Majorer $|R(t)|$ où $R(t) = f(t) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{(t_1 - t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$, en utilisant (4).

En déduire : $(\forall t \in I) \ \ |f_1^{(n-1)}(t)| \leq \dfrac{C}{n}$.

*b*) Soit des points distincts $t_1, \dots, t_s$ de $I$ et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_s \geq 1$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_s = p \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-t_1)^{\alpha_1} \dots (t-t_s)^{\alpha_s}} f(t)$ se prolonge par continuité à $I$ tout entier en une fonction $f_p$ qui est $n-p$ fois dérivable sur $I$, et prouver que

$$(\forall t \in I) \quad |f_p^{(n-p)}(t)| \leq \frac{C}{n(n-1)\dots(n-p+1)} .$$

N.B. Pour étendre ces résultats à $f : I \longrightarrow K^N$, on remplace $|\ \ |$ par $\nu$.

***Exercice 11 :*** *a*) Soit $a$ et $b$ deux réels $> 0$. On donne une fonction $\varphi : [0, a[ \longrightarrow [0, b[$ bijective, de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que $\varphi'(x) > 0$ si $x \in ]0, a[$, et que pour un entier $p \geq 1$ : $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(p-1)}(0) = 0$, $\varphi^{(p)}(0) > 0$. Soit $\psi = \varphi^{<-1>}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \psi(x^p)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, b^{1/p}[$.

*Indication :* Si $y = \psi(x^p)$, $yg(y) = x$, avec $g$ à préciser de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, a[$.

*b*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose trouvés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ ($p \geq 2$) tels que $f^{(n+2)}(0) = \dots = f^{(n+p)}(0) = 0$ et $f^{(n+p+1)}(0) \neq 0$. On écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_n x), \quad 0 < \theta_n < 1 .$$

Montrer que, pour un réel $\alpha$ convenable, lorsque $x \in ]-\alpha, \alpha[ \setminus \{0\}$, le réel $\theta_n$ de la formule de Mac-Laurin est unique, ce qui conduit à le noter $\theta_n(x)$. Utiliser le théorème VI.3.4 et *a*) pour prouver que la fonction $\theta_n : ]-\alpha, \alpha[ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en 0 par continuité en une fonction $\Theta_n$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

*Indication :* On pourra se ramener au cas : $f^{(n+1)}(0) = 0$ et $f^{(n+p+1)}(0) > 0$.

Proposer une méthode de calcul des dérivées $\Theta_n^{(q)}(0)$ pour $q \in \mathbb{N}$ et calculer explicitement $\Theta_n(0)$, $\Theta_n'(0)$, $\Theta_n''(0)$ et $\Theta_n'''(0)$.

***Exercice 12 :*** Déterminer toutes les fonctions trois fois dérivables vérifiant

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad (\forall b \in \mathbb{R}) \quad f(b) - f(a) = (b-a)\, f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

***Exercice 13 :*** Soit $a$ un réel $> 1$.

*a*) Pour tout réel $t \in\, ]0, 1[$, montrer que l'équation $a \operatorname{tg} zt = t \operatorname{tg} z$ possède une seule racine $z \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On notera $u(t)$ cette racine.

*b*) Démontrer que $u(t) \underset{t \to 0,\, t>0}{\longrightarrow} \rho$, où $\rho$ est l'unique racine dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $ax = \operatorname{tg} x$.

*c*) Démontrer que $u$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$ quand on la prolonge par $u(0) = \rho$, et plus précisément, montrer que $u(t) = \rho + w^2(t)$, où $w$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

*Indication :* Si $v = u - \rho$ on écrit, pour $t > 0$ :

$$\frac{a \operatorname{tg}(\rho + v)t}{(\rho + v)t} = \frac{\operatorname{tg}(\rho + v)}{\rho + v} = a(1 + S^2(\rho + v)t)$$

où $S$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, etc...

***Exercice 14 :*** Soit $f : [0, R[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ $(R > 0)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ *dont toutes les dérivées sont positives* $(f^{(k)}(x) \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N})$.

*a*) Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ est donné, la fonction $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{1}{x^{n+1}}(f(x) - T_{n,f,0}(x))$ est croissante sur $]0, R[$.

*b*) Soit $x \in\, ]0, R[$. On fixe $r \in\, ]x, R[$ et pour tout $z \in\, ]0, R[$ on note $R_n(z) = f(z) - T_{n,f,0}(z)$.

Déduire du *a*) que $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{r}\right)^{n+1} f(r)$, et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ converge et a pour somme $f(x)$.

*c*) Déduire du *b*) que sur $]0, R[$, $f$ est ou bien constante, ou bien *strictement* croissante.

## § VI.4 *DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS*

Continuons à désigner par $D$ une partie de $\mathbb{R}$ admettant en $a$ un point d'accumulation, par $K$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, par $N$ un entier $\geqslant 1$ et à utiliser les notations $\mathscr{F}_D(a, K^N)$, $O$ et $o$ introduites aux §§ VI.1 et VI.2.

Nous avons déjà remarqué que, *dans l'ensemble* $\mathscr{F}_D(0, \mathbb{R})$, les fonctions $x \mapsto x^n$ (restrictions à $D$ des fonctions monômes $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$) peuvent jouer le rôle d'*étalons de comparaison* permettant d'apprécier la « rapidité de la convergence vers 0 » des fonctions de $\mathscr{F}_D(0, K^N)$ qui tendent vers 0. De plus, $x^n \neq 0$ si $x \neq 0$, ce qui rend évidentes les assertions :

(1) *Une fonction $u \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ appartient à $o(x^n)$ (resp. $O(x^n)$) ssi il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ telle que $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (resp. $\varphi$ est bornée au voisinage de 0) et que $u(x) = x^n \varphi(x)$ pour $x \in D$ ;*

d'où il résulte, en utilisant les composantes de $\varphi$ :

(2) *Une fonction $u \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ appartient à $o(x^n)$ (resp. $O(x^n)$) ssi ses composantes appartiennent toutes à $o(x^n)$ (resp. $O(x^n)$).*

Remarquons enfin que si $D$ est une partie de $\mathbb{R}$ admettant en $a$ un point d'accumulation, une simple translation : $x \mapsto x - a$ la transformera en $D'$ ayant 0 pour point d'accumulation, et réciproquement, ce qui permet dans la pratique de ramener l'étude locale des fonctions de $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ à une étude *au voisinage de* 0.

**DÉFINITION VI.4.1**

a) *Soit $f \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ admet un* **développement limité à l'ordre n en 0** *(en abrégé un* $\mathrm{DL}_n(0)$*) ssi il existe des éléments $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de $K^N$ tels que*

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k A_k \underset{x \longrightarrow 0}{\in} o(x^n).$$

*On dit aussi qu'on a pu développer $f$ à l'ordre $n$ au voisinage de* 0 **par rapport à l'infiniment petit principal x.**

b) *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que $g \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ (en abrégé un* $\mathrm{DL}_n(a)$*) ssi la fonction $f : h \mapsto g(a+h)$ (qui est élément de $\mathscr{F}_{D'}(0, K^N)$) admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$.

Il est clair que l'existence d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ pour une fonction est une *propriété locale au point a*.

Par exemple $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ admet un DL à l'ordre 0 en 0, mais n'y admet pas de DL d'ordre 1.

**THÉORÈME VI.4.1** (unicité du $\mathrm{DL}_n$)

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction $f \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ admet* **au plus un** $\mathrm{DL}_n(0)$.

*Démonstration :*

Supposons trouvées deux suites $(A_0, \ldots, A_n)$ et $(B_0, \ldots, B_n)$ d'éléments de $K^N$ telles que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k A_k \in o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k B_k \in o(x^n).$$

Par différence, il s'ensuit, en posant $C_k = A_k - B_k$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ : $\sum_{k=0}^{n} x^k C_k \in o(x^n)$. Il s'agit de prouver que tous les $C_k$ sont nuls. Si ce n'était pas le cas, soit $p = \mathrm{Min}\ \{k \in [\![0, n]\!] \mid C_k \neq 0\}$. Pour $x \in D \setminus \{0\}$ on aurait, après multiplication par $\frac{1}{x^p}$, $C_p \in o(1)$, ce qui contredit le fait que $C_p$ a au moins une composante $\gamma$ non nulle. ■

**DÉFINITION VI.4.2**

*Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$. Si f admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$, *on appelle* **partie régulière** *de ce* $\mathrm{DL}_n(0)$ *la fonction (polynomiale à coefficients dans $K^N$).*
$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k A_k$ *qui vérifie la définition* VI.4.1, *et* **reste** *(à l'ordre n) de ce* $\mathrm{DL}_n(0)$ *la fonction* $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k A_k$. *Le* $\mathrm{DL}_n(0)$ *de f, lorsqu'il existe, est dit* fort *ssi son reste appartient à* $O(x^{n+1})$.

Il est clair qu'en cas d'existence du $\mathrm{DL}_n(0)$, *la partie régulière de ce* DL *est une propriété locale de f en* 0 : elle ne dépend que du *germe* de $f$ en 0. Le lecteur vérifiera sans aucune difficulté les propriétés suivantes :

($\mathcal{DL}_1$) (troncature)

Soit $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$ admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ avec $n \geqslant 1$, de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} x^k A_k$ ; alors *pour tout entier $p < n$, f* admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ fort de partie régulière $\sum_{k=0}^{p} x^k A_k$.

($\mathcal{DL}_2$) (restriction)

Si $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} x^k A_k$, la restriction de $f$ à toute partie $\Delta$ de $D$ admettant 0 pour point d'accumulation admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de même partie régulière que $f$.

($\mathcal{DL}_3$) (limite en 0)

Soit $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$. Pour que $f$ admette en 0 un $\mathrm{DL}_0$, il faut et il suffit que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. En cas d'existence, la partie régulière de ce $\mathrm{DL}_0(0)$ est $l$, où $l$ désigne cette limite.

*A fortiori*, si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$, de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} x^k A_k$, on a $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} A_0$.

($\mathcal{DL}_4$) (prolongement par continuité)

Si $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} x^k A_k$, et si $0 \notin D$, le prolongement par continuité de $f$ à $D \cup \{0\}$ (obtenu en posant $f(0) = A_0$) admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de même partie régulière.

($\mathcal{DL}_5$) (dérivée en 0)

Supposons que $D$ soit un intervalle contenant 0 et $\neq \{0\}$. Pour que $f \in \mathcal{F}_D(0, K^N)$ admette un $\mathrm{DL}_1(0)$, il faut et il suffit que $f'(0)$ existe. En cas d'existence, la partie régulière de ce DL est $x \mapsto f(0) +$

En revanche l'existence d'un $\mathrm{DL}_n(0)$, pour $n \geqslant 2$, n'implique nullement que la fonction $f$ soit dérivable ailleurs qu'en 0, ni *a fortiori* que $f''(0)$ existe.

***Exemple 1 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ si $x \neq 0$. On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\in} o(x^n)$, ce qui prouve l'existence d'un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière nulle. On a bien $f'(0) = 0$, mais pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} f(x) - \frac{2}{x^3} \cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right) \mathrm{e}^{+\frac{1}{x^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

ce qui montre bien que $f''(0)$ n'existe pas.

**Développements limités donnés par la formule de Taylor-Young**

Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0, et $f \in \mathscr{F}_I(0, K^N)$. Le théorème VI.3.3 peut être ainsi reformulé :

**Théorème VI.4.2**

*Si $f \in \mathscr{F}_I(0, K^N)$ est $n-1$ fois dérivable sur $I$ et si $f^{(n)}(0)$ existe $(n \geqslant 1)$, alors $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme de Taylor d'ordre $n$ de $f$ en 0 :*

$$T_{n, f, 0} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

Les fonctions usuelles (exponentielles et celles qui s'y rattachent) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et leurs dérivées en 0 sont faciles à calculer, ce qui permet de dresser un tableau :

$$\mathrm{e}^{ax} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} x^k \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{n+1}) \quad (\text{valable } \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{ch} ax - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!} x^{2k} \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{2n+2}) ; \qquad \operatorname{sh} ax - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{2n+3})$$

$$\cos ax - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} x^{2k} \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{2n+2}) ; \qquad \sin ax - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{2n+3})$$

$$(1+x)^\alpha - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k \underset{x \longrightarrow 0}{\in} O(x^{n+1}) \quad (\text{valable } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{C}).$$

Compte tenu de $(-1)^n \binom{-\alpha}{n} = \binom{\alpha+n-1}{n}$, la dernière relation peut s'écrire :

$$(1-x)^{-\alpha-1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+k}{k} x^k \underset{x \to 0}{\in} O(x^{n+1}) .$$

Le résultat est valable en particulier pour $\alpha = 0$, ce qui donne $\dfrac{1}{1-x} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = O(x^{n+1})$, mais il ne faut pas oublier que dans ce cas particulier on a une expression exacte et simple du reste :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (\text{égalité valable } \forall x \in \mathbb{C}, x \neq 1) ,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} ,$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + \frac{x^{2k+2}}{1-x^2}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} .$$

Ces fonctions sont les dérivées respectives de $-\operatorname{Log}(1-x)$, $\operatorname{Log}(1+x)$, $\operatorname{Arg\,th} x$, $\operatorname{Arc\,tg} x$, au moins sur $]-1, +1[$, ce qui donne immédiatement

$$-\operatorname{Log}(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{x \to 0}{\in} O(x^{n+1}) ;$$

$$\operatorname{Log}(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \underset{x \to 0}{\in} O(x^{n+1})$$

$$\operatorname{Arg\,th} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+3}) ;$$

$$\operatorname{Arc\,tg} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+3}) .$$

Soit maintenant $I$ un intervalle non trivial contenant 0 et inclus dans $[-1, +1]$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, si $f : I \longrightarrow K^N$ est donnée, la fonction $t \longrightarrow f(t^p)$ est encore définie sur $I$. On vérifie aisément que si $f(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^n)$ (resp. $f(x) \underset{x \to 0}{\in} O(x^n)$), alors $f(t^p) \underset{t \to 0}{\in} o(t^{pn})$ (resp. $f(t^p) \underset{t \to 0}{\in} O(t^{pn})$), ce qui par le simple changement de variable $x \mapsto x^2$, permet d'obtenir de nouveaux développements limités :

$$\boxed{\begin{array}{l}
(1-x^2)^{-1/2} - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} w_{2k}\, x^{2k}\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+2}) \\[2ex]
(1+x^2)^{-1/2} - \left[1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k w_{2k}\, x^{2k}\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+2}) \\[2ex]
(1-x^2)^{1/2} - \left[1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} w_{2k}\, x^{2k}\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+2}) \\[2ex]
\operatorname{Arg\,sh} x - \left[x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} w_{2k}\, x^{2k+1}\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+3}) \\[2ex]
\operatorname{Arc\,sin} x - \left[x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} w_{2k}\, x^{2k+1}\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^{2n+3})
\end{array}}$$

dans lesquels

$$w_{2k} = \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2k-1)}{2\,.\,4\,.\,\ldots\,.\,2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}\,.$$

Pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{tg} x$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qui est impaire (donc les $f^{(2k)}(0)$ sont tous nuls), le plus simple est d'utiliser la relation $y' = 1 + y^2$, qui, dérivée à l'ordre $2n$ par la formule de Leibniz donne une relation de récurrence permettant le calcul de $f^{(2n+1)}(0) = A_{2n+1}$ à partir de $A_1 = 1$ :

$$A_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} A_{2k+1} A_{2n-2k-1}\,.$$

Bornons-nous aux premiers termes :

$$\boxed{\operatorname{tg} x - \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^9)}\,.$$

A l'aide de la relation $\operatorname{th} x = \mathrm{i} \operatorname{tg} \mathrm{i}x$ (cf. § V.3) on en déduit :

$$\boxed{\operatorname{th} x - \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7\right] \underset{x \to 0}{\in} O(x^9)}\,.$$

**Opérations sur les développements limités**

A partir de la propriété ($L_2$) du § VI.2 on obtient immédiatement :

($\mathscr{D}\mathscr{L}_6$) Si $f_1$ et $f_2$ appartiennent à $\mathscr{F}_D(0, K^N)$ et admettent des $DL_n(0)$ de parties régulières $P_1$ et $P_2$, alors pour tous $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$, la fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

En outre si les $DL_n(0)$ de $f_1$ et $f_2$ sont forts, il en est de même de celui de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$. On retrouve ainsi que si $f$ est *paire* (resp. *impaire*), la partie régulière de son $DL_n(0)$ est *paire* (resp. *impaire*), ce qu'on avait bien constaté dans tous les exemples.

**Théorème VI.4.3**

> *Soit $f \in \mathscr{F}_D(0, K)$ et $g \in \mathscr{F}_D(0, K)$ admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n$ et $Q_n$. Alors $fg$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est la somme des termes de degré $\leqslant n$ du produit $P_n Q_n$.*
> *Si les $DL_n(0)$ de $f$ et $g$ sont forts, il en est de même de celui de $fg$.*

*Démonstration :*

Par hypothèse $f(x) - P_n(x) = x^n u(x)$ et $g(x) - Q(x) = x^n v(x)$ avec $u$ et $v \in \mathscr{F}_D(0, K)$ et $u(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, $v(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Alors :

$$f(x)\,g(x) = P_n(x)\,Q_n(x) + x^n(u(x)\,Q_n(x) + v(x)\,P_n(x) + u(x)\,v(x)) =$$
$$= P_n(x)\,Q_n(x) + x^n\,w(x)\,.$$

Si $S_n(x)$ est la somme des termes de degré $\leqslant n$ dans $P_n(x)\,Q_n(x)$, on a : $P_n(x)\,Q_n(x) - S_n(x) = x^{n+1}h(x)$, où $h$ est polynomiale.

Finalement,

$$f(x)\,g(x) - S_n(x) = x^n(xh(x) + w(x))\,,$$

et il est clair que $xh(x) + w(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, d'où la première assertion.

Si de plus $u(x) = xu_1(x)$ et $v(x) = xv_1(x)$ avec $u_1$ et $v_1$ bornées au voisinage de 0 dans $D$,

$$w(x) = xw_1(x) \quad \text{avec} \quad w_1(x) = u_1(x)\,Q_n(x) + v_1(x)\,P_n(x) + xu_1(x)\,v_1(x)$$

qui est donc bornée au voisinage de 0. Comme $h(x)$ l'est aussi, $h(x) + w_1(x)$ est bornée au voisinage de 0. ■

**Théorème VI.4.4**

> *Soit $f \in \mathscr{F}_D(0, K)$ et $g \in \mathscr{F}_D(0, K)$ admettant des $DL_n(0)$ de parties régulières respectives $P_n$ et $Q_n$. On s*

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = b_0 \neq 0$ *(ce qui équivaut à :* val $(Q_n) = 0$, *et entraîne que* $\dfrac{1}{g} \in \mathscr{F}_D(0, K)$ *est définissable).*

*Alors* $\dfrac{f}{g}$ *admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$, *et la partie régulière de ce* $\mathrm{DL}_n(0)$ *est le* **quotient** *dans la* **division suivant les puissances croissantes à l'ordre** $\boldsymbol{n}$ *(cf. Tome* 1, *théorème* VIII.2.2) *de* $P_n$ *par* $Q_n$.

*Si de plus les* $\mathrm{DL}_n(0)$ *de* $f$ *et* $g$ *sont forts, celui de* $\dfrac{f}{g}$ *l'est aussi.*

*Démonstration :*

Sans perte de généralité, on peut supposer $(\forall x \in D)$ $g(x) \neq 0$. Par hypothèse

$$f(x) - P_n(x) = x^n u(x)\,,$$

$$g(x) - Q_n(x) = x^n v(x) \quad \text{avec} \quad u(x) \underset{x \to 0,\, x \in D}{\longrightarrow} 0\,, \quad v(x) \underset{x \to 0,\, x \in D}{\longrightarrow} 0\,.$$

Pour $x \in D$, on a $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)} = x^n w(x)$, avec

$$w(x) = \frac{u(x)\, Q_n(x) - v(x)\, P_n(x)}{g(x)\, Q_n(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $P_n$ par $Q_n$ à l'ordre $n$, on obtient :

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = S_n(x) + x^{n+1} \frac{U_n(x)}{Q_n(x)}\,,$$

la fonction rationnelle $\dfrac{U_n(x)}{Q_n(x)}$ (qui n'admet pas 0 pour pôle) étant continue en 0, donc bornée au voisinage de 0.

Finalement $$\frac{f(x)}{g(x)} - S_n(x) = x^n h(x),$$

avec $h(x) = w(x) + x \dfrac{U_n(x)}{Q_n(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où la première assertion.

Si de plus $u(x) = xu_1(x)$ et $v(x) = xv_1(x)$, avec $u_1$ et $v_1 \in \mathscr{F}_D(0, K)$ bornées au voisinage de 0, $w(x) = xw_1(x)$ avec $w_1$ bornée au voisinage de 0, et $h(x) = xh_1(x)$ avec $h_1 \in \mathscr{F}_D(0, K)$ bornée au voisinage de 0. ■

A titre d'exercice, le lecteur pourra retrouver ainsi le $\mathrm{DL}_8(0)$ de $x \mapsto \operatorname{tg} x$ en divisant les parties régulières des $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x \mapsto \sin x$ et de $x \mapsto \cos x$. On remarquera que calculer un $\mathrm{DL}_n(0)$ quotient revient à calculer un D.S.F. tronqué d'une fraction rationnelle (cf. § VIII.2 du Tome d'Algèbre).

**THÉORÈME VI.4.5**

> *Soit $\Delta$ et $D$ deux parties de $\mathbb{R}$ admettant* 0 *pour point d'accumulation. On donne $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ admettant un* $\mathrm{DL}_n(0)$ *(avec $n \geqslant 1$) de partie régulière $P_n$ et l'on suppose que* $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ *(ce qui équivaut à* $\mathrm{val}\,(P_n) \neq 0$). *Soit $f \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ admettant un* $\mathrm{DL}_n(0)$, *de partie régulière $Q_n$, avec $Q_n(x) = b_0 + xb_1 + \cdots + x^n b_n$. Alors $f \circ \varphi$ admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$ *et sa partie régulière est la somme $S_n$ des termes de degré $\leqslant n$ dans la fonction polynomiale $t \mapsto b_0 + P_n(t)\, b_1 + \cdots + (P_n(t))^n b_n$. Si les* $\mathrm{DL}_n(0)$ *de $\varphi$ et $f$ sont forts, celui de $f \circ \varphi$ l'est aussi.*

*Démonstration :*

On pose

$$\varphi(t) - P_n(t) = t^n u(t), \quad f(x) - Q_n(x) = x^n v(x)$$

avec

$$u(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad v(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (u \in \mathscr{F}_\Delta(0, \mathbb{R}), v \in \mathscr{F}_D(0, K^N)) .$$

Alors $v(\varphi(t)) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$ (théorème de composition des limites). D'autre part $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\in} O(t)$ car $\mathrm{val}\,(P_n) \geqslant 1$, d'où facilement $(\varphi(t))^n \underset{t \to 0}{\in} O(t^n)$ et par suite $(\varphi(t))^n v(\varphi(t)) = t^n w(t)$, avec $w \in \mathscr{F}_\Delta(0, K^N)$ et $w(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. Pour $t \in \Delta$, on a :

$$f \circ \varphi(t) - Q_n \circ \varphi(t) = t^n w(t) ;$$

puis :
$$Q_n(\varphi(t)) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} (P_n(t) + t^n u(t))^k b_k ;$$

d'où :

$$Q_n(\varphi(t)) - Q_n(P_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} [(P_n(t) + t^n u(t))^k - (P_n(t))^k]\, b_k =$$

$$= \sum_{k-1}^{n} t^n u(t)\, H_k(t)\, b_k ,$$

où l'on voit bien que chaque fonction $H_k$ est bornée au voisinage de 0, donc au total :

$$Q_n(\varphi(t)) - Q_n(P_n(t)) = t^n u(t)\, H(t) ,$$

avec $H$ bornée au voisinage de 0.

Enfin $Q_n(P_n(t)) = S_n(t) + t^{n+1} R(t)$, où $R$ est polynomiale, au voisinage de 0. En fin de compte :

$$f \circ \varphi(t) - S_n(t) = t^n h(t)\,, \text{ avec } h(t) = w(t) + u(t)\,H(t) + tR(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

d'où la première assertion.

L'assertion sur les $\mathrm{DL}_n(0)$ forts se démontre comme d'habitude. ■

Dans la pratique il arrive fréquemment que $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} a \neq 0$. Le théorème de composition des $\mathrm{DL}_n$ s'applique encore à condition de supposer que $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ et qu'elle admet un $\mathrm{DL}_n(a)$. De même, dans le quotient $\dfrac{f}{g}$ de deux fonctions de $\mathscr{F}_D(0, K)$, il arrive que val $(Q_n) = q > 0$. Cela n'empêchera pas d'obtenir un DL du quotient, à condition que val $(P_n) = p \geqslant q$ : il suffira de diviser $f$ et $g$ par $x^q$, ce qui est possible car, plus généralement :

($\mathscr{D}\mathscr{L}_7$) soit $f \in \mathscr{F}_D(0, K^N)$ admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ avec $n \geqslant 1$, telle que $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, son $\mathrm{DL}_n(0)$ ayant pour partie régulière $P_n(x) = x^p a_p + \cdots + x^n a_n$ avec $p \geqslant 1$. Alors la fonction $F : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^p}$ (qui appartient à $\mathscr{F}_{D \setminus \{0\}}(0, K^N)$) admet un $\mathrm{DL}_{n-p}(0)$ dont la partie régulière est $a_p + \cdots + x^{n-p} a_n$. Si le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f$ est fort, le $\mathrm{DL}_{n-p}(0)$ de $F$ l'est aussi.

En pratique, si $f_1(x) = x^{p_1} F_1(x)$ et $f_2(x) = x^{p_2} F_2(x)$, avec $f_1$ et $f_2 \in \mathscr{F}_D(0, K)$, et si $F_1$ et $F_2$ admettent des $\mathrm{DL}_m(0)$, avec $F_2(x) \underset{x \to 0}{\not\longrightarrow} 0$ on obtiendra pour $f_1 f_2$ un $\mathrm{DL}_{m+p_1+p_2}(0)$ et pour le quotient $\dfrac{f_1}{f_2}$ un $\mathrm{DL}_{m+p_1-p_2}$ (à condition que $p_1 \geqslant p_2$).

***Remarque 1 :*** La règle ($\mathscr{D}\mathscr{L}_7$) est en parfaite cohérence avec le théorème de division VI.3.4 et en fait, dans la plupart des cas où on sera amené à appliquer la règle ($\mathscr{D}\mathscr{L}_7$) on sera sous les hypothèses du théorème VI.3.4. Mais alors que la propriété ($\mathscr{D}\mathscr{L}_7$) est évidente, il n'en est pas du tout de même du théorème VI.3.4 !

**THÉORÈME VI.4.6**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0, et soit $f : I \longrightarrow K^N$ une fonction dérivable, telle que $f'$ admette un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière*

$$Q_n(x) = a_0 + xa_1 + \cdots + x^n a_n\,.$$

*Alors $f$ admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est*

$$P_{n+1}(x) = f(0) + xa_0 + \frac{x^2}{2} a_1 + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} a_n\,.$$

*Si le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f'$ est fort, le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $f$ l'est a*

*Démonstration :*

On ne restreint pas la généralité en supposant $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce que nous ferons. En remplaçant $f(x)$ par $f(x) - P_{n+1}(x)$ qui a pour dérivée $f'(x) - P_n(x)$, on se ramène au cas où $f(0) = 0$ et où $Q_n(x) = 0$, ce que nous supposons maintenant. Il s'agit donc de prouver que si $f'(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^n)$ (resp. $O(x^{n+1})$), alors $f(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^{n+1})$ (resp. $O(x^{n+2})$). Contentons-nous d'établir la première assertion (la seconde s'établit encore plus facilement).

Soit $\varepsilon$ un réel $> 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant \varepsilon(n+1)|x|^n$ pour $x \in I$ et $|x| \leqslant \alpha$. Fixons un tel $x$ et considérons la fonction $g$ définie par $g(t) = \varepsilon t^{n+1}$ pour $t \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$, $g(t) = -\varepsilon(-t)^{n+1}$ pour $t < 0$ ; $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \varepsilon(n+1)|t|^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier pour tout $t \in I$ entre 0 et $x$, on a : $|f'(t)| \leqslant g'(t)$. Comme $f(0) = 0$, le théorème des accroissements finis (corollaire 3 du théorème V.1.4), appliqué à $f$ et $g$ entre 0 et $x$, montre que $|f(x)| \leqslant \varepsilon|x|^{n+1}$. C'est vrai pour tout $x$ tel que $x \in I$ et $|x| \leqslant \alpha$. On a donc bien prouvé que $f(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^{n+1})$. ■

**Exemples de calcul de développements limités**

Convenons de noter $[g(x)]_p$ la *partie régulière* du $\mathrm{DL}_p(0)$ d'une fonction $g$.

Un calcul de DL doit toujours être mené avec soin, avec une présentation claire sous forme de tableaux, ce qui permet un dépistage rapide d'éventuelles erreurs. Il doit être charpenté, un peu comme s'il fallait le programmer sur ordinateur (en fait il existe des logiciels permettant le calcul automatique de la plupart des $\mathrm{DL}_n(a)$ dont on peut avoir besoin).

***Exemple 2 :*** *Soit à chercher un* $\mathrm{DL}_6(0)$ *de* $f : x \mapsto (1 + \sin x)^x$. Cette fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. On écrit : $f(x) = \exp(x \operatorname{Log}(1 + \sin x))$. On commencera par développer $u(x) = \operatorname{Log}(1 + \sin x)$ (l'ordre 5 suffira) en appliquant le théorème VI.4.5. Comme $u(x)$ a un développement commençant par $x^2$, il suffira de développer $e^u$ à l'ordre 3 pour avoir $e^{u(x)}$ à l'ordre 6. On remarque enfin que tous les DL qu'on va écrire sont forts (fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$).

$1^{\text{re}}$ *étape :* Calcul de $[\operatorname{Log}(1 + \sin x)]_5$

$$[\operatorname{Log}(1+u)]_5 = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5$$

$$\begin{array}{lcccccc|c}
[\sin x]_5 = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) & = & x & & -\frac{1}{6}x^3 & & +\frac{1}{120}x^5 & 1 \\
[\sin^2 x]_5 = x^2\left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2\right]_3 & = & & x^2 & & -\frac{1}{3}x^4 & & \frac{-1}{2} \\
[\sin^3 x]_5 = x^3\left[\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^3\right]_2 & = & & & x^3 & & -\frac{1}{2}x^5 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llr|c}
[\sin^4 x]_5 = x^4\left[\left(1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}\right)^4\right]_1 & = & x^4 & -\dfrac{1}{4} \\
[\sin^5 x]_5 = x^5(1+\cdots) & = & x^5 & \dfrac{1}{5} \\
\hline
[\mathrm{Log}\,(1+\sin x)]_5 = & & x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^5}{24}. &
\end{array}$$

On a mis dans la colonne de droite les multiplicateurs qui doivent s'appliquer aux lignes en vue de l'addition finale.

On aurait pu également développer (à l'ordre 4) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Log}\,(1+\sin x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}\,,$$

ou même (à l'ordre 3) :

$$\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

et intégrer ensuite deux fois terme à terme la partie régulière (sans oublier la constante d'intégration) ; la division donne

$$\left[\frac{-1}{1+\sin x}\right]_3 = -1 + x - x^2 + \frac{5}{6}x^3\,,$$

d'où :

$$\left[\frac{1-\sin x}{\cos x}\right]_4 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{24}x^4\,,$$

et enfin : $[\mathrm{Log}\,(1+\sin x)]_5$.

$2^{\mathrm{e}}$ *étape :* Calcul de $[f(x)]_6$

On pose

$$y = x[\mathrm{Log}\,(1+\sin x)]_5 = x^2 z\,, \quad \text{avec} \quad z = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24}$$

et on utilise $\quad [\exp(u)]_3 = 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + \dfrac{1}{6}u^3$.

$$\begin{array}{llr|c}
y^0 & = 1 & & \\
y = x^2 z & = & x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{12}x^5 + \dfrac{1}{24}x^6 & 1 \\
[y^2]_6 = x^4[z^2]_2 & = & x^4 - x^5 \quad + \dfrac{7}{12}x^6 & \dfrac{1}{2} \\
[y^3]_6 = x^6[z^6]_0 & = & x^6 & \dfrac{1}{6} \\
\hline
[f(x)]_6 = & 1 & + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{7}{12}x^5 \quad + \dfrac{1}{2}x^6 &
\end{array}$$

Le résultat final s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = 1 + x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{7}{12}x^5 + \dfrac{1}{2}x^6 + x^7 u(x), \\ \text{où } u \text{ est bornée au voisinage de } 0. \end{array}}$$

***Exemple 3 :*** Soit $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x}$ prolongée par continuité en 0 (par $f(0) = 0$). Montrons que $f$ est localement réversible au voisinage de 0 et que, si $g$ en est une réciproque locale, $g$ admet des DL à tout ordre. *Proposons-nous de calculer un* $\mathrm{DL}_5(0)$ *de* $g$.

En fait, d'après le théorème VI.3.4, $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$. D'ailleurs, en étudiant le signe de $f'$, on constate que $f'$ reste $> 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $f$ admet bien une réciproque $g$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ vérifiant $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 2$. En particulier $g$ admet des DL à tout ordre. Pour en calculer un $\mathrm{DL}_5(0)$ nous allons utiliser la « *méthode des coefficients indéterminés* » en écrivant

$$[g(x)]_5 = Q_5(x) = 2x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

et à partir de

$$[f(x)]_5 = P_5(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{720}x^5$$

en utilisant le théorème VI.4.5 qui montre que $[Q_5(P_5(x))]_5 = x = [P_5(Q_5(x))]_5$. En développant l'une ou l'autre de ces relations, on obtient un système de 4 équations aux 4 inconnues restantes $(a_i)_{2 \leq i \leq 5}$ dont on voit aisément qu'il est *échelonné* et admet une solution unique.

Choisissons de préférence la relation $[Q_5(P_5(x))]_5 = x$ qui a l'avantage de conduire à un système d'*équations linéaires en les* $a_i$.

$$\begin{array}{rcccccc|c}
P_5(x) = xz & = & \frac{1}{2}x & + \frac{1}{6}x^2 & + \frac{1}{24}x^3 & + \frac{1}{120}x^4 & + \frac{1}{720}x^5 & 2 \\[1ex]
[(P_5(x))^2]_5 = x^2[z^2]_3 & = & & \frac{1}{4}x^2 & + \frac{1}{6}x^3 & + \frac{5}{72}x^4 & + \frac{1}{45}x^5 & a_2 \\[1ex]
[(P_5(x))^3]_5 = x^3[z^3]_2 & = & & & \frac{1}{8}x^3 & + \frac{1}{8}x^4 & + \frac{7}{96}x^5 & a_3 \\[1ex]
[(P_5(x))^4]_5 = x^4[z^4]_1 & = & & & & \frac{1}{16}x^4 & + \frac{1}{12}x^5 & a_4 \\[1ex]
[(P_5(x))^5]_5 = x^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 & = & & & & & \frac{1}{32}x^5 & a_5
\end{array}$$

d'où le système :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}a_2=0\ ;\quad \frac{1}{12}+\frac{1}{6}a_2+\frac{1}{8}a_3=0\ ;\qquad \frac{1}{60}+\frac{5}{72}a_2+\frac{1}{8}a_3+\frac{1}{16}a_4=0\ ;$$

$$\frac{1}{360}+\frac{1}{45}a_2+\frac{7}{96}a_3+\frac{1}{12}a_4+\frac{1}{32}a_5=0\ ,$$

linéaire et échelonné en les $a_i$, donc de résolution immédiate :

$$a_2=-\frac{4}{3}\ ;\quad a_3=\frac{10}{9}\ ;\quad a_4=-\frac{136}{135}\ ;\quad a_5=\frac{386}{405}\,.$$

On a donc :

$$[g(x)]_5=2\,x-\frac{4}{3}x^2+\frac{10}{9}x^3-\frac{136}{135}x^4+\frac{386}{405}x^5\,.$$

***Exemple 4 :*** Soit à chercher le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$. On remarque que $f$ est une fonction paire et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi,+\pi[$ grâce au théorème de division appliqué à $\dfrac{\sin x}{x}$. On écrit

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}\,,$$

d'où
$$\left[\frac{x}{\sin x}\right]_7=\left[\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\dfrac{x^6}{5\,040}}\right]_7=\left[\frac{1}{1-u(x)}\right]_7$$

avec
$$u(x)=\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^6}{5\,040}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\,.$$

Il suffit donc de développer $\dfrac{1}{1-u}$ à l'ordre 3, ce qui donne :

$$\begin{array}{lcllll}
1 & & & & & \\
u & = & \dfrac{x^2}{6} & -\dfrac{x^4}{120} & +\dfrac{x^6}{5\,040} \\
[u^2]_7 & = & & \dfrac{x^4}{36} & -\dfrac{x^6}{360} \\
[u^3]_7 & = & & & \dfrac{x^6}{216} \\
\hline
\end{array}$$

$$\left[\frac{x}{\sin x}\right]_7=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15\,120}x^6$$

On pourra vérifier ce calcul en utilisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par $1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\dfrac{x^6}{5\,040}$ à l'ordre 7.

***Remarque 2 :*** Une étude approfondie de l'exemple 3 permet de dégager le théorème d'algèbre suivant, qui prouve que la méthode suivie dans cet exemple 3 a un caractère général.

**THÉORÈME VI.4.7**

> *Pour tout polynôme $F \in \mathbb{C}[X]$ et tout entier $p \geqslant 1$, désignons par $[F]_p$ la somme des termes de degré $\leqslant p$ dans $F$.*
> *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\operatorname{val}(P) = 1$. Il existe un, et un seul, polynôme $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $[Q \circ P]_n = X$. Ce polynôme $Q$ est de valuation 1 et vérifie aussi l'équation $[P \circ Q]_n = X$, dont il est l'unique solution de valuation $\geqslant 1$.*

*Démonstration :*

Soit $P = a_1 X + \cdots + a_n X^n$ donné, avec $a_1 \neq 0$, et $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$ inconnu ($Q \in \mathbb{C}_n[X]$). La condition $[Q \circ P]_n = X$ se traduit par les équations :

$$b_0 = 0 \,; \quad b_1 a_1 = 1 \,; \quad b_k a_1^k + \psi_k(b_1, \ldots, b_{k-1} \,; a_1, \ldots, a_k) = 0$$

pour $2 \leqslant k \leqslant n$ où $\psi_k$ est une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{N}$, linéaire et homogène en $b_1, \ldots, b_{k-1}$, pour tous ces $k$. Il est clair que ce système est linéaire et échelonné en les inconnues $b_1, \ldots, b_n$ et que le coefficient de $b_k$ dans la $k$-ième équation $a_1^k$ est $\neq 0$. Ce système admet donc une solution unique, d'où la première assertion.

Notons $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ l'unique solution que l'on vient de trouver à $[Q \circ P]_n = X$. On a :

$$[[P \circ Q]_n \circ P]_n = [P \circ Q \circ P]_n = [P \circ [Q \circ P]_n]_n = [P \circ X]_n = P \,.$$

Or le raisonnement précédent prouve que l'équation $[R \circ P]_n = P$ a une solution unique $R \in \mathbb{C}_n[X]$ (seuls les seconds membres du système linéaire écrit précédemment sont à modifier) et il reste donc de Cramer. Comme $R = X$ convient, il s'ensuit que $[P \circ Q]_n = X$.

Pour prouver enfin que l'équation $[P \circ S]_n = X$ possède une unique solution $S \in \mathbb{C}_n[X]$ de valuation $\geqslant 1$, il suffit de poser $S = s_1 X + \cdots + s_n X^n$ et d'écrire le système permettant le calcul des $(s_i)$ :

$$a_1 s_1 = 1, \quad a_1 s_k + \varphi_k(s_1, \ldots, s_{k-1} \,; a_2, \ldots, a_k) = 0 \quad \text{pour} \quad k \in [\![2, n]\!] \,,$$

avec $\varphi_k$ polynomiale. Ce système possède manifestement une et une seule solution, car il est échelonné en les $s_i$, et bien que n'étant plus linéaire en les $s_i$, le coefficient de $s_k$ dans la $k$-ième équation est $a_1 \neq 0$. ∎

***Exercice 1 :*** Calculer un DL(0) des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué :

*a)* $x \mapsto x^2 \operatorname{cotg}^2 x$ (ordre 6)

*b)* $x \mapsto \operatorname{Log}\left[1 + x(1 + \operatorname{Log}(1 + \operatorname{sh}^2 x))^{\frac{1}{\sin x}}\right]$ (ordre 5)

*c)* $x \mapsto \exp\left(\dfrac{e^x - 1}{x} \operatorname{Arc\,sin} x\right)$ (ordre 4)

*d)* $x \mapsto \left(e^x - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right)^{1/n}$ (ordre 3)

*e)* $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{x - \cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$ $(0 < \alpha < \pi)$ (ordre 5)

*f)* $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ (ordre 5)

*g)* $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}}$ (ordre 4)

*h)* $x \mapsto \operatorname{Arc\,sin}(\operatorname{Arc\,sin} x)$ (ordre 9)

*i)* $x \mapsto \sin(x - \operatorname{Arc\,tg} x)$ (ordre 11)

*j)* $x \mapsto \operatorname{Log} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ (ordre 7).

***Exercice 2 :*** Soit $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, à valeurs réelles, telles que $u(0)=1$ et $v(0)=0$. On considère l'équation (E) $y^2-2yu(x)+v(x)=0$, où $y$ est l'inconnue.

Montrer que (E) possède une racine $\varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que $\varphi(0)=0$, et calculer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\varphi$.

***Exercice 3 :*** Soit $n$ un entier $\geqslant 3$. On considère l'équation (E) $y^n+y\cos x+\sin x=0$, où $x\in\mathbb{R}$ et où $y$ est l'inconnue.

Démontrer (sans la théorie des fonctions implicites) que (E) définit, sur un intervalle non trivial $[-A,+A]$ une fonction $x\mapsto\varphi(x)=y$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall x\in[-A,+A])$ $\varphi(x)$ est racine de $E$ et $\varphi(0)=0$, et calculer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\varphi$.

***Exercice 4 :*** Pour chacune des fonctions $f$ suivantes, montrer qu'il y a une réciproque locale $g$ de $f$ au voisinage de 0 qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et calculer un $\mathrm{DL}(0)$ de $g$ à l'orde indiqué :

*a*) $x\mapsto\cos x-(1+x)^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R}^*)$ (ordre 4)

*b*) $x\mapsto\sqrt{e^x-1-x}$ (ordre 5)

*c*) $x\mapsto\dfrac{\operatorname{Arg\,ch}(1+x^4)}{x}$ (ordre 5)

*d*) $x\mapsto\dfrac{(\operatorname{Arc\,sin} x)^2}{\operatorname{Arc\,tg} x}$ (ordre 5)

***Exercice 5 :*** Soit $f\in\mathbb{R}[X]$, $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ $(n\geqslant 2)$.

*a*) Vérifier que $f$ admet une réciproque $g$ définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de $+\infty$.

*b*) Pour $t>0$ on pose $x=\dfrac{1}{t}$ et $v(t)=(f(x))^{-\frac{1}{n}}$. Montrer que $v$ se prolonge en une fonction $V$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $[0,A]$, où $A>0$, et qu'on a : $V'(0)=1$.

*c*) Déduire de *b*) qu'il existe une fonction $\Phi$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle $[0,B]$, avec $B>0$, telle que, pour tout $z$ assez grand, on ait : $g(z)=z^{1/n}\,\Phi(z^{-1/n})$.

Lorsque $f(x)=x^7+x^3+x^2+x+1$, calculer un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\Phi$.

***Exercice 6 :*** *a*) Soit $f:x\mapsto\operatorname{Arc\,cos}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0\mapsto 0$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et en calculer un $\mathrm{DL}_4(0)$.

*b*) Plus généralement, soit $A>0$ et $p$ entier $\geqslant 2$. Soit $f:[0,A]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(p-1)}(0)=0$ et $f^{(p)}(0)\neq 0$. Montrer que $f$ admet une réciproque locale $g$ définie sur $[0,B]$, avec $B>0$, et qu'il existe $\Phi:[0,B^{1/p}]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall z\in[0,B])$ $g(z)=\Phi(z^{1/p})$ (on pourra donc calculer des $\mathrm{DL}(0)$ à tout ordre de $g(t^p)$ pour $t$ voisin de 0).

***Exercice 7 :*** *a*) Calculer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x\mapsto\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$ et de $x\mapsto\operatorname{Log}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$, où $n\in\mathbb{N}^*$ est donné.

*b*) Soit $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, réciproques l'une de l'autre, telles que $f(0)=g(0)=0$ (et donc $f'(0)\neq 0$, $g'(0)\neq 0$). On note $P_n$, $Q_n$ les parties régulières de leurs $\mathrm{DL}_n(0)$ respectifs, où $n\in\mathbb{N}^*$. Quels sont les $\mathrm{DL}_{n+2}(0)$ de $f(Q_n(x))$ et de $P_n(f(x))$ ?

***Exercice 8 :*** Calculer les limites suivantes, si elles existent :

*a*) $\displaystyle\lim_{x\to 0,\,x\neq 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\operatorname{th}x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$

*b*) $\displaystyle\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{\operatorname{Log}x}{x}}-x}{x^2\operatorname{Log}x}$

*c*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-ex^3\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

*d*) $\displaystyle\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^{\sin x}-(\sin x)^x}{x^{\operatorname{sh}x}-(\operatorname{sh}x)^x}$

*e*) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{Log}(x+1)}{\operatorname{Log}x}\right)^{x\operatorname{Log}x}$

*f*) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\operatorname{Log}x-\left|\operatorname{Log}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right|^{1/2}}{x-1}$

*g*) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)\sin x-x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x-x^5}$

*h)* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$

*i)* $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + (x + (x + x^\delta)^\gamma)^\beta)^\alpha - x^\alpha]$, où $\alpha > 0$ et $(\beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^3$.

***Exercice 9 :*** Calculer un $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$.

***Exercice 10 :*** Soit $f$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose, pour $x$ voisin de 0, $g(x) = f(x) - x$, et on notera $\varphi$ la réciproque locale de $f$ au voisinage de 0.

*a)* Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $|x| \leqslant \alpha$, on puisse définir par récurrence la suite $(u_n(x))_{n \geqslant 0}$ par $u_0(x) = x$, $u_n(x) = x + g(u_{n-1}(x))$ pour $n \geqslant 1$, et qu'on ait en outre $(\forall x \in [-\alpha, \alpha])\ |u_n(x)| \leqslant 2|x|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*b)* Les $(u_n)$ étant définies comme en *a)*, prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'on a : partie régulière du $DL_{m+1}(0)$ de $u_m$ = partie régulière du $DL_{m+1}(0)$ de $\varphi$.

*c)* Utiliser cette méthode pour obtenir un $DL_6(0)$ de $\varphi$ lorsque $f(x) = 2\,\dfrac{e^x - 1 - x}{x}$.

***Exercice 11 :*** Soit $f$ le prolongement par continuité à $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x \operatorname{Log} x}{x^2 - 1}$.
Vérifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

*a)* Etudier les variations de $f$ et construire son graphe.

*b)* Montrer que $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

*c)* Soit un réel $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \operatorname{Max}\limits_{x \geqslant 0} f(x)$. Montrer que $\alpha = \operatorname{Min}\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) \leqslant \varepsilon\}$ est le plus grand module de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$ sur $\mathbb{R}_+$.

*d)* Calculer un $DL_3(1)$ de $f$.

***Exercice 12 :*** Déterminer les constantes $a$, $b$, $c$, $d$ pour que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre maximum et en donner un équivalent pour :

*a)* $f(x) = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 4 \operatorname{Log}\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{\pi - x} - b + c \operatorname{Log}(\pi - x)$, quand $x \longrightarrow \pi$.

*b)* $f(x) = \operatorname{Arc\,tg} x - \dfrac{ax + bx^3}{1 + cx^2}$, quand $x \longrightarrow 0$.

*c)* $f(x) = e^x - \dfrac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}$, quand $x \longrightarrow 0$.

*d)* $f(x) = \operatorname{Log}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1 - a}{\cos x - a}$, quand $x \longrightarrow 0$.

*e)* $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$, quand $x \longrightarrow 0$.

*f)* $f(x) = \cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ au voisinage de 0.

***Exercice 13 :*** Trouver un équivalent simple, au voisinage de 0, de :

*a)* $y = \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

*b)* $\dfrac{\operatorname{Arc\,sin} x}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{3x}{3 - 2x^2}$

*c)* $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{27}{(3 - x^2)^2}$

*d)* $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1 + \sin x}{\cos x}\right) - 2\sin x + x\cos x$

*e)* $(2 + \cos x)(2 + \operatorname{ch} x) - 9$

*f)* $\operatorname{Log}\dfrac{1 + e^x}{2} - \dfrac{4x + x^2}{8}$.

## § VI.5 *DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS ET SÉRIES FORMELLES*

Le lecteur attentif a dû être frappé par le parallélisme étroit entre les calculs portant sur les développements limités et ceux portant sur les séries formelles (cf. Tome 1, Chap. VIII). Approfondissons cette remarque.

Soit $I$ l'un des intervalles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{F}_I^\infty$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}_I(0, \mathbb{C})$ qui sont *de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de* 0 dans $I$. On sait que, pour $I$ fixé, $\mathscr{F}_I^\infty$ est stable par addition, par produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, par multiplication, et $\frac{1}{f} \in \mathscr{F}_I^\infty$ si $f \in \mathscr{F}_I^\infty$ et si de plus $f(0) \neq 0$. Si $J$ est un intervalle pris lui aussi dans $\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}\}$ et si $\varphi \in \mathscr{F}_I^\infty$ est à valeurs dans $J$, avec $\varphi(0) = 0$, pour $f \in \mathscr{F}_J^\infty$ :

$$f \circ \varphi \in \mathscr{F}_I^\infty .$$

**Série formelle de Taylor**

**DÉFINITION VI.5.1**

*Soit $I$ l'un des intervalles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathscr{F}_I^\infty$, on appelle* **série formelle de Taylor de $f$** *en* 0 *la série formelle $T_{f,0}(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ définie par :*

(1) $$T_{f,0}(X) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, X^k .$$

Pour toute série formelle $S \in \mathbb{C}[X]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, notons $[S]_n$ la somme des termes de degré $\leqslant n$ dans $S$. C'est l'unique élément $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\operatorname{val}(S - P) > n$. Pour $n$ donné, l'application $\mathbb{C}[[X]] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X]$, $S \mapsto [S]_n$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Une série formelle $S \in \mathbb{C}[[X]]$ est nulle ssi $(\forall n)\ [S]_n = 0$, ce qui signifie : $(\forall n)\ \operatorname{val}(S) > n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $S$ et $T$ dans $\mathbb{C}[[X]]$. Alors $[ST]_n = [[S]_n\,[T]_n]_n$. Enfin, si de plus $\operatorname{val}(T) \geqslant 1$, calculons

$$S \circ T - [S]_n \circ [T]_n = (S - [S]_n) \circ T + [S]_n \circ T - [S]_n \circ [T]_n .$$

Le premier terme est évidemment de valuation $> n$. Il en va de même pour $[S]_n \circ T - [S]_n \circ [T]_n$ car $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$, $\operatorname{val}(T^k - [T]_n^k) > n$, d'où le résultat par linéarité.

Au total $\operatorname{val}(S \circ T - [S]_n \circ [T]_n) > n$ d'où $[S \circ T]_n = [[S]_n \circ [T]_n]_n$. On en déduit immédiatement, à partir du théorème VI.4.2 :

**THÉORÈME VI.5.1**

*Soit $I$ l'un des intervalles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$ et soit $f \in \mathscr{F}_I^\infty$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $f$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, et la partie régulière de ce $\mathrm{DL}_n(0)$ est la fonction*

$$x \mapsto [T_{f,0}]_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

**Application aux dérivées successives**

**THÉORÈME VI.5.2**

*Soit $I$ et $J$ des intervalles de l'ensemble $\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}\}$.*

a) *Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $f \in \mathscr{F}_I^\infty$, $g \in \mathscr{F}_I^\infty$, alors $T_{\lambda f + \mu g, 0} = \lambda T_{f,0} + \mu T_{g,0}$.*

b) *Si $f \in \mathscr{F}_I^\infty$ et $g \in \mathscr{F}_I^\infty$, on a :*

$$T_{fg,0} = T_{f,0} \times T_{g,0} \quad \textit{et si} \quad f(0) \neq 0 , \quad T_{\frac{1}{f},0} = \frac{1}{T_{f,0}} .$$

c) *Si $f \in \mathscr{F}_J^\infty$ et $\varphi \in \mathscr{F}_I^\infty$ avec $\varphi(0) = 0$, alors $T_{f \circ \varphi, 0} = ($*

*Démonstration :*

*a*) n'utilise que la linéarité de la dérivation ;

*b*) ne fait que traduire le théorème VI.4.3 car, pour $n \in \mathbb{N}$, compte tenu du théorème VI.5.1

$$[T_{fg,0}]_n = [[T_{f,0}]_n \times [T_{f,0}]_n]_n \,, \quad \text{d'où} \quad [T_{fg,0}]_n = [T_{f,0} \times T_{g,0}]_n \,;$$

et comme c'est vrai pour tout $n$, il s'ensuit bien $T_{fg,0} = T_{f,0} \times T_{g,0}$, d'où en particulier, si $f(0) \neq 0$, $T_{f,0} \times T_{\frac{1}{f},0} = T_{1,0} = 1$ ;

*c*) se prouve de la même façon à partir du théorème VI.4.5. En fixant $n \in \mathbb{N}$ et en tenant compte du théorème VI.5.1, on a :

$$[T_{f\circ\varphi,0}]_n = [[T_{f,0}]_n \circ [T_{\varphi,0}]_n]_n \,, \quad \text{d'où} \quad [T_{f\circ\varphi,0}]_n = [T_{f,0} \circ T_{\varphi,0}]_n$$

et c'est vrai pour tout $n$, d'où $T_{f\circ\varphi,0} = T_{f,0} \circ T_{\varphi,0}$ (à noter que l'hypothèse $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire val $(T_{\varphi,0}) \geqslant 1$ autorise la composition par $T_{f,0}$). ■

D'après la définition du produit de deux séries formelles, *b*) s'écrit :

$$\text{(2)} \qquad \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{n!}\,(fg)^{(n)}(0) = \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!\,q!}\, f^{(p)}(0)\, f^{(q)}(0)} \,.$$

On a donc obtenu une nouvelle démonstration de la *formule de Leibniz*.

Si nous interprétons maintenant le *c*) en utilisant la définition de la série composée $T_{f,0} \circ T_{\varphi,0}$, on obtient :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{n!}\,(f\circ\varphi)^{(n)}(0) = \text{coefficient de } X^n$$

$$\text{dans } \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\, f^{(p)}(0) \left( \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q!}\, \varphi^{(q)}(0)\, X^q \right)^p ,$$

ce qui, en développant les sommes intérieures par la *formule du multinôme* (cf. Tome 1, Chap. III) ; et en regroupant, s'écrit (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{n!}\,(f\circ\varphi)^{(n)}(0) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_n!\,(1!)^{\alpha_1}\ldots(n!)^{\alpha_n}} \times$$
$$\times\, (\varphi'(0))^{\alpha_1} \ldots (\varphi^{(n)}(0))^{\alpha_n}\, f^{(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}(0)\,.$$

C'est la *formule de Faa di Bruno* (1), qui donne la dérivée $n$-ième d'une fonction composée.

Interprétons maintenant le théorème de division. $I$ désignant encore l'un des intervalles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{F}_I^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Il est commode de désigner par $\dfrac{f(x)}{x}$ la fonction $g$, élément de $\mathcal{F}_I$, définie par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$, en vue d'énoncer le théorème suivant, conséquence immédiate du théorème VI.3.4 :

(1) *Faa di Bruno :* était l'élève préféré de Cauchy.

**THÉORÈME VI.5.3**

*Soit $I$ l'un des intervalles $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}$, et soit $f \in \mathscr{F}_I^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Alors :*

$$T_{\frac{f(x)}{x},0} = \frac{T_{f,0}(X)}{X} \text{ ce qui a bien un sens car val } (T_{f,0}(X) \geqslant 1)\,.$$

***Exercice 1 :*** Soit $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. Calculer en moins de 10 secondes $f^{(n)}(0)$. Question analogue avec $g(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$, puis $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ complétée en 0 par continuité.

# § VI.6 *DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES*

Continuons à désigner par $D$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, par $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point d'accumulation de $D$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, par $K$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$, par $N$ un entier $\geqslant 1$ et à utiliser les notations $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ et les notations de Landau dont une certaine pratique est supposée acquise.

**Ordre associé à la relation $f \in o(g)$ sur les fonctions non équivalentes à zéro**

Sur l'ensemble $\mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$, considérons la relation binaire $\preccurlyeq$ ainsi définie :

(1) $$f \preccurlyeq g \quad \text{ssi} \quad f = g \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\in} o(g(x))\,.$$

D'après les propriétés ($L_1$) et ($L_3$) du § VI.2, $\preccurlyeq$ est une *relation de préordre* sur $\mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'elle est *réflexive* et *transitive ;* mais elle n'est pas antisymétrique. En effet si $f \neq g$, $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq f$, on a $f(x) \underset{x \to a}{\in} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \to a}{\in} o(f(x))$, ce qui implique $f(x) \underset{x \to a}{\in} o(f(x))$ (et de même pour $g$), donc $f$ et $g$ sont *nulles au voisinage de a.*

Réciproquement si $f$ est nulle au voisinage de $a$ dans $D$, il est clair que $f \underset{a}{\in} o(h)$ pour toute $h \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ et en particulier $f \preccurlyeq g$.

Nous sommes donc conduits à désigner par $\mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$ l'ensemble des $f \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ *non équivalentes à zéro en a* pour obtenir :

**PROPOSITION VI.6.1**

*Sur l'ensemble $\mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$, la relation $\preccurlyeq$ définie par* (1) *est une* ***relation d'ordre.***

L'ensemble $(\mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R}), \preccurlyeq)$ n'est pas totalement ordonné (prendre deux fonctions égales au voisinage de $a$ mais non égales partout : c'est toujours possible, et cela prouve que l'ordre $\preccurlyeq$ n'est pas compatible avec la relation d'équivalence « $f$ et $g$ sont égales au voisinage de $a$ » sur $\mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$). En d'autres termes le fait pour $f$ et $g$ d'être égales au voisinage de $a$ ne donne *aucun renseignement* sur ce que sont $f$ et $g$ au voisinage d'un point $b \neq a$.

**Echelles de comparaison**

Pour la suite de ce §, nous conviendrons, pour $f \in \mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$, de noter $fg$ la fonction $x \mapsto f(x)\,g(x)$ dont l'ensemble de définition est *l'intersection* des ensembles de définition de $f$ et $g$. Alors $fg = gf$, pour toute $h \in \mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$, $h \,.\, 1 = 1 \,.\, h = h$ ; enfin $(fg)\,h = f(gh)$.

**DÉFINITION VI.6.1**

*On appelle* **échelle de comparaison au voisinage de a dans D** *toute partie* $\mathscr{E}$ *de* $\mathscr{F}_D^*(a, \mathbb{R})$ *non vide et* **totalement ordonnée** *par* $\preccurlyeq$ . *Une telle échelle est dite* stable par le produit *ssi les relations* $f \in \mathscr{E}$ *et* $g \in \mathscr{E}$ *entraînent* $fg \in \mathscr{E}$.

Toute partie non vide d'une échelle de comparaison en est encore une. Si une échelle de comparaison $\mathscr{E}$ est stable pour le produit, l'ordre $\preccurlyeq$ est *compatible avec ce produit ;* c'est-à-dire qu'on a, pour $f$, $g$, $h$ dans $\mathscr{E}$, $f \preccurlyeq g \Rightarrow fh \preccurlyeq gh$ et (si $h$ reste $\neq 0$ au voisinage de $a$) : $fh \preccurlyeq gh \Rightarrow f \preccurlyeq g$ (cf. propriété ($L_5$) du § VI.2).

***Exemple 1 :*** Soit $D$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $a = +\infty$. L'ensemble $\mathscr{L}_0$ des fonctions $\gamma_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ est une échelle de comparaison, stable pour le produit, au voisinage de $+\infty$ dans $D$. Pour cette échelle, $\gamma_\alpha \preccurlyeq \gamma_\beta \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta$. Les ensembles $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Q}}$, $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$, $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ en sont des sous-échelles, stables pour le produit.

Mais l'échelle $\mathscr{L}_0$ se révèle vite insuffisante pour bien apprécier le comportement de fonctions, même très simples, au voisinage de $+\infty$. En vue des prochains exemples, introduisons les *logarithmes itérés* $\mathrm{Log}_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ : si $p = 1$, $\mathrm{Log}_1$ est la fonction Log usuelle ; si $p \geqslant 2$, $\mathrm{Log}_p$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}\,(\mathrm{Log}_{p-1}(x))$ définie sur $]e_p, +\infty[$ où $e_1 = 0$ et $e_p = \mathrm{e}^{e_{p-1}}$ pour $p \geqslant 2$. Chaque fonction $\mathrm{Log}_p$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, strictement croissante sur $]e_p, +\infty[$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, et pour $p \geqslant 2$, sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}_1 x \ldots \mathrm{Log}_{p-1}(x)}$ ; elle prend des valeurs $> 0$ pour $x > e_{p+1}$.

***Exemple 2 :*** Reprenons $D$ partie non majorée de $\mathbb{R}$ et $a = +\infty$. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et notons $\mathscr{L}_p$ l'ensemble des fonctions, définies sur $D$ pour $x$ assez grand : $\Lambda_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} : x \mapsto x^{\alpha_0}(\mathrm{Log}_1 x)^{\alpha_1} \ldots (\mathrm{Log}_p x)^{\alpha_p}$, où $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ décrit $\mathbb{R}^{p+1}$. Pour

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq (0, 0, \ldots, 0)\,, \quad \text{soit} \quad q = \mathrm{Min}\ \{i \in [\![0, p]\!] \mid \alpha_i \neq 0\}\,.$$

Si $\alpha_q > 0$ (resp. $\alpha_q < 0$), on a :

$$\Lambda_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p}(x) \underset{x \to +\infty,\, x \in D}{\longrightarrow} +\infty \quad \left(\text{resp. } \Lambda_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p}(x) \underset{x \to +\infty,\, x \in D}{\longrightarrow} 0\right)$$

d'après la croissance comparée des logarithmes et puissances au voisinage de $+\infty$. Comme, pour $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ et $(\alpha'_0, \ldots, \alpha'_p)$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$, on a, dès que $x > e_{p+1}$ et $x \in D$

$$\frac{\Lambda_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p}(x)}{\Lambda_{\alpha'_0, \ldots, \alpha'_p}(x)} = \Lambda_{\alpha_0 - \alpha'_0, \ldots, \alpha_p - \alpha'_p}(x)\,,$$

on en déduit, lorsque $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \neq (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_p)$, en posant :

$$q = \mathrm{Min}\ \{i \in [\![0, p]\!] \mid \alpha_i \neq \alpha'_i\}\,,$$

que : $$\Lambda_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}(x) \underset{x \to +\infty,\, x\in D}{\in} o(\Lambda_{\alpha'_0,\ldots,\alpha'_p}(x)) \quad \text{si} \quad \alpha_q < \alpha'_q\,,$$

et que $$\Lambda_{\alpha'_0,\ldots,\alpha'_p}(x) \underset{x \to +\infty,\, x\in D}{\in} o(\Lambda_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}(x)) \quad \text{si} \quad \alpha_q > \alpha'_q$$

(cela montre en particulier que l'application $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \mapsto \Lambda_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}$ est injective). Il résulte de tout cela que *$\mathscr{L}_p$ est une échelle de comparaison, stable pour le produit, au voisinage de $+\infty$ dans D,* et que l'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{L}_p$ est isomorphe, par la bijection $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \mapsto \Lambda_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}$ à *l'ordre lexicographique* de $\mathbb{R}^{p+1}$.

L'échelle $\mathscr{L}_0$ de l'exemple 1 est une sous-échelle de chaque $\mathscr{L}_p$.

***Exemple 3 :*** En réunissant tous les $\mathscr{L}_p$ (pour $p \in \mathbb{N}$) on obtient une échelle de comparaison $\mathscr{L}$ au voisinage de $+\infty$ dans $D$ (car $\mathscr{L}_p \subset \mathscr{L}_q$ pour $p \leqslant q$). L'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathscr{L}$ est isomorphe à l'ordre lexicographique induit par celui de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, si on identifie chaque élément $\Lambda_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}$ de $\mathscr{L}_p$ $(p \in \mathbb{N})$ à $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

L'échelle $\mathscr{L}$ est appelée **échelle des puissances-logarithmes** au voisinage de $+\infty$ dans $D$ (à noter que l'intersection des ensembles de définition des $f \in \mathscr{L}$ est vide).

***Exemple 4 :*** Avec $D$ non majorée dans $\mathbb{R}_+^*$ et $a = +\infty$, soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions $H_{\alpha,F} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\alpha}\exp(F(x))$, où $F \in \mathbb{R}[X]$ et val $(F) \geqslant 1$, et où $\alpha \in \mathbb{R}$. Il est clair que l'application $(\alpha, F) \mapsto H_{\alpha,F}$ est injective, et d'après la croissance comparée des puissances et des exponentielles au voisinage de $+\infty$, on voit que $\mathscr{H}$ est une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$ dans $D$, stable pour le produit. En désignant par $\delta(F)$ le *coefficient dominant* du polynôme non nul $F$, on voit que pour $H_{\alpha_1,F_1} \neq H_{\alpha_2,F_2}$ :

$$\Big[H_{\alpha_1,F_1} \underset{+\infty}{\in} o(H_{\alpha_2,F_2})\Big] \Leftrightarrow \Big[(F_1 \neq F_2 \text{ et } \delta(F_1 - F_2) < 0) \text{ ou } (F_1 = F_2 \text{ et } \alpha_1 < \alpha_2)\Big].$$

***Exemple 5 :*** On prend $D \subset \mathbb{R}^*$ et admettant 0 pour point d'accumulation. L'ensemble des fonctions $x \mapsto x^n$, où $n$ décrit $\mathbb{Z}$, est une échelle de comparaison, stable pour le produit, au voisinage de 0 dans $D$. On a : $x^n \underset{x \to 0,\, x\in D}{\in} o(x^p)$ ssi $n > p$.

Avec $D \subset \mathbb{R}_+^*$ admettant 0 pour point d'accumulation, l'ensemble des fonctions $\Pi_{\alpha,\beta} : x \mapsto x^{\alpha}|\text{Log}\, x|^{\beta}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, est une échelle de comparaison, stable pour le produit, au voisinage de 0 dans $D$, dont la précédente est une sous-échelle.

***Remarque 1 :*** Dans les exemples ci-dessus toutes les échelles de comparaison sont formées de fonctions qui ne s'annulent jamais au voisinage de $a$. Donc, pour ces échelles, lorsque $(f, g, h) \in \mathscr{E}^3$, les relations $f \preccurlyeq g$ et $fh \preccurlyeq gh$ sont équivalentes.

**Notion de partie principale**

Quand on veut étudier le « comportement » d'une fonction $f$ au voisinage d'un point $a$, l'idée la plus simple consiste à lui substituer une fonction $\varphi$ faisant partie d'une échelle de comparaison, et dont le comportement est censé ê

**DÉFINITION VI.6.2**

*Soit $\mathscr{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de a dans D, et $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$. On dit que f admet une* **partie principale,** *relativement à $\mathscr{E}$, au voisinage de a ssi il existe un $c \in K^N \setminus \{0\}$ et une fonction $\varphi \in \mathscr{E}$ tels que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} c\varphi(x)$. Toute fonction $x \mapsto c\varphi(x)$ vérifiant ces conditions est appelée* **partie principale** *de f au voisinage de a, relativement à $\mathscr{E}$.*

La notion de partie principale est évidemment *locale au point a.*

**THÉORÈME VI.6.1**

*Avec les notations de la définition* VI.6.2, *une fonction $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ admet* au plus une *partie principale relativement à $\mathscr{E}$.*

*Démonstration :*

$$\text{Supposons} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} c_1\, \varphi_1(x) \underset{x \to a}{\sim} c_2\, \varphi_2(x).$$

Si on avait $\varphi_1(x) \underset{x \to a}{\in} o(\varphi_2(x))$, on en déduirait $c_1\, \varphi_1(x) \underset{x \to a}{\in} o(c_2\, \varphi_2(x))$ (car $c_2 \neq 0$), d'où $c_1\, \varphi_1(x) \underset{x \to a}{\in} o(c_1\, \varphi_1(x))$, d'où $\varphi_1(x) \underset{x \to a}{\in} o(\varphi_1(x))$, ce qui est absurde car $\varphi_1 \in \mathscr{E}$. On prouve de même que $\varphi_2(x) \underset{x \to a}{\in} o(\varphi_1(x))$ est impossible, d'où la conclusion $\varphi_1 = \varphi_2$. Ensuite (en posant $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$), on tire de

$$c_1\, \varphi_1(x) \underset{x \to a}{\sim} c_2\, \varphi_2(x) : (c_1 - c_2)\, \varphi(x) \underset{x \to a}{\in} o(c_2\, \varphi_2(x)) .$$

Si on avait $c = c_1 - c_2 \neq 0$ cela entraînerait $c\varphi(x) \underset{x \to a}{\in} o(\varphi(x))$, ce qui est absurde, d'où finalement $c_1 = c_2$. ■

Bien entendu, l'existence d'une partie principale dépend essentiellement de la richesse de l'échelle de comparaison $\mathscr{E}$. Par exemple $x \mapsto \operatorname{Log} x$ n'admet pas de partie principale au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle $\mathscr{L}_0$ de l'exemple 1, mais s'admet elle-même comme partie principale dans l'échelle $\mathscr{L}_1$ de l'exemple 2.

**Notion de développement asymptotique**

Pour préciser un peu mieux le comportement local de *f*, on ne se contente généralement pas de la partie principale $\varphi$, mais on peut s'intéresser au « reste » $f - c\varphi$ ([1]).

**DÉFINITION VI.6.3**

*Soit $\mathscr{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de a dans D, soit $\psi \in \mathscr{E}$ et $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$. On dit que f admet un* développement asymptotique à la précision $\psi$ relativement à $\mathscr{E}$ *(en abrégé : un* $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$*) ssi il existe une famille $(c_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi}$* **à support fini** *d'éléments de $K^N$ telle que*

$$(2) \qquad f(x) - \sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\, \varphi(x) \underset{x \to a}{\in} o(\psi(x)) .$$

([1]) (Dans ce qui suit, le produit d'un scalaire $\lambda \in K$ par un vecteu- - - $K^N$ ---- indifféremment noté $\lambda v$ ou $v\lambda$).

L'existence d'un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ est évidemment une *propriété locale au point a* pour la fonction $f$.

***Exemple 6 :*** Si $a \in \mathbb{R}$ est l'échelle des fonctions : $D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-a)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on reconnaît la notion de *développement limité usuel au point a*.

***Exemple 7 :*** Si $a \in \mathbb{R}$, $a \notin D$ et si $\mathscr{E}$ est l'échelle des fonctions : $D \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-a)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), les développements asymptotiques relatifs à $\mathscr{E}$ s'appellent *développements limités généralisés* (ou *méromorphes*) au point $a$.

***Remarque 2 :*** La richesse de l'échelle de comparaison choisie $\mathscr{E}$ a pour contrepartie que l'ordre $\preccurlyeq$ y est plus compliqué que l'ordre naturel de $\mathbb{N}$ utilisé pour les DL. Si on considère l'échelle $\mathscr{L}_1$ de l'exemple 3, il n'y a pas lieu de s'étonner qu'entre $\psi_1 : x \mapsto x \operatorname{Log} x$ et $\psi_2 : x \mapsto x(\operatorname{Log} x)^2$ il y a une infinité d'éléments $\varphi \in \mathscr{L}_1$ tels que $\psi_1 \preccurlyeq \varphi \preccurlyeq \psi_2$.

**THÉORÈME VI.6.2**

*Avec les notations de la définition* VI.6.3 *pour* $\psi \in \mathscr{E}$ *et* $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ *donnés, il existe* **au plus une** *famille* $(c_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi}$ *vérifiant* (2).

*Démonstration :*

Par soustraction on se ramène au cas $f = 0$, ce que nous supposerons donc. Si l'on a une famille $(c_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi}$ dans $K^N$, *à support fini*, telle que $\sum\limits_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\, \varphi \in o(\psi)$, il s'agit de prouver que chaque $c_\varphi$ est nul. Or si ce n'était pas le cas, soit $\varphi_0$ le plus grand des $\varphi \in \mathscr{E}$ tels que $\psi \preccurlyeq \varphi$ figurant dans le membre de gauche avec un coefficient $c_{\varphi_0} \neq 0$. Alors chacun des termes de la somme autre que $c_{\varphi_0}\, \varphi_0$ est élément de $o(\varphi_0)$, et $o(\psi) \subset o(\varphi_0)$. Il s'ensuivrait $c_{\varphi_0}\, \varphi_0 \underset{a}{\in} o(\varphi_0)$, ce qui est absurde. Donc les $c_\varphi$ ($\psi \preccurlyeq \varphi$) sont tous nuls, d'où le théorème d'unicité. ■

**DÉFINITION VI.6.4**

*Soit* $\mathscr{E}$ *une échelle de comparaison donnée au voisinage de a dans D. Si* $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ *admet un* $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$, *la fonction unique* $x \mapsto \sum\limits_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\, \varphi(x)$ *définie par* (2) *s'appelle* **partie régulière** *du* $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ *de f, et la fonction* $x \mapsto f(x) - \sum\limits_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\, \varphi(x)$ *s'appelle le* **reste** *de ce* $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$.

Si $f$ admet un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$, sa partie régulière est une *propriété locale en a* de $f$. Pour que la partie régulière du $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ de $f$ soit la fonction nulle, il faut et il suffit que chaque $c_\varphi$ soit nul, ce qui équivaut à $f \underset{a}{\in} o(\psi)$. Supposons que $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ admette un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ de *partie régulière non nulle* $\sum c_\varphi\, \varphi$. Comme il s'agit d'une somme à support fini, on peut ranger les $\varphi \in \mathscr{E}$ tels que $\psi \preccurlyeq \varphi$ et $c_\varphi \neq 0$ en une suite finie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ telle que $\psi \preccurlyeq \varphi_n \underset{\neq}{\preccurlyeq} \varphi_{n-1} \underset{\neq}{\preccurlyeq} \ldots \underset{\neq}{\preccurlyeq} \varphi_1$. Alors :

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\sim} c_{\varphi_1}\, \varphi_1(x)\,, \quad f(x) - c_{\varphi_1}\, \varphi_1(x) \underset{x \to a}{\sim} c_{\varphi_2}\, \varphi_2(x), \ldots, \\ f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_{\varphi_k} \varphi_k(x) \underset{x \to a}{\sim} c_{\varphi_n}\, \varphi_n(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} c_{\varphi_k}\, \varphi_k(x) \underset{x}{=} o(\psi(x)) \end{cases}$$

ce qui signifie que $f$ admet, relativement à $\mathscr{E}$, une *partie principale* qui est $c_{\varphi_1}\varphi_1$, que $f - c_{\varphi_1}\varphi_1$ admet la partie principale $c_{\varphi_2}\varphi_2, \ldots, f - \sum_{k=1}^{n-1} c_{\varphi_k}\varphi_k$ admet la partie principale $c_{\varphi_n}\varphi_n$.

Réciproquement, si on a pu trouver $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathscr{E}$, avec $\psi \underset{\neq}{\prec} \varphi_n \underset{\neq}{\prec} \cdots \underset{\neq}{\prec} \varphi_1$ et $c_{\varphi_1}, \ldots, c_{\varphi_n}$ dans $K$ tels que (3) soit vérifié, alors $f$ admet un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$, dont la partie régulière est $\sum_{k=1}^{n} c_{\varphi_k}\varphi_k$.

*Dans la pratique, c'est en recherchant ces parties principales successives définies par* (3) *que l'on a le plus de chances de découvrir d'éventuels* $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ *pour une fonction f donnée.*

**Opérations sur les développements asymptotiques**

Bornons-nous aux opérations les plus simples qu'on peut effectuer sur des développement asymptotiques en indiquant sans démonstration les propriétés essentielles.

$(\mathscr{D}\mathscr{A}_1)$ (Troncature). Soit $f \in \mathscr{F}_D(a, K^N)$ admettant un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$, de partie régulière $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\varphi$. Pour toute $\eta \in \mathscr{E}$, telle que $\psi \underset{\neq}{\prec} \eta$, $f$ admet un $\mathrm{DA}_\eta(\mathscr{E})$, dont *la partie régulière est* $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \eta \prec \varphi} c_\varphi\varphi$.

$(\mathscr{D}\mathscr{A}_2)$ (Somme). Soit $f$ et $g$ dans $\mathscr{F}_D(a, K^N)$ admettant chacune un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ de parties régulières respectives $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c_\varphi\varphi$ et $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} c'_\varphi\varphi$. Pour $(\lambda, \mu) \in K^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$, dont *la partie régulière est* $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} (\lambda c_\varphi + \mu c'_\varphi)\varphi$.

$(\mathscr{D}\mathscr{A}_3)$ (Produit). Supposons l'échelle $\mathscr{E}$ stable pour le produit. Soit $f$ (resp. $g$) dans $\mathscr{F}_D(a, K)$ admettant un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ (resp. un $\mathrm{DA}_\eta(\mathscr{E})$), de partie régulière $\sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \psi \prec \varphi} a_\varphi\varphi$ $\left(\text{resp. } \sum_{\varphi \in \mathscr{E},\, \eta \prec \varphi} b_\varphi\varphi\right)$ *supposées non nulles,* de partie principale $a\alpha$ (resp. $b\beta$). Posons $\theta = \mathrm{Max}\,(\psi\beta, \eta\alpha)$ dans $(\mathscr{E}, \prec)$. Alors $fg$ admet un $\mathrm{DA}_\theta(\mathscr{E})$ dont *la partie régulière s'obtient en ne retenant dans le produit des parties régulières* $\sum_{\varphi \prec \varphi_1,\, \eta \prec \varphi_2} a_{\varphi_1} b_{\varphi_2}\varphi_1\varphi_2$ *que les termes tels que* $\theta \prec \varphi_1\varphi_2$.

$(\mathscr{D}\mathscr{A}_4)$ (Composition). Supposons l'échelle $\mathscr{E}$ stable pour le produit.

On donne $f \in \mathscr{F}_\Delta(0, K^N)$ admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ fort : $f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \in O(x^{n+1})$ (0 étant un point d'accumulation de $\Delta \subset \mathbb{R}$).

Soit par ailleurs $\psi \in \mathscr{E}$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, \mathbb{R})$ à valeurs dans $\Delta$, admettant un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ de partie régulière non nulle

$$R : t \mapsto \sum_{k=1}^{p} a_k\varphi_k(t), \quad \text{où} \quad \psi \prec \varphi_p \underset{\neq}{\prec} \varphi_{p-1} \underset{\neq}{\prec} \cdots \underset{\neq}{\prec} \varphi_1 \quad (p \in \mathbb{N}^*).$$

On suppose $\varphi_1(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} 0$, et $\varphi_1^{n+1} \underset{\neq}{\prec} \psi \underset{\neq}{\prec} \varphi_1^n$. Alors $f \circ g$ admet un $\mathrm{DA}_\psi(\mathscr{E})$ dont *la partie régulière s'obtient en ne retenant dans* $\sum_{k=0}^{n} c_k R^k$ *que les terr*

***Exemple 8 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ $(n \geqslant 2)$, *admettant* 0 *comme zéro d'ordre p exactement*, avec $p \in [\![1, n-1]\!]$ (on a donc : $f(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$, $f^{(p)}(0) \neq 0$). Le théorème de division montre que la fonction $g: I \longrightarrow \mathbb{C}$, $0 \mapsto \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \in I \setminus \{0\}$, est de classe $\mathscr{C}^{n-p}$ sur $I$. Comme $g(0) \neq 0$, $\dfrac{1}{g} \in \mathscr{F}_I(0, \mathbb{C})$ est de classe $\mathscr{C}^{n-p}$ au voisinage de 0 et admet un $\mathrm{DL}_{n-p}(0)$ de partie régulière $b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-p} x^{n-p}$. Alors, pour $x \in I \setminus \{0\}$ voisin de 0, on a :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^p} \times \frac{1}{g(x)} = b_0 x^{-p} + b_1 x^{-p+1} + \cdots + b_n x^{n-2p} + \rho(x)$$

avec
$$\rho(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\in} o(x^{n-2p}),$$

autrement dit $\dfrac{1}{f}$ (élément de $\mathscr{F}_{I \setminus \{0\}}(0, \mathbb{C})$ *admet en* 0 *un développement limité généralisé à la précision* $x^{n-2p}$.

***Exemple 9 :*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On se propose de développer, à la précision $\dfrac{1}{x^4}$, dans l'échelle $\mathscr{L}_1$ de l'exemple 2, la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x} \left( \dfrac{\mathrm{Log}\,(x+1)}{\mathrm{Log}\,x} \right)^{\alpha}$ au voisinage de $+\infty$.

On peut écrire $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \left( 1 + \dfrac{\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x} \right)^{\alpha}$, et si l'on sait développer à la précision demandée la fonction $x \mapsto g(x) = \left( 1 + \dfrac{\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x} \right)^{\alpha}$ il sera ensuite facile de développer $f$.

On a d'abord $g(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, et ensuite

$$g(x) - 1 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{\mathrm{Log}\,x} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x\,\mathrm{Log}\,x},$$

ce qui donne la partie principale de $g(x) - 1$ dans l'échelle $\mathscr{L}_1$. On peut écrire ensuite :

$$u = \frac{1}{\mathrm{Log}\,x} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x} - \frac{1}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x} + \frac{1}{3x^3\,\mathrm{Log}\,x} + \frac{1}{x^4}\rho_1(x)$$

(avec $\rho_1(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$), développer $(1+u)^{\alpha}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 :

$$(1+u)^{\alpha} = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} u^3 + u^4 \sigma_1(u)$$

(avec $\sigma_1(u)$ bornée au voisinage de $u = 0$) et utiliser $(\mathscr{D}\mathscr{A}_4)$ avec

$$R(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x} \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2}\right),$$

ce qui donne

$$\begin{array}{lll|c}
R(x) = \dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x}\left(1-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3x^2}\right) & = \dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x}-\dfrac{1}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x} & +\dfrac{1}{3x^3\,\mathrm{Log}\,x} & \alpha \\
[R^2(x)]_{\frac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{x^2(\mathrm{Log}\,x)^2}\left[\left(1-\dfrac{1}{2x}+\cdots\right)^2\right]_{\frac{1}{x}} & = \dfrac{1}{x^2\,\mathrm{Log}^2\,x} & -\dfrac{1}{x^3\,\mathrm{Log}^2\,x} & \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} \\
[R^3(x)]_{\frac{1}{x^4}} = \dfrac{1}{x^3(\mathrm{Log}\,x)^3}[(1+\cdots)^3]_1 & = & \dfrac{1}{x^3\,\mathrm{Log}^3\,x} & \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}
\end{array}$$

---

$$[g(x)]_{\frac{1}{x^4}} = 1+\frac{\alpha}{x\,\mathrm{Log}\,x}-\frac{\alpha}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2\,\mathrm{Log}^2\,x}+ \\ +\frac{\alpha}{3x^3\,\mathrm{Log}\,x}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^3\,\mathrm{Log}^2\,x}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6x^{3\,\mathrm{Log}^3 x}}$$

(en ordonnant correctement les différents termes). Pour avoir le DA de $f$ demandé, il suffit de multiplier par $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et d'ordonner, d'où :

$$[f(x)]_{\frac{1}{x^4}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x\,\mathrm{Log}\,x}+\frac{\alpha}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2\,\mathrm{Log}^2\,x}-\frac{\alpha}{6x^3\,\mathrm{Log}\,x}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6x^3\,\mathrm{Log}^3\,x},$$

après réduction des termes « semblables ».

***Exemple 10 :*** Au voisinage de $+\infty$, développons $f(x)=\dfrac{\mathrm{Log}_2\,(x+1)}{\mathrm{Log}_2\,(x)}$ dans l'échelle $\mathscr{L}_2$ de l'exemple 2 à la précision $\dfrac{1}{x^3\,\mathrm{Log}_2\,x}$.

Ecrivons d'abord

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\mathrm{Log}_2\,(x)}\left(\mathrm{Log}\left[\mathrm{Log}\,x+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{Log}_2\,(x)}\left(\mathrm{Log}_2\,x+\mathrm{Log}\left(1+\frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x}\right)\right) \\
&= 1+\frac{1}{\mathrm{Log}_2\,(x)}\mathrm{Log}\left(1+\frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x}\right),
\end{aligned}$$

d'où
$$f(x)-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x\,\mathrm{Log}_2\,x}.$$

Pour obtenir le développement demandé, il suffit d'écrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{Log}\,(1+u)$ (car c'est un $\mathrm{DL}_2(0)$ *fort*), avec $u=\dfrac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x}$ de partie régulière $\dfrac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x}-\dfrac{1}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x}$.

$$\left[\mathrm{Log}\left[1+\frac{\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{Log}\,x}\right]\right]_{\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{x\,\mathrm{Log}\,x}-\frac{1}{2x^2\,\mathrm{Log}\,x}-\frac{1}{2x^2\,\mathrm{L}},$$

et enfin :

$$[f(x)]_{\frac{1}{x^3 \operatorname{Log}_2 x}} = 1 + \frac{1}{x \operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x} - \frac{1}{2\,x^2 \operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x} - \frac{1}{2\,x^2 \operatorname{Log}^2 x \operatorname{Log}_2 x}\,.$$

***Exemple 11 :*** Soit $A > 0$ et $f : [0, A] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante, telle que $f(0) = 0$, continue, vérifiant $0 < f(x) < x$ pour $x \in\, ]0, A]$ et admettant un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la forme

$$[f(x)]_3 = x - ax^2 + bx^3 \quad \text{avec} \quad a > 0 \text{ et } b \neq a^2 .$$

A partir de $u_0 = \lambda \in\, ]0, a]$, définissons par récurrence la suite $(u_n)$ telle que $(\forall n \geqslant 0)\ u_{n+1} = f(u_n)$. Nous allons déterminer un développement asymptotique de $u_n$ par rapport à $n$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Pour cela utilisons *la méthode des parties principales successives*. Comme $f([0, A]) \subset [0, a]$ la suite $(u_n)$ est bien définie et à valeurs dans $[0, a]$. Comme $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ la suite est strictement décroissante. Minorée par $0$ elle a donc une limite $l \geqslant 0$, et par continuité de $f$, on a $f(l) = l$ dont par hypothèse la seule solution sur $[0, a]$ est $l = 0$. Ainsi $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\downarrow} 0$, mais il est plus commode d'étudier l'infiniment grand $\dfrac{1}{u_n}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$, $]0, A] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet au point $0$ le *développement limité généralisé* suivant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{x(1 - ax + bx^2 + x^2 \rho_1(x))} = \frac{1}{x}\,(1 + ax + (a^2 - b)\,x^2 + x^2 \rho_2(x)) \\ &= \frac{1}{x} + a + (a^2 - b)\,x + x\rho_2(x) \quad (\text{avec } \rho_1(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,\ \rho_2(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0)\,.\end{aligned}$$

On en déduit $\quad \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{f(u_n)} = \dfrac{1}{u_n} + a + (a^2 - b)\,u_n + u_n\,\varphi_2(u_n),$

d'où $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} a$. Le *théorème de Cesaro* entraîne donc que $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0} \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} na$, d'où $nu_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a}$, et comme $a \neq 0$, cela donne déjà la partie principale de $u_n : u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \dfrac{1}{an}$.

La suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n} - an$ vérifie donc $v_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(n)$ et on a :

$$v_{n+1} - v_n = -a + \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = (a^2 - b)\,u_n + u_n\,\rho_2(u_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \frac{a^2 - b}{an}\,.$$

Nous verrons, dans le chapitre sur les séries, que cela entraîne par addition

$$v_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \frac{a^2 - b}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

c'est-à-dire (cf. § VI.2, exemple 6) $v_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \dfrac{a^2 - b}{a} \operatorname{Log} n$. On a donc

$$u_n = \frac{1}{an + \dfrac{a^2 - b}{a} \operatorname{Log} n + \rho_3(n)}\,, \quad \text{avec} \quad \rho_3(n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\in} o(\operatorname{Log} n)\,,$$

d'où $\quad u_n = \dfrac{1}{a_n}\left(1 - \dfrac{a^2 - b}{a^2}\dfrac{\operatorname{Log} n}{n} + \rho_n(n)\right)$ , avec $\rho_4(n) \underset{n \to \infty}{\in} o\left(\dfrac{\operatorname{Log} n}{n}\right)$,

d'où le développement, dans l'échelle des puissances-logarithmes :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{an} - \frac{a^2 - b}{a^3}\frac{\operatorname{Log} n}{n^2} + \rho(n)}\ , \quad \text{où} \quad \rho(n) \underset{n \to \infty}{\in} o\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^2}\right).$$

***Exemple 12 :*** *Branches infinies de courbes* $y = f(x)$.

Soit $f : [A, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, où $A \in [-\infty, +\infty[$, de graphe $\Gamma_f$. On dit alors que $\Gamma_f$ présente une **branche infinie** quand $x \longrightarrow +\infty$ (on définit de manière analogue des branches infinies quand $x \longrightarrow -\infty$ pour des fonctions définies au voisinage de $-\infty$).

Soit alors $g : [B, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant B < +\infty)$. On dit que **le graphe $\Gamma_g$ est asymptote à $\Gamma_f$** au voisinage de $+\infty$ ssi $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier *si $g$ est affine* et si $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on dit que $\Gamma_g$ est une **droite asymptote** à $\Gamma_f$ au voisinage de $+\infty$. Dire que $\Gamma_f$ admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ signifie donc que, par rapport à la variable $t = \dfrac{1}{x}$, la fonction $x \mapsto f(x)$ *admet un* $\mathrm{DL}_0(0)$ *généralisé* de la forme $f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{a}{t} + b + \rho(t)$, avec $\rho(t) \underset{t \underset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} 0$. Cela montre, lorsqu'il en existe, l'*unicité* d'une droite asymptote, le cas $a = 0$ correspondant au cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ (cas d'une *asymptote horizontale*). Si de plus on peut déterminer le signe de $\rho(t)$ au voisinage de $t = 0$ $(t > 0)$, cela donne *la position de $\Gamma_f$ par rapport à l'asymptote* éventuelle.

Un autre cas simple est celui où $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et où $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (ou encore $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$). On dit alors que $\Gamma_f$ présente **une branche parabolique** quand $x \longrightarrow +\infty$ dans la direction $Oy$. C'est dans un tel cas que le développement asymptotique de $f$ relativement à une échelle convenable $\mathscr{E}$ peut se révéler le plus utile et c'est sans doute de là qu'il tire son nom. Mais il est évident que bien d'autres circonstances peuvent se présenter : $x \mapsto \sin x$ possède une *direction asymptotique $Ox$* quand $x \longrightarrow +\infty$, mais pas d'asymptote, $x \mapsto \operatorname{Log} x$ possède une branche parabolique, mais dans la direction $Ox$ (dans un tel cas la notion de courbes asymptotes devrait être raffinée), $x \mapsto x + \operatorname{Log} x$ a une branche parabolique oblique, ... Contentons-nous d'illustrer ce qui précède par l'étude d'un exemple simple, où $\Gamma_f$ possède une asymptote oblique :

Soit à construire $\Gamma_f$ pour $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ ; $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{x(x^3 - x^2 + 3x - 1)}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{e}^{1/x}$. La fonction $x \mapsto x^3 - x^2 + 3x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et admet un unique zéro $\alpha$ qui appartient à $\left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$ ; $\Gamma_f$ possède un point d'arrêt (quand $x \underset{<}{\to} 0$, $f(x)$ —

tangente horizontale car $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \overset{<}{\to} 0}{\longrightarrow} 0$. En revanche, quand $x \overset{>}{\to} 0$, $f(x) \longrightarrow +\infty$, ce qui donne pour $\Gamma_f$ une asymptote verticale $Oy$. Etudions maintenant les autres branches infinies. Par rapport à la variable $t = \dfrac{1}{x}$, il est manifeste que $f$ admet des DL généralisés à tout ordre au voisinage de 0. Un $DL_1(0)$ par rapport à $t$ est suffisant :

$$\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1 = \left[\frac{e^t}{t(1+t^2)}\right]_1 = \frac{1}{t}\left[\frac{e^t}{1+t^2}\right]_2 = \frac{1}{t}\left(1+t-\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{t}+1-\frac{t}{2}.$$

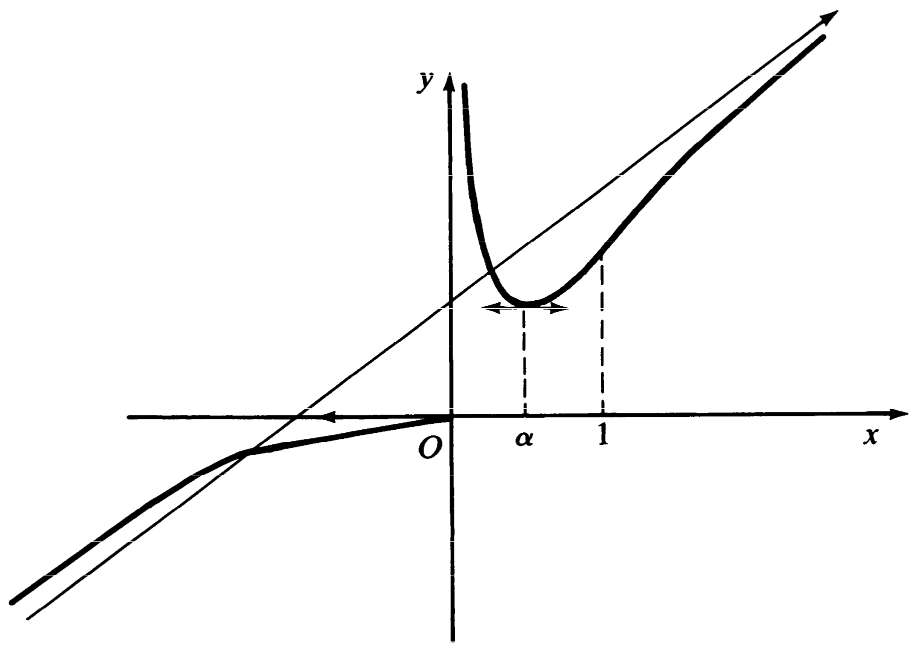
Par suite

$$f(x) = g(x) + \rho(x)\,, \quad \text{avec} \quad g(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad \rho(x) \underset{|x| \to +\infty}{\in} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où l'asymptote à $\Gamma_f$ d'équation $y = x + 1$ (la même droite pour les deux branches infinies $x \longrightarrow +\infty$ et $x \longrightarrow -\infty$), et la position de $\Gamma_f$ par rapport à cette asymptote donnée par le signe de $\dfrac{-1}{2x}$.

*Tableau :*

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




*Graphe :*

On peut achever l'étude de $f$ par le calcul des coordonnées de quelques points de $\Gamma_f$ (par exemple les points sur l'asymptote oblique) et l'étude de la concavité :

$$f''(x) = -\frac{e^{1/x}}{x(x^2+1)^3}\,P(x)\,,$$

avec $\quad P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x^3 + 5x^2 - 3x + 1)$

ce qui donne deux points d'inflexion de $\Gamma_f$, l'un d'abscisse $x' = 1$, l'autre d'abscisse $x'' \in ]-6, -5[$.

***Exercice 1 :*** Calculer les développements asymptotiques suivants :

*a*) A la précision $x^4$ au voisinage de 0, pour $x \mapsto x^x - (\sin x)^{\sin x}$ dans l'échelle des $x^{\alpha} |\mathrm{Log}\, x|^{\beta}$ $(x > 0)$.

*b*) A la précision $\dfrac{1}{\mathrm{Log}^5 x}$ au voisinage de $+\infty$ dans l'échelle des puissances-logarithmes, pour $x \mapsto (\mathrm{Log}\,(1 + \mathrm{Arc}\sin x))^{\frac{1}{\mathrm{Log}\, x}}$.

*c*) A la précision $\dfrac{1}{x^4}$ au voisinage de $+\infty$, dans l'échelle des puissances-logarithmes, pour $x \mapsto x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}$, et pour $x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{x^{\frac{1}{x}}}$.

*d*) A la précision $\dfrac{1}{x^5}$, dans la même échelle au voisinage de $+\infty$, pour $x \mapsto \left(\dfrac{\mathrm{Log}\, x}{x}\right)^{1/x}$.

***Exercice 2 :*** *a*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\alpha} e^x$. Vérifier que $f$ admet une fonction réciproque $g$ de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ strictement croissante au voisinage de $+\infty$, et calculer, dans l'échelle des puissances logarithmes, un développement asymptotique de $g$ contenant 6 termes $\neq 0$.

*b*) Même question pour $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x\,|\mathrm{Log}\,\alpha|^{\alpha}$.

*Indication :* Appliquer la méthode des équivalents successifs.

***Exercice 3 :*** On donne $p$ entier $\geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Trouver un équivalent, quand $x \longrightarrow +\infty$, de

$$x \mapsto \frac{x\,\mathrm{Log}\, x\,\mathrm{Log}_2\, x \ldots \mathrm{Log}_{p-1}\, x (\mathrm{Log}_p\, x)^{\alpha}}{(x+1)\,\mathrm{Log}\,(x+1) \ldots \mathrm{Log}_{p-1}(x+1)\,(\mathrm{Log}_p(x+1))^{\alpha}} - 1\,.$$

***Exercice 4 :*** Soit la suite $(u_n)$ définie à partir de $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin u_n$ $(n \geqslant 0)$. Montrer en s'inspirant de l'exemple 11 que l'on a :

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}} - \frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Log}\, n}{10\, n^{3/2}} + \rho(n)\,, \quad \text{avec} \quad \rho(n) \underset{n \to \infty}{\in} o\left(\frac{\mathrm{Log}\, n}{n^{3/2}}\right).$$

***Exercice 5 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels $> 0$. Au voisinage de 0, dans l'échelle des $(x^{\lambda})_{\lambda > 0}$, calculer un développement asymptotique à la précision $x^N$ ($N$ entier donné $\geqslant 1$) de $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x^{\alpha}}{1 - x^{\beta}}\right)$.

***Exercice 6 :*** Etudier les variations des fonctions suivantes et dessiner leurs graphes, en étudiant de près les branches infinies (asymptote éventuelle, placement par rapport à l'asymptote) :

*a*) $x \mapsto x\, e^{\frac{x}{x^2-1}}$ $\qquad$ *b*) $x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1} e^{1/x}$ $\qquad$ *c*) $x \mapsto x^2 e^{1/x} - x^2 - x$

*d*) $x \mapsto \dfrac{1}{e^{1/x} - 1}$ $\qquad$ *e*) $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \sqrt{x^2 + x + 1}\,\mathrm{Arc\,tg}\, x$ $\qquad$ *f*) $x \mapsto \exp\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

*g*) $x \mapsto x\,\mathrm{Arc\,tg}\,(x-1)$ $\qquad$ *h*) $x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ $\qquad$ *i*) $x \mapsto (1+x)^{1 + \frac{1}{\mathrm{Log}\, x}}$

*j* $x \mapsto \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1}}$ $\qquad$ *k*) $x \mapsto \sqrt{x(x+2)}\, e^{1/x}$.

***Exercice 7 :*** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres $\geq 0$. On pose :

$$u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}} \quad \text{(avec } n \text{ radicaux superposés)}.$$

*a*) Montrer que si tous les $a_n$ sont égaux à 1, la suite $(u_n)$ est majorée par 2 et qu'elle a pour limite $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

*b*) Montrer que s'il existe un $\lambda > 0$ tel que $a_n \leq \lambda^{2^n}$ pour tout $n$, la suite $(u_n)$ est convergente. Quelle est sa limite pour $a_n = \lambda^{2^n}$ ?

*c*) Montrer que s'il existe un $\beta > 2$ tel que, pour une infinité de valeurs de $n$ on ait $a_n > c^{\beta^n}$, alors $u_n \longrightarrow +\infty$ et plus précisément que, pour ces valeurs de $n$, on a $u_n \geq \exp\left(\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n\right)$.

*d*) Pour $a_n = n$, montrer que $u_n \longrightarrow \xi = 1{,}757932\ldots$ et que $\xi - u_n < \dfrac{1}{\sqrt{(n-1)!}}$. Donner une valeur approchée de $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ si $a_n = n!$ (resp. $a_n = n^n$).

***Exercice 8 :*** Soit $x$ un nombre réel $> 0$.

*a*) Si $N_1(x)$ est le nombre des naturels $n \leq x$ qui sont de la forme $a^m$ ($a$ entier $> 1$, $m$ entier $> 1$), montrer que, au voisinage de $+\infty$, on a : $N_1(x) \in O(\sqrt{x}\,\mathrm{Log}\,x)$ (observer que $2^m \leq x$ et $a^2 \leq x$).

*b*) Si $N_2(x)$ est le nombre des naturels $n \leq x$ tels que $n = a^b + c^d$ ($a, b, c, d$ entiers $> 1$, $b$ et $d$ n'étant *pas tous deux égaux à* 2), montrer que, au voisinage de $+\infty$, $N_2(x) \in O(x^{5/6}\,\mathrm{Log}^2\,x)$ (supposer $b \geq 2$, $d \geq 3$).

*c*) En déduire que si $N(x)$ est le nombre des naturels $n \leq x$ tels que $n = a^b + c^d$ avec $a \geq 0$, $c \geq 0$, $b \geq 2$, $d \geq 2$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, $N(x) \leq \left(\dfrac{3}{4} + \varepsilon\right) x$ au voisinage de $+\infty$ (observer que la somme de deux carrés n'est jamais de la forme $4k+3$, avec $k \in \mathbb{N}$).

# Chapitre VII

# *NOTIONS SUR L'INTÉGRATION*

Dans tout ce chapitre, $K$ désignera soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

**Introduction**

Pour cette prise de contact avec le concept d'**intégrale,** nous considérons exclusivement des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ces dernières par le biais des parties réelle et imaginaire ; si bien qu'en dernier ressort, ce sont les **fonctions numériques** qui vont jouer le rôle essentiel. Ce n'est que plus tard, au Tome 3, que nous reprendrons l'étude de l'intégrale pour l'étendre à des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé.

On a longtemps considéré que l'interprétation de l'intégrale comme **aire** d'une portion de plan conduisait à s'intéresser particulièrement aux fonctions *continues* sur un segment. Il faut néanmoins s'accommoder de ce paradoxe : les fonctions dont on sait *immédiatement* définir et calculer l'intégrale ne sont en général pas continues puisqu'il s'agit des *fonctions en escalier.* On ne passe de là à des types de fonctions plus élaborés que par des *processus d'approximation et de convergence.* C'est pourquoi, même à ce niveau élémentaire, il nous a paru indispensable de disposer avant tout de quelques rudiments sur la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions, rudiments qui seront complétés ultérieurement dans une étude systématique.

## § VII.1 *CONVERGENCE SIMPLE, CONVERGENCE UNIFORME*

### Limites simples

**DÉFINITION VII.1.1**

*Soit $X$ un ensemble non vide, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow K$. On dit que cette suite* **converge simplement** *sur $X$ ssi $(\forall x \in X)$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$ existe* dans $K$. *Lorsqu'il en est ainsi, la fonction $f : X \longrightarrow K$, $x \mapsto \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x)$ est appelée* **limite simple** *sur $X$ de la suite $(f_n)$, et on dit aussi que la suite $(f_n)$* **converge simplement vers f** *sur $X$.*

Lorsqu'elle existe, la limite simple est évidemment unique.

Avec les notations de cette définition, soit $Y$ une partie de $X$. On dit que $Y$ est un **ensemble de convergence simple** de la suite $(f_n)$ ssi la suite des restrictions $(f_n|_Y)$ converge simplement sur $Y$ (on dit alors aussi que *la suite* $(f_n)$ *converge simplement sur* $Y$). Un point $x \in X$ est dit *point de convergence* de la suite $(f_n)$ ssi la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $K$.

Toute partie d'un ensemble de convergence simple, toute union d'ensembles de convergence simple sont encore ensembles de convergence simple pour $(f_n)$. En particulier, il y a un plus grand ensemble de convergence simple, qui est bien sûr l'ensemble de tous les points de convergence de la suite $(f_n)$.

On l'a compris : la convergence simple d'une suite $(f_n)$ se ramène à celle d'une *famille de suites à valeurs dans $K$ dépendant du paramètre $x \in X$*, qui est la variable.

***Exemple 1 :*** Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. L'ensemble des points de convergence est $[0, 1]$. La limite simple sur $[0, 1]$ est

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto 0 \quad \text{si} \quad x \in [0, 1[, 1 \mapsto 1\ .$$

On remarque déjà que, bien que chaque $f_n$ soit continue sur $[0, 1]$, la limite $f$ est discontinue en 1.

***Exemple 2 :*** Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels $> 0$. Définissons, pour chaque $n$, une fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, par : $f_n(x) = 0$ si $|x - n| \geqslant 1$, $f_n(n) = M_n$ et $f_n$ affine sur $[n-1, n]$ et sur $[n, n+1]$ ; et une fonction $g_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, par : $g_n\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = M_n$, $g_n$ affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ et $g_n$ nulle en 0 et sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

Alors, la suite $(f_n)$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, et la suite $(g_n)$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$ (cf. fig. 1).

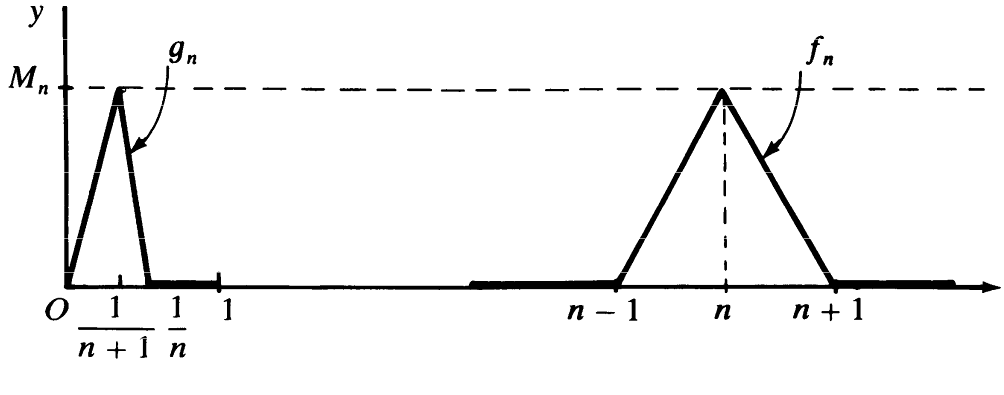



**Fig. 1.**

Toute propriété sur les limites de suites numériques se traduit immédiatement en une propriété parallèle sur les limites simples de suites de fonctions. C'est ainsi que :

**PROPOSITION VII.1.1**

*Soit $X$ un ensemble non vide, et soit $(f_n)$, $(g_n)$ deux suites de fonctions : $X \longrightarrow K$ qui convergent simplement vers $f$ et $g$ dans $X$.*

(I) *Pour $(\lambda, \mu) \in K^2$, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur $X$.*

(II) *La suite $(f_n g_n)$ converge simplement vers $fg$ sur $X$.*

(III) *Si $(\forall n \in \mathbb{N})$ et $(\forall x \in X)$ $f_n(x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{f_n}\right)$ converge simplement vers $\dfrac{1}{f}$ sur $X$.*

(IV) *La suite $(|f_n|)$ converge simplement vers $|f|$ sur $X$.*

(V) *Si $Z$ est un autre ensemble non vide et $\varphi : Z \longrightarrow X$ une application, la suite $(f_n \circ \varphi)$ converge simplement sur $Z$ vers $f \circ \varphi$.*

(VI) *Si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($f_n = u_n + \mathrm{i}v_n$, $u_n$ et $v_n$ réelles), alors $(f_n)$ converge simplement ssi $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent simplement, et alors :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n + \mathrm{i} \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n .$$

## Limites uniformes

**DÉFINITION VII.1.2**

*Soit $X$ un ensemble non vide, $(f_n)$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow K$ et une fonction $f : X \longrightarrow K$.*

*On dit que* ***la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$*** *ssi elle vérifie :*

$$(\mathscr{C}\mathscr{U}) \quad (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \mid (\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon) .$$

*On dit alors que* ***$f$ est limite uniforme sur $X$*** *des $f_n$.*

*La suite $(f_n)$ est dite* ***uniformément convergente sur $X$*** *ssi elle admet une limite uniforme sur $X$.*

Pour chaque fonction $g : X \longrightarrow K$, notons $\mathscr{N}_\infty(g) = \sup\limits_{x \in X} |g(x)|$, d'où $\mathscr{N}_\infty(g) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La relation $(\mathscr{C}\mathscr{U})$ signifie :

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (\mathscr{N}_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon) ,$$

autrement dit, elle équivaut à

$$(1) \qquad \boxed{\mathscr{N}_\infty(f - f_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0} .$$

Soit maintenant $x_0 \in X$. Si (1) est vérifiée, pour $\varepsilon$ réel choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant N$. On aura alors $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, d'où on déduit $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f_n(x_0)$. En conséquence, **la convergence uniforme de $(f_n)$ vers $f$ entraîne la convergence simple de $(f_n)$ vers $f$.**

Si elle existe, il y a donc *unicité de la limite uniforme d'une suite de fonctions.* L'exemple 2 prouve de toute évidence qu'une suite $(f_n)$ peut converger simplement vers $f$ sans que la convergence soit uniforme (prendre par exemple $M_n = 1$, et alors $\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1$ pour tout $n$). La convergence uniforme est donc un mode de convergence beaucoup plus exigeant que la convergence simple.

**Formulation géométrique**

Donnons-nous une suite $(f_n)$ et une fonction $f$, comme dans la définition VII.1.2. Pour $\varepsilon$ réel $> 0$ donné, soit $T_\varepsilon(f)$ le « tube » de $X \times K$ formé des $(x, y) \in X \times K$ tels que $|y - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Notons $\Gamma_g$ le graphe d'une fonction arbitraire $g : X \longrightarrow K$. La relation $\mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant \varepsilon$ signifie que $\Gamma_{f_n} \subset T_\varepsilon(f)$. Dire que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$ revient donc à dire que, *pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{f_n} \subset T_\varepsilon(f)$ dès que $n \geqslant N$.* On peut se représenter concrètement ce qui se passe dans le cas où les $f_n$ sont des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle non trivial $X$ de $\mathbb{R}$ (cf. fig. 2).

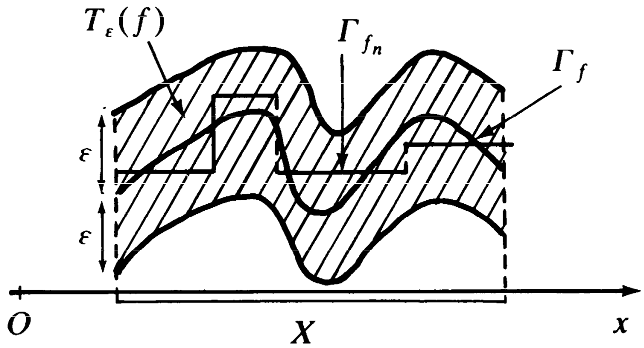



**Fig. 2.**

**Ensembles de convergence uniforme**

Soit $Y$ une partie de $X$. On dit que $Y$ est un *ensemble de convergence uniforme* pour la suite $(f_n)$ ssi la suite des restrictions $(f_n|_Y)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $Y$. Toute partie d'un tel ensemble est encore ensemble de convergence uniforme, mais ce n'est plus vrai, en général, pour une réunion quelconque de tels ensembles : seules les réunions **finies** le restent à coup sûr, comme on va le voir :

Supposons la suite $(f_n)$ *simplement convergente vers* $f$ sur $X$.

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. A chaque $x \in X$ on peut associer l'ensemble

$$\mathscr{E}_{x,\varepsilon} = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n \quad |f_p(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\} :$$

il est non vide car $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ ; donc cet ensemble admet un plus petit élément, noté $N_{x,\varepsilon}$. Une partie $Y$ de $X$ est *ensemble de convergence uniforme* de la suite $(f_n)$ ssi *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *la famille* $(N_{x,\varepsilon})_{x \in Y}$ *est majorée dans* $\mathbb{N}$. Cela montre clairement que toute *union finie* d'ensembles de convergence uniforme en est encore un. En particulier, *si Y est fini,* c'est un ensemble de convergence uniforme.

***Exemple 3 :*** Reprenons les suites $(f_n)$ et $(g_n)$ de l'exemple 2, où l'on a choisi $M_n = 1$ pour tout $n$. Pour la suite $(f_n)$, on a, si $x \in \mathbb{R}_+$,

$$N_{x,\frac{1}{2}} = -\operatorname{Ent}\left(-x - \frac{1}{2}\right), \quad \text{d'où} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} N_{x,\frac{1}{2}} = +\infty .$$

Pour la suite $(g_n)$, si $x \in \left]0, 1\right]$ on a :

$$N_{x,\frac{1}{2}} \in \left\{-\operatorname{Ent}\left(\frac{-1}{x}\right), -\operatorname{Ent}\left(\frac{-1}{x} - 1\right)\right\}, \quad \text{d'où} \quad \sup_{x \in [0,1]} N_{x,\frac{1}{2}} = +\infty .$$

On retrouve ainsi la non-convergence uniforme de ces suites vers 0.

**Utilisation de la variation des fonctions**

Soit $X = I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et une suite $(f_n)$ de fonctions convergeant simplement vers $f$ sur $I$. Pour savoir s'il y a, ou non, convergence uniforme, on peut essayer d'utiliser la relation (1) en calculant $\mathcal{N}_\infty(f - f_n)$. Lorsque $f$ et les $f_n$ sont dérivables, une méthode consiste à utiliser la variation des fonctions.

***Exemple 4 :*** Soit $\lambda$ un réel et $I = \mathbb{R}_+$. Considérons $f_n$ : $x \mapsto n^\lambda x \,\mathrm{e}^{-nx}$ $(x \geqslant 0)$ et dressons le tableau de variation de $f_n$ grâce à $f_n' = n^\lambda \mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$

| $x$ | $0$ | | $1/n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_n$ | $\searrow$ | $0$ |

On constate immédiatement que la suite $(f_n)$ converge simplement vers 0 (croissance comparée de l'exponentielle et d'une puissance). Le tableau montre alors que $\mathcal{N}_\infty(f_n) = M_n = \frac{1}{\mathrm{e}} n^{\lambda - 1}$. Si $\lambda < 1$, $\mathcal{N}_\infty(f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, d'où l'on conclut que la convergence des $(f_n)$ vers 0 est uniforme sur $[0, +\infty[$. Si $\lambda \geqslant 1$, $\mathcal{N}_\infty(f_n) \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$ et la convergence n'est plus uniforme.

Cependant, dans ce dernier cas, fixons un réel $a > 0$. Le tableau montre bien que, pour $n \geqslant a$,

$$\mathcal{N}_\infty(f_n|_{[a,+\infty[}) = f_n(a), \quad \text{d'où} \quad \mathcal{N}_\infty(f_n|_{[a,+\infty[}) \underset{n \to}{\longrightarrow}$$

et donc *chaque ensemble* $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ *est ensemble de convergence uniforme* de cette suite, tandis que la réunion $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = ]0, +\infty[$ *ne l'est pas,* vu que $\mathcal{N}_\infty(f_n|_{]0,+\infty[}) = \mathcal{N}_\infty(f_n) \underset{n \to \infty}{\not\to} 0.$

En pratique, même si l'on ne sait pas calculer exactement $\mathcal{N}_\infty(f_n - f)$, *une majoration ou une minoration convenable de ce nombre peut suffire pour conclure* dans de nombreux cas. Par exemple, avec

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n \sin x} \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], n \geqslant 1\right),$$

on a certainement $\mathcal{N}_\infty(f_n) \geqslant 1$ puisque $f_n(x) \underset{x \to 0, x \neq 0}{\longrightarrow} 1$, donc la suite $(f_n)$, qui converge simplement vers 0 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ n'y converge pas uniformément (le lecteur pourra montrer qu'ici on peut calculer $\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1$, mais ce n'est pas indispensable pour la conclusion qui précède).

**Propriétés des limites uniformes**

Comme d'habitude, convenons, pour $x \in \mathbb{R}_+$, que $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, que $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$ et que, si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \times (+\infty) = (+\infty) \times \lambda = +\infty$.

Soit $f$, $g$ et $h$ des fonctions : $X \longrightarrow K$, où $X$ est non vide. On a :

$$\mathcal{N}_\infty(f + g) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) + \mathcal{N}_\infty(g) \text{ ; si } \lambda \in K, \mathcal{N}_\infty(\lambda f) = (\lambda)\mathcal{N}_\infty(f) \text{ ;}$$

$$\mathcal{N}_\infty(f) = 0 \quad \text{ssi} \quad (\forall x \in X) \quad f(x) = 0 .$$

Enfin $\mathcal{N}_\infty(fg) \leqslant \mathcal{N}_\infty(f) \times \mathcal{N}_\infty(g)$ ; et $\mathcal{N}_\infty(f) \in \mathbb{R}_+$ ssi $f$ est bornée sur $X$.

**PROPOSITION VII.1.2**

*Soit $X$ un ensemble non vide et $(f_n)$, $(g_n)$ deux suites de fonctions : $X \longrightarrow K$, qui convergent uniformément sur $X$ vers $f$ et $g$.*

(I) *Pour $(\lambda, \mu) \in K^2$, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X$ vers $\lambda f + \mu g$.*

(II) *La suite $(|f_n|)$ converge uniformément sur $X$ vers $|f|$.*

(III) *Soit $Z$ un autre ensemble non vide et $\varphi : Z \longrightarrow X$ une application ; la suite $(f_n \circ \varphi)$ converge uniformément sur $Z$ vers $f \circ \varphi$.*

(IV) *S'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$(\forall n) \quad \mathcal{N}_\infty(f_n) \leqslant M \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\infty(g_n) \leqslant M ,$$

*alors $(f_n g_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $fg$.*

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur (pour (II), utiliser $(\forall (u,v) \in K^2) \quad ||u| - |v|| \leqslant |u - v|$ ; pour (IV), écrire comme d'habitude $fg - f_n g_n = (f - f_n) g + f_n(g - g_n)$).

On notera également que, *si* $(f_n)$ *converge uniformément vers* $f$ *sur* $X$, *et si* $h : X \longrightarrow K$ *est une fonction* **bornée,** *alors la suite* $(f_n h)$ *converge uniformément vers* $fh$ *sur* $X$. Enfin, si $f_n$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($f_n = u_n + iv_n$ avec $u_n$ et $v_n$ à valeurs réelles), alors $(f_n)$ converge uniformément ssi $(u_n)$ et $(v_n)$ convegent uniformément et si c'est le cas, bien entendu,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n + \mathrm{i} \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n .$$

En revanche on ne peut rien assurer pour la suite $\left(\dfrac{1}{f_n}\right)$.

**THÉORÈME VII.1.1**

> *Soit* $X$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$, *et* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions :* $X \longrightarrow K$. *On donne* $a \in X$ *et on suppose* **chaque $f_n$ continue en $a$,** *et la suite* $(f_n)$ **uniformément convergente sur $X$** *vers* $f : X \longrightarrow K$.
> *Alors* **$f$ est continue en $a$.**
> *Par conséquent, si chaque* $f_n$ *est continue sur* $X$ *et si la suite* $(f_n)$ *converge uniformément sur* $X$ *vers* $f$, *la fonction* $f$ *est continue sur* $X$.

*Démonstration :*

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in X$ dès que $n \geqslant N$. Choisissons ensuite $\alpha$ réel $> 0$ tel que, pour $x \in X$ et $|x - a| \leqslant \alpha$, on ait :

$$|f_N(x) - f_N(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(continuité de } f_N \text{ au point } a) .$$

Alors, pour $x \in X$ et $|x - a| \leqslant \alpha$, on a :

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + \\ + |f_N(a) - f(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon . \quad \blacksquare$$

**Exemples d'approximations uniformes**

Soit $X$ un ensemble non vide, $f : X \longrightarrow K$ et $\varepsilon$ réel $> 0$. On dit qu'une fonction $g : X \longrightarrow K$ **approche $f$ sur $X$ uniformément à $\varepsilon$ près** ssi $(\forall x \in X) \ |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$, *i.e.* ssi $\mathcal{N}_\infty(f - g) \leqslant \varepsilon$.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de fonctions de $X$ dans $K$. *Pour que, quel que soit* $\varepsilon$ *réel* $> 0$, *on puisse approcher* $f$ *uniformément à* $\varepsilon$ *près sur* $X$ *par au moins une fonction* $g \in \mathcal{D}$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite* $(g_n)$ *d'éléments de* $\mathcal{D}$ *qui converge uniformément sur* $X$ *vers* $f$.

**DÉFINITION VII.1.3**

*Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow K$ est dite* ***affine par morceaux*** *(resp.* ***en escalier****) ssi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des points $a_i$ de $[a, b]$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$ tels que $(\forall i \in [\![0, n-1]\!])$ la fonction $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit* ***affine*** *(resp.* ***constante****).*

Les fonctions affines par morceaux sur $[a, b]$ (pour $a$ et $b$ fixés) forment un sous-$K$-ev que nous noterons $\mathscr{A}\mathscr{M}([a, b] \longrightarrow K)$ du $K$-ev $\mathscr{F}([a, b], K)$, et celles de ces fonctions qui sont continues en forment un sous-$K$-ev.

Les fonctions en escalier sur $[a, b]$ forment un sous-$K$-ev de $\mathscr{A}\mathscr{M}([a, b], K)$, qui est aussi une sous-$K$-algèbre de $\mathscr{F}([a, b], K)$. Nous noterons Esc $([a, b], K)$ cette algèbre que nous étudierons en détail au § suivant.

Remarquons qu'une fonction à valeurs complexes est affine par morceaux (resp. affine par morceaux et continue ; en escalier) ssi ses parties réelle et imaginaire le sont.

**PROPOSITION VII.1.3**

*Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow K$ une fonction* ***continue.*** *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut approcher $f$ uniformément à $\varepsilon$ près sur $[a, b]$ par une fonction* ***affine par morceaux et continue*** *(resp. par une fonction* ***en escalier****).*

*Démonstration :*

On sait que $f$ est uniformément continue (théorème de Heine, § III.5). Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\eta > 0$ un module de continuité uniforme de $f$ sur $[a, b]$ pour $\varepsilon$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$ et les points $a_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ de $[a, b]$. Définissons les fonctions $\varphi$ (resp. $\psi$) ainsi sur $[a, b]$ : $\varphi(a_k) = \psi(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k$ ; et ensuite

$$(\forall k \in [\![0, n-1]\!]), \quad \varphi|_{[a_k, a_{k+1}]} \quad (\text{resp. } \psi|_{]a_k, a_{k+1}[})$$

est affine (resp. constante et de valeur $f\left(\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$). On voit immédiatement que $\psi$ est en escalier et que $\mathscr{N}_\infty(\psi - f) \leqslant \varepsilon$. Quant à la fonction $\varphi$, elle est affine par morceaux et continue. De plus, si $x \in [a, b]$, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$, d'où $x = \lambda a_{k+1} + (1-\lambda)\, a_k$, avec $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(x)| &= |\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) - \lambda f(a_{k+1}) - (1-\lambda) f(a_k)| \\ &\leqslant \lambda\, |f(x) - f(a_{k+1})| + (1-\lambda)\, |f(x) - f(a_k)| \\ &\leqslant \lambda \varepsilon + (1-\lambda)\, \varepsilon = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

donc $\mathscr{N}_\infty(f - \varphi) \leqslant \varepsilon$. ■

***Exercice 1 :*** Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions ci-après en précisant pour chacune de ces suites les ensembles de convergence simple et les ensembles de convergence uniforme).

*a*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x\,e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}$ *b*) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{n^a}{n^2+1}\, x\, e^{-nx}\ (a \in \mathbb{R})$

*c*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\sqrt{x + 4\,n^2\pi^2}$ *d*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sin \dfrac{n+1}{n} x$

*e*) $f_n : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{\sin x \cos^n x}{1 - \cos x}$ *f*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \exp[(1-i)\,nx]$

*g*) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ si $x \in [0, n]$, $x \mapsto 0$ si $x > n$.

***Exercice 2 :*** Mêmes questions qu'à l'exercice 1 pour :

*a*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\ (n \geqslant 1)$

*b*) $f_n : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x^n\right)$

*c*) $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{a^n x}{1 - na^n x}$ $(0 < a < 1,$ $D$ à préciser)

*d*) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \in [0, n]$, $x \mapsto 0$ si $x > n$ (on montrera ici que $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers $g : x \mapsto e^{-x}$)

*e*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto n^\alpha (1 - 2x^2)^n e^{inx}$

*f*) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto n^\alpha x^\beta e^{-nx^\gamma}$ $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \gamma > 0)$

*g*) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x + (1 + x^2)^n}$.

***Exercice 3 :*** Soit $(P_n)$ la suite de polynômes définie, à partir de $P_0 = 0$, par la récurrence

$$(\forall n \geqslant 0) \quad P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\,[x + 2\,P_n(x) - P_n^2(x)]\,.$$

Démontrer que
$$(\forall x \in [0, 1])\,, \quad 0 \leqslant \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}\,,$$
et en déduire que la suite $(P_n)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

***Exercice 4 :*** Soit $a$ et $b$ des réels $(a < b)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que $|f_n'(t)| \leqslant M$ pour tout $n$ et tout $t \in [a, b]$. Montrer que si la suite $(f_n)$ converge *simplement* sur $[a, b]$, alors elle converge *uniformément* sur $[a, b]$.

***Exercice 5 :*** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions *convexes* qui converge simplement sur $I = [a, b]$ $(a < b)$ vers une fonction $f$ *continue*. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $I$ vers $f$.

***Exercice 6 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Pour chaque $n$, soit $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *monotone*. On suppose que la suite $(f_n)$ converge simplement vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sur $[a, b]$, et on suppose $f$ *continue*. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$. (Essayer de trouver une preuve où $\varepsilon$ n'est coupé qu'en *deux* au plus.)

***Exercice 7 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $|f(x)| < x$. On donne $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on définit une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u_{n+1}(x) = f(u_n(x))\,.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)$.

*a*) Si $u_0$ est continue ; *b*) si $u_0$ est bornée.

***Exercice 8 :*** Soit $X$ un ensemble non vide et $(f_n)$ une suite de fon uniformément convergente sur $X$. Prouver que la suite $(g_n) = \left( \dfrac{f_n}{1 + f_n^2} \right)$ est aussi uniformément convergente sur $X$.

Enoncer une propriété générale suggérée par cet exercice.

***Exercice 9 :*** Soit $n \mapsto r_n$, $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ bijective. On note $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \neq r_n$, $r_n \mapsto 1$. Montrer que la suite $(S_n) = \left( \sum_{k=0}^{n} f_k \right)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, mais que la convergence n'est uniforme sur aucun intervalle non trivial.

***Exercice 10 :*** Etudier les ensembles de convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ , \quad x \mapsto \frac{x^n}{1 + x + x^2 + \cdots + x^n} .$$

***Exercice 11 :*** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions *croissantes* de $\mathbb{R}$ dans $[0\,,1]$. Démontrer qu'on peut extraire de $(f_n)$ une suite simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

*Indication.* En s'appuyant sur le théorème III.3.5, commencer par extraire de $(f_n)$ une suite $(g_k) = (f_{n_k})$ simplement convergente sur $\mathbb{Q}$ vers $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ (par un « procédé diagonal »). Considérer ensuite l'ensemble $S$, dénombrable, des $x \in \mathbb{R}$ tels que $g(x+0) > g(x-0)$, et extraire de $(g_k)$ une suite simplement convergente sur $\mathbb{Q} \cup S$, vers $h : \mathbb{Q} \cup S \longrightarrow \mathbb{R}$ qui prolonge $g$. Enfin prolonger $h$ à $\mathbb{R}$ et conclure.

***Exercice 12 :*** On donne $p \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}_p[X]$. On suppose que la suite $(P_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $P$. Montrer que $P$ est polynomiale (en fait $P \in \mathbb{C}_p[X]$) et que la convergence de $(P_n)$ vers $P$ est uniforme sur tout segment $[-A, A]$, où $A > 0$.

***Exercice 13 :*** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$P_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n ,$$

où $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

*a*) Montrer que $(\forall x_0 \in [0, 1])\ \exists c \in\ ]0, 1[$ tel que :

$$f(x_0) - P_n(x_0) = x_0\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(x_0 - \frac{k}{n}\right) \cdots \left(x_0 - \frac{n}{n}\right) \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} .$$

*b*) On choisit $f(x) = x\,e^{-x}$. Montrer que la suite $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0, 1]$.

***Exercice 14 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$ telle que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. On donne $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = 0$ si $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ (il existe de tels $\varphi$). Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_k : x \mapsto \varphi(kx)$. Montrer que la suite $(f^{(p)} \varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

***Exercice 15 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(P_k)$ une suite de polynômes dans $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose :

$$(\forall k) \quad \forall x \in [0, 1] \quad |P_k(x)| \leqslant 1 .$$

Montrer qu'on peut extraire de $(P_k)$ une suite uniformément convergente, sur $[0, 1]$, vers une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$ (variante plus fine de l'exercice 12).

## § VII.2 *INTÉGRATION DES FONCTIONS EN ESCALIER*

Soit $\Omega$ **un ensemble** non vide. Une partie $\mathscr{C}$ de $P(\Omega)$ est appelée un **clan** ssi elle est **non vide** et **stable pour les opérations** $(A, B)$

$(A, B) \mapsto A \backslash B$. On en déduit qu'un clan contient toujours $\varnothing$ : en effet, si $A \in \mathscr{C}$, $A \backslash A = \varnothing \in \mathscr{C}$. Un clan est dit **unitaire** ssi il contient $\Omega$.

A chaque partie $A$ de $\Omega$, on associe deux fonctions intéressantes : sa **fonction indicatrice** $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow 0$ si $x \notin A$ et $x \mapsto 1$ si $x \in A$ ; et la **fonction de Boole** [1] $\bar{\chi}_A : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$, $x \mapsto \bar{0}$ si $x \notin A$ et $x \mapsto \bar{1}$ si $x \in A$.

La correspondance $A \longrightarrow \bar{\chi}_A$ établit une bijection entre $\mathscr{P}(\Omega)$ et l'anneau $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})$, à l'aide de laquelle on munit, par transport de structure, $\mathscr{P}(\Omega)$ d'une *structure d'anneau,* dont l'élément unité est $\Omega$, le nul $\varnothing$, dont l'addition et la multiplication sont respectivement

$$(A, B) \mapsto A \,\triangle\, B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) \quad \text{et} \quad (A, B) \mapsto A \cap B .$$

Les clans unitaires de $\Omega$ sont alors les *sous-anneaux* de cet anneau.

**Clan des unions finies d'intervalles**

A chaque intervalle borné non vide $I$ de $\mathbb{R}$, d'extrémités $a$ et $b$ $(a \leqslant b)$, nous associons le réel $b - a$ $(\geqslant 0)$ que nous appellerons *sa longueur,* ou mieux, sa *mesure de Lebesgue* [2] (on peut convenir que $\varnothing$ a pour longueur 0).

Fixons deux réels $a$, $b$ $(a < b)$, et prenons pour ensemble $\Omega$ le segment $[a, b]$. Les réunions finies d'intervalles contenus dans $\Omega$ forment un clan de parties de $\Omega$, évidemment unitaire, que nous noterons $\mathscr{F}_\Omega$. Soit $A \in \mathscr{F}_\Omega$, $A \neq \varnothing$ ; la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par : « $(\forall x \in A, \forall y \in A)$ l'intervalle fermé d'extrémités $x$ et $y$ est inclus dans $A$ » est d'équivalence. Il y a un nombre *fini* de classes, qui sont *les intervalles maximaux pour l'inclusion* contenus dans $A$, et que nous appellerons *composantes* de $A$.

A chaque $A \in \mathscr{F}_\Omega$, il est naturel d'associer la *somme des longueurs de ses composantes :* ce réel $\geqslant 0$ sera appelé **mesure** (de Lebesgue) **de A,** et noté mes $(A)$.

Si deux intervalles $U$, $V$ de $\Omega$ sont *disjoints,* il est évident que

$$\text{mes}\,(U \cup V) = \text{mes}\,(U) + \text{mes}\,(V) .$$

A partir de là, ce qui précède montre que pour $A$ et $B$ *disjoints dans* $\mathscr{F}_\Omega$, on a mes $(A \cup B) =$ mes $(A) +$ mes $(B)$. Pour $A$ et $B$ quelconques dans $\mathscr{F}_\Omega$, en écrivant $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$, on déduit aussitôt que

$$\text{mes}\,(A \cup B) = \text{mes}\,(A) + \text{mes}\,(B) - \text{mes}\,(A \cap B) \leqslant \\ \leqslant \text{mes}\,(A) + \text{mes}\,(B) .$$

Enfin, il est clair que, pour toute *partie finie* $A$ de $\Omega$, mes $(A) = 0$.

La proposition qui suit est un peu moins évidente :

---

[1] George *Boole* (1815-1864), logicien et mathématicien anglais.

[2] Henri *Lebesgue* (1875-1941), mathématicien français auteur de travaux fondamentaux à la base de la théorie de l'intégration et de la mesure.

**PROPOSITION VII.2.1**

> *Soit* $(I_n)$ *une suite* **décroissante pour l'inclusion** *d'éléments non vides du clan* $\mathscr{F}_\Omega$, *telle que* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \varnothing$ . *Alors* mes $(I_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ arbitraire. Chaque $I_n$ ayant un nombre fini de composantes, numérotons de gauche à droite les extrémités des composantes de $I_n$. On obtient ainsi une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'image l'union des extrémités de toutes les composantes de tous les $I_n$.

A chaque $k \in \mathbb{N}$, associons l'intervalle ouvert $\omega_k = \left]\lambda_k - \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \lambda_k + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $K_n$ l'ensemble obtenu en retranchant de $I_n$ l'union des intervalles $\omega_k$ construits avec les $\lambda_i$ extrémités des composantes des $I_j$, $j \leq n$ ; il est clair que $K_{n+1} \subset K_n$. D'autre part, $K_n$ est compact dans $\mathbb{R}$, car c'est une *union finie* d'intervalles compacts, et de plus $K_n \subset I_n$ ; donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \varnothing$ . D'après le corollaire du théorème III.2.6, on a donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N = \varnothing$ . D'où, pour un $q \in \mathbb{N}$ convenable :

$$I_N \subset \bigcup_{0 \leq k \leq q} \left]\lambda_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \lambda_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}\right[ .$$

Il en découle : mes $(I_N) \leq \sum_{k=0}^{q} \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leq \varepsilon$, et, puisque la suite $(I_n)$ décroît, mes $(I_n) \leq$ mes $(I_N) \leq \varepsilon$ dès que $n \geq N$. ■

Si mes $(\Omega)$ $(= b - a) = 1$, la proposition VII.2.1 et les considérations qui la précèdent montrent que la fonction $A \mapsto$ mes $(A)$ définit sur le clan $\mathscr{F}_\Omega$ une **probabilité.**

### Espaces de Riesz [1]

Soit $\Omega$ un ensemble non vide. Le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$ est muni d'une **relation d'ordre** naturelle $\leq$ ainsi définie : $f \leq g$ ssi $(\forall x \in \Omega)\ f(x) \leq g(x)$. Cet ordre est partiel (sauf si card $(\Omega) = 1$). Il est *compatible avec la structure de* $\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifie, pour toutes $f$, $g$, $h$: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ :

$$f \leq g \Leftrightarrow f + h \leq g + h \ ; \quad \text{si} \quad f \leq g \quad \text{alors} \quad \lambda f \leq \lambda g .$$

L'ensemble $\mathscr{P} = \{f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}) \mid f \geq 0\}$ vérifie :

$$(\forall f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}), \forall g \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})) \quad f \leq g \Leftrightarrow g - f \in \mathscr{P} ;$$
$$(\forall (f, g) \in \mathscr{P}^2) \quad f + g \in \mathscr{P} ;$$
$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathscr{P}) \quad \lambda f \in \mathscr{P} .$$

---

(1) Frédéric *Riesz* (1880-1956), mathématicien hongrois, fondateur (avec [...] de l'Analyse fonctionnelle moderne. Son frère Marcel a travaillé sur les équation[...]

De plus l'ensemble ordonné $(\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}), \leq)$ est **réticulé,** c'est-à-dire que toute partie à deux éléments de cet ensemble possède *une borne supérieure* et *une borne inférieure.* En effet, pour $f$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, les fonctions :

$$\sup(f, g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Max}(f(x), g(x))$$
$$\text{et} \quad \inf(f, g) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Min}(f(x), g(x))$$

sont évidemment la borne supérieure et la borne inférieure de $\{f, g\}$.

Si $f \in \mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$, notons $|f|$ la fonction $x \longrightarrow |f(x)|$, $f_+ = \sup(f, 0)$ et $f_- = -\inf(f, 0)$. On a $|f| = f_+ + f_-$ et $f = f_+ - f_-$. Si $f$ et $g$ sont deux fonctions : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, il est clair que

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$
$$\text{et} \quad |f + g| \leq |f| + |g|.$$

Les lois $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ et $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$ sont *associatives* et *commutatives* ; si $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, les composés $\sup\limits_{i=1}^{n}(f_i)$ et $\inf\limits_{i=1}^{n}(f_i)$ sont les fonctions $x \mapsto \operatorname{Max}\limits_{1 \leq i \leq n}(f_i(x))$ et $x \mapsto \operatorname{Min}\limits_{1 \leq i \leq n}(f_i(x))$, et sont respectivement la borne supérieure et inférieure de $\{f_1, \ldots, f_n\}$ dans $(\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R}), \leq)$.

Soit maintenant $\mathscr{G}$ un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$. Ce qui précède montre que les conditions suivantes (1) et (2) sont *équivalentes :*

(1) $\qquad (\forall f \in \mathscr{G}) \quad |f| \in \mathscr{G}$

(2) $\qquad (\forall (f, g) \in \mathscr{G}^2) \quad \sup(f, g) \in \mathscr{G} \quad \text{et} \quad \inf(f, g) \in \mathscr{G}$.

Nous conviendrons d'appeler **espace de Riesz** de fonctions de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ tout sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$ tel que les conditions équivalentes (1) et (2) soient satisfaites.

***Exemple 1 :*** Le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions *continues* de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Riesz de fonctions (c'est aussi une $\mathbb{R}$-algèbre) pour $\Omega \subset \mathbb{R}$.

**Espace de Riesz des fonctions en escalier**

Reprenons deux réels $a$, $b$ $(a < b)$, et $\Omega = [a, b]$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow K$ (rappelons que $K$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est en escalier ssi c'est une combinaison linéaire des fonctions $(\chi_A)_{A \in \mathscr{F}_\Omega}$.

Pour cela, il faut et il suffit qu'elle prenne un nombre fini de valeurs, et que de plus elle soit *$\mathscr{F}_\Omega$-mesurable* (ce qui signifie ici que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) \in \mathscr{F}_\Omega$). C'est une conséquence immédiate du fait, valable avec tout clan $\mathscr{C}$, et facile à prouver par récurrence sur $n$, que pour tous éléments $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, il existe des éléments $B_1, \ldots,$ $B_p$ *disjoints* tels que tout $A_k$ soit réunion de certains des $B_j$ (da nous occupe du clan $\mathscr{F}_\Omega$, cette caractérisation des fonctions en escalier résulte de leur définition).

La définition VII.1.3 montre clairement que, si $f$ est en escalier, il en est de même de $|f|$. Donc, **la $\mathbb{R}$-algèbre Esc ($\Omega$, $\mathbb{R}$) est un sous-espace de Riesz de $\mathscr{F}$ ($\Omega$, $\mathbb{R}$).**

Soit $A$ et $B$ éléments de $\mathscr{F}_\Omega$. On a :

$$\sup(\chi_A, \chi_B) = \chi_{A \cup B} \quad \text{et} \quad \inf(\chi_A, \chi_B) = \chi_{A \cap B}.$$

Le nombre mes ($A$) s'interprète comme l'aire sous le graphe de $\chi_A$ (cf. fig. 1), somme d'un nombre fini d'aires de rectangles de hauteur 1.

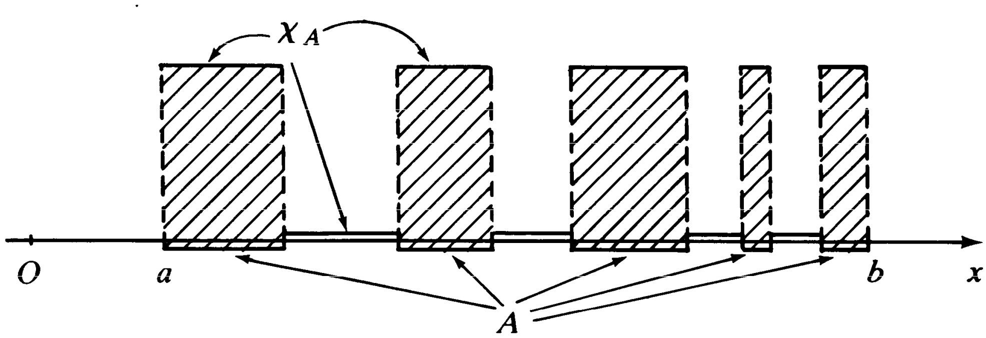



**Fig. 1.**

THÉORÈME VII.2.1

> *Il existe une et une seule* **forme linéaire** $\mu$ *sur le* $K$-ev Esc ($\Omega$, $K$) *telle que* $\mu(\chi_A)$ = mes ($A$) *pour tout ensemble* $A \in \mathscr{F}_\Omega$.

*Démonstration :*

Soit $\mathscr{I}_\Omega$ l'ensemble des sous-intervalles de $\Omega$ contenant $b$. Ils sont des deux types $]\alpha, b]$ ou $[\alpha, b]$, avec $\alpha \in [a, b]$, ($\varnothing$ exclu), et si l'on considère *la famille* $(\chi_J)_{J \in \mathscr{I}_\Omega}$, il n'est pas difficile de voir qu'*elle constitue une base du* $K$-ev Esc ($\Omega$, $K$). Dans ces conditions, si $\mu$ existe, ce ne peut être que l'unique forme linéaire $M$ sur Esc ($\Omega$, $K$) telle que $M(\chi_J)$ = mes ($J$) pour tout $J \in \mathscr{I}_\Omega$ (cf. Tome 1, théorème VI.3.2).

Soit donc $M$ cette forme linéaire. Si $A \in \mathscr{F}_\Omega$, il s'agit de voir que $M(\chi_A)$ = mes ($A$). Si $A_1$, ..., $A_p$ sont les composantes de $A$, on a : $\chi_A = \sum_{i=1}^{p} \chi_{A_i}$ ($i \in [\![1, p]\!]$). Il suffit donc de montrer que $M(\chi_A)$ = mes ($A$) lorsque $A$ est un *intervalle* inclus dans $\Omega$. Mais c'est alors facile car, si $\alpha$ et $\beta$ sont les extrémités de $A$ ($\alpha \leqslant \beta$), on a : $\chi_A = \chi_U - \chi_V$, où $U$ (resp. $V$) est un intervalle d'extrémités $\alpha$ et $b$ (resp. $\beta$ et $b$) d'où $M(\chi_A) = M(\chi_U) - M(\chi_V)$ = mes ($U$) − mes ($V$) = $\beta - \alpha$ = mes ($A$). ■

**DÉFINITION VII.2.1**

*La forme linéaire $\mu$ définie dans le théorème* VII.2.1 *s'appelle* ***l'intégrale*** *(usuelle) des fonctions de* Esc $(\Omega, K)$. *Si* $f \in$ Esc $(\Omega, K)$, *on écrira*

$$\mu(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,.$$

Attention ! Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la lettre $x$ est « *muette* » ; elle peut être remplacée par tout autre symbole, *à condition que ce symbole n'apparaisse pas dans les bornes a et b* ou n'ait pas été affecté à un autre usage.

**Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier**

Reprenons les réels $a$ et $b$ $(a < b)$ et $\Omega = [a, b]$. Dans tout ce chapitre nous sommes conduits à utiliser des **subdivisions** de $\Omega$ : on appelle ainsi toute partie *finie* de $\Omega$ contenant $a$ et $b$. Une telle partie $\sigma$ sera identifiée avec l'unique suite strictement croissante $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$ d'image $\sigma$. L'ensemble $\mathcal{S}_\Omega$ des subdivisions de $\Omega$ sera muni de l'ordre défini par l'inclusion : une subdivision $\tau = \{b_j\}_{0 \leqslant j \leqslant p}$ est dite **plus fine** qu'une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ ssi

$$\{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n} \subset \{b_j\}_{0 \leqslant j \leqslant p}\,.$$

On voit tout de suite que, pour toutes subdivisions $\sigma$ et $\tau$ de $\Omega$, il en existe au moins une, ne serait-ce que $\sigma \cup \tau$, à la fois plus fine que $\sigma$ et $\tau$. Nous appellerons enfin **pas** d'une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ le nombre réel $\underset{0 \leqslant i \leqslant n-1}{\operatorname{Max}} (a_{i+1} - a_i)$.

Cela posé, soit $f$ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sera dite **adaptée** à $f$ ssi $f$ est constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

**PROPOSITION VII.2.2**

*Soit* $f \in$ Esc $([a, b], K)$ *et* $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *une subdivision de* $\Omega$ *adaptée à f. Notons $c_i$ la valeur constante de f sur* $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. *Alors :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)\,.$$

*Démonstration :*

On a :

$$f = \left(\sum_{i=0}^{n} f(a_i)\,\chi_{\{a_i\}}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\chi_{]a_i, a_{i+1}[}\,,$$

et pour tout $i$, $\int_a^b \chi_{\{a_i\}} = 0$, d'où par linéarité :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \operatorname{mes}(]a_i, a_{i+1}[) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i (a_{i+1} - a_i)\,. \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE 1**

> *Soit $f$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, en escalier sur $[a, b]$. On a :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$, *l'égalité ayant lieu ssi $f$ est à support fini.*

**COROLLAIRE 2**

> *Soit une fonction quelconque $f \in \operatorname{Esc}([a, b], K)$. On a :*
>
> $$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|\,.$$

On déduit immédiatement du corollaire 1 que si $f \in \operatorname{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ et $g \in \operatorname{Esc}([a, b], \mathbb{R})$, la relation $f \leqslant g$ entraîne $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ (car $g - f \geqslant 0$, d'où $\int_a^b (g - f) \geqslant 0$).

La proposition VII.2.2 montre que pour $f \in \operatorname{Esc}([a, b], \mathbb{R})$, le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s'interprète comme l'*aire algébrique* entre l'axe des $x$ et le graphe de $f$, somme d'aires de rectangles comptées positivement ou négativement selon qu'ils sont au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses (cf. fig. 2).

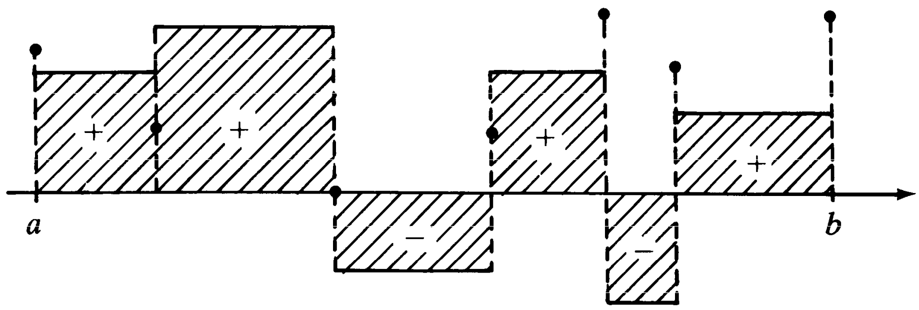



**Fig. 2.**

Si $f \in \operatorname{Esc}([a, b], \mathbb{C})$, $f = u + \mathrm{i}v$ (où $u$ et $v$ sont en escalier et à valeurs réelles), et l'on a :

$$\int_a^b f = \int_a^b (u + \mathrm{i}v) = \left(\int_a^b u\right) + \mathrm{i}\left(\int_a^b v\right). \tag{3}$$

**Additivité par rapport aux intervalles**

Soit trois réels $a, b, c$ $(a < b < c)$. Une fonction $f : [a, c] \longrightarrow K$ est en escalier ssi ses restrictions $f|_{[a,b]}$ et $f|_{[b,c]}$ le sont. On a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\chi_{[a,b]}, \quad \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f\chi_{[b,c]},$$

d'où :

$$\int_a^b f|_{[a,b]} + \int_b^c f|_{[b,c]} = \int_a^c f(\chi_{[a,b]} + \chi_{[b,c]}) = \int_a^c f,$$

ce qui s'écrit :

(4) $$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Cette propriété s'appelle *additivité de l'intégrale par rapport aux intervalles.* En convenant, si $b < a$, de poser : $\int_a^b f = -\int_b^a f$ pour toute $f \in \operatorname{Esc}([b, a], K)$, la relation (4) reste vraie *sans considération de l'ordre relatif de a, b, c* et s'étend à un nombre fini quelconque de points.

**L'intégrale des fonctions en escalier comme mesure de Daniell** [1]

Voici maintenant une propriété plus subtile de l'intégrale des fonctions en escalier.

**Théorème VII.2.2**

> *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.*

*Démonstration :*

Soit un réel $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons : $I_n = f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$. D'après les considérations qui précèdent le théorème VII.2.1, il est clair que $I_n \in \mathscr{F}_\Omega$ $(\Omega = [a, b])$. D'autre part, l'hypothèse entraîne : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \varnothing$. En utilisant la proposition VII.2.1 on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{mes}(I_N) \leqslant \varepsilon$. Notons $M = \sup_{x \in \Omega} f_0(x)$, et soit $n$ entier $\geqslant N$. On a :

$$\int_a^b f_n = \int_a^b f_n \chi_{I_n} + \int_a^b f_n \chi_{\Omega \setminus I_n}.$$

---

(1) Percy John *Daniell* (1889-1946), mathématicien anglais.

Mais : $$\int_a^b f_n \chi_{I_n} \leqslant \int_a^b M\chi_{I_n} \leqslant M \text{ mes } (I_n) \leqslant M\varepsilon ,$$

et puisque $$f_n \chi_{\Omega\setminus I_n} \leqslant \varepsilon\chi_{\Omega\setminus I_n} \leqslant \varepsilon\chi_{\Omega} ,$$

il s'ensuit : $$\int_a^b f_n \chi_{\Omega\setminus I_n} \leqslant \int_a^b \varepsilon\chi_{\Omega} = \varepsilon(b-a) ,$$

d'où en ajoutant : $\displaystyle\int_a^b f_n \leqslant \varepsilon(M+b-a)$, ce qui prouve bien que $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ■

**Définition VII.2.2**

*Soit $X$ un ensemble non vide et $\mathscr{E}$ une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ formée de fonctions bornées qui soit aussi un espace de Riesz de fonctions.*
*On appelle* **mesure de Daniell positive** *sur $\mathscr{E}$ toute forme linéaire $\mu$ sur $\mathscr{E}$ telle que soient satisfaits les deux axiomes :*
$(\mathscr{D}_1)$ $(\forall f \in \mathscr{E})$ $f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 0$ *(une forme linéaire $\mu \in \mathscr{E}^*$ vérifiant $(\mathscr{D}_1)$ est appelée* **forme linéaire positive** *sur $\mathscr{E}$).*
$(\mathscr{D}_2)$ *Pour toute suite $(f_n)$ dans $\mathscr{E}$ telle que $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$ pour tout $x \in X$, on a : $\mu(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

En rassemblant les résultats de la proposition VII.2.2 et des théorèmes VII.2.1 et VII.2.2, on obtient donc :

**Théorème VII.2.3**

*Soit deux réels $a, b$ $(a \leqslant b)$. Sur l'espace $\mathscr{E} = \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$, l'intégrale usuelle est une mesure de Daniell positive.*

**Problème de l'extension de l'intégrale**

Le lecteur attentif de ce § a certainement dû se poser des questions : pourquoi se limiter au clan $\mathscr{F}_\Omega$ ? Il est sûrement possible de *mesurer* d'autres parties $A$ de $\Omega = [a, b]$. L'idéal serait de pouvoir mesurer toutes les parties de $\Omega$, mais il faudra y renoncer car une véritable mesure d'ensembles doit satisfaire les conditions :

- pour $A \cap B = \varnothing$ , mes $(A \cup B) = \text{mes}(A) + \text{mes}(B)$ ;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion et telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ , on doit avoir : mes $(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cependant on a vu dans l'exercice 8 du § III.2 comment on arrive à mesurer les *ouverts bornés* de $\mathbb{R}$ (plus généralement les ouverts « de mesure bornée »), ce qui montre déjà la richesse de la question pos

Pourtant, on préfère généralement attaquer ce problème par une autre voie, à partir de la relation $(\forall A \in \mathscr{F}_\Omega)$ mes $(A) = \int_a^b \chi_A(x)\,\mathrm{d}x$ ; il s'agit alors de donner un sens à l'intégrale $\int_a^b \chi_A(x)\,\mathrm{d}x$ pour des parties $A$ de $[a, b]$ plus générales que les membres du clan $\mathscr{F}_\Omega$. On voit ainsi le problème changer d'aspect, bien qu'étant équivalent au problème initial ; la question devient : *peut-on définir une notion d'intégrale* qui s'accorde avec la notion intuitive d'aire sous le graphe mais *qui s'appliquerait à des fonctions bien plus générales que les fonctions en escalier* ? La suite de ce chapitre donnera une réponse partielle à ces questions.

## Ensembles négligeables

Par convention, si $(a_n)$ est une suite dans $\mathbb{R}_+$ et $\alpha$ un réel $> 0$, nous écrirons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leqslant \alpha$ pour exprimer que la série $\sum a_n$ converge et que sa somme est $\leqslant \alpha$.

**Définition VII.2.3**

*Une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dite* **négligeable** *ssi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts telle que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}\,(\omega_n) \leqslant \varepsilon$.*

Il résulte de cette définition que *toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable.* Il est également clair que *toute partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$ est négligeable.* De plus :

**Théorème VII.2.4**

*Un ensemble négligeable n'a aucun point intérieur.*

*Démonstration :*

Il suffit de prouver que, pour $a$ et $b$ réels avec $a < b$, l'intervalle $I = [a, b]$ n'est pas négligeable. Or s'il l'était, cela entraînerait qu'on peut trouver une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts tels que $I \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \text{mes}\,(\omega_n) \leqslant \frac{b-a}{2}$. D'après le théorème III.2.6, on pourrait extraire de cette suite un nombre *fini* d'intervalles ouverts recouvrant $I$, mais en posant $J_n = \omega_n \cap [a, b]$, on aurait alors $I = \bigcup_{n=0}^{N} J_n$ pour un $N \in \mathbb{N}$, d'où $b - a = \text{mes}\,(I) \leqslant \sum_{n=0}^{N} \text{mes}\,(J_n) \leqslant \frac{b-a}{2}$, ce qui est absurde. ■

Il résulte de ce théorème *qu'aucun intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$, si petit soit-il, *n'est dénombrable,* ce que l'on savait déjà (cf. § II.6, exercice 13).

**Théorème VII.2.5**

*Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties négligeables de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\bigcup A_n$ est négligeable.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(\omega_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'intervalles ouverts tels que $\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}\,(\omega_{n,k}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Rangeons la famille $(\omega_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ en une suite $(J_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$. On a donc $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow (\mathbb{N}^*)^2$ telle que $J_p = \omega_{\varphi(p)}$ pour tout $p$. Si $N \in \mathbb{N}^*$, la somme $\sum_{k=1}^{N} \text{mes}\,(J_k)$ s'écrit $S_1(N) + \cdots + S_{\psi(n)}(N)$, où $\psi(N) = \underset{0 \leqslant p \leqslant N}{\text{Max}}\ (\text{pr}_1\,(\varphi\,(p)))$ et où, pour $i \leqslant \psi(N)$, $S_i(N)$ est la somme des mes $(\omega_{\varphi(p)})$ pour $p \leqslant N$ et $\text{pr}_1\,(\varphi\,(p)) = i$. Alors $S_i(N) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}\,(\omega_{i,k}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}$ pour tout $i$, d'où : $\sum_{k=1}^{N} \text{mes}\,(J_p) \leqslant \sum_{i=1}^{\psi(N)} \frac{\varepsilon}{2^i} \leqslant \varepsilon$, et c'est vrai $(\forall N)$, d'où finalement $\sum_{k=1}^{\infty} \text{mes}\,(J_p) \leqslant \varepsilon$. ■

Soit $A$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(x)$ une propriété dépendant d'une variable $x \in A$. Cette propriété est dite vraie **presque partout** sur $A$ ssi il existe une partie négligeable $N$ de $\mathbb{R}$ telle que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie pour tout $x \in A \backslash N$.

***Exercice 1 :*** Soit $q$ un entier $\geqslant 2$. A chaque $x \in [0, 1]$ on associe son développement propre $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{q^n}$ en base $q$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n(x)$ est en escalier ; décrire son graphe, et calculer $\int_0^1 a_n(x)\,\mathrm{d}x$.

***Exercice 2 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $(a < b)$. Montrer que si $N \subset [a, b]$ est négligeable, $f(N)$ est aussi un ensemble négligeable.

***Exercice 3 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, et $M$ l'ensemble $\{x \in [0, 1] \mid f'(x) = 0\}$. Montrer que $f(M)$ est négligeable.

***Exercice 4 :*** On donne une fonction en escalier $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($a$ et $b$ réels, $a < b$). On suppose que l'ensemble $\{x \in [a, b] \mid f(x) \geqslant 0\}$ est dense dans $[a, b]$. Montrer que $\int_a^b f \geqslant 0$.

***Exercice 5 :*** Soit $X$ un ensemble infini, $Y = X \times X$ et $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Montrer qu'il n'existe aucune famille *finie* $(A_i, B_i)_{i \in I}$ dans $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X)$ telle que $\bigcup_{i \in I} A_i \times B_i = Y \backslash \Delta$.

*Indication :* On commencera par prouver que $\chi_\Delta : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *n'est pas* de la forme $(x, y) \mapsto \sum_{j \in J} \lambda_j(x)\, \mu_j(y)$ où $J$ est fini, et où les $\lambda_j$ et $\mu_j$ sont des fonctions $X \longrightarrow \mathbb{R}$.

***Exercice 6 :*** Soit $\mathscr{A}$ une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$ ($a$ et $b$ réels, $a < b$). Une forme linéaire $\Phi$ sur $\mathscr{A}$ est dite *multiplicative* ssi

$$(\forall (f, g) \in \mathscr{A}^2) \quad \Phi(fg) = \Phi(f)\,\Phi(g) \quad \text{et} \quad \Phi(\chi_{[a,b]}) = 1\,.$$

Trouver toutes les formes linéaires multiplicatives sur la $\mathbb{R}$-algèbre Esc $([a, b], \mathbb{R})$.

*Indication :* Les formes linéaires $f \mapsto f(x - 0)$ $(x \in \,]a, b])$, $f \mapsto f(x + 0)$ $(x \in [a, b[)$ et $f \mapsto f(x)$ $(x \in [a, b])$ conviennent. Utiliser la base $(\chi_J)_{J \in \mathscr{I}_\Omega}$ du théorème VII.2.1 pour montrer que ce sont les seules.

***Exercice 7 :*** *a*) (Cas particulier du *théorème de Dini* [1]). Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, et $(f_n)$ une suite de fonctions *continues,* $\geqslant 0$ sur $[a,b]$, telle que $(\forall x\in[a,b])\ f_n(x)\ \underset{n\to\infty}{\downarrow}\ 0$.

Montrer que la convergence de $(f_n)$ vers 0 sur $[a,b]$ est *uniforme.*

*Indication :* Sinon il existerait $\varepsilon$ réel $>0$, une suite $(x_n)$ *convergente* dans $[a,b]$ et une suite extraite $(f_{k_n})$ de $(f_k)$ tels que $(\forall n)\ f_{k_n}(x_n)\geqslant\varepsilon$, ce qui contredirait la continuité des $f_{k_n}$ en $x$.

*b*) Déduire du *a*) que toute forme linéaire positive sur $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ est une mesure de Daniell.

***Exercice 8 :*** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. On considère une mesure de Daniell $\mu$ sur Esc $([a,b],\mathbb{R})$ possédant la propriété suivante : pour tout sous-intervalle $J$ de $[a,b]$, $\mu(\chi_J)$ ne dépend que de la mesure de Lebesgue mes $(J)$ de $J$. Démontrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}_+$ tel que $(\forall f\in \text{Esc}([a,b],\mathbb{R}))\ \mu(f)=\lambda\displaystyle\int_a^b f$.

***Exercice 9 :*** Soit $n\mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Pour $\varepsilon$ réel $>0$, soit $\omega_\varepsilon=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left([0,1]\cap\left]r_n-\frac{\varepsilon}{2^n},r_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right[\right)$.

*a*) Vérifier que $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}\omega_\varepsilon=G$ est négligeable.

*b*) Etudier si $\chi_G$ est la limite simple sur $[0,1]$ d'une suite de fonctions en escalier.

## § VII.3 *FONCTIONS BORNÉES INTÉGRABLES*

Tout au long de ce §, $a$ et $b$ sont deux réels fixés $(a<b)$. Proposons-nous de prolonger l'intégrale des fonctions en escalier sur $[a,b]$ déjà étudiée à une classe plus vaste de fonctions. Il semble raisonnable d'envisager dans ce chapitre le cas des fonctions *bornées* sur $[a,b]$ qui recouvre déjà une large gamme de situations concrètes.

L'idée de base, simple et naturelle, est de procéder par *encadrements* d'une fonction dont on veut définir l'intégrale par des fonctions pour lesquelles on sait déjà la définir. Des processus de passage à la limite, des encadrements de plus en plus précis fourniront alors l'extension désirée.

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dans $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. Nous la dirons ***u*-majorée** [1] (resp. ***u*-minorée, *u*-bornée**) ssi $\exists M$ réel $>0$ tel que

$$(\forall n)\quad f_n\leqslant M\chi_{[a,b]}\quad(\text{resp. } f_n\geqslant -M\chi_{[a,b]},\quad |f_n|\leqslant M\chi_{[a,b]})\,.$$

Nous la dirons **croissante** (resp. **décroissante**) ssi $(\forall n)\ f_{n+1}\geqslant f_n$ (resp. $f_{n+1}\leqslant f_n$).

Si $(f_n)$ est *croissante et u-majorée,* elle est évidemment **simplement convergente** sur $[a,b]$ vers une fonction majorée $f$, car pour tout $x\in[a,b]$, la suite *numérique* $(f_n(x))$ est croissante et majorée, donc converge dans $\mathbb{R}$. Nous écrirons $f_n\ \underset{n\to\infty}{\uparrow}\ f$. De même, si $(g_n)$ est

---

[1] Ulisse *Dini* (1845, 1918), mathématicien italien.

[1] *u*-majorée est une abréviation de *uniformément* majorée ($M$ ne dépen(

*décroissante et u-minorée,* elle converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction $g$, minorée, ce qui s'écrit : $g_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} g$.

**La classe $\mathcal{U}_B$**

Nous désignerons par $\mathcal{U}_B$ **l'ensemble des $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ telles qu'il existe au moins une suite $(f_n)$ de fonctions en escalier sur $[a, b]$, croissante et $u$-majorée, pour laquelle $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$.**

Il est clair que toute $f \in \mathcal{U}_B$ est *bornée* et que : $\text{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{U}_B$. L'ensemble $\mathcal{U}_B$ contient en particulier la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions *continues* sur $[a, b]$. En effet, soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Considérons une suite $(\sigma_{[k]})$ de subdivisions de $[a, b]$ *croissante* dans l'ensemble ordonné des subdivisions et telle que le pas de $\sigma_{[k]}$ tende vers 0 pour $k \longrightarrow \infty$. Notons $\sigma_{[k]} = (a_{k,i})_{0 \leqslant i \leqslant n_k}$ et, pour chaque $i$, $m_{i,k} = \underset{x \in [a_{k,i}, a_{k,i+1}]}{\text{Min}} f(x)$. Soit enfin $f_k$ la fonction en escalier

$$\sum_{i=0}^{n_k} f(a_{k,i})\, \chi_{\{a_{k,i}\}} + \sum_{i=0}^{n_k - 1} m_{i,k}\, \chi_{]a_{k,i}, a_{k,i+1}[} :$$

alors $f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$, comme le montre facilement la continuité *uniforme* de $f$ sur $[a, b]$ (en fait, la suite $(f_k)$ converge même uniformément vers $f$ sur $[a, b]$ et sa croissance résulte de celle des $\sigma_{[k]}$).

L'ensemble $\mathcal{U}_B$ contient également l'ensemble des fonctions *monotones* sur $[a, b]$, mais la démonstration, un peu plus difficile, est rejetée en exercice 3.

Les propriétés élémentaires des limites de suites numériques entraînent :

**PROPOSITION VII.3.1**

> *L'ensemble $\mathcal{U}_B$ est stable pour les opérations $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ et $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$. Si $(f, g) \in \mathcal{U}_B^2$, $(f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0) \Rightarrow fg \in \mathcal{U}_B$ ; et $(\forall (f, g) \in \mathcal{U}_B^2) \quad (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2) \quad \alpha f + \beta g \in \mathcal{U}_B$.*

**Extension de l'intégrale à $\mathcal{U}_B$**

Soit $f \in \mathcal{U}_B$ et $(f_n)$ une suite dans $\text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$.

Posons $M = \underset{x \in [a, b]}{\sup} f(x)$. Alors

$$(\forall n) \quad \int_a^b f_n \leqslant \int_a^b f_{n+1} \leqslant M \int_a^b \chi_{[a, b]} \leqslant M(b - a).$$

La suite $\left( \int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc converge dans $\mathbb{R}$.

**LEMME 1**

*Soit* $(f, g) \in \mathcal{U}_B^2$ *et* $(f_n)$, $(g_n)$ *des suites dans* Esc $([a, b], \mathbb{R})$ *telles que* $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$, $g_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} g$. *Alors si* $g \leqslant f$, *on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n \leqslant \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n .$$

*En conséquence,* $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n$ *est un réel indépendant du choix des* $f_n \in$ Esc $([a, b], \mathbb{R})$ *tels que* $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$.

*Démonstration :*

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Du fait que $g \leqslant f$ :

$$\inf(f_n, g_k) \underset{n \to \infty}{\uparrow} g_k , \quad \text{d'où} \quad g_k - \inf(f_n, g_k) \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0 .$$

D'après le théorème VII.2.2, il s'ensuit :

$$\int_a^b \inf(f_n, g_k) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b g_k .$$

Mais $(\forall n)\ f_n \geqslant \inf(f_n, g_k)$, d'où :

$$\int_a^b f_n \geqslant \int_a^b \inf(f_n, g_k) \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \geqslant \int_a^b g_k .$$

C'est vrai $(\forall k \in \mathbb{N})$. En définitive $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n \geqslant \lim_{k \to \infty} \int_a^b g_k$. ■

Pour $f \in \mathcal{U}_B$, nous noterons $\int_a^b f$ (ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la lettre $x$ étant muette), et appellerons **intégrale de $f$ (au sens de Lebesgue)** *le réel $I$ tel que* $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} I$ pour toute suite $(f_n)$ *de fonctions en escalier vérifiant* $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$ [1].

---

[1] On en déduit facilement que pour $f \in \mathcal{U}_B$, l'intégrale $\int_a^b f$ peut être définie comme le nombre $\sup_{g \in \mathcal{E}(f)} \left( \int_a^b g \right)$, où $\mathcal{E}(f)$ désigne l'ensemble des fonctions *en escalier* : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont majorées par $f$.

Bien sûr, pour $f \in \mathrm{Esc}\,([a,b],\mathbb{R})$, on retrouve l'intégrale usuelle du § VII.2. On sait que cette intégrale usuelle est une forme linéaire positive. Par des passages à la limite évidents portant sur des suites *numériques,* on obtient, pour $(f,g) \in \mathscr{U}_B^2$ :

$$(1) \quad f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g \ ;$$

$$(\forall \alpha \geqslant 0, \forall \beta \geqslant 0) \quad \int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \, .$$

**Proposition VII.3.2**

> *Soit $(f_n)$ une suite d'éléments de $\mathscr{U}_B$ croissante et u-majorée. Alors*
>
> $$f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n \in \mathscr{U}_B \, , \quad \textit{et} \quad \int_a^b f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \, .$$

*Démonstration :*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $(\varphi_{n,k})$ une suite dans $\mathrm{Esc}\,([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi_{n,k} \uparrow f_n$. Posons $\psi_n = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (\varphi_{i,n})$ (c'est une fonction en escalier) et fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \geqslant n$, $f_k \geqslant \psi_k \geqslant \varphi_{n,k}$. La suite $(\psi_k)$ est croissante, et par ce qui précède,

$$f = \lim_{k \longrightarrow \infty} f_k \geqslant \lim_{k \longrightarrow \infty} \psi_k \geqslant \lim_{k \longrightarrow \infty} \varphi_{n,k} = f_n \, .$$

C'est vrai $(\forall n \in \mathbb{N})$, d'où $\psi_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} f$ ; donc $f \in \mathscr{U}_B$.

Par définition de $\displaystyle\int_a^b f$, on a $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_a^b \psi_k$. Mais

$$(\forall k) \quad \psi_k \leqslant f_k \leqslant f \, , \quad \text{d'où} \quad \int_a^b \psi_k \leqslant \int_a^b f_k \leqslant \int_a^b f \, ,$$

et en faisant tendre $k$ vers $+\infty$ : $\displaystyle\int_a^b f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$. ■

**La classe $\mathscr{V}_B$**

Désignons par $\mathscr{V}_B$ l'ensemble $\{f \mid -f \in \mathscr{U}_B\}$. Pour $f \in \mathscr{V}_B$ on définit tout naturellement $\displaystyle\int_a^b f$ comme étant l'opposé de $\displaystyle\int_a^b (-f)$. Cependant, il faut s'assurer que cette définition est bien cohérente pour $f \in \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$. Or, pour une telle $f$, en appliquant (1) à $f + (-f)$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b f + \int_a^b (-f) = 0$, ce qui est satisfaisant. On peut donc sans difficulté définir, pour $f \in \mathscr{V}_B$, **l'intégrale (de Lebesgue)** de $f$ par $\displaystyle\int_a^b f =$

Pour $u$ et $v$ éléments de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$\inf(-u,-v) = -\sup(u,v)\ ; \quad \sup(-u,-v) = -\inf(u,v)\,.$$

On peut donc transposer à $\mathscr{V}_B$ les résultats déjà obtenus dans l'étude de $\mathscr{U}_B$ :

**PROPOSITION VII.3.3**

*L'ensemble $\mathscr{V}_B$ contient* Esc $([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. *Il est stable pour les opérations*

$$(f,g)\mapsto \sup(f,g)\,,\quad (f,g)\mapsto \inf(f,g)\,,$$

*et par combinaison linéaire à coefficients réels $\geqslant 0$.*
*Si $(f,g)\in\mathscr{V}_B^2$ : pour $f\geqslant 0$ et $g\geqslant 0$, $fg\in\mathscr{V}_B$ ;*

$$\text{pour}\quad f\leqslant g\,,\quad \int_a^b f\leqslant \int_a^b g\ ;$$

$$\text{pour}\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2\,,\quad \int_a^b \alpha f+\beta g = \alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g\,.$$

*Enfin, si $(f_n)$ est une suite décroissante u-minorée dans $\mathscr{V}_B$*
lim $(f_n)\in\mathscr{V}_B$ et $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b \lim(f_n)$.

**L'espace $\mathscr{L}_B$**

Si $v\in\mathscr{V}_B$ et $u\in\mathscr{U}_B$, on a : $-v\in\mathscr{U}_B$, d'où $u-v\in\mathscr{U}_B$, et $\displaystyle\int_a^b(u-v)=\int_a^b u-\int_a^b v$. Si en outre $v\leqslant u$, comme $u-v\geqslant 0$, il s'ensuit : $\displaystyle\int_a^b(u-v)=\int_a^b u-\int_a^b v\geqslant 0$.

**DÉFINITION VII.3.1**

*Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une* **fonction bornée.** *On dit que $f$ est* **intégrable (au sens de Lebesgue)** *ssi pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $u\in\mathscr{U}_B$ et $v\in\mathscr{V}_B$ telles que $v\leqslant f\leqslant u$ et $\displaystyle\int_a^b(u-v)\leqslant\varepsilon$. Si pour tout $\varepsilon>0$, on peut choisir $u$ et $v$* **en escalier** *vérifiant ces conditions, on dit que $f$ est* **intégrable au sens de Riemann** *(ou* Riemann-intégrable*).*
*Enfin, pour une fonction* **bornée** *$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$, on dit que $f$ est* **intégrable** *(au sens de Lebesgue) (resp. au sens de Riemann) ssi ses parties réelle et imaginaire le sont.*

Nous désignerons par $\mathscr{L}_B([a,b],K)$ (resp. $\mathfrak{R}([a,b],K)$) l'e fonctions **bornées intégrables** (resp. bornées et Riemann-intégrables) de $[a, b]$ dans $K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), notations que nous abrégerons en $\mathscr{L}_B$ et $\mathfrak{R}$ (ou $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ et $\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})}$ s'il s'agit de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$).

On sait déjà que $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$ et que $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$. La définition VII.3.1 montre clairement que toute fonction Riemann-intégrable est intégrable au sens de Lebesgue. Nous verrons à la fin du § VII.5 que l'inclusion $\mathfrak{R} \subset \mathscr{L}_B$ (d'où $\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})} \subset \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$) est *stricte*. Comme le $\mathbb{R}$-ev engendré par $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \cup \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ n'est autre que la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{C}\mathscr{M}_0([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions *continues par morceaux* sur $[a, b]$, on en conclut que $\mathscr{C}\mathscr{M}_0([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathscr{L}_B$. Mieux :

**PROPOSITION VII.3.4**

> *Toute fonction* **continue** *(resp.* **monotone***) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable (donc* a fortiori *bornée intégrable).*

*Démonstration :*

Soit $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$ continue et $\varepsilon$ un réel $> 0$. Soit $\delta > 0$ un module de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$ sur $[a, b]$ et $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$, de pas $\alpha > 0$. Posons

$$m_i = \operatorname*{Min}_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \operatorname*{Max}_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x)$$

et considérons les fonctions en escalier :

$$v = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, \chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \chi_{]a_i, a_{i+1}[}\,,$$

$$u = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, \chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=0}^{n-1} M_i\, \chi_{]a_i, a_{i+1}[}\,.$$

Il est clair que $v \leqslant f \leqslant u$ et que, si $\alpha < \delta$, $\displaystyle\int_a^b (u - v) \leqslant \varepsilon(b - a)$.

Soit maintenant $g$ monotone (par exemple croissante). Pour la subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ considérons les fonctions en escalier :

$$\psi = \left(\sum_{i=0}^{n-1} g(a_i)\, \chi_{[a_i, a_{i+1}[}\right) + g(b)\, \chi_{\{b\}}$$

et

$$\varphi = g(a)\, \chi_{\{a\}} + \sum_{i=0}^{n-1} g(a_{i+1})\, \chi_{[a_i, a_{i+1}[}\,.$$

Il est clair que

$$\psi \leqslant g \leqslant \varphi$$

et que

$$\int_a^b (\varphi - \psi) = \sum_{i=0}^{n-1} (g(a_{i+1}) - g(a_i))\,(a_{i+1} - a_i) \leqslant \alpha\,(g(b) - g(a))\,,$$

ce qui peut être rendu $\leqslant \varepsilon$ par le choix de $\alpha$. ■

La définition VII.3.1 rend évidente l'inclusion $\text{Esc}([a,b],\mathbb{R})\subset\mathfrak{R}$ ; (d'où $\text{Esc}([a,b],\mathbb{C})\subset\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})}$). Combinant ce résultat avec celui de la proposition VII.3.4, on en déduit les inclusions :

$$\mathscr{C}\mathscr{M}_0([a,b],\mathbb{R})\subset\mathfrak{R}\ ;\quad \mathscr{C}\mathscr{M}_0([a,b],\mathbb{C})\subset\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})}.$$

**THÉORÈME VII.3.1**

*$\mathscr{L}_B$ est un espace de Riesz de fonctions, et une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$.*

*Démonstration :*

Compte tenu des propositions VII.3.1 et VII.3.3, seule la stabilité pour le produit mérite explication. Soit donc $f$ et $g$ dans $\mathscr{L}_B$. Dans la définition VII.3.1, si $f\geqslant 0$, pour chaque $\varepsilon>0$ on peut choisir $v\geqslant 0$ (quitte à remplacer $v$ par $\sup(v,0)$). Les propositions VII.3.1 et VII.3.3 montrent alors que si $f\geqslant 0$ et $g\geqslant 0$, $fg\in\mathscr{L}_B$. Si maintenant $f$ et $g$ sont quelconques, en prenant $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $f+M\geqslant 0$ et $g+M\geqslant 0$, on voit bien que

$$fg=(f+M)(g+M)-M^2-M(f+g)\in\mathscr{L}_B\,.\quad\blacksquare$$

***Remarque 1 :*** Le même raisonnement prouve que $\mathfrak{R}$ est aussi un espace de Riesz et une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{L}_B$.

### Extension de l'intégrale à $\mathscr{L}_B$

Si $f$ est bornée intégrable (au sens de Lebesgue), on peut considérer les ensembles suivants :

$$\mathscr{V}_-(f)=\{v\in\mathscr{V}_B\mid v\leqslant f\}\ ,\quad \mathscr{U}_+(f)=\{u\in\mathscr{U}_B\mid f\leqslant u\}$$

$$\Lambda_-(f)=\left\{\int_a^b v\right\}_{v\in\mathscr{V}_-(f)}\ ;\ \Lambda_+(f)=\left\{\int_a^b u\right\}_{u\in\mathscr{U}_+(f)},$$

et aussi :

$$\mathscr{E}_-(f)=\{v\in\text{Esc}([a,b],\mathbb{R})\mid v\leqslant f\}\ ,$$
$$\mathscr{E}_+(f)=\{u\in\text{Esc}([a,b],\mathbb{R})\mid f\leqslant u\}\ ,$$
$$\mathscr{I}_-(f)=\left\{\int_a^b v\right\}_{v\in\mathscr{E}_-(f)}\ ;\quad \mathscr{I}_+(f)=\left\{\int_a^b u\right\}_{u\in\mathscr{E}_+(f)}.$$

On a donc :

$$\mathscr{E}_-(f)\subset\mathscr{V}_-(f)\,,\quad \mathscr{E}_+(f)\subset\mathscr{U}_+(f)\,,\quad \mathscr{I}_-(f)\subset\Lambda_-(f)$$
$$\text{et}\quad \mathscr{I}_+(f)\subset\Lambda_+(f)\,.$$

La définition VII.3.1 exprime que les ensembles $\Lambda_-(f)$ et $\Lambda_+(f)$ sont *adjacents. L'unique réel $I$ tel que* $I=\sup(\Lambda_-(f))=\inf(\Lambda_+(f))$ *sera appelé* **intégrale (de Lebesgue)** *de $f$ et noté* $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (x muette).

**Proposition VII.3.5**

*L'intégrale $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire positive sur $\mathscr{L}_B$, et c'est la seule qui prolonge l'intégrale déjà définie sur $\mathscr{U}_B \cup \mathscr{V}_B$.*

*Démonstration :*

Soit $f \in \mathscr{L}_B$. On commence par vérifier que

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f (\Lambda_+(-f) = -\Lambda_-(f) \text{ et } \Lambda_-(-f) = -\Lambda_+(f)),$$

ce qui permet de supposer $f \geqslant 0$. Or si $f \geqslant 0$, on a :

$$\int_a^b f = \inf(\Lambda_+(f)), \text{ et } \Lambda_+(f) \subset \mathbb{R}_+, \quad \text{d'où} \quad \int_a^b f \geqslant 0 .$$

Soit maintenant $f_1$, $f_2$ dans $\mathscr{L}_B$ et $\alpha_1$, $\alpha_2$ dans $\mathbb{R}_+$. Etant donné $\varepsilon$ réel $> 0$, choisissons $v_i \in \mathscr{V}_B$ et $u_i \in \mathscr{U}_B$ telles que $v_i \leqslant f_i \leqslant u_i$ et que

$$\int_a^b (u_i - v_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{1 + \alpha_1 + \alpha_2} \; (i \in \{1, 2\}),$$

puis posons

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 .$$

Alors :

$v \leqslant \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \leqslant u$ ;

$$\int_a^b v \leqslant \alpha_1 \int_a^b f_1 + \alpha_2 \int_a^b f_2 \leqslant \int_a^b u \leqslant \left(\int_a^b v\right) + \varepsilon ;$$

et

$$\int_a^b v = \alpha_1 \int_a^b v_1 + \alpha_2 \int_a^b v_2 \leqslant \int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \leqslant \int_a^b u \leqslant \left(\int_a^b v\right) + \varepsilon .$$

Donc
$$\left| \int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) - \alpha_1 \int_a^b f_1 - \alpha_2 \int_a^b f_2 \right| \leqslant \varepsilon ,$$

et comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\int_a^b \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = \alpha_1 \int_a^b f_1 + \alpha_2 \int_a^b f_2 .$$

Enfin, soit $\mu$ une forme linéaire positive sur $\mathscr{L}_B$ prolongeant l'intégrale de $\mathscr{U}_B \cup \mathscr{V}_B$. Pour $f \in \mathscr{L}_B$ on doit avoir

$$\mu(f) \in [\sup \Lambda_-(f), \inf \Lambda_+(f)], \quad \text{d'où} \quad \mu(f) = \int_a^b f \quad ■$$

***Remarque 1 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée* quelconque ; les ensembles

$$\mathscr{V}_-(f),\quad \mathscr{U}_+(f),\quad \Lambda_-(f),\quad \Lambda_+(f),\quad \mathscr{E}_-(f),\quad \mathscr{E}_+(f),\quad \mathscr{I}_-(f) \text{ et } \mathscr{I}_+(f)$$

peuvent être définis comme ci-dessus. Il est immédiat qu'ils sont non vides et vérifient toujours :

$$\mathscr{E}_-(f) \subset \mathscr{U}_-(f),\quad \mathscr{E}_+(f) \subset \mathscr{U}_+(f),\quad \mathscr{I}_-(f) \subset \Lambda_-(f),\quad \mathscr{I}_+(f) \subset \Lambda_+(f).$$

La définition VII.3.1 signifie que : $f \in \mathscr{L}_B$ *ssi* $\Lambda_-(f)$ et $\Lambda_+(f)$ sont adjacents, et : $f \in \mathfrak{R}$ *ssi* $\mathscr{I}_-(f)$ et $\mathscr{I}_+(f)$ sont adjacents.

Lorsque $f \in \mathfrak{R}$, les inclusions $\mathscr{I}_-(f) \subset \Lambda_-(f)$, $\mathscr{I}_+(f) \subset \Lambda_+(f)$ montrent que $\int_a^b f = \sup(\mathscr{I}_-(f)) = \inf(\mathscr{I}_+(f))$.

Lorsque $f \in \mathscr{L}_B$ et $f \notin \mathfrak{R}$, on a en général $\sup(\mathscr{I}_-(f)) < \inf(\mathscr{I}_+(f))$ (cf. exemple 3 du § VII.5).

**COROLLAIRE**

*Soit $f \in \mathscr{L}_B$ telle que $f \geqslant 0$. Si $\int_a^b f = 0$, alors $f(x_0) = 0$ en tout point $x_0$ où $f$ est continue.*

*Démonstration :*

Supposons qu'en $x_0$, $f$ soit continue et que $f(x_0) > 0$. On aurait alors des réels $m$, $\alpha$, $\beta$, avec $m > 0$, $\beta > \alpha$ et $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tels que $f \geqslant m\chi_{[\alpha,\beta]}$, d'où par positivité de l'intégrale :

$$\int_a^b f \geqslant \int_a^b m\chi_{[\alpha,\beta]} = m(\beta - \alpha) > 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

**THÉORÈME VII.3.2**

*Soit $(f_n)$ une suite dans $\mathscr{L}_B$, croissante et u-majorée, et soit $f = \lim(f_n)$. Alors $f \in \mathscr{L}_B$ et $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.*

*Démonstration :*

On peut supposer $f_0 = 0$ (sinon on s'y ramène en remplaçant $f_n$ par $f_n - f_0$). Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n \in \mathscr{U}_B$ telle que

$$f_n - f_{n-1} \leqslant u_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (f_n - f_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geqslant \int_a^b u_n.$$

Alors

$$(\forall n \geqslant 1) \quad f_n \leqslant u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b u_i\right) \leqslant \left(\int_a^b \right. f + \varepsilon$$

Soit $M$ réel $> 0$ qui majore toutes les $f_j$ ; posons

$$\psi_n = \inf\,(M, u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \quad (n \geqslant 1)\,.$$

La suite $(\psi_n)$ est croissante et $u$-majorée dans $\mathscr{U}_B$, d'où $\psi_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} \psi$, avec $\psi \in \mathscr{U}_B$, et $\int_a^b \psi_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \psi$ (proposition VII.3.2). D'autre part,

$$\int_a^b \psi_n \leqslant \int_a^b \left(\sum u_i\right) \leqslant \varepsilon + \int_a^b f_n$$

pour tout $n$, et $(\forall n)$ $f_n \leqslant \psi_n$, d'où $f \leqslant \psi$. La suite $\left(\int_a^b f_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par $M(b-a)$, donc converge vers un réel $l$, et ce qui précède montre : $l \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon + l$. Prenons $N \in \mathbb{N}$ pour que $\int_a^b f_N \geqslant l - \varepsilon$, et soit $v \in \mathscr{V}_B$ telle que $v \leqslant f_N$ et $\int_a^b f_N \leqslant \varepsilon + \int_a^b v$. Alors $v \leqslant f_N \leqslant f \leqslant \psi$, et

$$\int_a^b (\psi - v) = \left(\int_a^b \psi\right) - l + \left(l - \int_a^b f_N\right) + \left(\int_a^b f_N - \int_a^b v\right) \leqslant 3\,\varepsilon\,.$$

On a donc prouvé que $f \in \mathscr{L}_B$. *Cela acquis,* en reprenant ce qui vient d'être construit à partir de $\varepsilon > 0$, on voit que pour tout $n \geqslant N$,

$$l - \varepsilon \leqslant \int_a^b f_n \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b \psi \leqslant \varepsilon + l\,, \quad \text{d'où} \quad \int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f\,. \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE**

*L'intégrale de Lebesgue est une mesure de Daniell positive sur* $\mathscr{L}_B$.

En effet, si $(\forall n)$ $f_n \in \mathscr{L}_B$ et si $f_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$, il suffit d'appliquer le théorème VII.3.2 à la suite $(-f_n)$.

***Remarque 2 :*** L'intégrale de Lebesgue est *la seule* mesure de Daniell positive sur $\mathscr{L}_B$ qui prolonge l'intégrale des fonctions en escalier : cela résulte de la proposition VII.3.5 et du fait que pour toute mesure de Daniell positive $\mu$ sur $\mathscr{L}_B$, pour toute $f \in \mathscr{L}_B$ et toute suite $(f_n)$ de $\mathscr{L}_B$, la relation $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$ entraîne $\mu(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(f_n)$.

Le théorème VII.3.1 et le corollaire du théorème VII.3.2 entraînent notamment : *si* $f \in \mathscr{L}_B$, *alors* $|f| \in \mathscr{L}_B$, *et* $\mathscr{U}_a^b f \,| \leqslant \int_a^b \|f\|$

**THÉORÈME VII.3.3**

*Soit $(f_n)$ une suite* **u-bornée** *dans $\mathscr{L}_B$, qui* **converge simplement** *sur $[a, b]$ vers $f \in \mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathscr{L}_B$, et $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.*

*Démonstration :*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n = \sup\limits_{k \geqslant n} f_k$ et $h_n = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k$. Puisque $(f_n)$ converge simplement vers $f$, on a $g_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} f$ et $h_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$. D'autre part, $\sup(f_n, \ldots, f_j) \underset{\begin{cases} j \to +\infty \\ j \geqslant n \end{cases}}{\uparrow} g_n$, et la suite $(\sup(f_n, \ldots, f_j))_{j \geqslant n}$ et $u$-majorée dans $\mathscr{L}_B$, donc $g_n \in \mathscr{L}_B$ ; comme $g_n \geqslant f_k$ pour $k \geqslant n$, on a :

$$\int_a^b g_n \geqslant \int_a^b f_k \quad \text{d'où} \quad \int_a^b g_n \geqslant \sup_{k \geqslant n} \int_a^b f_k \, .$$

Par le théorème VII.3.2 (appliqué à $(-g_n)$), $f \in \mathscr{L}_B$ et $\int_a^b g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

La suite $(L_n) = \left( \sup\limits_{k \geqslant n} \int_a^b f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et est minorée dans $\mathbb{R}$, donc converge dans $\mathbb{R}$, et ce qui précède prouve que $\int_a^b f \geqslant \lim\limits_{n \to \infty} (L_n)$. On prouverait de même que la suite $(l_n) = \left( \inf\limits_{k \geqslant n} \int_a^b f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ croît, est majorée, donc converge dans $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{n \to \infty} (l_n) \geqslant \int_a^b f$ (utiliser les $h_n$ au lieu des $g_n$). Mais $(\forall n)\ l_n \leqslant L_n$, donc les deux suites $(l_n)$ et $(L_n)$ convergent toutes deux vers $\int_a^b f$, et cela entraîne que la suite $\left( \int_a^b f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers $\int_a^b f$. ■

Ce théorème VII.3.3 est un cas particulier du fondamental « théorème de la convergence dominée » de H. Lebesgue.

**COROLLAIRE**

*Sous les hypothèses du théorème* VII.3.3, *on a :* $\int_a^b |f - f_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

**Espace $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$**

Compte tenu de l'étude précédente, $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{C})$, formée de fonctions bornées, et qui contient la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{C}\mathscr{M}_0([a,b],\mathbb{C})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Pour $f \in \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$, de parties réelle et imaginaire $\varphi$ et $\psi$, on *définit* l'intégrale de $f$ comme étant le nombre $\int_a^b \varphi + \mathrm{i}\int_a^b \psi$, que l'on note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($x$ muette). On vérifie immédiatement : *L'intégrale sur $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$.*

Le théorème VII.3.3 ainsi que son corollaire restent vrais en y remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et $\mathscr{L}_B$ par $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ grâce au théorème VII.3.4 ci-dessous.

La propriété suivante est moins évidente :

**THÉORÈME VII.3.4**

> *Soit $f \in \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$. Alors $|f| \in \mathscr{L}_B$, et :*
> $$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \,.$$

*Démonstration :*

Posons $f = \varphi + \mathrm{i}\psi$, avec $\varphi$ et $\psi$ dans $\mathscr{L}_B$. Puisque $|f| = (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2}$ on comprend facilement que $|f| \in \mathscr{L}_B$ (cf. le lemme 2 ci-dessous pour une preuve détaillée). Posons alors $\int_a^b f = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, puis $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f = u + \mathrm{i}v$ ($u$ et $v$ à valeurs réelles). Il vient :

$$r = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\int_a^b f = \text{(par } \mathbb{C}\text{-linéarité)} = \int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f =$$
$$= \left(\int_a^b u\right) + \mathrm{i}\int_a^b v = \text{(du fait que } r \text{ est réel!)} =$$
$$= \int_a^b u \leqslant \int_a^b |u| \leqslant \int_a^b |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f| = \int_a^b |f| \,. \quad \blacksquare$$

**LEMME 2**

> *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et $f \in \mathscr{L}_B$, $f \geqslant 0$. Alors $f^\alpha \in \mathscr{L}_B$.*

*Démonstration :*

On vérifie d'abord que si $f \in \mathscr{U}_B$ (resp. $\mathscr{V}_B$), alors $f^\alpha \in \mathscr{U}_B$ (resp. $\mathscr{V}_B$), ce qui est immédiat.

On considère ensuite la suite $u$-bornée $\left(f + \dfrac{1}{k}\right)^\alpha$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

simplement vers $f^\alpha$ sur $[a, b]$. Il reste donc à prouver le lemme lorsqu'il existe un réel $m > 0$ tel que $f \geqslant m$.

Dans ce cas, soit $M > 0$ tel que $m\chi_{[a,b]} \leqslant f \leqslant M\chi_{[a,b]}$ ; à $\varepsilon$ réel $> 0$, associons $u \in \mathcal{U}_B$ et $v \in \mathcal{V}_B$ telles que $m \leqslant v \leqslant f \leqslant u \leqslant M$ et que $\int_a^b (u - v) \leqslant \varepsilon$. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[m, M]$, donc lipschitzienne sur $[m, M]$. Soit $k > 0$ tel que $|t^\alpha - t'^\alpha| \leqslant k|t - t'|$ pour $t$ et $t'$ dans $[m, M]$. Alors $u^\alpha \in \mathcal{U}_B$, $v^\alpha \in \mathcal{V}_B$, $v^\alpha \leqslant f^\alpha \leqslant u^\alpha$ et $u^\alpha - v^\alpha \leqslant k(u - v)$, d'où

$$\int_a^b (u^\alpha - v^\alpha) \leqslant k \int_a^b (u - v) \leqslant k\varepsilon . \quad \blacksquare$$

**Cas particulier des fonctions continues**

Il résulte du théorème VII.3.3 que : *si une suite $(f_n)$ de fonctions de $\mathcal{L}_B$ converge* **uniformément** *sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $f \in \mathcal{L}_B$ et $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.* En effet, comme les $f_n$ sont bornées, la suite $(f_n)$ est **u-bornée** et elle converge simplement vers $f$, d'où le résultat, qui reste valable pour des $f_n \in \mathcal{L}_B^{(\mathbb{C})}$.

Si l'on s'en tient aux fonctions **continues par morceaux,** la preuve du théorème VII.3.4 se simplifie, l'appartenance de $|f|$ à $\mathcal{CM}_0([a, b], \mathbb{R})$ donc à $\mathcal{L}_B$ étant évidente sans recours au lemme 2.

Si l'on s'en tient enfin aux fonctions **continues** (donc vérifiant le théorème VII.3.4), on peut établir directement :

**THÉORÈME VII.3.5**

> *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions* **continues :** $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, **qui converge uniformément** *vers $f$ sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.*

*Démonstration :*

On sait déjà que $f$ est continue (théorème VII.1.1). Puis

$$(\forall n) \quad \left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leqslant \int_a^b |f - f_n| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \mathcal{N}_\infty(f - f_n) \leqslant (b - a)\, \mathcal{N}_\infty(f - f_n)$$

qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$. $\blacksquare$

### Additivité sur les intervalles

**Théorème VII.3.6**

> *Soit un réel* $c > b$, *et* $f \in \mathscr{F}([a, c], \mathbb{R})$ *(resp.* $\mathscr{F}([a, c], \mathbb{C})$. *Alors*
>
> $f \in \mathscr{L}_B([a, c], \mathbb{R})$ *(resp.* $\mathscr{L}_B([a, c], \mathbb{C})$) $\Leftrightarrow$
>
> $$\Leftrightarrow (f|_{[a,b]} \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R}) \text{ et } f|_{[b,c]} \in \mathscr{L}_B([b, c], \mathbb{R}))$$
>
> $$(\text{resp. } f|_{[a,b]} \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{C}) \text{ et } f|_{[b,c]} \in \mathscr{L}_B([b, c], \mathbb{C}))\,,$$
>
> *et si c'est le cas, on a :*
>
> $$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

*Démonstration :*

Il suffit de prouver cela pour $f$ à valeurs *réelles*. C'est déjà acquis quand $f$ est une fonction *en escalier*. Par passages à la limite on obtient le résultat pour $f \in \mathscr{U}_B \cup \mathscr{V}_B$. La première assertion en résulte immédiatement (cf. définition VII.3.1). Quant à la deuxième, elle nécessite un nouveau passage à la limite. ■

***Exercice 1 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($a$ et $b$ réels, $a < b$) une fonction *bornée* telle que $f|_{]a,b[}$ soit continue. Avec les notations du texte, prouver que $f \in \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$. (*Exemple :* $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ pour $x \in ]0, 1]$ et $f(0) = 0$.)

***Exercice 2 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

*a*) Si $f$ est *continue par morceaux,* alors $f \in \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$.

*b*) Si $f$ est bornée, et si $(\forall c \in ]a, b])$ $f|_{[c,b]}$ est continue par morceaux, alors $f \in \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$.

***Exercice 3 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *monotone*. Montrer que $f \in \mathscr{U}_B \cap \mathscr{V}_B$.

*Indication :* Il suffit de prouver que $f \in \mathscr{U}_B$. Utiliser la proposition IV.2.1.

***Exercice 4 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *bornée*. Montrer que : pour que $f$ soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que $\forall \varepsilon$ réel $> 0$ il existe des fonctions $u$ et $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues* telles que $u \leqslant f \leqslant v$ et $\displaystyle\int_a^b (v - u) \leqslant \varepsilon$.

***Exercice 5 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$. Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *semi-continue inférieurement* (en abrégé s.c.i.) en $x_0 \in [a, b]$ ssi $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \alpha > 0)$ tel que

$$(\forall x \in [a, b]) \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon\,.$$

Et $f$ est dite *semi-continue supérieurement* (en abrégé : s.c.s.) en $x_0 \in [a, b]$ ssi $-f$ est s.c.i. en $x_0$. Enfin $f$ est dite s.c.i. (resp. s.c.s.) ssi $f$ est s.c.i. (resp. s.c.s.) en tout point. Une fonction $f$ est *continue* ssi elle est à la fois s.c.i. et s.c.s.

*a*) Soit $(f_n)$ une suite *u-bornée* et *croissante* de fonctions s.c.i. Montrer que $\lim f_n$ est s.c.i.

*b*) Soit $(f_n)$ une suite quelconque *u-bornée* de fonctions s.c.i. Montrer que $\sup (f_n)$ est s.c.i.

*c*) Soit $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Montrer que $\chi_A \in \mathscr{U}_B$. La fonction $\chi_A$ est-elle s.c.i. ? Est-elle s.c.s. ?

*d*) Montrer que l'ensemble des fonctions bornées s.c.i. : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *stable* par combinaison linéaire à coefficients $\geq 0$, ainsi que par les opérations $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ et $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$.

*e*) Soit $E \subset [a, b]$. Pour que $\chi_E$ soit s.c.i., montrer qu'une C.N.S. est que $E$ soit un *ouvert relatif* de $[a, b]$.

***Exercice 6 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction s.c.i. Montrer que $f$ admet un *minimum* sur $[a, b]$.

***Exercice 7 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$. On demande de *construire* une suite $(f_n)$ de fonctions *continues :* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant respectivement l'une des propriétés ci-dessous :

*a*) La suite $(f_n)$ est $u$-bornée, $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$, et $(\forall x \in [a, b])$ la suite $(f_n(x))$ diverge.

*b*) La suite $(f_n)$ converge simplement vers 0 sur $[a, b]$, et $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$.

*c*) La suite $(f_n)$ converge simplement vers 0 sur $[a, b]$, $(\forall n)$ $\mathcal{N}_\infty(f_n) = 1$, l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in [a, b] \mid f_n(x) = 1\}$ est *infini*, et $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

***Exercice 8 :*** *a*) Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$ et $\omega$ une partie ouverte de $]a, b[$. Montrer que $\chi_\omega \in \mathcal{U}_B$ (si $\chi_\omega \notin \mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$, penser à ranger en une *suite* les composantes connexes de $\omega$). Donner un exemple où $\chi_\omega \notin \mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ et où $\chi_\omega \in \mathcal{V}_B$. Dans ce qui suit, on prend $a = 0$, $b = 1$.

*b*) Soit $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q} \cap ]0, 1[$. On donne $\varepsilon \in ]0, 1[$ et on forme $\omega = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[$. Montrer que $\chi_\omega$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

*c*) Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\omega_n = \displaystyle\bigcup_{0 \leq k \leq 3^{n+1}-1} \left]\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right[$. On pose $\omega = \displaystyle\bigcup_{n \geq 1} \omega_n$ et $\mathscr{C} = [0, 1] \setminus \omega$ (on reconnaît en $\mathscr{C}$ l'ensemble dit *triadique de Cantor* de l'exercice 11 du § II.6). Montrer que $\chi_\omega$ est Riemann-intégrable. A partir du fait que $\mathscr{C}$ n'est pas dénombrable (cf. exercice cité), prouver que $\chi_\omega \notin \mathcal{V}_B$. En déduire que $\chi_{\mathscr{C}}$ est Riemann-intégrable et que $\chi_{\mathscr{C}} \notin \mathcal{U}_B$.

*d*) Soit alors $F : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \chi_\omega(x) + \chi_{\mathscr{C}}(2 - x)$ (où les fonctions indicatrices sont relatives à $[0, 2]$). Vérifier que $F \in \mathscr{L}_B([0, 2], \mathbb{R})$ mais que

$$F \notin \mathcal{U}_B([0, 2]) \cup \mathcal{V}_B([0, 2]).$$

***Exercice 9 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

*a*) $f$ est s.c.i. (voir la définition dans l'exercice 5).

*b*) $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]y, +\infty[)$ est ouvert relatif de $[a, b]$.

*c*) $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, y[)$ est fermé.

***Exercice 10 :*** Soit $a$ et $b$ réels $(a < b)$.

*a*) On donne un ouvert relatif de $[a, b]$, soit $\omega$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(f_n)$ de fonctions continues $\geq 0$ telle que $f_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} \chi_\omega$.

*Indication :* Commencer par le cas où $\chi_\omega$ est en escalier ; sinon ranger en une suite les composantes connexes de $\omega$.

*b*) On donne $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ bornée et s.c.i. Soit $M > 0$ tel que $0 < f(x) < M$ pour $x \in [a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{M}{2^n} \chi_{n,k}$, où $\omega_{n,k} = f^{-1}\left(\left]\frac{kM}{2^n}, +\infty\right[\right)$. Montrer que $g_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$. Vérifier que la convergence de $g_n$ vers $f$ est uniforme sur $[a, b]$.

*c*) En déduire que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et s.c.i., il existe une suite $u$-bornée $(\varphi_n)$ de fonctions *continues :* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *croissante* et telle que $\varphi_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f$

*Conclusion :* Toute fonction bornée et s.c.i. sur $[a, b]$ appartient à $\mathscr{U}_B$. Mais la réciproque est fausse (cf. exercice 5*c*).

N.B. Cela explique la facilité avec laquelle on a pu construire l'intégrale de Lebesgue à partir de $\mathscr{U}_B$.

***Exercice 11 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée.* Montrer que pour que $f$ soit intégrable (au sens de Lebesgue), il faut et il suffit que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $\varphi$ et $\psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $\varphi$ s.c.i. et $\psi$ s.c.s. telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_a^b (\varphi - \psi) \leqslant \varepsilon$.

N.B. Cette propriété aurait pu servir à *définir* l'intégrale de Lebesgue, mais cette méthode présente le grave inconvénient d'obliger à construire *d'abord* l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

***Exercice 12 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$. On donne $f$ et $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On suppose $\varphi$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et on suppose $M = \underset{t \in [a, b]}{\operatorname{Max}} f(t) > 0$.

*a*) Prouver $\left(\int_a^b \varphi f^\lambda\right)^{1/\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

*b*) Soit $I_\lambda = \int_a^b \varphi f^\lambda$ $(\lambda > 0)$. Prouver : $\dfrac{I_{\lambda+1}}{I_\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

***Exercice 13 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et $\lambda$ variable dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\left(\int_0^1 f^{1/\lambda}\right)^\lambda \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_0^1 \operatorname{Log} f\right)$.

***Exercice 14 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

On pose $M = \underset{x \in [a, b]}{\operatorname{Max}} |f(x)|$. Trouver une C.N.S. pour que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = M(b - a)$.

***Exercice 15 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$.

*a*) On donne $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue ayant *un seul maximum,* soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\int_a^b \varphi^n f}{\int_a^b \varphi^n}$.

*b*) En déduire que $T : \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $f \mapsto Tf$ définie par $Tf(x) = \int_a^b \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ est *injective.*

***Exercice 16 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et telle que $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$. Montrer que l'argument du nombre complexe $f(x)$ est fixe quand $x$ parcourt $[a, b]$.

***Exercice 17 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable bornée $\geqslant 0$. On pose $A = \int_a^b f$. Montrer que $\sqrt{1 + f^2} \in \mathscr{L}_B$ et que

$$\sqrt{1 + A^2} \leqslant \int_a^b \sqrt{1 + f^2} \leqslant 1 + A \quad \text{pour} \quad b = a + 1 .$$

# § VII.4 *ENSEMBLES MESURABLES BORNÉS DANS* $\mathbb{R}$

Nous nous proposons de montrer l'efficacité de la théorie de l'intégrale exposée au § VII.3 en l'appliquant au problème de la mesure de certaines parties de $\mathbb{R}$. Les futurs probabilistes et statisticiens trouveront peut-être là une aide à leur initiation.

Nous supposons acquises les notions des §§ VII.2 et VII.3, et notamment celle *d'ensemble négligeable* (fin du § VII.2). Dans tout ce qui suit, les réels $a$ et $b$ $(a < b)$ sont fixés ; on pose $\Omega = [a, b]$ et $\mathscr{L}_B = \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$.

**Définition VII.4.1**

*On appelle* **ensemble mesurable (au sens de Lebesgue)** *de $\Omega$ toute partie $A$ de $\Omega$ telle que $\chi_A \in \mathscr{L}_B$. Si $A \subset \Omega$ est mesurable, le réel* $(\geqslant 0)$ $\int_a^b \chi_A(x)\,dx$ *s'appelle* **mesure (de Lebesgue)** *de $A$, et se note* mes $(A)$.

L'ensemble des parties mesurables de $\Omega$ sera noté ci-dessous $\mathscr{M}_\Omega$.

**Définition VII.4.2**

*Soit $\mathscr{U}$ un ensemble non vide (appelé* univers*). On appelle* **tribu** *de $\mathscr{U}$ tout* **clan unitaire** *$\mathscr{C}$ de $\mathscr{U}$ qui de plus est* **stable par réunions dénombrables** *arbitraires.*

*Si $\mathscr{C}$ est une tribu de $\mathscr{U}$, on appelle* **mesure** *sur $\mathscr{C}$ toute application $M : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :*

$(\mathrm{M}_1)$ $\forall (A, B) \in \mathscr{C}^2 \quad A \cap B = \varnothing \Rightarrow M(A \cup B) = M(A) + M(B)$.

$(\mathrm{M}_2)$ *Pour toute suite* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **décroissante** *pour l'inclusion dans $\mathscr{C}$ et telle que* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n = \varnothing$ *, on a :* $M(A_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ([1]).

Soit $\mathscr{C}$ un *clan unitaire* de l'univers $\mathscr{U}$. Puisque $\mathscr{C}$ est stable par l'opération $A \mapsto \mathscr{U} \backslash A$, on voit par *dualité* que $\mathscr{C}$ est une tribu ssi $\mathscr{C}$ est stable par intersections dénombrables arbitraires.

Il est clair que *toute intersection de tribus de $\mathscr{U}$ (dans l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{U})$) est une tribu de $\mathscr{U}$*. Par suite si $\mathscr{G}$ est une partie de $\mathscr{P}(\mathscr{U})$, il existe (au sens de l'inclusion dans $\mathscr{P}(\mathscr{U})$) une plus petite tribu contenant $\mathscr{G}$ : on l'appelle *tribu engendrée par $\mathscr{G}$*.

***Exemple 1 :*** Soit $\mathscr{U} = \Omega$ et $\mathscr{G} = \mathscr{F}_\Omega$, clan des unions finies d'intervalles de $\Omega$. La tribu engendrée par $\mathscr{G}$ s'appelle **tribu borélienne** ([2]) de $\Omega$ : ses éléments s'appellent **ensembles boréliens** de $\Omega$ ; elle contient tous les ouverts relatifs de $\Omega$ (ainsi que tous ses fermés relatifs), car tout ouvert relatif de $\Omega$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts relativement à $\Omega$. On peut définir la tribu borélienne de $\Omega$ comme étant la tribu engendrée par les ouverts relatifs de $\Omega$ (resp. par les compacts de $\Omega$).

---

([1]) Pour que $(\mathscr{U}, \mathscr{C}, M)$ devienne un espace probabilisé, il suffit d'ajouter le troisième axiome de Kolmogoroff : $(\mathrm{M}_3)$ $M(\mathscr{U}) = 1$.

([2]) Emile *Borel* (1871-1956), mathématicien et homme politique français.

### Conséquences des axiomes ($\mathrm{M}_1$) et ($\mathrm{M}_2$)

Soit $M$ une mesure sur une tribu $\mathscr{C}$ de $\mathscr{U}$. On déduit de ($\mathrm{M}_1$) : $M(\varnothing) = 0$ (faire $A = B = \varnothing$) ; si $(A, B) \in \mathscr{C}^2$, $M(A \cup B) = M(A) + M(B) - M(A \cap B)$ d'où, par récurrence :

$$\text{si} \quad (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{C}^n, \quad M\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i M(A_i) - \sum_{i<j} M(A_i \cap A_j) + \cdots$$

On obtient encore plus simplement les inégalités de Boole : $M(A \cup B) \leqslant M(A) + M(B)$ ; $A \subset B \Rightarrow M(A) \leqslant M(B)$, et enfin : $M\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(A_i)$.

On déduit de ($\mathrm{M}_2$) que si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite *croissante* pour l'inclusion dans $\mathscr{C}$, $M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sup_{n \to \infty} M(B_n)$, et plus précisément : $M(B_n) \underset{n \to \infty}{\uparrow} M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$ (d'une part, $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{C}$ et pour le reste, poser $A_n = B \backslash B_n$).

On déduit de ($\mathrm{M}_1$) et ($\mathrm{M}_2$) qu'on a toujours, pour une suite $(A_n)$ dans $\mathscr{C}$, $M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} M(A_n)$ (on convient d'écrire $\sum_{n=0}^{\infty} M(A_n) = +\infty$ si la série diverge). De plus, si les $A_n$ sont *deux à deux disjoints,* on a : $M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} M(A_n)$ (prendre d'abord les sommes partielles). Cette propriété est appelée *additivité complète,* ou *σ-additivité.*

**THÉORÈME VII.4.1**

> *L'ensemble $\mathscr{M}_\Omega$ est une* **tribu** *de $\Omega$, qui contient la tribu borélienne de $\Omega$, et l'application : $\mathscr{M}_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $A \mapsto \operatorname{mes}(A)$ est une* **mesure** *sur $\mathscr{M}_\Omega$.*

*Démonstration :*

On sait déjà que $\mathscr{M}_\Omega$ contient le clan $\mathscr{F}_\Omega$. Soit $(A_n)$ une suite croissante pour l'inclusion dans $\mathscr{M}_\Omega$, et soit $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On a $\chi_{A_n} \underset{n \to \infty}{\uparrow} \chi_A$. Donc $A \in \mathscr{M}_\Omega$ (cf. théorème VII.3.2). Si $A$ et $B$ sont deux parties mesurables, on a :

$$\chi_{A \cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B), \quad \chi_{A \cap B} = \inf(\chi_A, \chi_B) \quad \text{et} \quad \chi_{A \backslash B} = \chi_{A \cup B} - \chi_B$$

d'où $A \cup B \in \mathscr{M}_\Omega$ et $A \backslash B \in \mathscr{M}_\Omega$ (on sait que $\mathscr{L}_B$ est un espace de Riesz). Ainsi $\mathscr{M}_\Omega$ est bien une tribu de $\Omega$, contenant $\mathscr{F}_\Omega$, donc aussi la tribu borélienne de $\Omega$. Enfin, soit $A$ et $B$ *disjoints* et mesurables. On a $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$, d'où $\int_a^b \chi_{A \cup B} = \int_a^b \chi_A + \int_a^b \chi_B$, d'où ($\mathrm{M}_1$). Pour vérifier ($\mathrm{M}_2$), on utilise le corollaire du théorème VII.3.2. ■

### Ensembles négligeables

Prenons en particulier *un ouvert $\omega$ de $\mathbb{R}$ contenu dans* $[a, b]$, et ordonnons ses composantes connexes en une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de façon que $n \mapsto \omega_n$ soit *bijective* (le cas particulier où $\omega$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes est encore plus évident). Alors, par ce qui précède, $\operatorname{mes}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(\omega_n)$. Si l'on définition d'un ensemble négligeable (cf. § VII.2), on voit qu'une partie $N$ *bornée* de $\mathbb{R}$ est négligeable ssi, pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe un *ouvert borné* $\omega$ de $\mathbb{R}$ tel que $N \subset \omega$ et $\operatorname{mes}(\omega) \leqslant \varepsilon$.

**Théorème VII.4.2**

|| *Soit $A \subset \Omega$ ; $A$ est* **négligeable** *ssi $A$ est* **mesurable** *et* **de mesure nulle.**

*Démonstration :*

Supposons $A$ négligeable, et soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(\omega_n) \leqslant \varepsilon$. Posons $U_n = \omega_n \cap \Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. On a : $U \in \mathscr{M}_\Omega$, $\operatorname{mes}(U) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes}(\omega_n) \leqslant \varepsilon$. Chaque $\chi_{U_i}$ est en escalier, et $\sup(\chi_{U_0}, \chi_{U_1}, \ldots, \chi_{U_n}) \underset{n \to \infty}{\uparrow} \chi_U$, donc $\chi_U \in \mathscr{U}_B$. La définition VII.3.1 est satisfaite (pour $\varepsilon$) avec $v = 0$ et $u = \chi_U$, donc $A \in \mathscr{M}_\Omega$ et ce qui précède prouve que $(\forall \varepsilon$ réel $> 0)$ $\operatorname{mes}(A) \leqslant \varepsilon$, d'où $\operatorname{mes}(A) = 0$.

Réciproquement, supposons $A \in \mathscr{M}_\Omega$ et $\operatorname{mes}(A) = 0$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis une suite $(f_n)$ croissante et $u$-majorée dans $\operatorname{Esc}([a, b], \mathbb{R}_+)$, telle que $\lim_{n \to \infty} (f_n) \geqslant 2\chi_A$ et $(\forall n)$ $\int_a^b f_n \leqslant \varepsilon$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\omega_n$ l'union finie d'intervalles ouverts obtenue en *redoublant* l'intérieur de chaque composante de $V_n = f_n^{-1}([1, +\infty[)$ (c'est-à-dire en le remplaçant par son homothétique de rapport 2 par rapport à son centre) lorsque cette composante n'est pas réduite à un point, et en remplaçant chaque composante réduite à un point de $V_n$, s'il y en a (et si $p \in \mathbb{N}^*$ est alors leur nombre) par un intervalle de longueur $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{p}$, et convenable. La suite $(\omega_n)$ est croissante, chaque $\omega_n$ est ouvert, $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$, et $(\forall n)$ $\operatorname{mes}(\omega_n) \leqslant \varepsilon + 2 \operatorname{mes}(V_n) \leqslant \varepsilon + 2 \int_a^b f_n \leqslant 3\varepsilon$. L'ouvert $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$ est borné, contient $A$, et sa mesure est $\lim_{n \to \infty} \operatorname{mes}(\omega_n) \leqslant 3\varepsilon$. ■

***Remarque 1 :*** La première partie de cette démonstration prouve que, si $A$ est négligeable, toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée, nulle hors de $A$, est intégrable bornée, d'intégrale nulle.*

Notons que si $N \subset \Omega$ est *tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{M}_\Omega$ contenant $N$, avec* $\operatorname{mes}(A) \leqslant \varepsilon$, *alors $N$ est négligeable.* En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n \in \mathscr{M}_\Omega$, de mesure $\leqslant \dfrac{1}{n}$, contenant $N$.

On a : $N \subset \bigcap_{n \geqslant 1} A_n = A$, mais $A \in \mathscr{M}_\Omega$ et $(\forall n)$ $\operatorname{mes}(A) \leqslant \operatorname{mes}(A_n)$. Donc $A$ est négligeable, et par conséquent $N$ aussi.

**Intégrabilité et mesurabilité**

Soit $f \in \mathscr{L}_B$ et $A \in \mathscr{M}_\Omega$ ; alors $f\chi_A \in \mathscr{L}_B$. On note : $\int_A f = \int_a^b f\chi_A$. Comme $\chi_A + \chi_{\Omega \setminus A} = \chi_\Omega$, on a toujours $\int_a^b f = \int_A f + \int_{\Omega \setminus A} f$.

**Théorème VII.4.3**

*Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Il y a équivalence entre : $f \in \mathscr{L}_B$, et :*
*(I) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]y, +\infty[)$ est mesurable*
*(II) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([y, +\infty[)$ est mesurable*
*(III) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, y[)$ est mesurable*
*(IV) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, y])$ est mesurable.*

*Démonstration :*

Les conditions (I) à (IV) sont équivalentes entre elles car $\mathscr{M}_\Omega$ est une tribu et $f^{-1}(\mathbb{R}\backslash Y) = \Omega\backslash f^{-1}(Y)$ pour tout $Y \subset \mathbb{R}$.

Soit alors $f \in \mathscr{L}_B$ et montrons que $f^{-1}(]0, +\infty[)$ est mesurable (on se ramène à ce cas en remplaçant $f$ par $f - y$). Posons $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$. On a : $\sup(0, \inf(1, nf)) \underset{n \longrightarrow \infty}{\uparrow} \chi_A$, d'où, par le théorème VII.3.2, $\chi_A \in \mathscr{L}_B$. Réciproquement, supposons que $f$ vérifie l'une des conditions équivalentes (I) à (IV). Soit $M$ réel $> 0$ un majorant de $|f|$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons :

$$A_{n,k} = \left\{x \in [a, b] \mid f(x) \in \left[\frac{k}{n}M, \frac{k+1}{n}M\right[\right\}.$$

Les $(A_{n,k})_{-n \leqslant k \leqslant n}$ forment une partition de $[a, b]$ et ils sont mesurables. Si l'on pose $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{k}{n} M\chi_{A_{n,k}}$, la suite $(f_n)$ est $u$-bornée et elle converge uniformément (donc simplement) vers $f$ sur $[a, b]$. Or $(\forall n)$ $f_n \in \mathscr{L}_B$. Le théorème VII.3.3 montre donc que $f \in \mathscr{L}_B$. ■

**Théorème VII.4.4**

*Soit $f \in \mathscr{L}_B$, avec $f \geqslant 0$. Notons $S = \{x \mid f(x) > 0\}$. Alors $\int_a^b f = 0$ ssi $S$ est négligeable.*

*Démonstration :*

Si $S$ est négligeable, et si $M > 0$ majore $f$, on a :

$$0 \leqslant f \leqslant M\chi_S, \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant \int_a^b f \leqslant M \operatorname{mes}(S) = 0, \quad \text{d'où} \quad \int_a^b f = 0.$$

Si $\int_a^b f = 0$, soit $S_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On a : $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$. Chaque $S_n$ est mesurable et $\frac{1}{n}\chi_{S_n} \leqslant f$, d'où $\int_a^b \chi_{S_n} = 0$. Donc $S_n$ est négligeable, et par suite $S$ est aussi négligeable (théorème VII.2.5). ■

**Corollaire**

*Soit $(f, g) \in \mathscr{L}_B \times \mathscr{L}_B$. On a : $\int_a^b |f - g| = 0$ ssi $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x$.*

**Théorème VII.4.5**

*Soit $(f_n)$ une suite **décroissante** de fonctions $\geqslant 0$ dans $\mathscr{L}_B$ telle que $\int_a^b f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Alors :*

(I) *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{M}_\Omega$ de mesure $\leqslant \varepsilon$ tel que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers 0 sur $\Omega \backslash A$.*
(II) *La suite $(f_n)$ converge simplement vers 0 presque partout.*

*Démonstration :*

Soit $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$. On a $f \in \mathscr{L}_B$, $f \geqslant 0$ et $\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} \int_a^b f$, donc $\int_a^b f = 0$, d'où $f = 0$ presque partout, d'où II).

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$, posons $A_{j,n} = f_j^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[\right)$. Chaque $A_{j,n}$ est mesurable et $\frac{1}{n}\chi_{A_{j,n}} \leqslant f_j$, donc $\frac{1}{n}\operatorname{mes}(A_{j,n}) \leqslant \int_a^b f_j$. On a $q_n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $j \geqslant q_n$, $\operatorname{mes}(A_{j,n}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. On peut supposer la suite $(q_n)$ strictement croissante.

Si $A = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_{q_n, n}$, alors $A \in \mathcal{M}_\Omega$ et $\operatorname{mes}(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Si $x \in \Omega \backslash A$, pour $j \geqslant q_n$, on a : $x \notin A_{j,n}$ (car $A_{j,n} \subset A_{q_n,n}$ puisque $f_j \leqslant f_{q_n}$), d'où : $f_j(x) \leqslant \frac{1}{n}$. Ainsi la suite $(f_j)$ converge uniformément vers 0 sur $\Omega \backslash A$, d'où (I). ■

**COROLLAIRE**

*Soit $(f_n)$ une suite u-bornée de $\mathscr{L}_B$ qui converge simplement vers $f$ sur $[a, b]$ (d'où $f \in \mathscr{L}_B$ d'après le théorème* VII.3.3). *Alors, pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $A \in \mathcal{M}_\Omega$ de mesure $\leqslant \varepsilon$ tel que la convergence de $(f_n)$ vers $f$ soit uniforme sur $\Omega \backslash A$.*

*Démonstration :*

Avec les notations du théorème VII.3.3, on a, pour tout $n$ :

$$h_n \leqslant f_n \leqslant g_n, \quad \text{et} \quad g_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} f, h_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} f, \int_a^b g_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^b h_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

On applique alors le théorème VII.4.5 à $(g_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ et à $(f - h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où le résultat. ■

***Exercice 1 :*** Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable.

*a*) Montrer que, pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est mesurable.

*b*) Soit $J$ un intervalle contenant $f([a, b])$ et soit $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.* Montrer que $g \circ f \in \mathscr{L}_B$.

***Exercice 2 :*** Soit $\rho \in ]0, 1[$. A chaque intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$, on associe les deux intervalles $f_1(I) = \left[a, \frac{a + b - \rho(b - a)}{2}\right]$, $f_2(I) = \left[\frac{a + b + \rho(b - a)}{2}, b\right]$. On pose $I_{0,1} = [a, b]$. Supposant construits les $I_{n,k}$ $(n \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant 2^n)$, intervalles fermés et bornés disjoints, on définit les $I_{n+1,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant 2^{n+1})$ obtenus en remplaçant chaque $I_{n,k}$ par $\{f_1(I_{n,k}), f_2(I_{n,k})\}$ pris dans cet ordre. On pose $F_n = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant 2^n} I_{n,k}$ et $F = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} F_n$, $\omega = [a, b] \backslash F$.

*a*) Calculer en fonction de $\rho$ la mesure de $F$. Vérifier que l'ouvert $\omega$ est partout dense dans $[a, b]$ (on dit alors que l'ensemble $F$ est *rare*).

*b*) Vérifier que $F$ n'a aucun point isolé. Prouver que $F$ n'est pas dénomb *c*) Comment modifier la construction pour que l'ensemble rare $F$ obtenu soit de mesure $>0$ ?

***Exercice 3 :*** *a*) Soit deux réels $a$, $b$ $(a<b)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* de parties mesurables de $[a,b]$. On pose $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que, pour toute $f\in\mathscr{L}_B([a,b],\mathbb{R})$, on a : $\int_{A_n} f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_A f$.

*b*) Soit alors $B$ une partie mesurable de $[a,b]$. On donne $\varepsilon$ réel $>0$.

$b_1$) Construire $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, s.c.i. et telle que $\chi_B\leqslant f$ et $\int_a^b (f-\chi_B)\leqslant\varepsilon$, et $(\forall x\in B)$ $f(x)>1$ (cf. exercice 5 du § VII.3). Montrer alors que $U=\{x\in[a,b]\mid f(x)>1\}$ est un ouvert relatif de $[a,b]$ tel que $B\subset U$ et mes $(U)$ – mes $(B)\leqslant\varepsilon$.

$b_2$) Soit $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ s.c.s. telle que $g\leqslant\chi_B$ et $\int_a^b(\chi_B-g)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. On note $K_n=\left\{x\in[a,b]\mid g(x)\geqslant\frac{1}{n}\right\}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Montrer que $K_n$ est un compact. Utiliser *a*) pour prouver qu'il existe $n$ tel que mes $(B)$ – mes $(K_n)\leqslant\varepsilon$.

*c*) Soit $E\subset[a,b]$. On suppose que, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un ouvert relatif $U\subset[a,b]$ et un compact $K\subset E$ tel que $K\subset E\subset U$, et mes $(U)$ – mes $(K)\leqslant\varepsilon$. Déduire de l'exercice 11 du § VII.3 que $E$ est mesurable.

*Indication :* Penser aux fonctions $\chi_K$ et $\chi_U$.

***Exercice 4*** (un exemple d'ensemble *non mesurable*) : On se place sur $\mathscr{U}=[0,1]$. Pour $A\subset[0,1[$ et $x\in\mathbb{R}$ on note : $\tau_x(A)=\{t+x-\text{Ent }(t+x)\}_{t\in A}$.

*a*) Montrer que si $A\subset[0,1[$ est mesurable et si $x\in\mathbb{R}$, alors $\tau_x(a)$ est mesurable, et mes $(\tau_x(A))=$ mes $(A)$.

*b*) Soit $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie sur $[0,1]$ par $x\,\mathscr{R}\,y$ ssi $x-y\in\mathbb{Q}$. On construit un ensemble $\mathscr{F}$ contenant un élément *et un seul* de chaque classe mod $(\mathscr{R})$. Montrer que les $(\tau_r(\mathscr{F}))_{r\in[0,1[\cap\mathbb{Q}}$ forment un partage de $[0,1]$ et en déduire que $\mathscr{F}$ n'est pas mesurable.

***Exercice 5*** (approfondissement de l'exercice 12 du § VII.3) : Soit $a$, $b$ réels $(a<b)$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ bornée intégrable. On note $M$ la borne supérieure de l'ensemble des $y\in\mathbb{R}_+$ tels que : mes $(f^{-1}([y,+\infty[))>0$. Montrer que $\left(\int_a^b f^\lambda\right)^{1/\lambda}\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

***Exercice 6*** (un exemple d'ensemble *négligeable non borélien*) : Soit $f:\mathscr{C}\longrightarrow[0,1]$ l'application définie sur l'ensemble triadique de Cantor $\mathscr{C}$ comme à l'exercice 11 du § III.4. Vérifier que $f$ est continue et surjective. Soit $\mathscr{N}=f^{-1}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est l'ensemble non mesurable de $[0,1]$ construit dans l'exercice 4 ci-dessus. Vérifier que $\mathscr{N}$ est négligeable, et que $f(\mathscr{N})=\mathscr{F}$. (Si $\mathscr{N}$ était borélien, son image par $f$ serait un ensemble *Souslinien* (cf. Bourbaki, Top. Gén., Chap. IX) donc mesurable, ce qui n'est pas. Donc $\mathscr{N}$ n'est pas borélien).

***Exercice 7 :*** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathscr{C}$ un clan de parties de $\Omega$. On considère l'ensemble $\mathscr{A}=\{E\subset\Omega\mid E\in\mathscr{C}\text{ ou }\Omega\setminus E\in\mathscr{C}\}$. Montrer que $\mathscr{A}$ est un clan unitaire.

*Exemple :* $\mathscr{C}$ est le clan des parties de $\Omega$ de cardinal fini. Pour $\Omega=\mathbb{Z}$ décrire exactement la tribu engendrée par $\mathscr{A}$.

***Exercice 8 :*** Soit $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leqslant x\leqslant 1\text{ et }0\leqslant y\leqslant 1\}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des parties du segment $[0,1]$ constituées d'un nombre fini ou dénombrable de points, et des parties dont le complémentaire dans $[0,1]$ est du type précédent.

*a*) Montrer que $\mathscr{C}$ est une tribu de $[0,1]$.

*b*) Pour $A\in\mathscr{C}$ on pose $m(A)=0$ si $A$ est fini ou dénombrable, $m(A)=1$ dans le cas contraire. Vérifier que $m$ définit une mesure sur $\mathscr{C}$.

*c*) Soit $\mathscr{C}^2$ la tribu engendrée dans $\Omega$ par les ensembles du type $A\times B=\{(x,y)\in\Omega\mid x\in A, y\in B, A\in\mathscr{C}, B\in\mathscr{C}\}$, dotée de la même mesure que celle du *b*). Montrer que $\Delta=\{(x,y)\in\Omega\mid x=y\}$ n'est pas un ensemble mesurable, bie[illegible] sections par $x=x_0$ le soient.

## § VII.5 *SOMMES DE RIEMANN*

$a$ et $b$ sont deux réels fixés ($a < b$) et $K$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{F}([a, b], K)$. Considérons une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ et une suite $\xi = (\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ *subordonnée à* $\sigma$, c'est-à-dire telle que $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ pour $0 \leqslant i \leqslant n - 1$.

Le nombre $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$ s'appelle **somme de Riemann** associée à ces données. Lorsque $K = \mathbb{R}$, $S(f, \sigma, \xi)$ peut être interprétée comme somme d'aires de rectangles associés au graphe de $f$, comme le suggère la figure 1 :

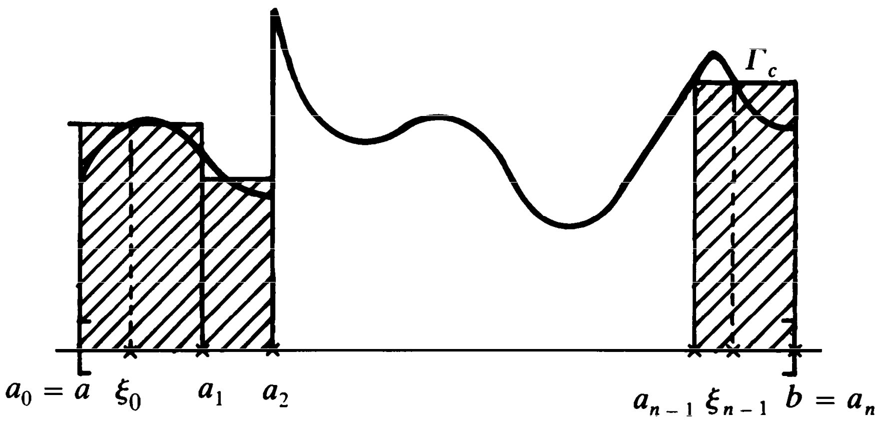



**Fig. 1.**

Soit $\rho \in K$. Nous dirons que **les sommes de Riemann de $f$ convergent vers $\rho$ (lorsque le pas de $\sigma$ tend vers 0)** ssi, *pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\alpha$ *réel* $> 0$ *tel que, pour toute subdivision* $\sigma = \{a_i\}$ *de pas* $\leqslant \alpha$ *et pour toute suite* $\xi = (\xi_i)$ *subordonnée à* $\sigma$, *on ait :* $|S(f, \sigma, \xi) - \rho| \leqslant \varepsilon$.

Il est immédiat qu'il existe au plus un élément $\rho \in K$ tel que les sommes de Riemann de $f$ convergent vers $\rho$. Mais la définition de la convergence des sommes de Riemann de $f \in \mathscr{F}([a, b], K)$ (vers $\rho \in K$) a été choisie de telle sorte que si cette convergence a lieu, et *si* $(\sigma_{[n]})_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de subdivisions de* $[a, b]$ *telle que* (*pas de* $\sigma_{[n]}$) $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, $\xi_{[n]}$ *désignant pour chaque* $n$ *une suite* $(\xi_{i,n})$ *subordonnée à* $\sigma_{[n]}$, *alors* $S(f, \sigma_{[n]}, \xi_{[n]}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho$ au sens habituel de la convergence d'une suite dans $K$.

Si $K = \mathbb{C}$, et si $\varphi$ et $\psi$ sont les parties réelle et imaginaire de $f$, pour que les sommes de Riemann de $f$ convergent vers $l = \alpha + i\beta$ ($(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$), il faut et il suffit que celles de $\varphi$ et de $\psi$ convergent, respectivement vers $\alpha$ et $\beta$, ce qui permet de ramener éventuellement l'étude de ces sommes à celle de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Un cas particulièrement simple est celui où $f : [a, b] \longrightarrow K$ est une fonction continue.

**THÉORÈME VII.5.1**

> *Si $f : [a, b] \longrightarrow K$ est* **continue,** *les sommes de Riemann de $f$ convergent vers $\int_a^b f$.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, et soit $\alpha > 0$ un module de continuité uniforme de $f$ pour $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ sur $[a, b]$. Considérons une subdivision $\sigma$ arbitraire de $[a, b]$ dont le pas soit $\leqslant \alpha$ : $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et soit $\xi = (\xi_i)$ une suite subordonnée à $\sigma$. Alors :

$$\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \right| = \left| \left( \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(\xi_i))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(\xi_i))\,\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(\xi_i)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

***Exemple 1 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$, qui est bien continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma_{[n]}$ la subdivision $\left\{ a + k\dfrac{b-a}{n} \right\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ dont le pas est $\dfrac{b-a}{n}$ (ce pas $\underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$). Choisissons pour suite $\xi_{[n]}$ subordonnée à $\sigma_{[n]}$ la suite $\left( a + k\dfrac{b-a}{n} \right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ qui permet un calcul commode de

$$S(f, \sigma_{[n]}, \xi_{[n]}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cos\left( a + k\frac{b-a}{n} \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cos\left( a + (n-1)\frac{b-a}{2n} \right) \frac{\sin \dfrac{b-a}{2}}{\sin \dfrac{b-a}{2n}}\,.$$

Comme $n \sin \dfrac{b-a}{2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{b-a}{2}$, on en déduit

$$\int_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = 2 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \sin b - \sin a\,.$$

***Exemple 2*** (on suppose ici $a > 0$) : Soit $\alpha$ réel $\neq 0$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ qui est bien une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$. Choisissons cette fois-ci pour subdivision $\sigma_{[n]}$ l'ensemble $\{a(\lambda_n)^k\}_0$

$\lambda_n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/n}$ (on remarque que les $a_k$ sont en progression géométrique, et non pas en progression arithmétique comme dans l'exemple 1). Le pas de $\sigma_{[n]}$ est

$$\alpha_n = a(\lambda_n)^{n-1}(\lambda_n - 1) = \frac{b}{\lambda_n}(\lambda_n - 1) =$$

$$= \frac{b}{\lambda_n}\left(e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log}\frac{b}{a}} - 1\right) \sim \frac{b}{n}\operatorname{Log}\frac{b}{a} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Prenons pour suite $\xi_{[n]}$ subordonnée à $\sigma_{[n]}$ la suite $(a(\lambda_n)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, ce qui donne :

$$S(f, \sigma_{[n]}, \xi_{[n]}) = a^{\alpha+1}(\lambda_n - 1)\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_n)^{(\alpha+1)k}$$

et conduit à distinguer deux cas : si $\alpha = -1$,

$$S(f, \sigma_{[n]}, \xi_{[n]}) = n(\lambda_n - 1) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \operatorname{Log}\frac{b}{a} = \int_a^b \frac{dx}{x} .$$

Si $\alpha \neq -1$,

$$S(f, \sigma_{[n]}, \xi_{[n]}) = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{(\lambda_n)^{\alpha+1} - 1}(\lambda_n - 1) \sim \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1} ,$$

ce qui donne

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1} .$$

On voit ainsi que les sommes de Riemann peuvent servir au calcul effectif de certaines intégrales.

### Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables

**THÉORÈME VII.5.2**

*Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **bornée** est Riemann-intégrable ssi ses sommes de Riemann convergent.*

*Si c'est le cas, elles convergent vers $\displaystyle\int_a^b f$.*

*Démonstration :*

Supposons d'abord que les sommes de Riemann de $f$ convergent vers $\rho$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ et $\alpha$ réel $> 0$ tel que $|S(f, \sigma, \xi) - \rho| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ dès que le pas de $\sigma$ est $\leqslant \alpha$. Soit $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\leqslant \alpha$. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, posons

$$m_i = \inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x) .$$

Choisissons ensuite $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ tel que $f(\xi_i) \leqslant m_i + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$ et $\xi_i' \in [a_i, a_{i+1}]$ tel que $f(\xi_i') \geqslant M_i - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Les fonctions *en escalier*

$$u = \delta + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \chi_{]a_i, a_{i+1}[} \quad \text{et} \quad v = \delta + \sum_{i=0}^{n-1} M_i \, \chi_{]a_i, a_{i+1}[} \, ,$$

avec $\delta = \sum_{i=0}^{n} f(a_i) \, \chi_{\{a_i\}}$, vérifient $u \leqslant f \leqslant v$, et $\int_a^b (v-u) \leqslant \varepsilon$

$$\left(\text{car} \left| \int_a^b u - S(f, \sigma, \xi) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\,(m_i - f(\xi_i)) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \, ,\right.$$

de même $\left| \int_a^b v - S(f, \sigma, \xi') \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$, et $\left. |S(f, \sigma, \xi) - S(f, \sigma, \xi')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$.

Donc $f \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$.

*Sachant cela,* en reprenant les calculs ci-dessus à partir de $\varepsilon > 0$, on voit que $\int_a^b u \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b v$, que $\left| \int_a^b u - \rho \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, que $\left| \int_a^b v - \rho \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc que $\left| \rho - \int_a^b f \right| \leqslant \varepsilon$, et comme c'est vrai $\forall \varepsilon > 0$ on en déduit $\rho = \int_a^b f$.

Réciproquement, supposons $f \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, auquel nous associons deux fonctions $u$ et $v$ *en escalier* telles que $u \leqslant f \leqslant v$ et $\int_a^b (v-u) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Fixons une subdivision $\tau = \{b_j\}_{0 \leqslant j \leqslant p-1}$ de $[a, b]$ adaptée à la fois à $u$ et $v$. Prenons ensuite une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ arbitraire de $[a, b]$ de pas $\alpha > 0$. Soit

$$A = \{ i \in [0, n-1] \mid [a_i, a_{i+1}] \cap \tau = \varnothing \} \quad \text{et} \quad B = [\![0, n]\!] \setminus A$$

et $\xi = (\xi_i)$ subordonnée à $\sigma$. Pour $i \in A$, on a

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} u \leqslant (a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i) \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} v \, ;$$

pour $i \notin A$, on a

$$|(a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i)| \leqslant \alpha M \, , \quad \text{où } M \text{ désigne } \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \, .$$

D'où

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i \in A} (a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i) - \sum_{i \in A} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f \right| &\leqslant \sum_{i \in A} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (v-u) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (v-u) = \int_a^b (v-u) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, ,\end{aligned}$$

et

$$\left| \sum_{i \in B} (a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i) - \sum_{i \in B} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f \right| \leqslant 2\,\alpha M \times \text{card } (B)$$

Or card $(B) \leqslant 2p$ car un $b_j$ appartient *au plus à deux* $[a_i, a_{i+1}]$, d'où par addition :

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant \left|\sum_{i \in A} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) - \sum_{i \in A} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\right| + $$
$$+ \left|\sum_{i \in B} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\right| \leqslant 4\, Mp\alpha + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de prendre $\alpha \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1 + 8\,Mp}$ pour être sûr que $\left|S(f,\sigma,\xi) - \displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \varepsilon$. ∎

***Remarque 1 :*** Les sommes

$$\mathscr{D}_-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, m_i \quad \text{et} \quad \mathscr{D}_+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, M_i$$

introduites comme intégrales des fonctions en escalier $u$ et $v$ *dans la première partie* de la démonstration ci-dessus s'appellent **sommes de Darboux** [1] de $f$ associées à $\sigma$. En remplaçant, *dans la deuxième partie* de la démonstration, les sommes de Riemann par celles de Darboux, on voit qu'on a prouvé : *si* $f \in \mathscr{F}([a,b], \mathbb{R})$ *est bornée, elle est Riemann-intégrable ssi ses sommes de Darboux convergent, et si c'est le cas, ces sommes convergent vers* $\displaystyle\int_a^b f$.

***Exemple 3 :*** Soit $E = \mathbb{Q} \cap [a,b]$ et $f = \chi_E$. On obtient pour une subdivision *quelconque* $\sigma$ : $\mathscr{D}_-(f,\sigma) = 0$ et $\mathscr{D}_+(f,\sigma) = b - a$, donc $f = \chi_E$ *n'est pas* Riemann-intégrable. Cependant on sait que $E$ est négligeable, donc $\chi_E \in \mathscr{L}([a,b], \mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_a^b \chi_E = 0$. En fait, $\chi_E \in \mathscr{U}_B$ car si $n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, $\chi_{\{r_n\}} \underset{n \to \infty}{\uparrow} \chi_A$. On constate sur cet exemple la supériorité de l'intégrale de Lebesgue.

Pour certains des exercices ci-après, le lecteur est supposé avoir déjà acquis une pratique minimale de calcul des primitives des fonctions continues.

**Exercice 1 :** Calculer *à l'aide de sommes de Riemann* les intégrales suivantes :

*a)* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}$ $(z \in \mathbb{C},\ |z| > 1)$ *b)* $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(z - e^{it})^k}$ ($k$ entiers $\geqslant 2$).

*c)* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| \neq 1$ (intégrale de Poisson).

*d)* $W_{2n} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n} t\, dt$ (intégrale de Wallis) : choisir des sommes de Riemann convenables pour obtenir une suite stationnaire.

**Exercice 2 :** Montrer que chacune des suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ci-après converge, et calculer leur limite.

*a)* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{ch}\frac{1}{\sqrt{n+k}} - 1\right)$ *b)* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + (-1)^k k^2}}$

*c)* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{k}{n}\right) \operatorname{Log}\frac{n+k}{n+k-1}$ *d)* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n} + \sqrt{n+k})}$.

---

[1] Jean Gaston *Darboux* (1842-1917), mathématicien français, auteur d'une classique *Théorie Générale des Surfaces*.

***Exercice 3 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $(a < b)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \dfrac{b-a}{n}$ et $f_{k_n} = f(a + kh_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Montrer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + f_{k_n} h_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \exp\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

***Exercice 4 :*** *a*) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Calculer *à l'aide de sommes de Riemann* l'intégrale $I_0(z) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{z - \cos x}$.

*b*) Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire par récurrence l'intégrale $I_n(z) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nx\,\mathrm{d}x}{z - \cos x}$.

***Exercice 5 :*** Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$. On donne $f$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux Riemann-intégrables. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha$ réel $> 0$ tel que, pour toute subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ de pas $\leqslant \alpha$, et pour toutes suites $(\xi_i)$ et $(\theta_i)$ subordonnées à $\sigma$, on ait :

$$\left| \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, g(\theta_i)\, (a_{i+1} - a_i) \right) - \int_a^b fg \right| \leqslant \varepsilon \,.$$

***Exercice 6 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée* ($a$ et $b$ réels, $a < b$). On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de $f$.

*a*) Si $\mathscr{D}$ est négligeable, montrer que $f$ est Riemann-intégrable.

*b*) On appelle oscillation de $f$ en $x \in [a, b]$ le nombre

$$\lim_{\substack{> \\ \alpha \to 0}} \left( \sup_{t \in [a, b] \cap [x - \alpha, x + \alpha]} f(t) \right) - \lim_{\substack{> \\ \alpha \to 0}} \left( \inf_{t \in [a, b] \cap [x - \alpha, x + \alpha]} f(t) \right)$$

qu'on note $\omega(f, x)$. Vérifier que $\mathscr{D} = \{x \mid \omega(f, x) > 0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{D}_n = \left\{ x \mid \omega(f, x) \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$. Si $f$ est Riemann-intégrable, montrer que chaque $\mathscr{D}_n$ est négligeable et en déduire que $\mathscr{D}$ est négligeable.

*Indication :* Utiliser les sommes de Darboux.

***Exercice 7*** ***(intégrale de Stieltjes)*** (¹)**:** Soit $a$, $b$ deux réels $(a < b)$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *croissante*. Donnons-nous une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue*. Pour chaque subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ formons les « sommes de Darboux-Stieltjes » de $f$ relatives à $g$, en posant $m_i = \displaystyle\inf_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x)$ et $M_i = \displaystyle\sup_{x \in [a_i, a_{i+1}]} f(x)$ :

$$ST_-(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (g(a_{i+1}) - g(a_i))\, m_i \quad \text{et} \quad ST_+(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (g(a_{i+1}) - g(a_i))\, M_i \,.$$

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

*a*) Montrer que les ensembles $\{ST_-(f, \sigma)\}_{\sigma \in \mathscr{S}}$ et $\{ST_+(f, \sigma)\}_{\sigma \in \mathscr{S}}$ sont *adjacents*. Soit $I_g(f)$ le réel qu'ils définissent.

*b*) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha$ réel $> 0$ tel que, pour toute $\sigma \in \mathscr{S}$ de pas $\leqslant \alpha$, on ait :

$$|ST_+(f, \sigma) - I_g(f)| \leqslant \varepsilon \,, \quad |ST_-(f, \sigma) - I_g(f)| \leqslant \varepsilon \,,$$

et aussi

$$\left| \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, (g(a_{i+1}) - g(a_i)) \right) - I_g(f) \right| \leqslant \varepsilon$$

pour toute suite $(\xi_i)$ subordonnée à $\sigma$. Le nombre $I_g(f)$ s'appelle *intégrale de Stieltjes* de $f$ relative à $g$, et se note $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

*c*) Montrer que l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une mesure de Daniell (cf. exercice 7 du § VII.2).

---

(¹) Thomas Stieltjes, mathématicien français d'origine hollandaise (185 enseigné à Toulouse.

*d*) Calculer $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ dans les cas suivants : 1) $g(x) = x$, 2) $g$ est en escalier, 3) $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (dans ce cas $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b fg'$).

*e*) Lorsque $f$ et $g$ sont toutes deux croissantes et continues, démontrer que

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

***Exercice 8 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On donne $\tau \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe un réel $A_1$, qu'on calculera en fonction de $f$, de $f'$ et de $\tau$, tel que

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\tau}{n}\right)\right] - \left(\int_0^1 f\right) - \frac{A_1}{n} \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

***Exercice 9 :*** On donne $a$ et $\alpha$ réels $> 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$\Phi_n : \mathbb{R}\setminus [\![0, n]\!] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{a}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n}.$$

*a*) Prouver que l'équation $\Phi_n(x) = \alpha$ possède dans $]n, +\infty[$ une racine unique, que l'on notera $x_n$.

*b*) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{n}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$ (pour $\lambda \in ]0, 1[$, on pourra chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_n\left(\dfrac{n}{\lambda}\right)$, par exemple en utilisant des sommes de Riemann convenables de la fonction $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-\lambda x}$).

*c*) Montrer que $x_n - \dfrac{n}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}$ admet une limite finie quand $n \mapsto +\infty$, et calculer cette limite.

$\left(\textit{Réponse} : \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(2a-1)\mathrm{e}^{-\alpha}+1}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}\right].\right)$

***Exercice 10 :*** Soit $f$ une fonction $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $> 0$.

*a*) Trouver $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]^{1/n}$ *b*) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\right]^n$.

***Exercice 11 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable. Pour toute subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[a, b]$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$, on pose

$$V_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Montrer que lorsque le *pas* de $\sigma$ tend vers 0, les sommes $V_\sigma(f)$ convergent vers

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

*Indication :* Commencer par le cas où $f$ est continue.

***Exercice 12 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$. Toute limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite $(f_n)$ de fonctions *Riemann-intégrables* à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'est encore.

*Application :* Toute fonction *réglée* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.

***Exercice 13*** (*intégrale de Kurzweil,* 1957) : On donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des couples $(\sigma, \xi)$, où $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est une subdivision de $[a, b]$ et où $\xi = (\xi_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ est une suite subordonnée à $\sigma$ (*i.e.* $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ pour tout $i$).

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $(\sigma, \xi) \in \mathscr{S}$ ; on dit que $(\sigma, \xi)$ est *contrôlé par* $f$ ssi

$$(\forall i) \quad [a_i, a_{i+1}] \subset [\xi_{i+1} - f(\xi_{i+1}), \xi_{i+1} + f(\xi_{i+1})].$$

*a*) Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est donnée, prouver : $\exists(\sigma, \xi) \in \mathscr{S}$ contrôlé par $f$.

*b*) Soit $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $F$ est *W-intégrable* ssi $(\exists I \in \mathbb{R})$,

$[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \mid$ pour toute $(\sigma,\xi) \in \mathscr{S}$ contrôlée par $f$, $|I - S(F,\sigma,\xi)| \leq \varepsilon$ (où $(\sigma,\xi) = ((a_0,\ldots,a_n),\ (\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}))$ et $S(F,\sigma,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i)\,F(\xi_i)$).

Montrer successivement :

- Si $F$ est $W$-intégrable, le réel $I$ vérifiant ces conditions est unique. (On dit alors que $I$ est la *W-intégrale* de $F$.)
- L'ensemble $\mathscr{W}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions $W$-intégrables : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un sous-$\mathbf{R}$-ev de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$, qui contient l'espace $\mathscr{L}_B([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions *bornées intégrables* : $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
- L'application $\mathscr{I} : \mathscr{W}([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ associant à chaque $F$ sa $W$-intégrale est $\mathbf{R}$-*linéaire,* et positive (*i.e.* $F \geq 0 \Rightarrow I \geq 0$), et elle *prolonge* l'intégrale de Lebesgue des fonctions $F \in \mathscr{L}_B([a,b],\mathbb{R})$. De plus, la *formule de Chasles* s'étend : $\left(\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c\right)$.

*Remarque :* Il existe des fonctions $F \in \mathscr{W}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $|F| \notin \mathscr{W}([a,b],\mathbf{R})$. Ainsi, avec cette extension de l'intégrale, *on perd la propriété fondamentale :* « *$F$ intégrable $\Rightarrow |F|$ intégrable et* $\left|\int F\right| \leq \int |F|$ », ce qui en limite considérablement l'intérêt. Elle a néanmoins sa place à côté des intégrales de Perron et de Denjoy.

## § VII.6 *PRIMITIVES*

$K$ désigne toujours le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### Définition VII.6.1

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K$. On appelle* ***primitive*** *de $f$ toute fonction $F : I \longrightarrow K$, qui est* ***dérivable*** *et telle que $F' = f$.*

Même des fonctions très simples peuvent ne pas avoir de primitive. Par exemple si $f$ est en escalier, non *constante,* à valeurs réelles, son image n'est pas un intervalle, ce qui lui interdit d'être une fonction dérivée (cf. exercice 12 du § V.1). Elle n'admet donc pas de primitive. En revanche, dès qu'une fonction admet une primitive, il est facile de les trouver toutes par application du corollaire 3 du théorème V.1.5 (accroissements finis) :

### Proposition VII.6.1

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K$. Si $f$ admet une primitive $F_0$, l'ensemble des primitives de $F$ est l'ensemble des fonctions $F_c : I \longrightarrow K$, $x \mapsto F_0(x) + C$, où la constante $C \in K$ est arbitraire.*

### Intégrales fonctions d'une borne d'intégration

### Définition VII.6.2

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow K$. Nous dirons que $f$ est* ***localement (bornée) intégrable*** *ssi la restriction de $f$ à* ***tout sous-intervalle compact*** *de $I$ est* ***bornée intégrable.***

Si $f : I \longrightarrow K$ est localement intégrable, pour $(a, b) \in I^2$, l'intégrale $\int_a^b f$ a un sens (rappelons que si $a > b$, on a *défini* $\int_a^b f$ comme égale à $-\int_b^a f$) et la propriété d'additivité se traduit par :

$$\text{(1)} \qquad \forall (a, b, c) \in I^3 \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f .$$

Proposons-nous alors, pour $a \in I$, d'étudier la fonction $F : I \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Proposition VII.6.2**

*Soit $f$ localement bornée intégrable sur l'intervalle non trivial $I$.*
*(I) La restriction $F|_J$ à un sous-intervalle* **compact** *$J$ de $I$ est* **lipschitzienne.** *En conséquence* **$F$ est continue** *sur $I$.*
*(II) Soit $x_0 \in I$. Si $f(x_0 + 0)$ peut être défini et existe, $F'_d(x_0)$ existe et vaut $f(x_0 + 0)$. Si $f(x_0 - 0)$ peut être défini et existe, $F'_g(x_0)$ existe et vaut $f(x_0 - 0)$.*

*Démonstration :*

(I) $f|_J$ étant bornée, posons

$$M_J = \sup_{x \in J} |f(x)| \quad (M_J \in \mathbb{R}_+) .$$

Pour $(x, y) \in J^2$, on déduit de (1) :

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t ,$$

d'où :

$$|F(y) - F(x)| \leqslant \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \left| \int_x^y M_J\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M_J |y - x| .$$

Si $x_0 \in I$, $F$ est continue en $x_0$ car on peut trouver un voisinage $V$ de $x_0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $V \cap I$ soit un sous-intervalle *compact* de $I$, auquel on peut appliquer ce qui précède.

(II) Supposons que $f(x_0 + 0)$ existe (ce qui sous-entend $I \cap \,]x_0, +\infty[\, \neq \varnothing$ ). Pour $x \in I$ et $x > x_0$, on a :

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\, f(x_0 + 0) = \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0 + 0))\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{x_0}^x (\tilde{f}(t) - f(x_0 + \cdots$$

en notant $$\tilde{f} = f + (f(x_0+0) - f(x_0))\,\chi_{\{x_0\}}\,.$$

Soit $\varepsilon$ réel $>0$ et $\alpha$ réel $>0$ tel que, pour $z \in I \cap \,]x_0, +\infty[$ et $z - x_0 \leqslant \alpha$, on ait : $\left|\tilde{f}(z) - f(x_0+0)\right| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $x \in I \cap \,]x_0, +\infty[$ et $x - x_0 \leqslant \alpha$, il vient :

$$\left|\int_{x_0}^{x} (\tilde{f}(t) - f(x_0+0))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{x_0}^{x} \left|\tilde{f}(t) - f(x_0+0)\right|\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,(x - x_0)\,.$$

On a donc prouvé :

$$F(x) - F(x_0) - (x - x_0)\,f(x_0+0) \underset{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0}{\in} o(x - x_0)\,,$$

ce qui signifie que $F'_d(x_0)$ existe et vaut $f(x_0+0)$.
Le raisonnement est le même pour $f(x_0 - 0)$. ■

Des propositions VII.6.1 et VII.6.2 résulte le « théorème fondamental du calcul intégral » :

**THÉORÈME VII.6.1** *(Leibniz)*

*Si $f : I \longrightarrow K$ est une fonction* **continue** *sur l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$, elle admet au moins une primitive.*
*Soit $a \in I$ ; la fonction $F : I \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$. Les primitives de $f$ sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où $C$ est une constante arbitraire.*
*Enfin,* ***si G est une primitive quelconque de f,*** *on a :*

(2) $$\boxed{(\forall x \in I) \qquad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)}\,.$$

Pour les fonctions continues $f$, ce théorème *ramène le calcul des intégrales à la recherche de fonctions primitives.* Or, pour les fonctions les plus couramment utilisées, il existe des techniques permettant, à partir de primitives déjà connues et de règles simples, d'obtenir leurs primitives. Cela étant, on en déduit immédiatement le nombre $G(x) - G(a)$ qui est noté en abrégé $[G(t)]_a^x$. Inversement, ce théorème prouve que *toute fonction continue admet une primitive,* résultat qu'on peut obtenir sans avoir recours à la théorie de l'intégration (cf. exemple 1, § XII.3).

***Remarque 1 :*** Les fonctions continues ne sont pas les seules qui puissent admettre des primitives. Par exemple la fonction $f : x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, $0 \mapsto 0$ n'est pas continue en 0. Cependant c'est, en tout point de $\mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ qui est donc une de ses primitives.

Mais dès qu'on déborde le cadre du théorème VII.6.1, les liens entre primitives et intégrales se compliquent très vite (l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de $f$ localement intégrable peut être dérivable sans que sa dérivée soit exactement $f$ ; une fonction peut avoir une primitive sans être localement bornée intégrable ; $f$ peut à la fois être localement bornée intégrable et avoir une primitive sans que l'intégrale et la primitive diffèrent exactement d'une constante, ...

Bien que ces questions aient à peu près toutes été résolues au début de ce siècle, *nous ne les étudierons pas ici,* en nous contentant de signaler l'éclairage qu'y apporte la théorie de l'intégrale de Lebesgue (cf. 6).

***Remarque 2 :*** Le lecteur se sera sans doute étonné qu'une fonction en escalier n'admette pas de primitive, et aura ressenti le besoin d'en modifier légèrement la définition. Considérons le cas où $f$ est *localement intégrable sur $I$ et admet partout (là où on peut la définir) une limite à droite (resp. à gauche).* Dans ce cas, appelons **primitive large** de $f$ toute fonction **continue** $F : I \longrightarrow K$ *admettant* (partout où on peut la définir) *une dérivée à droite $F'_d(x)$ égale à $f(x+0)$ (resp. une dérivée à gauche $F'_g(x)$ égale à $f(x-0)$).* Il résulte du théorème V.1.5 et de ses corollaires que si une primitive large $F_0$ existe, les autres sont les fonctions $x \mapsto F_0(x) + C$, où $C$ est une constante arbitraire ; et la proposition VII.6.2 montre qu'*alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$* (où $a \in I$) *est une primitive large de $f$,* et qu'on a encore $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$ avec toute primitive large $G$ de $f$.

Ces considérations s'appliquent en particulier au cas où $f$ est **localement continue par morceaux,** *i.e.* continue par morceaux sur les intervalles compacts de $I$. Elles s'appliquent aussi au cas où $f$ est **réglée.**

### Intégration par parties

En combinant la formule de dérivation d'un produit et le théorème VII.6.1, on obtient la « *formule d'intégration par parties* » :

**THÉORÈME VII.6.2**

> *Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$ et $u$, $v$ deux* **fonctions de classe** $\mathscr{C}^1$ *: $[a, b] \longrightarrow K$. Alors :*
>
> (3) $$\boxed{\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'\,v}\,.$$

Lorsque $u$ et $v$ sont *de classe* $\mathscr{C}^n$, cette formule peut être itérée, ce qui donne :

$$\int_a^b uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(k)} v^{(n-1-k)}\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)} v \, .$$

Ces formules restent encore vraies avec $a > b$. En voici une importante conséquence :

**THÉORÈME VII.6.3** *(Formule de Taylor avec reste intégrale)*

> *Soit deux réels* $a$, $b$ $(a < b)$ *et* $f : [a, b] \longrightarrow K$ **de classe** $\mathscr{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Alors :*
>
> $$f(b) - T_{n, f, a}(b) = \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \, ,$$
>
> *c'est-à-dire* :
>
> $$\boxed{f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t} \, .$$

*Démonstration :*

Pour $n = 0$, c'est le théorème VII.6.1 appliqué à $f'$. Supposant la propriété vraie à l'ordre $p - 1 \geqslant 0$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, en intégrant par parties $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(t) \, \mathrm{d}t$ (égale à $f(b) - T_{p-1, f, a}(b)$ par hypothèse), on obtient :

$$\left[\frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p)}(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) \, ,$$

ce qui établit la formule à l'ordre $p$ pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$. Le théorème VII.6.3 est donc prouvé par récurrence. La formule obtenue reste évidemment vraie, même si $a > b$. ■

L'avantage de cette forme du *reste à l'ordre n* des formules de Taylor est qu'elle se prête parfois parfois mieux à majoration que le reste de Lagrange.

**COROLLAIRE**

> *Soit* $f : I \longrightarrow K$ *une fonction* **continue** *sur l'intervalle non trivial* $I$ *de* $\mathbb{R}$, *soit* $a \in I$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *La fonction*
>
> $$\Phi_n : I \longrightarrow K \, , \quad x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, \mathrm{d}t$$
>
> *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *et sa dérivée n-ième est f.*

*Démonstration :*

En effet, en itérant le théorème VII.6.1, on peut construire une fonction $\Psi : I \longrightarrow K$ de classe $\mathscr{C}^n$ dont la dérivée $n$-ième soit $f$. Appliquons-lui alors la formule de Taylor à l'ordre $n - 1$ sur l'intervalle d'extrémités $a$ et $x$ $(x \in I)$ :

$$\Psi(x) - T_{n-1, \Psi, a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt .$$

Comme $x \mapsto T_{n-1, \Psi, a}(x)$ est polynomiale de degré $\leqslant n - 1$, on voit bien que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt$ est une fonction $n$ fois dérivable et que sa dérivée $n$-ième est $f$. ■

En d'autres termes, la transformation $f \mapsto \Phi_n$ est, pour $n \geqslant 1$, un *opérateur de primitive n-ième* sur les fonctions continues.

***Remarque 3 :*** La formule d'intégration par parties s'étend aux cas où $u$ et $v$ sont des primitives larges (au sens donné dans la remarque 2) de fonctions $u_1$, $v_1$ **réglées** sur $[a, b]$ :

$$\int_a^b u v_1 = [uv]_a^b - \int_a^b u_1 v .$$

Cela peut rendre service en particulier si $u_1$ et $v_1$ sont *localement continues par morceaux,* en évitant de pénibles découpages de l'intervalle d'intégration.

### Changement de variable

**Théorème VII.6.4**

*Soit deux réels $\alpha$, $\beta$ $(\alpha < \beta)$, un intervalle $I$ non trivial de $\mathbb{R}$, une fonction $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow I$ et une fonction $f : I \longrightarrow K$. On suppose* ***f continue*** *et* ***$\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$*** *(ce qui rend continue la fonction $t \mapsto (f \circ \varphi(t))\, \varphi'(t)$). Alors, on a :*

$$\boxed{\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx} . \tag{4}$$

*Démonstration :*

Soit $\quad G : [\alpha, \beta] \longrightarrow K , \quad t \mapsto \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\, dx$

et $\quad F : u \longrightarrow \displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{u} f(x)\, dx \quad$ pour $u \in I$ .

On voit que $G = F \circ \varphi$. Les hypothèses entraînent que $F$ a pour dérivée $f$, et donc, par composition de fonctions dérivables, que $G$ est dérivable, de dérivée

$$t \mapsto (F' \circ \varphi(t))\, \varphi'(t) = (f \circ \varphi(t))\, \varphi'(t)\,.$$

Cette dernière fonction étant continue, on peut lui appliquer le théorème de Leibniz sur $[\alpha, \beta]$, ce qui établit (4). ■

Par exemple, pour calculer $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, ayant constaté que la fonction $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ prend ses valeurs dans $I = [0, 1]$, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut écrire :

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} |\cos t|\, \cos t\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t\,,$$

d'où par linéarisation

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qui ramène le calcul à celui de primitives connues :

$$J = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\,,$$

alors qu'une primitive de $\sqrt{1-x^2}$ est moins évidente.

On aurait pu également intégrer par parties :

$$J = [x\sqrt{1-x^2}]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$$

mais ici on est arrêté (provisoirement) par le fait que la fonction à intégrer n'est pas bornée sur le segment $[0, 1]$.

Nous ne saurions achever ce § concernant la notion de primitive sans rappeler que nous connaissons déjà un certain nombre de résultats donnant immédiatement les primitives des principales fonctions usuelles (lire à l'envers un tableau de dérivées, ou vérifier directement). Les voici, regroupés sous forme de *tableau,* page 361. Le lecteur n'oubliera pas, en utilisant ce tableau, de préciser lui-même sur quel intervalle il a besoin d'une primitive de $f$ ($f$ y étant *continue*), et d'ajouter la constante arbitraire s'il veut d'autres primitives.

Il est à noter que, si $u$ est une fonction dérivable à valeurs *réelles* et si on se place dans un intervalle où $u$ garde un signe constant *strict, une* primitive de $\frac{u'}{u}$ est Log $|u|$.

| Fonction $f$ | Intervalle | Primitive $F$ | Fonction $f$ | Intervalle | Primitive $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{\alpha x} (\alpha \in \mathbb{C}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{th} x$ |
| $\operatorname{ch} \alpha x$ — | — | $\frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha x$ | $\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\operatorname{coth} x$ |
| $\operatorname{sh} \alpha x$ — | — | $\frac{1}{\alpha} \operatorname{ch} \alpha x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ | $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ | $\operatorname{tg} x$ |
| $\cos \alpha x$ — | — | $\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x$ | $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $-\operatorname{cotg} x$ |
| $\sin \alpha x$ — | — | $-\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x$ | | | |
| $x^\alpha \left( \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{C} \\ \alpha \neq -1 \end{matrix} \right)$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $\frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\operatorname{Log} \lvert x \rvert$ |
| $\frac{1}{\sin x}$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $\operatorname{Log} \left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert$ | $\operatorname{tg} x$ | $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ | $-\operatorname{Log} \lvert \cos x \rvert$ |
| $\frac{1}{\cos x}$ | $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ | $\operatorname{Log} \left\lvert \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rvert$ | $\operatorname{cotg} x$ | $]k\pi, (k+1)\pi[$ | $\operatorname{Log} \lvert \sin x \rvert$ |
| $\frac{1}{\operatorname{sh} x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\operatorname{Log} \left\lvert \operatorname{th} \frac{x}{2} \right\rvert$ | $\operatorname{th} x$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{Log} \operatorname{ch} x$ |
| $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ | $\mathbb{R}$ | $2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (e^x)$ | $\operatorname{coth} x$ | $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ | $\operatorname{Log} \lvert \operatorname{sh} x \rvert$ |
| $\frac{1}{x^2 + a^2} (a \in \mathbb{R}^*)$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{a} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$ | $\frac{1}{a^2 - x^2} (a \in \mathbb{R}^*)$ | $]-\infty, -\lvert a \rvert[$<br>ou $]-\lvert a \rvert, +\lvert a \rvert[$<br>ou $]\lvert a \rvert, +\infty[$ | $\frac{1}{2a} \operatorname{Log} \left\lvert \frac{x+a}{x-a} \right\rvert$<br>$\left( = \frac{1}{a} \operatorname{Arg} \operatorname{th} \frac{x}{a} \right.$<br>sur $\left. ]-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert[ \right)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a \in \mathbb{R}^*)$ | $]-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert[$ | $\operatorname{Arc} \sin \frac{x}{\lvert a \rvert}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + h}} (h \in \mathbb{R}^*)$ | | $\operatorname{Log} \lvert x + \sqrt{x^2 + h} \rvert$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{Arg} \operatorname{sh} \frac{x}{\lvert a \rvert}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a \in \mathbb{R}^*)$ | $]-\infty, -\lvert a \rvert[$<br>ou $]\lvert a \rvert, +\infty[$ | $\operatorname{Log} \lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \rvert$<br>$\left( = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{x}{\lvert a \rvert} \right.$<br>sur $\left. ]\lvert a \rvert, +\infty[ \right)$ |

Quelques fonctions très simples n'ont pas trouvé place dans ce tableau, mais une intégration par parties ou un changement de variable peut permettre de calculer leurs primitives. Par exemple la fonction $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Log} x$ admet pour primitive $x \mapsto x \operatorname{Log} x - x$ ; $[-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arc}\sin x$ admet pour primitive

$$x \mapsto x \operatorname{Arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}\,;$$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{Arg}\operatorname{tg} x$ admet pour primitive

$$x \mapsto x \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\,(1+x^2)\,.$$

Enfin, on accordera une attention particulière à la primitive

$$\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right| =$$
$$= \operatorname{Arg}\operatorname{sh}\,(\operatorname{tg} x) = \operatorname{Arg}\operatorname{th}\,(\sin x) = 2\operatorname{Arg}\operatorname{th}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right);$$

la valeur commune $y$ de ces fonctions en $x$ était appelée *Gudermannien* de $x$ par Cayley, et $x$ est donné en fonction de $y$ par :

$$x = \operatorname{Arc}\sin\,(\operatorname{th} y) = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\,(\operatorname{sh} y) =$$
$$= 2\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\,(\operatorname{th} y/2) \quad (\text{pour } x \in\, ]-\pi/2, \pi/2[)\,.$$

Mais ce qui est très remarquable, c'est que précisément :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \operatorname{Arc}\sin \operatorname{th} x = \operatorname{Arc}\operatorname{tg}\operatorname{sh} x = 2\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\operatorname{th}\frac{x}{2} = 2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} \mathrm{e}^x - \frac{\pi}{2}\,,$$

cette fonction de $x$ étant une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, les relations

$$\left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ et } \quad y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\right) \quad \text{et} \quad \left(y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}\right)$$

sont *équivalentes*.

***Exercice 1 :*** Soit $a \in\, ]-1,+1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \pi - \sqrt{1-a^2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+a\cos t}\,.$$

Montrer que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

***Exercice 2 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a<b)$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Montrer que la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

***Exercice 3 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ bijective et continue. Montrer :

$$(\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+) \quad ab \leqslant \int_0^a f + \int_0^b f^{<-1>}\,.$$

***Exercice 4 :*** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée intégrable vérifiant de plus : $\forall x \in [a, b]$, $f(a+b-x) = f(x)$. Prouver que

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

*Application :* Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x\,\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$ ; $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $T$-périodique intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de $a$ ($a$ réel arbitraire).

***Exercice 6 :*** Soit $a$, $b$ réels ($a < b$) et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}'$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|f'(\xi)| \geqslant \dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f$.

***Exercice 7 :*** Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *continues* telles que :

*a*) pour un réel $C > 1$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{Cx} f$ est constante ; ou

*b*) pour deux réels $\alpha$, $\beta$ ($0 < \alpha < \beta$), la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x^\alpha}^{x^\beta} f$ est constante.

***Exercice 8 :*** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{Log}\,(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,\mathrm{d}\theta$. Calculer $I(x^2)$, $I(-x)$ et $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $I(x)$. En déduire $I(x)$.

***Exercice 9 :*** Soit $\varphi : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On pose

$$f(x) = (\varphi^2 \operatorname{cotg} x)' + (\varphi' - \varphi \operatorname{cotg} x)^2\,.$$

*a*) Prouver que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f \geqslant 0$ en calculant $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\varphi^2 \operatorname{cotg} x)'$.

*b*) Prouver que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f = \int_0^{\pi/2} \varphi'^2 - \int_0^{\pi/2} \varphi^2$. En déduire : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi'^2 \geqslant \int_0^{\pi/2} \varphi^2$, l'égalité ayant lieu ssi $\varphi$ est proportionnelle à $x \mapsto \sin x$. On vérifiera soigneusement à chaque étape que les fonctions utilisées sont prolongeables par continuité en 0.

***Exercice 10 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante, et soit $g$ *la plus grande* fonction convexe $\varphi$ telle que $\varphi \leqslant f$ (vérifier que cette définition de $g$ a un sens). Montrer que $\displaystyle\int_0^1 g \geqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f$.

***Exercice 11 :*** Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}\,.$$

***Exercice 12 :*** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \mathrm{Ent}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x = 1 - \gamma$, où $\gamma$ est la constante d'Euler.

***Exercice 13 :*** Pour tous réels $\lambda > 0$, $\mu > 0$, on pose $I(\lambda, \mu) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\lambda^2\cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t}}$.

*a*) On donne $a_0 = a > 0$, $b_0 = b > 0$ avec $a > b$. On pose : $a_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$. Démontrer que $I(a, b) = I(a_1, b_1)$ (Gauss).

*Indication :* Vérifier que $t = \mathrm{Arc\,sin}\,\dfrac{2a\sin u}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$ définit un changement de variable admissible dans $I(a, b)$, pour $u \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Vérifier que $\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t} = a\dfrac{a+b-(a-b)\sin^2 u}{a+b+(a-b)\sin^2 u} (= E)$, puis, que :

$\cos t\,dt = \dfrac{2\,E\cos u\,du}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$, et enfin, que : $\cos t = \dfrac{2\cos u\sqrt{a_1^2\cos^2 u + b_1^2\sin^2 u}}{a+b+(a-b)\sin^2 u}$,

d'où le résultat.

*b*) Soit $M(a,b)$ la *moyenne arithmético-géométrique* de $a$ et $b$ (voir § II.1, exemple 2). Déduire du *a*) que $M(a,b) = \dfrac{\pi}{2\,I(a,b)}$, ce qui donne un procédé de calcul rapide de l'intégrale elliptique $I(a,b)$ pour laquelle on ne dispose pas de primitive sous forme élémentaire.

***Exercice 14 :*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8}\operatorname{Log} 2.$

***Exercice 15 :*** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\sin\lambda x|}{x}\,dx \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\operatorname{Log}\lambda.$

***Exercice 16 :*** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose $I = \displaystyle\int_a^b f.$

*a*) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier qu'il existe une unique suite $(x_{n,i})_{0\leq i\leq n}$ telle que

$$a = x_{n,0} < x_{n,1} < \cdots < x_{n,n} = b \quad \text{et} \quad (\forall i \in [\![0, n-1]\!]) \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{I}{n}.$$

*b*) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f(x_{n,1}) + f(x_{n,2}) + \cdots + f(x_{n,n})).$ ***Réponse :*** $\displaystyle\frac{1}{I}\int_a^b f^2.$

***Exercice 17 :*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$ et $f_n(x) = \dfrac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n\,dt}{I_n}$, avec $x \in [-1,+1]$.

*a*) Prouver, *sans calculer* $I_n$, que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $[-1,+1]$ vers $\varphi : 0 \mapsto 0$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$ si $x \neq 0$, et qu'il y a convergence uniforme sur les ensembles $[-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$ pour $\alpha \in ]0,1[$.

*b*) Soit $g_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$. Montrer que la suite $(g_n)$ converge uniformément sur $[-1,+1]$ vers la fonction $[-1,+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

***Exercice 18 :*** *a*) En intégrant sur $[0,1]$ les égalités

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + \cdots + (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

et

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \cdots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

trouver la somme des séries de termes généraux $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(*Réponse :* Log 2 et $\pi/4$.)

*b*) Prouver de même : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^t}{t+x^2}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1+t}.$

*c*) Calculer $\displaystyle\lim_{t \underset{>}{\to} 0} \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2}\,dx$ et en déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\lambda x^{\lambda}}{1+x^{2\lambda}}\,dx \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$. De même calculer $\displaystyle\lim_{t \underset{>}{\to} 0} \int_0^1 \frac{x^t}{1+x}\,dx$ et en déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\lambda x^{\lambda}}{1+x^{\lambda}}\,dx \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Log} 2.$

***Exercice 19 :*** *a*) En partant de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ supposé connu, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(\ldots}$

*b*) Montrer comme dans l'exercice 18 que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+1+t)} \underset{t \to 0}{\overset{>}{\longrightarrow}} \frac{\pi^2}{12}$. En déduire :

$$\int_0^1 \left( \frac{x^t}{1+x} - \operatorname{Log} 2 \right) dx \underset{t \overset{>}{\to} 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{12} t \,, \quad \text{et} \quad \int_0^1 \operatorname{Log}(1+x^\lambda)\, dx \underset{\lambda \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12\lambda} .$$

*c*) Montrer : $\int_0^1 [(1+x^t)^{1/t} - 1]\, dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12 t^2}$.

***Exercice 20 :*** Pour $x$ réel $> 0$, on pose $f(x) = e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t}\, dt$.

*a*) Vérifier que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle satisfait à l'équation différentielle (E) : $x^2 y' + y = x^2$.

*b*) Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$, et que sa série de Taylor $T_{f,0}(X) = S(X)$ est la seule série $S \in \mathbb{C}[[X]]$ qui satisfasse formellement l'équation (E).

***Exercice 21 :*** Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arc\,cos} \sqrt{t}\, dt$.

***Exercice 22 :*** Soit $A$ un réel $> 0$ et $f$, $g$ deux fonctions : $[-A, A] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ et $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$. En déduire que $f = g = 0$.

## § VII.7 *THÉORÈMES DE LA MOYENNE*

Soit à nouveau deux réels $a$, $b$ $(a < b)$.

Donnons-nous d'abord deux fonctions $f$, $g$ : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables, avec $g \geqslant 0$ et telle que $\int_a^b g > 0$ (c'est-à-dire d'après le § VII.4, $g$ positive et non presque partout nulle). Posons

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) .$$

De $mg \leqslant fg \leqslant Mg$ on déduit, en intégrant sur $[a, b]$

$$\text{(1)} \qquad m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g \,,$$

soit encore

$$\text{(2)} \qquad \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \in [m, M] .$$

Supposons de plus $f$ *continue*. Dans ce cas le *théorème des valeurs intermédiaires* entraîne l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} = f(c)$. On a donc démontré :

**Théorème VII.7.1** (Premier théorème de la moyenne)

*Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***continue*** *et si* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est* ***bornée intégrable*** *avec* $\int_a^b g > 0$, *il existe* $c \in [a, b]$ *tel que*

(3) $$\boxed{\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g}\,.$$

Dans le cas particulier où $g$ est la fonction constante égale à 1, on obtient, pour $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue :*

(4) $$\exists c \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b f = (b-a)\, f(c)\,.$$

On reconnaît dans (4) un cas particulier du *théorème des accroissements finis avec valeur moyenne* (cf. § V.1). C'est (4) qui justifie l'appellation « théorème de la moyenne » car, $f$ étant continue, le théorème VII.5.1 montre que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right),$$

ce qui fait apparaître le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ comme limite des *moyennes arithmétiques* des valeurs prises par $f$ en des points de subdivision consécutifs équidistants. Ce nombre est appelé *valeur moyenne* de $f$ sur $[a, b]$. Les physiciens utilisent aussi la *valeur efficace* de $f$, qui est la racine carrée positive de la valeur moyenne de $f^2$.

La relation (3) s'utilise parfois pour obtenir des approximations d'intégrales, mais il est préférable en général d'utiliser directement la relation (1).

***Exemple 1 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la fonction $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \frac{\operatorname{Log} x}{1-x^2}$ pour $x \in\, ]0, 1[$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto \frac{-1}{2}$ qui est bien continue. On veut prouver que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 f_n$ a pour limite 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. Ecrions $I_n$ sous la forme $\int_0^1 x^{n-1} \frac{x \operatorname{Log} x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ : c'est $x \mapsto \frac{x \operatorname{Log} x}{1-x^2}$ qui joue le rôle de la fonction continue $f$, avec $m \leqslant f(x) \leqslant 0$ si $x \in [0, 1]$, et $x \mapsto x^{n-1}$ le rôle de la fonction bornée $g$, d'où :

$$m \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant 0\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{m}{n} \leqslant I_n \leqslant 0\,,$$

qui prouve bien que $I_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, sans avoir eu besoin de calculer le minimum $m$ de $f$.

Beaucoup plus subtil et performant est le théorème suivant :

**THÉORÈME VII.7.2** (Second théorème de la moyenne)

*Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction* ***décroissante,*** *et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$* ***bornée intégrable.*** *Alors il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :*

$$\boxed{\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g} \,. \tag{5}$$

*Démonstration :*

Soit $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Nous savons que $G$ est *continue* sur $[a, b]$. On peut supposer $f(a) > f(b)$, le cas où $f$ est constante étant immédiat. Notons $m = \operatorname*{Min}_{x \in [a,b]} G(x)$, $M = \operatorname*{Max}_{x \in [a,b]} G(x)$. Tout revient à démontrer que $mf(a) \leqslant \displaystyle\int_a^b fg \leqslant Mf(a)$. Il suffit même de prouver :

$$\int_a^b fg \leqslant Mf(a)\,, \tag{6}$$

car l'autre inégalité se déduira de (6) en remplaçant $g$ par $-g$ dont le maximum est $-m$. On a $M \geqslant 0$ car $G(a) = 0$.

Commençons par examiner le cas où $f$ est en escalier :

$$f = \delta + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, \chi_{]a_i, a_{i+1}[} \quad \text{avec} \quad a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$$

$$\text{et} \quad \delta = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)\, \chi_{\{a_i\}}\,.$$

Alors :
$$\begin{aligned}
\int_a^b fg &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (G(a_{i+1}) - G(a_i)) \\
&= \lambda_{n-1}\, G(a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} G(a_i)\,(\lambda_{i-1} - \lambda_i) \\
&\leqslant M\left(\lambda_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)\right) = M\lambda_0 \leqslant Mf(a),
\end{aligned}$$

en se servant du fait que les $(\lambda_{i-1} - \lambda_i)$ et $\lambda_{n-1}$ sont $\geqslant 0$.

On peut alors examiner le cas général. Montrons d'abord que, pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $u \in \mathrm{Esc}\,([a, b], \mathbb{R})$, $u \leqslant f$, avec $u$ *décroissante* telle que $u(a) = f(a)$, $u(b) = f(b)$ et $\displaystyle\int_a^b (f - u) \leqslant \varepsilon$. Pour répondre à ces conditions, il suffit, pour $\varepsilon > 0$ donné, de choisir une subdivision $\sigma = \{a_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de pas $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. En effet, en posant

$$u = f(a)\, \chi_{\{a\}} + \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})\, \chi_{]a_i, a_{i+1}]},$$

on a bien

$$u \leqslant f \quad \text{et} \quad \int_a^b (f - u) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\,(f(a_i) - f(a_{i+1})) \leqslant \varepsilon .$$

Soit donc $(u_k)$ une suite de fonctions en escalier décroissantes, majorées par $f$, telles que

$$u_k(a) = f(a), \quad u_k(b) = f(b) \quad \text{et} \quad \int_a^b (f - u_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Pour tout $k$, on a, d'après l'étude préliminaire $\displaystyle\int_a^b u_k\, g \leqslant M u_k(a) = M f(a)$.

Mais

$$\int_a^b u_k\, g \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b fg$$

$$\left(\text{car} \left| \int_a^b (f - u_k)\, g \right| \leqslant \int_a^b (f - u_k)\, |g| \leqslant \mathcal{N}_\infty(g) \int_a^b (f - u_k)\right),$$

d'où par passage à la limite : $\displaystyle\int_a^b fg \leqslant M f(a)$. ∎

Si $f$ est décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut appliquer (5) en remplaçant $f$ par $f - f(b)$, ce qui donne :

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b (f - f(b))\, g = (f(a) - f(b)) \int_a^\xi g ,$$

c'est-à-dire $$\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \left( \int_a^b g - \int_a^\xi g \right),$$

ou sous une forme plus symétrique :

(7) $$\boxed{\int_a^b fg = f(a) \int_a^\xi g + f(b) \int_\xi^b g}$$

sous cette forme (7), le théorème reste exact avec $f$ **croissante** (il suffit d'utiliser $f_1 : x \mapsto f(-x)$ et $g_1 : x \mapsto g(-x)$ définies sur $[-b, -a]$). Ainsi la formule (7) s'applique sans restriction avec $f$ **monotone.**

***Remarque 1 :*** La formule (7) peut même se généraliser au cas où $f$ est la différence de deux fonctions monotones, c'est-à-dire pour $f$ à *variation bornée* (cf. Tome 3). Sa véritable signification n'apparaît que dans la théorie de l'intégrale de Stieltjes (cf. 15). Cela ne nous empêchera pas de l'utiliser, ainsi que (6), dans l'étude des intégrales généralisées (cf. Chap. VIII).

***Exercice 1 :*** Montrer que, sous les hypothèses du théorème VII.7.1, on peut toujours choisir $c$ dans l'intervalle *ouvert* $]a, b[$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

***Exercice 2 :*** Soit $f$ continue sur $[a, b]$ ($a$ et $b$ réels, $a < b$, $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$).

*a*) Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx$ converge et a pour limite $L = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx$.

*b*) Montrer que la fonction $\lambda \mapsto \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx$ a pour limite 0 quand $\lambda \longrightarrow +\infty$.

***Exercice 3 :*** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables telles que la valeur moyenne de $f$ sur tout segment $[a, b]$ soit $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

***Exercice 4 :*** On donne $a$ réel $> 0$ et $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrer qu'il existe $\xi \in [-a, a]$ tel que $f''(\xi) = \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}(f(x) - f(0))\,dx$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et à valeurs $> 0$.

*a*) On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Montrer que $I_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*b*) Etablir que $\lim_{n \to \infty} nI_n = f(1)$. Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^3$ donner un $DL_3(0)$ de $I_n$ (en prenant $\frac{1}{n}$ comme infiniment petit principal).

*Application :* $DL_3$ de $\operatorname{Log} 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ; de $\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

## § VII.8 *INÉGALITÉS DE SCHWARZ, MINKOWSKI ET HÖLDER*

Dans ce qui suit, les réels $a$ et $b$ sont fixés ($a < b$).

**THÉORÈME VII.8.1**

*Soit $f$ et $g$ : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$* ***bornées intégrables.*** *On a :*

(1) $$\left|\int_a^b \bar{f}g\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}.$$

*Lorsque $f$ et $g$ sont* continues, *pour que* (1) *soit une égalité, il faut et il suffit que $f$ et $g$ soient $\mathbb{C}$-proportionnelles.*

*Démonstration :*

Soit

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ , \quad \lambda \mapsto \int_a^b (\bar{f} + \bar{\lambda}\bar{g})(f + \lambda g) =$$

$$= |\lambda|^2 \int_a^b |g|^2 + \bar{\lambda} \int_a^b f\bar{g} + \lambda \int_a^b \bar{f}g + \int_a^b |f|^2 .$$

Si $\int_a^b \bar{f}g = 0$, (1) est évidemment vérifiée.

Sinon, posons $\lambda = \rho \dfrac{\int_a^b f\bar{g}}{\left|\int_a^b \bar{f}g\right|}$, avec $\rho \in \mathbb{R}$.

$F(\lambda)$ devient : $G(\rho) = \rho^2 \int_a^b |g|^2 + 2\rho \left|\int_a^b \bar{f}g\right| + \int_a^b |f|^2$

car deux complexes conjugués ont même module. Mais $F(\lambda) = G(\rho)$ reste toujours $\geqslant 0$ par sa définition. Le coefficient de $\rho^2$ ne peut être nul, sinon $G$ serait une fonction affine et $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, donc constante, ce qui entraînerait $\int_a^b \bar{f}g = 0$, cas déjà examiné. Donc $G$ est un trinôme en $\rho$ qui reste $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et son discriminant doit être $\leqslant 0$, ce qui donne l'inégalité (1), appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Si $f$ et $g$ sont continues et si (1) est une égalité, ou bien $g = 0$, ou sinon $\int_a^b |g|^2 > 0$. Dans ce dernier cas on trouve un unique $\rho_0 \in \mathbb{R}$ tel que $G(\rho_0) = 0$, d'où

$$F(\lambda_0) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_0 = \rho_0 \frac{\int_a^b f\bar{g}}{\left(\int_a^b \bar{f}g\right)} .$$

Comme $F(\lambda_0) = \int_a^b |f + \lambda_0 g|^2$, sa nullité, compte tenu de la continuité de $|f + \lambda_0 g|^2$, entraîne $f = -\lambda_0 g$ (on peut aussi utiliser le corollaire de la proposition VII.3.5). ■

**COROLLAIRE**

*Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème* VII.8.1, *on a :*

(2) $$\left(\int_a^b |f + g|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2} .$$

*Si f et g sont continues, l'égalité a lieu ssi f et g sont* $\mathbb{R}_+$*-proportionnelles.*

*Démonstration :*

Par élévation au carré, et simplification, (2) équivaut à :

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b \bar{f}g\right) \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g|^2\right)^{1/2}$$

qui est une conséquence évidente de (1). Pour $f$ et $g$ continues, si (2) est une égalité, *a fortiori* (1) en est une. Ecartant le cas trivial où $f = 0$ ou $g = 0$, on a donc $f = \lambda g$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Mais $\operatorname{Re}\left(\int_a^b \bar{f}g\right)$ vaut alors

$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b \bar{\lambda}\bar{g}g\right) = \operatorname{Re}\left(\bar{\lambda}\int_a^b |g|^2\right)$$

et doit être égal au module de $\left(\bar{\lambda}\int_a^b |g|^2\right)$. C'est donc que $\bar{\lambda}$ doit être un réel positif. ■

**Inégalités de Hölder**

**Lemme 1**

*Soit $p$ et $q$ des réels $> 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$\forall \alpha \geq 0, \quad \forall \beta \geq 0 \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},$$

*l'égalité n'ayant lieu que si $\alpha^p = \beta^q$.*

*Démonstration :*

Soit $\varphi$ la fonction : $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$. L'étude de ses variations montre qu'elle passe par un minimum égal à 1 pour $t = 1$. L'inégalité demandée étant évidente pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, on peut supposer $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En écrivant $\varphi\left(\frac{\alpha^{1/q}}{\beta^{1/p}}\right) \geq 1$ on a immédiatement l'inégalité cherchée, qui est stricte sauf pour $\alpha^{1/q} = \beta^{1/p}$. ■

Rappelons que si $f \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{C})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $|f|^\alpha \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$.

**Théorème VII.8.2**

*Soit $p$, $q$ réels $> 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soit $f$* et *$g$ : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$* bornées intégrables. *Alors :*

$$(3) \qquad \int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q} \quad (\textit{Hölder}).$$

*Si $f$ et $g$ sont continues, l'égalité a lieu ssi $|f|^p$ et $|g|^q$ sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles.*

*Démonstration :*

Si $\int_a^b |f|^p = 0$ ou $\int_a^b |g|^q = 0$, alors $f$ ou $g$ est nulle presque partout, donc aussi $fg$, d'où $\int_a^b |fg| = 0$. Sinon, posons

$$\nu_p(f) = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \nu_q(g) = \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

Appliquons, pour chaque $x \in [a, b]$ le lemme 1, avec $\alpha = \dfrac{|f(x)|}{\nu_p(f)}$ et $\beta = \dfrac{|g(x)|}{\nu_q(g)}$.

On obtient : $\quad \dfrac{|fg|\,(x)}{\nu_p(f)\,\nu_q(g)} \leq \dfrac{1}{p(\nu_p(f))^p}\,|f(x)|^p + \dfrac{1}{q(\nu_q(g))^q}\,|g(x)|^q,$

d'où en intégrant : $\quad \displaystyle\int_a^b \frac{|fg|}{\nu_p(f)\,\nu_q(g)} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, c'est-à-dire (3).

Si $f$ et $g$ sont continues, d'après le lemme 1 et le corollaire de la proposition VII.3.5, on voit qu'il ne peut y avoir égalité dans (3) que si et seulement si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles. ∎

**COROLLAIRE**

*Avec les notations et hypothèses du théorème* VII.8.2, *on a pour* $p > 1$ :

$$(4) \quad \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p} \quad (\textit{Minkowski}).$$

*Si $f$ et $g$ sont* continues, *l'égalité a lieu ssi $f$ et $g$ sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles.*

*Démonstration :*

L'inégalité (4) est évidente si $\int_a^b |f+g|^p = 0$. Sinon on écrit :

$$(5) \quad \int_a^b |f+g|^p = \int_a^b |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leq \int_a^b |f+g|^{p-1}\,|f| + \int_a^b |f+g|^{p-1}\,|g|.$$

Avec la notation $\nu_\lambda(\varphi) = \left(\int_a^b |\varphi|^\lambda\right)^{1/\lambda}$ pour $\varphi \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda$ réel $\geq 1$, il vient, en appliquant (3) à chaque intégrale figurant au dernier membre de (5) :

$$(6) \quad \int_a^b |f+g|^{p-1}\,|f| \leq \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \nu_p(f)$$

$$(6') \quad \int_a^b |f+g|^{p-1}\,|g| \leq \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \nu_p(g).$$

Mais $(p-1)q = p$, d'où :

$$\int_a^b |f+g|^p = (\nu_p(f+g))^p \leqslant (\nu_p(f+g))^{p/q}\,(\nu_p(f)+\nu_p(g)),$$

soit $\quad (\nu_p(f+g))^{p-\frac{p}{q}} = \nu_p(f+g) \leqslant \nu_p(f)+\nu_p(g)$, c'est-à-dire (4).

Il reste à examiner le cas où (4) est une égalité, avec $f$ et $g$ continues. Le cas où $\int_a^b |f+g|^p = 0$ étant évident $(f = g = 0)$, on peut supposer $\int_a^b |f+g|^p > 0$. Utilisant le théorème VII.8.2, on voit que les inégalités (6) et (6′) devenues égalités entraînent que $|f|^p$ et $|g|^p$ sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles à $|f+g|^p$, d'où $|f| = \alpha\,|f+g|$ et $|g| = \beta\,|f+g|$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in \mathbb{R}_+)$. Reportant dans (4), on voit que $\alpha + \beta = 1$, d'où par addition $|f+g| = |f| + |g|$. Supposons $f \neq 0$ (le raisonnement serait le même pour $g \neq 0$). Pour chaque $x \in [a,b]$ tel que $f(x) \neq 0$, il existe

$\lambda(x) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(x) = \lambda(x)\,f(x)$, d'où $|f(x)| = \alpha\,(1+\lambda(x))\,|f(x)|$,

d'où $\alpha > 0$ et $\lambda(x) = \dfrac{1}{\alpha} - 1 = \text{Cte}$. Mais pour les $x \in [a,b]$ tels que $f(x) = 0$, on a $|f(x)| = 0 = \alpha\,|g(x)|$, donc $|g(x)| = 0$ puisque $\alpha \neq 0$. Finalement on a bien $g = \left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right) f$, avec $\dfrac{1}{\alpha} - 1 \geqslant 0$. ∎

Le lecteur aura sûrement reconnu que, dans le cas particulier $p = 2$, la formule (4) redonne la formule (2).

**Approximations en moyenne**

Reprenons la notation

$$\nu_\lambda(\varphi) = \left(\int_a^b |\varphi|^\lambda\right)^{1/\lambda},$$

pour $\varphi \in \mathscr{L}_B([a,b],K)$ et $\lambda \in [1,+\infty[$. Soit $p$ un réel $\geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}_B([a,b],K)$. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$.

Nous dirons que $g$ **approche $f$ à $\varepsilon$ près en moyenne d'ordre $p$** ssi $\nu_p(f-g) \leqslant \varepsilon$. On dit aussi que $g$ est *une approximation de $f$ à $\varepsilon$ près en moyenne d'ordre $p$.*

Si maintenant $\mathscr{D}$ est un ensemble de fonctions bornées intégrables sur $[a,b]$, nous dirons que $f$ est **approchable d'aussi près qu'on le veut par des fonctions de $\mathscr{D}$ en moyenne d'ordre $p$** ssi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{D}$ tel que $\nu_p(f-g) \leqslant \varepsilon$. Il revient au même de dire qu'il existe une suite $(g_k)$ de fonctions *éléments de $\mathscr{D}$* telle que $\nu_p(f-g_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On dit alors d'une telle suite $(g_k)$ qu'elle **converge vers $f$ en moyenne d'ordre $p$.** Les moyennes d'ordre $p = 1$ sont dites *simples,* celles d'ordre $p = 2$ sont dites *quadratiques.*

Pour $p$ fixé, la fonction $\nu_p : \mathscr{L}_B([a,b],K) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie :

- $(\forall f \in \mathscr{L}_B([a,b],K))$, $(\forall \lambda \in K)$ $\nu_p(\lambda f) = |\lambda|\,\nu_p(f)$ (on dit que $\nu_p$ est *positivement homogène*).

• $(\forall (f, g) \in (\mathscr{L}_B([a, b], K))^2) \quad \nu_p(f + g) \leqslant \nu_p(f) + \nu_p(g)$ (on dit que $\nu_p$ vérifie *l'inégalité du triangle*) : c'est évident si $p = 1$, et c'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski pour $p > 1$.

On traduit ces deux propriétés en disant que $\nu_p$ est une *semi-norme* sur le $K$-ev $\mathscr{L}_B([a, b], K)$. On en déduit immédiatement que, *si les suites* $(g_k)$ et $(h_k)$ de $\mathscr{L}_B([a, b], K)$ *convergent, en moyenne d'ordre p, respectivement vers* $g \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$ et $h \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$, *alors pour tous* $(\lambda, \mu) \in K^2$, $(\lambda g_k + \mu h_k)$ *converge en moyenne d'ordre p vers* $\lambda g + \mu h$, et que :

Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux parties de $\mathscr{L}_B([a, b], K)$ telles que toute $\varphi \in \mathscr{D}_1$ soit approchable, aussi près qu'on veut, par des fonctions de $\mathscr{D}_2$ en moyenne d'ordre $p$, alors *toute* $f \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$ *approchable aussi près qu'on veut par des fonctions de* $\mathscr{D}_1$ *en moyenne d'ordre p, l'est aussi par des fonctions de* $\mathscr{D}_2$.

Nous dirons d'une partie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{L}_B([a, b], K)$ qu'elle est **dense en moyenne d'ordre $p$ dans $\mathscr{L}_B([a, b], K)$** ssi toute $f \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$ est **approchable, aussi près qu'on le veut, par des fonctions de $\mathscr{D}$ en moyenne d'ordre $p$.**

Théorème VII.8.3

*Pour $p$ réel $\geqslant 1$, chacun des espaces* Esc $([a, b], K)$ *et* $\mathscr{C}^0([a, b], K)$ *est* **dense en moyenne d'ordre p** *dans* $\mathscr{L}_B([a, b], K)$.

*Démonstration :*

Il suffit de prouver le théorème avec $K = \mathbb{R}$ puisque si $\varphi = u + \mathrm{i}v$ ($u$ et $v$ réelles), l'inégalité de Minkowski donne

$$\nu_p(\varphi) = \nu_p(u + \mathrm{i}v) \leqslant \nu_p(u) + \nu_p(v) .$$

Montrons d'abord que Esc $([a, b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$. La construction même de $\mathscr{L}_B$ (cf. les notations du § VII.3) montre que $\mathscr{U}_B$ est dense en moyenne simple dans $\mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$, et que toute $f \in \mathscr{U}_B$ est approchable aussi près qu'on le veut par des $g \in$ Esc $([a, b], \mathbb{R})$ en moyenne simple. Donc Esc $([a, b], \mathbb{R})$ est dense en *moyenne simple* dans $\mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$. Il reste à traiter le cas où $p > 1$.

Soit $f \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$. Posons $M = 1 + \sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$ et soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Prenons $g_1 \in$ Esc $([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b |g_1 - f| \leqslant \frac{\varepsilon^p}{(2M)^{p-1}}$.

Alors $$g = \sup(-M, \inf(M, g_1)) \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$$

et $g$ vérifie :

$$\int_a^b |g - f|^p = \int_a^b |g - f|^{p-1} |g - f| \leqslant (2M)^{p-1} \int_a^b |g - f| \leqslant \varepsilon^p ,$$

d'où $\nu_p(g - f) \leqslant \varepsilon$. Donc Esc $([a, b], \mathbb{R})$ est dense en moyen

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que toute fonction en escalier $f$ est approchable, aussi près qu'on veut, en moyenne d'ordre $p$, par des fonctions continues. Il suffit même, par linéarité, de le prouver avec $f = \chi_J$, où $J$ est un intervalle d'extrémité $b$ dans $[a, b]$. Soit donc $J$ un tel intervalle d'extrémité gauche $c$. Seul le cas où $a < c < b$ est non évident ; plaçons-nous dans cette hypothèse, et soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour $\alpha$ réel $> 0$ tel que $a < c - \alpha$ et $c + \alpha < b$, soit $g_\alpha$ la fonction affine par morceaux et continue (cf. fig. 1) égale à 0 sur $[a, c - \alpha]$, à 1 sur $[c + \alpha, b]$, affine sur $[c - \alpha, c + \alpha]$.

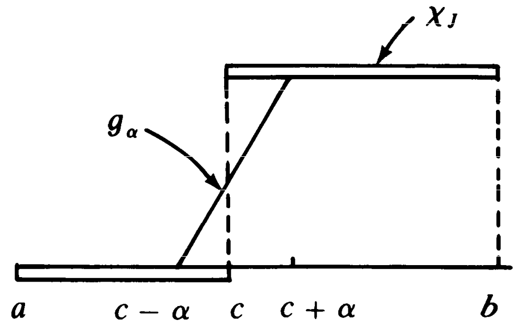



**Fig. 1.**

On a :
$$\int_a^b |\chi_J - g_\alpha|^p = \frac{\alpha}{2^{p-1}(p+1)}.$$

Il suffit donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, de choisir $\alpha > 0$ tel que $\alpha \leqslant \varepsilon^p \times 2^{p-1}(p+1)$ pour que soit réalisé $\nu_p(\chi_J - g_\alpha) \leqslant \varepsilon$. ■

***Exercice 1 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$. On donne $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable, et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $\varphi$ est $T$-périodique $(T > 0)$ et que $\varphi|_{[0, T]}$ est bornée intégrable. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,\varphi(\lambda x)\,\mathrm{d}x \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{T}\left(\int_0^T \varphi\right)\left(\int_a^b f\right).$$

*Indication :* Commencer par le cas où $f$ est en escalier, et utiliser le théorème VII.8.3.

***Exercice 2 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On suppose trouvé $M > 0$ tel que $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ \int_x^{x+1} f''^2 \leqslant M$. Montrer que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 3 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, avec $f(a) = 0$. Montrer que $\int_a^b |ff'| \leqslant \frac{1}{2}(b - a)\int_a^b f'^2$.

***Exercice 4 :*** Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions continues $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$. Trouver $\underset{f \in \mathscr{E}}{\text{Min}}\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)$ et $\underset{f \in \mathscr{E}}{\sup}\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right)$.

***Exercice 5 :*** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $[0, 1]$. Pour $\alpha$, $\beta$ tels que $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, on pose
$$\rho(N, \alpha, \beta) = \text{card}\ \{i \in [\![1, N]\!] \mid \alpha \leqslant x_i \leqslant \beta\} \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

On dit que $(x_n)$ est *équirépartie* ssi ($\forall(\alpha,\beta)$ avec $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1$) on a : $\frac{1}{N}\rho(N,\alpha,\beta)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\beta-\alpha$.

*a*) On suppose $(x_n)$ équirépartie. Montrer que pour toute $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ *continue*, on a : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f$.

*Indication :* Utiliser la proposition VII.1.3 et étudier la même question avec $f$ en escalier.

*b*) On suppose que $\forall f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f$. Montrer que $(x_n)$ est équirépartie.

*Indication :* Si $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1$, approcher $f=\chi_{[\alpha,\beta]}$ en moyenne simple par des fonctions continues judicieuses.

***Exercice 6 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels positifs de somme 1.

*a*) Montrer que ($\forall x>0$, $\forall y>0$) on a : $x^\alpha y^\beta\leqslant\alpha x+\beta y$.

*b*) Soit $f$ et $g\in\mathscr{L}_B([a,b],\mathbb{R})$ à valeurs $>0$ ($a$, $b$ réels, $a<b$). On pose $I=\int_a^b f$, $J=\int_a^b g$ et $K=\int_a^b f^\alpha g^\beta$. Montrer que $K\leqslant I^\alpha J^\beta$.

***Exercice 7 :*** Soit $a$, $b$ réels ($a<b$) et deux fonctions bornées intégrables $f$, $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}_+^*$. On appelle $m$ et $M$ les bornes de $f$, $m'$ et $M'$ les bornes de $g$, et on suppose $m>0$, $m'>0$. Montrer que la fonction $\left(f-\frac{M}{m'}g\right)\left(f-\frac{m}{M'}g\right)$ est $\leqslant0$. Soit

$$G_\lambda=f^2+\lambda fg\left(\sqrt{\frac{MM'}{mm'}}+\sqrt{\frac{mm'}{MM'}}\right)+\lambda^2g^2.$$

Montrer que ce trinôme en $\lambda$ est positif pour certaines valeurs de $\lambda$ et négatif pour d'autres. En déduire :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\left(\sqrt{\frac{MM'}{mm'}}+\sqrt{\frac{mm'}{MM'}}\right)\geqslant4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

Dans le cas où $f$ et $g$ sont continues, que déduit-on si l'inégalité précédente devient une égalité ?

***Exercice 8 :*** Soit $a$, $b$ réels $(a,b)$, $n\in\mathbb{N}$ ($n\geqslant3$) et des réels $p_i>1$ ($i\in[\![1,n]\!]$) tels que $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$ ; on donne $f_1,\ldots,f_n:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ bornées intégrables.

*a*) Démontrer que : $\left(\int_a^b f_1f_2\ldots f_n|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b|f_k|^{p_k}\right)^{1/p_k}\right)$, et discuter le cas de l'égalité.

*b*) Soit $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha\beta<1$. Déduire de *a*) :

$$\left|\int_a^b f_1f_2\right|^{(1+\alpha)(1+\beta)/(1-\alpha\beta)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b|f_1|^{1+\alpha}|f_2|^{1+\beta}\right)\left(\int_a^b|f_1|^{1+\alpha}\right)^{\frac{\beta(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}}\left(\int_a^b|f_2|^{1+\beta}\right)^{\frac{\alpha(1+\beta)}{1-\alpha\beta}}$$

(référence : Titchmarsch, [18]).

***Exercice 9 :*** Soit $a$, $b$ réels ($a<b$) et $f:[a-1,b+1]\longrightarrow\mathbb{C}$ bornée intégrable. Pour tout réel $p\geqslant1$. Montrer que :

$$\int_a^b|f(x+t)-f(x)|^p\,dx\underset{t\to0,\ |t|\leqslant1}{\longrightarrow}0.$$

# Chapitre VIII

# PRIMITIVES, INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES ET INTÉGRALES A PARAMÈTRES

**Convention**

Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow K$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction **continue.** Nous avons vu dans le chapitre précédent que $f$ admet au moins une primitive sur $I$, et que si $F$ est l'une d'elles, l'ensemble de ces primitives est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + C$ où $C$ est une constante arbitraire ($C \in K$).

Nous conviendrons alors, selon un usage universel, de noter l'une quelconque, non précisée, des primitives de $f$, sous la forme :

(1) $$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(« intégrale indéfinie » de } f\text{)} .$$

Dans l'écriture (1), la lettre $x$ est muette, et peut s'interpréter comme le nom choisi pour la *variable* dans la représentation de cette primitive. Ainsi, (1) représente la fonction $x \mapsto \int f(x)\,\mathrm{d}x$, primitive *non précisée* de $f$. Cela peut sembler peu satisfaisant sur le plan strictement logique, mais cette notation (1) est trop habituelle et a suffisamment fait la preuve de son efficacité pour qu'il soit question de s'en écarter. Le théorème fondamental du calcul intégral suffirait à la justifier car, dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$, peu importe la primitive choisie $F$ de $f$.

Avec la notation (1), si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, la formule d'intégration par parties $\int fg'\,\mathrm{d}x = fg - \int f'g\,\mathrm{d}x$ garde tout son sens, de même que la formule de changement de variables

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ « = » } \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t ,$$

où $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$ prend ses valeurs dans $I$.

## § VIII.1 *PRIMITIVES DE FONCTIONS RATIONNELLES*

Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction *rationnelle* sur l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$ ; alors $f$ est continue, et c'est la fonction définie par une fraction rationnelle $\Phi \in \mathbb{C}(X)$ définie de manière unique (cf. Tome 1, § VIII.3). Proposons-nous d'expliciter une primitive de $f$.

### Méthode de la décomposition sur $\mathbb{C}$

Décomposons $\Phi$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$. On a donc, en notant $\mathscr{P}$ *l'ensemble des pôles de* $\Phi$ *:*

$$\Phi(X) = E(X) + \sum_{a \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_a(X), \quad \text{avec} \quad E(X) \in \mathbb{C}[X] \tag{2}$$

et

$$\mathscr{F}_a(X) = \sum_{k=1}^{\nu_a} \frac{A_{k,a}}{(X-a)^k} \quad \text{pour tout } a \in \mathscr{P},$$

écriture dans laquelle $\nu_a$ est la multiplicité du pôle $a$ et $A_{k,a} \in \mathbb{C}$ avec $A_{\nu_a, a} \neq 0$.

Puisque $f$ est bien définie sur $I$, on a : $\mathscr{P} \cap I = \varnothing$ (nous conviendrons que $\sum_{a \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_a(X) = 0$ si $\mathscr{P} = \varnothing$ , c'est-à-dire si $\Phi$ se réduit à un polynôme).

Cela dit, posons $E(X) = \sum_{p \in \mathbb{N}} c_p X^p$ ; une primitive de la fonction polynomiale $x \mapsto E(x)$ est la fonction polynomiale

$$x \mapsto \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{c_p}{p+1} x^{p+1}. \tag{3}$$

Ensuite, pour $a \in \mathscr{P}$, et $k \in [\![2, \nu_a]\!]$, une primitive de la fonction $I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^k}$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-k} \dfrac{1}{(x-a)^{k-1}}$, soit

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2. \tag{4}$$

Il ne reste plus, pour expliciter une primitive de $f$, qu'à trouver une primitive de $g_a : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$, où $a \in \mathbb{C} \setminus I$. Ici deux cas se présentent, selon que le pôle $a$ est réel ou non :

1^er^ *cas :* $a \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto \operatorname{Log}|x-a|$ est primitive de $g_a$ sur $I$.

2^e^ *cas :* $a \notin \mathbb{R}$. Posons alors $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*$). On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= \frac{x-\alpha+\mathrm{i}\beta}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2} + \mathrm{i}\beta \frac{1}{(x-\alpha)^2 +}\end{aligned}$$

ce qui donne, en s'aidant du tableau des primitives usuelles (cf. § VII.6) :

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\,(x^2 - 2\,\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) + i \operatorname{Arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta}\,.$$

Par addition, les relations (3), (4) et (5) fournissent donc une primitive de (2).

**Méthode de la décomposition sur $\mathbb{R}$**

Supposons $f$ à valeurs réelles, c'est-à-dire $\Phi \in \mathbb{R}(X)$. Alors $f$ admet des primitives *à valeurs réelles*. Pour obtenir ces primitives sous forme purement réelle, une première méthode souvent efficace consiste à décomposer $f$ sur $\mathbb{C}$, à reprendre les calculs précédents et à *regrouper les termes deux à deux conjugués,* ce qui conduit au résultat.

Si l'on préfère que tous les calculs se fassent dans $\mathbb{R}(X)$, on peut procéder de la manière suivante : d'abord décomposer $\Phi$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, ce qui donne :

$$(6) \quad \Phi(X) = E(X) + \sum_{(a,k)\in\mathscr{E}} \frac{A_{k,a}}{(X-a)^k} + \sum_{(k,\alpha,\beta)\in\mathscr{F}} \frac{B_{k,\alpha,\beta}\,X + C_{k,\alpha,\beta}}{(X^2 - 2\,\alpha X + \beta)^k}\,,$$

écriture dans laquelle $E(X) \in \mathbb{R}[X]$ ; $\mathscr{E}$ désigne une partie finie de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$, $a \notin I$ et $A_{k,a} \in \mathbb{R}$ pour $(a,k) \in \mathscr{E}$ ; $\mathscr{F}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$ et, pour tout $(k,\alpha,\beta) \in \mathscr{F}$, on a : $B_{k,\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, $C_{k,\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 - \beta < 0$ (en convenant que si $\mathscr{E} = \varnothing$ (resp. $\mathscr{F} = \varnothing$), la somme correspondante $\sum\limits_{(a,k)\in\mathscr{E}}$ (resp. $\sum\limits_{(k,\alpha,\beta)}$) est à remplacer par 0).

Il reste à déterminer les primitives des éléments simples de seconde espèce, c'est-à-dire, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha^2 - \beta < 0$, les intégrales indéfinies

$$(7) \qquad I_k = \int \frac{x\,dx}{(x^2 - 2\,\alpha x + \beta)^k} \qquad \text{et}$$

$$(8) \qquad J_k = \int \frac{dx}{(x^2 - 2\,\alpha x + \beta)^k}\,.$$

*Calcul de $J_k$.* En écrivant le trinôme $x^2 - 2\,\alpha x + \beta$ sous la forme $(\beta - \alpha^2)\left[\left(\dfrac{x-\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}}\right)^2 + 1\right]$, on voit que le *changement de variable* $t = \dfrac{x-\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}$ ramène le calcul de $J_k$ à celui de la primitive :

$$(9) \qquad L_k = \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}\,.$$

On a d'abord $L_1 = \operatorname{Arc\,tg} t$ et une relation de récu

$L_k$ et $L_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ est facile à obtenir en écrivant

$$L_k = \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2+1)^k}\,\mathrm{d}t = L_{k-1} - U_k\,, \qquad \text{avec}$$

$$U_k = \int t \times \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^k} = \frac{t}{2(1-k)(t^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(1-k)}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{k-1}}\,,$$

d'où

(10) $$L_k = \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}L_{k-1}\,,$$

relation qui permet le calcul de $L_k$ pour tout $k$, à partir de $L_1$.

*Calcul de* $I_k$. On a :

$$I_k = \alpha J_k + V_k\,, \quad \text{avec} \quad V_k = \int \frac{(x-\alpha)\,\mathrm{d}x}{(x^2 - 2\alpha x + \beta)^k}\,,$$

dont le calcul est immédiat. En effet,

$$\text{si} \quad k = 1\,, \quad V_k = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 - 2\alpha x + \beta)\,;$$

et $$\text{si} \quad k \geqslant 2\,, \quad V_k = \frac{1}{2(1-k)}\,\frac{1}{(x^2 - 2\alpha x + \beta)^{k-1}}\,.$$

Par addition on obtient finalement une primitive de $f$ sur $I$.

En conclusion, **on sait expliciter les primitives d'une fonction rationnelle $f$, définie par $\Phi \in \mathbb{C}(X)$, pourvu qu'on connaisse les pôles de $\Phi$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que leurs ordres de multiplicité.**

***Remarque 1 :*** Le procédé utilisé pour le calcul de $L_k$ se généralise facilement à $M_k = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^q+1)^k}$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ $(q \geqslant 2)$, $q$ donné. En effet :

$$M_k = \int \frac{t^q + 1 - t^q}{(t^q+1)^k} = M_{k-1} - \int t\,\frac{t^{q-1}\,\mathrm{d}t}{(t^q+1)^k}\,,$$

d'où *en intégrant par parties* une relation de récurrence entre $M_k$ et $M_{k-1}$.

Plus généralement, soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ *sans racine multiple* dans $\mathbb{C}$, non constant, et soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour calculer $I_n = \displaystyle\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{Q^n(x)}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, on peut se ramener au calcul d'une primitive de même type, mais avec $n = 1$. En effet, l'hypothèse pgcd $(Q, Q') = 1$ permet par application du théorème de Bezout, de trouver $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[$

$UQ + VQ' = 1$, et d'écrire :

$$I_n = \int \frac{PUQ + PVQ'}{Q^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{PU}{Q^{n-1}}\,\mathrm{d}x + \int PV \frac{Q'}{Q^n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{PU}{Q^{n-1}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{(1-n)\,Q^{n-1}}\,PV - \int \frac{(PV)'\,\mathrm{d}x}{(1-n)\,Q^{n-1}},$$

ce qui ramène le calcul de $I_n$ à celui d'une intégrale de même type avec $n-1$ au lieu de $n$.

### Fonctions rationnelles dont les primitives sont rationnelles

Reprenons la fonction rationnelle $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ($I$ intervalle non trivial de $\mathbb{R}$), définie par $\Phi \in \mathbb{C}(X)$. Nous avons vu au Tome 1, § VIII.3, que pour qu'il existe $\Psi \in \mathbb{C}(X)$ telle que $\Psi' = \Phi$, il faut et il suffit que tous les résidus de $\Phi$ soient nuls, et que si c'est le cas, $\Psi$ est définie de manière unique (à l'addition près d'une constante), et que $\Psi$ et $\Phi$ ont le même ensemble de pôles. On sait aussi (cf. *ibidem*) que si $G \in \mathbb{C}(X)$, toute fonction rationnelle $g$ définie par $G$ sur un intervalle $J$ de $\mathbb{R}$ est dérivable, sa dérivée $g'$ étant définie par $G'$.

Cela montre déjà que si tous les résidus de $\Phi$ sont nuls, $f$ admet au moins une primitive rationnelle. Réciproquement, supposons que $f$ admette une primitive rationnelle $g$, associée à $G \in \mathbb{C}(X)$. Alors $f$ est définie par $G'$, d'où $\Phi = G'$, et par suite tous les résidus de $\Phi$ sont nuls. On a donc prouvé :

**THÉORÈME VIII.1.1**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction rationnelle, définie par $\Phi \in \mathbb{C}(X)$. Pour que les primitives de $f$ soient* ***rationnelles,*** *il faut et il suffit que* ***tous les résidus de $\Phi$ soient nuls.***

Montrons enfin sur quelques exemples comment on peut mettre en œuvre les méthodes précédentes, voire parfois les améliorer :

***Exemple 1 :*** Soit à chercher la primitive $F = \displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x$, sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 1.

Ici, ce qui frappe, c'est que $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3-1)^2}\,\mathrm{d}x$ est très facile à calculer $\left(= \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-x^3}\right)$, et que $x^2 + x + 1$ est un diviseur de $x^3 - 1$, ce qui conduit à écrire

$$F = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}.$$

Il reste maintenant à décomposer $\dfrac{X}{(X-1)^2\,(X^2+X+1)}$ en éléments simples, de préférence dans $\mathbb{R}(X)$, sous la forme $\dfrac{A}{(X-1)^2}+\dfrac{B}{X-1}+\dfrac{CX+D}{X^2+X+1}$ (on détermine $A=\dfrac{1}{3}$, puis $Cj+D=\dfrac{-1}{3}$, d'où $C=0$ et $D=\dfrac{-1}{3}$, et enfin $B=0$ en faisant $X \rightsquigarrow \infty$), d'où

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{-1/3}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{-1/3}{x-1}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Finalement : $\quad F=\dfrac{-1/3}{x^3-1}-\dfrac{1/3}{x-1}-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

***Exemple 2 :*** Soit à calculer la primitive $F=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^n}$ ($n\in\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), l'intervalle $I$ ne contenant ni 1 ni $-1$.

On pourrait penser à imiter ce qui a été esquissé pour le calcul de $L_k=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^k}$, ou encore à effectuer la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ de $\Phi=\dfrac{1}{(X^2-1)^n}$ qui est relativement facile. On peut aussi effectuer le changement de variable $z=\dfrac{x+1}{x-1}$ qui ramène l'intégrale à la forme

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n-1}\int \frac{(z-1)^{2n-2}}{z^n}\,\mathrm{d}z=\frac{-1}{2^{2n-1}}\int \sum_{k=0}^{2n-2}(-1)^k\binom{2n-2}{k}z^{k-n}\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{(-1)^n\dbinom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}\operatorname{Log}|z|+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n-2\\ k\neq n-1}}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2n-1}}\,\frac{\dbinom{2n-2}{k}}{k-n+1}\,z^{k-n+1}$$

d'où

$$F=\frac{(-1)^n\dbinom{2n-2}{n-1}}{2^{2n-1}}\operatorname{Log}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+$$
$$+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n-2\\ k\neq n-1}}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2n-1}}\,\frac{\dbinom{2n-2}{k}}{k-n+1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{k-n+1}.$$

***Exemple 3 :*** Soit à calculer l'intégrale indéfinie $F=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(x^5-1)}$ sur un intervalle $I$ ne contenant pas 1.

Ici le plus simple semble être de décomposer $\Phi = \dfrac{1}{(X^2+1)(X^5-1)}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et de regrouper tout de suite les termes conjugués pour obtenir sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$. On obtient ainsi :

$$\Phi = \frac{AX+B}{X^2+1} + \frac{C}{X-1} + \sum_{\zeta \in \mu_5 \setminus \{1\}} \frac{D_\zeta}{X-\zeta}.$$

La multiplication par $X^2+1$ suivie de la spécialisation $X \rightsquigarrow i$ donne immédiatement $A = B = \dfrac{-1}{2}$. On obtient ensuite $C = \dfrac{1}{10}$. La formule du résidu donne ensuite $D_\zeta = \dfrac{\zeta}{5(1+\zeta^2)}$ pour $\zeta \in \mu_5 \setminus \{1\}$. En posant $\omega = e^{2i\pi/5}$, il vient

$$\frac{D_\omega}{X-\omega} + \frac{D_{\bar\omega}}{X-\bar\omega} = \frac{1}{5} \frac{2(\omega+\bar\omega)X - (\omega^2+\bar\omega^2+2)}{(1+\omega^2)(1+\bar\omega^2)(X^2-(\omega+\bar\omega)X+1)}.$$

Mais $\omega + \bar\omega = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\omega^2+\bar\omega^2 = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$ sont les racines de l'équation $T^2+T-1=0$ (cf. Tome 1, § X.6, exemple 1), et donc :

$$\frac{D_\omega}{X-\omega} + \frac{D_{\bar\omega}}{X-\bar\omega} = \frac{1}{5} \frac{(\sqrt5-1)X + \frac12(\sqrt5-3)}{\dfrac{3-\sqrt5}{2}\left(X^2 - \dfrac{\sqrt5-1}{2}X+1\right)} = \frac15 \frac{(\sqrt5+1)X-1}{X^2-\dfrac{\sqrt5-1}{2}X+1}.$$

On obtient ensuite (en remplaçant $\sqrt5$ par $-\sqrt5$) :

$$\frac{D_{\omega^2}}{X-\omega^2} + \frac{D_{\bar\omega^2}}{X-\bar\omega^2} = -\frac15 \frac{(\sqrt5-1)X+1}{X^2+\dfrac{\sqrt5+1}{2}X+1},$$

d'où la primitive cherchée :

$$F = -\frac14 \operatorname{Log}(x^2+1) - \frac12 \operatorname{Arc\,tg} x + \frac{1}{10}\operatorname{Log}|x-1| + \frac{\sqrt5+1}{10}\operatorname{Log}\left(x^2 - \frac{\sqrt5-1}{2}x+1\right) - \frac{\sqrt5-1}{10}\operatorname{Log}\left(x^2+\frac{\sqrt5+1}{2}x+1\right).$$

On notera que $D_\zeta = \dfrac{\zeta}{5(1+\zeta^2)} = \dfrac{\zeta(1+\bar\zeta^2)}{5(1+\zeta^2)(1+\bar\zeta^2)}$ étant *réel*, il n'est pas étonnant que le terme en $iD_\omega \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{x-\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}$ qui figure dans $\displaystyle\int \frac{D_\omega\,dx}{X-\omega}$

se réduise avec celui qui figure dans $\displaystyle\int \frac{\bar{D}_\omega \, dx}{X - \bar{\omega}}$ et qu'il ne reste donc à la fin que des termes logarithmiques.

***Exercice 1 :*** Calculer les primitives suivantes :

*a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^3)(1+x^5)}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

*c)* $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{(x-\lambda)(x^2+1)^3} dx$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ *d)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a_1^2)\dots(x^2+a_n^2)}$ (les $a_i > 0$)

*e)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a_1)^2\dots(x-a_n)^2}$ (les $a_i$ réels distincts) *f)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}$.

***Exercice 2 :*** Calculer, pour $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, la primitive $\displaystyle\int \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}} dx$.

***Exercice 3 :*** Calculer les primitives suivantes :

*a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4+1)^n}$, $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^4+1)}$, $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^4+1)^n}$ et $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

*b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 2x\cos\varphi + 1)(x^2 - 2x\cos\psi + 1)}$ pour $\varphi$ et $\psi$ donnés dans $[0, 2\pi[$.

*c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^3+1)^3}$ *d)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^4 - 2x^2\cos\alpha + 1)^2}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

***Exercice 4 :*** Etudier la suite de terme général $u_n = \operatorname{Log} n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{k}$ en écrivant $u_n$ sous forme d'intégrale définie ($n$ entier $\geqslant 2$).

*Indication :* $u_n = \displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n\,dx}{1-x} = \int_{1/n}^{1} \frac{(1-t)^n}{t} dt = A_n + B_n$, avec

$$A_n = \operatorname{Log} n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k} = \operatorname{Log} n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\gamma$$

($\gamma$ constante d'Euler) et

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{kn^k}\binom{n}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{kk!} = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx\,.$$

***Exercice 5 :*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $k \geqslant 2$.

*a)* Démontrer :

$$\int_0^1 \frac{1 + x + \dots + x^{k-2}}{1+x^k} dx = \frac{\pi}{2k} \sum_{m=0}^{k-2} \frac{1}{\sin\left((m+1)\frac{\pi}{k}\right)}$$, nombre que l'on notera $S_k$.

*b)* Soit $r \in [\![1, k]\!]$. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{km+r}$ converge, et que sa somme $\sigma_r$ est donnée par $\sigma_r = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{r-1}\,dx}{1+x^k}$. En déduire une autre expression de $S_k$ sous forme de somme d'une série.

***Exercice 6 :*** Pour quelles valeurs des paramètres les primitives suivantes sont-elles rationnelles ?

*a)* $\displaystyle\int \frac{\alpha x + 5}{(x-2)^2(x-3)^2} dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\alpha x + \beta}{x^3(x-1)^2} dx$.

*c)* $\displaystyle\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-p)^2(x-q)^2} dx$ (on pourra poser $t = \dfrac{x-p}{x-q}$).

## § VIII.2 *FONCTIONS RATIONNELLES EN CERTAINES FONCTIONS USUELLES*

### Fonctions rationnelles en $\exp(x)$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. La primitive $I = \int F(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$ se ramène à celle d'une *fonction rationnelle* par le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$. En effet, ce changement donne :

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad \text{d'où} \quad \int F(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{F(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Si $G$ est une primitive de la fraction rationnelle $\dfrac{F(t)}{t}$, on aura donc : $I = G(\mathrm{e}^x)$.

Si $\Phi$ est une fraction rationnelle (à coefficients dans $\mathbb{C}$) à *deux* variables, la primitive $J = \int \Phi(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)\,\mathrm{d}x$ est du type ci-dessus, puisque $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$ ; la réciproque est vraie, puisque $\mathrm{e}^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.

En pratique, pour calculer une primitive du type $I$ ou $J$, il peut s'avérer parfois avantageux d'utiliser les formules de la *trigonométrie hyperbolique* ainsi que la technique d'intégration par parties.

***Exemple 1 :*** Soit à calculer $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1}$. Ici, le changement $t = \mathrm{e}^x$ ramène $I$ à

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+t+1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Log}|t| - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

d'où : $$I = x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2\,\mathrm{e}^x + 1}{\sqrt{3}}\,.$$

***Exemple 2 :*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^n x}$. On a $I_0 = x$ et $I_1 = 2\operatorname{Arc\,tg}\mathrm{e}^x$ (ou si l'on préfère $\operatorname{Arc\,tg}\operatorname{sh} x$). On reconnaît que $I_2 = \operatorname{th} x$, ce qui donne l'idée, pour $n \geqslant 2$, d'intégrer par parties en écrivant :

$$I_n = \int \frac{1}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{n-1} x} + \int \frac{(n-2)\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^n x}\,\mathrm{d}x$$

En remplaçant $\operatorname{sh}^2 x$ par $\operatorname{ch}^2 x - 1$, on obtient la formule de récurrence :

$$I_n = (n-2)\, I_{n-2} - (n-2)\, I_n + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{n-1} x},$$

c'est-à-dire : $$(n-1)\, I_n = (n-2)\, I_{n-2} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{n-1} x},$$

qui permet de calculer $I_n$ à partir de $I_0$ et de $I_1$.

**Polynômes en cos $x$ et sin $x$**

Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ et la primitive $I = \displaystyle\int P(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}x$. En décomposant $P$ en monômes, le calcul de $I$ se ramène à celui des $I_{m,n} = \displaystyle\int \cos^m x \sin^n x\, \mathrm{d}x$.

• *Si $m$ est impair,* le changement $u = \sin x$ ramène le calcul de $I_{m,n}$ à la primitive d'un polynôme en $u$. En effet, pour $m = 2p+1$, $I_{m,n} = \displaystyle\int (1-u^2)^p u^n\, \mathrm{d}u$.

On a une méthode analogue *si $n$ est impair* en posant $v = \cos x$.

• *Si $m$ et $n$ sont tous les deux pairs,* on peut penser à *linéariser* $\cos^{2p} x \sin^{2q} x$ en utilisant les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

ce qui conduit à une somme de termes du type $a_k \cos 2kx$ $(k \in \mathbb{N})$.

On peut aussi, et c'est souvent avantageux, obtenir des relations de récurrence entre les $I_{2p,2q}$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{2p,2q} &= \int \cos^{2p-1} x \sin^{2q} x \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2q+1} \sin^{2q+1} x \cos^{2p-1} x - \frac{2p-1}{2q+1} I_{2p-2,2q+2}, \end{aligned}$$

ce qui ramène le calcul à celui de $I_{0,2n} = J_{2n} = \displaystyle\int \sin^{2n} x\, \mathrm{d}x$ qui s'effectue lui aussi par récurrence.

***Exemple 3 :*** Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $n$-ième *intégrale de Wallis* l'intégrale définie $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, \mathrm{d}x$. Par le changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, on voit que $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, \mathrm{d}x$. En particulier $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. Pour $n \geqslant 2$, écrivons :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \cos x \,dx$$
$$= [\sin x \cos^{n-1} x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^2 x \cos^{n-2} x \,dx$$

et en remplaçant $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ :

$$W_n = (n-1)(W_{n-2} - W_n)\,, \quad \text{soit finalement} \quad \boxed{nW_n = (n-1)\,W_{n-2}}\,.$$

On en déduit immédiatement, à partir de $W_0$ et $W_1$, la valeur de $W_n$, en distinguant les cas $n$ pair et $n$ impair :

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2p-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\dots\,.\,2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,,$$
$$W_{2p+1} = \frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\,\dots\,.\,2p}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,\dots\,.\,2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{\pi/2}{(2p+1)\,W_{2p}}\,.$$

De la formule encadrée apparaissait d'ailleurs clairement le fait que

$$(2p+1)\,W_{2p+1}\,W_{2p} = 2pW_{2p}\,W_{2p-1} = \cdots = 1\,W_1\,W_0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Quant à la valeur de $W_{2p}$ on vérifie que c'est bien celle qu'on obtient par linéarisation à partir de $W_{2p} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^{2p} x \,dx$ (relation obtenue par le changement $x = \pi - t$ dans $W_{2p}$) ; en effet seul donne une contribution non nulle le terme du milieu $\dfrac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}$.

**Formule de Wallis**

Si nous reprenons les notations de l'exemple 9 du § II.4, nous voyons que : $W_{2p} = \frac{\pi}{2} u_p$ tandis que $W_{2p+1} = v_p$. Or nous avons prouvé dans cet exemple que $u_p \underset{p\to\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{W}}{\sqrt{2p}}$ et $v_p \underset{p\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{W}\sqrt{2p}}$, où $W$ désigne le nombre réel $>0$ : $\lim\limits_{p\to\infty} (2p+1)\dfrac{[1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2p-1)]^2}{[2\,.\,4\,.\,\dots\,.\,2p]^2}$ dont on a démontré l'existence mais dont il reste à déterminer la valeur.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x$, d'où $W_{n+1} \leqslant W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \geqslant 0$ : $0 < W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, et comme $\dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \dfrac{n+1}{n+}$

$0 < \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ on déduit : $\frac{W_{n+1}}{W_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$. En substituant dans cette relation les valeurs trouvées ci-dessus pour $W_{2p}$ et $W_{2p+1}$, il vient

$$\frac{[2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \ldots \,.\, 2\,p\,]^2}{[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (2\,p-1\,)]^2}\,\frac{1}{2\,p+1} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\,,$$

autrement dit $W = \frac{2}{\pi}$. C'est l'une des formes de la *formule de Wallis*. Une autre façon de l'écrire s'obtient en observant que

$$(2\,p+1\,)[1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2\,p-1\,)]^2 = \prod_{k=1}^{p} (2\,k-1)(2\,k+1\,)\,.$$

Le premier membre de la formule précédente est donc $\prod_{k=1}^{p} \frac{4\,k^2}{4\,k^2-1}$. En prenant l'inverse, on a donc $\prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{4\,k^2}\right) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}$, ce qui s'écrit, comme nous le verrons au chapitre IX : $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4\,k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

C'est à proprement parler cette expression de $\frac{2}{\pi}$ sous forme de *produit infini* qui constitue la formule de Wallis.

**Produit d'exponentielles et de polynômes**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Une intégration par parties immédiate permet de traiter la primitive $I = \int P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$. En effet :

$$I = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}\,P(x) - \int \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha}\,P'(x)\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{\alpha^k}\,P^{(k)}(x)\,,$$

où $N$ désigne le degré du polynôme $P$.

Notons pour mémoire qu'à ce type de primitives se ramènent les suivantes :

$$I = \int P(\operatorname{Log} t)\,t^{\alpha}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{C}\,, \quad P \in \mathbb{C}\,[X] \quad \text{et} \quad t > 0$$

(poser $x = \operatorname{Log} t$) ,

et $$J = \int P(x)\,Q(\cos x, \sin x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{où} \quad \alpha \in C\,, \quad P \in \mathbb{C}\,[X]$$

et $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$.

**Fonctions rationnelles en cos *x* et sin *x***

Soit $F$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ en deux variables et la primitive $I = \int F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$.

Il est toujours possible de ramener $I$ à une primitive de fraction rationnelle par le changement de variable $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ qui donne

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad \text{d'où} \quad \int F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

qui est bien une primitive de fraction rationnelle en $t$.

***Exemple 4 :*** Soit $a$ et $b$ réels $\neq 0$, avec $|a| \neq |b|$. Proposons-nous de calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x}$. La méthode indiquée ci-dessus la transforme immédiatement en $\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{a+b+(a-b)\,t^2}$, et cette dernière primitive figure pratiquement dans le tableau général des primitives à retenir par cœur (on notera que pour $|a| = |b|$ la primitive proposée figure déjà telle quelle dans le tableau car $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$).

Tant que l'intervalle sur lequel on demande de trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a + b\cos x}$ est inclus dans l'un des $J_k = ](2\,k-1)\,\pi, (2\,k+1)\,\pi[$ le changement de variable $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ peut être mis en œuvre sans difficulté, mais poussons plus loin cet exemple dans le cas où $|a| > |b|$. Il est clair que dans ce cas, la fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x}$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puisqu'il en est ainsi de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a + b\cos x}$. Dès lors, plutôt que d'intégrer séparément dans chaque intervalle $J_k$ pour faire les raccordements nécessaires à assurer la continuité de $\Phi$, on peut se demander s'il ne serait pas possible de trouver une expression de $\Phi$ à l'aide de fonctions usuelles valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, commençons par nous ramener au cas $a = 1$, avec $|b| < 1$. Sur l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ la primitive $\Phi(X) = \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1 + b\cos x}$ se calcule par la méthode indiquée plus haut, ce qui donne, en posant $\lambda = \sqrt{\frac{1-b}{1+b}}$ :

$$(\forall X \in\, ]-\pi, +\pi[) \quad \Phi(X) = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}}\operatorname{Arc\,tg}\left(\lambda\ \operatorname{tg}\frac{X}{2}\right).$$

L'examen de $\Phi$ sur $\mathbb{R}$ met en évidence la $2\,\pi$-périodicité de $\Psi$ : $X \mapsto \Phi(X) - \frac{X}{\sqrt{1-b^2}}$. Or, pour $X \in\, ]-\pi, +\pi[$, on a (du fait que $\lambda > 0$) :

$$\Psi(X) = \frac{2}{\sqrt{1-b^2}}\left(\operatorname{Arc\,tg}\left(\lambda\ \operatorname{tg}\frac{X}{2}\right) - \operatorname{Arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{X}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{(\lambda - 1)\operatorname{tg}\dfrac{X}{2}}{1 + \lambda\operatorname{tg}^2\dfrac{X}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{(\lambda - 1)\sin\dfrac{X}{2}\cos\dfrac{X}{2}}{\cos^2\dfrac{X}{2} + \lambda\sin^2\dfrac{X}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{(\lambda - 1)\sin X}{1 + \lambda + (1-\lambda)\cos X}.$$

Mais à cause de la $2\pi$-périodicité de $\Psi$, la dernière expression trouvée étant elle aussi $2\pi$-périodique, l'égalité obtenue se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier, d'où finalement :

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\left[X + 2\operatorname{Arc\,tg}\frac{(\lambda - 1)\sin X}{1 + \lambda + (1-\lambda)\cos X}\right].$$

Si le changement de variable $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ pour le calcul de $\displaystyle\int F(\cos x, \sin x)\,dx$ a pour lui l'avantage de sa généralité, il risque de conduire à des dénominateurs de degré excessif. Qui par exemple aurait l'idée saugrenue d'un tel changement pour calculer $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ ? Aussi préfère-t-on l'éviter chaque fois qu'on le peut. Or $F(X, Y)$ peut toujours s'écrire $\dfrac{A_1(X, Y^2) + YB_1(X, Y^2)}{C_1(X, Y^2) + YD_1(X, Y^2)}$, où $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ sont dans $\mathbb{C}[X, Y]$. En multipliant haut et bas par $C_1(X, Y^2) - YD_1(X, Y^2)$, on obtient : $F(X, Y) = \dfrac{A(X, Y^2) + YB(X, Y^2)}{C(X, Y^2)}$, où $A$, $B$, $C$ sont de nouveaux polynômes. Substituant $\cos x$ (resp. $\sin x$) à $X$ (resp. $Y$) on en déduit $P$, $Q$, $R$ dans $\mathbb{C}[X]$ tels que :

$$F(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x) + \sin x Q(\cos x)}{R(\cos x)}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\sin x Q(\cos x)}{R(\cos x)}\,dx$ se ramène immédiatement à la primitive de fraction rationnelle $\displaystyle\int \frac{-Q(u)}{R(u)}\,du$. Quant à $\displaystyle\int \frac{P(\cos x)}{R(\cos x)}\,dx$, elle s'écrit (en utilisant $P(X) = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$, $R(X) = R_1(X^2) + XR_2(X^2)$ et en multipliant haut et bas par $R_1(X^2) - XR_2(X^2)$) : $\displaystyle\int G(\cos^2 x)\,dx + \int H(\cos^2 x)\cos x\,dx$, où $G$ et $H$ sont dans $\mathbb{C}(X)$.

La première se ramène à $\displaystyle\int G\left(\frac{1}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$ par le changement $u = \operatorname{tg} x$ et la seconde à $\displaystyle\int H(1 - v^2)\,dv$ par le changement $v = \sin x$.

En définitive *il est toujours possible de ramener* $\displaystyle\int F(\cos x$, sir *primitives de fractions rationnelles sans passer par le changement* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Dans la pratique, on peut utiliser la règle dite « de Bioche » dont la justification résulte de ce qui précède : *si l'intégrande* $F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ *reste invariant par* $x \mapsto x + \pi$ (*resp.* $x \mapsto \pi - x$, $x \mapsto -x$), *on est conduit à poser* $u = \operatorname{tg} x$ (*resp.* $u = \sin x$, $u = \cos x$).

***Exemple 5 :*** Soit à calculer la primitive $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + 3\cos^4 x}$. Le changement de variable $u = \operatorname{tg} x$ la ramène à $J$ :

$$J = \int \frac{(1 + u^2)\,\mathrm{d}u}{u^4 + 2u^2 + 4}.$$

La décomposition en éléments simples de $\Phi(u) = \frac{u^2 + 1}{u^4 + 2u^2 + 4}$ donne $\Phi(u) = \frac{1}{8}\left(\frac{u\sqrt{2} + 2}{u^2 - u\sqrt{2} + 2} + \frac{-u\sqrt{2} + 2}{u^2 + u\sqrt{2} + 2}\right)$, d'où

$$\int \Phi(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{16}\operatorname{Log}\frac{u^2 - u\sqrt{2} + 2}{u^2 + u\sqrt{2} + 2} + \\ + \frac{\sqrt{6}}{8}\left[\operatorname{Arc\,tg}\frac{u\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{u\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}\right].$$

Par conséquent, si $X \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pourra écrire exactement :

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1 + 3\cos^4 x} = \frac{\sqrt{2}}{16}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{tg}^2 X - \sqrt{2}\operatorname{tg} X + 2}{\operatorname{tg}^2 X + \sqrt{2}\operatorname{tg} X + 2} + \\ + \frac{\sqrt{6}}{8}\left[\operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} X - 1}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} X + 1}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Le même problème que dans l'exemple 4 se pose si l'on veut trouver pour $\varphi(X) = \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1 + 3\cos^4 x}$ une expression valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. En faisant apparaître la partie non périodique $\frac{\sqrt{6}}{4}X$, qui s'écrit au voisinage de $0$ : $\frac{\sqrt{6}}{8}\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg} 2X)$, et en remplaçant (dans un autre voisinage de 0) la somme $\operatorname{Arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} X - 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} X + 1}{\sqrt{3}}$ par $\operatorname{Arc\,tg}\frac{\sqrt{6}\operatorname{tg} X}{2 - \operatorname{tg}^2 X}$, on obtient pour $\operatorname{Arc\,tg}\frac{\sqrt{6}\operatorname{tg} X}{2 - \operatorname{tg}^2 X} - \operatorname{Arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg} X}{1 - \operatorname{tg}^2 X}$ l'expression plus simple

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{-(4 - \sqrt{6})\operatorname{tg} X - (\sqrt{6} - 2)\operatorname{tg}^3 X}{2 + (2\sqrt{6} - 3)\operatorname{tg}^2 X + \operatorname{tg}^4 X}$$

d'où finalement :

$$\varphi(X) = \frac{\sqrt{6}}{4} X + \frac{\sqrt{2}}{16} \operatorname{Log} \frac{1 - \sqrt{2} \sin X \cos X + \cos^2 X}{1 + \sqrt{2} \sin X \cos X + \cos^2 X} - \\ - \frac{\sqrt{6}}{8} \operatorname{Arc\,tg} \frac{(4 - \sqrt{6}) \sin X \cos^3 X + (\sqrt{6} - 2) \sin^3 X \cos X}{2 \cos^4 X + (2\sqrt{6} - 3) \sin^2 X \cos^2 X + \sin^4 X} .$$

La fonction trouvée étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant identiquement $\varphi'(X) = \dfrac{1}{1 + 3\cos^4 x}$ sur $\left] \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{+\pi}{4} \right[$, continuera à vérifier cette égalité sur $\mathbb{R}$ tout entier à cause de la $\pi$-périodicité.

**Fonctions rationnelles en $x$ et en une fonction algébrique de $x$**

Nous envisageons ici un cas particulier d'intégrale abélienne. Définissons d'abord ce qu'on entend par fonction algébrique ; soit $\Omega$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ ; une fonction *continue* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *algébrique (réelle)* ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ *non constant* tel que $(\forall x \in \Omega)\ P(x, f(x)) = 0$. Il n'est pas question ici d'étudier ces fonctions, mais nous pouvons signaler qu'elles constituent un ensemble stable pour une large gamme d'opérations usuelles. Par exemple, si $f$ est algébrique *et réversible,* il est tout à fait clair que $f^{\langle -1 \rangle}$ est algébrique. Il est déjà beaucoup moins évident (mais c'est vrai !) que *la composée* de deux fonctions algébriques l'est encore. *La somme, le produit* et (lorsqu'il est défini) *le quotient* de deux fonctions algébriques l'est encore (nous l'admettrons). Nous connaissons déjà un certain nombre de fonctions algébriques : c'est le cas par exemple de *toute fonction rationnelle.* De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est algébrique (prendre $P(X, Y) = X - Y^n$). Donc pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ algébrique, la fonction $f^{1/n} = \sqrt[n]{f}$ l'est encore. En particulier, l'ensemble des fonctions algébriques contient celui des fonctions obtenues, *à partir des fonctions rationnelles, par une succession* **finie** *d'opérations : somme, produit, quotient, composée, extraction de racine n-ième* ($n \in \mathbb{N}^*$). Par exemple la fonction $[-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 + x^2} + \sqrt[3]{1 + x^3} + \sqrt[4]{1 + x^4}$ est algébrique, même s'il n'est pas si facile de trouver le polynôme $P$ de la définition. Mais **ce serait une lourde erreur de croire qu'on obtient ainsi toutes les fonctions algébriques !** Par exemple, la fonction $x \mapsto f(x)$ réciproque sur $\mathbb{R}_+^*$ de $g : x \mapsto x^2 + x^4 + x^5$, ne peut pas s'obtenir de cette manière, bien qu'elle soit évidemment algébrique en tant que réciproque de fonction polynomiale.

Nous envisageons ci-après des primitives du type $I = \displaystyle\int F(x, \varphi(x))\, dx$, où $F$ est une fraction rationnelle en deux variables à coefficients dans $\mathbb{C}$, et où $\varphi$ est algébrique, et nous allons passer en revue les quelques rares cas élémentaires où l'on arrive à ramener $I$ à des calculs de primitives connues. Notons tout de suite que l'on peut généralement écrire $F(x, \varphi(x))$ *sous plusieurs formes* équivalentes, ce qui donne une certaine latitude permettant d'abréger certains calculs. Par exemple $F(x, \sqrt{1 - x^2})$ s'écrit également $F\left(x, (1 - x)\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right) = G\left(x, \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right)$, avec $G$ rationnelle en deux variables. Cette possibilité n'est pas à négliger.

Bornons-nous aux cas les plus élémentaires :

*a*) $\varphi(x) = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, avec $n$ entier $\geqslant 2$ et $ad - bc \neq 0$.

*b*) $\varphi(x) = \sqrt{P(x)}$, avec $P$ polynôme de degré 2.

*c*) $\varphi(x)$ = une fonction algébrique attachée à une courbe **unicursale,** c'est-à-dire telle que le polynôme $P$ non constant de degré minimum vérifiant $(\forall x)\, P(x, \varphi(x)) = 0$ (un tel polynôme est en fait unique à un facteur de proportionnalité près) définisse une courbe $\Gamma_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$ admettant une représentation paramétrique (non unique) $x = u(t)$, $y = v(t)$ avec des fonctions $u$ et $v$ **rationnelles.**

Les cas *a*) et *b*) ne sont d'ailleurs que des cas particuliers du cas *c*).

• *Dans le cas a*), en posant $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, d'où $x = \dfrac{b - \mathrm{d}t^n}{ct^n - a}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{(ad-bc)\, nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2}\, \mathrm{d}t$, on ramène $I$ à la primitive d'une fonction *rationnelle* $\displaystyle\int F\left(\frac{b - \mathrm{d}t^n}{ct^n - a}, t\right) \frac{n(ad-bc)\, t^{n-1}}{(ct^n - a)^2}\, \mathrm{d}t$.

• *Dans le cas b*), le plus simple est de paramétrer *la conique* $\Gamma_P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) - y^2 = 0\}$, soit à l'aide de fonctions circulaires ou hyperboliques, soit en coupant $\Gamma_P$ par des droites pivotant autour de l'un de ses points (éventuellement à l'infini) lorsqu'un tel point est facilement disponible (pas nécessairement un sommet), ce qui donne un paramétrage rationnel. En particulier, lorsque $\Gamma_P$ est une *hyperbole,* on peut couper $\Gamma_P$ par des parallèles à l'une des directions asymptotiques.

• *Dans le cas c*), puisqu'on dispose d'une représentation paramétrique rationnelle de $\Gamma_P : x = u(t)$, $y = v(t)$, l'intégrale $I = \displaystyle\int F(x, \varphi(x))\, \mathrm{d}x$ se rationalise en $\displaystyle\int F(u(t), v(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t$. La difficulté consiste donc à savoir reconnaître si la fonction algébrique $\varphi$ est bien attachée à une courbe unicursale, et compte tenu des diverses formes que peut prendre $F(x, \varphi(x))$, on voit que le problème n'est pas simple. Il a cependant été résolu dans toute sa généralité au siècle dernier par Riemann. Contentons-nous ci-après de traiter quelques exemples.

***Exemple 6 :*** Soit $a$ et $b$ deux réels $(0 < a < b)$. Cherchons à calculer sur l'intervalle $]a, b[$ la primitive $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

*a*) Par le changement $t = \sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}$, $I$ se ramène à $-2\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{b + at^2}$, d'où $I = \dfrac{-2}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\dfrac{a(b-x)}{b(x-a)}}$. On obtient le même résulta[illegible]

$x = a\cos^2 u + b\sin^2 u$ et ensuite $\operatorname{tg} u = t$. Chacune de ces méthodes revient à paramétrer le cercle d'équation $y^2 = (x-a)(b-x)$ en le coupant par les droites $y = t(x-a)$ pivotant autour du point $(a, 0)$. Si c'est l'angle au centre qui est pris pour paramètre, avec $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\theta$, $y = \dfrac{b-a}{2}\sin\theta$, on arrive encore au même calcul en posant ensuite $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = t$.

*b*) Un procédé souvent utilisé quand on veut se débarrasser du facteur $x^n$ quand il figure en dénominateur consiste à effectuer le changement de variable $z = \dfrac{1}{x}$. Ici cela transforme $I$ en $-\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-az)(bz-1)}}$, et en mettant le radicande sous forme canonique

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\left(\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}\right)^2 - \left(z\sqrt{ab} - \dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2}},$$

d'où

$$I = \frac{-1}{\sqrt{ab}}\operatorname{Arc\,sin}\frac{2abz - (a+b)}{b-a} = \frac{-1}{\sqrt{ab}}\operatorname{Arc\,sin}\frac{2ab - (a+b)x}{(b-a)x}.$$

***Exemple 7 :*** Soit la primitive $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$.

Il y a bien des façons de paramétrer la branche d'hyperbole $y = \sqrt{1+x^2}$. Si l'on choisit de la couper par la droite $y = x + \lambda$ $(\lambda > 0)$, on obtient $x = \dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda}$, $y = \dfrac{1+\lambda^2}{2\lambda}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{-1}{2}\dfrac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$ et $I$ se ramène ainsi à l'intégrale de fonction rationnelle $J_1 = -\displaystyle\int \frac{(1+\lambda^2)^2}{\lambda(1+2\lambda+2\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4)}\mathrm{d}\lambda$.
Il faudra ensuite revenir à la variable $x$ en remplaçant $\lambda$ par $\sqrt{x^2+1} - x$. Si l'on préfère utiliser les fonctions hyperboliques (d'un maniement plus souple), on posera $x = \operatorname{sh} t$, $y = \operatorname{ch} t$ et $I$ se ramène ainsi à

$$J_2 = \int \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = t - \int \frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh} t}.$$

Pour calculer

$$J_3 = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$$

en utilisant au mieux la parité, il est judicieux de l'écrire :

$$\begin{aligned} J_3 &= \int \frac{\operatorname{sh} t(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh} t)}{\operatorname{ch}^4 t - \operatorname{sh}^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^4 t - \operatorname{ch}^2 t + 1}\,\mathrm{d}t - \int \frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^4 t - \operatorname{ch}^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = K \quad . \end{aligned}$$

$K$ se calcule en posant $u = \operatorname{ch} t$ : $K = \displaystyle\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4 - u^2 + 1}$ ; $L$ se calcule par le changement $v = \operatorname{th} t$ : $L = \displaystyle\int \frac{v^2\,\mathrm{d}v}{v^4 - v^2 + 1}$. La factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de $X^4 - X^2 + 1$ est immédiate (c'est $(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)$), ce qui permet d'achever le calcul.

***Exemple 8 :*** Soit $\varphi(x)$ vérifiant $(\varphi(x))^5 - (\varphi(x))^4 - x^4 = 0$. Cette relation définit sur $\mathbb{R}$ une fonction continue $\varphi$ et l'on se propose de calculer $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \varphi(x)}$. La courbe d'équation $y^5 - y^4 - x^4 = 0$ est unicursale et se paramètre facilement en posant $x = ty$, d'où $y = \dfrac{1}{1 + t^4}$, $x = \dfrac{t}{1 + t^4}$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1 - 3t^4}{(1 + t^4)^2}\,\mathrm{d}t$, ce qui ramène $I$ à la primitive de fonction rationnelle $\displaystyle\int \frac{1 - 3t^4}{(1 + t)(1 + t^4)}\,\mathrm{d}t$, qui est immédiate à traiter.

***Exemple 9*** (intégrales binômes) : Considérons la primitive $I = \displaystyle\int t^p(at + b)^q\,\mathrm{d}t$ (dite *binôme*), où $p$ et $q$ sont des exposants réels, et $a$ et $b$ deux réels non nuls. (Cette intégrale est *abélienne* lorsque $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$.)

Si $q \in \mathbb{N}$, le calcul de $I$ est immédiat pour tout $p$ ($p \in \mathbb{R}$, et même d'ailleurs avec $p \in \mathbb{C}$) en développant $(at + b)^q$ par la formule du binôme et en intégrant terme à terme.

Si $p \in \mathbb{Q}$ et si $-q \in \mathbb{N}^*$, il est facile de rationaliser $I$ en posant (si $p = \dfrac{\alpha}{\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $q = -r$) : $t = u^\beta$, d'où $\mathrm{d}t = \beta u^{\beta - 1}\,\mathrm{d}u$ et $I$ devient $\displaystyle\int \beta\,\frac{u^{\alpha + \beta - 1}}{(au^\beta + b)^r}\,\mathrm{d}u$.

En résumé, pour $p \in \mathbb{Q}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $I$ est toujours rationalisable. Il en est de même pour $q \in \mathbb{Q}$ et $p \in \mathbb{Z}$ (poser $at + b = \theta$).

Considérons enfin le cas où $p$ et $q$ sont deux rationnels dont la somme est un entier. On écrit alors $I = \displaystyle\int \varepsilon t^{p+q}\left(a + \frac{b\varepsilon}{t}\right)^q\mathrm{d}t$ (où $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ est approprié), ce qui, par le changement $t = \dfrac{1}{u}$, ramène à

$$J = -\varepsilon \int u^{-p-q-2}(a + b\varepsilon^{u})^q\,\mathrm{d}u\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad p \in \mathbb{Z}\,.$$

On a donc prouvé que, **pour $(p, q) \in \mathbb{Q}^2$, si l'un au moins des trois nombres $p$, $q$, $p + q$ appartient à $\mathbb{Z}$, l'intégrale binôme $\displaystyle\int t^p(at + b)^q\,\mathrm{d}t$ est rationalisable.**

Le changement $t^\mu = u$ ramène à une primitive binôme toute type $\int t^{\lambda}(at^{\mu}+b)^{\nu}\,dt$, avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{Q}^3$. C'est ainsi par exemple que $I = \int x^4 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ est rationalisable puisque, avec $t = x^3$, elle se ramène à $J = \frac{1}{3}\int t^{2/3}(1+t)^{1/3}\,dt$ et que $\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{Z}$. Cela prouve qu'une intégrale abélienne comme $I$ peut être rationalisable sans être nécessairement attachée à une courbe unicursale (ici la cubique $y^3 = x^3+1$ n'est pas unicursale).

***Exercice 1 :*** Démontrer :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,\operatorname{Log}\,(2\sqrt{2}-1+2\sqrt{2-\sqrt{2}}).$$

***Exercice 2 :*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}\frac{t}{2}\cos^n t\,dt$. Montrer d'abord que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, puis calculer $I_n$ et trouver un équivalent simple de $I_n$ quand $n \longrightarrow \infty$.

***Exercice 3 :*** Calculer les primitives suivantes :

*a)* $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^n x}$, $\int \operatorname{tg}^n x\,dx$, $\int \operatorname{th}^n x\,dx$ $(n \in \mathbb{N})$

*b)* $\int \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$, $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$, $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\,dx$, $\int \sqrt{\operatorname{coth} x}\,dx$

*c)* $\int \frac{dx}{1+a\cos x+b\sin x}$ $(ab \neq 0)$ *d)* $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx$ *e)* $\int \frac{dx}{1+\cos^3 x+\sin^3 x}$

*f)* $\int \frac{\cos x\,dx}{(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$ *g)* $\int \frac{\operatorname{Log}\,(1+\operatorname{th}^2 x)}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$

*h)* $\int \sqrt{a^2+\operatorname{tg}^2 x}\,dx$ $(a > 0)$ *i)* $\int \frac{x\,e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ *j)* $\int \frac{x\operatorname{Log} x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx$

*k)* $\int \frac{dx}{1+\cos^{4p} x}$ $(p \in \mathbb{N})$ *l)* $\int \frac{x\,e^x}{(1+e^x)^{\alpha}}\,dx$ $(\alpha \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\})$.

***Exercice 4 :*** Calculer les primitives suivantes :

*a)* $\int \frac{dx}{(1+x^{\alpha})^{1+\frac{1}{\alpha}}}$ $(\alpha > 0)$

*b)* $\int x^{-\frac{2}{5}}(1-x)^{-\frac{3}{5}}\,dx$

*c)* $\int (x+\sqrt{x^2-x})^{1/5}\,dx$

*d)* $\int \frac{x^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{-\frac{1}{3}}}{x^2+x+1}\,dx$

*e)* $\int \frac{x\,dx}{1-x^{1/3}-x^{1/2}}$

*f)* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

*g)* $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\sqrt{1+x^2e^{2x}}}$

*h)* $\int \frac{dx}{(1+b^2\cos^2 x)^n}$ $(n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}^*)$

*i)* $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^4+1}\,dx$

*j)* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$.

***Exercice 5 :*** Calculer les intégrales définies suivantes :

*a)* $\int_0^1 \operatorname{Arc\,tg}\,(\sqrt{1-x^2})\,dx$

*b)* $\int_0^1 (x-x^2)^{3/2}\operatorname{Arc\,cos}\,(1-2x)\,dx$

*c)* $\int_0^1 \frac{x\,dx}{2x^2+3-\sqrt{x^2-x+1}}$

*d)* $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,($

*e)* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}}\,dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \neq 1)$

*f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1/2}}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

*g)* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin^4 x}\,dx$

*h)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{Log}(1+\operatorname{tg} x)\,dx$

*i)* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos nx}{\cos^n x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$

*j)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos nx \cos^n x\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$.

***Exercice 6 :*** Soit $b \in \mathbb{R}$ $(b^2 \neq 1)$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la primitive $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+b\cos x)^n}$. Trouver, pour $n \geq 2$, une relation entre $I_n$, $I_{n-1}$ et $I_{n-2}$. Lorsque $|b| < 1$, donner une expression de $I_2$ valable sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 7 :*** Soit $m$ et $n$ deux naturels. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos 2mx \cos^{2n} x\,dx$ a pour valeur $\displaystyle\frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{m+n}$.

***Exercice 8 :*** Calculer $J(p,q) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x\,dx$ dans le cas où les naturels $p$ et $q$ sont tous deux impairs, puis dans le cas où ils sont tous deux pairs.

***Exercice 9 :*** soit $u$ et $v$ deux réels tels que $0 < u < v < 1$. Montrer :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{[(1-2ux+u^2)(1-2vx+v^2)]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{uv}} \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}.$$

***Exercice 10 :*** Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels $> 1$. Montrer :

$$\int_0^{\pi} \frac{(1-\alpha\cos x)(1-\beta\cos x)}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)(1-2\beta\cos x+\beta^2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{1-\alpha\beta}\right].$$

***Exercice 11 :*** Calculer les primitives :

*a)* $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)}{(x+2)\sqrt{x^2-4}+2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+\lambda x^2+x^4}}\,dx \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

*c)* $\displaystyle\int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$, puis $\displaystyle\int \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^k dx$

*d)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x+1})}$ *e)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}} \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^*)$

*f)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^3+x^2}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^2(x^4+x^2+1)}\,dx$ (avec $u = x + \dfrac{1}{x}$)

*h)* $\displaystyle\int \frac{\sin ax + \cos bx}{e^{2x}}\,dx \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ *i)* $\displaystyle\int \operatorname{Arc\,tg} \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\,dx.$

***Exercice 12 :*** On considère la primitive $I = \displaystyle\int \frac{(A+Bx^2)\,dx}{\sqrt{x^8+1}}$. Montrer qu'avec la nouvelle variable $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, on ramène $I$ à la forme $\alpha U + \beta V$, avec $U = \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{(y+2)(y^2-2)}}$ et $V = \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{(y-2)(y^2-2)}}$, $\alpha$ et $\beta$ restant à préciser. Exprimer de même $J = \displaystyle\int \frac{(A+Bx^2)\,dx}{\sqrt{x^8+2\lambda x^4+1}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (Roberts).

***Exercice 13 :*** Soit $c$ un réel tel que $|c| < 1$. On considère les primitives

$$I = \int \frac{2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)(x^4-c^2)}}, \qquad J = \int \frac{2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)(x^4-c^2)}}.$$

Montrer qu'en prenant pour nouvelle variable $y = \frac{x^2}{1+c} + \frac{c}{(1+c)x^2}$, on peut exprimer $I$ et $J$ à l'aide de $U = \int \frac{dy}{\sqrt{[(1+c)y - 2\sqrt{c}](1-y^2)}}$ et $V = \int \frac{dy}{\sqrt{[(1+c)y + 2\sqrt{c}](1-y^2)}}$ (Legendre).

***Exercice 14 :*** Soit des réels $k$ et $\lambda$. On considère $P(x) = x(1-x) \times (1+\lambda^2 x)(1+k^2 x)(1-k^2\lambda^2 x)$, et la primitive $\int \frac{(1-k\lambda x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$. Montrer que le changement de variable défini par $y = \frac{(1+k\lambda)^2 x}{(1+k\lambda x)^2}$ transforme $I$ en $\alpha \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-sy)}}$, où $\alpha$ et $s$ sont à préciser.

*Réponse :* $s = -\left(\frac{\lambda - k}{1+k\lambda}\right)^2$ (R. Russel).

***Exercice 15 :*** *a*) Expliquer, après l'avoir vérifié, pourquoi la primitive $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ se transforme en $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ lorsqu'on y effectue le changement de variable $x \mapsto y$ tel que $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = \text{Cte}$.

*b*) Dans la primitive $J = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ on effectue un changement de variable $x \mapsto y$ tel que $\frac{x\sqrt{1+y^4} - y\sqrt{1+x^4}}{1-x^2y^2} = \text{Cte}$. En quoi $J$ est-elle transformée ?

***Exercice 16 :*** Soit $a$, $b$, $c$, $d$ quatre réels tels que $a > b > c > d$. Montrer, grâce à un changement de variable défini par $\sin^2\varphi = \frac{b-d}{a-d}\frac{x-a}{x-b}$, que la primitive $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$ $(x > a)$ se transforme en :

$$\frac{2}{\sqrt{(a-d)(b-d)}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}}.$$

***Exercice 17 :*** Soit $I_p = \int \frac{x^p\,dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$ $(p \in \mathbb{N})$. Obtenir la formule de réduction

$$(p+1)aI_{p+1} + (2p+1)bI_p + cpI_{p-1} = x^p\sqrt{ax^2+2bx+c}.$$

***Exercice 18 :*** Soit $n$ un entier $\geqslant 2$. A l'aide d'un changement de variable $x \mapsto y$ tel que $y^n = 4x^n(1-x^n)$, montrer : $\int (1-x^n)^{1-\frac{1}{n}}\,dx = 2^{-\frac{2}{n}} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$.

***Exercice 19 :*** Soit $k \in ]0,1[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int \frac{d\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{n/2}}$. Etablir la relation, pour $n \geqslant 2$ :

$$n\lambda^2 I_{n+2} - (n-1)(1+\lambda^2)I_n + (n-2)I_{n-2} = -k^2\frac{\sin\theta\cos\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{n/2}}, \text{ où } \lambda = \sqrt{1-k^2}.$$

## § VIII.3 *INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES*

Comme d'habitude, $K$ désignera ici l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappelons (cf. §§ VII.3 et VII.6) que si $I$ est un intervalle non vide et non co une fonction $f : I \longrightarrow K$ et dite *localement bornée intégrable* ssi sa restriction à tout sous-intervalle compact de $I$ est bornée intégrable. Il en est ainsi si $f$ est *continue*, et également si $f$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est *monotone*.

**DÉFINITION VIII.3.1**

*Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[ \longrightarrow K$ localement bornée intégrable. On dit que* **l'intégrale de f converge sur [a, b[** *ssi la fonction $[a, b[ \longrightarrow K$, $X \mapsto \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie en $b$.*

*Si c'est le cas, cette limite sera appelée* **intégrale (généralisée)** *de $f$ sur $[a, b[$ et notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

*Sinon, on dit que l'***intégrale** $\int_a^b f$ **diverge.**

Les expressions « l'intégrale $\int_a^b f$ converge » (resp. « diverge ») doivent être considérées comme de simples abréviations pour « l'intégrale de $f$ sur $[a, b[$ converge » (resp. « diverge »), sans confusion possible (en cas de convergence) avec le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ noté lui aussi en abrégé $\int_a^b f$.

Nous laissons au lecteur le soin de modifier convenablement cette définition pour qu'elle puisse s'appliquer à une fonction $g$, localement bornée intégrable sur $]\alpha, \beta]$ avec $-\infty \leqslant \alpha < \beta < +\infty$.

***Exemple 1 :*** Supposons $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $f : [a, b[ \longrightarrow K$ **bornée** et localement bornée intégrable. Prolongeons $f$ en $\tilde{f} : [a, b] \longrightarrow K$ en lui donnant en $b$ une valeur *arbitraire*. Alors $\tilde{f} \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$. En effet, soit $c_n = b - \dfrac{b-a}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et, pour chaque $n$, $f_n = \tilde{f}(b)\,\chi_{\{b\}} + f\chi_{[a, c_n]}$. Comme $\tilde{f}$ est bornée, la suite $(f_n)$ est $u$-bornée et converge simplement sur $[a, b]$ vers $\tilde{f}$, donc comme chaque $f_n$ est bornée intégrable, $\tilde{f}$ l'est aussi (cf. théorème VII.3.3). Donc l'intégrale $\int_a^b f$ converge et sa valeur $\int_a^b \tilde{f}$ ne dépend évidemment pas du nombre $\tilde{f}(b)$.

Quand nous nous référerons à ce cas particulièrement simple d'intégrale généralisée convergente, nous dirons qu'elle relève du « cas trivial ».

***Exemple 2*** (*intégrales de Riemann en* $+\infty$) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f_\alpha : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est continue. La primitive

$F_\alpha : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \int_1^X f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule immédiatement : $F_1(X) = \operatorname{Log} X$ et pour $\alpha \neq 1$, $F_\alpha(X) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right)$. On voit donc que si $\alpha \leqslant 1$, $F_\alpha(X) \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ; et que si $\alpha > 1$, $F_\alpha(X) \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\alpha - 1}$. On retiendra par cœur qu'**une C.N.S. de convergence de l'intégrale de Riemann** $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est $\boxed{\alpha > 1}$.

***Exemple 3*** (*intégrales de Bertrand en* $+\infty$) : Reprenons les notations des exemples 1 et 2 du § VI.6 concernant les *logarithmes itérés*. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_{p,\alpha} : [e_{p+1}, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{1}{x \operatorname{Log}_1 x \ldots \operatorname{Log}_{p-1} x (\operatorname{Log}_p x)^\alpha}$$

dont la primitive $\int_{e_{p+2}}^X f_{p,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = F_{p,\alpha}(X)$ se calcule immédiatement : $F_{p,1}(X) = \operatorname{Log}_{p+1}(X)$, et si $\alpha \neq 1$, $F_{p,\alpha}(X) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left((\operatorname{Log}_p X)^{1-\alpha} - 1\right)$. Comme $\operatorname{Log}_k(X) \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on voit que **l'intégrale** $\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ **converge ssi $\alpha > 1$.**

***Exemple 4*** (*intégrales de Riemann en* 0) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g_\alpha : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ qui est continue. La primitive $G_\alpha : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto \int_X^1 g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule immédiatement : $G_1(X) = -\operatorname{Log} X$ et pour $\alpha \neq 1$ $G_\alpha(X) = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{X^{\alpha-1}}\right)$. Il en résulte que l'**intégrale de Riemann** $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ **converge ssi** $\boxed{\alpha < 1}$.

***Exemple 5 :*** Soit $P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle $> 0$. Considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t} P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet pour primitive $\mathrm{e}^{-\lambda t} Q(t)$, où $Q$ est un nouveau polynôme du même degré que $P$ (cf. § VIII.2). On a donc

$$(\forall X \in \mathbb{R}_+) \quad \int_0^X \mathrm{e}^{-\lambda t} P(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda X} Q(X) - Q(0)\,.$$

Mais $|\mathrm{e}^{-\lambda X} P(X)| = \mathrm{e}^{-uX} |P(X)|$ (en posant $u = \operatorname{Re}(\lambda) >$

vers 0 quand $X \longrightarrow +\infty$ (croissance comparée des puissances et des exponentielles). Donc *l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P(t)\,dt$ *est convergente.*

Dans les exemples précédents il était facile d'appliquer la définition VIII.3.1 car on disposait chaque fois d'une primitive élémentaire permettant de conclure à la convergence ou à la divergence de l'intégrale généralisée considérée. Avant de passer à des cas plus compliqués, indiquons quelques propriétés élémentaires qui se vérifient de manière évidente :

($IG_1$) *(linéarité)*

L'ensemble des fonctions localement bornées intégrables $[a, b[ \longrightarrow K$ forme un sous-$K$-ev, que nous noterons $\mathscr{L}_{\text{loc}}([a, b[, K)$, du $K$-ev $\mathscr{F}([a, b[, K)$. Celles de ces fonctions $f$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge forment un sous-$K$-ev de $\mathscr{L}_{\text{loc}}([a, b[, K)$, sur lequel l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est $K$-linéaire.

($IG_2$) Soit $f \in \mathscr{L}_{\text{loc}}([a, b[, K)$ et $c \in [a, b[$. Pour que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge, il faut et il suffit que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b$ converge ; et si c'est le cas, on a : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$

($IG_3$) *(changement de variable)*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \bar{\mathbb{R}}$ $(\alpha < \beta)$ et $\varphi : [\alpha, \beta[ \longrightarrow [a, b[$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On fait les hypothèses $f : [a, b[ \longrightarrow K$ *continue* et $\varphi(t) \underset{t \longrightarrow \beta}{\underset{<}{\longrightarrow}} b.$

Alors si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\,\varphi'$ converge aussi, avec

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta [(f \circ \varphi)(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Dans le cas où $\varphi$ est *bijective* (c'est-à-dire *strictement monotone*) on peut même préciser que $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\,\varphi'$ convergent ou divergent en même temps, l'égalité (1) ayant lieu en cas de convergence. En effet

$$(\forall T \in [\alpha, \beta[) \quad \int_a^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_\alpha^T f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

(cf. théorème VII.6.4), d'où la première assertion par composition des limites.

La seconde assertion s'en déduit à l'aide du théorème IV.1.

$\varphi = \varphi^{\langle -1 \rangle}$, en remarquant que $\psi(x) \underset{x \to b}{\overset{<}{\longrightarrow}} \beta$ et en écrivant, pour $X \in [a, b[$ :

$$\int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\psi(X)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarquons ici qu'une authentique intégrale généralisée peut parfois se transformer en une qui relève du cas trivial. Soit par exemple $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow [0, +\infty[$, $t \mapsto \operatorname{tg} t$. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ se transforme en $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t$ dont la convergence est évidente.

$(\mathrm{IG}_4)$ *(intégration par parties)*

Soit $f$ et $g$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I = [a, b[$. Pour $X \in I$, on a :

$$\int_a^X f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = |f(x)\,g(x)|_a^X - \int_a^X f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Si le membre de gauche a une limite finie quand $X \overset{<}{\longrightarrow} b$, il en est de même du membre de droite, mais il faudra prendre garde que cela n'implique pas que chacun des deux termes en ait une. L'utilisation de l'intégration par parties, souvent très efficace, demande donc une certaine habileté. Soit par exemple à calculer

$$I = \int_0^1 \operatorname{Log}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

(on pose, pour $x = 0$, $\dfrac{\operatorname{Log}(1-x^2)}{x^2} = -1$). On peut écrire, pour $X \in\, ]0, 1[$,

$$\int_0^X \operatorname{Log}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[\left(\frac{-1}{x}+1\right)\operatorname{Log}(1-x^2)\right]_0^X - \\ - \int_0^X \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{-2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

l'astuce consistant ici à ne pas prendre $\dfrac{-1}{x}$ comme primitive de $\dfrac{1}{x^2}$ mais $\dfrac{-1}{x} + 1$. Quand $X \overset{<}{\longrightarrow} 1$, il est clair maintenant que la « partie tout intégrée » tend vers 0 (car $(X-1)\operatorname{Log}(1-X) \underset{X \to 1}{\overset{<}{\longrightarrow}} 0$), d'où

$$I = \int_0^1 \frac{-2\,\mathrm{d}x}{1+x} = -2\operatorname{Log} 2\,.$$

### Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert

Soit maintenant $a$ et $b$ tels que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f : ]a, b[ \longrightarrow K$ localement bornée intégrable. Donnons-nous $c_1$ et $c_2$ dans $]a, b[$. Pour tout $X \in ]a, b[$ (resp. tout $Y \in ]a, b[$), on a :

$$\int_X^{c_2} f = \int_X^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f \quad \left(\text{resp. } \int_{c_2}^{Y} f = \int_{c_1}^{Y} f - \int_{c_1}^{c_2} f\right).$$

On en déduit d'abord que les intégrales $\int_a^{c_1} f$ et $\int_a^{c_2} f$ $\left(\text{resp. } \int_{c_1}^{b} f \text{ et } \int_{c_2}^{b} f\right)$ *convergent ou divergent en même temps ;* ensuite que si $\int_a^{c_1} f$ et $\int_{c_1}^{b} f$ convergent toutes deux, alors $\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{b} f = \int_a^{c_2} f + \int_{c_2}^{b} f$.

**DÉFINITION VIII.3.2**

*Soit $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et $f : ]a, b[ \longrightarrow K$ localement bornée intégrable. On dit que* ***l'intégrale*** $\int_a^b f$ ***converge*** *ssi pour un $c \in ]a, b[$ les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. Si c'est le cas, le nombre (indépendant de $c \in ]a, b[$) $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle* ***intégrale généralisée de f*** *sur $]a, b[$ et se note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (ou $\int_a^b f$).*

Les propriétés $(IG_1)$ à $(IG_4)$ s'étendent bien entendu à ce nouveau type d'intégrales généralisées ainsi que la propriété vue dans l'exemple 1.

### Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

Dans ce qui suit, on fixe $a$ dans $\mathbb{R}$, $b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.

**PROPOSITION VIII.3.1**

*Soit $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornée intégrable. Pour que* ***l'intégrale*** $\int_a^b f$ ***converge,*** *il faut et il suffit que la fonction $F : X \mapsto \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t$* ***soit majorée*** *sur $[a, b[$. Si c'est le cas, on a :*

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\limits_{X \in [a,b[} F(X)$. *En cas de divergence de l'intégrale* $\int_a^b f$, *on a :* $\int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t \underset{X \longrightarrow b}{\overset{<}{\longrightarrow}} +\infty$.

*Démonstration :*

Pour $X$ et $Y$ réels tels que $a \leqslant X \leqslant Y < b$, on a : $F(Y) = F(X) + \int_X^Y f(t)\,\mathrm{d}t$, mais puisque $f \geqslant 0$, $\int_X^Y f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, d'où $F(Y) \geqslant F(X)$. Donc $F$ est *croissante*, d'où le résultat en utilisant le théorème IV.2.1. ■

**Théorème VIII.3.1** (*comparaison des intégrales de fonctions positives*)

*Soit $f$ et $g$ : $[a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornées intégrables.*

(I) *Si* $f \leqslant g$, *et si l'intégrale* $\int_a^b g$ *converge, alors l'intégrale* $\int_a^b f$ *converge et on a :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(II) *Si* $f \leqslant g$, *et si l'intégrale* $\int_a^b f$ *diverge, alors* $\int_a^b g$ *diverge aussi.*

(III) *Si* $f(x) \underset{x \longrightarrow b}{\overset{\sim}{<}} g(x)$, *les intégrales* $\int_a^b f$ *et* $\int_a^b g$ *convergent ou divergent en même temps (on dit qu'elles sont* ***de même nature****).*

*Démonstration :*

Posons, pour $X \in [a, b[$, $F(X) = \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(X) = \int_a^X g(t)\,\mathrm{d}t$. On a pour tout $X$: $0 \leqslant F(X) \leqslant G(X)$, conséquence de $f \leqslant g$. De plus les fonctions $F$ et $G$ sont croissantes sur $[a, b[$. Les assertions (I) et (II) en résultent d'après la proposition VIII.3.1.

Pour prouver (III) utilisons $c \in [a, b[$ tel que $\frac{1}{2} f(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{3}{2} f(x)$ dès que $x \in [c, b[$. Il suffit alors d'appliquer (I) (resp. (II)) avec $\frac{1}{2} f$ et $g$, puis $g$ et $\frac{3}{2} f$, sur $[c, b[$. ■

***Exemple 6 :*** Soit $f : [1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^\alpha}$, avec $\alpha$ réel $> 1$. Alors $f$ est continue, et on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^\alpha}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge, le théorème VIII.3.1 (I) prouve immédiatement que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx$ converge. Remarquons que cette méthode ne pourrait pas s'appliquer à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ puisque $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ ne prend pas ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Mais en écrivant

$$\int_1^X \frac{\sin x\, dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{x^\alpha}(1-\cos x)\right]_1^X + \int_1^X \alpha\,\frac{1-\cos x}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

on prouve la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^\alpha}$ pour tout $\alpha$ réel $> 0$, puisque $\dfrac{1-\cos x}{x^\alpha} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{1+\alpha}}\,dx$ converge par application du théorème VIII.3.1.

***Exemple 7 :*** Pour $x \in\, ]0, 1]$, soit $f_\alpha(x) = \dfrac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}^\alpha (1+x)}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On voit que $f_\alpha$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_-$, et que $f_\alpha(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\gtrsim} x^{-\alpha} \operatorname{Log} x = g_\alpha(x)$. Si $\alpha < 0$, $f_\alpha$ se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha$ converge (cas trivial). Si $0 \leqslant \alpha < 1$, choisissons $\beta \in\, ]\alpha, 1[$ ; alors $x^\beta g_\alpha(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$.

Donc il existe $A > 0$ tel que $0 \leqslant -g_\alpha(x) \leqslant \dfrac{A}{x^\beta}$ pour $x \in\, ]0, 1]$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ converge, il résulte du théorème VIII.3.1 (I) (appliqué à $-g_\alpha$) que $\displaystyle\int_0^1 g_\alpha$ converge, et d'après la partie (III) du même théorème, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha$ converge.

En revanche si $\alpha = 1$,

$$\int_X^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\operatorname{Log} x)^2\right]_X^1 = \frac{-1}{2}(\operatorname{Log} X)^2 \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} -\infty\,,$$

ce qui prouve la divergence de $\displaystyle\int_0^1 g_1$ et par conséquent celle de $\displaystyle\int_0^1 f_1$. Enfin, pour $\alpha > 1$, on a :

$$|f_\alpha(x)| = \frac{|\operatorname{Log} x|}{\operatorname{Log}^\alpha (1+x)} \geqslant \frac{|\operatorname{Log} x|}{\operatorname{Log}(1+x)}$$

et *a fortiori* $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha$ est divergente.

***Exemple 8 :*** Soit $\alpha$ un réel $> 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$ converge, car pour tout réel $\lambda > 0$ on a : $x^\lambda e^{-x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ : on peut donc trouver un $A > 0$ et un $\lambda > 1$ tels que $(\forall x \geqslant 1)$ $e^{-x^\alpha} \leqslant \dfrac{A}{x^\lambda}$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ converge, on en déduit la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$ et par conséquent celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx$.

Le théorème VIII.3.1 qui permet de comparer la nature des intégrales de fonctions **gardant un signe constant** sur $[a, b[$ peut être ainsi précisé :

**THÉORÈME VIII.3.2**

*Soit $f$ et $g : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornées intégrables.*

(I) *Supposons $f(x) \underset{\substack{< \\ x \to b}}{\sim} g(x)$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$* ***convergent,*** *on a :*

$$\int_X^b f(x)\,dx \underset{\substack{< \\ X \to b}}{\sim} \int_X^b g(x)\,dx\,.$$

*Si ces deux intégrales divergent :* $\displaystyle\int_a^X f(x)\,dx \underset{\substack{< \\ X \to b}}{\sim} \int_a^X g(x)\,dx$.

(II) *Supposons $f(x) \underset{\substack{< \\ x \to b}}{\in} o(g(x))$ (resp. $O(g(x))$). Si les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$* ***convergent,*** *on a :*

$$\int_X^b f(x)\,dx \underset{\substack{< \\ X \to b}}{\in} o\left(\int_X^b g(x)\,dx\right) \quad \left(\textit{resp. } O\left(\int_X^b g(x)\,dx\right)\right).$$

*Si elles* ***divergent,*** *on a :*

$$\int_a^X f(x)\,dx \underset{\substack{< \\ X \to b}}{\in} o\left(\int_a^X g(x)\,dx\right) \quad \left(\textit{resp. } O\left(\int_a^X g(x)\,dx\right)\right).$$

*Démonstration :*

(I) Supposons d'abord que $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent.

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ $(\varepsilon < 1)$, puis $c \in [a, b[$ tel que $(1 - \varepsilon)\, f($

$(1+\varepsilon)\,f(x)$ pour tout $x \in [c, b[$. Alors par intégration, pour $X \in [c, b[$, $Y \in [c, b[$, $X < Y$, il s'ensuit $(1-\varepsilon)\displaystyle\int_X^Y f \leqslant \int_X^Y g \leqslant (1+\varepsilon)\int_X^Y f$. En laissant $X$ fixe et en faisant $Y \xrightarrow{<} b$, on en déduit $(1-\varepsilon)\displaystyle\int_X^b f \leqslant \int_X^b g \leqslant (1+\varepsilon)\int_X^b f$, et comme c'est vrai pour tout $X \in [c, b[$, on obtient bien l'équivalence $\displaystyle\int_X^b f \underset{X \xrightarrow{<} b}{\sim} \int_X^b g$. Supposons maintenant les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ divergentes. On sait qu'alors $\displaystyle\int_a^X f \underset{X \xrightarrow{<} b}{\uparrow} +\infty$ et $\displaystyle\int_a^X g \underset{X \xrightarrow{<} b}{\uparrow} +\infty$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ ($\varepsilon < 1$), puis $c \in [a, b[$ comme ci-dessus, vérifiant en outre : $\displaystyle\int_a^c f > 0$, $\displaystyle\int_a^c g > 0$. Pour $X \in [c, b[$, en posant

$$F(T) = \int_a^T f \quad \text{et} \quad G(T) = \int_a^T g \quad \text{pour} \quad T \in [a, b[\ ,$$

on a :

$$(1-\varepsilon)(F(X) - F(c)) \leqslant G(X) - G(c) \leqslant (1+\varepsilon)(F(X) - F(c))\ ,$$

d'où
$$1 - \varepsilon - \frac{F(c)}{F(X)} \leqslant \frac{G(X)}{F(X)} \leqslant \frac{G(c)}{F(X)} + 1 + \varepsilon\ .$$

Mais $\dfrac{1}{F(X)} \underset{X \xrightarrow{<} b}{\longrightarrow} 0$, d'où, pour $d \in [c, b[$ convenable, dès que $X \in [d, b[$ : $\dfrac{F(c)}{F(X)} \leqslant \varepsilon$ et $\dfrac{G(c)}{F(X)} \leqslant \varepsilon$, et finalement : $1 - 2\,\varepsilon \leqslant \dfrac{G(X)}{F(X)} \leqslant 1 + 2\,\varepsilon$, ce qui prouve bien que $\dfrac{G(X)}{F(X)} \underset{X \xrightarrow{<} b}{\longrightarrow} 1$.

(II) se démontre par une technique tout à fait analogue. ■

***Exemple 9 :*** Soit à étudier le comportement au voisinage de $+\infty$ de la fonction $\Phi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (cette intégrale converge bien d'après l'exemple 8, mais on n'en connaît pas d'expression à l'aide de fonctions « usuelles »). Une intégration par parties, à l'aide de $\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{2\,t} \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-t^2})$, donne, pour $x > 0$ :

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{x}} - \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Mais $\dfrac{e^{-t^2}}{2\,t^2} \underset{t \to +\infty}{\in} o(e^{-t^2})$, donc d'après l'assertion (II) du théorème VIII.3.2,

$$\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2\,t^2}\,dt \underset{x \to +\infty}{\in} o\left(\left(\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right)\right).$$

On a donc déjà prouvé : $\Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$. Mais on peut continuer à intégrer par parties autant qu'on le veut, et une récurrence immédiate prouve alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le développement :

$$\Phi(x) = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,2\,k-1}{2^k\,x^k} + \rho_n(x)\right),$$

avec

$$\rho_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(2\,n+1)}{2^n}\,e^x\sqrt{x}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt \underset{x \to +\infty}{\in} o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

***Exemple 10 :*** De $\dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+x)} \underset{x \to 0}{\overset{\sim}{>}} \dfrac{1}{x}$, on déduit grâce au théorème VIII.3.2 :

$$\int_X^1 \frac{dx}{\operatorname{Log}(1+x)} \underset{X \to 0}{\overset{\sim}{>}} \int_X^1 \frac{dx}{x} = \operatorname{Log}\frac{1}{X},$$

et pourtant ici non plus on ne sait pas expliciter de primitive de $\dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+x)}$ à l'aide de fonctions usuelles déjà introduites.

**Fonctions positives au voisinage de $+\infty$**

Nous allons préciser l'étude des intégrales de fonctions à valeurs positives définies sur $[a, b[$ dans le cas courant où $b = +\infty$, en montrant les ressemblances avec la théorie des séries à termes positifs, mais aussi les différences. Ci-après $a$ désigne un nombre réel.

**PROPOSITION VIII.3.2**

*Soit $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornée intégrable. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors 0 est valeur d'adhérence de $f$ en $+\infty$, autrement dit : pour tout $\varepsilon$ réel $> 0$, et tout réel $A > a$, il existe $x \geqslant A$ tel que $f(x) \leqslant \varepsilon$.*

*Démonstration :*

Si ce n'était pas le cas, il existerait un $\varepsilon$ réel $> 0$ et un $A$ réel $> a$ tels que $\forall x \in [A, +\infty[$, $f(x) > \varepsilon$. Alors, pour $X \in [A, +\infty[$ :

$$\int_A^X f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_A^X \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon(X - A),$$

d'où
$$\int_a^X f \geqslant \int_a^A f + \varepsilon(X - A) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui contredirait l'hypothèse sur la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$. ■

***Remarque 1 :*** Le fait que 0 soit valeur d'adhérence de $f$ en $+\infty$ quand l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge n'entraîne nullement que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, contrairement à ce qui se passe pour les séries. Il se peut en effet que $f$ admette *d'autres* valeurs d'adhérence en $+\infty$, y compris la valeur $+\infty$, même si $f$ est une « bonne » fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ :

***Exemple 11 :*** Prenons $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^{2\lambda x}\sin^2 x}$, avec $\lambda > 1$. $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et comme le montre le dessin ci-dessous l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ en $+\infty$ est $\mathbb{R}_+$.

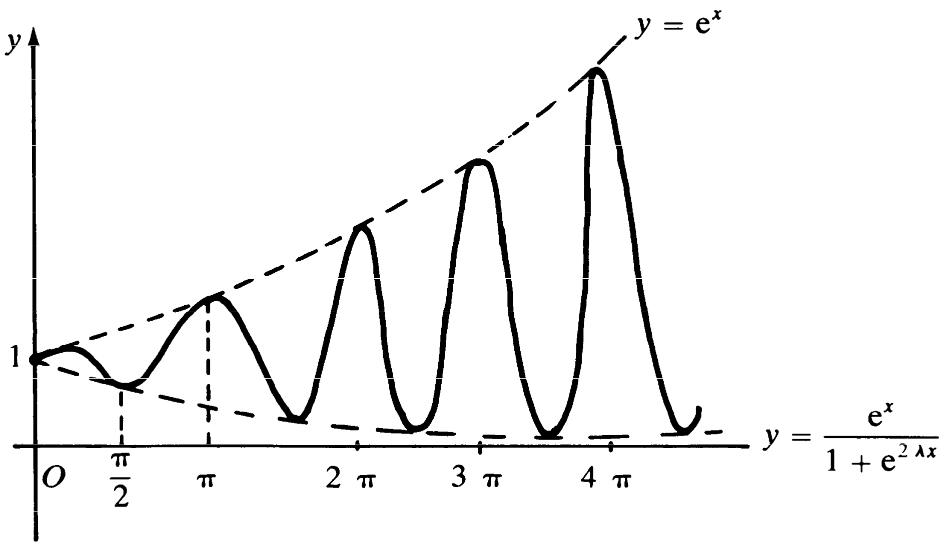



**Fig. 1.** Graphe de $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^{2\lambda x}\sin^2 x}$ (fonction « à pics »).

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant e^{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + e^{2\lambda k\pi}\sin$$

$$= e^{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + e^{2\lambda k\pi} \sin^2 x} = \frac{\pi\, e^{(k+1)\pi}}{\sqrt{1 + e^{2\lambda k\pi}}}$$

$= \alpha_k$ (l'intégrale ci-dessus est facile à calculer avec

$u = \operatorname{tg} x$ en l'écrivant $2 \displaystyle\int_0^{\pi/2}$ ).

Or $\alpha_k \leqslant \pi\, e^{\pi}\, e^{-(\lambda - 1)k\pi} = \beta_k$, terme général d'une série géométrique convergente. Posons $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = S$. Pour $X \in \mathbb{R}_+$, en posant $N = \operatorname{Ent}\left(\dfrac{X}{\pi}\right) + 1$, on a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^X f(x)\, dx \leqslant \int_0^{N\pi} f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \leqslant S,$

ce qui prouve (cf. proposition VIII.3.1) que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Ce rapprochement avec les séries à termes positifs n'est pas fortuit :

**THÉORÈME VIII.3.3**

*Soit $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornée intégrable. Posons $X_0 = a$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs dans $[a, +\infty[$ tendant vers $+\infty$. Posons $I_n = \displaystyle\int_{X_n}^{X_{n+1}} f(x)\, dx$ $(n \in \mathbb{N})$.*

*Pour que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ **converge,** il faut et il suffit que la série $\sum I_n$ **converge.** Si c'est le cas, on a : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$.*

*Démonstration :*

Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, et soit $S$ sa valeur. Puisque $f \geqslant 0$, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^{X_{n+1}} f \leqslant S$, et donc (cf. théorème II.5.2) la série $\sum I_k$ converge. De plus : $\displaystyle\int_a^X f \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} S$, d'où *a fortiori* $\displaystyle\int_a^{X_{n+1}} f \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S$, et par conséquent $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} I_k = S$.

Réciproquement, supposons que la série $\sum I_k$ converge, et soit $\sigma$ sa somme. Pour $X \in \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n \geqslant X$ et $\displaystyle\int^X f =$

$\int_a^{X_n} f = \sum_{k=0}^{n-1} I_k \leqslant \sigma$. On en conclut que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge (proposition VIII.3.1), et si $S$ est sa valeur on a vu plus haut que $S = \sigma$. ■

**COROLLAIRE**

> *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ***décroissante.*** *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} f$ *et la série* $\sum f(n)$ *sont* ***de même nature.***

*Démonstration :*

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_n^{n+1} f$. D'après le théorème VIII.3.3, la série $\sum I_n$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ convergent ou divergent en même temps. Mais du fait que $f$ est décroissante résulte $f(x) \in [f(n+1), f(n)]$ pour $x \in [n, n+1]$, d'où en intégrant : $f(n+1) \leqslant I_n \leqslant f(n)$. Il s'ensuit (cf. théorème II.5.3) que les séries $\sum I_n$ et $\sum f(n)$ convergent ou divergent en même temps. ■

***Exemple 12 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction décroissante. Posons, pour $x \geqslant 0$, $g(x) = f(x) \sin^2 x$. La fonction $g$ est localement bornée intégrable sur $[0, +\infty[$. Son graphe (cf. fig. 2) suggère d'utiliser

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g = \int_0^{\pi} f(x + k\pi) \sin^2 x \, dx \quad (k \in \mathbb{N}) .$$

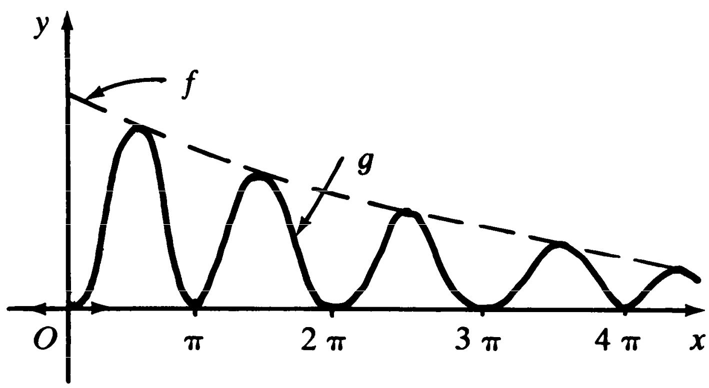



**Fig. 2.**

Comme $f$ est décroissante, on a :

$$f(k\pi) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \geqslant I_k \geqslant f((k+1)\pi) \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx ,$$

soit : $$\frac{\pi}{2} f[(k+1)\pi] \leqslant I_k \leqslant \frac{\pi}{2} f(k\pi) .$$

Les séries $\sum I_k$ et $\sum f(k\pi)$ sont donc de même nature (cf. théo

Mais la série $\sum f(k\pi)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ sont aussi de même nature (cf. corollaire ci-dessus). Donc *les intégrales* $\int_0^{+\infty} f$ *et* $\int_0^{+\infty} g$ *sont de même nature*. On retrouve ainsi plus rapidement le résultat de l'exemple 6 : l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge ssi $\alpha > 1$.

Il nous reste à examiner le cas où $f$ est à valeurs complexes, ou bien à valeurs réelles mais sans que $f$ garde un signe constant au voisinage de $+\infty$.

### Critère de Cauchy, convergence absolue

**Théorème VIII.3.4** *(Critère de Cauchy)*

*Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ et $f : [a, b[ \longrightarrow K$ localement bornée intégrable. Pour que l'intégrale $\int_a^b f$ converge, il faut et il suffit que soit vérifiée la condition suivante, appelée* ***critère de Cauchy des intégrales :***

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists c \in [a, b[ \mid (\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2)$$
$$(c \leqslant u < v < b) \Rightarrow \left( \left| \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon \right).$$

*Démonstration :*

Soit $F : [a, b[ \longrightarrow K$, $X \mapsto \int_a^X f(x)\,\mathrm{d}x$. Pour $(u, v) \in [a, b[^2$, on a : $F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x$. Il suffit alors d'appliquer à $F$ le critère de Cauchy des fonctions (cf. théorèmes IV.1.4 et IV.4.2) pour obtenir le résultat. ■

**Définition VIII.3.3**

*Soit $f : [a, b[ \longrightarrow K$ localement bornée intégrable (ce qui entraîne que $|f|$ l'est aussi : cf. théorème* VII.3.4*). On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est* ***absolument convergente*** *ssi l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge.*

**Théorème VIII.3.5**

*Avec les notations de la définition* VIII.3.3*, si l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente, elle converge.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Le critère de Cauchy fournit $c \in [a, b[$ tel que $\int_u^v |f| \leqslant \varepsilon$ pour $c \leqslant u < v < b$. Mais, pour de tels $u$, $v$, on a d'après le théorème VII.3.4 : $\left|\int_u^v f\right| \leqslant \int_u^v |f| \leqslant \varepsilon$. Donc le critère de Cauchy des intégrales est satisfait pour $f$. ■

Le théorème VIII.3.5 fournit une **condition suffisante** de convergence d'une intégrale. Les exemples qui suivent vont montrer que cette condition n'est pas nécessaire. Si l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente sans être absolument convergente, nous dirons qu'elle est **semi-convergente.**

***Exemple 13 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction **décroissante** et **tendant vers 0** quand $x \longrightarrow +\infty$. Considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$.

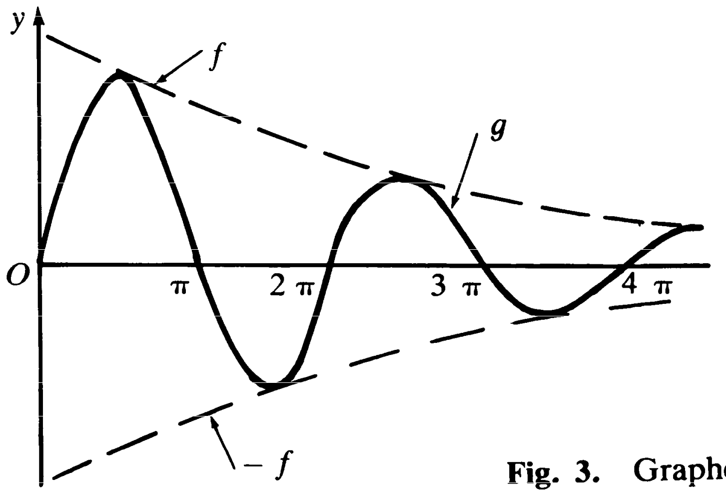



**Fig. 3.** Graphe de $g$.

Posons $g : x \mapsto f(x) \sin x$. En raisonnant comme dans l'exemple 12 (en y remplaçant $\sin^2 x$ par $|\sin x|$) il est flagrant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g|$ converge ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Donc si $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\int_0^{+\infty} g$ *converge absolument.* Plaçons-nous maintenant dans le cas où $\int_0^{+\infty} f$ *diverge.* Si $0 \leqslant u < v < +\infty$, on a : $\int_u^v g(x)\,dx = f(u) \int_u^\xi \sin x \, dx$ pour un $\xi \in [u, v]$ convenable (cf. le *second théorème de la moyenne*), d'où

$$\left|\int_u^v g\right| \leqslant f(u) \left|\int_u^\xi \sin x \, dx\right| \leqslant 2 f(u) \underset{u \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 ,$$

ce qui prouve que le critère de Cauchy des intégrales est satisfait pour $g$ en $+\infty$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} g$ est, dans ce cas, *semi-convergente*. C'est le cas par exemple pour $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha}$, si $0 < \alpha \leqslant 1$, qui est semi-convergente (utiliser le raisonnement précédent appliqué à $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha}$). Nous avions déjà prouvé directement dans l'exemple 6 la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^\alpha}$ ; la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x| \, dx}{x^\alpha}$ résulte directement de sa comparaison avec la série de terme général

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x| \, dx}{x^\alpha} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{(k\pi + x)^\alpha} \geqslant \frac{2}{(k\pi)^\alpha}.$$

***Exemple 14 :*** Etudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\left(1 + \frac{\sin x}{\operatorname{Log}(x+2)}\right) dx$. Les fonctions $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (on pose $f(0) = 1$) et

$$g : x \mapsto f(x)\left(1 + \frac{\sin x}{\operatorname{Log}(x+2)}\right)$$

sont *équivalentes* au voisinage de $+\infty$. Nous venons de voir que l'intégrale de $\int_0^{+\infty} f$ converge. Qu'en est-il de $\int_0^{+\infty} g$ ? $g - f$ est la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x \operatorname{Log}(x+2)}$ (et $0 \mapsto 0$) dont l'intégrale sur $[0, +\infty[$ diverge (cf. exemples 12, puis 3). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g$ diverge. Cet exemple est destiné à mettre en garde le lecteur contre un usage abusif des équivalents dans le cas où $f$ et $g$ ne gardent pas un signe constant.

***Exemple 15 :*** Soit $\lambda = a + ib$ et $\alpha = u + iv$ deux nombres complexes ($a$, $b$, $u$, $v$ réels). Pour $t > 0$, soit $f(t) = e^{-\lambda t} t^\alpha$. On a donc : $|f(t)| = e^{-at} t^u$, et par conséquent l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) \, dt$ est absolument convergente si $a > 0$ et l'intégrale $\int_0^1 f(t) \, dt$ est absolument convergente si $u > -1$. Si ces deux conditions sont réunies, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est absolument convergente, donc convergente.

***Exercice 1 :*** On reprend les notations de l'exemple 1. Prouver directement (c'est-à-dire sans utiliser le théorème VII.3.3) que $\tilde{f} \in \mathscr{L}_B([a, b], K)$.

*Indication :* On peut supposer $K = \mathbb{R}$. Soit $M$ un majorant de $|\tilde{f}|$ sur $[a, b]$. Pour $\varepsilon > 0$ $\exists c \in ]a, b[$ tel que $M(b - c) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Prendre $u \in \mathscr{U}_B([a, c], \mathbb{R})$ et $v \in \mathscr{V}_B([a, c], \mathbb{R})$ telles que $\int_a^c (u - v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $v \leqslant f \leqslant u$ sur $[a, c]$. Prolonger ensuite $u$ et $v$ en $\tilde{u}$ dans $\mathscr{U}_B([a, b], \mathbb{R})$ et $\tilde{v} \in \mathscr{V}_B([a, b], \mathbb{R})$ en sorte que $\tilde{v} \leqslant \tilde{f} \leqslant \tilde{u}$ et $\int_a^b (\tilde{u} - \tilde{v}) \leqslant \varepsilon$.

La même méthode appliquée à une fonction $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée* telle que $f|_{[a, c]}$ soit Riemann-intégrable pour tout $c \in [a, b[$ prouve que $\tilde{f}$ est Riemann-intégrable quelle que soit la valeur choisie pour $\tilde{f}(b)$. *Exemple :* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.

***Exercice 2 :*** Indiquer la *nature* des intégrales suivantes :

*a)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2}}{\operatorname{Log}(1 + x)} \mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2) \sin^{2/3} x}$

*c)* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x$ *d)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha \, \mathrm{d}x}{\operatorname{Log} x}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$

*e)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \cos x}$ *f)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x$.

***Exercice 3 :*** Lorsqu'elles convergent, calculer les intégrales suivantes :

*a)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x \, \mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

*b)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x(1 - x)^3}}$

*c)* $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2}}$

*d)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 2}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} \mathrm{d}x$

*e)* $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} \operatorname{Log} \frac{1 + x}{1 - x} \mathrm{d}x$

*f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - 3x^2}{\sqrt{x - x^3}} \operatorname{Arc\,sin} \frac{1 - x}{1 + x} \mathrm{d}x$

*g)* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x$

*h)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x \, \mathrm{d}x}{(1 - x)\sqrt{x(1 - x)}}$

*i)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tg}(x + \alpha)}{1 + x^2} \mathrm{d}x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

*j)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[ \frac{1}{x} - \operatorname{Log}\left( \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] \mathrm{d}x$.

***Exercice 4 :*** Lorsqu'elles convergent, calculer les intégrales suivantes :

*a)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha \, \mathrm{d}x}{(x^2 - 2x \cos \alpha + 1)^n}$

*b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^{2n}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

*c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + |x|)\sqrt{|x(1 - x)|}}$

*d)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x + 1)^2 \dots (x + n)^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

*e)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc\,sin} \sqrt{x}}{(1 - x)^{3/2}} \mathrm{d}x$

*f)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-x} \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

*g)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arc\,tg} x}{x(1 + x^2) \operatorname{Arc\,tg} x} \mathrm{d}x$

*h)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left( \operatorname{Arc\,sin} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x$.

***Exercice 5 :*** Calculer en moins d'une minute $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + 1}$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, \mathrm{d}x}{x^4 + 1}$ grâce au changement $x = \mathrm{e}^t$. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 + 1)^2}$.

***Exercice 6 :*** Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin x \, \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log} \cos x \, \mathrm{d}x$, par exemple en évaluant $I + J$ en fonction de $I$.

***Exercice 7 :*** Soit à calculer l'intégrale de Gauss $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$, $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

*a*) Calculer $I_n$ et $J_n$ en fonction des $W_k$.

*b*) Montrer : $(\forall x \in [0,1])\ 1 - x^2 \leqslant e^{-x}$, $(\forall x \in [0,+\infty[)\ e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ et en déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ W_{2n+1} \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}$.

*c*) En utilisant les résultats de l'exemple 3 du § VIII.2, en déduire $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

***Exercice 8 :*** On admet le résultat de l'exercice 7. Pour $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose : $N(a,\sigma,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$. Démontrer, pour $\sigma > 0$, $\tau > 0$ fixés et $(a,b,x) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(a,\sigma,x-t)\,N(b,\tau,t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N(a,\sigma,t)\,N(b,\tau,x-t)\,dt = N\left(a+b, \sqrt{\sigma^2+\tau^2}, x\right)$$

(convolution de deux densités « normales » en probabilités).

***Exercice 9 :*** *a*) Démontrer : $\int_0^1 \frac{-\operatorname{Log} u}{1+u^2}\,du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ (*Indication :* écrire $\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k u^{2k} + (-1)^{N+1} \frac{u^{2N+2}}{1+u^2}$, ...). On note $s$ ce nombre.

*b*) Soit $x$ un réel $\geqslant 1$. Calculer $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)\sqrt{t^2+1}}$.

*c*) Calculer $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ en fonction de $s$.

***Exercice 10 :*** Par une méthode analogue à celle de l'exercice 9 et (sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$), démontrer les relations suivantes :

*a*) Si $a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{e^{ax}-1} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{1+p^2a^2}$ *b*) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$

*c*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{\pi^2}{2}$ *d*) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{e^x-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

***Exercice 11 :*** Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{x^{3/4}(1-x)^{1/4}}$. Calculer $I_n$ par récurrence. Trouver un équivalent simple de $I_n$ pour $n \longrightarrow \infty$.

***Exercice 12 :*** Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}(\sin x)^n\,dx$.

***Exercice 13 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable admettant une limite $A$ (resp. $B$) quand $x \longrightarrow -\infty$ (resp. $+\infty$). Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x))\,dx$ converge, et donner sa valeur en fonction de $A$ et $B$.

***Exercice 14 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *uniformément continue* telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer qu'alors $f(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 15 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction *décroissante* telle que l'i $\int^{+\infty}$

converge. Montrer que $xf(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer par un exemple que la réciproque de cette propriété est fausse.

***Exercice 16 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continue* et non identiquement nulle.

*a*) On suppose l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ convergente et on pose $\rho(X) = \int_X^{+\infty} f(t)\,dt$. Indiquer, selon les valeurs du réel $\alpha > 0$, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{\rho^\alpha(x)}$.

*b*) On suppose l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ divergente et $f(0) > 0$. On pose $S(X) = \int_0^X f(t)\,dt$. Quelle est, suivant le réel $\alpha > 0$, la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{S^\alpha(x)}\,dx$ ?

***Exercice 17 :*** *a*) Soit $m$ et $n$ des entiers tels que $1 \leqslant m < 2n$. Montrer, par décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ : $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{m\pi}{2n}}$.

*b*) Soit $p \in ]0, 1[$. En prenant une suite convenable de rationnels tendant vers $p$, déduire du *a*) et des théorèmes de la fin du § VII.3 que : $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$.

***Exercice 18 :*** *a*) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{1+\frac{2}{n}}^{+\infty} \frac{dx}{x(nx - n - 1)\sqrt{1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}}}$ (on posera $u = x^n(nx - n - 1) + 1$).

*b*) Donner un équivalent simple de $I_n$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

***Exercice 19 :*** On se propose de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{t}$.

*a*) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}_1$ ($a$ et $b$ réels, $a < b$). Montrer que $\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Etendre ce résultat à une fonction $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge ($-\infty < a < b \leqslant +\infty$).

*b*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose : $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx}{k}$, $I_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,dt$, $T_n(x) = \int_0^x \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt$. Montrer : $S_n(x) = \frac{1}{2}(T_n(x) - x)$ et, si $x \in ]0, 2\pi[$, $T_n(x) - I_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, puis que $I_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 2I$ et enfin : $S_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} I - \frac{x}{2}$.

*c*) Montrer que $T_n(\pi) = \pi$ pour tout $n$. En déduire : $I = \frac{\pi}{2}$, puis $(\forall x \in ]0, 2\pi[)$ $S_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi - x}{2}$.

*d*) Montrer : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

***Exercice 20 :*** Montrer que $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ $(x > 0)$ admet, par rapport à $y = \frac{1}{x}$, des développements limités à tout ordre au voisinage de 0, et calculer ces développements.

***Exercice 21 :*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que l'intégrale $\int^{+\infty}$ f converge

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{\alpha^2}{x}\right|\right) dx$ converge, et que $\int_0^{+\infty} f\left(\left|x - \frac{\alpha^2}{x}\right|\right) dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

***Exercice 22 :*** *a*) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ est convergente.

*b*) Montrer que $\int_1^{1+\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

*c*) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

*Indication :* On posera $1 - x^3 = \frac{(t^3-1)(t^3+8)^2}{27\,t^6}$.

***Exercice 23 :*** Indiquer la *nature* des intégrales suivantes :

*a*) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{t^\alpha + \cos t} \quad (\alpha > 0)$

*b*) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{\cos t + \operatorname{Log}(1+t)}$

*c*) $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2 |\sin x|)\, dx$

*d*) $\int_0^{+\infty} x \exp(-x^\alpha \sin^2 x)\, dx \quad (\alpha > 0)$

*e*) $\int_0^{+\infty} x^\alpha |\cos x|^{x^\beta} dx$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (Polyà)

*f*) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

*g*) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta} dx, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

*h*) $\int_0^{+\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$

*i*) $\int_0^1 \left[\frac{1}{x} - \operatorname{Ent}\left(\frac{1}{x}\right)\right] x^\alpha dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

*j*) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\operatorname{Log} x) \operatorname{Log}|1-x|}{x^\alpha(1+x)} dx \quad (\alpha > 0)$.

***Exercice 24 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f^2$ converge. On pose $I = \int_0^{+\infty} f^2(x)\, dx$ et $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad (x \geq 0)$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx$ converge, et que sa valeur $J$ vérifie $J \leq 4\,I$. La constante 4 peut-elle être améliorée ?

***Exercice 25 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Si les intégrales $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} f''^2$ convergent, alors $\int_0^{+\infty} f'^2$ converge. (C'est un classique des oraux de concours.)

***Exercice 26*** ***(Fonction à pics)*** : Soit $f$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, croissantes, de limite $+\infty$ en $+\infty$.

*a*) Pour $\lambda > 0$ calculer $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \lambda^2 \sin^2 x}$ et en déduire un encadrement simple de $J_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{f(x)\, dx}{1 + g(x)\sin^2 x} \quad (k \in \mathbb{N})$.

*b*) En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)\, dt}{1 + g(t)\sin^2 t}$ dans les cas suivants :

$b_1$) $f(t) = t^\alpha$ et $g(t) = t^\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

$b_2$) $f(t) = e^{\alpha t}$ et $g(t) = e^{\beta t} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$.

***Exercice 27 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha > 0$.

*a*) Montrer que $\int_n^{n+1} f(t)\, dt \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} f(n)$.

*b*) En déduire, lorsque $A > 1$, un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} A^k \operatorname{Log} k$.

***Exercice 28 :*** On pose, pour $t$ réel $> 0$, $J(t) = \int_0^1 e^{-x} \frac{\sin tx}{x} dx$. En admettant le résultat de l'exercice 19, montrer que $J(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. Montrer aussi que $\int_0^{\pi/2} \sin(x^t)\, dx \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.

***Exercice 29 :*** *a*) Soit $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *décroissante* telle que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n+1}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$. Appliquer ce résultat au calcul de $\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log} \sin x\, dx$, et de $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \operatorname{Log} \frac{n+k}{n+k-1}$.

*b*) Soit $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ localement bornée intégrable mais non bornée. Pour chaque subdivision $\sigma = \{x_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[0, 1]$ $(0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1)$, soit $S_f(\sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$. On suppose trouvé $I \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que $|S_f(\sigma) - I| \leqslant \varepsilon$ pour *toute* subdivision $\sigma$ de pas $\leqslant \alpha$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f$ converge, sa valeur étant $I$, et montrer que $x f(x) \underset{x \to 0}{\underset{>}{\longrightarrow}} 0$.

***Exercice 30 :*** Pour $x \in ]-1, +1[$, montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} xt}{\operatorname{sh} t} dt$ est définie.

*a*) On veut prouver

(1) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} dt .$$

Pour cela écrire la formule de Taylor avec reste intégrale pour $\operatorname{sh} xt$, à l'ordre $2N+1$. Si $\rho_N(xt)$ est son reste, on a : $0 \leqslant \rho_N(xt) \leqslant \frac{xt}{(2N+1)!} \int_0^{xt} e^{xt-v} v^{2N} dv \leqslant \frac{xt\, e^{xt}}{2N+1}$. Intégrer terme à terme sur $[0, +\infty[$ pour obtenir (1).

*b*) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, mettre $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t} dt$ sous forme de la somme d'une série convergente, à l'aide des méthodes utilisées dans l'exercice 10.

***Exercice 31 :*** Montrer que $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-1/t}}{t} dt = \gamma$ (constante d'Euler). En déduire : $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\operatorname{Log}(1-t)}\right) dt = \gamma$.

***Exercice 32 :*** Montrer que $(\forall x > 0)$ $\int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \operatorname{Log} x + \gamma + \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.

***Exercice 33 :*** Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{xt(1 - \operatorname{Log} t)} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^x$.

***Exercice 34 :*** Soit $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} x^2 y^2(x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} y'^2(x)\, dx$ convergent.

*a*) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} y^2(x)\, dx$ converge.

*b*) Prouver que $\int_0^{+\infty} y^2(x)\, dx \leqslant 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 y^2(x)\, dx \int_0^{+\infty} y'^2(x)\, dx}$, l'égalité ayant lieu ssi $y(x) = A\, e^{-\lambda x^2}$, avec $A \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

***Exercice 35 :*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} e^{-x} \frac{x^n}{n!} \, dx$.

*a*) Vérifier que $u_n = e^{-n} \left( 1 + \dfrac{n}{1!} + \dfrac{n^2}{2!} + \cdots + \dfrac{n^n}{n!} \right)$.

*b*) Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante, et en déduire que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L \geqslant 0$.

*c*) Soit $f_n : x \mapsto e^{-x} \dfrac{x^n}{n!}$ et $v_n = \displaystyle\int_0^n f_n(x) \, dx$. Montrer que si $x \in [0, n]$, $\dfrac{f_n(x)}{f_n(2n - x)} = \left( e^{2t} \dfrac{1-t}{1+t} \right)^n$, avec $t = \dfrac{n - x}{n}$. En déduire que $v_n \leqslant \displaystyle\int_n^{2n} f_n(t) \, dt \leqslant u_n$, puis : $u_n > \dfrac{1}{2}$ et donc $L \in \left[ \dfrac{1}{2}, 1 \right[$.

*d*) On pose $v_n - u_n = A_n + B_n$, avec $A_n = \displaystyle\int_n^{2n} (f_n(t) - f_n(2n - t)) \, dt$ et $B_n = \displaystyle\int_{2n}^{+\infty} f_n(t) \, dt$. Prouver : $B_n \leqslant \left( \dfrac{2}{e} \right)^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $A_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} e^{-n} \displaystyle\int_0^1 g_n(t) \, dt$, avec $g_n(t) = e^{-nt}(1 + t)^n - e^{nt}(1 - t)^n$. Prouver que $g_n'(t)$ s'annule en un point $t_n \in \, ]0, 1[$ unique racine de $t = \operatorname{th} \dfrac{n}{n-1} t$. En déduire un équivalent de $t_n$ pour $n \longrightarrow +\infty$.

*e*) Soit $\alpha \in \left] 0, \dfrac{1}{2} \right[$. Montrer qu'avec $k$ convenable, $g_n\left( \dfrac{1}{n^\alpha} \right) \underset{n \to \infty}{\leqslant} e^{-kn^{1-2\alpha}}$. Majorer $\displaystyle\int_0^1 g_n(t) \, dt$ et en déduire enfin que $A_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure $L = \dfrac{1}{2}$.

N.B. En utilisant le théorème central limite étudié en calcul des probabilités, on voit tout de suite que $u_n$ représente $\Pr(X_n \leqslant n)$ où $X_n$ est une variable de Poisson d'espérance $n$, et le résultat $u_n \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ est évident.

***Exercice 36 :*** Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels $> 0$ rangés par ordre croissant ($n \in \mathbb{N}^*$).

*a*) Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tels que pour *toute* fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{i=0}^n g(a_i x) \frac{dx}{x^n}$ converge. Trouver tous ces $(n+1)$-uples $(\lambda_i)$.

*b*) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant fixée de classe $\mathscr{C}^n$, on choisit les $(\lambda_i)$ comme en *a*). Montrer que $J(\varepsilon) = \displaystyle\sum_{i=0}^n \int_\varepsilon^{\varepsilon a_i} \lambda_i \, a_i^{n-1} g(t) \frac{dt}{t^n}$ possède une limite $J$ quand $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$. Exprimer $J$ à l'aide des $g^{(k)}(0)$.

*c*) On suppose l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x) \frac{dx}{x^n}$ convergente. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{i=0}^n \lambda_i \, g(a_i x) \frac{dx}{x^n}$ converge, et que sa valeur est $-J$.

***Exercice 37 :*** *a*) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=-k}^{+k} e^{-i\pi n t}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin (2n+1) \pi t}{\sin \pi t} = \int_{1/2}^1 \frac{\sin (2n+1) \pi t}{\sin \pi t} \, dt = \frac{1}{2}$.

*b*) Soit $g$ *continue* sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_a^b g(x) \sin mx \, dx = 0$.

*c*) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1. On pose $S_k = \displaystyle\sum_{n=-k}^{+k} \int_0^1 f(t) \, e^{-2i\pi n t} \, dt$. Montrer que $S_k = \displaystyle\int_0^1 f(t) \frac{\sin (2n+1) \pi t}{\sin \pi t} \, dt$.

En prolongeant par continuité les fonctions $\left] 0, \dfrac{1}{2} \right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(0)}{\sin \pi t}$ et $\left[ \dfrac{1}{2}, 1 \right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{f(t) - f(1)}{\sin \pi t}$, calculer la limite de la suite $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

*d*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots + f(p-1) + \frac{1}{2} f(p) = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left( \sum_{n=-k}^{+k} \int_0^p f(t)\, e^{-2i\pi nt}\, dt \right).$$

*Application :* *a*) Montrer la convergence des intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \alpha = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx, \quad \beta = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \text{ et } \gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{2i\pi p x^2} dx.$$

*b*) Montrer que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - nx)} dx = (-i)^{pn^2} \int_{\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}} e^{2i\pi p u^2} du$. En déduire $\displaystyle\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left( \sum_{n=-k}^{+k} \int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - nx)} dx \right)$ en fonction de $\alpha$, $\beta$ et $p$.

*c*) En appliquant le résultat du *d*) à la fonction $f : t \mapsto e^{2i\pi \frac{t^2}{p}}$, calculer la somme de Gauss $G_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{p}}$ pour tout entier $p \geq 1$, et déterminer explicitement les valeurs des intégrales de Fresnel $\alpha$ et $\beta$.

***Exercice 38 :*** Soit $E$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissantes, continues, telles que $f(0) = 0$.

Si $f \in E$, on note $\mathscr{L}_f$ l'ensemble $\{\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(|\varphi(x)|)\, dx$ converge.

Si $f_1 \in E$ et $f_2 \in E$ montrer l'équivalence entre les assertions *a*) et *b*) ci-après :

*a*) $\mathscr{L}_{f_1} \subset \mathscr{L}_{f_2}$ ; *b*) $\exists C \in \mathbb{R}_+ \mid f_2 \leq C f_1$.

***Exercice 39 :*** Pour $x \in ]-1, +\infty[$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x\, dt}{1+t}$.

*a*) Montrer : $I(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$ (intégrer par parties).

*b*) Montrer : pour $x \in ]-1, +\infty[$, $I(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+(k+1)y} \underset{y \longrightarrow 0}{\overset{>}{\longrightarrow}} \frac{1}{2}.$$

***Exercice 40 :*** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

*a*) Prouver que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^{2p-1}}{1-x^{4p}} dx = \frac{2^{2p-2}\pi}{p} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{p-1} \left( \cos \frac{k\pi}{2p} \right)^{2p-1} \right)$.

*b*) En déduire la valeur de $I_p$ : $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{2p-1}}{1-x^{4p}} dx$.

***Exercice 41 :*** *a*) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\quad J_m = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{2m}}$.

*b*) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-2}\, dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{2m}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2m-2}\, dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{2m}}$.

## § VIII.4 *INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES : COMPLÉMENTS*

Dans ce §, $K$ désigne encore $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### Intégration de développements limités

**PROPOSITION VIII.4.1**

*Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0, et $f : I \longrightarrow K$ localement bornée intégrable. On donne $n \in \mathbb{N}$.*

(I) *Si* $f(x) \underset{x \to 0}{\in} o(x^n)$, *alors* $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\in} o(x^{n+1})$.

(II) *Si* $f(x) \underset{x \to 0}{\in} O(x^n)$, *alors* $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\in} O(x^{n+1})$.

*Démonstration :*

(I) Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $\alpha$ réel $> 0$ tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon |x|^n$ dès que $x \in I$ et $|x| \leqslant \alpha$. Alors, pour ces $x$, $\left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^x \varepsilon |t|^n\,\mathrm{d}t\right| = \dfrac{\varepsilon}{n+1} |x|^{n+1}$.

(II) Se prouve de manière analogue. ■

Comme pour tout polynôme $P_n : \mathbb{R} \longrightarrow K$, $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, on a :

$$\int_0^x P_n(t)\,\mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

en appliquant la proposition VIII.4.1 à $f - P_n$, où $P_n$ désigne la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f$ supposé exister, on obtient :

**THÉORÈME VIII.4.1**

*Avec les notations et hypothèses ci-dessus, si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ (resp. un $\mathrm{DL}_n(0)$ fort), alors $F : I \longrightarrow K$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ (resp. un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ fort) dont la partie régulière s'obtient* ***en intégrant terme à terme*** *$P_n$ depuis 0.*

### La règle d'Abel

Quand une intégrale généralisée n'est pas absolument convergente, on peut donner une condition *suffisante* simple de semi-convergence en utilisant le second théorème de la moyenne.

**Théorème VIII.4.2** *(règle d'Abel)*

> *Soit* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ $(a < b)$ *et* $f : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **décroissante,** $g : [a, b[ \longrightarrow K$ *localement bornée intégrable. On suppose que* $f(x) \underset{x \to b}{\underset{<}{\longrightarrow}} 0$ *et que la fonction* $G : X \mapsto \int_a^X g(t)\,\mathrm{d}t$ *est* **bornée** *sur* $[a, b[$. *Alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

*Démonstration :*

Soit $M$ un majorant de $\{|G(X)|\}$ pour $X \in [a, b[$. Posons $g = u + \mathrm{i}v$ ($u$ et $v$ à valeurs réelles), $U(X) = \int_a^X u(t)\,\mathrm{d}t$ et $V(X) = \int_a^X v(t)\,\mathrm{d}t$ $(X \in [a, b[)$. On a $|U(X)| \leqslant |G(X)| \leqslant M$ et $|V(X)| \leqslant |G(X)| \leqslant M$. Prenons $X$ et $Y$ dans $[a, b[$ et appliquons le second théorème de la moyenne :

$$\int_X^Y f(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t = f(X) \int_X^{\xi_1} u(t)\,\mathrm{d}t$$

pour un $\xi_1$ convenable, et de même

$$\int_X^Y f(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = f(X) \int_X^{\xi_2} v(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où $$\left|\int_X^Y f(t)\,u(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant f(X)\,|U(\xi_1) - U(X)| \leqslant 2\,Mf(X)\,,$$

et de même pour $v$, soit au total $\left|\int_X^Y f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 4\,Mf(X)$. Puisque $f(X) \underset{X \to b}{\underset{>}{\longrightarrow}} 0$, le critère de Cauchy est bien satisfait en $b$ pour l'intégrale généralisée $\int_a^b fg$ qui converge donc. ■

***Exemple 1 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction *décroissante,* de limite nulle en $+\infty$. On peut appliquer le théorème VIII.4.2 à l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ car $\int_0^X \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$ reste évidemment bornée sur $[0, +\infty[$. Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, il est évident que $I$ est absolument convergente, et si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on retrouve la semi-convergence de $I$ qui résultait également de l'exemple 13 du § VIII.3.

**Intégrales à plusieurs singularités**

Soit $(a,b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ $(a<b)$ et une suite **finie** $a_1, \ldots, a_n$ $(a < a_1 < \cdots < a_n < b)$. Considérons une fonction $f : ]a, b[ \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \longrightarrow K$ *localement bornée intégrable* sur chacun des intervalles $]a, a_1[, \ldots, ]a_n, b[$. Nous dirons que l'**intégrale** $\int_a^b f$ **converge** (ou est convergente) ssi **chacune** des intégrales $\int_a^{a_1} f$, $\int_{a_1}^{a_2} f, \ldots,$ $\int_{a_n}^{b} f$ converge, et si c'est le cas, la somme $\int_a^{a_1} f + \int_{a_1}^{a_2} f + \cdots + \int_{a_n}^{b} f$ sera appelée **intégrale généralisée** de $f$ sur $]a, b[$ et notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ($x$ lettre muette) ou en abrégé $\int_a^b f$. L'intégrale $\int_a^b f$ sera dite **absolument convergente** ssi l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge. Dans ce cas il est clair que $\int_a^b f$ converge. Si elle converge sans être absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente.**

Pratiquement, si on rencontre une telle intégrale, le mieux est d'étudier l'intégrale de $f$ *séparément* sur chacun des intervalles à considérer.

***Exemple 2 :*** Cherchons à donner un sens à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|\cos t|}}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{|\cos t|}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur chacun des intervalles

$$I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \quad \text{et} \quad I_k = \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[ \quad (k \in \mathbb{N}^*)\,.$$

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge puisque, quand $t \xrightarrow{<} \frac{\pi}{2}$

$$f(t) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\pi/2}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} \sim \frac{\mathrm{e}^{-\pi/2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - t}}\,.$$

Le pôle $\frac{\pi}{2}$ de $f$ étant d'ordre $\frac{1}{2}$, la convergence est assurée, et il en est de même en chacun des autres pôles, d'où la convergence de $\int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Désignons par $L_k$ la valeur de cette intégrale. Le changement $t = k\pi + u$ donne $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-k\pi} \frac{\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos u}} = L\,\mathrm{e}^{-k\pi}$ en posant $L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\cos u}}$.
On constate ici que la série $L_0 + L_1 + \cdots + L_k + \cdots$ converge et a pour somme $S = L_0 + \frac{L}{\mathrm{e}^{\pi} - 1}$. C'est la valeur qu'on pense donner à

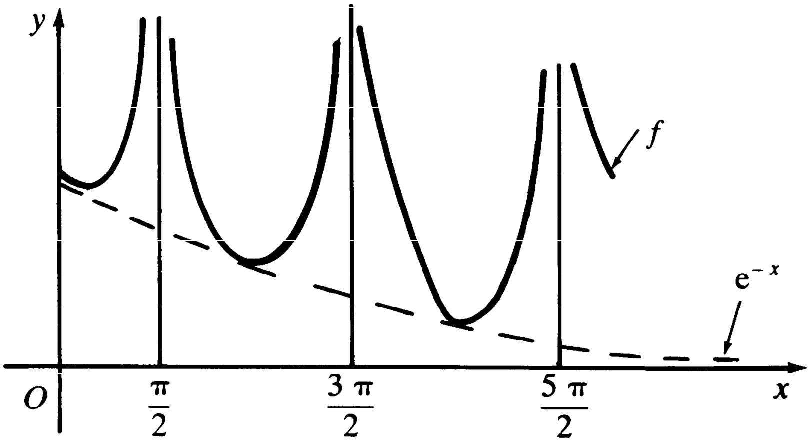



**Fig. 1.** Graphe de $f$.

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{|\cos t|}}$. Et en effet, *comme f est positive,* en définissant $\int_0^X f(t)\,dt$ par $\int_0^{\pi/2} f + \cdots + \int_{k\pi-\frac{\pi}{2}}^{k\pi+\frac{\pi}{2}} f + \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{X} f$, où $k(X)$ est la partie entière de $\frac{X-\frac{\pi}{2}}{\pi}$, on peut encadrer $\int_0^X f(t)\,dt$ entre les sommes partielles $S_{k-1}$ et $S_k$ de la série, d'où l'on conclut que $\int_0^X f(t)\,dt \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} S$. On a ainsi *étendu à f la notion d'intégrale généralisée convergente :* $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = S$.

## Notions sur la fonction gamma

Pour $x$ réel $> 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ converge et se note $\Gamma(x)$ (intégrale eulérienne de deuxième espèce). Une intégration par parties immédiate donne la relation fonctionnelle :

(1) $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

qui permet en particulier le calcul de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ en partant de $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$. On trouve ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ La fonction $\Gamma$ permet donc « d'interpoler » la fonction factorielle $n \mapsto n!$ qui n'était définie provisoirement que pour $n \in \mathbb{N}$ : il suffit de poser, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x! = \Gamma(x+1)$ $(= x\Gamma(x))$.

Mais la fonction $\Gamma$ peut être prolongée à des valeurs complexes de la variable. Nous avons vu en particulier dans l'exemple 15 du § VIII.3 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ converge absolument, donc converge si $z \in \mathbb{C}$ et a une partie réelle $> 0$. Nous noterons $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$, de sorte qu'en notant $\Gamma(z)$ la valeur de l'intégrale ci-dessus, la fonction $\Gamma$ se trouve définie sur $U$.

Rappelons que $\mathrm{e}^x = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ (cf. proposition V.3.3). Nous allons utiliser cette propriété pour donner une autre expression de $\Gamma(z)$ lorsque $z \in U$. Fixons donc $z \in U$. Si $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pourvu que $n > t$ : $\operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leqslant \dfrac{-t}{n}$ (concavité du logarithme), d'où :

$$(2) \qquad 0 \leqslant \exp\left(n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

inégalité qui subsiste pour $t = n$.

Si l'on donne deux réels $\alpha$ et $A$, avec $0 < \alpha < A$, la suite de fonctions continues de $t$ : $t \mapsto \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ est donc $u$-bornée sur $[\alpha, A]$ et converge simplement sur $[\alpha, A]$ vers $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}$. Donc, d'après le § VII.3 :

$$\int_\alpha^A \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\alpha^A \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \, .$$

Nous allons en déduire la relation fondamentale

$$(3) \qquad \boxed{\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(z)}$$

soit en effet $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $\alpha > 0$ et $A > 0$ $(\alpha < A)$ tels que

$$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} |t^{z-1}| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^\alpha \mathrm{e}^{-t} |t^{z-1}| \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \, ,$$

ce qui ne présente aucune difficulté en raison de la convergence absolue de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t$. Pour tout entier $n > A$, on a, en vertu de (2) :

$$\left| \Gamma(z) - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^\alpha \left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) |t^{z-1}| \, \mathrm{d}t \, +$$

$$+ \left| \int_\alpha^A \left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right| + \int_A^{+\infty} (\mathrm{e}^{-t} - \psi_n(z)) |t^{z-1}| \, \mathrm{d}t \, ,$$

où on a posé : $\psi_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ si $t \leqslant n$ et $\psi_n(t) = 0$ si $t > n$. On peut donc majorer $\left| \Gamma(z) - \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t \right|$ par

$$\int_0^\alpha e^{-t}|t^{z-1}|\mathrm{d}t + \left|\int_\alpha^A \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1}\,\mathrm{d}t\right| +$$
$$+ \int_A^{+\infty} e^{-t}|t^{z-1}|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + |I_n| + \frac{\varepsilon}{3},$$

en désignant par $I_n$ l'intégrale $\int_\alpha^A \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1}\,\mathrm{d}t$. Mais on a vu plus haut que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut donc trouver $N \in \mathbb{N}$ $(N > A)$ tel que $|I_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n \geqslant N$. Alors pour $n \geqslant N$, on a :

$$\left|\Gamma(z) - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre (3). On a vu l'importance du rôle joué par la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ et par les inégalités (2) qu'il est toujours possible de renforcer si l'on veut démontrer « directement » que $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'intérêt de la relation (3) provient du fait que, pour $z \in U$ fixé, et $n \in \mathbb{N}^*$ donné, l'intégrale $J_n(z) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ est facile à calculer par des intégrations par parties successives. Par le changement $t = nu$, $J_n(z)$ se ramène à $n^z \int_0^1 (1-u)^n\,u^{z-1}\,\mathrm{d}u$ où figure *l'intégrale eulérienne de première espèce*

$$B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,\mathrm{d}u \tag{4}$$

qui converge absolument pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$ et $\mathrm{Re}\,(q) > 0$.

Pour $z \in U$, on a donc $J_n(z) = n^z B(z, n+1)$. Or

$$\int_0^1 (1-u)^n\,u^{z-1}\,\mathrm{d}u = \left|(1-u)^n\,\frac{u^z}{z}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{u^z}{z}\,n(1-u)^{n-1}\,(-\mathrm{d}u),$$

c'est-à-dire
$$B(z, n+1) = \frac{n}{z}\,B(z+1, n).$$

En opérant $n$ fois on arrive à $B(z+n, 1) = \dfrac{1}{z+n}$, d'où finalement $J_n(z) = \dfrac{n^z \times n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

C'est ainsi que la relation (3) est équivalente, **pour $z \in U$,** à :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^z\,n!}{z(z+1)\dots(z+n)} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)}, \tag{5}$$

formule due à Euler.

L'avantage de cette écriture est qu'elle permet de prolonger la fonction $\Gamma$ à des valeurs de $z$ pour lesquelles l'intégrale ne converge pas. De manière précise nous verrons plus loin (cf. § IX.6) que pour $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$, la suite de terme général $u_n(z) = \dfrac{n^z\, n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ converge vers une limite finie non nulle que l'on désignera encore par la notation $\Gamma(z)$. C'est donc sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ qu'est définie la véritable **fonction gamma** qui joue un rôle important en Analyse et dont la restriction à $U$ peut s'écrire sous forme d'intégrale. Pour $z \in U$, il est immédiat que $z + 1 \in U$, et

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)} \tag{6}$$

et nous verrons que le prolongement de $\Gamma$ à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_-$ continue à satisfaire cette relation fonctionnelle.

***Exercice 1 :*** Etudier s'il est possible de donner un sens aux intégrales suivantes :

*a)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|\sin x|\,(1+\mathrm{e}^x)}}$ *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{|\sin x^\alpha|^\beta}$ où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $f(x) \downarrow 0$.

*c)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, où $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,|\mathrm{Log}\,(x-n)|$ si $x \in\, ]n, n+1[$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{N}$.

***Exercice 2 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue,* avec $f(0) \neq 0$, pour laquelle il existe $A > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $|f(x)| \leq A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\alpha$ un réel $> 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} f(0)\frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha}$.

***Exercice 3 :*** Soit $s$ réel $> 0$ et $\lambda$ réel $> 0$. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 (1-t^s)^\lambda\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{s}\,\Gamma\left(\frac{1}{s}\right)\lambda^{-\frac{1}{s}}$.

***Exercice 4 :*** Soit $p$ un réel $> 1$ et $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions localement bornées intégrables telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g|^{\frac{p}{p-1}}$ convergent. Montrer que l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que la fonction : $x \mapsto I(x)$ est continue (référence : Titchmarsch).

*Indication :* Majorer $|I(x+h) - I(x)|$ en utilisant l'inégalité de Hölder.

***Exercice 5 :*** Soit $p$ un réel $> 1$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p$ converge. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{1+(x-t)^2}$ converge et que la fonction $x \mapsto I(x)$ est continue.

*Indication :* Ecrire $1 + (x-t)^2 = ([1+(x-t)^2]^{1/2})^2$ et utiliser l'inégalité de Hölder (Titchmarsch).

***Exercice 6 :*** Soit $p$ un réel $\geq 1$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p$ converge. Montrer : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

***Exercice 7 :*** Soit $p$ un réel $> 1$ et $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p$ converge. Montrer que les fonctions $g$ et $h$ suivan...

$g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sont telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g|^p$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h|^p$ convergent (Hardy).

**Exercice 8** (*parties finies d'intégrales,* d'après Ulm 65) : On note $\gamma$ la constante d'Euler, et on rappelle que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

*a*) Soit $A$ réel $> 0$ et $f : [0, A] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ une fonction continue telle que $f'(0)$ existe. Pour $0 < \varepsilon < A$, on considère l'intégrale $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^A \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ unique tel que $I(\varepsilon) + a \operatorname{Log} \varepsilon$ ait une limite quand $\varepsilon \overset{>}{\longrightarrow} 0$. Cette limite sera appelée « la *partie finie* de $\displaystyle\int^A \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour la borne d'intégration 0 » et notée $F\displaystyle\int^A \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

$a_1$) Pour $\lambda > 0$ comparer les nombres $F\displaystyle\int^A \dfrac{f(\lambda t)\,\mathrm{d}t}{t}$ et $F\displaystyle\int^{\lambda A} \dfrac{f(s)\,\mathrm{d}s}{s}$.

$a_2$) Pour $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ exprimer $F\displaystyle\int^A \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ par une intégrale absolument convergente.

$a_3$) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, telle que $f'(0)$ existe et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{f(t)\,\mathrm{d}t}{t}$ converge. Définir $F\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et vérifier $F\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = F\displaystyle\int^A \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \displaystyle\int_A^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ $(A > 0)$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t) - f(\lambda t)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $\lambda > 0$.

*b*) Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n(z) = \displaystyle\int_0^1 (1 - zt)^n\,\mathrm{d}t$, $C_n(z) = F\displaystyle\int^1 \dfrac{(1 - zt)^n\,\mathrm{d}t}{t}$. Calculer $B_n(z)$ et $C_n(z)$.

En supposant $|1 - z| < 1$, en déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n \to \infty} F\int^n \left(1 - z\frac{t}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

*c*) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1 - z| < 1$. Chercher $\displaystyle\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1 - |1 - zt|}{t}$ et en déduire l'existence de $\alpha > 0$ tel que $(\forall t \in [0, 1])$ $1 - |1 - zt| \geqslant \alpha t$. Comme $(\forall x \in \mathbb{R})$ $x \leqslant \mathrm{e}^{x-1}$, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall t \in [0, n])$ $\left|1 - \dfrac{zt}{n}\right|^n \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$.

$d_1$) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-zt}}{t}\,\mathrm{d}t$ est-elle absolument convergente ?

$d_2$) Si $|1 - z| < 1$ montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} F\int^n \left(1 - \frac{zt}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = F\int^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{t}\,\mathrm{d}t$ (étudier séparément $F\displaystyle\int^1$ et $\displaystyle\int_1^{\infty}$).

$d_3$) En déduire pour $z$ vérifiant $d_1$) la valeur de l'expression $F\displaystyle\int^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-zt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

*e*) Montrer pour $y \in \mathbb{R}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que

$$F\int^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} F\int^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}y)t}}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Quelle est leur valeur commune ?

*f*) Soit à nouveau $f : [0, A] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et telle que $f'(0)$ existe. On pose $F\displaystyle\int^A \dfrac{f(t)}{t}\operatorname{Log} t\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \overset{>}{\to} 0}\left(b\operatorname{Log}^2 \varepsilon + \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t}\operatorname{Log} t\,\mathrm{d}t\right)$ où $b$ est une constante convenablement choisie. Reprendre les questions analogues à $a_1$), $a_2$), $a_3$) et calculer $K_n = \int_0^1 (1-t)^n \operatorname{Log} t \, dt$ et $L_n = F \int^1 (1-t)^n \frac{\operatorname{Log} t}{t} dt$. En déduire, en s'inspirant de $b$) et $e$) la valeur de $F \int^{+\infty} e^{-t} \frac{\operatorname{Log} t}{t} dt$.

## § VIII.5 *INTÉGRALES A PARAMÈTRES*

$K$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous nous proposons dans ce § d'étudier des fonctions du type $\Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_a^b f(x, t) \, dt$, où l'application $f : \Lambda \times I \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ est définie sur $\Lambda \times I$ ($\Lambda$ désignant une certaine partie de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$), $I$ désignant l'un des intervalles d'extrémités $a$ et $b$, avec $(a, b) \in \bar{\mathbb{R}}^2$, $a < b$) et telle que, pour tout $x \in \Lambda$, l'intégrale $\int_a^b f(x, t) \, dt$ ait un sens, soit comme intégrale définie *ordinaire*, soit comme *intégrale généralisée.*

Pour la suite de ce §, il est utile d'introduire la notion de dérivées partielles.

**Dérivées partielles**

Soit $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$), et des intervalles non triviaux $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de $\mathbb{R}$. On considère l'application $f : P \longrightarrow K$, où $P$ désigne le *pavé* $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Nous dirons que $f$ admet en $a \in P$ une **dérivée partielle en la *i*-ième variable** (ou encore une $i$-ième dérivée partielle) ssi la fonction : $I_i \longrightarrow K$, $t \mapsto f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ où $x_k(t) = a_k$ pour $k \neq i$ et $x_i(t) = t$ (pour $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$) **est dérivable en $a_i$.** Si c'est le cas, cette dérivée s'appelle *dérivée partielle i-ième au point a* (ou : dérivée partielle en $a$ en la $i$-ième variable). Lorsque la variable qui décrit $P$ a reçu une désignation « générique », par exemple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cette $i$-ième dérivée partielle se note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$. Lorsque $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour tout $a \in P$, on définit de la sorte une application $P \longrightarrow K$, $a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, appelée ***i*-ième dérivée partielle de *f*,** et notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ lorsque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désigne la variable.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $P$ elle peut, à son tour, admettre des dérivées partielles en $a$ qu'on pourra noter, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a)$ ou $f''_{x_i x_j}(a)$ (voire, pour simplifier, si $j = i$ : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$). On pourra de même définir des dérivées partielles d'ordre supérieur en faisant attention à l'ordre des

### Intégrales sur un intervalle compact

Soit à nouveau $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, le pavé $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, et $f : P \longrightarrow K$. Nous dirons que $f$ est **séparément continue en la $i$-ième variable** ($i \in [\![1, n]\!]$) ssi pour *tous* $(a_k)_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} = a^{(i)} \in \prod_{k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} I_k$, la *fonction partielle* $f_{a^{(i)}} : I_i \longrightarrow K$, $t \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, t, \ldots, a_n)$ est *continue* ($f_{a^{(1)}} : t \mapsto f(t, a_2, \ldots, a_n)$).

De même, en supposant $I_i$ *compact,* nous dirons que $f$ est **séparément bornée intégrable en la $i$-ième variable** ssi *toutes* les fonctions partielles $f_{a^{(i)}}$ définies ci-dessus (avec $i$ fixé) sont *bornées intégrables.* Enfin, si $I_i = [\alpha_i, \beta_i[$ avec $-\infty < \alpha_i < \beta_i \leqslant +\infty$, nous dirons que $f$ est **séparément localement bornée intégrable** en la $i$-ième variable ssi *toutes* ces fonctions partielles $f_{a^{(i)}}$ sont localement bornées intégrables sur $[\alpha_i, \beta_i[$.

**Théorème VIII.5.1**

*Soit deux réels a, b* $(a < b)$, $\Lambda$ *un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$, *et* $\lambda \in \mathrm{Adh}_{\bar{\mathbb{R}}}(\Lambda)$. *On donne* $f : \Lambda \times [a, b] \longrightarrow K$ *et* $\varphi : [a, b] \longrightarrow K$ *vérifiant les conditions suivantes :*
*a)* $f$ *est* bornée ; *b)* $f$ est *séparément bornée intégrable en la* 2^e^ *variable ; c)* $(\forall t \in [a, b])\ f(x, t) \underset{x \to \lambda}{\longrightarrow} \varphi(t)$. *Alors* $\varphi$ *est bornée intégrable, et* $\displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to \lambda}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

*Démonstration :*

Soit $(x_k)_{k \geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\Lambda$, de limite $\lambda$. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $g_k$ la fonction : $[a, b] \longrightarrow K$, $t \mapsto f(x_k, t)$. La suite $(g_k)$ est *u-bornée* et converge simplement vers $\varphi$ sur $[a, b]$. Par hypothèse chaque $g_k$ est bornée intégrable. Donc (cf. la fin du § VII.3), $\varphi$ est bornée intégrable, et $\displaystyle\int_a^b g_k(t)\,\mathrm{d}t \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Comme c'est vrai avec *toute* suite $(x_k)$ de $\Lambda$ tendant vers $\lambda$ on a (cf. théorème IV.1.1)

$$\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to \lambda}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,. \quad \blacksquare$$

**Corollaire**

*Donnons a, b,* $\Lambda$ *et f comme au début du théorème* VIII.5.1. *Supposons ici f* bornée, séparément continue en sa 1^re^ variable *et* séparément bornée intégrable en sa 2^e^ variable. *Alors la fonction :* $\Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$ *est* ***continue.***

***Remarque 1 :*** Si $\Lambda$ est un intervalle non trivial quelconque de $\mathbb{R}$, dire que la fonction $F : \Lambda \longrightarrow K$ est continue revient à dire que, pour *tout* sous-intervalle *compact* $J$ de $\Lambda$, la restriction $F|_J$ est continue.

hypothèses du corollaire ci-dessus sont satisfaites pour *tout sous-intervalle compact* de $\Lambda$ sans l'être nécessairement sur $\Lambda$, la conclusion de ce corollaire reste néanmoins valide.

***Remarque 2 :*** Le théorème VIII.5.1 s'applique *a fortiori* au cas d'une suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant simplement vers $\varphi$ quand $k \longrightarrow +\infty$, mais il faudra toujours prendre garde au respect de la condition *a*). Si par exemple $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} k \sin^{k-1} t \cos t \, \mathrm{d}t \underset{k \longrightarrow \infty}{\not\longrightarrow} 0$ alors que $f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, c'est parce que la fonction $f : \mathbb{N}^* \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(k, t) \mapsto k \sin^{k-1} t \cos t$ n'est pas bornée (vérifier que le maximum de $f_k$ tend vers $+\infty$ quand $k \longrightarrow \infty$).

**THÉORÈME VIII.5.2**

> *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, $\Lambda$ *un intervalle non trivial de* $\mathbb{R}$, *et* $f : \Lambda \times [a, b] \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ *vérifiant les conditions suivantes :*
>
> a) $f$ *est* séparément bornée intégrable *sur* $[a, b]$ *en la variable* $t$,
>
> b) *la dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *existe sur* $\Lambda \times [a, b]$ *et y* ***est bornée.***
>
> *Alors :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est séparément bornée intégrable sur* $[a, b]$ *en la variable* $t$, *la fonction* $F : \Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t) \, \mathrm{d}t$ *est* dérivable, *et*
>
> $$(1) \qquad \boxed{(\forall x \in \Lambda) \qquad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, \mathrm{d}t} \, .$$

La relation (1) est appelée **formule de dérivation sous le signe somme.**

*Démonstration :*

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq M$ pour $(x, t) \in \Lambda \times [a, b]$. Fixons $x_0 \in \Lambda$. Pour $x \in \Lambda \setminus \{x_0\}$ et $t \in [a, b]$, le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction partielle $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ entre $x_0$ et $x$ donne : $|f(x, t) - f(x_0, t)| \leq M |x - x_0|$. Notons $\Lambda_0^+ = ]x_0, +\infty[ \cap \Lambda$ et $\Lambda_0^- = ]-\infty, x_0[ \cap \Lambda$. Si $\Lambda_0^+ \neq \varnothing$, le théorème VIII.5.1 appliqué à la fonction $\Lambda_0^+ \times [a, b] \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto \dfrac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0}$ montre que la fonction $[a, b] \longrightarrow K$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)$ est bornée intégrable, puis que $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \displaystyle\int_a^b \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} \, \mathrm{d}t \underset{x \longrightarrow x_0}{\underset{>}{\longrightarrow}} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \, \mathrm{d}t$, donc $F'_d(x_0)$ existe et vaut $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \, \mathrm{d}t$. De même si $\Lambda_0^- \neq \varnothing$, on voit que

$F'_g(x_0)$ existe et a la même valeur. En définitive $F'(x_0)$ existe et vaut $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,\mathrm{d}t$, et cela est vrai $\forall x_0 \in \Lambda$. ■

***Remarque 3 :*** Une fonction $g : I \longrightarrow K$, où $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, est dérivable ssi pour *tout* sous-intervalle *compact* $J$ de $I$, la restriction $f|_J$ l'est. Donc si les hypothèses du théorème VIII.5.2 sont satisfaites avec *tout sous-intervalle compact de* $\Lambda$ à la place de $\Lambda$, les conclusions de ce théorème et, en particulier, la formule (1) subsistent. Supposons ces conditions réalisées sur $\Lambda \times ]a, b[$, l'hypothèse $a$) étant inchangée. Remplaçons $f$ par $\tilde{f}$, égale à $f$ sur $\Lambda \times ]a, b[$ et à 0 sur $\Lambda \times \{a, b\}$. On peut reprendre la démonstration du théorème VIII.5.2 avec $\tilde{f}$ à la place de $f$, et $g_x : [a, b] \longrightarrow K$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ si $t \in ]a, b[$, $a \mapsto 0$, $b \mapsto 0$ à la place de $\frac{\partial f}{\partial x}$. On voit que $F'(x)$ existe et vaut $\int_a^b g_x(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \Lambda$. Mais, pour chaque $x \in \Lambda$, l'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ converge (cela relève du cas trivial) et sa valeur est $\int_a^b g_x(t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, le théorème VIII.5.2 reste encore vrai dans ce cas, avec $]a, b[$ à la place de $[a, b]$.

***Exemple 1 :*** Pour $x \in ]-1, +\infty[$ proposons-nous de calculer

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Log}\,(1 + x \sin^2 t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

ce qu'on ne sait pas faire par utilisation d'une primitive de $t \mapsto \mathrm{Log}\,(1 + x\sin^2 t)$. En revanche il est clair que, pour $\varepsilon$ réel $> 0$ $(\varepsilon < 1)$, et $\beta$ réel $> -1 + \varepsilon$ la fonction $f : (x, t) \mapsto \mathrm{Log}\,(1 + x \sin^2 t)$ vérifie les hypothèses du théorème VIII.5.2 sur $[-1 + \varepsilon, \beta] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin^2 t}{1 + x \sin^2 t}$. En vertu de la remarque 3, la fonction $F$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$ où sa dérivée est donnée par $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}t}{1 + x\sin^2 t}$. On voit d'abord que $F'(0) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ et pour $x \neq 0$ le calcul de $F'(x)$ est facile par le changement de variable $u = \mathrm{tg}\, t$. On obtient

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1 + u^2)(1 + (1 + x)\,u^2)} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + (1 + x)\,u^2} \\ &= \frac{\pi}{2x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x}}\right). \end{aligned}$$

C'est une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ et de primitive facile à trouver, en écrivant

$$F'(x) = \frac{\pi}{2x}\,\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\,,$$

d'où $$F(x) = \pi \operatorname{Log}\,(1+\sqrt{1+x}) - \pi \operatorname{Log} 2\,.$$

***Exemple 2*** (intégrale de Gauss) : Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$. Ici non plus, on ne connaît pas de primitive « usuelle » de $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Mais les hypothèses du théorème VIII.5.2 étant satisfaites sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right] dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2x\,e^{-x^2}J(x)\,,$$

en posant

$$J(x) = \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}\,du\,, \quad \text{d'où} \quad F'(x) = -2\,e^{-x^2}\,G(x)\,,$$

avec $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$. Cette relation demeure vraie pour $x = 0$ et s'écrit

$$(\forall x \geqslant 0) \quad F'(x) = -2\,G(x)\,G'(x)\,, \quad \text{d'où} \quad F(x) + G^2(x) = \text{Cte}\,,$$

la valeur de cette constante étant $F(0) + G^2(0) = F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Mais une application immédiate du théorème VIII.5.1 montre que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $G^2(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$. Or il est clair que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$, cette dernière intégrale est donc convergente et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (cf. exercice 7 du § VIII.3).

***Exemple 3 :*** Soit $f_0 : \mathbb{R}_+^* \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(x, t) \mapsto \sin^x t$.

Cette fonction est séparément continue en chaque variable, donc $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_0(x, t)\,dt$ est bien définie. Proposons-nous de montrer que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, montrons d'abord que $\dfrac{\partial^q f}{\partial x^q}(x, t)$ *existe* sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et a pour expression $f_0(x, t) \times (\operatorname{Log} \sin t)^q$ : il suffi

$q$ fois la fin de la remarque 3. Fixant $x > 0$, on s'aperçoit que $f_0(x, t)(\operatorname{Log} \sin t)^q \underset{t \to 0}{\underset{>}{\sim}} t^x(\operatorname{Log} t)^q \underset{t \to 0}{\underset{>}{\longrightarrow}} 0$. Il est donc naturel de définir $f_q$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f_q(x, t) = (\sin^x t)(\operatorname{Log} \sin t)^q$ pour $t > 0$ et $f_q(x, 0) = 0$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour $x \geqslant \varepsilon$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on peut *majorer* $\left|\frac{\partial^q f}{\partial x^q}(x, t)\right|$ par $(\sin t)^\varepsilon\, |\operatorname{Log} \sin t|^q$, donc par

$$M_\varepsilon = \operatorname*{Max}_{t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]} (\sin^\varepsilon t\, |\operatorname{Log} \sin t|^q)\,,$$

ce nombre $M_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ étant bien défini du fait que $\sin^\varepsilon t\, |\operatorname{Log} \sin t|^q$ se prolonge continûment en 0 par 0. En combinant le théorème VIII.5.2 et la remarque 3, une récurrence immédiate prouve que $F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ses dérivées étant données, pour $q \in \mathbb{N}^*$, par : $F^{(q)}(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x t\,(\operatorname{Log} \sin t)^q\, \mathrm{d}t$.

## Intégrales généralisées à paramètres

On se donne $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, avec $a < b$.

**Définition VIII.5.1**

*Soit $\Lambda$ un ensemble non vide et $f : \Lambda \times [a, b[ \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ séparément* localement bornée intégrable en la variable *$t$ sur $[a, b[$. On dit que :*

a) *L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t$ est* ***uniformément convergente*** *sur $\Lambda$ ssi elle vérifie la propriété* (I) *ci-après, appelée* ***critère de Cauchy uniforme sur $\Lambda$ :***

(I) $\forall \varepsilon$ *réel* $> 0 \quad \exists c \in [a, b[ \;\mid\; \forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \quad (c \leqslant X < Y < b) \Rightarrow \left((\forall x \in \Lambda) \qquad \left|\displaystyle\int_X^Y f(x, t)\, \mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\right)$.

b) *L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t$ est* ***normalement convergente*** *sur $\Lambda$ ssi il existe $\varphi : [a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornée intégrable telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi$ converge et que $(\forall (x, t) \in \Lambda \times [a, b[)\ \ |f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$.*

Il est clair que si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t$ *converge uniformément* sur $\Lambda$, alors **chaque** intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t$, où $x$ est fixé, converge puisque, à cause de (I), lorsque $x$ est fixé, il est évident que le critère de Cauchy (théorème VIII.3.4) est satisfait par cette intégrale. On obtient donc une fonction $F : \Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t$ qu'il s'agit d'étudier.

**PROPOSITION VIII.5.1**

*Avec les notations de la définition* VIII.5.1, *si l'intégrale* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ **converge normalement** *sur* $\Lambda$, *alors elle converge uniformément sur* $\Lambda$.

*Démonstration :*

Soit $\varphi : [a,b[ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant la condition de convergence normale. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $c \in [a,b[$ tel que, pour $(X,Y) \in [a,b[ \times [a,b[$ et $c \leqslant X < Y$, on ait $\int_X^Y \varphi \leqslant \varepsilon$ (critère de Cauchy pour l'intégrale *convergente* $\int_a^b \varphi$). Alors, pour $x \in \Lambda$ et $(X,Y) \in [a,b[^2$ $(c \leqslant X < Y)$, on a :

$$\left| \int_X^Y f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_X^Y |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_X^Y \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Bien entendu, *la réciproque de la proposition* VIII.5.1 *est grossièrement fausse.* On a vu par exemple au § VIII.3 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente. Si on pose $f(x,t) = \frac{\sin t}{t}$ (prolongée par continuité pour $t = 0$) avec $(x,t) \in \Lambda \times \mathbb{R}_+$, il est clair que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément convergente et cependant elle n'est pas normalement convergente, car la convergence normale sur $\Lambda$ implique, pour chaque $x \in \Lambda$, la convergence **absolue** de l'intégrale $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, ce qui n'est pas le cas ici.

**THÉORÈME VIII.5.3**

*Soit* $\Lambda$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $\omega \in \mathrm{Adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(\Lambda)$. *On donne* $f : \Lambda \times [a,b[ \longrightarrow K$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(I) $f$ *est* séparément localement bornée intégrable en la 2^e^ variable *sur* $[a,b[$.

(II) *L'intégrale* $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ **converge uniformément** *sur* $\Lambda$,

(III) *Pour tout* $c \in [a,b[$, $f|_{\Lambda \times [a,c]}$ *est* **bornée,**

(IV) *On a* $\varphi : [a,b[ \longrightarrow K$ *telle que* $\forall t \in [a,b[$, $f(x,t) \underset{x \to \omega}{\longrightarrow} \varphi(t)$. *Alors* $\varphi$ *est localement bornée intégrable sur* $[a,b[$, *l'intégrale* $\int_a^b \varphi$ *converge et*

(2) $$\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \underset{x \to \omega}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t .$$

*Démonstration :*

*a*) Le théorème VIII.5.1, appliqué à tout compact $[a,c]$, avec $c \in [a,b[$, montre déjà que $\varphi$ est localement bornée intégrable.

*b*) Montrons que l'intégrale $\int_a^b \varphi$ vérifie le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis

$c \in [a, b[$ tel que $\left| \int_X^Y f(x,t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$ pour tous $x \in \Lambda$ et $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \leqslant X < Y < b$.

Fixant alors $X$ et $Y$, et appliquant à $f$ le théorème VIII.5.1 sur $[X, Y]$, on voit que $\int_X^Y f(x,t)\,dt \underset{x \to \omega}{\longrightarrow} \int_X^Y \varphi(t)\,dt$. Par passage des inégalités larges à la limite, il s'ensuit que $\left| \int_X^Y \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$, d'où la convergence de $\int_a^b \varphi$.

*c*) Il reste à prouver (2). Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $c \in [a, b[$ comme dans *b*) ci-dessus. Laissant fixes $X$ et $x$, et passant à la limite pour $Y \xrightarrow{<} b$, on voit d'abord que $\left| \int_X^b f(x,t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in \Lambda$. Par ailleurs, le *b*) a montré que $\left| \int_X^Y \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$ pour $c \leqslant X < Y < b$. Prenant $X = c$ et passant à la limite pour $Y \xrightarrow{<} b$, on en déduit $\left| \int_c^b \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$. D'autre part le théorème VIII.5.1 montre que $\int_a^c f(x,t)\,dt \underset{x \to \omega}{\longrightarrow} \int_a^c \varphi(t)\,dt$.

Soit $V$ voisinage de $\omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\left| \int_a^c f(x,t)\,dt - \int_a^c \varphi(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon$ pour $x \in V$. Alors, si $x \in V$, on a :

$$\left| \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b f(x,t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_a^c \varphi(t)\,dt - \int_a^c f(x,t)\,dt \right| + \\ + \left| \int_c^b \varphi(t)\,dt \right| + \left| \int_c^b f(x,t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE**

*En conservant les notations du théorème* VIII.5.3, *et les hypothèses* (I), (II), (III) *de ce théorème, supposons en outre $f$* ***séparément continue en sa première variable sur*** *$\Lambda$. Alors $F : \Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est* ***continue*** *sur $\Lambda$.*

**THÉORÈME VIII.5.4**

*Soit $\Lambda$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : \Lambda \times [a, b[ \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto f(x,t)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(I) *$f$ est* séparément localement bornée intégrable en *$t$ sur $[a, b[$, et chaque intégrale* $\int_a^b f(x,t)\,dt$ $(x \in \Lambda)$ converge.

(II) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *existe sur $\Lambda \times [a, b[$ et reste* ***bornée*** *sur tout ensemble $\Lambda \times [a, c]$, où $c \in [a, b[$.*

(*En vertu du théorème* VIII.5.2, *les hypothèses* (I) *et* (II) *entraînent déjà que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est* séparément localement bornée intégrable en *$t$ sur $[a, b[$*).

(III) *L'intégrale* $\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ ***converge uniformément*** *su*[illegible] *fonction* $F : \Lambda \longrightarrow K,\ x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est* ***dérivable,*** *et*

(3) $$(\forall x \in \Lambda) \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

*Démonstration :*

Fixons $x_0 \in \Lambda$. Pour $(x,t) \in (\Lambda \setminus \{x_0\}) \times [a,b[$, posons :

$$g(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_0,t)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Dans l'énoncé du théorème VIII.5.3, remplaçons $\Lambda$ par $\Lambda \setminus \{x_0\}$, $\omega$ par $x_0$ et $f$ par $g$ : les hypothèses (I) et (III) du théorème sont satisfaites (pour vérifier (III), soit $M \in \mathbb{R}_+$ un majorant de $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ sur $\Lambda \times [a,c]$ ; le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction partielle $\lambda \mapsto f(\lambda,t)$ entre $x_0$ et $x$ pour $t$ fixé dans $[a,c]$ montre que $|g(x,t)| \leqslant M$). De même l'hypothèse (IV) du théorème VIII.5.3 est satisfaite avec $\varphi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)$. Pour pouvoir appliquer ce théorème il ne reste plus à vérifier que l'hypothèse (II), c'est-à-dire la convergence uniforme de l'intégrale $\int_a^b g(x,t)\,\mathrm{d}t$ sur $(\Lambda \setminus \{x_0\}) \times [a,b[$.

Pour cela, posons $F_X(\lambda) = \int_a^X f(\lambda,t)\,\mathrm{d}t$ ($\lambda \in \Lambda$, $X \in [a,b[$). Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $c \in [a,b[$ tel que $\left|\int_X^Y \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ pour tous $\lambda \in \Lambda$ et $(X,Y) \in [a,b[^2$ tels que $c \leqslant X < Y < b$. Alors si $x \in \Lambda \setminus \{x_0\}$ et $c \leqslant X < Y < b$, on a :

$$\int_X^Y (f(x,t) - f(x_0,t))\,\mathrm{d}t = |F_Y(x) - F_X(x) + (F_X(x_0) - F_Y(x_0))|\,.$$

Mais $F_X$ et $F_Y$ sont dérivables sur $\Lambda$, de dérivées $\int_a^X \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^Y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ (c'est le théorème VIII.5.2 qui l'affirme). Appliquons le théorème des accroissements finis à $F_Y - F_X$ entre $x_0$ et $x$. Cela donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} |F_Y(x) - F_X(x) - (F_Y(x_0))| &\leqslant |x - x_0| \sup_{\lambda \in \Lambda,\, |\lambda - x_0| \leqslant |x - x_0|} \left|\int_X^Y \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda,t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \varepsilon\,|x - x_0|\,. \end{aligned}$$

On en déduit $\left|\int_X^Y g(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$, ce qui établit la convergence uniforme souhaitée.

Finalement le théorème VIII.5.3 s'applique, et donne :

$$G(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \int_a^b \left(\lim_{x \to x_0} g(x,t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t. \quad \blacksquare$$

Bien sûr le théorème s'étend à des intégrales généralisées sur un intervalle ouvert $]a,b[$ en considérant séparément $\int_a^c$ et $\int_c^b$, où $c \in\ ]a,b[$ est fixé.

***Remarque 4 :*** Dans les théorèmes VIII.5.3 et VIII.5.4, c'est l'hypothèse de *convergence uniforme* qui se révèle la plus importante, les autres hypothèses étant, la plupart du temps, bien plus faciles à vérifier et quasiment indispensables.

***Exemple 4 :*** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos \lambda t \, dt$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, t) \mapsto e^{-t^2} \cos \lambda t$ est séparément continue en $\lambda$ et en $t$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos \lambda t \, dt$ converge *normalement* sur $\mathbb{R}$, car on peut toujours majorer $|\cos \lambda t|$ par 1, et que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. Appelons $I$ cette dernière intégrale (qui est égale à $F(0) > 0$). La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et vaut $-\lambda \, e^{-t^2} \sin \lambda t$, et il est clair que cette fonction reste, pour tout $A > 0$, *bornée* sur $[-A, A] \times \mathbb{R}_+$ (en effet $\left| \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) \right| \leqslant A \, e^{-t^2} \leqslant A$). Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} A \, e^{-t^2} dt$ converge ; on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) \, dt$ converge *normalement* sur $[-A, A]$, donc converge uniformément sur $[-A, A]$. Le théorème VIII.5.4 s'applique donc : sur $[-A, A]$, $F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} t \, e^{-t^2} \sin \lambda t \, dt$, et comme $A > 0$ est arbitraire, cette égalité est vraie pour $\lambda \in \mathbb{R}$. En intégrant par parties, on trouve alors :

$$
\begin{aligned}
F'(\lambda) &= \int_0^{+\infty} (-2t \, e^{-t^2}) \frac{1}{2} \sin \lambda t \, dt \\
&= \left| \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin \lambda t \right|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda \, e^{-t^2} \cos \lambda t \, dt = \frac{-\lambda}{2} F(\lambda) .
\end{aligned}
$$

De cette *équation différentielle*

$$
F'(\lambda) = -\frac{\lambda}{2} F(\lambda) \tag{4}
$$

jointe à la *condition initiale* $F(0) = I$, on déduit facilement : $F(\lambda) = I \, e^{-\lambda^2/4}$, et en adoptant la valeur de $I$ trouvée dans l'exemple 2 précédent, on arrive enfin à

$$
F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos \lambda t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\lambda^2/4} .
$$

***Exemple 5 :*** Proposons-nous de retrouver l'intégrale de Gauss $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en partant de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$, où $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est séparément continue en $x$ et en $t$. $(\forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2)$ on a : $0 \leqslant f(x, t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x, t) \, dt$ converge *normalement* sur $\mathbb{R}$. Il est de plus évident que, pour $x \geqslant 0$,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x}, \quad \text{d'où} \quad F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Examinons maintenant la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$. Sur $(\mathbb{R}_+)^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\,\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$ existe, est séparément continue en $x$ et en $t$, et bornée. Pour tout $\alpha > 0$, on a : $(\forall (x,t) \in [\alpha, +\infty[ \times \mathbb{R}_+)\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha(1+t^2)}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\alpha, +\infty[$. Le théorème VIII.5.4 s'applique pour $A = [\alpha, +\infty[$ et (3) s'écrit :

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad x > 0\,.$$

Le changement $y = t\sqrt{x}$ montre que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{I}{\sqrt{x}}$, avec $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$. Donc $F$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation :

$$F'(x) = -I\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,. \tag{5}$$

De plus une application immédiate du corollaire du théorème VIII.5.3 montre que $F$ est continue en 0. Comme $F(0) = \frac{\pi}{2}$, on a $F(x) \underset{x \overset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, et avec (5) :

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - I\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \quad \text{pour} \quad x > 0\,.$$

En prenant la limite pour $x \longrightarrow +\infty$, on obtient $\frac{\pi}{2} = I\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$. Mais le changement $u = v^2$ dans l'intégrale donne $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = 2I$. Finalement on retrouve $I^2 = \frac{\pi}{4}$, d'où $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et on remarque également que $\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, ce qui, joint à la relation (1) du § VIII.4 permet le calcul de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\dots\,.\,(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$.

***Exemple 6 :*** Une autre intégrale qu'on rencontre fréquemment est $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (cf. exercice 19 du § VIII.3). Nous allons la retrouver à partir de $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Nous noterons pour simplifier $s$ la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $s(0) = 1$ dont on sait déjà qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}s(t)$ est séparé en $x$ et en $t$ et bornée sur $\mathbb{R}_+^2$. Pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} s(t)\, dt$ est absolument convergente (car $|s(t)| \leqslant 1$). Pour $x = 0$ elle est semi-convergente : posons $J = F(0)$.

• Pour montrer que *$F$ est continue sur* $\mathbb{R}_+$, il suffit en vertu du théorème VIII.5.3 de prouver que l'intégrale $F(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Le deuxième théorème de la moyenne le montre immédiatement : comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} e^{-xt}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour $0 < X < Y$, et pour tout $x \geqslant 0$ :

$$\int_X^Y \frac{e^{-xt}}{t} \sin t\, dt = \frac{e^{-xX}}{X} \int_X^\xi \sin t\, dt ,$$

pour un $\xi$ convenable (dépendant de $X$ et $Y$), d'où

$$\left| \int_X^Y e^{-xt} s(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{X} \left| \int_X^\xi \sin t\, dt \right| \leqslant \frac{2}{X},$$

et l'on voit bien que si $\varepsilon$ réel $> 0$ est donné, il suffit de prendre $\frac{2}{\varepsilon} \leqslant X < Y$ pour avoir :

$$(\forall x \geqslant 0) \quad \left| \int_X^Y e^{-xt} s(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon ,$$

d'où la convergence uniforme annoncée. On déduit de cela :

$$J = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} F(x) . \tag{6}$$

• Nous allons maintenant *calculer* $F(x)$ pour $x \in ]0, +\infty[$. Il est d'abord évident que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (majorer $|F(x)|$ par $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$). La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}_+^2$ et a pour expression $-e^{-xt} \sin t$, donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}_+^2$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$ converge normalement, donc uniformément, sur tout ensemble $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$, puisque $x \geqslant \alpha \Rightarrow (\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leqslant e^{-\alpha t}$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ converge. Le théorème VIII.5.4 et la remarque 3 montrent donc que $F'(x)$ existe sur $]0, +\infty[$ où elle est donnée par :

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t\, dt = -\operatorname{Im}\left( \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\, dt \right) = \operatorname{Im}\left( \left[ \frac{e^{(-x+i)t}}{x - i} \right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \operatorname{Im}\left( \frac{-1}{x - i} \right) = \frac{-1}{x^2 + 1} \quad \text{d'où} \quad F(x) = C - \operatorname{Arc\,tg} x \quad \text{pour} \quad x > 0 .$$

Comme $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, nécessairement $C = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne l'expression simple de $F$ sur $]0, +\infty[$ :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg} x .$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre $x$ vers $0$ $(x > 0)$ pour obtenir $\boxed{J = \frac{\pi}{2}}$.
Remarquons que la convergence uniforme aboutissant à (6) aurait pu se prouver en utilisant une *intégration par parties*. Pour $0 < X < Y$, on a :

$$\int_X^Y e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{-1}{1+x^2} \left[ \frac{e^{-xt}(\cos t + x \sin t)}{t} \right]_X^Y - \int_X^Y \frac{1}{1+x^2} e^{-xt} \cdot \frac{(\cos t + x \sin t)}{t^2} \, dt ,$$

d'où
$$\left| \int_X^Y e^{-xt} s(t) \, dt \right| \leqslant \frac{4}{X} + \int_X^Y \frac{2 \, dt}{t^2} \leqslant \frac{6}{X} .$$

On n'a pas besoin ici de la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t} e^{-xt}$ et du second théorème de la moyenne, la réussite provenant du fait qu'on a remplacé une intégrale qui n'était que semi-convergente pour $x = 0$ par une autre qui converge *normalement* sur $\mathbb{R}_+$.

**Intégrales du type $\int_a^{u(x)} f(x, t) \, dt$.**

On suppose ici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$.

**THÉORÈME VIII.5.5**

*Soit $\Lambda$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : \Lambda \times [a, b] \longrightarrow K$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ **bornée**, séparément continue en $t$ sur $[a, b]$, admettant sur $\Lambda \times [a, b]$ une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ **bornée**. On donne de plus $u : \Lambda \longrightarrow [a, b]$ dérivable. Alors la fonction $\Phi : \Lambda \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_a^{u(x)} f(x, t) \, dt$ est dérivable, et sa dérivée est donnée par :*

(7) $$(\forall x \in \Lambda) \quad \Phi'(x) = \int_a^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \, dt + u'(x) \, f(x, u(x)) .$$

*Démonstration :*

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ un majorant de $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right|$ sur $\Lambda \times [a, b]$. Fixons $x_0 \in \Lambda$. Pour abréger, posons $u = u(x)$ pour $x \in \Lambda$ et $u_0 = u(x_0)$.

On a, si $x \in \Lambda$ $(x \neq x_0)$ : $\Phi(x) - \Phi(x_0) = I(x) + J(x)$, en posant :

$$I(x) = \int_a^{u_0} (f(x, t) - f(x_0, t)) \, dt \quad \text{et} \quad J(x) = \int_{u_0}^{u} f(x, t) \, dt .$$

Le théorème VIII.5.2 montre que

$$I(x) = (x - x_0) \int_a^{u_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \, dt + \rho_1(x) , \quad \text{avec} \quad \rho_1(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} o(x - x_0) .$$

Quant à $J(x)$, on peut le mettre sous la forme : $J(x) = A(x) + B(x) + C(x)$, avec

$$A(x) = \int_{u_0}^{u} (f(x, t) - f(x_0, t)) \, dt , \quad B(x) = \int_{u_0}^{u} (f(x_0, t) - f(x_0, u_0)) \, dt$$

et
$$C(x) = \int_{u_0}^{u} f(x_0, u_0) \, dt = (u - u_0) \, f(x_0, u_0) .$$

Le théorème des accroissements finis (appliqué à $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ entre $x_0$ et $x$ pour $t$ fixé) entraîne :

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| \leqslant M|x - x_0| \;, \quad \text{d'où} \quad |A(x)| \leqslant M|x - x_0|\,|u - u_0| \;,$$

d'où $A(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} o(x - x_0)$. La définition de $u'(x_0)$ prouve également que $C(x) - (x - x_0)\,u'(x_0)\,f(x_0, u_0) \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} o(x - x_0)$. Il reste à examiner $B(x)$.

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Du fait que $f$ est séparément continue en $t$, on peut choisir $\alpha > 0$ tel que $|f(x_0, t) - f(x_0, u_0)| \leqslant \varepsilon$ pour $|t - u_0| \leqslant \alpha$. Soit alors $\beta > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \beta \Rightarrow |u - u_0| \leqslant \alpha$. Pour $|x - x_0| < \beta$, il vient :

$$|B(x)| \leqslant \int_{u_0}^{u} (f(x_0, t) - f(x_0, u_0))\,\mathrm{d}t \leqslant \left| \int_{u_0}^{u} |f(x_0, t) - f(x_0, u_0)|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon\,|u - u_0|$$

et comme $u - u_0 \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} O(x - x_0)$, on voit que $B(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} o(x - x_0)$. Finalement,

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) - (x - x_0)\int_a^{u_0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,\mathrm{d}t - (x - x_0)\,u'(x_0)\,f(x_0, u_0) \underset{x \longrightarrow x_0}{\in} o(x - x_0)\,,$$

ce qui démontre (7). ■

***Exercice 1 :*** On a vu dans l'exemple 3 que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x t\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Montrer qu'en fait elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Donner un équivalent de $F$ quand $x \longrightarrow +\infty$, et trouver $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} F(x)$.

***Exercice 2 :*** Soit, pour $x$ réel $> 0$, $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2 \sin^2 t}}$.

*a*) Vérifier que $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$.

*b*) On pose $K(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}$. Montrer que :

$$J(x) - K(x) \underset{x \overset{>}{\longrightarrow} 0}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Log}\,2\,.$$

Calculer $K(t)$. En déduire que $J(t) + \mathrm{Log}\,t \underset{t \overset{>}{\longrightarrow} 0}{\longrightarrow} 2\,\mathrm{Log}\,2$ (Gauss).

***Exercice 3 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue*. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f$ converge.

*a*) Pour $a > 0$ montrer que $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie. Prouver que la fonction $I : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

*b*) Prouver que $I(a) \underset{a \overset{>}{\longrightarrow} 0}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

***Exercice 4 :*** Etudier, quand $\lambda \overset{<}{\longrightarrow} 1$, $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-\lambda^2 t)}}$.

***Exercice 5 :*** Trouver $\lim\limits_{\lambda \overset{>}{\longrightarrow} 0} F(\lambda)$, avec $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{(1+t^2)\sqrt{t^2+\lambda}}\,dt$.

***Exercice 6 :*** *a*) Pour $\alpha > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^\alpha}\,dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
*b*) Soit $I(x)$ sa valeur, et $\alpha$ fixé $> 0$. Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} xI(x)$.

***Exercice 7 :*** Soit $p$ un réel $> 1$. On pose $q = \dfrac{p}{p-1}$. On donne $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f|^p$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}$, soit l'intégrale $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\sin xt}{t}\,dt$.

*a*) Montrer qu'elle converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
*b*) On fixe $x > 0$. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$|\Phi(x+h) - \Phi(x)| \leqslant 2\int_0^{+\infty} \left| f(t)\frac{\sin\frac{th}{2}}{t}\right| dt$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} |f|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin\frac{th}{2}}{t}\right|^q dt\right)^{1/q},$$

et en déduire : $\Phi(x+h) - \Phi(x) \underset{h \to 0}{\in} O(|h|^{1/p})$.

*c*) Montrer, à l'aide d'un argument analogue à celui de *b*), que :

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \forall A > 0 \quad (\varepsilon < A) \qquad \left| \int_\varepsilon^A \frac{f(t)}{t} \sin\frac{th}{2} \cos\left(t\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) dt \right| \underset{h \to 0}{\in} O(h).$$

Déduire du *b*) et du *c*) que $\Phi(x+h) - \Phi(x) \underset{h \to 0}{\in} o(|h|^{1/p})$ (Titchmarsch).

***Exercice 8 :*** Calculer, par dérivation sous $\int$, l'intégrale de Poisson

$$I(x) = \int_0^\pi \operatorname{Log}(1 - 2x\cos t + x^2)\,dt \quad (x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1).$$

Retrouver, par une transformation simple sur $x$, le résultat de l'exemple 1.

***Exercice 9 :*** Etudier la dérivabilité (éventuellement successive) de chacune des fonctions suivantes, après avoir précisé leur ensemble de définition.

*a*) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^m \frac{\sin tx}{1+t^{2k}}\,dx \quad (m < 2k)$ *b*) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x \operatorname{Log} t}{(1+t^x)^2}\,dt$

*c*) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt^2}\,dt$ sachant que : $\exists A > 0,\ \exists B > 0 \mid \forall x \geqslant 0\ |f(x)| \leqslant A\,e^{Bx}$.

***Exercice 10 :*** Soit $a$ et $b > 0$. Montrer, en dérivant $I(x)$ sous le signe $\int$, que : si $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos xt\,dt$, alors $I(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\dfrac{t^2+b^2}{t^2+a^2}$.

***Exercice 11 :*** Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2} e^{-t}\,dt$. Par dérivation de $I(x)$ sous le signe $\int$, montrer que $I(x) = x \operatorname{Arc\,tg} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2)$.

***Exercice 12 :*** Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, avec $\operatorname{Re}(z) > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x)$ $\displaystyle\int^{+\infty} e^{ixt}$

Etudier la continuité et la dérivabilité de $F$. Trouver une relation simple entre $F$ et $F'$, et en déduire $F(x) = 2\,i\pi \exp(-xz)$.

***Exercice 13 :*** Pour $x > 0$, soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{1+t^2}\,dt$.

*a*) En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, trouver une relation simple entre $I(x)$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t(1+t^2)}\,dt$.

*b*) Montrer que $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, que $g(x) \underset{x \to 0}{\overset{>}{\longrightarrow}} 0$, que $(\forall x > 0)$ $g''(x) - g(x) = \dfrac{-\pi}{2}$. En déduire $g(x)$ et $I(x)$.

***Exercice 14 :*** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(z) \in \,]0, 1[$ et $\lambda \in \,]-\pi, \pi[$.

*a*) Prouver la convergence de $f(z, \lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{1 + t\,e^{i\lambda}}\,dt$.

*b*) Prouver que $G_z : \,]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto f(z, \lambda)$ est dérivable. En déduire que $H(z, \lambda) = e^{i\lambda z} f(z, \lambda)$ ne dépend pas de $\lambda$, et prouver enfin que $f(z, \lambda) = \dfrac{\pi\, e^{i\lambda z}}{\sin \pi z}$.

*Indication :* Utiliser, après l'avoir prouvée, la relation $\sin \lambda z H(z, \lambda) = \displaystyle\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} t^{z-1}\left[\frac{1}{1+t\,e^{-i\lambda}} - \frac{1}{1+t\,e^{i\lambda}}\right] dt = \int_{\mathrm{cotg}\,\lambda}^{+\infty} \frac{(u \sin \lambda - \cos \lambda)^z}{1+u^2}\,du$ (si $\lambda > 0$).

*c*) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^z\,dt}{1 + 2t\cos\lambda + t^2} = \frac{\pi}{\sin \lambda}\cdot\frac{\sin \lambda z}{\sin \pi z}$, et que si $a \neq 0$, avec $\mathrm{Arg}\,a \in \,]-\pi, \pi[$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}\,dt}{t+a} = \frac{\pi a^{z-1}}{\sin \pi z}$.

***Exercice 15 :*** Cet exercice suppose acquis les résultats de l'exercice 14 *c*). Soit $a > 0$, $b > 0$.

*a*) Prouver : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x^{a+b}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x^{a+b}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x^{a+b}}\,dx.$

*b*) Prouver : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x^{a+b}}\,dx = \lim_{\substack{> \\ \varepsilon \to 0}} \left[\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1 + i\varepsilon - x^{a+b}} - \int_0^{+\infty} \frac{x^{b-1}\,dx}{1 + i\varepsilon - x^{a+b}}\right]$

$$= \lim_{\substack{> \\ \varepsilon \to 0}} \frac{1}{a+b}\left[\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{a}{a+b}}\,dx}{x - (1+i\varepsilon)} - \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\frac{b}{a+b}}\,dx}{x - (1+i\varepsilon)}\right] = \frac{2\pi}{a+b}\,\mathrm{cotg}\,\frac{a\pi}{a+b}.$$

En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1 - x^{a+b}}\,dx = \frac{\pi}{a+b}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi a}{a+b} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-au} - e^{-bu}}{1 - e^{-(a+b)u}}\,du$.

*c*) En dérivant par rapport à $b$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - x^{b-1}}{1 - x^{b+1}}\,dx$, prouver $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}\,x}{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$.

*d*) Soit $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}\,x}{1-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x - 1}$ et $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}\,x}{1+x}\,dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x + 1}$. Déduire de ce qui précède : $A = \dfrac{-\pi^2}{6}$ et $B = \dfrac{-\pi^2}{12}$.

***Exercice 16 :*** Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Etudier la dérivabilité de $g$. Montrer que, si $x > 0$, $g''(x) + g(x) = \dfrac{1}{x}$. En supposant connue la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, en déduire une autre expression de $g(x)$.

***Exercice 17 :*** *a*) Pour $a > 0$ et $b > 0$, existence et calcul de

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \cos bx \, dx \quad \text{et de} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t - t\cos t}{t^3} e^{itx} \, dt .$$

*b*) Montrer que $f : ]-1, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{1 + xt} dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et donner les $f^{(n)}(0)$ $(n \in \mathbb{N})$.

***Exercice 18 :*** Si $x > 0$ on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} dt$. Etudier la dérivabilité de $f$. Montrer que $f'(x) - f(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

***Exercice 19 :*** Soit $\nu$ un réel $> 1$.

*a*) Montrer que $F_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{(1 + x^2)^\nu} dx$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad tF_\nu''(t) - 2(\nu - 1) F'(t) - tF(t) = 0 .$$

*b*) On suppose $\nu$ entier $\geqslant 2$ et on admet que $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$. Préciser $F_\nu(0)$. Montrer que $F_\nu$ est $2\nu - 1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $F_\nu^{(2\nu - 1)}(t)$ admet une limite quand $t \xrightarrow{>} 0$.

*Indication :* On a $F_\nu^{(2\nu - 1)}(t) = (-1)^\nu \int_0^{+\infty} \frac{x^{2\nu - 1} \sin tx}{(1 + x^2)^\nu} dx$ $(t > 0)$ et $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$. Montrer que $F_\nu^{(2\nu - 1)}(t) - (-1)^\nu \frac{\pi}{2} \underset{t \xrightarrow{>} 0}{\longrightarrow} 0$.

*c*) Soit $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1 + x^2} dx$ $(t > 0)$. Prouver que $\Phi$ est dérivable, que $\Phi'(t) + \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1 + x^2)} dx$, enfin, que : $\Phi''(t) - \Phi(t) = 0$. En déduire : $\Phi(t) = \pi e^{-t}$.

*d*) Déduire du *c*) que $(\forall t > 0)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1 - ix} dx = 0$, puis, que $(\forall q \in \mathbb{N}^*)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1 - ix)^q} dx = 0$.

*e*) Soit $J(t) = 2F_\nu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1 + x^2)^\nu} dx$ avec $\nu$ entier $\geqslant 2$ et $t > 0$. Déduire du *d*) que :

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} J^{(k)}(t) = 0 .$$

N.B. Supposant connue la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on en déduit $J(t) = e^{-t} Q(t)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$. On peut obtenir par le calcul des résidus la valeur exacte de $J(t)$ qui est $2\pi e^{-t} \sum_{0 \leqslant p \leqslant \nu - 1} \frac{1}{p!\, 2^{2\nu - p - 1}} \binom{2\nu - p - 2}{\nu - p - 1} t^p$.

***Exercice 20 :*** Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sa dérivée $n$-ième étant, pour tout $n$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} (\operatorname{Log} t)^n t^{x-1} dt$.

# *Chapitre IX*

# *SÉRIES NUMÉRIQUES*

Nous supposons ici acquises les notions de base sur les séries, telles qu'elles sont exposées au § II.5.

## § IX.1 *COMPARAISON DE SÉRIES À TERMES POSITIFS*

Rappelons que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à termes réels $\geqslant 0$, la suite des *sommes partielles* de la série $\sum u_n$, c'est-à-dire la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est *croissante,* et en cas de convergence de la série $\sum u_n$, le *reste d'ordre* $n$ de cette série est défini par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, somme d'une série convergente. Précisons alors le théorème II.5.3.

**THÉORÈME IX.1.1**

> *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{R}_+$, telles que $a_n \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha_n$.*
>
> (I) *Les séries $\sum a_n$ et $\sum \alpha_n$ convergent ou divergent* en même temps.
>
> (II) *En cas de* convergence, *soit $R_n$ (resp. $\rho_n$) le* reste d'ordre *$n$ de la série $\sum a_n$ $\left(resp.\ \sum \alpha_n\right)$. Alors $R_n \underset{n \to \infty}{\sim} \rho_n$.*
>
> (III) *En cas de* divergence, *soit $S_n$ (resp. $\sigma_n$) la* somme partielle *d'ordre $n$ de $\sum a_n$ $\left(resp.\ \sum \alpha_n\right)$. Alors $S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sigma_n$.*

*Démonstration :*

(I) Puisque $a_n \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha_n$, on peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2}\alpha_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}\alpha_n$ pour $n \geqslant N$. Soit $(b_n)$ (resp. $(\beta_n)$) la suite remplaçant les $(a_i)$ (resp. les $(\alpha_i)$) par 0 pour $i \leqslant N$. Le théorème II.5.3 s'applique alors aux suites $\left(\frac{1}{2}\beta_n\right)$ et $(b_n)$ d'une part, aux suites $(b_n)$ et $\left(\frac{3}{2}\beta_n\right)$ d'autre part, ce qui prouve que les séries $\sum b_n$ et $\sum \beta_n$ sont de même nature. Mais la suite $(b_n)$ (resp. $(\beta_n)$) est obtenue à partir de $(a_n)$ (resp. $(\alpha_n)$) en ne modifiant qu'un nombre fini de termes, d'où il résulte que les séries $\sum a_n$ et $\sum \alpha_n$ ont même nature.

(II) Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ $(\varepsilon < 1)$. Choisissons maintenant $N \in \mathbb{N}$ tel que $(1-\varepsilon)\,\alpha_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha_n$ pour $n > N$. Alors, si l'entier $n$ est $\geqslant N$, on a :

$$(\forall k \geqslant n+1) \quad (1-\varepsilon)\,\alpha_k \leqslant a_k \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha_k\,,$$

et en sommant de $k = n+1$ à $+\infty$ (voir complément au théorème II.5.3)

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\,,$$

c'est-à-dire $\quad (1-\varepsilon)\,\rho_n \leqslant R_n \leqslant (1+\varepsilon)\,\rho_n$.

On reconnaît la définition de deux suites équivalentes, d'où $R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \rho_n$.

(III) On sait déjà que $S_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} +\infty$ et $\sigma_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} +\infty$. Il s'agit de prouver que $\dfrac{S_n}{\sigma_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Soit donc $\varepsilon$ réel $> 0$ $(\varepsilon < 1)$. Choisissons $N_0$ tel que $(1-\varepsilon)\,\alpha_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)\,\alpha_n$ dès que $n \geqslant N_0$. Quitte à augmenter $N_0$, on peut supposer $S_{N_0} > 0$ et $\sigma_{N_0} > 0$. Pour $n \geqslant N_0$ on a :

$$(1-\varepsilon)\,(\sigma_n - \sigma_{N_0}) \leqslant S_n - S_{N_0} \leqslant (1+\varepsilon)\,(\sigma_n - \sigma_{N_0})\,,$$

d'où *a fortiori*

$$(1-\varepsilon)\,\sigma_n - \sigma_{N_0} \leqslant S_n \leqslant (1+\varepsilon)\,\sigma_n + S_{N_0}\,,$$

c'est-à-dire

$$(1-\varepsilon) - \frac{\sigma_{N_0}}{\sigma_n} \leqslant \frac{S_n}{\sigma_n} \leqslant 1 + \varepsilon + \frac{S_{N_0}}{\sigma_n}\,.$$

Or, $\dfrac{\sigma_{N_0}}{\sigma_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{S_{N_0}}{\sigma_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui entraîne l'existence de $N_1$ tel que $\dfrac{\sigma_{N_0}}{\sigma_n} \leqslant \varepsilon$ et de $N_2$ tel que $\dfrac{S_{N_0}}{S_n} \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $n \geqslant N = \operatorname{Max}(N_1, N_2)$, on obtient : $1 - 2\,\varepsilon \leqslant \dfrac{S_n}{\sigma_n} \leqslant 1 + 2\,\varepsilon$, ce qui prouve bien que $\dfrac{S_n}{\sigma_n}$ 1 ■

Ce théorème IX.1.1 constitue donc un puissant outil d'*estimation* de restes de séries convergentes ou de sommes partielles de séries divergentes.

***Exemple 1 :*** Soit un réel $\alpha > 0$. On sait que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. Examinons chacun de ces cas.

*Supposons* $\alpha > 1$. De

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right] \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\alpha - 1}{n^\alpha},$$

on déduit, par le théorème IX.1.1 :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}.$$

On a ainsi obtenu un équivalent du reste de la série de Riemann convergente $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, à savoir : $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$.

*Supposons maintenant* $\alpha < 1$. Alors, de

$$n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha} = n^{1-\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\right] \underset{n \to \infty}{\sim} (1-\alpha)\, n^{-\alpha},$$

on déduit par le théorème IX.1.1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\, n^{1-\alpha}.$$

On a donc obtenu un équivalent simple de $S_n$, à savoir : $\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

*Supposons enfin* $\alpha = 1$. Alors, de

$$\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n},$$

on déduit, par le théorème IX.1.1 :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{Log}(n+1) - \operatorname{Log} n\right) = \operatorname{Log}(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \operatorname{Log} n,$$

équivalence que nous avions d'ailleurs déjà rencontrée (cf. § VI.2, exemple 6).

***Remarque 1 :*** On constate une nette différence entre le reste d'ordre $n$ d'une série de Riemann convergente $R_n = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$ ($\alpha > 1$) qui est tel que $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n \to \infty}{\in} o(R_n)$, et celui d'une série géométrique de raison $q \in ]0,1[$, pour laquelle $R_n \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\sup_{k \geqslant n} (u_k)\right)$ puisque $\frac{q^{n+1}}{1-q}$ est du même ordre que $u_n = q^n$. Nous dirons que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ converge *lentement* tandis que la série géométrique $\sum q^n$ $(0 < q < 1)$ converge *rapidement,* sans cependant vouloir attacher à ces expressions une importance pratique trop grande.

***Exemple 2 :*** Considérons la suite de terme général

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n \quad (n \geqslant 1)\,.$$

Nous savons déjà que $\sigma_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \gamma$, où $\gamma$ est la constante d'Euler (cf. § VI.2, exemple 6). Une façon élégante de le retrouver est de considérer $\sigma_n$ comme la somme partielle d'ordre $n$ de la série de terme général

$$u_k = \sigma_k - \sigma_{k-1} = \frac{1}{k} + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad \text{pour } k \geqslant 2 \text{ et } u_1 = \sigma_1 = 1\,.$$

Il est clair que cette série $\sum u_n$ est à termes $\leqslant 0$ (pour $n \geqslant 2$). Or,

$$u_n = \frac{1}{n} + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2},$$

ce qui prouve bien sa convergence, et sa somme est bien $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \gamma$.

Appliquant le théorème IX.1.1 et le résultat de l'exemple 1, on voit d'abord que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to \infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

(il est d'ailleurs évident élémentairement que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ en utilisant $\frac{1}{k(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$, valable pour $k > 1$), d'où il résulte que

$$\gamma - \sigma_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{-1}{2n},$$

ce qui fournit déjà le développement : $\sigma_n = \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

pousser plus loin le développement, il est naturel d'étudier la suite de terme général $\tau_n = \sigma_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ grâce à la série associée $\sum v_n$, où $v_n = \tau_n - \tau_{n-1} = u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)}$. Un $DL_3$ suivant les puissances de $\frac{1}{n}$ donne :

$$v_n = \frac{-1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \text{d'où} \quad v_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{6n^3},$$

et l'application du théorème IX.1.1 au reste de la série $\sum v_n$ montre que :

$$\tau_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-v_k) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{-1}{6} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3},$$

soit en utilisant le résultat de l'exemple 1 : $\tau_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2}$, ce qui fournit le développement :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n = \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

On pourrait obtenir ainsi un développement limité de $\sigma_n$ à n'importe quel ordre en l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$.

**Comparaison à une série de Riemann**

La simplicité des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, et la lenteur de leur convergence lorsque $\alpha > 1$, en font d'excellentes **séries-étalon.** Pour comparer la série $\sum u_n$ à termes $\geqslant 0$ à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$, on forme le rapport $\frac{u_n}{1/n^\alpha} = n^\alpha u_n$. **S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit majorée,** le théorème II.5.3 montre que **la série $\sum u_n$ converge.** De même, **s'il existe $\alpha \leqslant 1$ $(\alpha > 0)$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit minorée par un réel $> 0$,** le théorème II.5.3 montre que **la série $\sum u_n$ diverge.** Ces énoncés constituent ce qu'on appelle parfois « la règle $n^\alpha u_n$ ».

***Exemple 3 :*** Soit deux réels $a > 0$ et $\lambda > 0$ donnés. Proposons-nous d'étudier la série de terme général $u_n = e^{-an^\lambda}$.

*a*) Si $\lambda \geqslant 1$, il est clair que $u_n \leqslant e^{-an} = (e^{-a})^n$, et puis géométrique $\sum e^{-an}$ de raison $e^{-a} \in ]0, 1[$, converge (et même rapidement), on voit que la série $\sum u_n$ converge.

*b*) Si $0 < \lambda < 1$, pour tout réel $\alpha > 0$, il vient :

$$n^\alpha u_n = \exp(\alpha \operatorname{Log} n - an^\lambda) = \exp\left[-an^\lambda\left(1 - \frac{\alpha \operatorname{Log} n}{an^\lambda}\right)\right].$$

Or $\dfrac{\operatorname{Log} n}{n^\lambda} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, donc la quantité entre crochets tend vers $-\infty$ et $n^\alpha u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. La règle $n^\alpha u_n$ (où l'on choisit à volonté un $\alpha > 1$) montre donc que la série $\sum u_n$ converge (et même plus rapidement que toute série de Riemann convergente, en ce sens que $(\forall \alpha > 1)\, u_n \underset{n \to \infty}{\in} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ ; (mais cela ne signifie pas que la convergence de $\sum u_n$ soit rapide au sens de la remarque 1 car, pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, il est clair que $R_n \geqslant u_{n+1} + \cdots + u_{n+N}$ et que $\dfrac{u_{n+k}}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, d'où $\dfrac{R_n}{u_n} \geqslant N$ pour $n$ assez grand, ce qui entraîne que $\dfrac{R_n}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, autrement dit $u_n \underset{n \to \infty}{\in} o(R_n)$, ce qui est le signe d'une convergence *lente*).

**Formule de Stirling**

Appliquons la méthode de l'exemple 2 à la suite de terme général

$$S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} n - n - \operatorname{Log} n!\ ,$$

qui est la somme partielle d'ordre $n$ de la série de terme général $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ et $u_1 = S_1 = -1$. Pour $k \geqslant 2$,

$$u_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{k}\right) - 1\ ,$$

et un développement du logarithme à l'ordre 3 donne : $u_k = \dfrac{1}{12\,k^2} + o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, ce qui prouve que la série $\sum u_n$ est à termes $\geqslant 0$ (à partir d'un certain rang), et qu'elle converge.

Si $L \in \mathbb{R}$ est sa somme, la suite $(S_n)$ admet $L$ pour limite, et en exponentiant, on en déduit que

$$P_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^L = \Lambda > 0\ ,$$

d'où :
$$n! \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\Lambda} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\ .$$

La valeur exacte de $\Lambda$ peut être déterminée en utilisant la *formule de Wallis* vue au § VIII.2. En effet :

$$(2n)! \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Lambda}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \quad \text{et} \quad (n!)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\Lambda^2} n^{2n+1} e^{-2n}$$

donnent : $$\Lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\, 2^{2n+\frac{1}{2}}}{(n!)^2\, n^{\frac{1}{2}}} = (\text{cf. la formule de Wallis}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

d'où déjà l'équivalent de $n!$ :

$$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}},$$

qui constitue la forme élémentaire de la *formule de Stirling*.

Mais, comme dans l'exemple 2, on peut, si on le désire, obtenir des développements limités à tout ordre de $P_n$ en l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$. Limitons-nous à l'ordre 1 : soit $R_n = L - S_n = \sum_{k=n}^{\infty} (S_{k+1} - S_k)$.

Puisque $S_{k+1} - S_k \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{12k^2}$, le théorème IX.1.1 entraîne :

$$R_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{12n} \quad (\text{cf. l'exemple 1}).$$

On en déduit :

$$P_n = e^{S_n} = e^{L-R_n}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{P_n} = \frac{1}{\Lambda} e^{R_n} = \frac{1}{\Lambda}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

c'est-à-dire : $$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

***Exercice 1*** **:** Soit $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$ une fraction rationnelle. La suite $(F(n))_n$ est certainement définie pour $n \in \mathbb{N}$ si $n$ est assez grand. On notera $d$ le *degré* de $F$, *i.e.* l'entier $\deg(P) - \deg(Q)$ où $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible de $F$.

*a*) Montrer que la série $\sum F(n)$ converge ssi $d \leqslant -2$, hypothèse qui est supposée réalisée dans les questions suivantes.

*b*) Montrer que la somme des résidus de $F$ est nulle (on pourra décomposer $F$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et poser $X = \frac{1}{T}$).

*c*) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ $(p \geqslant 2)$ tels que les pôles de $F$ soient $a$, $a+1, \ldots, a+p-1$ et soient tous *simples*. On note $A_\nu$ le résidu de $F$ en $a+\nu$, d'où $F = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{A_\nu}{X-a-\nu}$. Calculer le nombre $\sum_{n=0}^{\infty} F(n)$ en fonction des $A_\nu$.

*d*) Reprendre la question *c*) en supposant $a \in \mathbb{Z}$, par exemple calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

***Exercice 2 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum u_n$ converge. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $R_n \leqslant C u_n$ pour tout $n$ ($R_n$ désignant $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n$). Montrer que la suite $(u_n)$ est majorée par une suite du type $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $0 < a < 1$.

***Exercice 3 :*** Soit $\sum u_n$ une série à termes $> 0$ convergente. On suppose trouvé $\lambda > 0$ tel que $R_n \underset{n \to \infty}{\sim} \lambda n u_n$ ($R_n$ est le reste d'ordre $n$). Comparer la série $\sum u_n$ aux séries de Riemann. Le nombre $\lambda$ est-il arbitraire ?

***Exercice 4 :*** Soit $\alpha \in \,]0, 1[$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, où $(\forall n)\, u_n = \mathrm{e}^{-n^{\alpha}}$ (cf. exemple 2). Donner un équivalent simple de $R_n$ pour $n \longrightarrow \infty$ et l'exprimer en fonction de $u_n$.

***Exercice 5 :*** On donne $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et on pose $u_n = \mathrm{e}^{-(\mathrm{Log}\, n)^{\lambda}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

*a*) Montrer que la série $\sum u_n$ converge ssi $\lambda > 1$.

*b*) Si $\lambda > 1$, étudier la rapidité de la convergence de la série $\sum u_n$.

***Exercice 6 :*** Soit $(a_n)$ une suite *décroissante* dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum a_n$ converge et que $(\forall n)\ a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. On pose $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que, pour tout $x \in \,]0, S]$, il existe une suite $(a_{n_k})$ extraite de $(a_n)$ telle que $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$.

***Exercice 7 :*** Montrer la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme :

*a*) $\sum \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1}$

*b*) $\sum \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ $\quad (x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$

*c*) $\sum \frac{\operatorname{Ent}(\sqrt{n+1}) - \operatorname{Ent}(\sqrt{n})}{n}$

*d*) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(4n^2-1)}$

*e*) $\sum \frac{1}{\operatorname{ch} nx \operatorname{ch}(n+1)x}$ $\quad (x \in \mathbb{R}^*)$

*f*) $\sum \frac{1}{n^2 + 2n\cos\theta - \sin^2\theta}$ $\quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})$

*g*) $\sum \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{(2\cos x)^n}$

*h*) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$

*i*) $\sum \frac{4n}{n^4+2n^2+9}$.

***Exercice 8 :*** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \geqslant 1$.

*a*) On suppose la série $\sum u_n$ divergente. Montrer que : la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge, et, pour $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{u_n}{S_n^{\alpha}}$ converge.

*b*) On suppose la série $\sum u_n$ convergente. Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. Montrer que, pour $\alpha \in \,]0, 1[$, la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$ converge. Que dire de la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ ?

***Exercice 9 :*** Indiquer la nature des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants :

*a*) $u_n = \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - a - \frac{b}{n}$ $\quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$ *d*) $u_n = (n^{1/n}-1)^{Cn^{\lambda}}$

$b)$ $u_n = n^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-n^{\beta}}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$. Etudier $R_n$.

$c)$ $u_n = n^{-(\mathrm{Log}\, n)^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$

$e)$ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)^{-n^{\beta}}$ $(\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R})$

$f)$ $u_n = n^{\frac{1}{n^{\alpha}}} - (n+1)^{\frac{1}{1+n^{\alpha}}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$g)$ $u_n = \dfrac{(n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$h)$ $u_n = \operatorname{Arg\,ch}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n^{\alpha}}}\right)$ $(\alpha > 0)$

$i)$ $u_n = n^{\lambda}\left(\mathrm{e}^{-a/n} - \mathrm{e}^{-a\sin\frac{1}{n}}\right)$ $(a > 0, \lambda \in \mathbb{R})$

$j)$ $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$.

***Exercice 10 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour $\alpha > 1$ et $\lambda > 0$ convenables, on ait : $u_{n+1} - u_n \underset{n \to \infty}{\sim} -\lambda u_n^{\alpha}$. Vérifier que, nécessairement, $u_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

$a)$ Donner un équivalent simple de $u_n$ quand $n \longrightarrow \infty$.

*Indication :* Montrer que $\dfrac{1}{u_{n+1}^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{u_n^{\alpha-1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda(\alpha - 1)$, et utiliser le lemme de Cesaro pour trouver : $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{\lambda(\alpha-1)n}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

$b)$ En déduire la nature de la série $\sum u_n^{\beta}$ suivant la valeur de $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

$c)$ *Application.* La suite $(u_n)$ est définie par la relation $u_{n+1} = \sin u_n$.

***Exercice 11 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum a_n^2$ converge. On note $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ et $(\forall n)$ $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ et $\alpha_n = \dfrac{A_n}{n}$.

$a)$ Montrer que, pour tout $n$, $\alpha_n^2 - 2\,\alpha_n a_n \leq (n-1)\,\alpha_{n-1}^2 - n\alpha_n^2$.

$b)$ En déduire que la série $\sum \alpha_n^2$ converge et que sa somme est $\leq 4A$.

***Exercice 12 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge. Montrer que la série $\sum \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge et que sa somme est $\leq 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

***Exercice 13 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. On suppose : $(\forall n)$ $a_n \leq \dfrac{S_n}{n^2}$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$ ?

***Exercice 14 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ non stationnaire et telle que la série $\sum a_n$ converge. Pour $n \geq 1$ on pose $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}$. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge aussi.

***Exercice 15 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $a_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ et que la série $\sum a_n$ converge. Vérifier qu'alors la série $\sum a_n^2$ converge aussi, ce qui permet de poser, pour tout $n \geq 1$, $g_n = \sqrt{\sum\limits_{j=n}^{\infty} a_j^2}$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g_n}{\sqrt{n}} \leq 5 \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*Indication :* $(\forall n)$ $g_n = \sum\limits_{m=n}^{\infty} \left(\sqrt{\sum\limits_{k \in [\![ n, m ]\!]} a_k^2} - \sqrt{\sum\limits_{k \in [\![ n, m-1 ]\!]} a_k^2}\right)$.

***Exercice 16 :*** Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$. Montrer que si la série $\sum a_n$ converge, alors la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge aussi.

***Exercice 17 :*** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$.

*a*) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donner un exemple prouvant que la réciproque est fausse.

*b*) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum nu_{n^2}$ sont de même nature.

***Exercice 18 :*** On renumérote la suite des naturels dont on a enlevé ceux qui dans le système décimal s'écrivent avec un ou plusieurs chiffres 9 : ainsi $v_0 = 0$, ..., $v_8 = 8$, $v_9 = 10$, ..., $v_{17} = 18$, $v_{18} = 20$, ..., $v_{81} = 100$, ... Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{v_n}$ ? de la série $\sum \frac{1}{v_n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ ?

***Exercice 19 :*** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum a_n$ diverge. Que peut-on dire de la série de terme général $v_n = \dfrac{a_n}{1 + n^\alpha a_n}$ pour $\alpha > 1$ ?

***Exercice 20 :*** Nature d'une série $\sum u_n$ à termes $\geqslant 0$ telle que, à partir d'un certain rang, $\sqrt[n]{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $0 < \alpha < 1$.

***Exercice 21 :*** (Constante d'Euler) : On utilisera les résultats suivants, conséquences faciles de la formule de Taylor-Lagrange ou Taylor-reste intégrale :

$$(\forall x \in\, ]-1, 1[)\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad \operatorname{Log}\frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k + f_n(x)\,;\ \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + g_n(x)$$

et, si $\alpha \in \mathbb{R}$ : $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} x^{q+1} L_{n,\alpha}(x)$, avec $|f_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}$, $|g_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)(1-x^2)}$ et $|L_{n,\alpha}(x)| \leqslant (1-|x|)^{-|\alpha-n-1|}$.

Soit $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n\right)$ la constante d'Euler ; si $r \in \mathbb{N}^*$ et si $A_1$, ... $A_r$ réels sont donnés, on pose : $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{A_r}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2i}}$, de sorte que $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

*a*) Pour $n \geqslant 2$, prouver :

$$(1)\quad \gamma_{n-1} - \gamma_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)2^{2p}n^{2p+1}} \times \left[1 - (2p+1)\sum_{1\leqslant k\leqslant \operatorname{Min}(r,p)} \mathscr{E}_{k,p} A_k\right] = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mathscr{F}_p}{(2p+1)\,2^{2p}\,n^{2p+1}},$$

où les $\mathscr{E}_{k,p}$ sont dans $\mathbb{N}$ et à préciser.

*b*) En déduire qu'il existe un et un seul système $(A_1, \dots A_r)$ tel que $\mathscr{F}_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Dans la suite, on donnera à $A_1 \dots A_r$ ces valeurs.

*c*) Calculer $a$, $b_1$, ... $b_2$ dans $\mathbb{R}_+$, ne dépendant que de $r$, telles que :

$$(\forall n \geqslant 2)\quad |\gamma_{n-1} - \gamma_n| \leqslant \frac{a}{n^{2r+3}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)} + \left(\sum_{i=1}^{r} b_i |A_i|\right) \frac{1}{n^{2r+2}\left(1 \quad 1 \quad \right)^{2r+2}}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ donné, en déduire une majoration simple du réel $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}[\gamma_{n-1}-\gamma_n]\right|$.

*d*) Calculer $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ ; on fixe $r = 4$ ; écrivant $\gamma = \gamma_N - \sum_{n=N+1}^{\infty}(\gamma_{n-1}-\gamma_n)$, donner une majoration de $|\gamma - \gamma_N|$. Avec $N = 40$, calculer $\gamma_{40}$ et en déduire 17 décimales exactes de $\gamma$ (réponse : $\gamma = 0{,}57721566490153286\ldots$).

*e*) Vérifier qu'on a une unique suite $(A_i)_{i \geqslant 1}$ telle que $(\forall r)$ $A_1 \ldots A_r$ soient les réels définis en *b*). Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des *nombres de Bernoulli,* définie par $\dfrac{X}{e^X - 1} = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ dans $\mathbb{C}[[X]]$. Soit $S(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{A_i}{(2i-1)!} X^{2i} \in \mathbb{C}[[X]]$. Démontrer que $S(X) = 1 - \dfrac{X}{\operatorname{sh} X}$, en déduire : $(\forall k)$ $A_k = \dfrac{(2^{2k}-2)\, b_{2k}}{2k \times 2^{2k}}$.

## § IX.2 *RÈGLES USUELLES DE CONVERGENCE*

Pour appliquer le théorème II.5.3 à des *séries à termes* $\geqslant 0$, on est amené à prendre pour séries de *comparaison* des séries particulières comme les séries de Riemann ou les séries géométriques. On obtient ainsi des *règles simples* donnant des **conditions suffisantes** de convergence d'une série à termes $\geqslant 0$.

**THÉORÈME IX.2.1** (Règle de Cauchy)

> *Soit* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite dans* $\mathbb{R}_+$.
> *Si* $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge.*
> *Si* $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} > 1$, *la série* $\sum u_n$ *diverge.*

*Démonstration :*

Si $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} > 1$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > 1\}$ est infini ; donc $u_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$ ; donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = L < 1$, soit $q \in\, ]L, 1[$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)^{1/n} \leqslant q$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a donc : $(\forall n \geqslant n_0)$ $u_n \leqslant q^n$, et comme la série géométrique $\sum q^n$ converge, le théorème II.5.3 prouve que la série $\sum u_n$ converge. ■

**COROLLAIRE**

> *Soit* $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que* $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}$. *Si* $L < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge. Si* $L > 1$, *elle diverge.*

***Remarque 1 :*** On constate que le théorème IX.2.1 n'envisage pas le cas où $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} = 1$, appelé *cas douteux*. L'exemple de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \geqslant 0)$, pour laquelle $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, montre que la série $\sum u_n$ peut soit converger (ici pour $\alpha > 1$), soit diverger (ici pour $\alpha \leqslant 1$). On prendra garde également au fait que l'hypothèse « $(u_n)^{1/n} < 1$ pour tout $n$ » *ne permet pas de conclure* car elle entraîne seulement $\limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} \leqslant 1$, comme le montre à l'évidence l'exemple précédent. En revanche si on peut prouver que $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\overset{\geqslant}{\longrightarrow}} 1$, alors on en déduit que $u_n \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, et donc $u_n \not\to 0$, ce qui prouve la divergence de $\sum u_n$ (c'est le cas par exemple pour $u_n = \dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}$).

Reprenons la démonstration du théorème IX.2.1 dans le cas où $L = \limsup_{n \to \infty} (u_n)^{1/n} < 1$. Soit $q \in ]L, 1[$, puis $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)^{1/n} \leqslant q$ pour $n \geqslant n_0$. Alors si $n \geqslant n_0$ et $k \geqslant n$, on a : $u_k \leqslant q^k$, d'où $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$. On a ainsi obtenu une **majoration du reste** d'ordre $n$ : $R_n \leqslant \dfrac{q^{n+1}}{1-q}$ valable pour $n \geqslant n_0$.

***Exemple 1 :*** On donne $\alpha$ et $q$ réels, $0 < q < 1$ et on veut étudier la série $\sum u_n$, où $u_n = n^\alpha q^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_n)^{1/n} = n^{\frac{\alpha}{n}} q$, donc $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} q$. La règle de Cauchy s'applique et montre que la série $\sum u_n$ converge.

**THÉORÈME IX.2.2** (Règle de D'Alembert)

> *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$.
> *Si* $\limsup_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge.*
>
> *Si* $\liminf_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, *la série* $\sum u_n$ *diverge.*

*Démonstration :*

Si $\liminf_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, soit $q \in \left]1, \liminf_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right[$. Il existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant q$ pour $n \geqslant n_0$. Il en résulte que $u_n \underset{n \to \infty,\, n \geqslant n_0}{\uparrow} +\infty$, et *a fortiori* $u_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$, ce qui interdit évidemment à la série $\sum u_n$ de converger.

Si $\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, prenons $q \in \left]\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}, 1\right[$ et soit $n_0$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ pour $n \geqslant n_0$. Alors si $n > n_0$, on obtient : $\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leqslant q$, ..., $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q$, d'où en multipliant membre à membre : $u_n \leqslant u_{n_0} q^{n-n_0}$. Comme la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant n_0} \dfrac{u_{n_0}}{q^{n_0}} q^n$ converge, le théorème II.5.3 montre que la série $\sum u_n$ converge. ■

**COROLLAIRE**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $L > 1$, elle diverge.*

***Remarque 2 :*** Lorsque $\liminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (et en particulier si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$), la série $\sum u_n$ peut, selon les cas, converger ou diverger (on peut reprendre pour exemple les séries de Riemann). On prendra garde également au fait que l'hypothèse « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n$ », et même l'hypothèse « $u_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ » *ne permettent pas de conclure,* contrairement à l'hypothèse « $(\forall n) \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ », qui permet, elle, de conclure à la divergence de $\sum u_n$.

Comme pour la règle de Cauchy on peut obtenir une **majoration du reste** dans le cas où $\limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$. Soit $q \in ]L, 1[$, puis $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$ dès que $n \geqslant n_0$. Alors pour $n > n_0$ et $k > n$ on a : $\dfrac{u_k}{u_{k-1}} \leqslant q$, ..., $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$, d'où $u_k \leqslant u_n q^{k-n}$, et par addition : $R_n = \sum\limits^{\infty} u_k \leqslant$

$\dfrac{u_n}{q^n}\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = u_n \dfrac{q}{1-q}$, valable pour $n > n_0$. Cette majoration prouve que la convergence de la série $\sum u_n$ est *rapide,* au sens de la remarque 1 du § IX.1.

***Exemple 2 :*** Reprenons la série $\sum u_n$, avec $u_n = n^\alpha q^n$ ($\alpha \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$). Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} q$. Le théorème IX.2.2 montre que la série $\sum u_n$ converge.

### Comparaison des règles de Cauchy et de D'Alembert

**PROPOSITION IX.2.1**

*Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $L = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$.*

*Démonstration :*

Bornons-nous au cas où $0 < L < +\infty$ (les deux autres cas se prouvant de manière analogue, mais plus simple).

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, avec $\varepsilon < L$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ dès que $n \geqslant n_0$. Alors, pour $n > n_0$, il vient :

$$L - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leqslant L + \varepsilon, \ldots, L - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant L + \varepsilon\ ,$$

d'où en multipliant membre à membre : $\quad (L - \varepsilon)^{n-n_0} \leqslant \dfrac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant (L + \varepsilon)^{n-n_0}$ ,

et en élevant à la puissance $\dfrac{1}{n}$ : $\quad u_{n_0}^{1/n}(L - \varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \leqslant (u_n)^{1/n} \leqslant u_{n_0}^{1/n}(L + \varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}}$ .

Mais $\quad u_{n_0}^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1 \quad$ et $\quad (L - \varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L - \varepsilon$ , $\quad (L + \varepsilon)^{1-\frac{n_0}{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L + \varepsilon$ .

On peut donc choisir $N > n_0$ tel que, pour $n \geqslant N$, on ait :

$$L - 2\,\varepsilon \leqslant (u_n)^{1/n} \leqslant L + 2\,\varepsilon\ ,$$

ce qui prouve bien que $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$. ■

Cette proposition montre que les cas couverts par le corollaire du théorème IX.2.1 sont « plus nombreux » que ceux couverts par le corollaire du théorème IX.2.2. En fait ils sont strictement plus nombreux comme le prouve l'exemple suivant : soit $a$ et $b$ tels que $0 < a < b$. Posons $u_{2n} = a^n b^{n+1}$ et $u_{2n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$.

On voit que $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{ab}$, tandis que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a aucune limite, puisque cette suite admet les deux valeurs d'adhérence $a$ et $b$. De même l'exemple $v_{2n} = a^{2n}$, $v_{2n+1} = b^{2n+1}$, où $0 < a < b < 1$, montre que le théorème IX.2.1 permet de conclure (ici à la convergence puisque $\limsup_{n \to \infty} (v_n)^{1/n} = b < 1$) tandis que le théorème IX.2.2 ne le permet pas. Mais cela ne doit pas faire oublier que *l'idée essentielle dans l'étude des séries à termes* $\geqslant 0$ *n'est pas de faire appel à telle ou telle règle, mais de comparer à une série connue.* Dans les deux exemples précédents on reconnaît immédiatement que les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ sont des séries géométriques (de raison $ab$) et que $v_n \leqslant b^n$ pour tout $n$, et c'est cela qui compte, par exemple si on voulait chercher la somme de ces deux séries.

## La règle de Raabe-Duhamel

**PROPOSITION IX.2.2**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'à partir d'un certain rang $n_0$ : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge (donc, si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi).*

*Démonstration :*

Multiplions membre à membre les inégalités $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$ pour $n_0 \leqslant k \leqslant n-1$, où $n > n_0$ est donné. On obtient :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n_0}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n \leqslant \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n ,$$

et le théorème II.5.3 permet de conclure. ■

**PROPOSITION IX.2.3**

*Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons*

$$\alpha_n = n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\lambda = \liminf_{n \to \infty} (\alpha_n), \qquad \Lambda = \limsup_{n \to \infty} (\alpha_n) \ (-\infty \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant +\infty).$$

(I) *Si $\lambda > -\infty$, pour tout réel $l < \lambda$, il existe un réel $B > 0$ (dépendant de $l$) tel que : $(\forall n)\ u_n \leqslant \dfrac{B}{n^l}$.*

(II) *Si $\Lambda < +\infty$, pour tout réel $L > \Lambda$, il existe un réel $A > 0$ (dépendant de $L$) tel que : $(\forall n)\ u_n \geqslant \dfrac{A}{n^L}$.*

*Démonstration :*

(I) Soit $l \in \mathbb{R}$, $l < \lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$v_n = \frac{1}{n^l}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-l} = 1 - \frac{l}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Soit alors $l'$ un réel tel que $l < l' < \lambda$ : il existe $N_1$ tel que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1 - \dfrac{l'}{n}$ pour $n \geqslant N_1$. Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n \geqslant l'$ dès que $n \geqslant N_2$, d'où alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{l'}{n}$. Pour $n \geqslant N = \operatorname{Max}(N_1, N_2)$, on obtient : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, ce qui (cf. la preuve de la proposition IX.2.2) permet d'écrire :

$$(\forall n > N) \quad u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n .$$

En posant $B = \operatorname{Max}\left(\left\{\dfrac{u_i}{v_i}\right\}_{1 \leqslant i \leqslant N}\right)$ on voit bien que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n \leqslant B v_n$.

(II) s'établit de manière symétrique. ■

Cette proposition va nous permettre de comparer $\sum u_n$ à une série de Riemann bien plus finement qu'avec la seule règle $n^\alpha u_n$.

**THÉORÈME IX.2.3** (Règle de Raabe-Duhamel ([1]))

> *Soit* $(u_n)$ *une suite dans* $\mathbb{R}_+^*$, *et soit* $\alpha_n = n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ $(n \geqslant 1)$, *de sorte que* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$.
>
> (I) *Si* $\liminf\limits_{n \to \infty} (\alpha_n) > 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge.*
>
> (II) *Si* $\limsup\limits_{n \to \infty} (\alpha_n) < 1$, *la série* $\sum u_n$ *diverge.*

*Démonstration :*

(I) Si $\lambda = \liminf\limits_{n \to \infty} (\alpha_n) > 1$, soit $l$ un réel tel que $1 < l < \lambda$. D'après la proposition IX.2.3 (I), il existe $B$ réel $> 0$ tel que $(\forall n)\ u_n \leqslant \dfrac{B}{n^l}$. Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^l}$ converge puisque $l > 1$. Le théorème II.5.3 montre alors que la série $\sum u_n$ converge.

(II) se prouve de manière analogue. ■

---

([1]) Joseph Ludwig *Raabe* (1801-1859), mathématicien suisse. Jean-Marie Constant Duhamel (1797-1872), mathématicien et physicien français.

**Corollaire**

*Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha_n}{n}$, et l'on suppose que $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = L$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$.*

*Si $L > 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $L < 1$ elle diverge.*

***Remarque 3 :*** La règle de Raabe-Duhamel apparaît ainsi comme un raffinement de la règle de D'Alembert, mais elle laisse encore de côté le cas où

$$\liminf_{n \to \infty} (\alpha_n) \leqslant 1 \leqslant \limsup_{n \to \infty} (\alpha_n),$$

ce qui se produit en particulier si $\alpha_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$. C'est qu'on arrive à des séries de plus en plus « voisines » de la série harmonique qui ne diverge que « très lentement ». Par exemple les séries de Bertrand, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \operatorname{Log}^\alpha n} (n \geqslant 2)$, que nous étudierons au § IX.3, et qui convergent ou divergent selon que $\alpha > 1$ ou $\alpha \leqslant 1$, ne relèvent pas de la règle de Raabe-Duhamel car

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{Log} n}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{-\alpha}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{\operatorname{Log} n} + o\left(\frac{1}{\operatorname{Log} n}\right),$$

d'où $n\left(1 - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, et cela $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

***Exemple 3 :*** Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $b \notin \mathbb{Z}_-^*$, $a \notin \mathbb{Z}_-^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme $u_n = \left[\dfrac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}\right]^\lambda$ est défini. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{a+n+1}{b+n+1}\right)^\lambda = 1 - \frac{\lambda(b-a)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par application du théorème IX.2.3 on peut donc affirmer que si $\lambda(b-a) > 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $\lambda(b-a) < 1$, elle diverge. L'étude du cas $\lambda(b-a) = 1$ nécessite une analyse plus précise : cf. ci-dessous.

**Un remarquable cas particulier**

Conservons le notations du théorème IX.2.3 et supposoı trouvé pour $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ un développement asymptotique de la forme

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta_n}{n}, \quad \text{avec} \quad \beta_n \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons : $a_n = n^\alpha u_n$ $(n \geqslant 1)$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta_n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \gamma_n, \quad \text{avec} \quad \gamma_n \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Choisissons $A > 0$ tel que $(\forall n)$ $|\gamma_n| \leqslant \frac{A}{n^2}$, et évaluons

$$a_n = a_1 \times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = a_1(1+\gamma_1)\cdots(1+\gamma_{n-1}) \ (n \geqslant 2).$$

Les hypothèses entraînent $1 + \gamma_k > 0$ pour tout $k$, ce qui permet de prendre le logarithme de $a_n$ :

$$\operatorname{Log} a_n = \operatorname{Log} a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Log}(1+\gamma_k).$$

Mais $\gamma_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\operatorname{Log}(1+\gamma_k) \underset{k \to \infty}{\sim} \gamma_k, \quad \text{d'où} \quad |\operatorname{Log}(1+\gamma_k)| \underset{k \to \infty}{\sim} |\gamma_k|,$$

et comme $|\gamma_k| \leqslant \frac{A}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le théorème IX.1.1 montre que la série $\sum |\operatorname{Log}(1+\gamma_k)|$ est convergente ; donc la série $\sum \operatorname{Log}(1+\gamma_k)$ converge absolument, donc converge (cf. théorème II.5.5). Si $S = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1+\gamma_k)$, il vient $\operatorname{Log} \frac{a_n}{a_1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S$, d'où $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a_1 e^S > 0$, ce qui donne :

$$(2) \qquad u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{A}{n^\alpha}, \quad \text{où} \quad A = a_1 e^S.$$

Cet équivalent redonne la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas où $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ déjà prévus dans le corollaire du théorème IX.2.3, mais *également dans le cas* $\alpha = 1$.

Or l'hypothèse (1) est satisfaite dès que $\alpha_n$ *admet un* $\mathrm{DL}_1(0)$ *en l'infiniment petit principal* $\frac{1}{n}$, ce qui en pratique est assez facil

Ainsi, dans l'exemple 3, il est évident que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet des DL(0) à tout ordre en $\dfrac{1}{n}$, d'où pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'équivalent

$$\left(\frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}\right)^{\lambda} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{A}{n^{\lambda(b-a)}}, \quad \text{avec} \quad A > 0$$

(dépendant de $\lambda$), ce qui, outre les cas déjà élucidés par le corollaire du théorème IX.2.3, montre la *divergence* de $\sum u_n$ si $\lambda(b-a) = 1$. Résumons cette étude :

**Proposition IX.2.4**

*Soit $(u_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que*

$$n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

*pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$. En particulier, la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.*

***Exercice 1 :*** Soit $\sum u_n$ une série à termes $\geqslant 0$ *divergente*. Suivant les valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, étudier la série $\sum v_n$, où $(\forall n)\ v_n = \dfrac{u_n}{1 + n^\alpha u_n^\beta}$.

***Exercice 2 :*** Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer :

*a*) Si $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^n < \dfrac{1}{e}$, la série $\sum u_n$ converge.

*b*) Si $\liminf\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^n > \dfrac{1}{e}$, la série $\sum u_n$ diverge.

***Exercice 3 :*** Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$.

*a*) Etudier la série $\sum u_n$ s'il existe $\alpha \in\ ]0, 1[$ tel que $(\forall n)\ (u_n)^{1/n} \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^\alpha}$.

*b*) On suppose trouvé $\beta > 0$ tel que $(\forall n)\ n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant 1 + \beta$. Etudier la série $\sum u_n$.

***Exercice 4*** (*règle de Kummer*) : Soit $(a_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+$ et $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$(\forall n) \quad k_n = a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}.$$

*a*) Si $\liminf\limits_{n\to\infty} (k_n) > 0$, la série $\sum u_n$ converge.

*b*) Si la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ diverge (ce qui suppose $a_n > 0$ pour tout $n$) et si $k_n \leqslant 0$ pour $n$ assez grand, alors la série $\sum u_n$ diverge.

***Exercice 5 :*** Soit $(z_p)_{p\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}^*$ telle que, pour $R>0$ convenable, on ait :

$$\forall (p,q)\in \mathbb{N}^2 \quad (p\neq q) \Rightarrow |z_p - z_q| \geqslant R .$$

Suivant les valeurs du réel $\alpha>0$, étudier la nature de la série $\sum \dfrac{1}{|z_n|^{\alpha}}$.

***Exercice 6*** (*théorème de Hardy*) : Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*a*) Prouver que si $u_n = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$ $(n\geqslant 1)$, la série $\sum u_n$ converge aussi ; et que sa somme $U = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ vérifie : $U \leqslant \mathrm{e}A$.

*Indications :* Pour toute suite $(c_i)$ de $\mathbb{R}_+^*$, si $b_n = (c_1 c_2 \dots c_n)^{-1/n}$, établir : $u_n \leqslant \dfrac{b_n}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i c_i$ en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique.

Puis, si la suite $(c_i)$ est telle que la série $\sum \dfrac{b_n}{n}$ converge, poser $B_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{b_k}{k}$, et prouver : $\sum\limits_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} (B_n c_n)\, a_n$ pour $N\geqslant 1$. Enfin choisir $(c_n)$ pour que la série $\sum \dfrac{b_n}{n}$ converge et $(\forall n)$ $B_n c_n \leqslant e$ (il suffit de s'arranger pour que $(c_1 c_2 \dots c_n)^{-1/n} = \dfrac{1}{n+1}$).

*b*) Soit $k>0$ tel que pour *toute* série convergente (à termes $\geqslant 0$) $\sum a_n$, on ait $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant kA$. Prendre $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $1\leqslant n\leqslant N$ et $a_n = 0$ pour $n>N$ ($N\in\mathbb{N}^*$ donné) et faire $N\longrightarrow\infty$ pour prouver que $k\geqslant \mathrm{e}$.

***Exercice 7 :*** Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}$ converge.

*Indication :* Poser $S_n = a_1 + \dots + a_n$. Prouver que $u_n \leqslant n^2\left(\dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}\right)$ pour $n\geqslant 2$. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \frac{5}{a_1} + 2\sum_{n=2}^{N-1}\frac{n}{S_n} + \sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{S_n} \quad \text{pour} \quad N\geqslant 3 ,$$

puis utiliser l'exercice 6 pour prouver que la série $\sum \dfrac{n}{S_n}$ converge, et conclure.

***Exercice 8 :*** Indiquer la nature des séries de termes généraux $u_n$ ci-après :

*a*) $u_n = \dfrac{[(n-1)!]^{\alpha}}{(1+1^{\beta})(1+2^{\beta})\cdots(1+n^{\beta})}$ $(\alpha>0, \beta>0)$

*b*) $u_n = \left(\dfrac{an+b}{n+c}\right)^{\operatorname{Log} n}$ $(a>0, (b,c)\in\mathbb{R}^2)$

*c*) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{[k(n-k)]^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$ *d*) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{(an)^n}$ $(a>0)$

*e*) $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$ *f*) $u_n = \left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^{\alpha}}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

*g*) $u_n = \mathrm{e}^{-n^{\alpha}}\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ $(\alpha>0)$ *h*) $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^{\alpha})^n\,\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$

*i*) $u_n = \dfrac{n^{\operatorname{Log} n}}{(\operatorname{Log} n)^n}$ *j*) $u_n = \left(\dfrac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^{n^{\alpha}}$ $(\alpha>0)$.

***Exercice 9 :*** Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{C}^*$. On suppose $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{A}{n} + \dfrac{B_n}{n^2}$, avec $(B_n)$ bornée et $\operatorname{Re}(A) < -1$. Montrer que la série $\sum |u_n|$ converge.

***Exercice 10 :*** Soit $x \in ]-1,+1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, intégrer entre 0 et $x$ le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1-t}$ *avec reste exact* pour obtenir

$$\operatorname{Log}\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + f_n(x)\,, \quad \text{où} \quad |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}\,,$$

d'où on déduit $\operatorname{Log}\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Obtenir de la même façon

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + g_n(x)\,, \quad \text{où} \quad |g_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)(1-x^2)}\,,$$

et en déduire $\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}\dfrac{1+x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

***Exercice 11 :*** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ et $F(n,\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (pour $n \geqslant 1$).

*a*) On donne $\alpha > 0$ et $q$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $A_1, A_2, \ldots, A_q$ tels que

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{A_1}{n^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{A_q}{n^{\alpha+q}} + \frac{1}{n^{\alpha+q+1}} S_{q,\alpha}(n)\,,$$

avec

$$|S_{q,\alpha}(n)| \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+q)}{(q+1)!} = \binom{\alpha+q}{q+1}.$$

(Utiliser l'exercice 10.)

*b*) En déduire $C_1, C_2, \ldots, C_q$ et $\rho_{q,\alpha}(n)$ tels que

$$\frac{1}{n^\alpha} = C_1 F(n,\alpha+1) + \cdots + C_q F(n,\alpha+q) + \rho_{q,\alpha}(n)\,,$$

avec

$$|\rho_{q,\alpha}(n)| \leqslant \binom{\alpha+q}{q+1} \frac{1}{q(n-1)^{\alpha+q}}.$$

*c*) Soit $\mathscr{V}_{q,\alpha}(n)$ et $\mathscr{W}_{q,\alpha}(n)$ les vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^q$ dont les composantes sont :

$$(F(n,\alpha+1), \ldots, F(n,\alpha+q)) \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{n^\alpha} - \rho_{q,\alpha}(n), \ldots, \frac{1}{n^{\alpha+q}} - \rho_{q,\alpha+q-1}(n)\right).$$

Trouver une matrice carrée $M_{q,\alpha} \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{R})$ *trigonale* supérieure inversible, $M_{q,\alpha} = [\mu_{i,j}(q,\alpha)]_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant q}$ telle que $M_{q,\alpha} \times \mathscr{V}_{q,\alpha}(n) = \mathscr{W}_{q,\alpha}(n)$. En déduire comment on peut exprimer $D_0, D_1, \ldots, D_q$ et $E_{q,\alpha}(n)$ tels que

$$F(n,\alpha) = \frac{D_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{D_1}{n^\alpha} + \cdots + \frac{D_q}{n^{\alpha+q-1}} + E_{q,\alpha}(n)\,, \quad \text{avec} \quad E_{q,\alpha}(n) \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{\alpha+q}}\right).$$

Donner la valeur des $D_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant 5$.

Calculer $\zeta(1+10^{-2})$ à $10^{-12}$ près.

***Exercice 12 :*** Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite convergente dans $\mathbb{C}$. On suppose trouvés $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_2, \ldots, a_{p+1}$ dans $\mathbb{C}$ tels que

$$U_{n+1} - U_n = \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{p+1}}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

*a*) Montrer que $U_n$ admet un $\mathrm{DL}_p(0)$ en $\dfrac{1}{n}$ et donner un algorithme de calcul de ce $\mathrm{DL}_p(0)$.

*b*) Soit $g(n) = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$. On sait (formule de Stirling) que $g(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$. On pose $U_n = \operatorname{Log} g(n)$. Calculer $U_{n+1} - U_n$. Appliquer le *a*) pour obtenir :

$$g(n) = 1 + \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{51\,840\,n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

*c*) Soit $\alpha$ un réel. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$ et, si $\alpha > 1$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Si $\alpha > 1$, poser $U_n = n^{\alpha-1} R_n$ et obtenir, à l'aide du *a*), des $\mathrm{DL}_p(0)$ de $U_n$. Si $\alpha \leqslant 1$, on pose : $\varphi(n) = \operatorname{Log} n$ si $\alpha = 1$, $\varphi(n) = \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, puis $T_n = S_n - \varphi(n)$, enfin $U_n = \dfrac{T_n}{n^{1-\alpha}}$. A l'aide du *a*), obtenir des $\mathrm{DL}_p(0)$ de $U_n$.

***Exercice 13 :*** Calculer la somme d'une série convergente à termes $> 0$ : $\sum u_n$, sachant que $nu_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$, $a$ et $b$ étant des constantes réelles. Application : $u_n = \dfrac{1\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(2\,n-1)}{2\,.\,4\,.\,\dots\,.\,(2\,n)\,(2\,n+2)}$.

***Exercice 14 :*** Une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est définie à partir de $S_1 = 1$ par la formule $2\,S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + a_n}$, où $a_n$ est le terme général d'une série donnée à termes $\geqslant 0$. Montrer que si la série $\sum a_n$ est convergente, alors la suite $(S_n)$ a une limite dans $\mathbb{R}$. La réciproque est-elle vraie ?

***Exercice 15 :*** Montrer que si la série à termes $\geqslant 0$ $\sum u_n$ est convergente, la série de terme général $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ est aussi convergente.

***Exercice 16 :*** Nature de la série de terme général $u_n = (p_n)^{-p_n}$, où $p_n$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n$ ; et de la série de terme général $v_n = 10 - n^{\frac{1}{p_n}}$ ?

## § IX.3 *COMPARAISON SÉRIES-INTÉGRALES*

Nous avons vu au § VIII.3 que si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction **décroissante**, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou divergent en même temps (cf. théorème VIII.3). Bien sûr la conclusion subsiste si la fonction $f$ n'est décroissante que sur l'intervalle $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$, si elle reste définie sur $\mathbb{N}$, la comparaison de $\sum u_n$ se faisant avec $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

En appliquant ce résultat à la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ est donné, on retrouve ainsi très rapidement la conclusion du théorème II.5.4 : la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$. En effet l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ (et $f$ est bien décroissante sur $[1, +\infty[$).

Appliquons-le maintenant à la fonction

$$f_{p,\alpha} : ]e_{p+1}, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad x \mapsto \frac{1}{x \operatorname{Log}_1 x \operatorname{Log}_2 x \ldots \operatorname{Log}_{p-1} x (\operatorname{Log}_p x)^\alpha},$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (avec les notations du § VI.6). Cette fonction est bien décroissante et nous avons vu au § VIII.3 que l'intégrale $\displaystyle\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha}(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $\alpha > 1$. Donc la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \operatorname{Log}_1 n \ldots \operatorname{Log}_{p-1} n (\operatorname{Log}_p n)^\alpha}$, appelée **série de Bertrand,** *converge pour* $\alpha > 1$ *et diverge pour* $0 < \alpha \leqslant 1$. L'étude de cette série pour $\alpha \leqslant 0$ est d'ailleurs immédiate, par comparaison avec $\sum v_n$, où $v_n = \dfrac{1}{n \operatorname{Log}_1 n \ldots \operatorname{Log}_{p-1} n}$, qui est divergente.

On notera la puissance du théorème de comparaison entre séries à termes $\geqslant 0$ et intégrales, puisqu'une série aussi simple que $\sum \dfrac{1}{n \operatorname{Log}^\alpha n}$ ne pouvait s'étudier en se limitant aux règles des §§ IX.1 et IX.2. On notera également son élégance en l'appliquant par exemple à la série $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ dont la convergence est immédiate $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2\,t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)$. Montrons enfin son intérêt pratique.

**Majoration du reste**

**THÉORÈME IX.3.1**

*Soit* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *une fonction* ***décroissante*** *telle que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ *converge. Posons, pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ *et* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.
*On a alors* ***l'encadrement,*** *valable* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(1) \qquad \boxed{\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

*Démonstration :*

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k > n$, on vérifie qu'à cause de la décroissance de $f$ :

$$f(k+x) \leqslant u_k \leqslant f(k-1+x) \quad \text{pour} \quad x \in [0,1]\,.$$

Par addition,

$$(\forall N \in \mathbb{N}^*) : \quad \int_{n+1}^{n+1+N} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=n+1}^{n+N} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+N} u_k$$
$$\leqslant \sum_{k=n}^{n+N-1} \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+N} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

En passant à la limite quand $N \longrightarrow \infty$, on en déduit bien :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x . \quad \blacksquare$$

***Exemple 1 :*** Appliquons le théorème IX.3.1 à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$. On obtient l'encadrement du reste $R_n$ :

$$(2) \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} ,$$

et en particulier on retrouve l'équivalent de $R_n$ déjà obtenu au § IX.1 : $R_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$. Mais l'encadrement (2) est aussi efficace pour procéder à un *calcul approché* de la somme $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. En effet l'intervalle d'encadrement fourni par (2) a pour longueur

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(n+\theta_n)^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

(par application du théorème des accroissements finis). Au lieu de se contenter de prendre $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ comme valeur approchée de $\zeta(\alpha)$, une valeur approchée par excès étant $S_n + \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$, il vaut mieux prendre $S_n + \frac{1}{(\alpha-1)\,(n+1)^{\alpha-1}}$ comme valeur approchée par défaut, ce qui fait gagner un facteur $\frac{1}{n}$ dans la précision du calcul de $\zeta(\alpha)$. Par exemple, pour calculer $\zeta(2)$ avec une marge d'erreur $\leqslant 10^{-3}$, il n'est pas utile de calculer $S_{1000}$ (ce qui introduirait en outre des erreurs d'arrondi considérables), il suffit de calculer $S_{23}$ et de prendre pour valeur approchée la moyenne arithmétique des valeurs par défaut et par excès obtenues pour $S_n + R_n$.

## Sommes partielles en cas de divergence

**THÉORÈME IX.3.2**

*Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction* **décroissante,** *et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Alors la* **suite** *$(\Delta_n)$ donnée par*

$$(\forall n) \quad \Delta_n = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) - \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

*croît et converge dans $\mathbb{R}_+$. En conséquence, si la série $\sum u_n$ diverge (ce qui équivaut à la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$), on a :*

$$(3) \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

*Démonstration :*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire : $\Delta_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, avec

$$0 \leqslant v_k = u_k - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} (f(k) - f(k+1))\,\mathrm{d}x = u_k - u_{k+1}\,.$$

Or la série $\sum_{k \geqslant 0} (u_k - u_{k+1})$ converge (elle a pour somme $u_0 - L$, où $L = \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)$). Donc la série à termes $\geqslant 0 : \sum v_k$, converge, ce qui entraîne bien que la suite croissante $(\Delta_n)$ converge dans $\mathbb{R}_+$.

Si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow \infty}{\uparrow} +\infty$, et puisque la suite $(\Delta_n)$ converge, il est clair que cela implique $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mais comme $\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_0$, et que $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n \longrightarrow \infty}{\uparrow} +\infty$, on a bien $\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$, d'où (3). ■

***Exemple 2 :*** Appliquons le théorème IX.3.2 à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $0 < \alpha \leqslant 1$ (à partir de 1 et non de 0). On obtient im l'équivalent de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$ : $S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$. Cela fait $S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \operatorname{Log} n$ si $\alpha = 1$ et $S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$. On a même un résultat plus précis : $0 \leqslant S_n - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant 1$, ce qui donne : $0 \leqslant S_n - \operatorname{Log} n \leqslant 1$ si $\alpha = 1$ et $0 \leqslant S_n - \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right)$ si $\alpha < 1$.

***Exercice 1 :*** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ on pose : $\sigma_n(\alpha) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \operatorname{Log}^\alpha k}$. Etudier, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}_+^*$, la nature de la série $\sum a^{-\sigma_n(\alpha)}$.

***Exercice 2 :*** Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ dans chacun des cas suivants ?

*a)* $u_n = \left[1 - \left(\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^n\right] \frac{\operatorname{Log} n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$

*b)* $u_n = \frac{1}{n \operatorname{Log} n} - \operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{Log}(n+1)}{\operatorname{Log} n}\right)$

*c)* $u_n = -\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}^\alpha k}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *d)* $u_n = \frac{\operatorname{Arg\,sh}(n^\alpha)}{\alpha \operatorname{Log} n} - 1$ $(\alpha > 0)$

*e)* $u_n = a^{n^\lambda} \operatorname{Log}^n n$ $(\lambda \in \mathbb{R}, a > 0)$ *f)* $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{(1 + x^2 |\sin x|)^{3/2}}$

*g)* $u_n = \sqrt[3]{\operatorname{Log}(2n+1)} - \sqrt[3]{\operatorname{Log}(2n)}$ *h)* $u_n = \left[\operatorname{tg} \frac{(n+1)\pi}{4n}\right]^{-n^{3/2}}$.

***Exercice 3 :*** Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha_n}{n \operatorname{Log} n}$. Montrer que si $\liminf_{n \to \infty} (\alpha_n) > 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Si $\limsup_{n \to \infty} (\alpha_n) < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Enoncer une règle analogue lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \operatorname{Log} n} - \frac{\beta_n}{n \operatorname{Log} n \operatorname{Log}_2 n}$. Généraliser.

***Exercice 4 :*** Démontrer les relations suivantes :

*a)* $\operatorname{Ent}\left(\sum_{k=1}^{10^4} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 198$ *b)* $\operatorname{Ent}\left(\sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}}\right) = 2\,997$

*c)* $\operatorname{Ent}\left(\sum_{k=1}^{10^9} \frac{\operatorname{Log} k}{\sqrt{k}}\right) = 1\,184\,167$ *d)* (de tête) $\zeta(3) < \frac{5}{4}$.

***Exercice 5 :*** On pose $l_1(x) = \operatorname{Log}(1+x)$ pour $x > 0$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, $l_{p+1}(x) = l_1(l_p(x))$, $S_p = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k l_1(k) \dots l_{p-1}(k)\, l_p^2(k)}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \frac{1}{2\, S_1} \frac{1}{n l_1^2(n)} + \frac{1}{2^2\, S_2} \frac{1}{n l_1(n)\, l_2^2(n)} + \dots + \frac{1}{2^n\, S_n} \cdot \frac{1}{n l_1(n) \dots l_{n-1}(n)\, l_n^2(n)}.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge, et préciser en quel sens sa convergence est plus lente que celle de toute série de Bertrand convergente.

***Exercice 6 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un nombre $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \mu$.

*a*) Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, montrer que $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty} f(p) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

*b*) Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} f(p) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\mu}{1 - e^{-\mu}} \int_0^{n} f(t)\,dt$.

Qu'obtient-on si $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ? Si $f$ est croissante et telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ? si $f$ est décroissante et telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ?

*Application :* *a*) Trouver un développement asymptotique à *trois* termes de $S_n = 1^1 + 2^2 + \cdots + n^n$.

*b*) Trouver la partie principale de $2^2 \operatorname{Log} 2 + 2^3 \operatorname{Log} 3 + \cdots + 2^n \operatorname{Log} n$.

***Exercice 7 :*** Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{Log} k}{k}$ pour $n \geqslant 1$. Donner un développement asymptotique de $S_n$ pour $n \longrightarrow \infty$, comportant *trois* termes non nuls infiniment petits.

***Exercice 8 :*** Trouver un développement asymptotique de

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{kn^2-1} + \frac{1}{kn^2} \quad (k \text{ entier fixé} > 1)\,.$$

***Exercice 9 :*** Pour $\alpha$ réel $> 0$, démontrer la relation

$$1^{\alpha n} + 2^{\alpha n} + \cdots + n^{\alpha n} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n^{\alpha n}}{1 - e^{-\alpha}}\,.$$

*Indication :* Majorer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left| \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\alpha n} - e^{-k\alpha} \right|$ en la coupant en deux par la valeur Ent $(n^\lambda)$ de $k$, $\lambda$ étant convenablement choisi.

***Exercice 10 :*** Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^\alpha)^n}$ selon les valeurs du nombre réel $\alpha > 0$.

***Exercice 11 :*** Si $a_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$, montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum u_n$, où $u_n = 2^n a_{2^n}$ sont de même nature, et retrouver ainsi la nature des séries de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\operatorname{Log} n)^\alpha}$.

***Exercice 12 :*** Discuter, selon $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \operatorname{Log}^\alpha i}{n^\beta}$.

## § IX.4 *SÉRIES A TERMES QUELCONQUES*

Au § II.5, nous avons introduit la notion fondamentale de série (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) absolument convergente et prouvé (théorème II.5.5) que *toute série absolument convergente est convergente.* Rappelons qu'une série qui converge sans être absolument convergente est dite *semi-convergente.* Rappelons également le **critère de Cauchy** des séries (théorème II.5.1) qui fournit la seule condition connue qui soit à la fois **nécessaire et** convergence d'une série. Ci-dessous, nous allons donner des conditions *suffisantes* de convergence pour quelques types particuliers de séries.

### Le théorème des séries alternées

Convenons d'appeler *série alternée* toute série de l'un des types $\sum (-1)^n v_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} v_n$, où $(\forall n)$ $v_n \in \mathbb{R}_+$. Elles méritent une attention particulière à cause du très simple théorème suivant :

**THÉORÈME IX.4.1** *(théorème des séries alternées)*

> *Soit $(v_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $v_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Alors la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge.*
>
> *De plus, si $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k v_k$ est son reste d'ordre n, on a :*
>
> $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |R_n| \leqslant v_{n+1} .$$

*Démonstration :*

Pour tout $n$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k$. Alors, pour $n \geqslant 1$,

$$S_{2n-1} \leqslant S_{2n-1} + (v_{2n} - v_{2n+1}) =$$
$$= S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1} + v_{2n} = S_{2n} \leqslant S_{2n} + (v_{2n-1} - v_{2n}) = S_{2n-2} .$$

On voit ainsi que la suite $(S_{2n})$ décroît et que la suite $(S_{2n+1})$ croît. De plus $(S_{2n})$ est minorée par $S_1$ et $(S_{2n+1})$ majorée par $S_0$. Donc chacune de ces suites converge dans $\mathbb{R}$, et puisque $0 \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, on voit qu'elles ont la même limite $S$, ce qui prouve que la suite $(S_n)$ converge elle-même vers cette limite $S \in \mathbb{R}$. Enfin, pour tout $n$ : $S_{2n-1} \leqslant S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$, d'où l'on déduit $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1}$ et $|R_{2n-1}| = |S - S_{2n-1}| \leqslant S_{2n} - S_{2n-1} = v_{2n}$, ce qui prouve bien : $(\forall n)$ $|R_n| \leqslant v_{n+1}$, et on peut même préciser que $R_n$ a le signe de $v_{n+1}$. ■

***Exemple 1 :*** Soit à étudier la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, où $\alpha > 0$. Si $\alpha > 1$, cette série est absolument convergente, car $\left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \right| \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$, donc elle converge.

Si $\alpha \leqslant 1$, elle n'est pas absolument convergente. Par ailleurs le théorème IX.4.1 ne lui est pas directement applicable car $\left( \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \right)$ n'est pas décroissante. L'idée vient alors de *développer* le terme général jusqu'à ce qu'on obtienne en dernier ou bien un terme *de signe constan* *terme général d'une série absolument convergente.* Par exemple ici :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^\alpha\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)}=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1-\frac{(-1)^n}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right),$$

différence de deux termes :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\quad \text{et}\quad v_n=\frac{1}{n^{2\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Le théorème IX.4.1 s'applique à la série alternée $\sum u_n$ qui est donc convergente. Quant à la série $\sum v_n$ qui, d'après le théorème IX.1.1, est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$, elle converge pour $\alpha>\frac{1}{2}$ et diverge pour $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$. Nous pouvons maintenant conclure : la série $\sum(u_n-v_n)$ converge ssi $\alpha>\frac{1}{2}$. En résumé la série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ est absolument convergente pour $\alpha>1$, semi-convergente pour $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$ et divergente pour $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

Une autre idée naturelle aurait consister à grouper les termes deux par deux et à étudier la série de terme général $\frac{1}{(2p)^\alpha+1}-\frac{1}{(2p+1)^\alpha-1}$, qui est à termes tous $<0$, en cherchant un équivalent.

***Remarque 1 :*** Pour $\alpha\in\left]0,\frac{1}{2}\right]$ on vient de voir que la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ diverge, alors que la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge. Cet exemple montre bien le danger que présente le remplacement du terme général d'une série par un équivalent dans le cas où ce terme général ne garde pas un signe constant (il en serait de même pour une série à termes complexes). On veillera donc, avant d'appliquer le théorème IX.1.1, à bien *vérifier le signe du terme général.*

***Exemple 2 :*** Soit $s$ un réel $>0$, et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(-1)^n\frac{\operatorname{Log}^q n}{n^s}$, où $q\in\mathbb{N}^*$ est donné. Etudions la série alternée $\sum u_n$. Elle ne vérifie pas tout à fait les hypothèses du théorème IX.4.1. En effet la fonction $\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{\operatorname{Log}^q x}{x^s}$, dont la dérivée est $x\mapsto\frac{\operatorname{Log}^{q-1}x}{x^{s+1}}(q-s\operatorname{Log}x)$, croît sur $[1,e^{q/s}]$ et décroît sur $[e^{q/s},+\infty[$, sa limite en $+\infty$ étant 0. Il en résulte qu'en posant $v_n=\frac{\operatorname{Log}^q n}{n^s}$, on a bien $v_n\underset{n\to\infty}{\downarrow}0$ mais la décroissance de

$(v_n)$ n'est assurée que pour $n \geqslant e^{q/s}$. Cela suffit à assurer la convergence de la série alternée $\sum_{n \geqslant e^{q/s}} (-1)^n v_n$, et par là même *la convergence de la série* $\sum u_n$. Mais *on ne peut appliquer la majoration du reste* $|R_n| \leqslant v_{n+1}$ *que pour* $n \geqslant e^{q/s}$.

***Exemple 3*** (théorème des séries alternées et intégrales généralisées) : Nous avons étudié au § VIII.3 l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$, où $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction *décroissante* telle que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Reprenons cette étude en utilisant le théorème des séries alternées. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \sin x \, dx = (-1)^k \int_0^{\pi} f(x + k\pi) \sin x \, dx = (-1)^k v_k .$$

On a

$$v_k \geqslant \int_0^{\pi} f((k+1)\pi) \sin x \, dx \geqslant \int_0^{\pi} f((k+1)\pi + x) \sin x \, dx = v_{k+1}$$

à cause de la décroissance de $f$ (et du fait que $\sin x \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$). La suite $(v_n)$ est donc décroissante, et comme $v_k \leqslant 2(f(k+1)\pi) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, on a : $v_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} 0$. Donc la série $\sum u_k$ converge d'après le théorème des séries alternées. Soit $S$ sa somme, et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soit alors $X \in \mathbb{R}_+$. Il est clair que :

$$\int_0^X f(x) \sin x \, dx = \int_0^{\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)} f(x) \sin x \, dx + \int_{\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)}^X f(x) \sin x \, dx .$$

Or, $f(x) \sin x$ gardant un signe constant sur $\left[\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right), X\right]$, on a :

$$\left| \int_{\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)}^X f(x) \sin x \, dx \right| \leqslant \left| \int_{\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)}^{\pi \operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right) + \pi} f(x) \sin x \, dx \right| = v_{\operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)} .$$

Quand $X \longrightarrow +\infty$, $\operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right) \longrightarrow +\infty$, $v_{\operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)} \longrightarrow 0$ et par conséquent

$$\int_0^X f(x) \sin x \, dx = S_{\operatorname{Ent}\left(\frac{X}{\pi}\right)} \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} S .$$

*L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$ *converge et a pour valeur S.* Mais on peut également préciser que

$$\left|\int_{N\pi}^{+\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{N\pi}^{(N+1)\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right| = v_N \leqslant 2\,f(N\pi)\,.$$

**Transformation d'Abel** (ou « **sommation par parties** »)

Soit deux suites complexes $(u_n)$ et $(v_n)$. Adoptons les notations suivantes. Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

$$(1)\qquad \begin{cases} s_{p,q} = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k \quad (\text{donc, } s_{p,q}=0 \text{ si } p\geqslant q)\,;\quad s_q = \sum_{k=0}^{q} u_k \\ S_{p,q} = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k\,v_k \quad (\text{donc, } S_{p,q}=0 \text{ si } p\geqslant q)\,;\quad S_q = \sum_{k=0}^{q} u_k\,v_k\,. \end{cases}$$

La *transformation d'Abel* consiste, pour $q>p$, à exprimer $S_{p,q}$ en utilisant les $s_{i,j}$. On obtient, pour tous entiers $N$, $p$, $q$ $(0\leqslant N\leqslant p\leqslant q)$ :

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{k=p+1}^{q} (s_{N,k}-s_{N,k-1})\,v_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_{N,k}\,v_k - \sum_{k=p}^{q-1} s_{N,k}\,v_{k+1} \\ &= s_{N,q}\,v_q - s_{N,p}\,v_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{q-1} s_{N,k}(v_k - v_{k+1})\,,\quad \text{soit :} \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \boxed{S_{p,q} = s_{N,q}\,v_q - s_{N,p}\,v_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{q-1} s_{N,k}(v_k - v_{k+1})}\,.$$

Dans le cas où $N=p$, cela donne, du fait que $s_{p,p}=0$ :

$$(3)\qquad \boxed{S_{p,q} = s_{p,q}\,v_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} \cdot s_{p,k}(v_k - v_{k+1})}\,.$$

De même, on peut exprimer $S_q$ à l'aide des $s_i$ et $S_{p,q}$ à l'aide des $s_i$.

$$(4)\qquad \boxed{S_{p,q} = s_q\,v_q - s_p\,v_{p+1} + \sum_{k=p+1}^{q-1} s_k(v_k - v_{k+1})}\,.$$

$$(5)\qquad \boxed{S_q = s_q\,v_q + \sum_{k=0}^{q-1} s_k(v_k - v_{k+1})}\,.$$

Ces diverses formules, dites de *sommation par parties,* permettent d'exploiter le critère de Cauchy des séries (théorème II.5.1). Il convient de remarquer préalablement que **la famille** $(S_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ (resp. $(s_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$) **est bornée ssi la suite** $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ (resp. $(s_q)_{q\in\mathbb{N}}$) **est bornée.**

**THÉORÈME IX.4.2**

> *Avec les notations* (1), chacune *des conditions* (I) *à* (III) *ci-après est* **suffisante** *pour que la série* $\sum u_n v_n$ *converge.*
>
> (I) *La suite* $(s_q)$ *est bornée,* $(v_n)$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $v_n \underset{n\to\infty}{\downarrow} 0$.
>
> (II) *La série* $\sum u_n$ *converge,* $(v_n)$ *est à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *et* décroissante.
>
> (III) *La suite* $(s_q)$ *est bornée,* $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *et la série* $\sum |v_n - v_{n+1}|$ *converge.*

*Démonstration :*

*Supposons* (I) *vérifiée.* Alors $s_q v_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et la série, à termes $\geqslant 0$, $\sum (v_k - v_{k+1})$ converge. Notons $M$ un réel $>0$ tel que $(\forall i \in \mathbb{N})$ $|s_i| \leqslant M$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$|s_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant M(v_k - v_{k+1}) \quad \text{et donc la série} \quad \sum s_k(v_k - v_{k+1})$$

est absolument convergente, donc convergente. La formule (5) montre alors que $S_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} s_k(v_k - v_{k+1})$.

*Supposons* (II) *vérifiée :* $v_k - v_{k+1} \geqslant 0$, donc $(v_k)$ converge vers $\lambda \geqslant 0$ et la série $\sum (v_k - v_{k+1})$ converge. Quant à la suite $(s_k)$ elle est bornée, puisque convergente. Comme ci-dessus on en déduit que la série $\sum s_k(v_k - v_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente. Si $s = \lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$, $s_q v_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} s\lambda$ et la relation (5) montre alors que $S_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} s\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} s_k(v_k - v_{k+1})$.

*Supposons* (III) *vérifiée.* Puisque $(s_k)$ est une suite bornée et que la série $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge, la série $\sum s_k(v_k - v_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente. De plus $s_q v_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et la formule (5) montre alors que $S_q \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} s_k(v_k - v_{k+1})$. ∎

Pour démontrer le théorème IX.4.2 on n'a utilisé que la relation (5). Les relations (2), (3) et (4) seraient utiles si l'on désirait obtenir des majorations *uniformes* des « paquets de Cauchy » $S_{p,q}$ lorsque $u_n$ et $v_n$ sont des fonctions d'un paramètre.

***Exemple 4 :*** Soit la suite $(v_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $v_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Donnons-nous $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et posons $u_n = e^{ni\theta}$.

Alors

$$(\forall q \in \mathbb{N})\; s_q = 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{iq\theta} = \frac{1 - e^{i(q+1)\theta/2}}{1 - e^{i\theta}} = e^{iq\theta} \frac{\sin (q+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

d'où $|s_q| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin \frac{\theta}{2}\right|}$ qui prouve que la suite $(s_q)$ est bornée.

Le théorème IX.4.2 (I) montre alors que **la série** $\sum v_n e^{in\theta}$ **converge,** et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n e^{in\theta} = \sum_{q=0}^{\infty} s_q (v_q - v_{q+1}) = \sum_{q=0}^{\infty} (v_q - v_{q+1})\, e^{iq\theta/2} \frac{\sin (q+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

En particulier, pour tout réel $\alpha > 0$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge $(\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z})$ et par conséquent les séries à termes réels $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ convergent.

**Convergence commutative**

**DÉFINITION IX.4.1**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que la série $\sum u_n$ est* ***commutativement convergente*** *ssi pour* toute *permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge.*

Soit $a_n$ et $b_n$ les parties réelle et imaginaire de $u_n$. Il est clair que la série $\sum u_n$ est commutativement convergente ssi les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ le sont.

**THÉORÈME IX.4.3**

*Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire une suite telle que la série $\sum u_n$ soit* ***absolument convergente****). Alors la série $\sum u_n$ est* ***commutativement convergente,*** *et on a, pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ étant absolument converge*

*Démonstration :*

Posons $\tilde{S} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$, et donnons-nous $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il est évident que

$$\sum_{i=0}^{n} |u_{\sigma(i)}| \leqslant \sum_{j=0}^{f(n)} |u_j| \leqslant \tilde{S}, \quad \text{avec} \quad f(n) = \underset{0 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} \; (\sigma(i)) \, .$$

Les sommes partielles de la série, à termes $\geqslant 0$, $\sum |u_{\sigma(i)}|$ sont majorées, donc (cf. théorème II.5.2) la série $\sum u_{\sigma(i)}$ converge absolument, donc elle converge. Il reste à vérifier que sa somme ne dépend pas de $\sigma$. Pour cela, notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $g(n) = 0$ si $0 \notin \sigma([\![0, n]\!])$ et $g(n) = \mathrm{Max}\, \{k \in \mathbb{N} \mid [\![0, k]\!] \subset \sigma([\![0, n]\!])\}$ si $0 \in \sigma([\![0, n]\!])$ et posons : $\tilde{R}_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$. Du fait que $\sigma$ est bijective résulte que la fonction $g$, qui est croissante, vérifie $g(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(n) \leqslant f(n)$ pour tout $n$. Soit $n_0$ un entier tel que $g(n) \geqslant 1$ pour $n \geqslant n_0$. Alors si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0$, on a :

$$(6) \quad \left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{j=0}^{g(n)} u_j \right| = \left| \sum_{k \leqslant n \mid \sigma(k) > g(n)} u_{\sigma(k)} \right| \leqslant \sum_{k \leqslant n \mid \sigma(k) > g(n)} |u_{\sigma(k)}| \leqslant \tilde{R}_{g(n)}$$

et, comme $\tilde{R}_{g(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\sum_{j=0}^{g(n)} u_j \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S = \sum_{j=0}^{\infty} u_j$ (puisque $g(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$), l'inégalité (6) montre que $\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S$. ■

Il est remarquable que cette propriété du théorème IX.4.3 *caractérise* la convergence absolue des séries complexes :

**THÉORÈME IX.4.4**

*Si une série $\sum u_n$ est commutativement convergente, elle est absolument convergente. Autrement dit, pour une série $\sum u_n$* ***à termes complexes,*** la convergence commutative et la convergence absolue sont équivalentes.

*Démonstration :*

Il suffit de le prouver avec une série $\sum u_n$ à termes réels ; plus précisément il suffit de prouver que si une telle série $\sum u_n$ est *semi-convergente,* elle ne peut pas être commutativement convergente. Notons $I$ (resp. $J$) l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geqslant 0$ (resp. $u_n < 0$). Les ensembles $I$ et $J$ sont infinis (sinon la série $\sum u_n$ serait absolument c

Notons $\varphi$ (resp. $\psi$) l'unique bijection *croissante* de $\mathbb{N}$ sur $I$ (resp. de $\mathbb{N}$ sur $J$). Les séries $\sum u_{\varphi(n)}$ et $\sum u_{\psi(n)}$ sont *divergentes* (sinon la série $\sum u_n$ serait absolument convergente), d'où $\sum_{i=0}^{n} u_{\varphi(i)} \underset{n\to\infty}{\uparrow} +\infty$. Soit $k \mapsto N_k$ une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $\quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \sum_{i=0}^{N_k} u_{\varphi(i)} \geqslant 2^k$.

Définissons $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ainsi : $f(i) = \varphi(i)$ pour $i \leqslant N_0$ ; $f(N_0+1) = \psi(0)$ ; pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f(i) = \varphi(i-k)$ si

$$i \in [\![ N_{k-1}+k+1, N_k+k ]\!] \quad \text{et} \quad f(N_k+k+1) = \psi(k)\,.$$

On voit d'abord que $f$ est bijective. De plus, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $n > N_0$, soit $k(n)$ l'entier tel que $N_{k(n)} < n \leqslant N_{k(n+1)}$. Alors, notant

$$M = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i| \ (\text{d'où } M \in \mathbb{R}_+)\,, \quad \sum_{i=0}^{n} u_{f(i)} \geqslant 2^{k(n)} - (k(n)+1)\,M\,,$$

d'où (puisque $k(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$) $\sum_{i=0}^{n} u_{f(i)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série $\sum u_n$ n'est pas commutativement convergente. ∎

***Remarque 2 :*** L'idée de cette démonstration a consisté à réordonner les termes $(u_n)$ de façon que le « débit de passage » des termes $< 0$ soit infiniment petit devant celui des termes $\geqslant 0$ de façon à obtenir des sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} u_{f(i)}$ arbitrairement grandes. En fait, en réordonnant de façon convenable les termes d'une série semi-convergente donnée, on voit facilement qu'on peut faire converger $\sum u_{\sigma(n)}$ vers un nombre quelconque donné à l'avance (cf. exercice 3), ou plus généralement obtenir une série dont la suite des sommes partielles admet pour ensemble de valeurs d'adhérence n'importe quel intervalle fermé non vide, donné à l'avance, de $\overline{\mathbb{R}}$ (cf. exercice 17).

***Exercice 1 :*** Nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

*a)* $u_n = \dfrac{\sin \operatorname{Log} n}{n}$

*b)* $u_n = \exp(\sin \pi \sqrt{n^2+an+b}) - 1,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

*c)* $u_n = \operatorname{tg} \pi \sqrt{n^2+an+b},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

*d)* $u_n = (-1)^n \left[ \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+an-1} + \dfrac{b}{n} \right],\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

*e)* $u_n = \left[ 1 + (-1)^n \dfrac{\operatorname{Log} n}{n^\alpha} \right]^{\operatorname{Log}^\beta n} - 1,\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$

*f)* $u_n = (-1)^n (n + (-1)^n)^{1/n} \sin \dfrac{1}{n + \sin\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$

*g)* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\operatorname{Log} n}}$ $\qquad$ *h)* $u_n = \sin \left[ \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{k}{n^{3\alpha}} \right],\ k > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$i)$ $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ $\qquad j)$ $u_n = \dfrac{1! - 2! + \cdots + (-1)^{n-1} n!}{(n+1)!}$.

**Exercice 2 :** Nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$a)$ $u_n = i^n \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$b)$ $u_n = (-1)^n n^\alpha x^{n^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x > 0$

$c)$ $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}$ et $u_n = (-1)^n \exp(-\operatorname{Log}^\alpha n)$, $\alpha > 0$

$d)$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + e^{in\theta} \operatorname{Log} n}$, $\theta \in \mathbb{R}$

$e)$ $u_n = -1 + \exp\left((-1)^n \dfrac{\operatorname{Log} n}{n}\right)$

$f)$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{Log}(n + (-1)^n)}$

$g)$ $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) \dfrac{\cos n\theta}{n + (-1)^n}$, $\theta \in \mathbb{R}$

$h)$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^\alpha + \cos n\theta}}$ $\quad (\theta \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$

$i)$ $u_n = \dbinom{\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

**Exercice 3 :** On donne $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On rappelle que la série harmonique alternée, de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n \geqslant 1)$ a pour somme $\operatorname{Log} 2$. On forme à partir des $(u_n)$ une nouvelle suite $(v_n)$ en prenant, dans l'ordre où ils se présentent, d'abord les $p$ premiers termes $> 0$ de $(u_n)$, puis les $q$ premiers termes négatifs de $(u_n)$, ensuite les $p$ termes $> 0$ qui suivent ceux déjà pris, puis les $q$ premiers termes $< 0$ suivant ceux déjà pris, et ainsi de suite. Montrer que la série $\sum v_n$ converge et a pour somme $\operatorname{Log} 2 + \dfrac{1}{2} \operatorname{Log} \dfrac{p}{q}$.

**Exercice 4 :** Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{C}^*$, puis $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{i\theta}\left(1 - \dfrac{b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. Montrer : si $b < 0$, la série $\sum u_n$ diverge ; si $b > 0$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, elle converge. Montrer par un exemple que, dans ce dernier cas, la convergence n'est pas forcément absolue.

**Exercice 5 :** Soit $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\alpha > 0$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$ ?

**Exercice 6 :** Nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

$a)$ $u_n = \sin \pi (n^\alpha + a^\alpha)^{1/\alpha}$, $a > 0$, $\alpha > 0$ $\qquad b)$ $u_n = \dfrac{\cos^k n\theta}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$

$c)$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + \sin n\theta}$, $\alpha > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ (attention au cas où $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$)

$d)$ $u_n = (-1)^n \dfrac{n^\alpha \sin \dfrac{1}{n^\alpha}}{n^\beta + (-1)^n}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$e)$ $u_n = \dfrac{\cos 2n \dfrac{\pi}{7}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ $\qquad f)$ $u_n = \cos\left(\pi n^2 \operatorname{Log} \dfrac{n}{n-1}\right)$.

**Exercice 7 :** Soit $(p_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $p_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$ et soit $(\varepsilon_n)$ une suite à valeurs dans $\{-1, +1\}$. On pose $\sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$ $(n \geqslant 1)$.

$a)$ Si la série $\sum \varepsilon_n p_n$ converge, alors $\sigma_n p_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*b*) On suppose la série $\sum \varepsilon_n p_n$ *semi-convergente.*

$b_1$) Prouver : $\liminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sigma_n}{n} \leqslant 0 \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sigma_n}{n}$.

$b_2$) Soit $A_n = \operatorname{card} \{i \in [\![1, n]\!] \mid \varepsilon_i = +1\}$ et $B_n = n - A_n$.
Prouver que $\left(\dfrac{A_n}{B_n}\right)$ est une suite convergente dont la limite est 1.

*Indication :* Ecrire

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i = (A_1 - B_1)(p_1 - p_2) + \cdots + (A_{n-1} - B_{n-1})(p_n - p_{n-1}) + (A_n - B_n) p_n ,$$

puis prouver que si la suite $\dfrac{A_n - B_n}{n}$ converge, ce ne peut être que vers 0.

**Exercice 8 :** Soit $(a_n)$, $(b_n)$ deux suites dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement. On pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et on suppose $b_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

*a*) Si la suite $\left(\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée et si la série $\sum \sqrt{n}\,(b_{n+1} - b_n)$ converge, alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

*b*) Appliquer ce résultat à la série $\sum \dfrac{(-1)^{\operatorname{Ent}(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ et achever son étude.

**Exercice 9 :** Soit une série $\sum z_n$ à termes complexes. On pose $z_n = a_n + ib_n$ ($a_n$, $b_n$ réels). On suppose : $(\forall n)\ a_n \in \mathbb{R}_+$ et $\sum a_n$ converge et on suppose également que la série $\sum z_n^2$ *converge.* Prouver qu'elle converge *absolument.*

**Exercice 10 :** *a*) Soit $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes $> 0$. Montrer que

$$n \left( \prod_{j=1}^{n} u_j \right)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

*b*) Soit $(z_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complexe, $(b_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $b_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$. On suppose que la série $\sum \dfrac{z_n}{b_n}$ converge. Montrer que $\dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

**Exercice 11 :** Soit un réel $\alpha \in ]0, 1[$.

*a*) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{|\sin(n^\alpha)|}{n}$ diverge.

*b*) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $(\forall X > 0)$ $\left| \displaystyle\int_0^X \sin(x^\alpha)\, dx \right| \leqslant AX^{1-\alpha}$, puis, qu'il existe $B > 0$ tel que $\quad (\forall k \in \mathbb{N})$ $\left| \displaystyle\int_0^k \sin(x^\alpha)\, dx - \sum_{p=0}^{k} \sin(p^\alpha) \right| \leqslant Bk^\alpha$.

*c*) En déduire que si $\gamma > \operatorname{Max}(\alpha, 1 - \alpha)$, la série $\sum \dfrac{\sin(n^\alpha)}{n^\gamma}$ converge.

*Indication :* Evaluer $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\sin(p^\alpha)}{p^\gamma}$ à l'aide d'une transformation d'Abel.

**Exercice 12 :** Soit deux réels $\alpha$ et $\beta$, avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta \leqslant 1$. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^{\operatorname{Ent}(n^\alpha)}}{n^\beta}$. Montrer que si $\alpha + \beta \leqslant 1$, la série $\sum u_n$ diverge ; si $\alpha + \beta > 1$ et $\beta > \alpha$ la série $\sum u_n$ converge.

*Indication :* Soit $\mathscr{E}_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \leqslant n^{\alpha} < p+1\}$ et $v_p = \sum_{n \in \mathscr{E}_p} \frac{1}{n^{\beta}}$. Estimer card $(\mathscr{E}_p)$, montrer $v_p \underset{p \to \infty}{\sim} I_p = \int_{p^{1/\alpha}}^{(p+1)^{1/\alpha}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\beta}}$, majorer $|v_p - I_p|$ et étudier la série $\sum (-1)^p v_p$.

***Exercice 13 :*** Est-il possible de trouver une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto a_n$ telle que la série de terme général $\frac{a_n}{n^2}$ converge ?

***Exercice 14 :*** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ et $f(n) =$ nombre d'intervalles de $\mathbb{N}$ maximaux pour l'inclusion dans l'ensemble des intervalles de $\mathbb{N}$ inclus dans $\sigma([\![0, n]\!])$. Montrer que *si $f$ est majorée,* pour toute série convergente $\sum u_n$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et a la même somme que $\sum u_n$.

***Exercice 15 :*** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. On pose $\rho(n) = |\sigma(n) - n| \sup_{m \geqslant n} |u_m|$. Montrer que si $\rho(n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et a la même somme que $\sum u_n$.

***Exercice 16 :*** On donne une suite $(u_n)$ de $\mathbb{R}^*$ telle que $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que, pour $r \in ]0, 1[$ convenable, on ait $-1 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$ pour tout $n$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

***Exercice 17 :*** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, avec $u_n \neq 0$ pour $n \geqslant 1$ et $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On pose, selon l'usage habituel, $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_n^+ = \text{Max}\,(u_n, 0)$, $u_n^- = \text{Max}\,(-u_n, 0)$ et on suppose que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ divergent. Par ailleurs on donne dans $\bar{\mathbb{R}}$ deux éléments quelconques $a$ et $b$, avec $a \leqslant b$.

*a*) Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ telle que, en posant, pour tout $n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$, on ait $\liminf_{n \to \infty} (S_n) = a$, $\limsup_{n \to \infty} (S_n) = b$.

*Indication :* Se ramener au cas où $a \leqslant 0 \leqslant b$ et $u_0 = 0$. Supposer d'abord $a$ et $b$ finis. Soit alors $(f(n))$ et $(g(n))$ les suites strictement croissantes d'images $E_+ = \{n \in \mathbb{N}^* \mid u_n > 0\}$ et $E_- = \mathbb{N}^* \setminus E_+$. Soit $p_1$ le premier entier tel que $\sum_{k=1}^{p_1} u_{f(k)} > b$, puis $q_1$ le premier entier tel que $\sum_{k=1}^{p_1} u_{f(k)} + \sum_{k=1}^{q_1} u_{g(k)} < a$, etc. Poser $\sigma(0) = 0$, $\sigma(k) = f(k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $\sigma(k) = g(k - p_1)$ pour $p_1 + 1 \leqslant k \leqslant p_1 + q_1$, etc. Etudier ensuite le cas où $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, etc.

*b*) $\sigma$ étant choisie comme en *a*), montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence dans $\bar{\mathbb{R}}$ de la suite $(S_n)$ est $[a, b]$ (cf. § III.8, exercice 12).

***Exercice 18 :*** On donne $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et une suite complexe de terme général $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, avec $(\forall n)\ r_n > 0$ et $\theta_n \in [-\alpha, +\alpha]$. Montrer que les séries $\sum z_n$ et $\sum |z_n|$ ont même nature.

***Exercice 19 :*** Soit $(\lambda_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. On suppose cette suite *convexe,* c'est-à-dire telle que $(\forall n)\ \ \lambda_n - 2\lambda_{n+1} + \lambda_{n+2} \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in [0, \pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx \geqslant 0$.

*Indication :* Soit $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ et $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)$. Prouver

$$(\forall x) \quad B_n(x) = \frac{(n+1)\sin x - \sin(n+1)x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \quad (\text{pour } x \notin 2\pi\mathbb{Z}).$$

En déduire le signe de $B_n(x)$ et utiliser ce résultat convenablement.

***Exercice 20 :*** *a*) Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\{-1, +1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n \sqrt{2}}}$.

Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ x_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}{2^k} \right)$.

*b*) Montrer : $\forall x \in [-2, +2]$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\{-1, +1\}$ telle que $x = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k}{2^k} \right)$. La suite $(\varepsilon_n)$ est-elle unique ? Quand est-elle périodique ?

*Réponse :* Unique ssi $x = 2 \sin \alpha \frac{\pi}{4}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ ; périodique ssi $x = 2 \sin \alpha \frac{\pi}{4}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

***Exercice 21*** (nombres de Liouville [1]) : Cet exercice suppose connue la notion de *nombre algébrique* (cf. Tome 1, Chap. VII).

*a*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique de degré $\nu \geqslant 2$. Montrer :

$$\exists c > 0 \mid \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{c}{q^\nu}.$$

*Indication :* Soit $f(X) = a_0 X^\nu + \cdots + a_\nu \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\frac{1}{a} f(X)$ soit le polynôme minimal de $\alpha$ sur $\mathbb{Q}$. Prouver $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| |f'(\theta)|$, où $\theta$ est entre $\alpha$ et $p/q$ et remarquer que $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geqslant \frac{1}{q^\nu}$. Conclure.

*b*) Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$ et une suite $(b_n)$ de $\mathbb{N}^*$ telle que $(\forall n)\ nb_n \mid b_{n+1}$. Déduire de *a*) que le réel $\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-b_n}$ est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). Un nombre tel que $\Lambda$ est appelé *nombre de Liouville*.

*c*) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a > 2$ et $b = (b_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ avec $(\forall i)\ b_{i+1} \geqslant 2 + b_i$, et $\limsup_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = +\infty$. Soit $\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{-b_n} = \theta(b)$. Utiliser *a*) pour prouver que $\theta(b)$ est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). Montrer que $b \mapsto \theta(b)$ est injective et en déduire que l'ensemble des $\theta(b)$ quand $b$ varie est *non dénombrable*, et même qu'il est équipotent à $\mathbb{R}$.

*d*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ algébrique de degré $\nu \geqslant 2$. Nature de la série $\sum \frac{a^n}{\sin(\pi n \alpha)}$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

***Exercice 22 :*** Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et $\mathscr{E}_B$ l'ensemble des suites bornées *appartenant* à $\mathscr{E}$. On donne $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathscr{E}$, on définit $\Phi(t) = \frac{1}{t_1^a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_1 t_2 \dots t_n}{t_{n+1}^a} \in \bar{\mathbb{R}}$.

*a*) Montrer : $\operatorname{Min}_{t\in\mathscr{E}_B} \Phi(t) = a^{-a}(a+1)^{a+1}$. *b*) Calculer $\operatorname{Inf}_{t\in\mathscr{E}} \Phi(t)$.

***Exercice 23 :*** Nature des séries $\sum u_n$ dont les termes généraux sont :

*a*) $u_n = \dfrac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$ *b*) $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos nt^2\, dt$

*c*) $u_n = \dfrac{\sin(2\pi e\, n!)}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ *d*) $= \sin(\pi e\, n!)$.

---

[1] Joseph *Liouville* (1809-1882), mathématicien français.

***Exercice 24 :*** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. On prend deux termes positifs dans $(u_n)$, puis $u_n$ négatif, et ainsi de suite. Montrer que la série obtenue, après ce changement dans l'ordre des termes de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, diverge.

***Exercice 25 :*** Soit une série *alternée* $\sum u_n$ $(\forall n, (-1)^n u_n \in \mathbb{R}_+)$. On définit la suite $(\alpha_n)$ par $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-1}{1+\alpha_n}$. Montrer : si, à partir d'un certain rang $-1 < \alpha_n \leq 0$ la série $\sum u_n$ diverge. Si pour $n \geq n_0$, on a : $n\alpha_n > k > 0$, la série converge (règle de Darboux).

***Exercice 26 :*** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$.

Montrer que $f$ s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+^*$. (De manière précise, montrer que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$, $f(k\pi + \pi/2) < 0$ et $f(k\pi) > 0$).

## § IX.5 *PRODUIT DE DEUX SÉRIES*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On leur associe la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$(7) \qquad (\forall n) \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q} v_q .$$

Cette suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **produit de convolution** (ou : *convolée*) des deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$. La série associée $\sum w_n$ est appelée **série-produit** des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

***Remarque 1 :*** On aurait pu définir $(w_n)$ en se plaçant dans l'algèbre $\mathbb{C}[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ à partir de la relation : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} w_n X^n = \Big(\sum_{p \geq 0} u_p X^p\Big)\Big(\sum_{q \geq 0} v_q X^q\Big)$, ce qui justifie en partie le nom de série-produit. Mais il sera encore mieux justifié par le résultat suivant :

**Théorème IX.5.1**

*Soit $(u_n)$, $(v_n)$ deux suites appartenant à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, c'est-à-dire telles que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient* ***absolument convergentes.*** *Notons $\sum w_n$ la série-produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ définie par $(\forall n)\ w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$. Alors la série $\sum w_n$ est* ***absolument convergente,*** *et* ***sa somme est le produit*** *de celles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ :*

$$(8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\Big).$$

*Démonstration :*

$a$) Supposons d'abord que : $(\forall n)\ u_n \in \mathbb{R}_+$ et $v_n \in \mathbb{R}_+$. Notant, pour tout $n$,

$$J_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leqslant n\}, \quad U_n = \sum_{p=0}^{n} u_p, \quad V_n = \sum_{q=0}^{n} v_q, \quad W_n = \sum_{r=0}^{n} w_r,$$

on a : $$W_n = \sum_{r=0}^{n} \Big( \sum_{p+q=r} u_p v_q \Big) = \sum_{(p,q)\in J_n} u_p v_q .$$

Mais $$\left[\!\left[ 0, \operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) \right]\!\right]^2 \subset J_n \subset [\![0, n]\!]^2,$$

et $$(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \sum_{(p,q)\in [\![0,N]\!]^2} u_p v_q = U_N V_N,$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$U_{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} V_{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} \leqslant W_n \leqslant U_n V_n .$$

Posons $U = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$, $V = \sum_{j=0}^{\infty} v_j$. Il est clair que $U_n V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} UV$ (produit des limites) et que $U_{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} V_{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} UV$. L'encadrement de $W_n$ prouve bien, dans ce cas, que $W_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} UV$.

$b$) Etudions maintenant le cas général où $u_n \in \mathbb{C}$ et $v_n \in \mathbb{C}$. Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ étant absolument convergentes sont convergentes. Nous noterons leur somme respectivement $U$ et $V$. Nous garderons les notations précédentes pour $U_n$, $V_n$, $W_n$ et nous poserons, en outre, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{U}_n = \sum_{p=0}^{n} |u_p|, \quad \tilde{V}_n = \sum_{q=0}^{n} |v_q|, \quad \tilde{w}_n = \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|,$$

$$\tilde{W}_n = \sum_{r=0}^{n} \tilde{w}_r, \quad \tilde{U} = \sum_{p=0}^{\infty} |u_p| \quad \text{et} \quad \tilde{V} = \sum_{q=0}^{\infty} |v_q| .$$

On a déjà vu que $\tilde{W}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{U}\tilde{V}$. Mais il est clair que $(\forall n)\ |w_n| \leqslant \tilde{w}_n$, donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|U_n V_n - W_n| = \Big| \sum_{(p,q)\in [\![0,n]\!]^2 \setminus J_n} u_p v_q \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{(p,q)\in [\![0,n]\!]^2 \setminus J_n} |u_p|\,|v_q| = \tilde{U}_n \tilde{V}_n - \tilde{W}_n .$$

Mais $\tilde{U}_n \tilde{V}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{U}\tilde{V}$ et $\tilde{W}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{U}\tilde{V}$, donc $U_n V_n - W_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et comme $U_n V_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} UV$, cela prouve que $W_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} UV$, d'où $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = UV$. ■

***Exemple 1 :*** Soit $(z, t) \in \mathbb{C}^2$. Les séries $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{n \geqslant 0} \frac{t^n}{n!}$ sont absolument convergentes et ont pour sommes respectives $e^z$ et $e^t$ (cf. § V.3) par définition même de l'exponentielle d'un nombre complexe. Le théorème IX.5.1 nous dit que la série-produit est absolument convergente et a pour somme $e^z \cdot e^t$. Or, cette série-produit $\sum w_n$ a pour terme général

$$w_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{p!q!} z^p t^q = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p t^{n-p} =$$

$$= \frac{1}{n!} (z+t)^n \quad (\textit{formule du binôme}) .$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = e^{z+t}$, ce qui prouve que $e^{z+t} = e^z \cdot e^t$, résultat déjà obtenu au § V.3 par une autre voie.

***Exemple 2 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Les séries géométriques $\sum a^n$ et $\sum b^n$ sont absolument convergentes et ont pour sommes respectives $\frac{1}{1-a}$ et $\frac{1}{1-b}$. La série-produit est $\sum c_n$, avec $c_n = \sum_{p+q=n} a^p b^q$, d'où

$$c_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \text{ si } a \neq b \quad \text{et} \quad c_n = (n+1)\, a^n \text{ si } a = b .$$

On en déduit : $\quad$ si $a \neq b$ , $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{(1-a)(1-b)}$,

ce qui est facile à vérifier directement, et

$$\text{si } a = b , \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a^n = \frac{1}{(1-a)^2} ,$$

ce qui l'est moins.

Muni de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-ev et du produit de convolution défini au début de ce §, l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ devient une $\mathbb{C}$-algèbre (unifère, associative) commutative (qui n'est autre que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[X]]$ des *séries formelles* sur $\mathbb{C}$ étudiée au chapitre VIII du tome 1). Le théorème IX.5.1 exprime que $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ *est une sous-*$\mathbb{C}$*-algèbre de cette algèbre.* En définissant le produit de convolution d'un r de suites complexes $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ par

$$(\forall n) \quad w_n = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n}} u_{1,\alpha_1} u_{2,\alpha_2} \cdots u_{p,\alpha_p},$$

il est clair que si chaque suite $(u_{i,n})$ appartient à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, alors la suite $(w_n)$ appartient aussi à $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \prod_{i=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{i,n} \right).$$

***Exemple 3 :*** Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, prenons $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} = (a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite produit de convolution des $(u_{i,n})$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ a pour terme général $w_n = a^n \operatorname{card}(E_{n,p})$, où

$$E_{n,p} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p \mid \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_p = n\}.$$

Nous avons vu au tome 1, § III.4, que $\operatorname{card}(E_{n,p}) = K_n^p = \binom{n+p-1}{n}$.

On prouve ainsi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{n} a^n = \frac{1}{(1-a)^p}$.

***Remarque 2 :*** Le théorème IX.5.1 ne s'étend pas aux séries semi-convergentes. Prenons par exemple $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{1/4}}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. La série-produit a pour terme général

$$w_n = (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+1)^{1/4} (q+1)^{1/4}}.$$

Or $|w_n| \geqslant \dfrac{n+1}{(n+1)^{1/2}} = \sqrt{n+1}$. Donc $w_n \not\to 0$, ce qui interdit à la série $\sum w_n$ de converger. Cependant si l'une des séries est absolument convergente et l'autre semi-convergente, on peut montrer (cf. exercice 1) que la série-produit converge et que sa somme est encore le produit des sommes.

***Exercice 1*** (théorème de Mertens [1]) : On donne deux séries à termes complexes $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ telles que $\sum u_n$ converge absolument et $\sum v_n$ converge. Soit $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ et $V_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} v_k$ pour $p \leqslant q$, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $\Delta_n = U_n V_n - \sum_{p=0}^{n} w_p$.

*a*) Montrer que $(\forall n \geqslant 1)$ $\Delta_n = \sum_{r=1}^{n} u_r V_{n+1-r,n}$.

[1] Franz Carl Joseph *Mertens* (1840-1927).

*b*) En appliquant le critère de Cauchy des séries à $\sum v_n$, en déduire que $\Delta_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et par conséquent que $\sum_{p=0}^{n} w_p \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

***Exercice 2 :*** Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites éléments de $l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$, de sommes respectives $U$ et $V$. On pose $z_n = \sum_{\alpha\beta = n} u_\alpha v_\beta$ $(n \geq 1)$. Montrer que la série $\sum z_n$ est absolument convergente, et que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = UV$.

***Exercice 3 :*** Soit $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ deux suites dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $u_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$, $v_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Pour $n \geq 1$ on pose

$$w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1\,, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n\,, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n\,.$$

On note $(\mathscr{P})$ la propriété :

$$(\mathscr{P}) \qquad \left(v_n \sum_{i=1}^{n} u_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } u_n \sum_{i=1}^{n} v_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right).$$

Montrer : $(\mathscr{P}) \Leftrightarrow$ (la série $(-1)^{n-1} w_n$ converge et a pour somme $AB$).

***Exercice 4 :*** Soit $\alpha$ réel $> 0$. On pose $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, puis $(\forall n)$ $v_n = u_n$. Etudier, selon les valeurs de $\alpha$, la suite convolée $(w_n)$ et la série-produit $\sum w_n$.

## § IX.6 *NOTIONS SUR LES PRODUITS INFINIS*

De même qu'au § II.5 la notion de limite a servi à donner un sens à des *sommes infinies* de nombres, nous allons ici l'utiliser pour donner un sens à des *produits infinis* de nombres $\neq 0$. Par commodité nous ferons démarrer ces produits à l'indice 0, laissant au lecteur le soin de transposer les résultats à des produits démarrant à un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ quelconque. $K$ désigne comme d'habitude l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**DÉFINITION IX.6.1**

*Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments* ***non nuls*** *de $K^*$. On dit que le* ***produit infini*** $\prod z_n$ ***converge*** *(ou : est convergent) ssi la suite $(P_n)$ définie par $(\forall n)$ $P_n = \prod_{k=0}^{n} z_k$ admet une* ***limite non nulle*** *dans $K$. Dans tous les autres cas on dit que le produit infini $\prod z_n$* ***diverge.***

*La suite $(P_n)$ est appelée suite des* ***produits partiels*** *du produit infini $\prod z_n$. En cas de convergence, le nombre $\lim\limits_{n \to \infty} P_n$ se note $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ (où l'indice $n$ est muet).*

Le terme $z_n$ s'appelle **terme général** du produit infini $\prod z_n$. En cas de convergence, le nombre $\prod_{n=0}^{\infty} z_n$ s'appelle la **valeur** du produit infini. Les produits infinis jouissent de propriétés analogues à celles des séries :

• ($P_1$) *Si un produit infini $\prod z_n$ converge, son terme général tend vers* 1.

En effet, de $\dfrac{P_n}{P_{n-1}} = z_n$, comme $P_{n-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} P = \prod_{n=0}^{\infty} z_n$ et $P_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} P \neq 0$, on déduit, pour $n \geqslant 1$ : $z_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$. Bien entendu cette **condition nécessaire** de convergence n'est pas suffisante, comme le prouve l'exemple $z_n = \mathrm{e}^{1/n}$ puisque $\prod_{k=1}^{n} z_k = \mathrm{e}^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

• ($P_2$) *On ne change pas la nature* (convergence ou divergence) *d'un produit infini en modifiant un nombre* ***fini*** *quelconque de ses termes.* En effet la suite des produits partiels devient $(\widehat{P}_n)$ telle que $\left(\dfrac{\widehat{P}_n}{P_n}\right)$ est stationnaire.

• ($P_3$) (groupement de termes consécutifs).

Soit $(N_k)$ une suite *strictement croissante* dans $\mathbb{N}$. Posons $t_0 = \prod_{i=0}^{N_0} z_i$ et $t_k = \prod_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} z_i$ pour $k \geqslant 1$. *Si le produit $\prod z_n$ converge, il en est de même du produit $\prod t_k$,* et $\prod_{k=0}^{\infty} t_k = \prod_{n=0}^{\infty} z_n$. La réciproque est fausse (sauf si $(\forall i)\, z_i \in \mathbb{R}_+$).

• ($P_4$) Soit deux suites $(z_n)$ et $(t_n)$ dans $K^*$. Si les produits infinis $\prod z_n$ et $\prod t_n$ convergent, alors le produit infini $\prod (z_n t_n)$ converge et sa valeur est $\left(\prod_{n=0}^{\infty} z_n\right)\left(\prod_{n=0}^{\infty} t_n\right)$.

Cette propriété s'étend par récurrence à un nombre fini de facteurs.

• ($P_5$) Le produit infini $\prod z_n$ converge ssi le produit $\prod \dfrac{1}{z_n}$ converge, et si c'est le cas $\prod_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} z_n}$.

## Produits infinis à termes réels

**PROPOSITION IX.6.1**

*Soit $(z_n)$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour que le produit infini $\prod z_n$ converge, il faut et il suffit que la série $\sum \operatorname{Log} z_n$ converge. Si c'est le cas, on a :* $\prod_{n=0}^{\infty} z_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Log} z_n\right)$.

*Démonstration :*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} z_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Log} z_k$. Alors $P_n = e^{S_n}$ et $S_n = \operatorname{Log} P_n$, d'où le résultat, par continuité des fonctions exp sur $\mathbb{R}$ et Log sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Ce résultat s'étend à une suite $(z_n)$ dans $\mathbb{R}^*$ dont les termes ne deviennent $> 0$ qu'à partir d'un certain rang.

**COROLLAIRE 1**

*Soit $(u_n)$ une suite de réels tous $> -1$, et* **de signe constant** *(au sens large). Alors le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge (resp. diverge) ssi la série $\sum u_n$ converge (resp. diverge).*

*Démonstration :*

Si $u_n \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$, le produit $\prod (1 + u_n)$ et la série $\sum u_n$ divergent tous deux. Si $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\operatorname{Log}(1 + u_n) \underset{n \to \infty}{\sim} u_n$ et comme $u_n$ est de signe constant, les séries $\sum \operatorname{Log}(1 + u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature (théorème IX.1.1), d'où le résultat, compte tenu de la proposition IX.6.1. ■

***Exemple 1 :*** Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge. La formule de Wallis (cf. § VIII.2) montre que sa valeur est $\frac{2}{\pi}$.

En revanche les produits infinis $\prod \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\prod \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ divergent (car la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge). Il est d'ailleurs flagrant que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n + 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

Plus généralement, pour $a \in \mathbb{R}^*$, le produit infini $\prod_{n > |a|} \left(1 + \frac{a}{n}\right)$ diverge.

**COROLLAIRE 2**

*Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors le produit infini $\prod (1 + u_n)$ et la série $\sum u_n^2$ sont de même nature.*

*Démonstration :*

$\mathrm{Log}\,(1 + u_n)$ est défini pour $n$ assez grand, car $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $$\mathrm{Log}\,(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2} u_n^2 + \varepsilon_n \,, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\in} o(u_n^2)\,.$$

Les séries $\sum (\mathrm{Log}\,(1 + u_n) - u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature, car $u_n^2 \geqslant 0$. Comme $\sum u_n$ converge par hypothèse, les séries $\sum \mathrm{Log}\,(1 + u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont donc de même nature, d'où le résultat, compte tenu de la proposition IX.6.1. ■

***Exemple 2 :*** Le produit infini $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ est convergente mais la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

***Remarque 1 :*** Attention ! Le produit infini $\prod (1 + u_n)$ peut converger *sans que la série $\sum u_n$ converge*. Prenons par exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$, terme général d'une série divergente $\left(S_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{2} \mathrm{Log}\, n\right)$. On a alors :

$$\mathrm{Log}\,(1 + u_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

donc la série $\sum \mathrm{Log}\,(1 + u_n)$ converge, ce qui entraîne la convergence du produit $\prod (1 + u_n)$.

**Produits infinis à termes complexes quelconques**

**Théorème IX.6.1**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Pour que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ soit* ***convergent,*** *il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété (I) ci-après, appelée* ***critère de Cauchy des produits infinis.***

(I) *Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous entiers $n$, $p$ vérifiant $N \leqslant n < p$, on ait :*

$$\left| \prod_{k=n+1}^{p} (1 + u_n) - 1 \right| \leqslant \varepsilon .$$

*Démonstration :*

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$, d'où si $n < p$ : $\dfrac{P_p}{P_n} = \prod_{k=n+1}^{p} (1 + u_k)$. Si le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge, soit $P$ sa valeur. Puisque les $P_n$ sont $\neq 0$ et $P_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} P \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|P_i| \geqslant \alpha$ pour tout $i$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. La suite $(P_i)$ étant de Cauchy, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $((n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $N \leqslant n < p) \Rightarrow |P_p - P_n| \leqslant \varepsilon\alpha$. Pour de tels couples $(n, p)$, il s'ensuit : $\left| \dfrac{P_p}{P_n} - 1 \right| \leqslant \varepsilon \dfrac{\alpha}{|P_n|} \leqslant \varepsilon$, ce qui vérifie (I).

Réciproquement, supposons (I) satisfait. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \dfrac{P_p}{P_n} - 1 \right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ dès que $N_1 < n < p$. Alors, pour $p \geqslant N_1$ : $|P_p - P_{N_1}| \leqslant \dfrac{1}{2} |P_{N_1}|$, d'où $\dfrac{1}{2} |P_{N_1}| \leqslant |P_p| \leqslant \dfrac{3}{2} |P_{N_1}|$. On a donc des réels $\alpha > 0$ et $A > \alpha$ tels que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\alpha \leqslant |P_n| \leqslant A$. Soit alors $\varepsilon$ réel $> 0$. Prenons $N$ tel que $(N \leqslant n < p) \Rightarrow \left( \left| \dfrac{P_p}{P_n} - 1 \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{A} \right)$. Pour de tels couples $(n, p)$ on a donc $|P_p - P_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{A} |P_n| \leqslant \varepsilon$. Donc la suite $(P_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, et par suite, converge dans $\mathbb{C}$ vers $P \in \mathbb{C}$. Mais comme $|P_n| \geqslant \alpha$ pour tout $n$, nécessairement $|P| \geqslant \alpha$, ce qui écarte la possibilité $P = 0$, et le produit $\prod (1 + u_n)$ est bien convergent. ■

**Définition IX.6.2**

*Un produit infini $\prod (1 + u_n)$ (où $(\forall n)$ $u_n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$) est dit* ***absolument convergent*** *ssi la série $\sum u_n$ est* ***absolument convergente.***

**THÉORÈME IX.6.2**

*Si le produit infini* $\prod (1+u_n)$ *(où* $(\forall n)$ $u_n \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$*) est* ***absolument convergent,*** *alors il est* ***convergent.***

*Démonstration :*

Conservons les notations introduites pour prouver le théorème IX.6.1. D'après l'hypothèse, le produit infini $\prod (1+|u_n|)$ converge (cf. corollaire 1 de la proposition IX.6.1), donc vérifie le critère de Cauchy (I) du théorème IX.6.1. Pour tous entiers $n$, $p$ $(n<p)$, le développement du produit $\prod_{k=n+1}^{p} (1+u_k)$ donne (cf. tome 1, chapitre VII) :

$$\prod_{k=n+1}^{p} (1+u_k) = 1 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{p-n},$$

où $S_q = \sum_{n+1 \leqslant k_1 < \cdots < k_q \leqslant p} u_{k_1} u_{k_2} \ldots u_{k_q}$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-n$. D'où :

$$\left|\left(\prod_{k=n+1}^{p} (1+u_k) - 1\right)\right| \leqslant \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \cdots + \tilde{S}_{p-n},$$

où $\quad \tilde{S}_q = \sum_{n+1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_q \leqslant p} |u_{k_1}|\,|u_{k_2}|\ldots|u_{k_q}| \quad$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-n$,

soit : $$\left|\left(\prod_{k=n+1}^{p} (1+u_k) - 1\right)\right| \leqslant \prod_{k=n+1}^{p} (1+|u_k|) - 1,$$

ce qui montre que le produit infini $\prod (1+u_k)$ vérifie *a fortiori* le critère de Cauchy du théorème IX.6.1, donc il converge. ■

***Exemple 3 :*** Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z|<1$, les produits infinis suivants sont absolument convergents, donc convergents :

$$\prod_{n \geqslant 1} (1-z^n), \quad \prod_{n \geqslant 1} \frac{1}{1-z^n}, \quad \prod_{n \geqslant 1} (1+z^{n^2}), \quad \prod_{n>|z|} \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Un produit infini qui converge sans être absolument convergent est dit **semi-convergent** (ou encore : **conditionnellement convergent**).

**CONVENTION**

*Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite quelconque de nombres complexes, telle que la série* $\sum |u_n|$ *converge, ce qui entraîne :* $u_n \neq -1$ *sauf pour un nombre fini d'indices. On dit alors que le produit infini* $\prod (1+u_n)$ *est absolument convergent, et on lui attribue la valeur* (qui est indépendante de $N$) $\left(\prod_{k=0}^{N} (1+u_k)\right) \times \prod_{k=N+1}^{\infty} (1+u_k)$, *où* $N \in \mathbb{N}$ *est tel que* $u_n \neq -1$ *pour* $n > N$.

Cette convention permet, dans le cas où certains des $u_n$ valent $-1$, d'attribuer au produit infini la valeur 0. On dira par exemple, pour $z \in \mathbb{C}$, que le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ converge (car absolument convergent), que $z$ soit ou non dans $\mathbb{Z}^*$ (avec la valeur 0 ssi $z \in \mathbb{Z}^*$). Les propriétés $(P_3)$ et $(P_4)$ restent évidemment vraies, avec des produits infinis absolument convergents au sens de cette convention.

Nous aurons besoin, pour la fin de ce §, du lemme suivant :

**Lemme 1**

*Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :* $|e^z - 1 - z| \leq \frac{1}{2} |z|^2 e^{|z|}$.

*Démonstration :*

On écrit : $|e^z - 1 - z| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| = \frac{|z|^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 z^n}{(n+2)!} \right| \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$. ∎

En voici une première application :

**Proposition IX.6.2**

*Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ telle que les séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|^2$ convergent. Alors le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge.*

*Démonstration :*

Posons $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$. Puisque $S_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} S$, il s'ensuit (proposition V.3.4) $e^{S_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^S$ et aussi : $e^{-S_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{-S}$. Ecrivons $e^{-S_n} P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k) e^{-u_k}$, avec $e^{-u_k} = 1 - u_k + u_k^2 \rho_k$ et $|\rho_k| \leq \frac{1}{2} e^{|u_k|}$ d'après le lemme 1. Alors $(1 + u_k) e^{-u_k} = 1 - u_k^2 + u_k^2 \rho_k (1 + u_k)$, et comme la suite $(u_k)$ est bornée, il existe $A$ réel $> 0$ tel que $(1 + u_k) e^{-u_k} = 1 + v_k$, avec $(\forall k)$ $|v_k| \leq A u_k^2$. Le produit infini $\prod (1 + u_k) e^{-u_k}$ est donc absolument convergent, donc convergent. Soit $L$ sa valeur. De $e^{-S_n} P_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$, on déduit $P_n = e^{S_n} (e^{-S_n} P_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^S L \in \mathbb{C}^*$, donc le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge. ∎

Voici maintenant d'autres exemples remarquables de produits infinis.

***Exemple 4.*** *Fonction $\Gamma$* : Au § VIII.4, nous avons introduit, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, la fonction $z \mapsto \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$, et nous avons vu que $\Gamma(z)$ est la limite, pour $n \longrightarrow \infty$, de $\frac{n! \, n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$.

Mais pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque, il est aisé de voir que le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$ est absolument convergent. En effet, d'après le lemme 1

$e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z}{n} + \frac{\rho_n}{n^2}$, où $|\rho_n| \leqslant \frac{1}{2}|z|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leqslant \frac{1}{2}|z|^2 e^{|z|}$ pour tout $n$, d'où : $\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z^2}{n^2} + \frac{\rho_n}{n^2}\left(1+\frac{z}{n}\right) = 1 + u_n$, où la série $\sum |u_n|$ est convergente, puisque $u_n \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or, si l'on considère la suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $E_n = \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\,n^z}$, une manipulation immédiate la transforme, pour tout $n \geqslant 1$, en :

$$E_n = z\,e^{-z\operatorname{Log} n} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) = z\,e^{zs_n}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right),$$

où l'on a posé $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$. Mais on sait que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$, constante d'Euler. Donc la suite $(E_n)$ admet une limite pour $n \longrightarrow \infty$ donnée par :

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\,n^z} = z\,e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Cette limite est nulle ssi $-z \in \mathbb{N}$ (cf. la *convention* faite plus haut).

Lorsque $\operatorname{Re}(z) > 0$, on reconnaît au premier membre $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

En posant, *par définition*, pour $z \in \mathbb{C}$, $-z \notin \mathbb{N}$, $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^z\,n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ on **prolonge** à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ la fonction $\Gamma$, et on a son expression sous forme de produit infini (formule de Weierstrass [1]) :

(2) $$\Gamma(z) = \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}.$$

Sur son nouveau domaine de définition $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-$ (stable par $z \mapsto z+1$), la fonction $\Gamma$ conserve la propriété remarquable :

(3) $$(\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_-)\quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

conséquence immédiate de sa définition :

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{z+1}\,n!}{(z+1)\dots(z+n)(z+n+1)}$$

$$= z\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^z\,n!}{z\dots(z+n)}\times\frac{n}{z+n+1}\right) = z\Gamma(z) \quad \text{car} \quad \frac{n}{n+z+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

---

[1] Karl Theodor Wilhelm *Weierstrass* (1815-1897), mathématicien allemand spécialiste de théorie des fonctions, dont le nom reste attaché à un exemple de fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

***Exemple 5*** (*Développement eulérien du sinus*) :
Soit $z \in \mathbb{C}$. On sait que (cf. proposition V.3.3)

$$\sin \pi z = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \left[ \left(1 + \frac{\mathrm{i}\pi z}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}\pi z}{n}\right)^n \right].$$

Il est commode de ne donner à $n$ que des valeurs impaires, et de poser, pour $p \in \mathbb{N}$ :

$$V_p = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \left[ \left(1 + \frac{\mathrm{i}\pi z}{2p+1}\right)^{2p+1} - \left(1 - \frac{\mathrm{i}\pi z}{2p+1}\right)^{2p+1} \right].$$

En effet l'identité formelle

$$X^{2p+1} - Y^{2p+1} = \prod_{\zeta \in \mu_{2p+1}} (X - \zeta Y) = (X - Y) \prod_{1 \leqslant |k| \leqslant p} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}k\pi}{2p+1}} Y\right)$$

permet d'écrire $V_p$ sous la forme :

$$V_p = \frac{\pi z}{2p+1} \prod_{k=1}^{p} \left[1 - \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}k\pi}{2p+1}} + \frac{\mathrm{i}\pi z}{2p+1}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}k\pi}{2p+1}}\right)\right] \times$$
$$\times \left[1 - \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}k\pi}{2p+1}} + \frac{\mathrm{i}\pi z}{2p+1}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{-2\,\mathrm{i}k\pi}{2p+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi z}{2p+1} \prod_{k=1}^{p} \left[-2\,\mathrm{i} \sin \frac{k\pi}{2p+1} + \frac{2\,\mathrm{i}\pi z}{2p+1} \cos \frac{k\pi}{2p+1}\right] \times$$
$$\times \left[2\,\mathrm{i} \sin \frac{k\pi}{2p+1} + \frac{2\,\mathrm{i}\pi z}{2p+1} \cos \frac{k\pi}{2p+1}\right]$$

$$= \frac{\pi z}{2p+1} 2^{2p} A_p B_p ,$$

$$\text{avec} \quad A_p = \prod_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{k\pi}{2p+1} \quad \text{et} \quad B_p = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2p+1}}\right).$$

Mais $A_p = \prod_{k=1}^{2p} \sin \frac{k\pi}{2p+1} = \frac{2p+1}{2^{2p}}$ (formule démontrée dans le tome 1, p. 294), d'où :

$$V_p = \pi z B_p = \pi z \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2p+1}}\right). \tag{4}$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on constate que $1 - \frac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2p+1}} \xrightarrow[p \to \infty]{} 1 - \frac{z^2}{k^2}$, et l'on sait que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$ est absolument convergent. Soit $P$ sa valeur. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$. On espère que $V_p \to \pi z P$

Démontrons-le. Posons $1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{k\pi}{n}} = b_k$. Si $k \in [\![1, p]\!]$ et $p \in \mathbb{N}^*$, de $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ résulte $(2p+1)\operatorname{tg}^2 \dfrac{k\pi}{2p+1} \geqslant k^2\pi^2$, d'où $|b_k| \leqslant 1 + \dfrac{|z|^2}{k^2}$. Or le produit infini $\prod \left(1 + \dfrac{|z|^2}{k^2}\right)$ est convergent, de valeur $Q$. Soit alors $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $N \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on ait à la fois $\left|\prod_{k=n+1}^{p} \left(1 + \dfrac{|z|^2}{k^2}\right) - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{Q}$ pour $N \leqslant n < p$, et $|P_n - P| \leqslant \varepsilon$. Pour $p > N$, on a :

$$\left|B_p - \prod_{k=1}^{N} b_k\right| = \left|\left[\prod_{k=1}^{N} b_k\right]\left[\prod_{k=N+1}^{p} b_k - 1\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{N}\left(1 + \frac{|z|^2}{k^2}\right)\right]\left[\prod_{k=N+1}^{p}\left(1 + \frac{|z|^2}{k^2}\right) - 1\right] \leqslant Q\frac{\varepsilon}{Q} \leqslant \varepsilon .$$

D'autre part, $B_{N,p} \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}}\right) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} P_N$. On peut donc déduire :

$$\left|P_N - \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{(2p+1)^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{k\pi}{2p+1}}\right)\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{dès que} \quad p \geqslant N_1 .$$

Alors pour $p \geqslant N_1$, on est sûr que

$$|B_p - P| \leqslant |B_p - B_{N,p}| + |B_{N,p} - P_N| + |P_N - P| \leqslant 3\varepsilon .$$

On a donc prouvé que $B_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} P$.

Mais comme $V_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \sin \pi z$, on obtient donc à partir de (4) :

$$(5) \qquad \boxed{\sin \pi z = \pi z P = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} .$$

La relation (5) constitue le *développement en produit infini du sinus,* découvert par Euler. On y voit clairement que $\sin \pi z = 0$ ssi $z \in \mathbb{Z}$, résultat qu'il est facile d'obtenir directement à partir de l'étude du § V.4, et qui a sans doute suggéré à Euler son développement. La périodicité du sinus apparaît moins évidente (cf. exercice 5).

**Formule des compléments**

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. D'après (3) $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, d'où

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\left[\frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{1+\dfrac{z}{n}}\right]\left[\frac{-1}{z}e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{z}{n}}}{1-\dfrac{z}{n}}\right],$$

ce qui donne $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}$, d'où, grâce à (5) :

$$\boxed{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}}\,, \tag{6}$$

qu'on appelle *formule des compléments.*

***Exemple 6 :*** *Une propriété de la fonction $\zeta$ de Riemann.* Rappelons qu'on pose, pour $s$ réel, $s>1$ : $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. En fait, si $s\in\mathbb{C}$ et si $\mathrm{Re}\,(s)>1$, on a $|n^s|=n^{\mathrm{Re}\,(s)}$ et la série $\sum\frac{1}{n^s}$ est absolument convergente, donc convergente, et on pose encore :

$$\boxed{\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}}\,. \tag{7}$$

Ce n'est pas ici le lieu de montrer comment on prolonge de façon naturelle la fonction définie par la formule (7) pour $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(s)>1$ à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ pour obtenir la véritable *fonction dzêta de Riemann.* Contentons-nous de fixer $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(s)>1$, et désignons par $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres *premiers* ($p_1=2$, $p_2=3$, etc.). La série $\sum\frac{1}{p_n^s}$ est absolument convergente, et $\left|\frac{1}{p_n^s}\right|<1$ pour tout $n\geqslant 1$. Donc le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ est absolument convergent (donc convergent). Notons sa valeur $Z(s)$ (elle est $\neq 0$) et remarquons que son terme général $\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}$ peut s'écrire $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^{ks}}$. Nous allons prouver la relation fondamentale, découverte par Riemann, qui est à la base d'une foule de théorèmes d'Arithmétique :

$$\zeta(s)=Z(s)\,,\quad \text{c'est-à-dire}\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}}\,. \tag{8}$$

Soit $\varepsilon$ réel $>0$. Choisissons $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{|n^s|}\leqslant\varepsilon$. Soit $p_\alpha$ le plus grand parmi tous les facteurs premiers des entiers de 1 à $N$, et soit $v=\underset{n\in[\![1,N]\!],\,i\in[\![1,\alpha]\!]}{\mathrm{Max}}\mathrm{val}_{p_i}(n)$. Choisissons $P\in\mathbb{N}^*$, $P\geqslant\alpha$ tel que $\left|Z(s)-\prod_{n=1}^{P}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}}\right|\leqslant\varepsilon$. D'après la formule du § IX.5 donnant le terme général du produit d'un nombre fini de séries absolument convergentes, on peut écrire :

$$\prod_{n=1}^{P} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^s}} = \prod_{n=1}^{P} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{ks}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_P=n} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_P^{k_P})^s} \right).$$

Choisissons alors un entier $\nu \geqslant vP$ tel que

$$\left| \prod_{n=1}^{P} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^s}} - \sum_{n=0}^{\nu} \left( \sum_{k_1+\cdots+k_P=n} \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_P^{k_P})^s} \right) \right| \leqslant \varepsilon ,$$

et étudions la somme finie

$$S_\nu = \sum_{k_1+\cdots+k_P \leqslant \nu} \frac{1}{(p_1^{k_1} \dots p_P^{k_P})^s} .$$

L'application $f : \mathbb{N}^P \longrightarrow \mathbb{N}^*$, $(k_1, \dots, k_P) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_P^{k_P}$ est *injective* (théorème d'unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{N}^*$), et vu le choix de $P$ et $\nu$, l'image par $f$ de l'ensemble $\{(k_1, \dots, k_P) \in \mathbb{N}^P \mid k_1 + \cdots + k_P \leqslant \nu\}$ contient assurément $[\![1, N]\!]$. On a donc : $S_\nu - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n \in J} \frac{1}{n^s}$, où $J$ est un ensemble fini contenu dans $[\![N+1, +\infty[\![$, ce qui implique : $\left| S_\nu - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \right| \leqslant \varepsilon$. En récapitulant :

$$|Z(s) - \zeta(s)| \leqslant \left| Z(s) - \prod_{n=1}^{P} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^s}} \right| + \left| \prod_{n=1}^{P} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p_n^s}} - S_\nu \right| +$$

$$+ \left| S_\nu - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \right| + \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \zeta(s) \right| \leqslant 4\,\varepsilon .$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $Z(s) = \zeta(s)$, c'est-à-dire (8).

***Exercice 1 :*** Soit un réel $x > 1$. On définit la suite $(q_n)$ par $q_1 = x$ et $(\forall n \geqslant 1)$ $q_{n+1} = 2\,q_n^2 - 1$. Montrer que $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{q_n}\right)$.

***Exercice 2 :*** Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite complexe telle que $(\forall n)$ $|\alpha_n| < 1$ et que la série $\sum (1 - |\alpha_n|)$ converge. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha_n - z)\,|\alpha_n|}{\alpha_n(1 - \bar{\alpha}_n z)}$ converge.

***Exercice 3 :*** Etudier la nature des produits infinis ci-après :

*a)* $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\cos \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$, $\alpha > 0$ *b)* $\prod_{n \geqslant 0} (1 + x^{2^n})$, $x \in \mathbb{C}$ (valeur en cas de convergence)

*c)* $\prod_{n \geqslant 0} (1 + P(n)\,z^n)$, $P \in \mathbb{C}[X]$ *d)* $\prod_{n \geqslant 1} n^{\frac{c}{n^\alpha}}$, $\alpha > 0$, $c > 0$

*e)* $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right)$ et $\prod_{n \geqslant 1} \left|1 + \frac{\mathrm{i}}{n}\right|$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$

*f)* $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{an^2} z^n\right)$, $a > 0$, mod $(z) \neq \mathrm{e}^a$

*g)* $\prod_{n \geqslant 0} \cos \frac{a}{2^n}$, $a \in \mathbb{C}$, et $\prod_{n \geqslant 0} \operatorname{ch} \frac{a}{2^n}$ (valeur) *h)* $\prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

***Exercice 4 :*** Soit $(u_n)$ une suite dans $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Montrer que

$$(\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}) \quad \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_{\sigma(n)}) .$$

***Exercice 5 :*** On se propose de démontrer que $z \mapsto \sin \pi z$ admet pour période 2. On pose, pour $z \in \mathbb{C}$, $S(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$. Vérifier directement, *sur cette expression,* que $S(z+1) = -S(z)$.

*Indication :* Penser à prendre des produits partiels et à les factoriser.

***Exercice 6 :*** En supposant connu le développement en produit infini de $\sin \pi z$ (cf. la formule (5) de l'exemple 5), montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire : $\cos \pi z = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2}\right)$.

*Indication :* Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\cos \pi z = \frac{\sin 2 \pi z}{2 \sin \pi z}$.

***Exercice 7 :*** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$, avec $r_n > 0$ et $-\pi < \theta_n < \pi$. Montrer que si le produit infini $\prod z_n$ converge, la série $\sum \theta_n$ converge.

***Exercice 8 :*** Soit $q$ un entier $\geqslant 2$.

*a)* Montrer qu'il existe un et un seul système de suites $(a_2(n)), \dots, (a_q(n))$ telles que

$$\operatorname{Log} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/q}} + \frac{a_2(n)}{n^{2/q}} + \cdots + \frac{a_q(n)}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n^{1/q}} \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{q}}}\right).$$

*Réponse :* $(\forall n)$ $a_2(n) = \frac{1}{2}$, $a_3(n) = \frac{(-1)^n}{6}$, etc.

*b)* Les suites $(a_2(n)), \dots, (a_q(n))$ étant celles définies en *a*), on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/q}} + \frac{a_2(n)}{n^{2/q}} + \cdots + \frac{a_q(n)}{n}$. Montrer que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$, $\sum u_n^2, \dots, \sum u_n^q$ sont toutes divergentes.

*c)* Existe-t-il une série complexe $\sum u_n$ telle que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge, mais que toutes les séries $\sum u_n^p$ divergent, pour $p \in \mathbb{N}^*$ ?

***Exercice 9 :*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $(\mathbb{N}^*)^2$ telle que $\frac{p_n}{q_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$. Montrer que, pour tous $a$ et $z$ complexes,

$$z(1 - az)\left(1 - \frac{az}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{az}{q_n}\right)(1 + az)\left(1 + \frac{az}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{az}{p_n}\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda^{az} \sin(\pi a z).$$

***Exercice 10 :*** Trouver un équivalent simple, quand $n \longrightarrow +\infty$, de l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{x+k}\right) \mathrm{d}x$.

***Exercice 11 :*** On pose $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_{2n-1} = \dfrac{-1}{\sqrt{n}}$, $u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ divergent et que cependant le produit infini $\prod (1 + u_n)$ est convergent.

***Exercice 12 :*** Le développement en produit infini de $\sin z$ peut s'écrire, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\ldots$$

et n'est alors que semi-convergent. Montrer que

$$z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\cdots = \mathrm{e}^{\frac{-z \operatorname{Log} 2}{2\pi}} \sin z$$

(on prend deux termes avec le signe $-$, un avec le signe $+$, indéfiniment). Un tel produit n'est donc pas commutativement convergent.

***Exercice 13 :*** Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$ a pour valeur $\quad 1 - x - x^2 + \cdots + x^{\frac{3n^2-n}{2}} - x^{\frac{3n^2+n}{2}} + \cdots \quad$ (Euler).

N.B. Euler a également prouvé que, si $|z| < 1$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - z^{2n}}{(1 + z^{2n-1})^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{n^2}$.

***Exercice 14 :*** En s'inspirant librement de l'exemple 6, démontrer la divergence de la série $\sum \dfrac{1}{p_n}$, où $p_n$ désigne le $n$-ième nombre premier.

N.B. Ce résultat, surprenant au premier abord, vu la raréfaction des nombres premiers, devient évident si l'on sait que $p_n \underset{n \to \infty}{\sim} n \operatorname{Log} n$. En tout cas, il implique bien l'existence d'une infinité de nombres premiers.

***Exercice 15 :*** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $K_p = \operatorname{Ent}(\operatorname{Log}(\operatorname{Log} p))$, $H_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} K_j$, $\omega_p = \dfrac{2\pi}{K_p}$ $(p \geqslant 2)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geqslant 2)$ soit $p_n$ l'entier le plus grand tel que $H_p \leqslant n$, et : $m_n = n - H_{p_n}$, enfin $z_n = \dfrac{1}{\operatorname{Log} p_n} \exp(\mathrm{i} m_n \omega_{p_n})$.

*a*) Montrer que $(\forall q \in \mathbb{N}^*)$ la série $\sum (z_n)^q$ converge.

*Indication :* Pour $p$ assez grand, vérifier que $\displaystyle\sum_{n=H_p}^{n=H_{p+1}-1} (z_n)^q = 0$. Puis, vérifier : $(\forall q \in \mathbb{N}^*)$ la série $\sum |z_n|^q$ diverge.

*b*) Montrer que le produit infini $\prod\limits_n (1 + z_n)$ diverge. (*Indication :* pour $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, calculer $P_p = \displaystyle\prod_{H_p \leqslant n < H_{p+1}} (1 + z_n)$ ; puis, si $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$J_n = \{p \in \mathbb{N} \mid 2n - 1 \leqslant \operatorname{Log} \operatorname{Log} p < 2n\},$$

étudier $\prod\limits_{p \in J_n} P_p$.)

***Exercice 16 :*** Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $(u_n)$ une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ; on suppose les séries $\sum\limits_n u_n$, $\sum\limits_n (u_n)^2, \ldots, \sum\limits_n (u_n)^q$ et $\sum\limits_n |u_n|^{q+1}$ convergentes. Montrer que le produit infini $\prod\limits_n (1 + u_n)$ converge.

***Exercice 17 :*** Soit $(z_n) = (a_n + \mathrm{i} b_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite complexe avec $(\forall n)$ $a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_n \in \mathbb{R}$. On suppose les séries $\sum z_n$ et $\sum z_n^2$ convergentes. Montrer que le produit infini $\prod (1 + z_n)$ converge.

***Exercice 18*** (Initiation aux méthodes de Dirichlet) : Dans tout le problème, $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des naturels premiers, et la bijection croissante $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathscr{P}$ est notée $n \mapsto p_n$. Pour $p \in \mathscr{P}$, $V_p$ désigne la *p-valuation* sur $\mathbb{N}^*$. Si $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée, on dit que $f$ est *multiplicative* ssi $(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^{*2})$, $f(mn) = f(m)\, f(n)$ chaque fois que pgcd $(m, n) = 1$. Si $f(mn) = f(m)\, f(n)$ est vraie sans restriction sur $m$ et $n$, on dit que $f$ est *totalement multiplicative*.

PARTIE I. 1) Parmi les fonctions $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ci-après, reconnaître les multiplicatives et les totalement multiplicatives :

(I) $\alpha \in \mathbb{R}$ étant fixé, $\mathscr{E}_\alpha : n \mapsto n^\alpha$ ; (II) $\alpha \in \mathbb{R}$ étant fixé, $\sigma_\alpha : n \mapsto \sum_{d \mid n} d^\alpha$.

(III) $t \in \mathbb{C}^*$ étant fixé, fonction $n \mapsto t^{\omega(n)}$, où $\omega(n) = \sum_{p \in \mathscr{P}} V_p(n)$.

(Si $t = -1$, cette fonction sera notée $\lambda$ et s'appelle *fonction de Liouville.*)

(IV) $t \in \mathbb{C}^*$ étant fixé, fonction $n \mapsto t^{\nu(n)}$, où $\nu(n) = \text{card } \{p \in \mathscr{P} \mid p \mid n\}$.

(V) *Fonction de Moëbius* $\mu : 1 \mapsto 1$, $n \mapsto 0$ si $\exists p \in \mathscr{P} \mid V_p(n) \geqslant 2$, $n \mapsto (-1)^{\nu(n)}$ dans les autres cas.

(VI) $\alpha \in \mathbb{R}$ étant fixé, fonction $\Phi_\alpha : n \mapsto n^\alpha \prod_{p \in \mathscr{P}, p \mid n} \left(1 - \dfrac{1}{p^\alpha}\right)$ (reconnaître $\Phi_1$).

(VII) Fonction $J : n \mapsto n/2\, V_2(n)$ ; (VIII) l'entier $k \geqslant 2$ étant fixé, fonction $Q_k$ : $n \mapsto Q_k(n)$, où $Q_k(n) = 0$ si $\exists p \in \mathscr{P} \mid V_p(n) \geqslant k$, et $Q_k(n) = 1$ sinon.

2) Soit $f$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g\left(\dfrac{n}{d}\right)$. Si $f$ et $g$ sont multiplicatives, prouver que $f * g$ l'est aussi.

PARTIE II. Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, pour $s$ réel tel que la série $\sum_n \dfrac{f(n)}{n^s}$ converge, on notera $R(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{f(n)}{n^s}$.

1) Soit $f$ et $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ; on suppose trouvé $s$ réel tel que les séries $\sum \dfrac{f(n)}{n^s}$ et $\sum \dfrac{g(n)}{n^s}$ soient absolument convergentes. Montrer que la série $\sum_n \dfrac{(f * g)(n)}{n^s}$ l'est aussi, et que $R(f * g, s) = [R(f, s)] \times [R(g, s)]$. (Adapter la méthode du produit de séries.)

2) Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ ; si la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^s}$ converge absolument pour $s = s_0$, montrer qu'elle converge pour $s > s_0$. Si, dans ces conditions, $R(f, s) = 0$ pour tout $s \geqslant s_0$, montrer : $(\forall n)$ $f(n) = 0$.

3) Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *multiplicative* non nulle, et soit $s \in \mathbb{R}$ tel que la série $\sum \dfrac{f(n)}{n^s}$ converge absolument et que $(\forall n)$ $\dfrac{f(n)}{n^s} \neq -1$.

*a*) Montrer : $(\forall p \in \mathscr{P})$ la série $\sum_k f(p^k)\, p^{-ks}$ converge absolument. On note :

$$U_n(f, s) = \sum_{k=1}^{\infty} f(p_n^k)\, p_n^{-k_s}.$$

*b*) Montrer que le produit infini $\prod_n (1 + U_n(f, s))$ converge absolument, et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + U_n(f, s)) \tag{1}$$

(s'inspirer du rayonnement de l'exemple 6). Qu'obtient-on pour $f = \mathscr{E}_0$ ?

4) Utiliser ce qui précède pour établir (avec $\zeta$ = fonction dzêta de Riemann) :

*a*) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $s > \text{Max}\,(1, \alpha + 1)$ : $\zeta(s)\, \zeta(s - \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma_\alpha(n)}{n^s}$.

*b*) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $s > \alpha + 1$ : $\dfrac{\zeta(s - \alpha)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\Phi_\alpha(n)}{n^s}$.

*c*) Pour $s > 1$ : $\dfrac{(\zeta(s))^2}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{\nu(n)}}{n^s}$ et $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda(n)}{n^s}$.

*d*) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ $(k \geqslant 2)$ et $s > 1$ : $\dfrac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{Q_k(n)}{n^s}$.

*e*) Pour $s > 1$ : $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{p^s}$.

*f*) Pour $s > 2$ : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J(n)}{n^s} = \dfrac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}} \zeta(s-1)$.

*g*) Pour $s > 1$ : $\dfrac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{[\sigma_0(n)]^2}{n^s}$ (relation de Ramanujan).

*Indication pour g :* Vérifier d'abord : $\quad (\forall x \in ]-1, 1[) \quad \dfrac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^2 x^m$.

Déduire de ces résultats : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{d \mid n} \Phi_\alpha(d) = n^\alpha$, et de même les valeurs de $\sum_{d \mid n} \mu(d)$, $\sum_{d \mid n} \lambda(d)$, $\sum_{d \mid n} \dfrac{\mu(d)}{d}$.

PARTIE III. 1) Prouver : $\lim_{s \to 1+0} \zeta(s) = +\infty$.

2) Soit $\mathcal{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \mathrm{Ent}\,(x)$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(t)}{t^{s+1}} dt$ converge pour $s > 0$, et qu'on a, pour $s > 1$ : $\quad \zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} - s \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(t)}{t^{s+1}} dt$ ;

en déduire : $\zeta(s) \underset{\substack{> \\ s \to 1}}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.

3) Soit $\chi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto 0$ si $n$ pair, $n \mapsto (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ si $n$ impair.

*a*) Pour $s > 1$, montrer que la série $\sum_n \dfrac{\chi(s)}{n^s}$ converge absolument, et que pour $s > 0$ elle converge. On posera, si $s > 0$ : $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$.

4) Soit $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{T}$) l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n+1$ (resp. $4n-1$) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si $s > 1$, on définit $S(s)$ ainsi :

Si $\mathcal{S}$ est fini, $S(s) = \prod_{q \in \mathcal{S}} (1-q^{-s})^{-1}$ ; si $\mathcal{S}$ est infini, on note $n \mapsto q_n$ la bijection croissante $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{S}$, on pose : $S(s) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n^{-s})^{-1}$ (vérifier que cela a un sens).

De manière analogue, on associe à $\mathcal{T}$ la fonction $T(s)$ $(s > 1)$, définie que $\mathcal{T}$ soit fini ou non.

*a*) Prouver : $(\forall s > 1)$ $\zeta(s) = (1-2^{-s})^{-1} S(s)\, T(s)$.

*b*) Montrer : $(\forall s > 1)$ $L(s) \geqslant \dfrac{2}{3}$ ; en déduire $\lim_{\substack{> \\ s \to 1}} \zeta(s) L(s)$.

*c*) Pour $s > 1$, montrer : $\zeta(s) L(s) = (1-2^{-s})^{-1} [S(s)]^2 U(s)$, où $U(s)$ est la valeur d'un produit infini convergent à préciser. Prouver : $(\forall s > 1)$ $U(s) \leqslant \zeta(2)$. Comparer ce résultat à celui de III) 4) *b*) ci-dessus. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{S}$ ?

## § IX.7 *NOTIONS SUR LES FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES*

Soit $I$ un ensemble d'indices et $(a_i)_{i \in I} = a$ une famille de nombres complexes. La question se pose naturellement de savoir si on peut donner un sen

$\sum_{i \in I} a_i$ indépendamment de tout choix d'ordre total sur $I$. Lorsque $I = \mathbb{N}$ on a réussi à donner un sens au symbole $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ (cf. définition II.5.1), mais en faisant jouer un rôle essentiel à l'*ordre naturel* de $\mathbb{N}$, à tel point que ce n'est que dans le cas des séries absolument convergentes que la somme est indépendante de l'ordre des termes (cf. théorème IX.4.3). Avec un ensemble d'indices $I$ abstrait, on peut voir que $I$ admet au moins un ordre total (le théorème de Zermelo affirme même que, moyennant l'axiome du choix, $I$ admet au moins un bon ordre), mais il n'y a aucune raison *a priori* de privilégier l'une de ces relations d'ordre.

Nous adopterons les notations suivantes : $\mathscr{F}_I =$ ensemble des *parties finies* de $I$ ; si $J \in \mathscr{F}_I$, $S_J(a) = \sum_{i \in J} a_i$ (en particulier $S_\varnothing(a) = 0$). Soit $J_1$ et $J_2$ dans $\mathscr{F}_I$ : alors $S_{J_1 \cup J_2}(a) = S_{J_1}(a) + S_{J_2}(a)$ si $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ et en général

$$S_{J_1 \cup J_2}(a) = S_{J_1}(a) + S_{J_2 \setminus J_1}(a) = S_{J_2}(a) + S_{J_1 \setminus J_2}(a) .$$

**Définition IX.7.1**

*Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille non vide de nombres complexes. On dit qu'elle est* ***sommable*** *ssi il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que :*
*($\mathscr{S}$) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $J_\varepsilon \in \mathscr{F}_I$ vérifiant*

$$(\forall J \in \mathscr{F}_I) \quad (J_\varepsilon \subset J) \Rightarrow (|S - S_J(a)| \leqslant \varepsilon) .$$

**Proposition IX.7.1**

*Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille sommable dans $\mathbb{C}$, il existe un et un seul nombre $S \in \mathbb{C}$ vérifiant la condition ($\mathscr{S}$) de la définition* IX.7.1.

*Démonstration :*

Supposons que $S \in \mathbb{C}$ et $S' \in \mathbb{C}$ vérifient tous deux cette condition ($\mathscr{S}$). Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $J_\varepsilon \in \mathscr{F}_I$ et $J'_\varepsilon \in \mathscr{F}_I$ tels que

$$(\forall J \in \mathscr{F}_I) \quad J_\varepsilon \subset J \Rightarrow |S - S_J(a)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad J'_\varepsilon \subset J \Rightarrow |S' - S_{J'}(a)| \leqslant \varepsilon .$$

Alors l'ensemble $J = J_\varepsilon \cup J'_\varepsilon$ appartient à $\mathscr{F}_I$, et de : $|S - S_J(a)| \leqslant \varepsilon$ et $|S' - S_J(a)| \leqslant \varepsilon$, on tire : $|S - S'| \leqslant 2\varepsilon$. C'est vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, d'où $S = S'$. ■

**Définition IX.7.2**

*Soit $(a_i)_{i \in I} = a$ une famille sommable (non vide) dans $\mathbb{C}$. On appelle* ***somme*** *de cette famille, et on note $\sum_{i \in I} a_i$, l'unique nombre $S \in \mathbb{C}$ qui vérifie la condition ($\mathscr{S}$) de la définition* IX.7.1.

Lorsque $I$ est *fini*, il est évident que la somme $S$ ainsi définie n'est autre que celle déjà définie en Algèbre, c'est-à-dire $S_I(a)$. De manière générale la somme d'une famille sommable $(a_i)_{i \in I}$ sera notée $S(a)$. Si les $a_i$ sont tous réels, $S(a) \in \mathbb{R}$.

Commençons par indiquer quelques propriétés élémentaires qui découlent des définitions précédentes.

• ($FS_1$) Soit $I \neq \varnothing$ fixé. *L'ensemble, noté $l^1(I, \mathbb{C})$, des familles sommables $(a_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{C}$ forme un sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{F}(I, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^I$, et l'application $l^1(I, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ $a = (a_i)_{i \in I} \mapsto S(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

On vérifie que la notation $l^1(I, \mathbb{C})$ est bien cohérente avec la notation $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ déjà utilisée depuis le chapitre II (cf. exemple 1).

• $(FS_2)$ Soit $I \neq \varnothing$ fixé et $a = (a_k)_{k \in I}$ une famille dans $\mathbb{C}$. Posons $a_k = u_k + iv_k$ avec $(u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $k$. *Pour que la famille $a = (a_k)_{k \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que les familles $u = (u_k)$ et $v = (v_k)$ le soient.* Si oui, on a : $S(a) = S(u) + iS(v)$.

• $(FS_3)$ Soit $I \neq \varnothing$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille dans $\mathbb{C}$. Donnons $I' \subset I$ tel que $a_i = 0$ pour $i \in I \setminus I'$. *Pour que la famille $(a_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que la famille $(a_i)_{i \in I'}$ le soit.* Si c'est le cas, $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I'} a_i$.

• $(FS_4)$ Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille non vide dans $\mathbb{C}$, et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_I$. *Pour que la famille $(a_i)_{i \in I}$ soit sommable, il faut et il suffit que la famille $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$ le soit,* et alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$. Cette propriété $(FS_4)$ se vérifie grâce au fait que $\sigma$ induit une bijection $\tilde{\sigma} : \mathscr{F}_I \longrightarrow \mathscr{F}_I$, $J \mapsto \sigma(J)$. Plus généralement, si $I'$ est un autre ensemble *équipotent* à $I$, et si $s : I' \longrightarrow I$ est une bijection, *la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable ssi la famille $(a_{s(j)})_{j \in I'}$ est sommable ;* et s'il en est ainsi, $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in I'} a_{s(j)}$.

**Proposition IX.7.2**

> *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille sommable non vide de nombres complexes.* L'ensemble $\mathscr{S}_a = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$, *appelé* **support** *de $a$,* est au plus dénombrable.

*Démonstration :*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E_n = \left\{ i \in I \mid |a_i| \geqslant \dfrac{1}{n} \right\}$. Alors $\mathscr{S}_a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Pour $n$ fixé, soit $J_n \in \mathscr{F}_I$ tel que

$$(\forall J \in \mathscr{F}_I) \quad (J_n \subset J) \Rightarrow |S(a) - S_{J_n}(a)| \leqslant \frac{1}{3n}.$$

Pour $i \in I \setminus J_n$, on a donc $|S(a) - S_{J_n}(a)| \leqslant \dfrac{1}{3n}$ et

$$|S_{J_n \cup \{i\}}(a) - S(a)| \leqslant \frac{1}{3n}, \quad \text{d'où} \quad |S_{J_n \cup \{i\}}(a) - S_{J_n}(a)| \leqslant \frac{2}{3n},$$

c'est-à-dire $|a_i| \leqslant \dfrac{2}{3n}$, ce qui implique $i \notin E_n$. Par suite, $E_n \subset J_n$ et donc $E_n$ est *fini*. Cela entraîne bien que $\mathscr{S}_a = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n$ est au plus dénombrable. ■

**Proposition IX.7.3**

> *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille sommable dans $\mathbb{C}$ ($I \neq \varnothing$). L'ensemble $\{|S_J(a)|\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ est* **borné** *dans $\mathbb{R}$.*

*Démonstration :*

Notons $J_1$ une partie finie de $I$ telle que

$$(\forall J \in \mathscr{F}_I) \quad (J_1 \subset J) \Rightarrow (|S_J(a) - S(a)| \leqslant 1).$$

Si $L \in \mathscr{F}_I$, on a : $|S_L(a) - S(a)| \leqslant |S_L(a) - S_{L \cup J_1}(a)| +$
$+ |S_{L \cup J_1}(a) - S(a)| \leqslant 1 + |S_L(a)$

Mais $$|S_L(a) - S_{L \cup J_1}(a)| = |S_{J_1 \setminus L}(a)| \leqslant A_1 ,$$

en posant $A_1 = \sum_{j \in J_1} |a_j| \quad \left( \text{car } |S_{J_1 \setminus L}(a)| = \left| \sum_{j \in J_1 \setminus L} a_j \right| \leqslant \sum_{j \in J_1 \setminus L} |a_j| \right).$

D'où : $|S_L(a) - S(a)| \leqslant 1 + A_1$ et par suite : $|S_L(a)| \leqslant 1 + A_1 + |S(a)|$. ■

**Théorème IX.7.1**

> *Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille non vide dans $\mathbb{R}_+$. Pour qu'elle soit* ***sommable,*** *il faut et il suffit que l'ensemble $\{S_J(a)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ soit* ***majoré.*** *Si c'est le cas, on a :*
>
> (1) $$S(a) = \sup_{J \in \mathscr{F}_I} (S_J(a)) .$$

*Démonstration :*

Supposons la famille $(a_i)$ sommable. La proposition IX.7.3 montre que l'ensemble $E = \{S_J(a)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ est majoré. Etant non vide, il admet une borne supérieure $B$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $J_\varepsilon \in \mathscr{F}_I$ tel que $B - S_{J_\varepsilon}(a) \leqslant \varepsilon$. Alors, du fait que les $a_i$ sont $\geqslant 0$ et que $B$ majore $E$, pour tout $J \in \mathscr{F}_I$ tel que $J_\varepsilon \subset J$, a lieu l'inégalité :

$$S_{J_\varepsilon}(a) \leqslant S_J(a) \leqslant B , \quad \text{d'où} \quad |B - S_J(a)| \leqslant \varepsilon . \quad \text{Donc} \quad B = S(a) .$$

Réciproquement, si l'ensemble $E$ est majoré, il a une borne supérieure $B$ dans $\mathbb{R}_+$. Le raisonnement ci-dessus prouve que $B$ satisfait la condition $(\mathscr{S})$ de la définition IX.7.1. Donc $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, et $S(a) = B$. ■

**Corollaire**

> *Soit $I \neq \varnothing$ et deux familles $a = (a_i)_{i \in I}$ et $b = (b_i)_{i \in I}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $(\forall i \in I)\ b_i \leqslant a_i$. Si la famille $(a_i)$ est sommable, la famille $(b_i)$ l'est aussi, et $\sum_{i \in I} b_i \leqslant \sum_{i \in I} a_i$, l'égalité ayant lieu ssi $a_i = b_i$ pour tout $i$.*

*Démonstration :*

Seule la dernière assertion est non évidente. Supposons donc $(a_i)$ sommable et $S(b) = S(a)$. Alors $a - b = (a_i - b_i)_{i \in I}$ est sommable et $S(a - b) = 0$. Mais $a_i - b_i \geqslant 0$ pour tout $i$. D'après (1) $(\forall J \in \mathscr{F}_I)\ S_J(a - b) = 0$, d'où $a_i = b_i$ pour tout $i$. ■

**Théorème IX.7.2**

> *Soit $(a_k)_{k \in I}$ une famille non vide de $\mathbb{C}$. Pour qu'elle soit sommable, il faut et il suffit que la famille $(|a_k|)_{k \in I}$ le soit. Si c'est le cas, on a : $\left| \sum_{k \in I} a_k \right| \leqslant \sum_{k \in I} |a_k|$.*

*Démonstration :*

Posons $a_k = u_k + \mathrm{i} v_k$, avec $(u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $k \in I$.

*a*) Supposons la famille $(|a_k|)$ sommable. D'après le corollaire du théorème IX.7.1, les familles $(|u_k|)$ et $(|v_k|)$ le sont aussi. Pour tout réel $x$ notons $x^+ = \text{Max}\,(x, 0)$ et $x^- = \text{Max}\,(-x, 0)$, d'où $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$. Les familles $(u_k^+)$, $(u_k^-)$, $(v_k^+)$, $(v_k^-)$ sont sommables, donc les far

$(v_k)$ le sont (d'après $(FS_1)$), donc la famille $(a_k)$ est sommable (d'après $(FS_2)$).

*b*) Supposons la famille $(a_k)$ sommable. Alors les familles $(u_k)$ et $(v_k)$ le sont aussi. Le point délicat consiste à prouver que la famille $(|u_k|)$ est sommable, ce qui est évident seulement si tous les $u_k$ sont $\geqslant 0$ ou s'ils sont tous $\leqslant 0$. Dans le cas général soit $E = \{k \in I \mid u_k \geqslant 0\}$. Notons $M$ un réel $\geqslant 0$ tel que $|S_J(u)| \leqslant M$ pour tout $J \in \mathscr{F}_I$ (proposition IX.7.3). On a, pour $J \in \mathscr{F}_E$ : $\sum\limits_{j \in J} u_j = S_J(u) = \ |S_J(u)| \leqslant M$. Donc la famille $(u_k)_{k \in E}$ est sommable (théorème IX.7.1). Donc la famille $(u_k^+)_{k \in I}$ est sommable (cf. $(FS_3)$). On voit de même que la famille $(u_k^-)_{k \in I}$ est sommable. Donc il en est de même de la famille $(|u_k|) = (u_k^+ + u_k^-)$. On prouve de la même façon que la famille $(|v_k|)$ est sommable, et enfin, puisque $(\forall k)$ $|a_k| \leqslant |u_k| + |v_k|$, il en résulte que la famille $(|a_k|)$ est sommable.

*c*) Pour tout sous-ensemble fini $J$ de $I$, on a évidemment $|S_J(a)| \leqslant \sum\limits_{j \in J} |a_j|$ dont la borne supérieure est justement $\sum\limits_{j \in I} |a_j|$, d'où la dernière assertion de l'énoncé. ∎

**COROLLAIRE**

*Toute sous-famille d'une famille sommable de nombres complexes est sommable.*

(En effet, si $a' = (a_i)_{i \in I'}$, avec $I' \subset I$, l'ensemble $\{|S_J(a')|\}_{J \in \mathscr{F}_{I'}}$ est majoré.)

La partie *b*) de la démonstration du théorème IX.7.2 prouve que *si, pour une famille* $u = (u_k)_{k \in I}$ *de réels, l'ensemble* $\{S_J(u)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ *est borné, alors la famille* $(u_k)$ *est sommable.* D'autre part, soit $a = (a_k)_{k \in I}$ une famille dans $\mathbb{C}$. Pour que l'ensemble $\{S_J(a)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ soit borné dans $\mathbb{C}$, il faut et il suffit que chacun des ensembles $\{S_J(u)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ et $\{S_J(v)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ le soit (avec $u_k = \mathrm{Re}\,(a_k)$ et $v_k = \mathrm{Im}\,(a_k)$). Finalement, compte tenu de la proposition IX.7.3, on a donc prouvé :

**THÉORÈME IX.7.3**

*Pour qu'une famille $a = (a_i)_{i \in I}$ de nombres complexes soit* ***sommable,*** *il faut et il suffit que l'ensemble $\{S_J(a)\}_{J \in \mathscr{F}_I}$ soit* ***borné.***

Mais la propriété essentielle des familles sommables est la propriété d'associativité qui autorise la *sommation par paquets* quelconques :

**THÉORÈME IX.7.4** (associativité)

*Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ une famille non vide de nombres complexes, et soit $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ un* ***partage*** *de $I$ en ensembles non vides. Pour chaque $\lambda \in L$, notons $a^{[\lambda]}$ la famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$.*

*Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ est* ***sommable,*** *alors chaque famille $a^{[\lambda]}$ l'est aussi ; la famille $(S(a^{[\lambda]}))_{\lambda \in L}$ l'est aussi, et :*

$$S(a) = \sum_{\lambda \in L} S(a^{[\lambda]}) , \quad \textit{c'est-à-dire} \quad \sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in L} \left( \sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

*Démonstration :*

Le fait que chaque famille $a^{[\lambda]}$ est sommable découle du corollaire du théorème IX.7.2. Notons $S = S(a) = \sum\limits_{i \in I} a_i$, et pour $\lambda \in L$, $S^{[\lambda]} = S(a^{[\lambda]}) = \sum\limits_{i \in I_\lambda} a_i$.

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $J_\varepsilon \in \mathscr{F}_I$ tel que $(J_\varepsilon \subset J \text{ et } J \in \mathscr{F}_I) \Rightarrow |S - S_J(a)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $K_\varepsilon$ une partie finie non vide de $L$ telle que $J_\varepsilon \subset \bigcup_{\lambda \in K_\varepsilon} I_\lambda$. Soit $K \in \mathscr{F}_L$ telle que $K_\varepsilon \subset K$. Pour chaque $\lambda \in K$, considérons $M_\lambda \in \mathscr{F}_{I_\lambda}$ tel que $J_\varepsilon \cap I_\lambda \subset M_\lambda$ et $\left|S^{[\lambda]} - S_{M_\lambda}(a)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\,q}$, où $q = \text{card}\,(K)$. Posons $M = \bigcup_{\lambda \in K} M_\lambda$ : $M$ est une partie finie de $I$, qui contient $J_\varepsilon$. De plus les $(M_\lambda)_{\lambda \in K}$ sont deux à deux disjoints, donc $S_M(a) = \sum_{\lambda \in K} S_{M_\lambda}(a)$.

Or, $\left|\left(\sum_{\lambda \in K} S^{[\lambda]}\right) - \sum_{\lambda \in K} S_{M_\lambda}(a)\right| \leqslant q\,\dfrac{\varepsilon}{2\,q} = \dfrac{\varepsilon}{2}$, et puisque $J_\varepsilon \subset M$, $|S - S_M(a)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, *i.e.* $\left|S - \sum_{\lambda \in K} S_{M_\lambda}(a)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'où, par addition : $\left|S - \sum_{\lambda \in K} S^{[\lambda]}\right| \leqslant \varepsilon$, et c'est vrai pour tout $K \in \mathscr{F}_L$ contenant $K_\varepsilon$. On a bien prouvé que la famille des $S^{[\lambda]}$ est sommable et de somme $S$. ■

Attention ! *la « réciproque » du théorème* IX.7.4 *est grossièrement fausse.* Il se peut que les familles $a^{[\lambda]} = (a_i)_{i \in I_\lambda}$ soient toutes sommables et que la famille des $(S(a^{[\lambda]}))_{\lambda \in L}$ soit sommable sans que la famille $(a_i)_{i \in I}$ soit sommable : il suffit de prendre pour exemple $I = \mathbb{N}$, $a_k = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $L = \mathbb{N}$ et $I_\lambda = \{2\,\lambda, 2\,\lambda + 1\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, ce qui donne $S(a^{[\lambda]}) = 0$, alors que $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'est évidemment pas sommable (dans un tel cas, si $(I_\mu)_{\mu \in M}$ est un autre partage de $I$, il se peut que la somme $\sum_{\mu \in M} S(a^{[\mu]})$ soit différente de $\sum_{\lambda \in L} S(a^{[\lambda]})$). Mais un tel « accident » ne peut pas arriver avec des familles de **nombres réels $\geqslant 0$ :**

**Théorème IX.7.5**

*Avec les notations du théorème* IX.7.4 *supposons que* $(\forall i \in I)\ a_i \in \mathbb{R}_+$, *que* $(\forall \lambda \in L)$ *la famille* $a^{[\lambda]} = (a_i)_{i \in I_\lambda}$ *soit sommable et que la famille* $(S(a^{[\lambda]}))_{\lambda \in L}$ *soit sommable. Alors la famille* $(a_i)_{i \in I}$ *est sommable, et bien sûr :* $S(a) = \sum_{\lambda \in L} S(a^{[\lambda]})$.

*Démonstration :*

$$\text{Soit en effet} \quad S' = \sum_{\lambda \in L} S(a^{[\lambda]}) = \sum_{\lambda \in L} \left(\sum_{i \in I_\lambda} a_i\right).$$

On vérifie facilement, que pour tout $J \in \mathscr{F}_I$, en notant $L_J$ l'ensemble $\{\lambda \in L \mid J \cap I_\lambda \neq \varnothing\}$, la somme $\sum_{i \in J} a_i = \sum_{\lambda \in L_J} \left(\sum_{i \in J \cap I_\lambda} a_i\right)$ est majorée par $S'$ puisque $(\forall \lambda \in L_J)$ $\sum_{i \in J \cap I_\lambda} a_i \leqslant \sum_{i \in I_\lambda} a_i$. Donc la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable, de somme $S = S'$ (théorème IX.7.4). ■

Illustrons l'intérêt de la notion de famille sommable par quelques exemples caractéristiques.

***Exemple 1 :*** Prenons $I = \mathbb{N}$. Une famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes est **sommable** ssi la série $\sum a_n$ est **absolument convergente** (c'est une co théorème IX.7.2, car l'ensemble $\left\{\sum_{n\in J}|a_n|\right\}_{J\in\mathscr{F}_{\mathbb{N}}}$ est majoré ssi la suite $\left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée). De plus, *lorsque la famille* $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est sommable, sa somme* $S(a)=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ au sens de la définition IX.7.2 *est égale à la somme de la série* $\sum a_n$ : en effet le nombre $s=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ satisfait la condition ($\mathscr{S}$) de la définition IX.7.1. On retrouve ainsi le théorème IX.4.3, critère de convergence commutative.

***Exemple 2 :*** Prenons $I=\mathbb{Z}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. Pour que les sommes $\left(\sum_{n\in J}|a_n|\right)_{J\in\mathscr{F}_{\mathbb{Z}}}$ soient majorées par un nombre fixe, il faut et il suffit que les sommes $\left(\sum_{n\in J}|a_n|\right)_{J\in\mathscr{F}_{\mathbb{N}}}$ et $\left(\sum_{n\in J}|a_{-n}|\right)_{J\in\mathscr{F}_{\mathbb{N}}}$ le soient. *La famille* $(a_n)$ *est donc sommable ssi les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0}a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0}a_{-n}$ *sont absolument convergentes,* et dans ce cas $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\right)$.

***Exemple 3*** (« séries doubles ») : Prenons $I=\mathbb{N}^2$. Soit $(a_{pq})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de nombres complexes. Appliquons le théorème IX.7.4 aux partages $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(J_q)_{q\in\mathbb{N}}$, $(K_r)_{r\in\mathbb{N}}$ définis par

$$I_p=\{(p,q)_{q\in\mathbb{N}}\},\quad J_q=\{(p,q)_{p\in\mathbb{N}}\},\quad K_r=\{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,|\,p+q=r\}\ ;$$

On obtient :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}a_{pq}=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}a_{pq}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{\infty}a_{pq}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=r}a_{pq}\right).$$

Prenons par exemple $a_{pq}=\alpha^p\beta^q$ pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, avec $\alpha$ et $\beta$ fixés tels que $|\alpha|<1$ et $|\beta|<1$. Alors la famille $(a_{pq})_{p\geqslant 0,q\geqslant 0}$ est sommable puisque

$$(\forall J\in\mathscr{F}_{\mathbb{N}^2})\quad\left|\sum_{(p,q)\in J}\alpha^p\beta^q\right|\leqslant\sum_{(p,q)\in J}|\alpha|^p\,|\beta|^q\leqslant\frac{1}{(1-|\alpha|)(1-|\beta|)},$$

et on a : $$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\alpha^p\beta^q=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p\sum_{q=0}^{\infty}\beta^q=\frac{1}{1-\beta}\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p=\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Mais la somme est aussi égale à $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=r}\alpha^p\beta^q\right)$, et l'on retrouve le résultat de l'exemple 2 du § IX.5, et plus généralement le théorème sur le *produit de deux séries absolument convergentes.*

Prenons plus généralement $I=\mathbb{N}^\nu$, où $\nu$ est un entier $\geqslant 2$, et soit $(a_{p_1p_2\dots p_\nu})_{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)\in\mathbb{N}^\nu}$ une famille sommable. Alors :

$$\sum_{(p_1,\dots,p_\nu)\in\mathbb{N}^\nu}a_{p_1\dots p_\nu}=\sum_{p_1=0}^{\infty}\left(\sum_{p_2=0}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{p_\nu=0}^{\infty}a_{p_1\dots p_\nu}\right)\cdots\right)\right)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{p_1+\cdots}\right.$$

Si par exemple on donne des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ de module $< 1$, la famille $(\alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_\nu^{p_\nu})_{(p_1, \ldots, p_\nu) \in \mathbf{N}^\nu}$ est sommable et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-\alpha_1)\ldots(1-\alpha_\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \sum_{p_1 + \cdots + p_\nu = r} \alpha_1^{p_1} \ldots \alpha_\nu^{p_\nu} \right)$. On n'aura de même aucune peine à multiplier $\nu$ séries absolument convergentes.

***Exemple 4 :*** Prenons $I = \mathbb{Z}^2$. Si $(a_{pq})_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$ est une famille sommable, les partages $(I_p)_{p \in \mathbf{Z}}$, $(J_q)_{q \in \mathbf{Z}}$ et $(K_r)_{r \in \mathbf{Z}}$, avec

$$I_p = \{(p,q)_{q \in \mathbb{Z}}\}, \quad J_q = \{(p,q)_{p \in \mathbb{Z}}\}, \quad K_r = \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \mid p+q=r\}$$

donnent :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2} a_{pq} = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{q \in \mathbf{Z}} a_{pq} \right) = \sum_{q \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{p \in \mathbf{Z}} a_{pq} \right) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{p+q=r} a_{pq} \right).$$

Par exemple, donnons-nous deux familles *sommables* $(a_p)_{p \in \mathbf{Z}}$ et $(b_q)_{q \in \mathbf{Z}}$. Les sommes finies $\sum_{(p,q) \in J} |a_p b_q|$ $(J \in \mathscr{F}_{\mathbf{Z}^2})$ sont majorées par $\left( \sum_{p \in \mathbf{Z}} |a_p| \right) \left( \sum_{q \in \mathbf{Z}} |b_q| \right)$, donc la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2}$ est sommable, et

$$\sum_{(p,q) \in \mathbf{Z}^2} a_p b_q = \left( \sum_{p \in \mathbf{Z}} a_p \right) \left( \sum_{q \in \mathbf{Z}} b_q \right) = \sum_{r \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{p+q=r} a_p b_q \right),$$

résultat moins évident que le théorème IX.5.1 (ici les sommes $\sum_{p+q=r} a_p b_q$ ne sont pas finies). On peut généraliser à $I = \mathbb{Z}^\nu$ ($\nu$ entier $\geq 2$).

**Familles sommables et produits infinis**

L'étude systématique des *familles multipliables* dépasse le cadre de cet ouvrage (cf. [4]), mais nous pouvons signaler un lien important entre familles sommables et produits infinis :

**Théorème IX.7.6**

*Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles non vides. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on donne une famille sommable $(u_{i,n})_{i \in I_n}$ de nombres complexes, et on suppose la famille double $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}, i \in I_n}$* **sommable** (c'est-à-dire la série $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i \in I_n} |u_{i,n}| \right)$ convergente). *Alors le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \sum_{i \in I_n} u_{i,n} \right)$ est absolument convergent ; la famille $u = \left( \prod_{k \in L} u_{i_k,k} \right)_{(i_k) \in \prod_{k \in L} I_k}$, où $L$ parcourt $\mathscr{F}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\}$, est sommable, et on a :*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 + \sum_{i \in I_n} u_{i,n} \right) = 1 + \sum_{\substack{L \in \mathscr{F}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\} \\ (i_k) \in \prod_{k \in L} I_k}} \left( \prod_{k \in L} u_{i_k,k} \right). \tag{2}$$

*Démonstration :*

Désignons par $\mathscr{I}$ l'ensemble de tous les systèmes $(i_k) \in \prod_{k \in L} I_k$, où $L$ décrit $\mathscr{F}_{\mathbb{N}} \setminus \{\varnothing\}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \sum_{i \in I_n} u_{i,n}$ et $\tilde{U}_n$

On sait que $(\forall n)\ |U_n| \leqslant \tilde{U}$ et puisque la série $\sum \tilde{U}_n$ converge, la série $\sum |U_n|$ converge aussi, ce qui prouve bien la convergence absolue du produit infini indiqué. Soit $P$ sa valeur. Désignons par $\tilde{u}$ la famille $\left(\prod_{k \in L} |u_{i_k, k}|\right)_{(i_k) \in \prod_{k \in L} I_k}$. Soit $J \in \mathscr{F}_{\mathscr{I}}$. Pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$ convenable et des ensembles finis $J_0, J_1, \dots, J_N$ convenables $(J_0 \subset I_0, \dots, J_N \subset I_N)$, $J$ est contenu dans l'ensemble $\mathscr{I}_N(J_0, J_1, \dots, J_N)$ réunion des $\prod_{k \in L} J_k$ pour $L \subset [\![0, N]\!]$ et $L \neq \varnothing$. D'où :

$$1 + S_J(\tilde{u}) \leqslant 1 + \sum_{L \subset [\![0,N]\!],\, L \neq \varnothing} \left( \sum_{(i_k) \in \prod_{k \in L} J_k} \left( \prod_{k \in L} |u_{i_k, k}| \right) \right)$$

$=$ (cf. calcul du théorème IX.6.2) $=$

$$= \left(1 + \sum_{i \in J_0} |u_{i,0}|\right) \dots \left(1 + \sum_{i \in J_N} |u_{i,N}|\right) \leqslant \tilde{P} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \tilde{U}_n).$$

Donc *la famille $u$ est sommable.* Soit $s$ sa somme. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$ ; soit $J \in \mathscr{F}_{\mathscr{I}}$ $(J \neq \varnothing)$ tel que $(\forall J' \in \mathscr{F}_{\mathscr{I}})\ (J \subset J') \Rightarrow |S_{J'}(u) - s| \leqslant \varepsilon$. Choisissons $N \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on ait à la fois $|P - (1 + U_0) \dots (1 + U_N)| \leqslant \varepsilon$ et $J \subset \mathscr{I}_N$, où $\mathscr{I}_N$ est l'union des $\prod_{k \in L} I_k$ pour $L \subset [\![0, N]\!]$ et $L \neq \varnothing$. Ensuite choisissons des parties finies $J_0 \subset I_0, J_1 \subset I_1, \dots, J_N \subset I_N$ telles que

$$\left|(1 + U_0) \dots (1 + U_N) - \left(1 + \sum_{i \in J_0} u_{i,0}\right) \dots \left(1 + \sum_{i \in J_N} u_{i,N}\right)\right| \leqslant \varepsilon,$$

et $J \subset \mathscr{I}_N(J_0, J_0, \dots, J_N)$. Alors $|S_{\mathscr{I}_N(J_0, J_1, \dots, J_N)}(u) - s| \leqslant \varepsilon$.

Mais $$1 + S_{\mathscr{I}_N(J_0, \dots, J_N)}(u) = \left(1 + \sum_{i \in J_0} u_{i,0}\right) \dots \left(1 + \sum_{i \in J_N} u_{i,N}\right).$$

Donc $|P - (1 + s)| \leqslant |P - (1 + U_0) \dots (1 + U_N)| +$

$$+ \left|(1 + U_0) \dots (1 + U_N) - (1 + S_{\mathscr{I}_N(J_0, \dots, J_N)}(u))\right| +$$
$$+ \left|(1 + S_{\mathscr{I}_N(J_0, \dots, J_N)}(u)) - (1 + s)\right| \leqslant 3\,\varepsilon.$$

C'est vrai $\forall \varepsilon > 0$. Donc $P = 1 + s$. ■

***Exemple 5 :*** Reprenons les notations de l'exemple 6 du § IX.6, où il s'agissait de développer $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ en produit infini, pour $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$. Posons $\sigma = \operatorname{Re}(s)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^{ks}} = 1 + U_n, \quad \text{avec} \quad U_n = \frac{1}{p_n^s - 1}.$$

On a : $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n^{ks}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|p_n^{k\sigma}|} = \frac{1}{p_n^{\sigma} - 1}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n^{k\sigma} - 1}$ converge, donc le théorème IX.7.6 s'applique. Il nous assure que la famille $\left( \frac{1}{p_1^{k_1 s} p_2^{k_2 s} \dots} \right)$, où $(k_1, k_2, \dots)$ parcourt $\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)} \setminus \{0\}$ (ensemble des suites $(k_1, k_2, \dots) = (k_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ non nulles et *à support fini* d'entiers naturels) est *sommable*, et que :

$$(3) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = 1 + \sum_{(k_i) \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)} \setminus \{0\}} \frac{1}{p_1^{k_1 s} \dots p_n^{k_n s} \dots}.$$

Mais on sait que l'application $\mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $(k_i) \mapsto p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n} \dots = \prod_{i \in \mathbb{N}^*} p_i^{k_i}$ est *bijective* (décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{N}^*$). Donc (3) signifie (cf. $(FS_4)$) :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} = 1 + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

On retrouve ainsi le résultat déjà obtenu dans l'exemple 6 du § IX.6.

***Exemple 6 :*** Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série absolument convergente. Le théorème IX.7.6 donne le développement en somme du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$. En effet :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 1 + \sum_{L \in \mathscr{F}_{\mathbb{N}^*}, L \neq \varnothing} \left( \prod_{n \in L} a_n \right),$$

qui peut s'écrire par associativité :

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(a), \quad \text{où} \quad (\forall k \geq 1)\ \sigma_k(a) = \sum_{\substack{L \in \mathscr{F}_{\mathbb{N}^*} \\ \operatorname{card}(L) = k}} \left( \prod_{n \in L} a_n \right)$$

$\sigma_k(a)$ est en quelque sorte la « $k$-ième fonction symétrique élémentaire » des $(a_n)_{n \geq 1}$. Prenons par exemple $a_n = -\frac{z^2}{n^2}$, où $z \in \mathbb{C}^*$ est fixé. On obtient :

$$\sigma_k(a) = (-1)^k z^{2k} \sum_{\substack{L \in \mathscr{F}_{\mathbb{N}^*} \\ \operatorname{card}(L) = k}} \left( \frac{1}{\prod_{n \in L} n^2} \right).$$

Mais d'après l'exemple 5 du § IX.6, on sait que $\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$. Or nous savons depuis l'introduction des fonctions circulaires que

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k} z^{2k}}{(2k+1)!},$$

et nous verrons plus loin dans l'étude des séries entières qu'on peut **identifier** les coefficients de chaque $z^{2k}$ dans ces deux expressions de $\dfrac{\sin \pi z}{\pi z}$. Cela donne :

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*) \qquad \sum_{\substack{L \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}^*} \\ \operatorname{card}(L) = k}} \frac{1}{\prod_{n \in L} n^2} = \frac{\pi^{2k}}{(2k+1)!},$$

et on retrouve en particulier pour $k = 1$ la formule bien connue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

***Exercice 1 :*** Démontrer le critère de Cauchy des familles sommables de nombres complexes : Soit $(a_i)_{i \in I} = a$, où les $a_i \in \mathbb{C}$ et $a \neq \varnothing$ , $I$ étant un ensemble d'indices. Pour que la famille $a$ soit sommable, il faut et il suffit que les $a_i$ vérifient la condition suivante : *(critère de Cauchy)* ($\forall \varepsilon$ réel $> 0$) $\exists J_\varepsilon$ fini $\subset I$ tel que, *pour tout sous-ensemble fini* non vide $K$ d'indices sans élément commun avec $J_\varepsilon$, on ait : $|S_K(a)| \leqslant \varepsilon$.

***Exercice 2 :*** *a*) Soit $I$ une partie finie de $\mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in I}$ des réels $\geqslant 0$ ainsi que les $(b_i)_{i \in I}$. Montrer que

$$\sum_{(i,j) \in I \times I} \frac{a_i\, b_j}{i+j} \leqslant \pi \sqrt{\left(\sum_{i \in I} a_i^2\right)\left(\sum_{i \in I} b_i^2\right)}.$$

*Indication :* On pourra prouver d'abord que, si $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

*b*) Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de $\mathbb{R}_+^*$ telles que les séries $\sum a_i^2$ et $\sum b_i^2$ convergent. Montrer que la famille $\left(\dfrac{a_i\, b_j}{i+j}\right)$ est sommable, et que :

$$\sum_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{a_i\, b_j}{i+j} \leqslant \pi \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2) \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^2)}.$$

***Exercice 3 :*** Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, $\alpha$ réel, est sommable ssi $\alpha > 2$.

Plus généralement la famille $\left(\dfrac{1}{(i_1 + i_2 + \cdots + i_\nu)^\alpha}\right)_{(i_1, \ldots, i_\nu) \in (\mathbb{N}^*)^\nu}$, $\alpha$ réel, $\nu$ entier $\geqslant 2$ est sommable ssi $\alpha > \nu$.

Que peut-on dire de la famille $\left(\dfrac{1}{(\sqrt{i_1^2 + \cdots + i_\nu^2})^\alpha}\right)_{(i_1, \ldots, i_\nu) \in (\mathbb{N}^*)^\nu}$ ?

***Exercice 4 :*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, soit $q_n$ le plus grand facteur premier de $n$ ; si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{E}_k = \{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid q_n = p_k\}$, où $(p_k)_{k \geqslant 1}$ désigne la suite strictement croissante des nombres premiers qui commence à $p_1 = 2$. Soit enfin $M_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$.

*a*) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(\dfrac{1}{n q_n}\right)_{n \in \mathcal{E}_k}$ est sommable et que sa somme est $\dfrac{M_k}{p_k^2}$.

*b*) Montrer que la série $\sum \frac{M_k}{p_k^2}$ converge, et en déduire que la série $\sum \frac{1}{nq_n}$ converge et a pour somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{p_k^2}$.

*Indication :* Parmi les méthodes élémentaires possibles, on pourra poser $u_k = \frac{M_k}{p_k^2}$, écrire $\frac{u_{k+1}}{u_k}$, et en tenant compte de $p_{k+1} - p_k \geqslant 2$ en déduire $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{-3/2}$ et conclure ; ou bien prouver directement que $\forall \alpha \in ]1, 2[,\ \exists c > 0 \mid u_k \leqslant \frac{C}{(p_k)^{2-\frac{\alpha}{2}}}$ en étudiant $\operatorname{Log} u_k$, puis conclure.

N.B. En fait, un théorème de Mertens (cf. Hardy & Wright, page 351) assure que $M_k \underset{k \to \infty}{\sim} e^{\gamma} \operatorname{Log}(p_k)$, où $\gamma$ est la constante d'Euler, et comme $p_k \underset{k \to \infty}{\sim} k \operatorname{Log} k$ (théorème d'Hadamard), on a : $u_k \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{e^{\gamma} \operatorname{Log}(p_k)}{p_k^2} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{e^{\gamma}}{k^2 \operatorname{Log} k}$.

***Exercice 5 :*** Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive (cf. tome de Géométrie), avec $n \geqslant 2$. Suivant le réel $\alpha > 0$, étudier si la famille $\left(\frac{1}{[f(k_1, k_2, \ldots, k_n)]^{\alpha}}\right)_{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}}$ est sommable.

***Exercice 6 :*** Etudier si les familles suivantes sont sommables :

*a*) $\left(e^{-\left(\sum_{k=1}^{n} (m_k^{2\alpha})\right)}\right)_{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n}$, où $n$ est un entier $\geqslant 2$ et $\alpha$ un réel $> 0$.

*b*) $(z^{m_1 m_2 \ldots m_n})_{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (\mathbb{N}^*)^n}$, où $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $n$ = un entier $\geqslant 2$.

*c*) $\left(\exp\left(-\operatorname{Log}^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2\right)\right)\right)_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n}$, avec $n$ entier $\geqslant 2$ et $\alpha$ réel $> 0$.

*d*) $\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} (m_i^2)\right)^{\alpha} \operatorname{Log}^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i^2\right)}\right)_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}}$, $n \geqslant 2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

*e*) $\left(\frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}}{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)!}\right)_{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n}$, où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ est donné.

***Exercice 7 :*** Si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{m,n} = 0$ pour $m = n$ et $u_{m,n} = \frac{1}{m^2 - n^2}$ pour $m \neq n$. Montrer : $\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \neq m}} u_{m,n} = \frac{-3}{4m^2}$ pour $m \neq 0$. Calculer $\sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n}\right)$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n}\right)$. La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

***Exercice 8 :*** Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans $l^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$. On note $M$ un réel $> 0$ qui majore les $|\alpha_n|$ pour $n \geqslant 1$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{M}$. Trouver les coefficients $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tels que :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \alpha_k z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sigma_k z^k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha_k z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k z^k.$$

En écrivant que $\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sigma_k z^k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k z^k\right) = 1$, et en admettant qu'on peut identifier les coefficients des puissances de $z$, obtenir des relations lia... $S_k$.

***Exercice 9 :*** Prouver les identités suivantes :

*a)* $\sum\limits_{q=2}^{\infty} (\zeta(q) - 1) = 1$, $\zeta$ désignant la fonction dzéta de Riemann.

(On utilisera la famille sommable $\left(\dfrac{1}{m^n}\right)_{m \geqslant 2,\, n \geqslant 2}$).

*b)* Pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{D}_0(n)\, z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{1 - z^n}$, où $\mathscr{D}_0(n)$ désigne le nombre des diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$.

(On utilisera la famille sommable $(z^{mn})_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$).

***Exercice 10 :*** Soit une famille $(\alpha_{p,n})_{(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ de nombres réels $> 0$. On suppose que $\alpha_{p,n} \underset{n \to \infty}{\uparrow} \alpha_p$ et que la série $\sum \alpha_p$ converge. Calculer en fonction des $\alpha_p$ : $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \cdots + \alpha_{n-1,n})$.

*Application :* Calculer $\lim\limits_{n \to \infty} \left[ \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n \right]$.

# *Chapitre X*

# *TOPOLOGIE*
# *ESPACES MÉTRIQUES*
# *ESPACES NORMÉS*

Dans tout le chapitre, $K$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

## § X.1 *DISTANCES ET NORMES*

**DÉFINITION X.1.1**

(I) *Soit $E$ un ensemble. On appelle* **distance sur E** *toute fonction $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :*
$(\mathrm{D}_1)$ $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie), *et* $d(x, x) = 0$.
$(\mathrm{D}_2)$ $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité du triangle).
$(\mathrm{D}_3)$ $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*axiome de* séparation).
*Si $d$ vérifie* $(\mathrm{D}_1)$ *et* $(\mathrm{D}_2)$ *mais pas forcément* $(\mathrm{D}_3)$, *on dit que $d$ est un* **écart.**

(II) *On appelle* **espace métrique** *tout couple $(E, d)$, où $E$ est un ensemble et où $d$ est une distance sur $E$.*

De l'axiome $(\mathrm{D}_2)$, on déduit, pour $(x, y, z) \in E^3$ $d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y)$ et de même $d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(y, x)$, d'où $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$.

**DÉFINITION X.1.2**

(I) *Soit $E$ un $K$-ev. On appelle* **norme sur E** *toute fonction $\mathcal{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants :*
$(\mathcal{N}_1)$ $(\forall (\lambda, x) \in K \times E)$ $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ (*on dit que $\mathcal{N}$ est* positivement homogène *et cela entraîne* $\mathcal{N}(0_E) = 0$).
$(\mathcal{N}_2)$ $(\forall (x, y) \in E^2)$ $\mathcal{N}(x + y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (inégalité du triangle).
$(\mathcal{N}_3)$ $(\forall x \in E)$ $\mathcal{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (*axiome de* séparation).

(II) *On appelle* **K-espace vectoriel normé** (*en abrégé* $K$-evn) *tout couple $(E, \mathcal{N})$ où $E$ est un $K$-ev et $\mathcal{N}$ une norme .*

Notons que toute norme sur un $\mathbb{C}$-ev est une norme sur le $\mathbb{R}$-ev $E_{(\mathbb{R})}$ déduit de $E$ par restriction des scalaires.

Si $\mathcal{N}$ vérifie seulement $(\mathcal{N}_1)$ et $(\mathcal{N}_2)$ (et pas forcément $(\mathcal{N}_3)$), on dit que $\mathcal{N}$ est une **semi-norme.**

Si $(E, \mathcal{N})$ est un $K$-evn, la fonction $d_{\mathcal{N}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto \mathcal{N}(x - y)$ est une distance sur $E$, dite **issue de la norme $\mathcal{N}$.** Tout $K$-evn sera automatiquement muni de cette distance, sauf mention contraire.

De même, si $\mathscr{E}$ est un espace affine d'espace directeur $E$, où $(E, \mathcal{N})$ est un $K$-evn, on a une distance $\mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(A, B) \mapsto \mathcal{N}(\overrightarrow{AB})$ dite **issue de $\mathcal{N}$.** Les normes sur des $K$-ev permettent ainsi de définir des espaces métriques.

***Exemple 1 :*** Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les *normes standard* de $K^N$ (cf. § II.5) sont bien des normes au sens de la définition X.1.2. Elles définissent sur $K^N$ des distances, dites *standard.* Si $N = 1$ et $K = \mathbb{R}$, on parle de *distance usuelle sur* $\mathbb{R}$ (la norme est ici la *valeur absolue usuelle*). Pour $N = 1$ et $K = \mathbb{C}$, on parle de *valeur absolue usuelle* et de *distance euclidienne canonique* de $\mathbb{C}$ ; on munit tacitement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ de ces structures.

***Exemple 2 :*** Soit deux réels $a$, $b$ $(a < b)$ et $p \in [1, +\infty[$. Sur le $K$-ev $E = \mathscr{L}_B([a, b], K)$, la fonction $\nu_p : f \mapsto \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est une *semi-norme* (cf. § VII.8). Par le corollaire de la proposition VII.3.5, la restriction de $\nu_p$ au sous-$K$-ev $\mathscr{C}^0([a, b], K)$ des fonctions *continues* est une *norme,* qu'on note encore $\nu_p$.

***Exemple 3 :*** Soit $X$ un ensemble non vide. L'ensemble $\mathscr{B}(X, K)$ des *fonctions bornées :* $E \longrightarrow K$ est un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(X, K)$ sur lequel la fonction $\nu_\infty : f \mapsto \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ est une *norme,* appelée **norme uniforme ;** sa distance associée est appelée *distance uniforme.*

Sur un même ensemble $E$ (resp. un même $K$-ev $E$) soit $d_1, d_2, \ldots, d_k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ des distances (resp. $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_k$ des normes). Alors il est clair que $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i = d$ (resp. $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{N}_i$) est une distance sur $E$ (resp. une norme sur $E$, de distance associée $\sum\limits_{i=1}^{k} d_{\mathcal{N}_i}$).

***Exemple 4 :*** Soit $p \in \mathbb{N}$ et deux réels $a$, $b$ $(a < b)$. Sur le $K$-ev $\mathscr{C}^p([a, b], K)$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^p : [a, b] \longrightarrow K$, la fonction $f \mapsto \sum\limits_{i=0}^{p} \nu_\infty(f^{(i)})$, où $\nu_\infty$ désigne la norme uniforme de $\mathscr{C}^0([a, b], K)$ est une norme.

**Sous-espaces métriques, sous-evn**

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F$ une partie de $E$ ; alors $d|_{F \times F}$ est une distance sur $F$, dite **induite par d,** et $(F, d|_{F \times F})$ est appelé le

**métrique** $F$ de $E$ ; sauf confusion possible on notera encore $d$ la distance $d|_{F \times F}$.

De même, si $F$ est un sous-$K$-ev du $K$-evn $(E, \mathcal{N})$, la fonction $\mathcal{N}|_F$ est une norme sur $F$, dite **induite par** $\mathcal{N}$, et le $K$-evn $(F, \mathcal{N}|_F)$ est appelé le **sous-$K$-evn** $F$ de $E$, sa norme continuant, sauf risque de confusion, à être notée $\mathcal{N}$. Il est clair que dans ces conditions, *l'espace métrique issu de* $\mathcal{N}|_F$ *est le sous-espace métrique* $F$ *de* $(E, d_{\mathcal{N}})$.

En partant des exemples ci-dessus, ce passage aux sous-espaces permet de définir une foule d'espaces métriques ou de $K$-evn.

***Exemple 5 :*** Espaces $l^p(\mathbb{N}, K)$.

Soit un réel $p \geqslant 1$. Notons $l^p(\mathbb{N}, K)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $K$ telles que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} |u_n|^p$ converge. C'est un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(\mathbb{N}, K)$ (la stabilité pour la somme est claire si $p = 1$, et pour $p > 1$, résulte de : $(\forall n)\ \ |u_n + v_n|^p \leqslant 2^p(|u_n|^p + |v_n|^p)$). Sur ce sous-$K$-ev, soit $N_p$ la fonction $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$ : *c'est une norme.* En effet le cas $p = 1$ est évident, et si $p > 1$ on contrôle l'inégalité du triangle ainsi (cf. § V.5) :

$$(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n + v_n|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} (|u_n| + |v_n|)^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{N} |v_n|^p\right)^{1/p},$$

d'où, en prenant $\lim\limits_{N \to \infty}$ :

$$N_p(u + v) \leqslant N_p(u) + N_p(v)\,.$$

Pour $p > 1$, $l^1(\mathbb{N}, K)$ est un sous-$K$-ev de $l^p(\mathbb{N}, K)$ (car si $u = (u_n) \in l^1(\mathbb{N}, K)$, pour $n$ assez grand on a $|u_n| \leqslant 1$, d'où $|u_n|^p \leqslant |u_n|$). Donc sur $l^1(\mathbb{N}, K)$, toutes les normes $N_p$ $(p \geqslant 1)$ sont définies, ainsi que la norme $\nu_\infty$ de l'exemple 3 car $l^1(\mathbb{N}, K) \subset \mathscr{B}(\mathbb{N}, K)$.

On verrait de même :

$$1 \leqslant p_1 < p_2 < +\infty \Rightarrow l^{p_1}(\mathbb{N}, K) \subset l^{p_2}(\mathbb{N}, K)\,.$$

**Normes ou distances sur des produits**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Posons : $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$. Pour $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E$ et $y = (y_i) \in E$, soit $D_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$ ;

$$D_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right)^{1/2} ; \quad D_\infty(x, y) = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

Chacune de ces trois fonctions est une distance sur $E$ (la seule vérification un peu délicate est celle de l'inégalité triangulaire pour $D_2$, qui est conséquence de l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* vue au § II.2).

Nous dirons que $D_1$, $D_2$, $D_\infty$ sont les **distances standard** (associées aux $d_i$) **sur** $\boldsymbol{E}$.

De même, soit $(E_i, \mathcal{N}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des $K$-evn et $E$ le $K$-ev produit $E_1 \times \cdots \times E_n$. On vérifie que si, pour $x = (x_i) \in E$, on pose $\nu_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i(x)$, $\quad \nu_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i^2(x)\right)^{1/2}$ et $\nu_\infty(x) = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i(x)$

sont des normes sur $E$, appelées **normes standard** (associées aux $\mathcal{N}_i$) **sur** $\boldsymbol{E}$. Elles définissent sur $E$ les distances standard associées aux $(d_{\mathcal{N}_i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

***Exemple 6 :*** Si $n \in \mathbb{N}^*$, les normes standard de $K^n$ sont celles associées à la valeur absolue usuelle de $K$.

**Boules**

Soit $(E, d)$ un espace métrique. Par définition, si $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble $\{x \in E \mid d(a, x) < r\}$ s'appelle **boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$. Nous la noterons $\mathbf{B}_d(a, r)$ ou $\mathbf{B}(a, r)$ pour abréger.

L'ensemble $\{x \in E \mid d(a, x) \leqslant r\}$ s'appelle **boule fermée** de centre $a$ et de rayon $r$. Nous la noterons $\tilde{\mathbf{B}}_d(a, r)$ ou $\tilde{\mathbf{B}}(a, r)$ pour abréger.

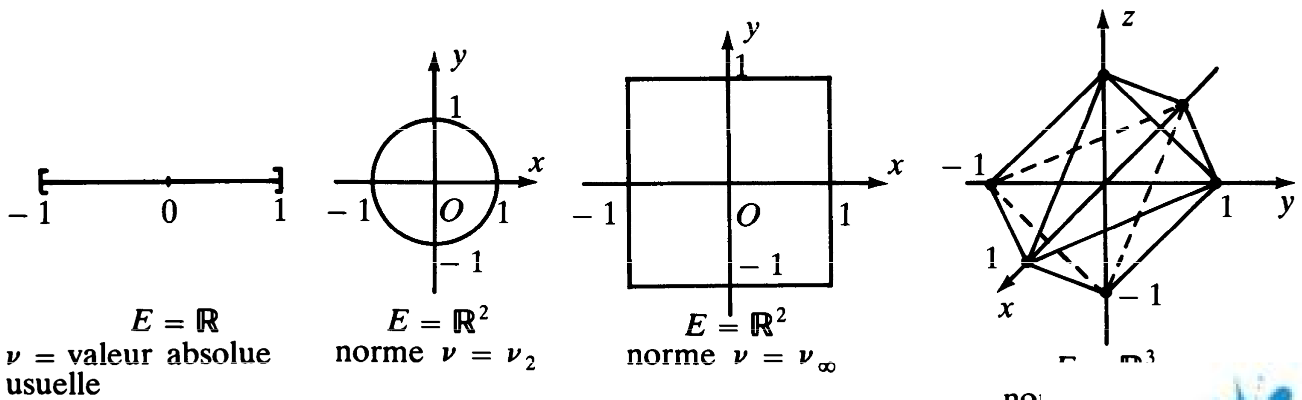
L'ensemble $\{x \in E \mid d(a, x) = r\}$ s'appelle **sphère** de centre $a$ et de rayon $r$. Nous la noterons $\mathbf{S}(a, r)$. Pour $r = 0$ on constate que $\mathbf{B}(a, 0) = \varnothing$ tandis que $\tilde{\mathbf{B}}(a, 0) = \{a\}$. Si $r > 0$ on a $\mathbf{B}(a, r) \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$ ; si $0 \leqslant r_1 < r_2$, $\mathbf{B}(a, r_1) \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r_1) \subset \mathbf{B}(a, r_2)$.

***Exemple 7 :*** Pour $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue usuelle,

$$\mathbf{B}(a, r) = ]a - r, a + r[ \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{B}}(a, r) = [a - r, a + r] \quad (r \in \mathbb{R}_+).$$

***Remarque 1 :*** Le vocabulaire utilisé ne doit pas faire illusion : une boule n'est pas forcément très « ronde » (cf. fig. 1) et deux boules peuvent être égales tout en ayant des centres distincts (cf. exercice 9, § X.2).

**Fig. 1.** Boule $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$.



Dans un $K$-evn $E$, la boule $\mathbf{B}(0_E, 1)$ (resp. $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$) s'appelle la **boule unité ouverte** (resp. **fermée**).

### Bornés d'un espace métrique

**PROPOSITION X.1.1**

*Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E, d)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(I) *Il existe $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A \subset \mathbf{B}(a, r)$ (resp. $A \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$).*

(II) *Pour tout $a \in E$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset \mathbf{B}(a, r)$ (resp. $A \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$).*

(III) *La fonction $A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est majorée.*

*Démonstration* (abrégée) :

Si $(a, b) \in E^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, il est clair que $\mathbf{B}(a, r) \subset \mathbf{B}(b, r + d(a, b))$ (resp. $\tilde{\mathbf{B}}(a, r) \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r + d(a, b))$), d'où aisément (I) $\Leftrightarrow$ (II).

Si $d$ est majorée sur $A \times A$ par $r \in \mathbb{R}_+$, pour tout $a \in A$, on a : $A \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$. Réciproquement, si $A \subset \tilde{\mathbf{B}}(a, r)$ $(a \in E, r \in \mathbb{R}_+)$, alors $d(x, y) \leqslant 2r$ pour tout $(x, y) \in A^2$. ∎

**DÉFINITION X.1.3**

*Avec les notations de la proposition* X.1.1, *$A$ non vide est dite* **bornée** *dans $(E, d)$ ssi elle vérifie les conditions* (I) *à* (III). *On convient que $\varnothing$ est bornée.*

*Si $A$ est bornée non vide, le nombre* $\sup\limits_{(x, y) \in A^2} d(x, y)$ *est appelé le* **diamètre** *de $A$ ; nous le noterons* diam $(A)$.

Toute partie d'un borné de $E$ est bornée. Toute *union finie de* bornés de $E$ est bornée. Toute partie *finie* de $E$ est bornée.

Si $(E, \mathcal{N})$ est un $K$-evn, pour $A$ borné non vide de $E$, on a $\lambda \,.\, A$ borné pour tout $\lambda \in K$ (par définition $\lambda \,.\, A = \{\lambda a\}_{a \in A}$). Si $A$ et $B$ sont bornés dans $E$, alors $A + B = \{a + b\}_{(a, b) \in A \times B}$ est borné car $(A \subset \tilde{\mathbf{B}}(0_E, r)$ et $B \subset \tilde{\mathbf{B}}(0, s)$, $r > 0$, $s > 0)$ implique $A + B \subset \tilde{\mathbf{B}}(0_E, r + s)$.

Attention ! Pour $A$ borné non vide de $E$, de diamètre $D$, en général $d(x, y) < D$ pour *tout* $(x, y) \in A^2$ (prendre par exemple une boule ouverte non vide d'un evn non nul).

### Fonctions bornées

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $X$ un ensemble non vide. Une fonction $f : X \longrightarrow E$ est dite **bornée** ssi son image est une partie bornée de $(E, d)$ (avec $(E, d) = K$ muni de la distance usuelle on retro ordinaire de fonction bornée). L'ensemble des fonctions bornées $X \longrightarrow E$ sera noté $\mathscr{B}(X, E)$.

Si $E$ est un $K$-evn, $\mathscr{B}(X, E)$ est un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(X, E)$ (la stabilité pour l'addition résultant de Im $(f+g) \subset$ Im $(f)$ + Im $(g)$ et de la remarque suivant la définition X.1.3). L'exemple 3 se généralise ainsi :

**PROPOSITION X.1.2**

*Soit $X$ un ensemble non vide et $(E, d)$ un espace métrique non vide. Pour $f$ et $g : X \longrightarrow E$* bornées, $\sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$ *existe dans* $\mathbb{R}_+$ ; *notant $D(f, g)$ ce nombre, $D$ est une distance sur $\mathscr{B}(X, E)$ ; et si $(E, d)$ est issu d'un $K$-*evn $(E, \mathcal{N})$, $\nu : f \mapsto D(f, 0)$ *est une norme sur $\mathscr{B}(X, E)$, de distance associée $d$.*

*Démonstration* (abrégée) :

Soit $a \in X$, et $f$ et $g : X \longrightarrow E$ bornées. Alors $(\forall x \in X)$

$$\begin{aligned} d(f(x), g(x)) &\leqslant d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) + d(g(a), g(x)) \\ &\leqslant r + s + d(f(a), g(a)) \end{aligned}$$

en désignant par $r$ le diamètre de Im $(f)$ et par celui de Im $(g)$. Mais si $f$, $g$, $h : X \longrightarrow E$ sont bornées,

$$(\forall x \in X) \quad d(f(x), h(x)) \leqslant d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \leqslant \leqslant D(f, g) + D(g, h),$$

d'où en passant à $\sup\limits_{x \in X}$ : $\quad D(f, h) \leqslant D(f, g) + D(g, h)$. ■

La distance $D$ et la norme $\nu$ de la proposition X.1.2 sont dites *uniformes* sur $\mathscr{B}(X, E)$. On notera souvent $\nu = \| \cdot \|_X$.

### Distance entre ensembles

Soit $A$ et $B$ des parties *non vides* de l'espace métrique $(E, d)$. La fonction $d : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ admet évidemment une borne inférieure, que nous noterons $d(A, B)$ et que nous appellerons selon l'usage consacré **distance entre $A$ et $B$** (bien que, à part la symétrie, $d(A, B)$ n'ait en rien les propriétés d'une distance sur $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$). En général, $\forall (a, b) \in A \times B$, l'inégalité $d(a, b) < d(A, B)$ est stricte.

Si $x \in E$, on appelle aussi **distance de $x$ à $A$** le nombre $d(\{x\}, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$ qui existe sûrement et qu'on note $d(x, A)$.

### Fonctions lipschitziennes

**DÉFINITION X.1.4**

*Soit deux espaces métriques $(E_1, d_1)$, $(E_2, d_2)$ et une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$.*

(I) *Si* $C \in \mathbb{R}_+$, *on dit que f est* ***C-lipschitzienne*** (*ou* lipschitzienne de rapport $C$, *ou en abrégé :* $\mathrm{Lip}_C$) *ssi :*

$$(\forall (x, y) \in E_1 \times E_2) \quad d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y) .$$

(II) *On dit que f est* ***lipschitzienne*** *ssi il existe* $C \in \mathbb{R}_+$ *tel que f soit* $\mathrm{Lip}_C$.

Pour $C$ donné dans $\mathbb{R}_+$, notons $\mathrm{Lip}_C\,(E_1, E_2)$ l'ensemble des $f : E_1 \longrightarrow E_2$ qui sont $\mathrm{Lip}_C$. L'ensemble (que nous noterons $\mathrm{Lip}\,(E_1, E_2)$) des fonctions lipschitziennes de $E_1$ dans $E_2$ est donc $\bigcup_{C \in \mathbb{R}_+} \mathrm{Lip}_C\,(E_1, E_2)$.

Si $0 \leqslant C_1 \leqslant C_2$, alors $\mathrm{Lip}_{C_1}\,(E_1, E_2) \subset \mathrm{Lip}_{C_2}\,(E_1, E_2)$. Une composée de fonctions lipschitziennes l'est encore. L'application identique d'un espace métrique sur lui-même est $\mathrm{Lip}_1$. Si $E_2$ est un $K$-evn, pour $f_i \in \mathrm{Lip}_{C_i}\,(E_1, E_2)$ $(i = 1\,;2)$ $(C_i \geqslant 0)$, on a : $f_1 + f_2 \in \mathrm{Lip}_{C_1 + C_2}\,(E_1, E_2)$ et, si $\lambda \in K$, $\lambda f_1 \in \mathrm{Lip}_{|\lambda| C_1}\,(E_1, E_2)$. Donc $\mathrm{Lip}\,(E_1, E_2)$ est un sous-$K$-ev de $\mathcal{F}\,(E_1, E_2)$.

***Exemple 8 :*** Soit $A$ une partie non vide de l'espace $(E, d)$. La fonction $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ est $\mathrm{Lip}_1$. En effet, pour $(x, y) \in E^2$, on a :

$(\forall t \in A) \quad d(x, t) \leqslant d(x, y) + d(y, t)$, d'où $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, t)$,

et en prenant $\inf_{t \in A}$ : $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$, c'est-à-dire $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. On voit de même $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(y, x)$ d'où finalement $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$.

**Isométries**

Soit $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$ deux espaces métriques ; on appelle **isométrie,** ou **application isométrique,** de $(E_1, d_1)$ dans $(E_2, d_2)$ toute application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ telle que

$$(\forall (x, y) \in E_1^2) \quad d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y) .$$

Il est clair que si $f$ est isométrique, elle est $\mathrm{Lip}_1$ et *injective ;* que $\mathrm{Id}_{E_1} : E_1 \longrightarrow E_1$ est isométrique de $(E_1, d_1)$ sur lui-même ; que toute composée d'applications isométriques l'est encore ; enfin si $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est une *bijection isométrique* de $(E_1, d_1)$ sur $(E_2, d_2)$, sa réciproque $f^{\langle -1 \rangle}$ est isométrique de $(E_2, d_2)$ sur $(E_1, d_1)$.

**Comparaison des distances et des normes**

**Définition X.1.5**

(I) *Soit E un ensemble et* $d_1$, $d_2$ *deux distances sur E. On dit que* $d_2$ *est* ***plus fine*** *que* $d_1$ *ssi l'application* $\mathrm{Id}_E : (E, d_2) \longrightarrow (E, d_1)$ *est lipschitzienne, i.e. ssi* $\exists a \in \mathbb{R}_+^* \mid d_1 \leqslant a d_2$.

*On dit que $d_1$ et $d_2$ sont* **équivalentes** *ssi chacune d'elles est* **plus fine** *que l'autre.*
(II) *Soit $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ deux normes sur un $K$-evn $E$. On dit que $\mathcal{N}_2$ est* **plus fine** *que $\mathcal{N}_1$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathcal{N}_1 \leqslant a\mathcal{N}_2$. On dit que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont* **équivalentes** *ssi chacune d'elles est plus fine que l'autre.*
*Enfin $\mathcal{N}_2$ est dite* **strictement plus fine** *que $\mathcal{N}_1$ ssi elle est plus fine que $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_1$ n'est pas plus fine que $\mathcal{N}_2$.*

Il est clair que la norme $\mathcal{N}_2$ est plus fine que $\mathcal{N}_1$ ssi la distance $d_{\mathcal{N}_2}$ est plus fine que $d_{\mathcal{N}_1}$.

***Exemple 9 :*** Sur $K^N$, les normes standard sont équivalentes entre elles (cf. § II.5). Plus généralement, si $(E_1, d_1), \ldots, (E_p, d_p)$ sont des espaces métriques, *les distances standard* $D_1$, $D_2$, $D_\infty$ définies sur $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ *sont équivalentes entre elles.*

***Exemple 10 :*** Soit deux réels $a, b$ $(a < b)$. Sur $E = \mathscr{C}^0([a, b], K)$ reprenons les normes $\nu_p$ des exemples 2 et 3. Pour $1 \leqslant p_1 < p_2 < +\infty$, écrivons $p_2 = \lambda p_1$, avec $\lambda > 1$, et soit

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left( i.e.\ \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 1 \right).$$

Appliquons *l'inégalité de Hölder* avec les exposants $\lambda$, $\mu$ aux fonctions $|f|^{p_1}$ et 1. On obtient :

$$\int_a^b |f|^{p_1} 1 \leqslant \left( \int_a^b |f|^{p_2} \right)^{1/\lambda} (b - a)^{1/\mu}, \quad \text{d'où} \quad \nu_{p_1} \leqslant (b - a)^{\frac{1}{\mu p_1}} \nu_{p_2}$$

et par conséquent $\nu_{p_2}$ est *plus fine* que $\nu_{p_1}$.

***Exemple 11 :*** Reprenons les normes $N_p$ de l'exemple 5. Pour $1 \leqslant p < +\infty$, il est clair que $N_\infty \leqslant N_p$. Donc $N_p$ est plus fine que $N_\infty$.

Pour $1 \leqslant p_1 < p_2 < +\infty$, vérifions que, sur $l^{p_1}(\mathbb{N}, K)$, $N_{p_2} \leqslant N_{p_1}$ : si $u = (u_n) \in l^{p_1}(\mathbb{N}, K)$, en posant $A = N_{p_2}(u)$, il vient (pour $u \neq 0$) :

$$1 = N_{p_2}\left( \frac{1}{A} u \right) \leqslant \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{A} \right|^{p_1} \right)^{1/p_1} = \frac{1}{A} N_{p_1}(u)\ ; \quad \text{d'où} \quad N_{p_2} \leqslant N_{p_1}.$$

Donc $N_{p_1}$ *est* (sur $l^{p_1}(\mathbb{N}, K)$) *plus fine que* $N_{p_2}$.

• Lorsque l'ensemble $E \neq \varnothing$ est fixé, soit $d_1$ et $d_2$ deux *distances équivalentes* sur $E$. Une partie $A$ de $E$ est $d_1$-bornée ssi elle est $d_2$-bornée.

• Soit $E_1$, $E_2$ deux ensembles, $d_1$ et $d_1'$ deux distances équivalentes sur $E_1$, $d_2$ et $d_2'$ deux distances équivalentes sur $E_2$. Alors :

$$\operatorname{Lip}((E_1, d_1), (E_2, d_2)) = \operatorname{Lip}((E_1, d_1'), (E_2, d_2'))$$

• La relation entre distances (resp. entre normes) : « $d_2$ est plus fine que $d_1$ » (resp. « $\mathcal{N}_2$ est plus fine que $\mathcal{N}_1$ ») est *réflexive et transitive :* c'est un *préordre.*

• La relation entre distances (resp. entre normes) « $d_1$ et $d_2$ sont équivalentes » (resp. « $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes ») est réflexive, symétrique et transitive : elle est *d'équivalence.*

### Algèbres normées

Nous renvoyons au Tome 1, § VI.4 pour les notions de base sur les algèbres, dont nous rappelons seulement que pour nous, elles sont par convention toujours associatives et à élément unité.

**DÉFINITION X.1.6**

*Soit $\mathcal{N}$ une norme sur une K-algèbre non nulle E, d'élément unité e.*

(I) *Nous dirons que $\mathcal{N}$ est* **compatible avec la structure de K-algèbre de E** *ssi*

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall (x, y) \in E^2) \quad \mathcal{N}(x \,.\, y) \leqslant C \mathcal{N}(x) \mathcal{N}(y) .$$

(II) *Nous dirons que $\mathcal{N}$ est une* **norme d'algèbre** *au sens large (resp. au sens strict) ssi*

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad \mathcal{N}(x \,.\, y) \leqslant \mathcal{N}(x) \mathcal{N}(y)$$

*(resp. ssi* $(\forall (x, y) \in E^2)$ $\mathcal{N}(x \,.\, y) \leqslant \mathcal{N}(x) \mathcal{N}(y)$, *et de plus :* $\mathcal{N}(e) = 1$).

*Enfin, nous appellerons* **K-algèbre normée** *(resp.* **K-algèbre normée au sens strict**) *toute K-algèbre munie d'une norme d'algèbre (resp. d'une norme d'algèbre stricte).*

Si la norme $\mathcal{N}$ est compatible avec la structure de $K$-algèbre de $E$, soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad \mathcal{N}(x \,.\, y) \leqslant C \mathcal{N}(x) \mathcal{N}(y) .$$

Alors $\mathcal{N}' = C\mathcal{N}$ est une norme d'algèbre (au sens large) sur $E$, et est *équivalente* à $\mathcal{N}$.

Dans une algèbre normée large, d'unité $e$, on a : $\mathcal{N}(e^2) \leqslant (\mathcal{N}(e))^2$, d'où : $\mathcal{N}(e) \geqslant 1$.

***Exemple 12 :*** Soit $X$ un ensemble non vide. On vérifie que $\mathcal{B}(X, K)$ est une sous-$K$-algèbre de $\mathcal{F}(X, K)$. La *norme uniforme* $\nu_\infty : f \mapsto \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ est une norme d'algèbre au sens strict sur $\mathcal{B}(X, K)$. Les algèbres normées de cette forme sont fondamentales en Analyse.

*Toute sous-algèbre d'une algèbre normée (large ou stricte) est, pour la norme induite, une algèbre normée.* Ainsi, à partir de l'exemple 12, on peut former de nombreuses algèbres normées.

***Exercice 1 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$. On donne deux suites $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour toute suite $c = (c_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on pose : $(\forall P = \sum p_n X^n \in E)$ $\nu_c(P) = \sum_{n \geqslant 0} c_n |p_n|$.

*a*) Montrer que chaque $\nu_c$ est une norme sur $E$.

*b*) Trouver une C.N.S. sur $(a, b)$ pour que $\nu_a$ soit plus fine que $\nu_b$.

***Exercice 2 :*** Soit $(E, \|\ .\ \|)$ un $K$-evn. Montrer que, pour tout $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$,

*a*) $\|x - y\| \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Max}(\|x\|, \|y\|) \left\| \frac{1}{\|x\|} x - \frac{1}{\|y\|} y \right\|$.

*b*) $\|x - y\| \geqslant \frac{1}{4} (\|x\| + \|y\|) \left\| \frac{1}{\|x\|} x - \frac{1}{\|y\|} y \right\|$ et montrer que l'inégalité *a*) ne peut pas être améliorée.

***Exercice 3 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. La norme uniforme de $E$ est notée $\nu$. Pour $g \in E$, soit $N_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \nu(fg)$.

*a*) C.N.S. sur $g$ pour que $N_g$ soit une norme.

*b*) $g$ étant choisie pour que $N_g$ soit une norme, comparer $N_g$ et $\nu$ ; donner une C.N.S. pour que $N_g$ et $\nu$ soient équivalentes.

***Exercice 4 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction *concave,* continue en 0, et telle que $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x > 0$. Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer que $\delta = f \circ d$ est une distance sur $E$.

Etudier des exemples simples : $f(x) = x^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, $f(x) = \operatorname{Log}(1 + x)$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $f(x) = \inf(1, x)$.

***Exercice 5 :*** Soit $E$ un ensemble non vide, sur lequel on a défini un écart $e$.

*a*) Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie par $(\forall (x, y) \in E^2)$, $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow e(x, y) = 0$ est d'équivalence.

*b*) Sur l'ensemble quotient $E/_{\mathscr{R}}$ montrer qu'on peut définir une distance en prenant comme distance de deux classes l'écart d'un élément quelconque de l'une et d'un élément quelconque de l'autre.

***Exercice 6 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique non vide. On note $F$ l'espace métrique $\mathscr{B}(E, \mathbb{R})$ muni de la distance uniforme $\delta$. On fixe $x_0 \in E$. Pour $x \in E$, soit $f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto d(z, x) - d(z, x_0)$. Vérifier que $(\forall x \in E)$ $f_x \in F$, et montrer que $\varphi : E \longrightarrow F$, $x \mapsto f_x$ est *isométrique* (*i.e.* $\delta(f_x, f_y) = d(x, y)$).

***Exercice 7 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\ .\ \|$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2)$ $\mathscr{N}_{f,g}((u, v)) = \|uf + vg\|$. Trouver une C.N.S. sur $f$ et $g$ pour que $\mathscr{N}_{f,g}$ soit une norme de $\mathbb{R}^2$. Généraliser.

***Exercice 8 :*** Soit $\mathscr{L}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $f \in \mathscr{L}$ on pose :

$$C(f) = \sup_{(x, y) \in [0, 1]^2,\, x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

On note $\nu$ la norme uniforme de $\mathscr{B}([0, 1], \mathbb{R})$, et enfin on pose : $(\forall f \in \mathscr{L})$ $N(f) = C(f) + \nu(f)$.

*a*) Montrer que $N$ est une norme sur $\mathscr{L}$.

*b*) Comparer les normes $N$ et $\nu$ sur $\mathscr{L}$.

***Exercice 9*** (notion de *jauge*) : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev non nul. On appelle *tonneau* de $E$ toute partie $V$ de $E$ vérifiant les propriétés suivantes :

($T_1$) $V$ est *convexe, i.e.* $\forall (x, y) \in V^2$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ $\lambda y + (1 - \lambda) x \in V$

($T_2$) $V$ est *absorbante, i.e.* $\forall x \in E$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}^* \mid \lambda x \in V$

($T_3$) $V$ est *symétrique, i.e.* $(\forall x \in V)$ $-x \in V$

($T_4$) $V$ ne contient aucune droite vectorielle.

*a*) Soit $\nu$ une norme de $E$. Montrer que tout ensemble *symétrique et convexe* $V$ tel que $\mathbf{B}(0_E, 1) \subset V \subset \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ est un tonneau.

*b*) Soit $V$ un tonneau de $E$. On définit $\nu : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi : $\nu(0_E) = 0$, et si $x \in E \setminus \{0_E\}$

$$\nu(x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*,\, \lambda x \in V} \left( \frac{1}{\lambda} \right).$$

Vérifier que $\nu$ est bien définie, montrer que $\nu$ est une norme sur $E$ ; préciser les boules unités ouverte et fermée de cette norme ($\nu$ est appelée la *jauge* du tonneau $V$).

***Exercice 10 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension infinie. En admettant que $E$ admet au moins une base, montrer que $E$ admet au moins une norme.

***Exercice 11*** (*Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*) : On considère un $\mathbb{R}$-ev $E$. Une fonction $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *sous-linéaire* ssi $\forall (x, y) \in E^2$, $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ et $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

*a*) Montrer que si $p$ est une fonction sous-linéaire du $\mathbb{R}$-ev $E$ dans $\mathbb{R}$, on a : $p(0_E) = 0$ et $(\forall x \in E)$, $-p(-x) \leqslant p(x)$.

*b*) On suppose le $\mathbb{R}$-ev $E$ *de dimension finie* $n \geqslant 1$. On donne $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sous-linéaire, un sous-$\mathbb{R}$-ev $F_0$ de $E$, et une forme linéaire $f_0$ sur $F_0$ majorée sur $F_0$ par $p$. On se propose de démontrer la proposition suivante :

(HB) Il existe $f \in E^*$ prolongeant $f_0$, et majorée par $p$ sur $E$. Pour cela on suivra le plan ci-après :

$b_1$) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples $(g, G)$, où $G$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $E$ contenant $F_0$, et où $g \in G^*$ prolonge $f_0$ et est majorée par $p$ sur $G$. Vérifier qu'il existe dans $\mathcal{F}$ un élément $(g, G)$ tel que dim $(G)$ soit *maximum.*

$b_2$) Soit $(g, G) \in \mathcal{F}$ tel que dim $(G) < n$. Montrer que dim $(G)$ n'est pas maximum parmi les entiers dim $(H)$, où $(h, H) \in \mathcal{F}$. Pour cela, soit $z \in E \setminus G$ ; vérifier que

$$A = \sup_{y \in G} (-p(-y - z) - g(y)) \leqslant \inf_{x \in G} (p(x + z) - g(x)) = B.$$

Choisir $C \in [A, B]$. Poser $H = G \oplus \mathbb{R}z$. Pour $x + \lambda z \in H$ $(x \in G, \lambda \in \mathbb{R})$ poser $h(x + \lambda z) = g(x) + \lambda C$ et montrer que $(h, H) \in \mathcal{F}$.

$b_3$) Conclure.

***Exercice 12 :*** Soit $E$ la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, munie de la norme uniforme $\nu$. On donne un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\Phi : E \longrightarrow E$. Montrer que $\Phi$ est *isométrique, i.e.* $(\forall f \in E)\ \nu(\Phi(f)) = \nu(f)$.

***Exercice 13 :*** Soit une suite injective $(s_n)$ de $[0, 1]$ et une série $\sum a_n$ à termes $> 0$ convergente. On note $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on pose $\mathcal{N}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |f(s_n)|$ (justifier son existence).

*a*) Vérifier que $\mathcal{N}$ est une semi-norme. Quand est-ce une norme ?

*b*) Lorsque $\mathcal{N}$ est une norme, la comparer à la norme uniforme $\nu_\infty$ de $E$, et aussi à la norme $\nu_1$ de la convergence en moyenne de $E$ (on rappelle que $\nu_\infty(f) = \operatorname{Max}_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et que $\nu_1(f) = \int_0^1 |f|$).

***Exercice 14 :*** Donner un exemple de fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant partout une dérivée finie et qui cependant n'est pas lipschitzienne.

***Exercice 15 :*** Soit $E$ l'espace métrique obtenu en dotant la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ de $\mathbb{R}^3$ de la distance géodésique (plus courte distance sur la sphère). Pour tout $m \in E$ et tout $\rho \geqslant 0$, calculer diam $(A)$, où $A$ est le « cercle » de centre $m$ et de rayon $\rho$ et vérifier que ce n'est pas une fonction croissante du rayon $\rho$.

## § X.2 *TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE*

### Notion d'espace topologique

**DÉFINITION X.2.1**

(I) *Sur un ensemble $T$ on appelle* **topologie** *tout sous-ensemble $\mathfrak{O}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(T)$ des parties de $T$ vérifiant les axiomes suivants :*
$(O_1)$ $\mathfrak{O}$ *est* **stable par réunion quelconque.**
$(O_2)$ $\varnothing \in \mathfrak{O}$ $T \in \mathfrak{O}$ *et* $\mathfrak{O}$, *est* **stable par intersection finie** *(c'est-à-dire $(U_1 \in \mathfrak{O}$ et $U_2 \in \mathfrak{O}) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{O}$).*
(II) *On appelle* **espace topologique** *tout ensemble muni d'une topologie.*

Soit $(T, \mathfrak{O})$ un espace topologique : les éléments de $\mathfrak{O}$ sont appelés les **parties ouvertes** (en abrégé les **ouverts**) de cet espace. Les parties $F$ de $T$ telles que $T\backslash F$ soit ouvert sont appelées les **parties fermées** (ou **fermés**) de cet espace. Par exemple $\varnothing$ et $T$ sont à la fois ouverts et fermés.

Les fermés de $(T, \mathfrak{O})$ satisfont évidemment les **axiomes duaux** de $(O_1)$ et $(O_2)$ obtenus par passage aux complémentaires ; si $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des fermés de $T$, ces axiomes sont :

$(O_1^*)$ $\mathfrak{F}$ *est stable par intersections quelconques.*

$(O_2^*)$ $\varnothing \in \mathfrak{F}$, $T \in \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ *est stable par unions finies* (ou, ce qui revient au même, $(\forall F_1 \in \mathfrak{F}, \forall F_2 \in \mathfrak{F})\ F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$). Réciproquement, étant donné $\mathfrak{F} \subset \mathscr{P}(T)$ qui vérifie $(O_1^*)$ et $(O_2^*)$, il existe une et une seule topologie sur $T$ ayant $\mathfrak{F}$ pour ensemble de fermés : l'ensemble des ouverts de cette topologie est alors $\{T\backslash F\}_{F \in \mathfrak{F}}$.

On retiendra que, dans $T$ *l'application* $U \mapsto T\backslash U$ *définit une bijection de l'ensemble des ouverts sur celui des fermés, dont la réciproque est* $F \mapsto T\backslash F$.

***Exemple 1 :*** Soit $T$ un ensemble non vide ; $\{\varnothing , T\}$ est l'ensemble des ouverts d'une topologie de $T$ appelée **topologie grossière** (c'est celle qui compte le moins d'ouverts possible). De même $\mathscr{P}(T)$ est l'ensemble des ouverts d'une autre topologie de $T$ appelée **topologie discrète** et qui est généralement distincte de la précédente (sauf dans le cas où card $(T) \leqslant 1$).

***Exemple 2 :*** L'ensemble des *parties ouvertes de* $\mathbb{R}$, telles qu'elles ont été définies au § III.2 constitue une topologie, dite **usuelle,** de $\mathbb{R}$.

De même l'ensemble des parties ouvertes de $\bar{\mathbb{R}}$ définies au § III.6 est une topologie, dite *usuelle*, de $\bar{\mathbb{R}}$ ; on fait référence à ces espaces topologiques en utilisant l'expression « $\mathbb{R}$ usuel » (resp. « $\bar{\mathbb{R}}$ usuel »).

**Définition X.2.2**

*Soit $(T, \mathfrak{O})$ un espace topologique. On appelle* **base** *de la topologie de $T$ tout sous-ensemble $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{O}$ tel que tout ouvert de $T$ soit obtenu comme union (finie ou non) d'éléments de $\mathfrak{B}$.*

***Exemple 3 :*** Pour un espace *discret* $T$ (cf. exemple 1) l'ensemble des singletons de $T$ $\{\{x\}\}_{x \in T}$ est une base de la topologie.

***Exemple 4 :*** Pour $\mathbb{R}$ usuel, chacun des ensembles suivants est une base de la topologie :

*a*) l'ensemble des *intervalles ouverts bornés,*

*b*) l'ensemble des intervalles ouverts à extrémités dans $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est n'importe quelle partie *dense* (cf. Chap. III) de $\mathbb{R}$.

### Voisinages

**Définition X.2.3**

*Dans un espace topologique $(T, \mathfrak{O})$, soit $x \in T$. On appelle voisinage de $x$ toute partie $V$ de $T$ telle qu'il existe un ouvert $\omega$ vérifiant $x \in \omega \subset V$. On appelle* **système fondamental de voisinages** *de $x$ (ou* base de voisinages *de $x$) tout ensemble $\mathfrak{B}_x$ de voisinages de $x$ tel que :*

$$\forall V \text{ voisinage de } x, \quad \exists W \in \mathfrak{B}_x \mid W \subset V .$$

Avec ces notations, pour $x \in T$, désignons par $\mathfrak{W}_x$ l'ensemble des voisinages de $x$. Il vérifie, pour chaque $x \in T$:

($V_1$) $\forall V \in \mathfrak{W}_x, x \in V$.

($V_2$) $(\forall V \in \mathfrak{W}_x, \forall W \subset T)\ (V \subset W) \Rightarrow (W \in \mathfrak{W}_x)$.

($V_3$) $\mathfrak{W}_x$ est stable par intersections finies.

($V_4$) Pour tout $V \in \mathfrak{W}_x$, il existe $U \in \mathfrak{W}_x$ tel que $\forall y \in U$, $U \in \mathfrak{W}_y$. En effet, ($V_1$) et ($V_2$) résultent des définitions, et ($V_3$) résulte de ($O_2$). Pour ($V_4$), si $V \in \mathfrak{W}_x$, soit $\omega$ un ouvert tel que $x \in \omega \subset V$, on constate que $U = \omega$ satisfait ($V_4$).

La définition X.2.3 prouve que **tout ouvert est voisinage de chacun de ses points,** et que pour $x \in T$ donné, *les voisinages ouverts de $x$ forment une base de voisinages de $x$.*

***Exemple 5 :*** Dans $\mathbb{R}$ usuel, soit un point $a$. Chacun des ensembles suivants est une base de voisinages de $a$ : $\{[a - r, a + r]\}_{r > 0}$ ; $\{]a - r, a + r[\}_{r > 0}$ ; $\{]a - r_n, a + r_n[\}_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\{[a - r_n, a + r_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$), où $(r_n)$ est une suite de $\mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0.

Dans $\bar{\mathbb{R}}$ usuel, pour toute suite $(A_n)$ *réelle* tendant vers $+\infty$, l'ensemble $\{[A_n, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\{]A_n, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$) est une base de v

$+\infty$. On remarque donc que dans $\mathbb{R}$ usuel (resp. $\bar{\mathbb{R}}$ usuel), **tout point possède au moins une base dénombrable de voisinages.**

**THÉORÈME X.2.1**

*Pour qu'une partie $\Omega$ d'un espace topologique $T$ soit* ***ouverte,*** *il faut et il suffit qu'elle soit* ***voisinage de chacun de ses points.***

*Démonstration :*

On a vu plus haut que la condition est nécessaire. Réciproquement, si elle est remplie, pour chaque $x \in \Omega$, soit $\omega_x$ un ouvert de $T$ tel que $x \in \omega_x \subset \Omega$. Alors

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \{x\} \subset \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x \subset \Omega \,, \quad \text{d'où} \quad \Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x$$

est ouvert d'après $(O_1)$. ■

**DÉFINITION X.2.4**

*Un espace topologique $T$ est dit* ***séparé*** *ssi il vérifie l'axiome suivant, dit* ***de Hausdorff :***

$$(\forall (x, y) \in T^2) \quad (x \neq y) \Rightarrow (\exists V \text{ voisinage de } x, \; \exists W \text{ voisinage de } y) \mid V \cap W = \varnothing \,.$$

Si $T$ est vide ou n'a qu'un unique élément, il est évidemment séparé pour son unique topologie.

Les espaces $\mathbb{R}$ et $\bar{\mathbb{R}}$ usuels sont séparés.

Un espace discret est séparé, mais un espace grossier de cardinal $\geqslant 2$ ne l'est pas ; si $T$ est *fini,* il possède une unique topologie séparée : la topologie discrète.

**PROPOSITION X.2.1**

*Dans un espace topologique séparé, tout singleton est un fermé.*

C'est une conséquence immédiate du théorème X.2.1.

**Topologie issue d'une distance**

**PROPOSITION X.2.2**

*Dans un espace métrique $(E, d)$, il existe une et une seule topologie dont une base est l'*ensemble des boules ouvertes.

*Démonstration :*

Soit $\mathfrak{O}$ l'ensemble des unions quelconques de boules ouvertes de $E$. La topologie cherchée est unique : ce ne peut être que $\mathfrak{O}$. Il reste à prouver que $\mathfrak{O}$ est bien une topologie, et le seul point non évident est la stabilité par intersections finies. Grâce à la distributivité de la rapport à l'intersection, on est ramené à prouver que l'intersection de deux boules ouvertes appartient à $\mathfrak{O}$.

Soit donc

$$B_i = \mathbf{B}(a_i, r_i) \quad (i \in \{1, 2\}, r_i > 0).$$

Pour $x \in B_1 \cap B_2$, soit

$$\omega_x = \mathbf{B}(x, \rho_x) \quad \text{où} \quad \rho_x = \operatorname*{Min}_{i=1}^{2} (r_i - d(a_i, x)).$$

L'inégalité du triangle montre que $\omega_x \subset B_1 \cap B_2$, que $\rho_x > 0$, d'où $x \in \omega_x$ et $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} \omega_x$, donc $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{O}$. ■

La topologie définie dans la proposition X.2.2 est dite **issue de la distance *d*** (ou *associée à d*). Lorsque $E$ est un $K$-ev et que $d$ provient d'une norme $\mathcal{N}$ de $E$, cette topologie est dite **issue de la norme** $\mathcal{N}$ (ou *associée à* $\mathcal{N}$). *Un espace métrique sera toujours tacitement équipé de la topologie de sa distance.*

***Exemple 6 :*** La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est issue de sa distance usuelle.

La topologie associée à une distance possède, à cause de la riche structure de $\mathbb{R}$, une foule de propriétés dont voici les plus simples : soit $(E, d)$ un espace métrique.

($\text{TM}_1$) *La topologie de* $(E, d)$ *est séparée.*

En effet, soit $(a, b) \in E^2$, $a \neq b$. Les voisinages $\mathbf{B}\left(a, \frac{r}{2}\right)$ et $\mathbf{B}\left(b, \frac{r}{2}\right)$ de $a$ et $b$, où l'on a pris $r = d(a, b)$, sont disjoints.

($\text{TM}_2$) *Toute « boule ouverte » est un ouvert, toute « boule fermée » est un fermé.* C'est évident pour les boules ouvertes du fait de la définition de la topologie de $(E, d)$. Soit $\tilde{\mathbf{B}}(a, r) = F$ $(a \in E, r \geqslant 0)$ une boule fermée. Posons $\Omega = E \setminus F$ : l'ensemble $\Omega$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert, car si $x \in \Omega$, en posant $\rho_x = d(a, x) - r$, on a : $x \in \mathbf{B}(x, \rho_x) \subset \Omega$. Donc $F = E \setminus \Omega$ est fermé.

($\text{TM}_3$) Soit $a \in E$ ; *pour toute suite* $(r_n)$ *tendant vers* 0 *dans* $\mathbb{R}_+^*$, *les ensembles suivants sont des bases de voisinages de a :*

$$\{\mathbf{B}(a, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}} ; \quad \{\tilde{\mathbf{B}}(a, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

En particulier, *chaque point possède au moins une base dénombrable de voisinages.*

($\text{TM}_4$) Sur un ensemble $E$, *deux distances équivalentes* $d_1$ *et* $d_2$ *définissent la même topologie.*

En effet, soit des réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tels que $d_2 \leqslant \alpha d_1$ et $d_1 \leqslant \beta d_2$. Soit $a \in E$ et $r$ réel $> 0$. Pour $x \in \mathbf{B}_{d_2}(a, r)$, soit $\rho_x$ réel :

$\mathbf{B}_{d_2}(x, \rho_x) \subset \mathbf{B}_{d_2}(a, r)$. Alors

$$\mathbf{B}_{d_1}\left(x, \frac{1}{\alpha}\rho_x\right) \subset \mathbf{B}_{d_2}(x, \rho_x) \; ; \quad \text{d'où} \quad \mathbf{B}_{d_2}(a, r) = \bigcup_{x \in B_{d_2}(a, r)} \mathbf{B}_{d_1}\left(x, \frac{1}{\alpha}\rho_x\right) ,$$

et donc $\mathbf{B}_{d_2}(a, r)$ est un ouvert pour $d_1$, ce qui entraîne que tout ouvert pour $d_2$ l'est pour $d_1$. De même on voit que tout ouvert de $d_1$ l'est pour $d_2$.

($TM_5$) Sur un $K$-ev $E$, *deux normes équivalentes* $\mathcal{N}_1$ *et* $\mathcal{N}_2$ *définissent la même topologie.*

En effet, les distances issues de $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont alors équivalentes et on applique ($TM_4$). Une réciproque sera vue plus loin (cf. théorème X.6.2).

***Exemple 7 :*** Sur $K^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), les normes standard définissent la même topologie.

**Topologie produit**

**PROPOSITION X.2.3**

> *Soit deux espaces topologiques $E$, $F$ ; sur $G = E \times F$ appelons* ensembles élémentaires *les parties $U \times V$, où $U$ est ouvert dans $E$ et $V$ ouvert dans $F$. Il existe une unique topologie sur $G$ ayant pour base l'ensemble des ensembles élémentaires.*

*Démonstration :*

Soit $\mathfrak{O}$ l'ensemble des unions quelconque d'ensembles élémentaires. Si la topologie cherchée existe, ce ne peut être que $\mathfrak{O}$. Il reste à prouver que $\mathfrak{O}$ est bien une topologie. Or $\mathfrak{O}$ vérifie ($O_1$) par associativité de l'union ; elle contient $\varnothing$ et $G = E \times F$. Soit $S_1 \in \mathfrak{O}$ et $S_2 \in \mathfrak{O}$ ; par distributivité de l'union par rapport à l'intersection il suffit de prouver que $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{O}$ dans le cas où $S_1$ et $S_2$ sont des *ensembles élémentaires*.

Dans ce cas $S_i = U_i \times V_i$ ($U_i$ ouvert de $E$, $V_i$ ouvert de $F$, $i \in \{1, 2\}$) ; alors $S_1 \cap S_2 = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathfrak{O}$ car $U_1 \cap U_2$ est ouvert dans $E$ et $V_1 \cap V_2$ est ouvert dans $F$. ■

La topologie sur $G$ définie dans cette proposition X.2.3 s'appelle **topologie produit** (de celles de $E$ et $F$). On dit alors que $G$, muni de cette topologie, est l'**espace produit** de $E$ et $F$ (ou *espace produit* $E \times F$). La notion d'espace topologique produit s'étend de façon évidente à un nombre fini $n \geqslant 1$ d'espaces topologiques $E_1, \ldots, E_n$ : c'est la topologie de $G = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, unique, dont une base est l'ensemble des *ensembles élémentaires* $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, où chaque $U_i$ est ouvert dans $E_i$. Il est facile de voir, que ce produit est *associatif,* en le sens suivant : pour tout *parenthésage* de $E_1 \times \cdots \times E_n$, si on forme les produits topologiques dans chaque couple de parenthèses, en allant des intérieures aux extérieures, on obtient sur $G$ toujours la même topologie (étant entendu qu'on identifie à $G$ tous les *ensembles* obtenus par produit cartésien dans chaque

Ainsi, pour $n = 3$, les topologies $(E_1 \times E_2) \times E_3$ et $E_1 \times (E_2 \times E_3)$ sur $G$ sont les mêmes. Les ensembles élémentaires du produit topologique $E_1 \times \cdots \times E_n$ étant ouverts dans l'espace produit, on les nomme aussi **ouverts élémentaires.**

***Exemple 8 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La topologie de $\mathbb{R}^n$, produit des $n$ espaces facteurs « $\mathbb{R}$ usuel », s'appelle **topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$.** Appelons **pavé ouvert** de $\mathbb{R}^n$ tout ouvert élémentaire du type $I_1 \times \cdots \times I_n$, où chaque $I_k$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ étant union d'intervalles ouverts, on en déduit que tout ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^n$ est union de pavés ouverts, ce qui entraîne que *les pavés ouverts forment une base de la topologie usuelle de* $\mathbb{R}^n$.

**PROPOSITION X.2.4**

*Soit $E_1, \ldots, E_n$ $(n \geqslant 1)$ des espaces topologiques,et $E$ leur espace produit.*

(I) *Si $A_i$ est fermé dans $E_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ est fermé dans $E$.*

(II) *Si chaque $E_i$ est séparé, $E$ est séparé.*

(III) *Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ième projection $p_i : E \longrightarrow E_i$ est* ouverte, *c'est-à-dire pour tout ouvert $U$ de $E$, $p_i(U)$ est ouvert dans $E_i$.*

*Démonstration* (dans le cas $n = 2$ pour alléger les notations) :

(I) $$E \backslash A = [(E_1 \backslash A_1) \times E_2] \cup [E_1 \times (E_2 \backslash A_2)]$$

est ouvert car $E_i \backslash A_i$ est ouvert dans $E_i$ ; donc $A$ est fermé.

(II) Soit $a = (a_1, a_2) \in E$, $b = (b_1, b_2) \in E$ $(a_i \in E_i, b_i \in E_i)$. Si $a \neq b$ on a par exemple $a_1 \neq b_1$ (sinon raisonner avec $a_2 \neq b_2$). Choisissons $S_1$ et $T_1$ voisinages ouverts de $a_1$ et $b_1$ dans $E_1$ ne se rencontrant pas. Alors $S_1 \times E_2 = S$ et $T_1 \times E_2 = T$ sont deux voisinages, de $a$ et $b$ respectivement, dans $E$, sans point commun.

(III) Soit $U$ ouvert de $E$ ; montrons par exemple que $p_1(U)$ est ouvert dans $E_1$, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points. Si $a_1 \in p_1(U)$, soit $a_2 \in E_2$ tel que $a = (a_1, a_2) \in U$, puis $S_1 \times S_2$ un voisinage *ouvert élémentaire* de $a$ dans $E$ inclus dans $U$. Alors $a_1 \in S_1 \subset p_1(U)$, donc $p_1(U)$ est voisinage de $a_1$. ■

### Topologie produit et distances

**PROPOSITION X.2.5**

*Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $(n \geqslant 1)$ des espaces métriques et $D$ une distance standard associée aux $d_i$ sur* l'ensemble *produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. La topologie de $D$ est la topologie produit de celles*

*Démonstration* (pour $n = 2$) :

En raison de ($TM_4$) on peut supposer que $D(x, y) = \underset{1 \leqslant i \leqslant 2}{\text{Max}}\ d_i(x_i, y_i)$ $(x = (x_i) \in E,\ \ y = (y_i) \in E)$. Comme tout ouvert de $E_i$ est union de boules ouvertes ($i \in \{1, 2\}$), une base de la topologie produit de celles des $d_i$ est l'ensemble $\mathfrak{B}$ des

$$\mathbf{B}_{d_1}(a_1, r_1) \times \mathbf{B}_{d_2}(a_2, r_2) \quad (r_1 > 0, r_2 > 0, a_i \in E_i)\ .$$

Une base de la topologie de $D$ est l'ensemble $\mathfrak{B}'$ des $\mathbf{B}_{d_1}(a_1, r) \times \mathbf{B}_{d_2}(a_2, r)$ $(a_i \in E_i, r > 0)$. Comme $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, on achève en prouvant que tout élément de $\mathfrak{B}$ est union d'éléments de $\mathfrak{B}'$ ; soit donc $B = \mathbf{B}_{d_1}(a_1, r_1) \times \mathbf{B}_{d_2}(a_2, r_2)$. Pour $x = (x_1, x_2) \in B$, soit $\rho_x = \underset{1 \leqslant i \leqslant 2}{\text{Min}}\ (r_i - d_i(a_i, x_i))$. Alors

$$\rho_x > 0\ , \quad \text{et} \quad x \in \mathbf{B}_D(x, \rho_x) \subset B\ , \quad \text{d'où} \quad B = \bigcup_{x \in B} \mathbf{B}_D(x, \rho_x)$$

est bien union d'éléments de $\mathfrak{B}'$. ■

***Exemple 9 :*** Sur $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$, la distance euclidienne canonique définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ : la topologie usuelle de $\mathbb{C}^n$ est définie par n'importe quelle norme standard $\mathcal{N}$ du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^n$. Prenons pour $\mathcal{N}$ la norme $(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2}$ : si on identifie $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{N}$ est la norme standard euclidienne canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ ; donc la topologie usuelle de $\mathbb{C}^n$ s'identifie à la topologie usuelle de $\mathbb{R}^{2n}$. On vérifiera sans peine qu'une base de cette topologie est l'ensemble des *polydisques ouverts* $D_1 \times \cdots \times D_n$, où $(\forall k)$, $D_k$ est de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_k| < r_k\}$ pour $a_k \in \mathbb{C}$ et $r_k$ réel $> 0$.

**Sous-espaces topologiques**

Les propriétés de l'union et de l'intersection d'ensembles (cf. Tome 1, Chap. I) permettent de vérifier immédiatement la proposition suivante :

**PROPOSITION X.2.6**

*Soit $Y$ une partie d'un espace topologique $(X, \mathfrak{O})$. L'ensemble $\mathfrak{O}_Y = \{U \cap Y\}_{U \in \mathfrak{O}}$ des* traces *sur $Y$ des ouverts de $X$ est une topologie sur $Y$.*

La topologie $\mathfrak{O}_Y$ ainsi définie est dite **induite** (sur $Y$ par celle de $X$). L'espace $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ est appelé **sous-espace topologique** $Y$ de $X$. Les ouverts de $\mathfrak{O}_Y$ (resp. fermés de $\mathfrak{O}_Y$) s'appellent **ouverts relatifs** de $Y$ (resp. **fermés relatifs** de $Y$). Bien sûr, en général un ouvert (resp. fermé) relatif n'est pas ouvert (resp. fermé) *dans* $X$. Cependant (cf. axiome ($O_2$)), *si $Y$ est ouvert dans $X$, les ouverts relatifs de $Y$ sont les ouverts de $X$ inclus dans* *fermé dans $X$, les fermés relatifs de $Y$ sont les fermés de $X$ inclus dans $Y$.* Pour les fermés, cette assertion vient de ce que, de manière générale, les fermés relatifs de $Y$ sont les $F \cap Y$, où $F$ est fermé dans $X$, car $(\forall A \subset X)$ $Y \backslash A = Y \cap (X \backslash A)$.

Soit $Z$ une partie de $Y$. Pour $A \subset X$, on a : $A \cap Z = (A \cap Y) \cap Z$. D'où : *la topologie induite par $X$ sur $Z$ est celle induite sur $Z$ par le sous-espace $Y$* (transitivité de la notion de sous-espace topologique).

Enfin, soit $Y_1, \dots, Y_n$ des parties respectives d'espaces topologiques $X_1, \dots, X_n$ $(n \geq 1)$. *La topologie induite sur $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ par l'espace produit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ est le produit des topologies induites par chaque $X_i$ sur $Y_i$.*

Si $Y$ est sous-espace topologique de $X$, pour $a \in Y$, les voisinages (dits *relatifs*) de $a$ dans $Y$ sont les $V \cap Y$, où $V$ est voisinage de $a$ dans $X$. On en déduit immédiatement : *si $X$ est séparé, $Y$ l'est aussi.*

**PROPOSITION X.2.7**

> *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F$ une partie de $E$. Notons $d_F$ la distance induite par $d$ sur $F$ ; la topologie induite sur $F$ par celle de $d$ est la topologie de $d_F$.*

(C'est une conséquence élémentaire des définitions.)

Bien que la notion de topologie induite soit très élémentaire, elle peut conduire à de graves erreurs si l'on ne fait pas attention à ses interventions sournoises dans les raisonnements, au point que les meilleurs mathématiciens n'hésitent pas à être lourds mais précis chaque fois qu'elle est en jeu.

***Exemple 10 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Pour la topologie induite par $\mathbb{R}$ usuel, $[a, b]$ et $[a, b[$ sont ouverts relatifs de $[a, b]$ tandis que $]a, b[$ et (pour $a < c < b$) $]a, c]$ sont fermés relatifs de $]a, b[$.

***Exemple 11 :*** La topologie induite sur $\mathbb{R}$ par $\bar{\mathbb{R}}$ usuel est la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ (revoir le § III.6).

***Exercice 1 :*** Un espace métrique $(E, d)$ est dit *séparable* ssi il admet au moins une partie dénombrable *partout dense* (*i.e.* rencontrant tout ouvert non vide). Pour un espace métrique $(E, d)$, montrer l'équivalence entre (1) $(E, d)$ est séparable et (2) la topologie de $(E, d)$ admet au moins une base dénombrable.

*Indication :* Si $(E, d)$ est séparable, considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dense* de $E$ et montrer que les boules $\{\mathbf{B}(x_n, r)\}_{n \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{R}_+^*}$, forment une base de la topologie de $(E, d)$.

***Exercice 2 :*** *a*) Soit $E = \mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des suites bornées de réels muni de la norme uniforme. Montrer que $E$ n'est pas *séparable* (cf. exercice 1).

*b*) Montrer que les espaces métriques suivants sont séparables :

$b_1$) $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme (cf. proposition VII.1.3)

$b_2$) $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme en moyenne d'ordre $p$ (cf. § VII.7)

$b_3$) $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ muni de la norme $N_1 : u = (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

***Exercice 3 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique *séparable* (cf. exercice 1) et $A$ une partie de $E$. On dit que $x \in E$ est *point de condensation* de $A$ ssi tout voisinage de $x$ contient une partie infinie *non dénombrable* de $A$.

*a*) Prouver que si $A$ n'a aucun point de condensation, $A$ est dénombrable.

*b*) Soit $B$ l'ensemble des points de condensation de $A$. Montrer que $B$ est fermé, que tout point de $B$ est point de condensation de $B$ et que $A \cap (E \setminus B)$ est au plus dénombrable.

***Exercice 4 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique dénombrable. Montrer que tout $x \in E$ possède un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés.

***Exercice 5 :*** Soit $E = \bar{\mathbb{R}}$. On pose $\varphi(x) = \operatorname{Arc\,tg} x$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(-\infty) = \dfrac{-\pi}{2}$ et $\varphi(+\infty) = +\dfrac{\pi}{2}$. Pour $(x, y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$ on pose $d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Montrer que $d$ est une distance sur $\bar{\mathbb{R}}$ et que la topologie issue de $d$ est la topologie usuelle de $\bar{\mathbb{R}}$, mais que toute partie de $(\bar{\mathbb{R}}, d)$ est bornée.

***Exercice 6 :*** Soit $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Si $(z, z') \in E^2$, on pose $d(z, z') = |z - z'|$ s'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $z' = \rho z$, et sinon $d(z, z') = |z| + |z'|$.

*a*) Vérifier que $d$ est une distance sur $E$.

*b*) Montrer que $(E, d)$ n'est pas séparable (cf. exercice 1). Quelle est la topologie définie par $d$ sur le sous-ensemble $\mathbb{U} = \{z \in E \mid |z| = 1\}$ de $E$ ?

***Exercice 7 :*** Soit $E = \mathbb{R}^n$ usuel $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que l'ensemble des parties ouvertes de $E$ a exactement la puissance du continu (*i.e.* est équipotent à $\mathbb{R}$).

***Exercice 8 :*** Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme standard ($n$ entier $\geqslant 2$) donner un exemple de deux parties non vides $A$ et $B$ disjointes, fermées et telles que $d(A, B) = 0$.

***Exercice 9 (espaces ultramétriques) :*** On appelle *ultramétrique* un espace métrique $(E, d)$ sur lequel la distance $d$ vérifie l'inégalité *ultramétrique :*

$$(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad d(x, z) \leqslant \operatorname{Max}\,(d(x, y), d(y, z)).$$

*a*) Montrer que $d(x, y) \neq d(y, z)$ entraîne $d(x, z) = \operatorname{Max}\,(d(x, y), d(y, z))$ (autrement dit tout triangle est isocèle, les côtés égaux étant $\geqslant$ au troisième côté).

*b*) Montrer que toute boule ouverte $\mathbf{B}(x, r)$ est à la fois un ouvert et un fermé et que tout point de cette boule en est un centre.

*c*) Même propriété pour toute boule fermée.

*d*) Si deux boules de $E$ ont un point commun, l'une d'elles est incluse dans l'autre.

*e*) La distance de deux boules ouvertes distinctes, de même rayon $r$, contenues dans une boule fermée de rayon $r$, est égale à $r$.

***Exercice 10*** (exemples d'espaces ultramétriques) :

*a*) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $u = (u_n) \in E \setminus \{0\}$ on pose $\operatorname{val}(u) = \operatorname{Min}\,\{n \mid u_n \neq 0\}$ si $(P, Q) \in E^2$, on pose $d(P, Q) = 0$ si $P = Q$ et $d(P, Q) = \exp(-\operatorname{val}(P - Q))$ si $P \neq Q$. Montrer que $(E, d)$ est un espace ultramétrique (cf. exercice 9).

*b*) Soit $p$ un nombre premier fixé. Tout rationnel non nul peut être mis de manière unique sous la forme $r = p^{\alpha} \dfrac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont premiers avec $p$, et $\alpha = v_p(r) \in \mathbb{Z}$. Si $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$, on pose $d(r, s) = 0$ si $r = s$ et $d(r, s) = p^{-v_p(r-s)}$ si $r \neq s$. Montrer qu'on définit ainsi sur $\mathbb{Q}$ une distance (appelée *distance p-adique*) et que $(\mathbb{Q}, d)$ est un espace ultramétrique.

***Exercice 11 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de $E$ du type $\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$, où $(\forall n)$ $U_n$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et où l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $U_n \neq \mathbb{R}$ est fini. Soit $\mathfrak{O}$ l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de $\mathfrak{B}$.

*a*) Prouver que $(E, \mathfrak{O})$ est un espace topologique séparé.

*b*) Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes $> 0$. Pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$

$d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Max}(1, |u_n - v_n|)$. Montrer que $d$ est une distance sur $E$, dont la topologie associée est $\mathfrak{O}$, mais que $d$ n'est pas issue d'une norme de $E$.

***Exercice 12 :*** Soit $X$ un ensemble non vide et $(E, d)$ un espace métrique non vide. Pour $f$ et $g$ fonctions quelconques : $X \longrightarrow E$, on pose :

$$\Delta(f, g) = \sup_{x \in X} \frac{d(f(x), g(x))}{1 + d(f(x), g(x))}.$$

*a*) Vérifier que $\Delta$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que $\Delta$ est une distance sur $\mathscr{F}(X, E)$.
*b*) Prouver que l'ensemble $\mathscr{B}(X, E)$ est à la fois ouvert et fermé dans $(\mathscr{F}(X, E), \Delta)$.

***Exercice 13 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour chaque suite $A = (A_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $A_n \underset{n \to \infty}{\uparrow} +\infty$ (croissance stricte) et chaque série $\sum a_n$ à termes $> 0$ convergente (où l'on pose $a = (a_n)$), on définit : $\quad (\forall (f, g) \in E^2) \quad D_{a, A}(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{Max}(1, \|f - g\|_{A_n})$,
où $\|f - g\|_{A_n} = \sup_{x \in [-A_n, A_n]} |f(x) - g(x)|$ pour chaque $n$.

Montrer que $D_{a, A}$ est une distance sur $E$, qui n'est associée à aucune norme. Montrer que les distances $D_{a, A}$ définissent toutes la même topologie sur $E$.

***Exercice 14 :*** Soit $Y$ et $Z$ deux sous-espaces d'un espace topologique $X$ tels que $X = Y \cup Z$. Soit $M$ une partie de $Y \cap Z$. On suppose $M$ ouverte (resp. fermée) à la fois relativement à $Y$ et à $Z$.
Montrer que $M$ est ouverte (resp. fermée) dans $X$.

# § X.3 *SOUS-ENSEMBLES REMARQUABLES*

## Intérieur, Adhérence, Frontière

### DÉFINITION X.3.1

*Soit $A$ une partie d'un espace topologique $T$.*
(I) *Un point $a \in T$ est dit* **intérieur** *à $A$ ssi $A$ est voisinage de $a$. L'ensemble de ces points est appelé* **l'intérieur** *de $A$. Nous le noterons $\operatorname{Int}_T(A)$ (ou $\operatorname{Int}(A)$, ou $\mathring{A}$ si aucune ambiguïté n'en résulte).*
(II) *Un point $a \in T$ est dit* **extérieur** *à $A$ ssi il est intérieur à $T \setminus A$. L'ensemble de ces points s'appelle* **extérieur** *de $A$. Nous le noterons $\operatorname{Ext}_T(A)$ ou $\operatorname{Ext}(A)$.*
(III) *Un point $a \in T$ est dit* **adhérent** *à $A$ ssi* **tout voisinage de a rencontre A.** *L'ensemble de ces points s'appelle l'***adhérence** *de $A$. Nous le noterons $\operatorname{Adh}_T(A)$, (ou $\operatorname{Adh}(A)$ ou $\bar{A}$).*
(IV) *Un point $a \in T$ est dit* **point frontière** *de $A$ ssi $a \in \bar{A} \cap \overline{T \setminus A}$. L'ensemble $\bar{A} \cap \overline{T \setminus A}$ de ces points s'appelle la* **frontière** *de $A$. Nous le noterons $\operatorname{Fr}_T(A)$, ou $\operatorname{Fr}(A)$.*

Avec ces notations, il est clair que $\operatorname{Int}(A) \subset A \subset \operatorname{Adh}(A)$, et $\operatorname{Adh}(A) = T \setminus \operatorname{Ext}(A)$. Par suite les trois ensembles Int ($A$

Ext $(A)$ *partagent* $T$ ; et Int $(A)$ et Fr $(A)$ *partagent* Adh $(A)$. Les notions d'intérieur et d'adhérence sont *duales* l'une de l'autre.

**PROPOSITION X.3.1**

> *Avec les notations de la définition* X.3.1.
>
> (I) Int $(A)$ *est un ouvert, et c'est (pour l'inclusion) le plus grand ouvert de $T$ inclus dans $A$.*
>
> (II) Adh $(A)$ *est un fermé, et c'est (pour l'inclusion) le plus petit fermé de $T$ contenant $A$ (ou, ce qui revient au même,* l'intersection des fermés contenant $A$).

*Démonstration :*

Les deux propriétés (I) et (II) étant duales l'une de l'autre, il suffit de prouver la première. Or, si un ouvert $\omega$ de $T$ est contenu dans $A$, la définition d'un voisinage d'un point montre que $\omega \subset$ Int $(A)$. Mais Int $(A)$ est lui-même ouvert dans $T$, à cause de la propriété $(V_4)$ du § X.2 et du théorème X.2.1. ■

En conséquence de la proposition X.3.1, Fr $(A)$ est toujours un *fermé* de $T$. De plus, *$A$ est ouvert dans $T$ ssi* Int $(A) = A$ et *$A$ est fermé dans $T$ ssi* Adh $(A) = A$.

***Exemple 1 :*** Dans $\mathbb{R}$ usuel, Adh $(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, Int $(\mathbb{Q}) = \varnothing$ , Fr $(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Si $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure), soit $B \in \mathbb{R}$, alors $B \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(A)$. On retrouve ainsi un résultat du Chapitre III : toute partie *fermée, bornée et non vide* de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

**Adhérence dans un espace métrique**

**PROPOSITION X.3.2**

> *Soit $A$ une partie non vide d'un espace métrique $(E, d)$. Alors* $\mathrm{Adh}_E(A) = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$ *(notations du* § X.1). *En conséquence, $A$ est fermé ssi $x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.*

*Démonstration :*

Soit d'abord $x \in E$ tel que $d(x, A) = 0$. Pour $V$ voisinage de $x$, soit $r$ réel $> 0$ tel que $\mathbf{B}(x, r) \subset V$ ; alors $\mathbf{B}(x, r) \cap A \neq \varnothing$ (car $d(x, A) = 0$), donc $V \cap A \neq \varnothing$ ; d'où $x \in \mathrm{Adh}_E(A)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Adh}_E(A)$, soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ : le voisinage $\mathbf{B}(x, r)$ de $x$ rencontre $A$, donc $d(x, A) \leqslant r$.

Puisque c'est vrai pour tout $r > 0$, c'est que $d(x, A) = 0$. ■

**Densité**

**DÉFINITION X.3.2**

> *Dans un espace topologique $T$, soit $A \subset B \subset T$. On dit que $A$ est* ***dense dans*** *$B$ ssi $B \subset \mathrm{Adh}_T(A)$. On dit que $A$ est* ***partout dense dans*** *$T$ ssi $\mathrm{Adh}_T(A) = T$.*

Une partie $A$ de $T$ est **partout dense** dans $T$ ssi **tout ouvert non vide de $T$ rencontre $A$.**

Si $A \subset B \subset C \subset T$, *si $B$ est dense dans $C$ et $A$ dense dans $B$, alors $A$ est dense dans $C$* (transitivité de la densité). En effet $B \subset \mathrm{Adh}_T(A)$ mais $\mathrm{Adh}_T(A)$ est fermé dans $T$, donc $\mathrm{Adh}_T(B) \subset \mathrm{Adh}_T(A)$, d'où $C \subset \mathrm{Adh}_T(B) \subset \mathrm{Adh}_T(A)$.

Dire que $A$ est dense dans $B$ signifie que $A$ est partout dense dans le sous-espace $B$ de $T$.

***Exemple 2 :*** $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\bar{\mathbb{R}}$ usuel.

### Points d'accumulation ; points isolés

**DÉFINITION X.3.3**

*Soit $A$ une partie d'un espace topologique $T$, et soit $a \in T$.*

(I) *On dit que $a$ est* ***point d'accumulation de A dans T*** *ssi* ***tout voisinage de a rencontre $A \setminus \{a\}$.*** *L'ensemble de ces points est appelé le* ***dérivé*** *de $A$. Nous le noterons $\mathrm{Acc}_T(A)$ (ou $\mathrm{Acc}(A)$, ou $A'$ si aucune confusion n'en résulte).*

(II) *On dit que $a$ est* ***point isolé*** *de $A$ ssi $a \in A$ et $a \notin \mathrm{Acc}_T(A)$, autrement dit ssi on peut trouver un voisinage $V$ de $a$ tel que $V \cap A = \{a\}$.*

(III) *$A$ est appelé une* ***partie discrète*** *de $T$ ssi tous les points de $A$ sont isolés.*

A partir de la définition X.3.3 on vérifie les propriétés suivantes :

• $\mathrm{Acc}_T(A) \subset \mathrm{Adh}_T(A)$, mais on prendra garde qu'en général cette inclusion est stricte : par exemple, dans $\mathbb{R}$ usuel, prenons $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ; alors $\mathrm{Acc}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et $\mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}(A) = A \cup \{0\}$.

• Pour que $A$ soit une *partie discrète* de $T$, il faut et il suffit que ce soit un *sous-espace discret* de $T$ (cf. exemple 1 du § X.2).

**THÉORÈME X.3.1**

*Pour qu'un point $a$ d'un espace topologique* ***séparé*** *$T$ soit* ***point d'accumulation*** *de $A$ (où $A \subset T$), il faut et il suffit que pour tout voisinage $V$ de $a$, l'ensemble $V \cap A$ soit infini.*

*Démonstration :*

La condition étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit $a \in \mathrm{Acc}_T(A)$, et soit $V$ un voisinage de $a$. Choisissons $a_1 \in V \cap (A \setminus \{a\})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ supposons construits $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincts, dans $V \cap (A \setminus \{a\})$. L'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n\} = \mathscr{A}_n$ est fermé dans $T$, car $T$ est séparé. Donc $U = T \setminus \mathscr{A}_n$ est voisinage de $a$. Choisissons $a_{n+1} \in (A \setminus \{a\}) \cap (V \cap U)$, ce qui est possible puisque $a \in \mathrm{Acc}_T(A)$. Alors $a_{n+1}$ poursuit la récurrence. On constru une suite injective $n \mapsto a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) à valeurs dans $V \cap (A \setminus \{a\})$ : cet ensemble est donc infini. ■

**DÉFINITION X.3.4**

*Un sous-ensemble $A$ d'un espace topologique* ***séparé*** *$T$ est dit* ***parfait*** *(dans $T$) ssi $A$ est* ***fermé*** *dans $T$ et* ***sans point isolé.***

Dans ces conditions, $A$ est parfait ssi $A = \mathrm{Acc}_T(A)$ ; car de façon générale, pour $A$ quelconque, *si $T$ est séparé,* $\mathrm{Adh}_T(A)$ *est union disjointe de* $\mathrm{Acc}_T(A)$ *et de l'ensemble des points isolés de $A$*. En particulier, $\mathrm{Adh}_T(A) \setminus A \subset \mathrm{Acc}_T(A)$.

***Exemple 3 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Le segment $[a, b]$ est parfait dans $\mathbb{R}$ usuel. L'ensemble triadique de Cantor, déjà rencontré (cf. exercice 18 du § III.3) est parfait dans $\mathbb{R}$ usuel.

***Exercice 1 :*** Soit $A$ et $B$ deux parties d'un espace topologique $T$. Montrer :
*a*) $\mathrm{Adh}(A \cup B) = \mathrm{Adh}(A) \cup \mathrm{Adh}(B)$
*b*) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$
*c*) $\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup (\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B))$
*d*) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A))$
*e*) $\mathrm{Adh}(\mathrm{Int}(\mathrm{Adh}(A \cup B))) = \mathrm{Adh}(\mathrm{Int}(\mathrm{Adh}(A))) \cup \mathrm{Adh}(\mathrm{Int}(\mathrm{Adh}(B)))$
*f*) $\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Adh}(B)$.

***Exercice 2 :*** Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques, $P = E \times F$ l'espace produit, $A$ une partie de $E$, $B$ une partie de $F$. Prouver :
*a*) $\mathrm{Adh}(A \times B) = \mathrm{Adh}(A) \times \mathrm{Adh}(B)$
*b*) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$
*c*) $\mathrm{Fr}(A \times B) = (\mathrm{Fr}(A) \times \mathrm{Adh}(B)) \cup (\mathrm{Adh}(A) \times \mathrm{Fr}(B))$.

***Exercice 3 :*** Soit $X$ un ensemble et $\varphi : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ une application telle que 1) $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ ; 2) $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ; 3) $\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(X))^2 \quad \varphi(A \cup B) = \varphi(A) \cup \varphi(B)$ ; 4) $(\forall A \in \mathscr{P}(X))\, A \subset \varphi(A)$. Montrer qu'il existe une et une seule topologie sur $X$ telle que pour cette topologie, $\varphi$ soit l'application $A \mapsto \mathrm{Adh}(A)$.

***Exercice 4 :*** Soit $T$ un espace topologique et $A$ une partie de $T$. Montrer :
*a*) $\mathrm{Fr}(A) \subset A \Leftrightarrow A$ est fermé. *b*) $A \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing \Leftrightarrow A$ est ouvert.

***Exercice 5 :*** Soit $T$ un espace topologique *séparé*. Si $X \subset T$ on note $X'$ l'ensemble dérivé. Montrer :
*a*) Si $X \subset T$, $X'$ est fermé.
*b*) Si $X \subset T$ et $Y \subset T$, $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$ et $X' \setminus Y' \subset (X \setminus Y)'$.
*c*) Soit $X \subset T$. Si $Y = \mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(X))$ et $Z = X \cap Y$, alors $Y \subset Y'$ et $Z \subset Z'$.

***Exercice 6 :*** Soit $A$ une partie *fermée* non vide d'un $\mathbb{R}$-evn $E$.
On pose $f(x) = d(x, A)$ ($x \in E$). Montrer l'équivalence entre (1), (2) et (3) :
(1) $A$ est une partie *convexe* de $E$ (*i.e.* $\forall (x, y, \lambda) \in A^2 \times [0, 1]$, $\lambda y + (1 - \lambda) x \in A$)
(2) $f$ est convexe (*i.e.* $\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times [0, 1]\; f(\lambda y + (1 - \lambda) x) \leq \lambda f(y) + (1 - \lambda) f(x)$).
(3) L'ensemble $\{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}$ est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

***Exercice 7 :*** Soit $U$ un ouvert d'un espace *métrique*. Montrer que $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(U)) = \varnothing$.

***Exercice 8 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn et $A$ une partie non vide et *bornée* de $E$.
Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.
Montrer à l'aide d'un exemple qu'en général cette propriété est en défaut dans un espace métrique non issu d'un $\mathbb{R}$-evn.

***Exercice 9 :*** Soit $E$ un $K$-evn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $E$ non vide. On note $B$ (resp. $\tilde{B}$) la boule unité ouverte (resp. fermée) de $E$. Montrer : $B = \operatorname{Int}(\operatorname{Adh}(B))$ ; $\tilde{B} = \operatorname{Adh}(B)$ ; $\operatorname{Fr}(B) = \operatorname{Fr}(\tilde{B}) = \mathbf{S}(0_E, 1)$. Montrer que ces propriétés sont en général en défaut dans des espaces métriques généraux (cf. par exemple exercice 9 du § X.2).

***Exercice 10 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\nu_\infty$. On note $U = \{f \in E \mid (\forall x \in [0,1])\ f(x) > 0\}$.

*a*) $U$ est-il ouvert ? Trouver $\operatorname{Adh}(U)$.

*b*) Mêmes questions en remplaçant $\nu_\infty$ par la norme $\nu_1$ de la convergence en moyenne.

***Exercice 11 :*** Soit $T$ un espace topologique. On note respectivement $f$, $g$, $i$ les applications $\mathscr{P}(T) \longrightarrow \mathscr{P}(T)$ ; $X \mapsto \operatorname{Adh}(X)$ ; $X \mapsto T\backslash X$ ; $X \mapsto \operatorname{Int}(X)$.

*a*) Vérifier que $i = g \circ f \circ g$. Prouver qu'en composant de façon arbitraire un nombre quelconque d'applications de $\{f, g, i\}$ on n'obtient que les 14 applications suivantes : $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}(T)}$ ; $g$ ; $f$ ; $fg$ ; $gf$ ; $i$ ; $fgf$ ; $fi$ ; $if$ ; $gfi$ ; $fif$ ; $fgfi$ ; $gfif$ ; $ifi$. Programmer la preuve sur ordinateur.

*b*) Avec $T = \mathbb{R}$ usuel, donner un exemple de partie $X \subset \mathbb{R}$ telle que les 14 applications définies en *a*) donnent de $X$ 14 images distinctes.

***Exercice 12 :*** Sur le $\mathbb{R}$-ev $E = l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ on considère les deux normes $N_1 : u = (u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ et $N_\infty : u = (u_n) \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer l'adhérence de $\tilde{\mathbf{B}}_{N_1}(0_E, 1)$ dans $(E, N_\infty)$ et l'intérieur de $\tilde{\mathbf{B}}_{N_\infty}(0_E, 1)$ dans $(E, N_1)$.

***Exercice 13 :*** Dans un espace topologique $T$, il y a équivalence entre :

(1) pour tout $a \in T$ les voisinages *fermés* de $a$ forment une base de voisinages de $a$, et :

(2) pour tout fermé $F$ de $T$ et tout $a \in T\backslash F$, il existe un voisinage $V$ de $a$ et un ouvert $\omega$ contenant $F$ tels que $\omega \cap V = \varnothing$.

***Exercice 14 :*** Soit $D$ une partie partout dense d'un espace topologique $T$ ; si $x \in D$ et si $V$ est un voisinage de $x$ *dans* $D$, alors $\operatorname{Adh}_T(V)$ est un voisinage de $x$ *dans* $T$.

## § X.4 *LIMITES*

Proposons-nous d'étendre les concepts de limite introduits aux Chapitres II-III-IV, en nous bornant, **dans toute la suite de cet ouvrage, à considérer exclusivement des espaces topologiques séparés.**

Pour éviter des répétitions, nous noterons « hypothèses (LIM) » les hypothèses suivantes : « *$E$ et $F$ sont des espaces topologiques, $A$ est une partie de $E$ ; on donne $a \in \operatorname{Adh}_E(A)$ et une application $f : A \longrightarrow F$* ».

L'hypothèse « $a \in \operatorname{Adh}_E(A)$ » assure que, pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $E$, $f(V \cap A) \neq \varnothing$.

**DÉFINITION X.4.1**

*Sous les hypothèses* (LIM), *un élément $l \in F$ est dit* ***limite de f en a*** *ssi, pour tout voisinage $W$ de $l$ dans $F$, il existe un voisinage $V$ de $a$ dans $E$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.*

En particulier, pour $E = \overline{\mathbb{R}}$ usuel, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on obtient la notion de *limite d'une suite* d'un espace topologique, qui mérite d'être reprise à part.

**DÉFINITION X.4.2**

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique $T$. Un élément $l \in T$ est dit* **limite de cette suite** *(sous-entendu : quand $n \longrightarrow \infty$) ssi :*

*($\forall W$ voisinage de $l$ dans $F$ ).*

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N) \Rightarrow (u_n \in W) .$$

(On s'assurera en effet que la définition X.4.2 traduit exactement le fait que la *fonction* $n \mapsto u_n$ admet $l$ pour limite en $+\infty$ au sens de la définition X.4.1).

Si l'on prend, dans la définition X.4.1, $E = \bar{\mathbb{R}}, A \subset \mathbb{R}$ et $F = K^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni de la topologie usuelle, on retrouve la notion de limite (finie) du Chapitre IV pour les fonctions de variable réelle. Et avec $F = \bar{\mathbb{R}}$, $E = \bar{\mathbb{R}}$, $A \subset \mathbb{R}$, on retrouve les limites (finies ou infinies) des fonctions numériques de variable réelle.

***Remarque 1 :*** Avec les hypothèses (LIM), soit $l \in F$, et donnons-nous une base $\mathfrak{B}_a$ de voisinages de $a$, et une base $\mathfrak{L}_l$ de voisinages de $l$.

La définition X.4.1 est alors équivalente à la suivante :

Pour tout $W \in \mathfrak{L}_l$, il existe $V \in \mathfrak{B}_a$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.

Cette propriété, dont la vérification est immédiate, sera dans toute la suite utilisée dans des situations variées, sans autre commentaire.

**THÉORÈME X.4.1** (unicité de la limite)

*Soit les hypothèses* (LIM), *une fonction $f$ admet en $a$* ***au plus une*** *limite.*

*Démonstration :*

Soit $l \in T$ une limite de $f$ en $a$, et soit $l' \in F$ $(l' \neq l)$. Choisissons $W$ et $W'$ voisinages respectifs de $l$ et de $l'$, *disjoints*, et soit $V$ un voisinage de $a$ dans $E$ tel que $f(V \cap A) \subset W$. Pour $V'$ voisinage de $a$, le voisinage $U = V \cap V'$ de $a$ vérifie $f(U) \cap W' = \varnothing$ . Donc $l'$ n'est pas limite de $f$ en $a$. ■

Le théorème X.4.1 permet, lorsque la limite existe, de lui attribuer des symboles fonctionnels. Sous les hypothèses (LIM), si $l \in F$ est limite en $a$ de $f$, on écrit :

$$\boxed{l = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)}, \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l},$$

ce qui se lit :

« $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$ » ($x$ lettre muette) .

Dans le cas d'une suite $(u_n)$, avec les notations de la définiti dit que la suite $(u_n)$ **est convergente** (ou **converge**) ssi elle admet une limite $l$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Quand c'est le cas on écrit :

$$\boxed{l = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n}, \quad \text{ou} \quad \boxed{u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} l},$$

et on dit que la suite $(u_n)$ **converge vers** $l$. Une suite non convergente est dite **divergente.**

**Proposition X.4.1**

> *Sous les hypothèses* (LIM), *soit* $l \in F$.
> (I) *Soit* $B \subset F$ *tel que* $l \in B$ *et* $\operatorname{Im}(f) \subset B$. *Alors* $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$ *ssi* $l$ *est limite en* $a$ *de* $f|^B$ *dans le sous-espace* $B$ *de* $F$.
> (II) *Supposons* $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ *où chaque* $F_i$ *est un espace topologique et* $F$ *leur produit ; notons* $l = (l_1, \ldots, l_p)$ $((\forall i)\, l_i \in F_i)$ *et* $f_1, \ldots, f_p$ *les composantes de* $f$ $(f_i : A \longrightarrow F_i)$. *Pour que* $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$, *il faut et il suffit que* $(\forall i)\; f_i(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l_i$.

*Démonstration* (abrégée) :

(I) est pratiquement évidente.

(II) se déduit sans peine du fait que les *ouverts élémentaires* de $F$ contenant $l$ forment une base de voisinages de $l$ dans $F$. ■

**Composition de limites**

**Théorème X.4.2**

> *Sous les hypothèses* (LIM), *soit* $G$ *un autre espace topologique,* $B$ *une partie de* $F$ *contenant* $\operatorname{Im}(f)$, $b \in F$ *et* $l \in \mathrm{G}$.
> (I) *Si* $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} b$, *alors* $b \in \operatorname{Adh}_F(B)$.
> (II) *Si* $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} b$ *et si* $g(y) \underset{y \longrightarrow b}{\longrightarrow} l$, *alors* $g \circ f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$.

*Démonstration :*

(I) Soit $W$ voisinage de $b$ dans $F$, puis $V$ voisinage de $a$ dans $E$ tel que $f(A \cap V) \subset W$. Alors $f(A \cap V) \subset B$ et $f(A \cap V) \neq \varnothing$, donc $W \cap B \neq \varnothing$. Donc $b \in \operatorname{Adh}_F(B)$.

(II) Soit $X$ voisinage de $l$ dans $G$. Choisissons $W$ voisinage de $b$ dans $F$ tel que $g(W \cap B) \subset X$, puis $V$ voisinage de $a$ dans $F$ tel que $f(V \cap A) \subset W$. Alors $f(V \cap A) \subset W \cap B$, d'où

$$g \circ f(V \cap A) \subset g(W \cap B) \subset X.$$

Donc $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. ■

Prenant $E = F = \bar{\mathbb{R}}$ usuel, $A = B = \mathbb{N}$, $a = b = +\infty$, et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on déduit du théorème X.4.2 la propriété suivante que le lecteur pourra vérifier directement :

($L_1$) *Si une suite $(u_n)$ d'un espace topologique $G$ converge vers $l \in G$, toute suite extraite de $(u_n)$ converge aussi vers $l$.*

Si maintenant dans le théorème X.4.2, on prend $E = \bar{\mathbb{R}}$ usuel, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$, on obtient la très importante propriété suivante, dont la vérification directe est, elle aussi, facile :

($L_2$) *Sous les hypothèses* (LIM) *supposons $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in F$. Pour toute suite $(u_n)$ de $A$ qui converge vers $a$, on a : $f(u_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.*

**Limites et restrictions**

Appliquons maintenant le théorème X.4.2, avec $(E, E, F)$ à la place de $(E, F, G)$, $f$ à la place de $g$ et l'injection canonique $D \longrightarrow A$ à la place de $f$, où $D \subset A$ et $a \in \mathrm{Adh}_E\,(D)$. On obtient :

**Proposition X.4.2**

*Sous les hypothèses précitées, si $l \in F$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$, alors $(f|_D)\,(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.*

Cette propriété n'admet évidemment pas de réciproque générale, et ($L_1$) en est un cas particulier.

Donnons $l$, $E$, $F$, $A$, $a$, $f$ et $D$ comme dans la proposition X.4.2 mais sans supposer que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$. Si $\lim\limits_{x \to a} (f|_D)\,(x)$ existe et vaut $l$, on note :

$$\boxed{\lim_{x \to a,\, x \in D} f(x) = l}\,, \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) \underset{x \to a,\, x \in D}{\longrightarrow} l}\,.$$

La proposition X.4.2 signifie que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ *entraîne* $f(x) \underset{x \to a,\, x \in D}{\longrightarrow} l$.

Supposons maintenant, toujours sous les hypothèses (LIM), que $a$ soit un **point d'accumulation** de $A$ (*i.e.* puisque $E$ est séparé : que $a \in \mathrm{Adh}_E\,(A \setminus \{a\})$. Prenons alors $D = A \setminus \{a\}$. Si $\lim\limits_{x \to a,\, x \in A \setminus \{a\}} f(x)$ existe $(= l)$, on la note

$$\boxed{l = \lim_{x \to a,\, x \neq a} f(x)}\,, \quad \text{ou} \quad \boxed{l = \lim_{\substack{\neq \\ x \to a}} f(x)}\,,$$

et on écrit :

$$\boxed{f(x) \underset{x \longrightarrow a,\, x \neq a}{\longrightarrow} l}, \quad \text{ou} \quad \boxed{f(x) \underset{x \overset{\neq}{\longrightarrow} a}{\longrightarrow} l}.$$

On se souviendra que ce type de limite n'est définissable que pour $a \in \mathrm{Acc}_E(A)$.

Nous avons rencontré au Chapitre IV des notations plus particulières de limite de certaines restrictions de fonctions de *variable réelle* (par exemple $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} f(x)$, etc...).

**Limites dans les espaces métriques**

Sous les hypothèses (LIM), soit $l \in F$, et supposons la topologie de $E$ issue d'une distance $d$. Les définitions montrent :

$$(\mathrm{L}_3)\ f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow [(\forall W \text{ voisinage de } l \text{ dans } F)$$
$$\exists \alpha \text{ réel} > 0 \mid (\forall x \in A) \quad d(x, a) \leqslant \alpha \Rightarrow f(x) \in W].$$

De même, si $F$ est issu d'une distance $\delta$ :

$$(\mathrm{L}_4)\ f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0)\ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ dans } E \mid$$
$$\forall x \in V \cap A, \quad \delta(l, f(x)) \leqslant \varepsilon].$$

Si $E$ et $F$ sont respectivement issus de distances $d$ et $\delta$ :

$$(\mathrm{L}_5)\ f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0)\ \exists \alpha \text{ réel} > 0 \mid$$
$$\forall x \in A \quad (d(x, a) \leqslant \alpha) \Rightarrow \delta(f(x), l) \leqslant \varepsilon].$$

Lorsque $F = K$, ou $F =$ *un* $K$-evn, la notion de limite est compatible avec les opérations algébriques de base sur $F$ :

**PROPOSITION X.4.3**

*Sous les hypothèses* (LIM)

(I) *Soit* $F = K$ *usuel, et* $f_i : A \longrightarrow K\,(i \in \{1, 2\})$ *deux fonctions admettant en* $a$ *des limites respectives* $l_i$. *Alors* $(\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in K^2)$

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2,$$

*et*

$$f_1(x)\, f_2(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l_1 l_2.$$

*Si* $l_1 \neq 0$ *et si* $\mathrm{Im}(f_1) \subset K^*$, $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{l_1}$.

(II) *Soit $F$ = un $K$-evn et $f_i : A \longrightarrow K\,(i \in \{1, 2\})$ admettant en $a$ des limites $l_i$. Alors $(\forall\,(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2)$*

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 .$$

Le lecteur établira facilement une démonstration calquée sur celles qui ont été mises en œuvre au § IV.1 (où l'on a pris soin de n'utiliser dans l'espace de départ que des propriétés topologiques) en tenant compte du fait que $\forall\,(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2\ |\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1|\ |\lambda_2|$.

**Suites d'un espace métrique**

**Théorème X.4.3**

*Soit $(E, d)$ un espace métrique.*

(I) *Soit $l \in E$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E$. On a l'équivalence*

$$u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow d(u_n, l) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

(II) *Soit $A$ une partie de $E$ : l'ensemble* $\mathrm{Adh}_E\,(A)$ *est l'ensemble des limites des suites de $A$ qui convergent dans $E$.*

*Démonstration :*

(I) D'après ($L_4$), $u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} l$ ssi :

(1) $$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0)\,,\quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (n \geqslant N) \Rightarrow d(u_n, l) \leqslant \varepsilon .$$

On reconnaît la définition du § II.1 de $d(u_n, l) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

(II) Soit $(u_n)$ une suite de $A$ convergeant dans $E$ vers $l \in E$. Puisque $d(u_n, l) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, on en tire : $d(l, A) = 0$, donc $l \in \mathrm{Adh}_E\,(A)$. Réciproquement si $l \in \mathrm{Adh}_E\,(A)$ (donc $d(l, A) = 0$), soit pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in A$ tel que $d(u_n, l) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Alors $d(u_n, l) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ et on a bien construit une suite $(u_n)$ de $A$ tendant vers $l$. ■

***Exemple 1 :*** Soit $X$ un ensemble non vide, et soit $(E, d)$ l'espace métrique construit avec le $K$-evn $(\mathscr{B}(X, K), \nu_\infty)$ (cf. exemple 3 du § X.1).

Donnons-nous une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E$, et $f \in E$. En se reportant au § VII.1, on constate que les assertions : « $d(f_n - f) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ » et : « la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$ quand $n \longrightarrow \infty$ », sont *équivalentes* et signifient que $f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f$ *dans l'espace métrique*

$(E, d)$. (C'est pour cette raison que $\nu_\infty$ est appelée *norme uniforme*, et $d$ *distance uniforme*, sur $E$.)

Si l'on remarque qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions bornées sur $X$ est nécessairement bornée, on voit par cet exemple que pour des suites de fonctions *bornées*, la notion de convergence uniforme peut s'interpréter comme une limite « ordinaire » au sens de la définition X.4.1, à condition de raisonner dans un espace convenable. (Ici l'*espace de fonctions* $\mathscr{B}(X, E)$.)

Le théorème X.4.3 entraîne que les suites convergentes d'un espace métrique $E$ déterminent les *fermés* de $E$, donc la *topologie* de $E$. Donc en théorie, toute propriété topologique d'un espace métrique $(E, d)$ peut s'exprimer en termes de suites convergentes. En voici une illustration :

**Théorème X.4.4**

*Sous les hypothèses* (LIM), *supposons la topologie de E issue d'une distance d. Pour que* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ *existe, il faut et il suffit que, pour toute suite* $(x_n)$ *de points de A qui converge vers a, la suite* $(f(x_n))$ *converge dans F.*

*Démonstration :*

D'après $(L_2)$ la condition est nécessaire. Supposons-la maintenant vérifiée (l'existence des suites de $A$ de limite $a$ est assurée par le théorème X.4.3). Prouvons d'abord que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)$ de $A$ qui converge vers $a$ : en effet, soit $(x_n)$ et $(x'_n)$ deux telles suites ; définissons $t_{2n} = x_n$, $t_{2n+1} = x'_n$ $(n \in \mathbb{N})$. La suite $(t_n)$ de $A$ tend vers $a$. Soit $l = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(t_n)$.

D'après $(L_1)$

$$l = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_{2n}) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(t_{2n+1}), \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} (x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (x'_n).$$

Soit alors $l$ la limite commune de toutes ces suites $(f(x_n))$. Prouvons par l'absurde que $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$. Sinon, par $(L_3)$, on aurait $W$ voisinage de $l$ dans $F$ tel que $(\forall \alpha \text{ réel} > 0)\ \exists x \in A \mid d(x, a) \leqslant \alpha$ et $f(x) \notin W$. Un tel $W$ étant fixé, soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in A$ tel que $f(x_n) \in W$ et $d(x_n, a) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Alors $x_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} a$, $(\forall n)\, x_n \in A$ et $f(x_n) \notin W$, donc $f(x_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\not\longrightarrow} l$ contrairement à la définition de $l$. En conclusion, $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} l$. ■

## Valeurs d'adhérence

**Définition X.4.3**

*Sous les hypothèses* (LIM), $l \in F$ *est appelé* **valeur d'adhérence** *de $f$ en $a$ ssi, pour tout voisinage $W$ de $l$ dans $F$, pour tout voisinage $V$ de $a$ dans $E$ ;* $f(V \cap A) \cap W \neq \varnothing$ .

Avec ces notations :

($L_6$) *Soit $\mathfrak{B}_a$ une base de voisinages de $a$ dans $E$. L'ensemble $\mathscr{A}_{f,a}$ des valeurs d'adhérence de $f$ en $a$ est* $\mathscr{A}_{f,a} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}_a} \overline{f(V \cap A)}$. *Il est donc fermé.*

En effet

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{f,a} &= \{l \in F \mid \forall W \text{ voisinage de } l,\ \forall V \in \mathfrak{B}_a,\ f(V \cap A) \cap W \neq \varnothing\} \\ &= \{l \in F \mid \forall V \in \mathfrak{B}_a\ (\forall W \text{ voisinage de } l,\ f(V \cap A) \cap W \neq \varnothing)\} \\ &= \{l \in F \mid \forall V \in \mathfrak{B}_a,\ l \in \overline{f(V \cap A)}\} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}_a} \overline{f(V \cap A)} . \end{aligned}$$

En particulier, avec une *suite* $(u_n)$, la définition X.4.3 devient :

**Définition X.4.4**

*Soit $u = (u_n)$ une suite d'un espace topologique $T$, un élément $l \in F$ est dit* **valeur d'adhérence** *de $(u_n)$ ssi :*

$$(\forall W \textit{ voisinage de } l)\quad (\forall N \in \mathbb{N}),\quad \exists n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \quad \textit{et} \quad u_n \in W .$$

($L_7$) Avec les notations de la définition X.4.4, *l'ensemble $\mathscr{A}_u$ des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est* $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\mathscr{U}}_N$, où $(\forall N)\ \mathscr{U}_N = \{u_p\}_{p \geqslant N}$.

($L_7$) peut d'ailleurs se vérifier directement, car :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_u &= \{l \in T \mid \forall W \text{ voisinage de } l,\ \forall N \in \mathbb{N},\ W \cap \mathscr{U}_N \neq \varnothing\} \\ &= \{l \in T \mid \forall N \in \mathbb{N}\ (\forall W \text{ voisinage de } l),\ W \cap \mathscr{U}_N \neq \varnothing\} \\ &= \{l \in T \mid \forall N \in \mathbb{N},\ l \in \overline{\mathscr{U}}_N\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\mathscr{U}}_N . \end{aligned}$$

($L_8$) *Sous les hypothèses* (LIM), *si* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in F$, *l'ensemble $\mathscr{A}_{f,a}$ des valeurs d'adhérence de $f$ en $a$ est $\{l\}$.*

De même pour une suite $(u_n)$ qui converge vers $l \in F$. Attention ! La réciproque est généralement fausse. Par exemple si l'on prend $F = \mathbb{R}$ usuel et $(u_n) = n[1 + (-1)^n]$ : elle n'a dans $\mathbb{R}$ qu'une seule valeur d'adhérence, à savoir 0, et pourtant elle diverge (considérée dans $\overline{\mathbb{R}}$, elle a 2 valeurs d'adhérence : 0 et $+\infty$).

($L_9$) *Sous les hypothèses* (LIM), *soit $(x_n)$ une suite de $A$. Toute valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est valeur d'adhérence de $f$ en $a$.*

En particulier toute valeur d'adhérence d'une suite extraite d'une suite $(u_n)$ est valeur d'adhérence de $(u_n)$.

La vérification de ($L_9$) est immédiate : soit $W$ un voisinage de $l$ et $V$ un voisinage de $a$. Choisissons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in V$ pour $n \geqslant N_1$ ; puis un entier $N \geqslant N_1$ tel que $f(x_N) \in W$. Alors $f(x_N) \in W \cap f(V \cap A)$, donc $W \cap f(V \cap A) \neq$

Combinant ($L_8$) et ($L_9$) on obtient :

($L_{10}$) *Toute limite d'une suite extraite d'une suite* $(u_n)$ *d'un espace topologique est valeur d'adhérence de* $(u_n)$.

Par un raisonnement analogue à celui qui a prouvé ($L_9$), on montre :

($L_{11}$) *Sous les hypothèses* (LIM), *soit X un espace topologique et D une partie de X,* $\varphi : D \longrightarrow A$ *une application, et* $\alpha \in \mathrm{Adh}_X(D)$. *On suppose* $\varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$. *Alors toute valeur d'adhérence de* $f \circ \varphi$ *en* $\alpha$ *est valeur d'adhérence de f en a.*

En particulier, si $D \subset A$ et $a \in \mathrm{Adh}_E(D)$, en prenant pour $\varphi$ l'injection canonique $D \longrightarrow A$, on trouve :

*Toute valeur d'adhérence en a de* $f|_D$ *est valeur d'adhérence de f en a.*

($L_{12}$) *Soit* $(u_n)$ *une suite d'un espace topologique T, et* $\mathcal{U} = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. *Tout point d'accumulation de* $\mathcal{U}$ *est valeur d'adhérence de* $(u_n)$.

En effet, si $a \in \mathrm{Acc}_T(\mathcal{U})$, soit $W$ un voisinage de $a$ et $N \in \mathbb{N}$. On sait que $W \cap (\mathcal{U} \setminus \{a\})$ est infini. Puisque l'ensemble $\{u_i\}_{0 \leq i \leq N}$ est fini, il s'ensuit que $W \cap \mathcal{U}$ contient au moins un point de $\mathcal{U}_N = \{u_p\}_{p \geq N}$.

Bien sûr $(u_n)$ peut aussi admettre comme valeurs d'adhérence des points isolés de $\mathcal{U}$.

Donnons pour terminer deux propriétés montrant la simplicité de la notion de valeur d'adhérence dans le cas des espaces métriques, où elles la ramènent à des *propriétés de suites convergentes :*

**Théorème X.4.5**

> *Sous les hypothèses* (LIM), *supposons E et F issus d'espaces métriques* $(E, d)$ *et* $(F, \delta)$. *Un élément* $l \in F$ *est valeur d'adhérence de f en a ssi il existe une suite* $(x_n)$ *de A tendant vers a telle que* $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$.

*Démonstration :*

La condition est suffisante d'après ($L_9$). Réciproquement, soit $l$ une valeur d'adhérence de $f$ en $a$. Pour chaque $n \in \mathrm{N}^*$, on choisit

$$y_n \in \tilde{\mathbf{B}}_\delta\left(l, \frac{1}{n}\right) \cap f\left(\tilde{\mathbf{B}}_d\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A\right),$$

puis $x_n \in a \cap \tilde{\mathbf{B}}_d\left(a, \frac{1}{n}\right)$ tel que $f(x_n) = y_n$. Alors $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$. ■

**Théorème X.4.6**

> *Soit* $(u_n)$ *une suite d'un espace métrique* $(E, d)$. *Pour que* $l \in E$ *soit* ***valeur d'adhérence*** *de* $(u_n)$, *il faut et il suffit qu'il existe une* ***suite extraite*** *de* $(u_n)$ *qui converge vers l.*

*Démonstration :*

La condition est suffisante d'après ($L_{10}$). Réciproquement, soit $l$ une valeur d'adhérence de $(u_n)$. Choisissons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{N_1}, l) \leq 1$. Supposons trouvés, avec $p \in \mathbb{N}^*$, des entiers $N_1, \ldots, N_p$ tels que $N_1 < N_2 < \cdots < N_p$ et $d(u_{N_i}, l) \leq \frac{1}{i}$ pour $1 \leq i \leq p$. On sait que la boule $\tilde{\mathbf{B}}\left(l, \frac{1}{p+1}\right)$ rencontre $\mathcal{U}_{N_p+1} = \{u_k\}_{k \geq 1+N_p}$. Soit $N_{p+1}$ le plus petit des $k \in [\![1 + N_p, +$

$d(u_{k,l}) \leqslant \dfrac{1}{p+1}$. Alors $N_p < N_{p+1}$ et $d(u_{N_{p+1}}, l) \leqslant \dfrac{1}{p+1}$. Par récurrence sur $p$, on construit donc une suite extraite $(u_{N_k})_{k \geqslant 1}$ de $(u_n)$ telle que

$$(\forall i) \quad d(u_{N_i}, l) \leqslant \frac{1}{i}, \quad \text{d'où} \quad u_{N_i} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} l. \quad \blacksquare$$

Mais ce théorème est en défaut dans les espaces topologiques les plus généraux (cf. exercice 6 du § X.4 et exercice 23, (fin), du § XI.2).

***Exercice 1 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. On appelle $\nu_1$ la norme de la convergence en moyenne et l'on considère sur $E$ une autre norme $\mathcal{N}$ définie par la fonction : $f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} f(r_n)$ (où $n \mapsto r_n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap ]0,1[$).

*a*) Vérifier que $\mathcal{N}$ est bien une norme.

*b*) Construire une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ dans $E$ telle que $f_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ pour $\mathcal{N}$, et que $(f_p)$ admette pour $\nu_1$ une limite $g \in E \setminus \{0\}$.

*Indication :* Prendre par exemple pour $f_p$ la fonction continue nulle sur $\{r_0, r_1, \ldots, r_p\}$, égale à 1 sur $[0,1] \setminus \bigcup_{i=0}^{p} I_{i,p}$, où $I_{i,p} = ]r_i - \delta_p, r_i + \delta_p[$, avec

$$\delta_p = \operatorname{Min}\left( \frac{1}{(p+1)\,2^p}, \frac{1}{2}\,|r_i - r_j|_{0 \leqslant i < j \leqslant p}, \frac{1}{2}\,(r_i)_{i \leqslant p}, \frac{1}{2}\,(1 - r_i)_{i \leqslant p} \right)$$

et affine sur chaque intervalle $[r_i - \delta_p, r_i]$ et $[r_i, r_i + \delta_p]$, $0 \leqslant i \leqslant p$.

***Exercice 2 :*** Affiner l'exercice 1 de la manière suivante :

Avec les notations de l'exercice 1, construire une suite $(f_p)$ de $E$ telle que $\mathcal{N}(f_p) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que $(f_p)$ admette un ensemble fini arbitraire $\{g_1, g_2, \ldots, g_q\} \subset E$ comme ensemble de valeurs d'adhérence dans $(E, \nu_1)$. Ou bien, chercher une suite $(f_p)$ de $E$ telle que $\mathcal{N}(f_p) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que $(f_p)$ soit bornée pour $\nu_1$ et n'admette aucune valeur d'adhérence dans $(E, \nu_1)$.

***Exercice 3 :*** *a*) Soit $T$ un espace topologique, $p$ un entier $\geqslant 2$, $a_0, \ldots, a_{p-1}$ des points de $T$ distincts, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $T$ telle que $u_{kp+i} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a_i$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$. Quelles sont les valeurs d'adhérence de $(u_n)$ ?

*b*) On postule les mêmes hypothèses qu'en *a*), mais en prenant au lieu de $T$ un $K$-evn $E$. Etudier la suite $(v_n) = \left( \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

*c*) Avec les hypothèses du *b*), soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $E$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{U}_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$.

$c_1$) On suppose $(*)$ $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \mathscr{U}_N \subset \bigcup_{i=0} \tilde{\mathbf{B}}(a_i, \varepsilon)$. Que peut-on dire des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ ?

$c_2$) On suppose la condition $(*)$ vérifiée et de plus que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est $A = \{a_0, \ldots, a_{p-1}\}$. Pour chaque $i \in [\![0, p-1]\!]$, chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $N \in \mathbb{N}$, soit

$$\varphi_{i,\varepsilon}(N) = \operatorname{card}\ \{ n \in [\![0, N]\!] \mid \|u_n - a_i\| < \varepsilon \}.$$

Si on a : $\quad (\forall i \in [\![0, p-1]\!]) \quad (\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \varphi_{i,\varepsilon}(N)/N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \lambda_i$, où montrer que nécessairement $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i = 1$, et étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$.

***Exercice 4 :*** Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites d'un espace topologique $T$. On pose $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose

(1) $\quad (\forall p \in \mathbb{N}) \quad \exists n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_p$

(2) $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$ l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \mid x_n = y_p\}$ est infini.

*a*) Montrer à l'aide d'un exemple que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)$ est en général différent de Adh $(X)$.

*b*) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(y_p)$ est Adh $(X)$.

***Exercice 5 :*** Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques et $G = E \times F$ leur produit. On donne une suite $(X_n) = ((x_n, y_n))$ de $G$ ($x_n \in E$ et $y_n \in F$ pour tout $n$).

*a*) Si $(a, b) \in G$ est valeur d'adhérence de $(X_n)$, alors $a$ est valeur d'adhérence de $(x_n)$ et $b$ de $(y_n)$, mais $(X_n)$ peut n'avoir aucune valeur d'adhérence même si $(x_n)$ et $(y_n)$ en ont.

*b*) Si $(x_n)$ converge vers $a \in E$ et si $b \in F$ est valeur d'adhérence de $(y_n)$, alors $(a, b)$ est valeur d'adhérence de $(X_n)$.

***Exercice 6 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{F}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour chaque couple $(J, \varepsilon)$, où $J$ est une partie finie de $[0, 1]$ et $\varepsilon$ un réel $> 0$, on pose $V_{\varepsilon, J} = \{f \in E \mid \forall x \in J, |f(x)| \leq \varepsilon\}$.

On note $\mathfrak{B}_0$ l'ensemble des parties $V$ de $E$ telles qu'il existe $\varepsilon$ réel $> 0$ et $J$ partie finie de $[0, 1]$ vérifiant $V_{\varepsilon, J} \subset V$ et $J \neq \varnothing$. Pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, on note comme à l'accoutumée $A + B$ l'ensemble $\{a + b\}_{(a, b) \in A \times B}$. Si $A$ est un singleton $\{a\}$, on écrit de préférence $a + B$ au lieu de $\{a\} + B$.

*a*) Montrer qu'il existe sur $E$ une et une seule topologie telle que, pour toute $f \in E$, l'ensemble des voisinages de $f$ soit $\{f + V\}_{V \in \mathfrak{B}_0}$. Vérifier que, pour cette topologie, les applications $E \times E \longrightarrow E$, $(f, g) \mapsto f + g$ et $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ sont continues. Ci-dessous $E$ sera équipé de cette topologie.

*b*) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E$ et $f \in E$. Vérifier que pour que la suite $(f_n)$ converge vers $f$ pour la topologie ci-dessus, il faut et il suffit que la suite $(f_n)$ *converge simplement vers* $f$ sur $[0, 1]$ (cf. § VII.1) (pour cette raison, la topologie ainsi définie sur $E$ s'appelle *topologie de la convergence simple*).

*c*) Montrer que 0 n'admet dans $E$ aucune base dénombrable de voisinages. En déduire que la topologie de $E$ n'est associée à aucune distance.

*d*) Soit $(f_n)$ la suite définie dans $E$ par $(\forall x \in [0, 1])$ $f_n(x) = \sin nx$. Montrer qu'aucune suite extraite de $(f_n)$ ne converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

*Indication :* Supposons que $(f_{n_k})$ converge simplement vers 0. Il en serait de même de $(f_{n_k}^2)$. Mais alors le théorème VII.3.3 montrerait que $\int_0^1 \sin^2 n_k x \, dx \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, alors qu'en réalité $\int_0^1 \sin^2 n_k x \, dx \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, d'où la conclusion.

N.B. On verra plus loin que la fonction nulle est pourtant valeur d'adhérence de la suite $(f_n)$ dans $E$. On a ainsi un exemple d'espace topologique non issu d'un espace métrique où le théorème X.4.6 est en défaut.

***Exercice 7 :*** Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ de la forme $\omega \setminus D$, où $\omega$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et où $D$ est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$.

*a*) Vérifier qu'il existe une et une seule topologie sur $\mathbb{R}$ dont $\mathfrak{B}$ soit une base. Ci-dessous on munit $\mathbb{R}$ de cette topologie, l'espace obtenu est noté $T$. Montrer que $T$ n'est pas issu d'une distance sur $\mathbb{R}$.

*b*) Montrer que, dans $T$, les seules suites convergentes sont les suites *stationnaires*. Quelles sont les valeurs d'adhérence dans $T$ d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée dans $T$ ?

*c*) Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow T$ une fonction. On munit $[-1, 1]$ de sa topologie usuelle. Trouver une C.N.S. pour que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ existe.

*d*) Construire une fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ usuel, telle que $f(x) \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, mais admettant, en tant qu'application de $\mathbb{R}$ usuel dans lui-même, une infinité de valeurs d'adhérence en 0.

***Exercice 8 :*** Soit $X = [0, 1]^{\mathbb{N}} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, [0, 1])$.

*a*)Vérifier que les ensembles $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$, où $(\forall n)$ $U_n$ est ouvert relativement à $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ usuel, forment une base d'une topologie sur $X$. On munit ci-dessous $X$ de cette topologie.

*b*) Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$. On note $\alpha(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)$ dans $\mathbb{R}$. Vérifier que $\alpha : X \mapsto$ ensemble des fermés de $[0, 1]$, est surjective.

*c*) Soit $A$ un fermé de $[0, 1]$. On note $X_A = \{x \in X \mid \alpha(x) = A\}$. L'ensemble $X_A$ est-il ouvert dans $X$ ? est-il fermé dans $X$ ?

*d*) Montrer que la topologie de $X$ n'est pas associée à une distance (montrer que 0 n'admet pas de système fondamental dénombrable de voisinages).

## § X.5 *CONTINUITÉ*

**DÉFINITION X.5.1**

*Soit E, F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **continue en** $a \in E$ ssi $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$.*

*On dit que f est **continue** ssi elle est continue en tout point $a \in E$.*

Avec $E \subset \mathbb{R}$ usuel et $F = K^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, ou $F = \bar{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, on retrouve la continuité étudiée au Chapitre III.

Notons tout de suite que *toute fonction constante est continue.*

***Remarque 1 :*** Si $A$ est une partie de $E$, on se gardera de confondre les assertions : « $f|_A : A \longrightarrow F$ est continue » et : « $f$ est continue en tout point de $A$ » ; la deuxième entraîne la première, mais est très loin de lui être équivalente.

Avec les notations de la définition X.5.1 :

- *Si $a \in E$, f est continue en a ssi :* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ *existe.* En effet, pour tout voisinage $V$ de $a$, on a : $f(a) \in f(V)$ ; l'assertion résulte donc de *l'unicité de la limite,* car si la limite existe, ce ne peut être que $f(a)$ d'après ce qui précède.

- *Si $a \in E$ est point d'accumulation de E (i.e. $a \in$* Adh $(E \setminus \{a\})$), *f est continue en a ssi* $\lim\limits_{\substack{\neq \\ x \longrightarrow a}} f(x)$ *existe et vaut $f(a)$.*

En conséquence, lorsque $a \in$ Adh $(E \setminus \{a\})$, si $g : E \setminus \{a\} \longrightarrow F$ est donnée, il est équivalent de dire que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$ existe, ou qu'il existe un prolongement $f$ de $g$ à $E$ qui soit *continu en a.* Lorsqu'il existe, ce prolongement est unique puisque sa valeur en $a$ ne peut être que $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$ ; ce prolongement s'appelle alors **prolongement par continuité de $g$ en $a$.** On exprime souvent l'existence de $\lim\limits_{x \longrightarrow a} g(x)$ en disant que $g$ est **prolongeable par continuité en $a$.**

• Dans le cas où les topologies de $E$ et $F$ sont issues de distances $d$, $\delta$, la continuité de $f$ en $a$ signifie (cf. ($L_5$), § X.4) :

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists \alpha \text{ réel} > 0 \mid \forall x \in E , \quad (d(x, a) \leqslant \alpha ) \Rightarrow (\delta(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon) .$$

Lorsque $f$ est continue en $a$, pour $\varepsilon$ réel $> 0$, tout réel $\alpha > 0$ vérifiant cette relation avec cet $\varepsilon$ s'appelle un *module de continuité de f, en a, pour* $\varepsilon$.

Les propriétés des limites vues au § X.4 entraînent, sans nouvelle démonstration :

**Proposition X.5.1**

> (I) *Soit trois espaces topologiques $E$, $F$, $G$ et des applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$. Si $f$ est continue en $a \in E$ et $g$ continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.*
> (II) *Soit $E$, $F$ des espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$. Si $f$ est continue en $a \in E$, pour toute suite $(x_n)$ de $E$ tendant vers $a$, on a : $f(x_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f(a)$. Si $E$ est issu d'un espace métrique $(E, d)$ et si $f(x_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f(a)$ pour toute suite $(x_n)$ de $E$ tendant vers $a$, alors $f$ est continue en $a$.*
> (III) *Soit $E, F_1, \dots, F_p$ des espaces topologiques et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ le produit topologique des $F_i$. Soit $f : E \longrightarrow F$ de composantes $(f_i)$ $(f_i : E \longrightarrow F_i)$. Pour que $f$ soit continue en $a \in E$ il faut et il suffit que chaque $f_i$ le soit.*

**Proposition X.5.2**

> *Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques et $f_1 : E \longrightarrow F$, $f_2 : E \longrightarrow F$ des applications continues en $a \in E$.*
> (I) *Si $F = K$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue en $a$, et $f_1 f_2$ est continue en $a$ ; si* Im $(f_1) \subset K^*$, $\dfrac{1}{f_1}$ *est continue en a.*
> (II) *Si $F$ est un $K$-*evn, *pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in K^2$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue en $a$.*

En conséquence, pour $F = K$, l'ensemble $\mathscr{C}_a^0(E,K)$ des $f : E \longrightarrow K$ continues en $a$ est une *sous-K-algèbre* de $\mathscr{F}(E, K)$. L'ensemble $\mathscr{C}^0(E, K)$ des $f : E \longrightarrow K$ continues est une sous-$K$-algèbre de $\mathscr{F}(E, K$

autre que $\bigcap_{a \in E} \mathscr{C}_a^0(E, K)$. Pour $F =$ un $K$-evn, les ensembles $\mathscr{C}_a^0(E, f)$ et $\mathscr{C}^0(E, F)$ définis de même sont des sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(E, F)$.

On utilise souvent le résultat suivant :

**Proposition X.5.3**

*Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques et $f_i : E \longrightarrow F$ $(i \in \{1, 2\})$ des applications* **continues.** *On suppose $f_1(x) = f_2(x)$ pour $x \in D$ avec $D$ partie* partout dense *de $E$. Alors $f_1 = f_2$.*

*Démonstration :*

Soit $U = \{x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$. Montrons que $U$ est ouvert, *i.e.* voisinage de chacun de ses points.

Si $a \in U$ on choisit $W_1$ et $W_2$ voisinages respectifs de $f_1(a)$ et $f_2(a)$, *disjoints,* puis $V_1$ et $V_2$ voisinages de $a$ tels que $f_i(V_i) \subset W_i$ $(i = 1 ; 2)$ ; d'où $f_1(x) \neq f_2(x)$ pour $x \in V = V_1 \cap V_2$, d'où l'assertion car $V \subset U$. Par suite, $A = E \setminus U$ est fermé ; or $D \subset A$ par hypothèse, donc $A = E$. ■

**Caractérisation globale de la continuité**

**Théorème X.5.1**

*Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow F$. Il y a équivalence entre les propriétés :*

(I) *$f$ est continue.*

(II) *Pour tout ouvert $\omega$ de $F$, $f^{-1}(\omega)$ est ouvert dans $E$.*

(III) *Pour tout fermé $B$ de $F$, $f^{-1}(B)$ est fermé dans $E$.*

*Démonstration :*

Compte tenu de ce que $(\forall B \subset F)$ $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$, on voit que (II) et (III) sont *duales* l'une de l'autre, donc équivalentes.

(I) $\Rightarrow$ (II) : soit $\omega$ ouvert de $F$ ; posons $U = f^{-1}(\omega)$ ; si $x \in U$ et $y = f(x)$, $\omega$ est voisinage de $y$, donc $f^{-1}(\omega)$ est voisinage de $x$ (continuité de $f$ en $x$). Donc $U$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert.

(II) $\Rightarrow$ (I) : soit $a \in E$ et donnons un voisinage $W$ de $b = f(a)$. Le voisinage ouvert $\omega = \mathrm{Int}_E\,(W)$ de $b$ vérifie par hypothèse : $V = f^{-1}(\omega)$ est ouvert de $E$, et $a \in V$. Donc $V$ est voisinage de $a$, et $f(V) \subset \omega \subset W$ ; donc $f$ est continue en $a$. ■

**Continuité uniforme dans les espaces métriques**

**Définition X.5.2**

*Soit $(E_1, d_1)$, $(E_2, d_2)$ deux espaces métriques, et $f : E_1 \longrightarrow E_2$. On dit que $f$ est* **uniformément continue** *ssi elle vérifie le critère :*

(UC) $\quad (\forall \varepsilon \text{ réel} > 0)$, $\exists \alpha$ *réel* $> 0 \mid \forall (x, y) \in E_1^2$,

$$(d_1(x, y) \leqslant \alpha) \Rightarrow (d_2(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

*S'il en est ainsi, pour chaque $\varepsilon$ réel $> 0$, les nombres $\alpha > 0$ rendant* (UC) *vraie avec cet $\varepsilon$ s'appellent* modules de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$.

Avec $(E_1, d_1) = \mathbb{R}$ métrique usuel, et $E_2 = K^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ muni d'une norme standard, on retrouve la continuité uniforme étudiée au Chapitre III.

***Exemple 1 :*** Soit $C \in \mathbb{R}_+$. *Si $f$ est* $\mathrm{Lip}_C$, *elle est uniformément continue*. En effet, soit $\varepsilon$ réel $> 0$ : le nombre $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{1+C}$ est un module de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$ (on a vu au § V.1 que la réciproque est fausse, par exemple $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne).

• *La continuité uniforme entraîne la continuité,* car tout module de continuité uniforme de $f$ pour $\varepsilon$ est module de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$ pour $a \in E$ (on a vu au § III.5, exemple 1, que la réciproque est fausse).

***Exemple 2 :*** Soit $A$, partie non vide de l'espace métrique $(E, d)$. La fonction $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$ est $\mathrm{Lip}_1$, donc uniformément continue, donc continue.

Si $f$ est *continue* sur $E_1$, soit $\varepsilon$ réel $> 0$ ; pour $a \in E_1$, soit $\mathcal{M}_c(f, a, \varepsilon)$ l'ensemble des modules de continuité de $f$ en $a$ pour $\varepsilon$ : c'est un intervalle $]0, \alpha_a(\varepsilon))$, où $0 < \alpha_a(\varepsilon) \leqslant +\infty$, la parenthèse indiquant que pour $\alpha_a(\varepsilon) < +\infty$, cet intervalle peut selon les cas contenir ou non $\alpha_a(\varepsilon)$. Pour que $f$ soit *uniformément continue,* il faut et il suffit que : $\forall \varepsilon$ réel $> 0$, $\inf\limits_{a \in E_1} \alpha_a(\varepsilon) > 0$.

### Homéomorphismes

**DÉFINITION X.5.3**

*Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques. On appelle* ***homéomorphisme*** *de $E$ sur $F$ toute* ***bijection*** *$f : E \longrightarrow F$ telle que* ***$f$ et $f^{\langle -1 \rangle}$ soient continues.***

*$E$ et $F$ sont dits* ***homéomorphes*** *ssi il existe au moins un homéomorphisme de $E$ sur $F$.*

Pour tout espace topologique $E$, il est évident que $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ *est un homéomorphisme.*

La définition X.5.3 implique que si $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme, $f^{\langle -1 \rangle} : F \longrightarrow E$ en est un autre. D'après la proposition X.5.1 (I), *la composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme*. En conséquence, la relation (entre espaces topologiques) : « $E$ et $F$ sont homéomorphes » est *réflexive, symétrique et transitive*. Les homéomorphismes sont les isomorphismes de la structure d'espace topologique : toute propriété topologique reste invariante par homéomorphismes. Mais attention ! **une bijection continue n'est pas forcément un homéomorphisme.**

Par exemple, soit $E = [0, 2\pi[$, $F = \mathbb{U}$ (cercle unité de $\mathbb{C}$), et $f :$ $E \longrightarrow F$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, qui est continue et bijective. Sa réciproque continue en 1 : pour $V$ voisinage de 1 dans $\mathbb{C}$, soit

$$V_+ = \{z \in \mathbb{U} \cap V \mid \mathrm{Im}\,(z) > 0\} \quad \text{et} \quad V_- = \{z \in \mathbb{U} \cap V \mid \mathrm{Im}\,(z) < 0\}\ .$$

$g$ envoie les points de $V_+$ au voisinage de 0 dans $E$, mais ceux de $V_-$ au voisinage de $2\pi$ !

Voici un exemple intéressant d'espaces homéomorphes :

***Exemple 3 :*** En se reportant aux théorèmes IV.2.2 et IV.2.3, on voit que *deux intervalles $I$ et $J$ non triviaux de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes ssi ils sont ou bien tous deux compacts, ou bien tous deux ouverts, ou bien tous deux semi-ouverts dans* $\bar{\mathbb{R}}$. De plus (à cause du théorème IV.2.3) *lorsque $I$ et $J$ sont homéomorphes, toute bijection continue $I \longrightarrow J$ est un homéomorphisme.*

Montrons maintenant comment s'utilisent les résultats ci-dessus :

***Exemple 4 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ un espace topologique *produit* des espaces topologiques $E_i$. Notons $p_i : E \longrightarrow E_i$ les projections naturelles. *Chaque $p_i$ est continue :* en effet ($i$ étant fixé), soit $\omega_i$ ouvert dans $E_i$. On a : $p_i^{-1}(\omega_i) = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ (où $A_j = E_j$ si $j \neq i$ et $A_i = \omega_i$), donc $p_i^{-1}(\omega_i)$ est ouvert (élémentaire). D'après le théorème X.5.1, $p_i$ est continue.

***Exemple 5 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'exemple 4, les projections naturelles $\varphi_i : K^n \longrightarrow K$ sont continues, donc engendrent une $K$-algèbre de fonctions continues sur $K^n$ (cf. proposition X.5.2). Donc *toute fonction polynomiale $K^n \longrightarrow K$ est continue.*

***Exemple 6 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : K^n \longrightarrow K$ polynomiale non nulle. L'ensemble $\mathcal{S}_f = f^{-1}(0)$ (appelé *hypersurface algébrique* d'équation $f = 0$) est *fermé dans $K^n$*, car $f$ est continue et $\{0\}$ est fermé dans $K$. Donc $\mathcal{D}_f = K^n \setminus \mathcal{S}_f$ est *ouvert* dans $K^n$ (cela illustre la puissance du théorème X.5.1 : pour découvrir des ouverts (resp. des fermés), il suffit de les définir comme images réciproques d'ouverts (resp. fermés) plus simples par une fonction continue).

***Exemple 7 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f,\ g : K^n \longrightarrow K$ polynomiales. Notons $\mathcal{D}_g = \{x \in K^n \mid g(x) \neq 0\}$. La fonction $\varphi : \mathcal{D}_g \longrightarrow K,\ x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue (N.B. toute restriction d'une telle fonction est dite *rationnelle.* Ainsi *toute fonction rationnelle est continue*).

***Exemple 8 :*** Soit $n$ et $p$ entiers $\geqslant 1$ et $f : K^n \longrightarrow K^p$, de composantes $f_1, \ldots, f_p$. Si chaque $f_i$ est polynomiale (auquel cas on dit que $f$ *est polynomiale*), alors $f$ est continue (cf. proposition X.5.1 (III)). En particulier, *si $f$ est affine* (*i.e.* $(\forall i)$ $f_i$ est polynomiale de degré $\leqslant 1$) *$f$ est continue.*

Soit alors $f : K^n \longrightarrow K^n$ une *bijection affine*. On sait qu'alors $f^{\langle -1 \rangle}$ est affine ; $f$ et $f^{\langle -1 \rangle}$ étant continues, *$f$ est un homéomorphism*

***Exemple 9 :*** Montrons que l'application $f : ]-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{U}\setminus\{-1\}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, est un *homéomorphisme :* on sait déjà qu'elle est continue et bijective (voir § V.4).

D'après la proposition V.4.1, sa réciproque $g$ est donnée par

$$(\forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{U} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)) \quad g(z) = 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{1+x}.$$

La fonction $\mathbb{R}^2\setminus(\{-1\} \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{y}{1+x}$ est continue (car rationnelle), Arc tg est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{y}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus(\{-1\} \times \mathbb{R})$, donc $g$, qui est sa restriction à $\mathbb{U}\setminus\{-1\}$, est aussi continue, d'où l'assertion. (Noter que la bijection $[-\pi, \pi[ \longrightarrow \mathbb{U}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, qui prolonge $f$ continûment, n'*est pas* un homéomorphisme de $[-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U}$, comme on l'a vu avant l'exemple 3).

## Equivalence topologique de distances

**DÉFINITION X.5.4**

*Soit deux topologies, d'ensembles ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{O}_2$ est* plus fine *que $\mathcal{O}_1$ (ou que $\mathcal{O}_1$ est moins fine que $\mathcal{O}_2$), et l'on note $\mathcal{O}_1 \preccurlyeq \mathcal{O}_2$, ssi l'application* $\mathrm{Id}_E : (E, \mathcal{O}_2) \longrightarrow (E, \mathcal{O}_1)$ *est* ***continue.***

La relation $\mathcal{O}_1 \preccurlyeq \mathcal{O}_2$ signifie (cf. théorème X.5.1) que tout ouvert $U \in \mathcal{O}_1$ de $(E, \mathcal{O}_1)$ est un ouvert de $(E, \mathcal{O}_2)$, c'est-à-dire qu'on a, dans $\mathscr{P}(E)$, l'inclusion $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. On en déduit que $\mathcal{O}_1 \preccurlyeq \mathcal{O}_2$ est une *relation d'ordre* sur l'ensemble des topologies de $E$.

**DÉFINITION X.5.5**

(I) *Un espace topologique E est dit* ***métrisable*** *ssi il existe une distance d sur E définissant la topologie de E. Lorsque c'est le cas, toute telle distance est dite* ***compatible avec la topologie de E.***
(II) *Deux distances $d_1$, $d_2$ sur un ensemble E sont dites* ***topologiquement équivalentes*** *ssi elles définissent sur E* ***la même topologie.***

Il est évident que l'équivalence topologique des distances est une *relation d'équivalence* sur l'ensemble des distances de $E$.

Soit deux topologies **métrisables** $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ sur un ensemble $E$. En vertu de la proposition X.5.1 (III), *pour que $\mathcal{O}_2$ soit plus fine que $\mathcal{O}_1$, il faut et il suffit que toute suite de E convergente pour $\mathcal{O}_2$ converge pour $\mathcal{O}_1$, vers la même limite.*

En conséquence, *pour que deux distances $d_1$, $d_2$ sur un ensemble E soient équivalentes, il faut et il suffit que, pour tout $a \in E$ et toute suite $(x_n)$ de E, les relations* $d_1(x_n, a) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $d_2(x_n, a) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ *soient équivalentes.*

***Exemple 10 :*** Sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient une distance $\delta$ par : $(x, y) \mapsto \left|\operatorname{Log} \dfrac{x}{y}\right|$. Pour $a > 0$ et $(x_n)$ suite de $\mathbb{R}_+^*$, les relations $\left|\operatorname{Log} \dfrac{x_n}{a}\right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $|x_n - a| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ sont équivalentes (continuité de l'exponentielle en 0). Donc $\delta$ est topologiquement équivalente à la distance usuelle $d : (x, y) \mapsto |x - y|$.

Rappelons qu'une topologie métrisable n'est nullement quelconque : on a déjà vu qu'elle est forcément séparée, que tout point $y$ admet une base dénombrable de voisinages ; de plus, la classe des espaces topologiques métrisables est stable pour beaucoup d'opérations usuelles. Par exemple, *tout sous-espace d'un espace métrisable, tout produit fini d'espaces métrisables, l'est encore* (cf. propositions X.2.5 et X.2.7). Enfin (cf. ($TM_4$) du § X.2) *si deux distances sont équivalentes, elles sont topologiquement équivalentes,* mais la réciproque est fausse : deux distances peuvent être topologiquement équivalentes sans être équivalentes (dans l'exemple 9 ci-dessus, $d$ est bornée au voisinage de 0, mais pas $\delta$).

***Exercice 1 :*** Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

(1) $f$ est continue ;

(2) pour toute partie $A$ de $E$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ ;

(3) pour toute partie $B$ de $F$, $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$ ;

(4) pour toute partie $B$ de $F$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

***Exercice 2 :*** Soit $A$, $B$ deux parties non vides d'un espace métrique $(E, d)$ telles que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ . Montrer qu'il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $E$ *disjoints* tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

*Indication :* Penser aux fonctions $x \mapsto d(x, A)$, $x \mapsto d(x, B)$ et au théorème X.5.9.

***Exercice 3 :*** Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow F$ continue.

*a*) Montrer que le graphe $\Gamma_f$ de $f$ est fermé dans l'espace produit $E \times F$ (N.B. on notera le rôle essentiel de l'axiome de Hausdorff dans cette propriété).

*b*) Prouver que $x \mapsto (x, f(x))$ définit un *homéomorphisme* de $E$ sur $\Gamma_f$.

***Exercice 4 :*** Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques. On donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de fermés de $E$ *localement finie, i.e.* telle que $(\forall x \in E)\, \exists V$ voisinage de $x$ tel que $\{i \in I \mid V \cap A_i \neq \emptyset\}$ soit fini. On suppose en outre que $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

*a*) Soit $A$ une partie de $E$ ; montrer que $A$ est ouverte ssi $(\forall i)$ $A \cap A_i$ est ouvert dans $A_i$ ; et que $A$ est fermée ssi $(\forall i)$ $A \cap A_i$ est un fermé de $E$.

*b*) Soit $f : E \longrightarrow F$. Pour que $f$ soit continue, il faut et il suffit que $(\forall i)$ $f|_{A_i} : A_i \longrightarrow F$ soit continue.

***Exercice 5 :*** Soit $E$, $F$ deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note $\Delta$ l'ensemble des points de discontinuité (*i.e.* de non continuité) de $f$. Démontrer :

*a*) $\Delta = \bigcup_{B \text{ ouvert de } F} (f^{-1}(B) \setminus \mathrm{Int}\,(f^{-1}(B)))$

*b*) $\Delta = \bigcup_{B \text{ fermé de } F} [\mathrm{Adh}\,(f^{-1}(B)) \setminus f^{-1}(B)]$.

***Exercice 6 :*** Un ensemble totalement ordonné $(E, \leqslant)$ est dit *sans trou* ssi card $(E) \geqslant 2$ et $(\forall (a, b) \in E^2)$ $(a < b) \Rightarrow (\exists z \in E \mid a < z < b)$.

*a*) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, sans trou, et *dénombrable.* Prouver qu'il existe une bijection croissante de $E$ sur l'un des quatre intervalles de $\mathbb{Q}$ d'extrémités 0 et 1.

*b*) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné, sans trou et dénombrable. Montrer que $E$ admet des parties non vides et majorées sans borne supérieure dans $E$.

*c*) Soit $D$ et $D'$ deux parties de $\mathbb{R}$ *équipotentes* et *partout denses,* et supposons trouvée une bijection $\varphi : D \longrightarrow D'$ croissante. Prouver que $\varphi$ est un homéomorphisme de $D$ sur $D'$.

*d*) Soit $D$ et $D'$ deux parties de $\mathbb{R}$ *partout denses* et *dénombrables.* Montrer qu'il existe une bijection croissante de $D$ sur $D'$ ; en déduire que $D$ et $D'$ sont homéomorphes, donc homéomorphes à $\mathbb{Q}$ usuel.

***Exercice 7 :*** Un espace topologique (rappelons : par convention *séparé*) est dit *régulier* ssi, en chaque point, les voisinages fermés de ce point en forment une base de voisinages. Soit $E$ un espace topologique et $F$ un espace topologique régulier, enfin $D$ une partie dense de $E$, et $f : D \longrightarrow F$ continue. Montrer que, pour qu'il existe un prolongement $\tilde{f} : E \longrightarrow F$ de $f$ à $E$ *continu* sur $E$, il faut et il suffit que $(\forall x \in E)\ \lim\limits_{y \longrightarrow x} f(y)$ existe. Si cette condition est vérifiée, $\tilde{f}$ est unique et donnée par : $\quad (\forall x \in E) \quad \tilde{f}(x) = \lim\limits_{y \longrightarrow x} f(y)$.

***Exercice 8 :*** Soit $E$ un $K$-evn non nul et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Montrer directement que $f$ est continue ssi Ker $(f)$ est fermé dans $E$.

*Indication :* Si $f$ est non continue, construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $E$ telle que $(\forall n)\ \|x_n\| \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $f(x_n) = 1$. Montrer que c'est contradictoire avec Ker $(f)$ fermé.

***Exercice 9 :*** Soit $F$ un sous-$K$-ev d'un $K$-evn $E$. Montrer que Adh $(F)$ est un sous-$K$-ev de $E$. Que dire de Int $(F)$ ? (N.B. si $F \neq E$, $E \setminus F$ est partout dense).

***Exercice 10 :*** On donne trois entiers $m$, $n$, $r$ avec $1 \leqslant r < m \leqslant n$. Soit $\mathscr{E}_r$ l'ensemble des matrices de rang $r$ dans $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{F}_r$ l'ensemble des matrices de rang $\leqslant r$.

*a*) Montrer que Adh $(\mathscr{E}_r) = \mathscr{F}_r$ (dans l'espace $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{mn}$ usuel).

*b*) On munit $\mathscr{E}_r$ de la topologie induite par $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que tout point de $\mathscr{E}_r$ admet un voisinage ouvert dans $\mathscr{E}_r$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{r(m+n-r)}$.

*Indication :* Soit $U$ l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{E}_r$ telles que le mineur $\Delta_{[\![1,r]\!],\,[\![1,r]\!]}(M)$ soit $\neq 0$. Montrer que $U$ est ouvert dans $\mathscr{E}_r$ ; soit $\omega$ l'ensemble $\{A \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ : c'est un ouvert (de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^{r^2}$) ; définir une bijection naturelle $\omega \times \mathbb{R}^{r(m+n-2r)} \longrightarrow U$ et montrer que cette bijection est un homéomorphisme.

***Exercice 11 :*** On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique ; le groupe $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est identifié à l'ensemble $\{(c, s) \in \mathbb{R}^2 \mid c^2 + s^2 = 1\}$. On donne des réels $r$ et $R$ tels que $0 < r < R$ ; soit $\Phi : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(c, s, \gamma, \sigma) \mapsto ((R + rc)\gamma, (R + rc)\sigma, rs)$ et soit $T = \operatorname{Im} \Phi$ (tore).

*a*) Vérifier que $\Phi$ est injective ; elle définit donc $\varphi : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \longrightarrow T$ bijective ; on notera $\psi = \varphi^{\langle -1 \rangle}$.

*b*) Expliciter $\psi$. Montrer alors que $\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ sur $T$.

*c*) Montrer que $T$ est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(R^2 + r^2)(x^2 + y^2) + 2(R^2 - r^2)z^2 + (R^2 - r^2)^2 = 0 .$$

En déduire que $T$ est fermé dans $\mathbb{R}^3$.

*d*) Soit $\theta \in ]0, 1[$, et $f_\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, $t \mapsto (e^{2i\pi t}, e^{2i\pi\theta t})$. Montrer que, pour que Im $(f_\theta)$ soit partout dense dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$, il faut et il suffit que $\theta \notin \mathbb{Q}$. Lorsque $\theta \notin \mathbb{Q}$, vérifier que $f_\theta$ est injective et continue : définit-elle un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$ ? Lorsque $\theta \in \mathbb{Q}$, montrer que $f_\theta$ permet de définir une bijection du groupe quotient $\mathbb{R}/_{q\mathbb{Z}}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$ (où $\theta = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $p$ et $q$ premiers entre eux), et à partir de là un homéomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $f_\theta(\mathbb{R})$.

***Exercice 12 :*** *a*) Sur un $\mathbb{R}$-ev non nul $E$, on donne deux normes équivalentes $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{N}_2$. Montrer que les boules unités fermées $\tilde{B}_1$ et $\tilde{B}_2$ (resp. les sphères unités $S_1$ et $S_2$) relatives à $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{N}_2$ sont homéomorphes pour la topologie (unique) que définissent $\mathscr{N}_1$ et $\mathscr{N}_2$.

*b*) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On considère la norme uniforme $\mathscr{N}_\infty$ et la norme $\mathscr{N}$ définie par :

$$(\forall u = (u_n) \in E) \quad \mathscr{N}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |u_n| .$$

On note respectivement $\tilde{B}_\infty$ et $\tilde{B}$ les boules unités fermées relatives à $\mathscr{N}_\infty$ et à $\mathscr{N}$ et $S_\infty$ et $S$ leurs sphères unités.

Montrer que l'espace $\tilde{B}_\infty$ n'est pas séparable (cf. § X.2, exercice 1) mais que $\tilde{B}$ est séparable. En déduire que $\tilde{B}_\infty$ et $\tilde{B}$ ne sont pas homéomorphes. Montrer aussi que $S_\infty$ et $S$ ne sont pas homéomorphes.

***Exercice 13 :*** *a*) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev et deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ de $E$, de sphères unités (resp. boules unités fermées) respectives $S$, $S'$ (resp. $\tilde{B}$, $\tilde{B}'$). Montrer que si $S$ et $S'$ sont homéomorphes, alors $\tilde{B}$ et $\tilde{B}'$ le sont aussi (pour leurs topologies définies par $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$).

*b*) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ des suites réelles à support fini. Soit $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ les normes : $x = (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |x_n|$ et $x = (x)_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} |x_n|$. Montrer que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ ne sont pas équivalentes, mais qu'il existe une bijection linéaire *isométrique* de $(E, \mathcal{N})$ sur $(E, \mathcal{N}')$. (En particulier, les boules unités fermées de $(E, \mathcal{N})$ et de $(E, \mathcal{N}')$ sont homéomorphes).

***Exercice 14 :*** Montrer que les espaces topologiques suivants sont homéomorphes :

*a*) Dans $\mathbb{C}$, les ensembles : $\mathbb{C}^*$ ; $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ ; $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ ; $W = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ (noter que les frontières ne sont pas toutes homéomorphes).

*b*) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, les ensembles : $U = \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ (où $\Gamma$ est le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$) ; $V = \mathbb{R}^3 \setminus \hat{T}$ (où $\hat{T}$ est le tore *plein* construit à partir du tore de l'exercice 11).

*c*) Dans $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathscr{E}$, dont on vérifiera qu'il est ouvert, égal au complémentaire dans $\mathbb{C}^*$ de la spirale logarithmique image de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{(1+i)t}$, et l'ensemble $\mathbb{C}$.

***Exercice 15 :*** Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère les cercles verticaux $\Gamma$ de diamètre $AB$, où $B$ décrit la droite $\Delta$ $(z = 0,\ x = b$, avec $b > 0)$, et où pour chaque $B$, la droite $OB$ rencontre en $A \neq O$ le cercle fixe $\gamma$ $(z = 0,\ x^2 + y^2 - ax = 0$, avec $0 < a < b)$. Soit $\mathscr{S}$ la réunion des cercles $\Gamma$.

*a*) Est-il vrai que $\mathscr{S}$ est homéomorphe à $\mathbb{U} \times \mathbb{R}$ (où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) ?

*b*) Montrer que

$$\text{Adh}\,(\mathscr{S}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x(x^2 + y^2 + z^2) - (a + b)x^2 - by^2 + abx = 0\} .$$

***Exercice 16 :*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^k$ euclidien canonique, on note $S_{k-1}$ l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1^2 + \cdots + x_k^2 = 1\} .$$

On identifie $S_1$ à $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

*a*) A $z \in \mathbb{C}$ on associe $\sigma(z)$ et $\tau(z)$ éléments de $S_2$ ainsi :

$$\sigma(z) = \left( \frac{2\,\text{Re}\,(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\,\text{Im}\,(z)}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad \tau(z) = \left( \frac{2\,\text{Re}\,(z)}{1 + |z|^2}, \frac{2\,\text{Im}\,(z)}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right).$$

Montrer que $\sigma$ (resp. $\tau$) est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $S_2 \setminus \{N\}$ (resp. $S_2 \setminus \{S\}$), où $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$. Description géométrique de $\sigma$ et $\tau$ (il s'agit de *projections stéréographiques*).

Vérifier que $\sigma(z) = \tau\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$ et interpréter géométriquement.

*b*) Soit $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S_3$. On pose $u = y_1 + iy_2$, $v = y_3 + iy_4$. Si $v \neq 0$, on définit $H(y) = \sigma\left(\frac{u}{v}\right)$ ; si $v = 0$ on définit $H(y) = N$.

Montrer que l'application $H : S_3 \longrightarrow S_2$ est continue et surjective. Pour tout point $m \in S_2$, $H^{-1}(m)$ est homéomorphe à $S_1 = \mathbb{U}$. Enfin, notant $U = \{y \in S_3 \mid v \neq 0\}$ et $V = \{y \in S_3 \mid u \neq 0\}$, vérifier que $U$ et $V$ sont ouverts dans $S_3$, que $U \cup V = S_3$, et que $U$ et $V$ sont chacun homéomorphes à $\mathbb{U} \times \mathbb{C}$.

N.B. On démontre (plus difficilement) que $S_3$ *n'est pas* homéomorphe à $\mathbb{U} \times S_2$. La remarquable application $H$ ci-dessus a été introduite par Heinz Hopf).

## § X.6 *CONTINUITÉ DANS LES E.V.N.*

**THÉORÈME X.6.1**

*Soit* $(E, \mathcal{N})$ *un* $K$-evn. *Munissons* $E \times E$ *et* $K \times E$ *de leur topologie produit. Les applications suivantes sont* **continues :**

(I) $\mathcal{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (II) $S : E \times E \longrightarrow E, \ (x, y) \mapsto x + y$

(III) $s : K \times E, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

*Démonstration :*

La fonction $\mathcal{N}$ est $\mathrm{Lip}_1$, car $\mathcal{N}(x - y) \geqslant |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)|$ pour $(x, y) \in E^2$. Nous allons montrer la continuité de $s$ en laissant celle de $S$ (encore plus simple) au lecteur. La topologie de $K \times E$ est définie par la norme $N : (\lambda x) \mapsto \mathrm{Max}\,(|\lambda|, \mathcal{N}(x))$. Fixons $(\lambda_0, x_0) \in K \times E$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour $(\lambda, x) \in K \times E$, utilisant :

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)\, x + \lambda_0 (x - x_0)\,,$$

il vient : $\mathcal{N}(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leqslant |\lambda - \lambda_0|\, \mathcal{N}(x) + |\lambda_0|\, \mathcal{N}(x - x_0)$.

On voit qu'en prenant

$$\alpha = \frac{1}{2} \mathrm{Min} \left(1, \frac{\varepsilon}{2(1 + \mathcal{N}(x_0))}, \frac{\varepsilon}{2(1 + |\lambda_0|)}\right),$$

l'inégalité $N((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) \leqslant \alpha$ entraîne $\mathcal{N}(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leqslant \varepsilon$. ■

La continuité de $S$ et $s$ signifie que la topologie d'une norme sur un $K$-ev est une topologie d'*espace vectoriel topologique* (E.V.T.) : en effet, on appelle **K-espace vectoriel topologique** tout $K$-ev $E$ muni d'une topologie pour laquelle $S$ et $s$ sont continues.

**COROLLAIRE**

*Dans un* $K$-evn *E, pour tous* $(\lambda, b) \in K \times E$, *l'application* $f_{\lambda, b} : x \mapsto \lambda x + b, \quad E \longrightarrow E$ *est continue. En conséquence, si* $\lambda \in K^*$, $f_{\lambda, b}$ *est un* homéomorphisme *de E sur E* (*car* $f_{\lambda, b}$ *est alors bijective et* $f_{\lambda, b}^{\langle -1 \rangle} = f_{\frac{1}{\lambda}, \frac{-1}{\lambda} b}$ *est aussi continue*).

**THÉORÈME X.6.2**

*Soit deux normes* $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ *sur un* $K$-ev *E. Il y a équivalence entre :*

(I) $\mathcal{N}_2$ *est plus fine que* $\mathcal{N}_1$.

(II) *La topologie de* $\mathcal{N}_2$ *est plus fine que celle de* $\mathcal{N}_1$.

(III) *Pour toute suite* $(x)$ *de E,*

$$\left(\mathcal{N}_2(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right) \Rightarrow \left(\mathcal{N}_1(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

> (IV) $\mathrm{Id}_E : (E, \mathcal{N}_2) \longrightarrow (E, \mathcal{N}_1)$ *est continue en* $0_E$.
> *En conséquence,* $\mathcal{N}_1$ *et* $\mathcal{N}_2$ *sont* **équivalentes** *ssi elles définissent sur* $E$ **la même topologie.**

*Démonstration :*

De la proposition X.5.1 (II), on déduit (III) $\Leftrightarrow$ (IV). Soit $d_i$ la distance issue de $\mathcal{N}_i$. Si (I) est vraie, soit $a$ réel $> 0$ tel que $\mathcal{N}_1 \leqslant a\mathcal{N}_2$ ; alors $d_1 \leqslant ad_2$, d'où (II) puisque cela entraîne que $\mathrm{Id}_E : (E, \mathcal{N}_2) \longrightarrow (E, \mathcal{N}_1)$ est $\mathrm{Lip}_a$. Il est clair que (II) $\Rightarrow$ (IV). Il reste à prouver que (IV) $\Rightarrow$ (I). Si (IV) est vraie, soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(\mathcal{N}_2(x) \leqslant r) \Rightarrow (\mathcal{N}_1(x) \leqslant 1)$ pour $x \in E$ (continuité de $\mathrm{Id}_E$ en $0_E$). Si $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a alors

$$\mathcal{N}_1\left(\frac{r}{\mathcal{N}_2(x)}x\right) \leqslant 1 \ \left(\text{car } \mathcal{N}_2\left(\frac{r}{\mathcal{N}_2(x)}x\right) = r\right),$$

d'où $\mathcal{N}_1(x) \leqslant \dfrac{1}{r}\mathcal{N}_2(x)$ (et cela reste vrai avec $x = 0_E$), donc $\mathcal{N}_1 \leqslant \dfrac{1}{r}\mathcal{N}_2$, d'où (I). ■

Dans la suite, nous noterons souvent $\| \cdot \|$ (et parfois $||| \cdot |||$) la norme d'un $K$-evn. Même si plusieurs evn interviennent, cela ne peut guère prêter à confusion car dans une écriture $\|x\|$, on sait bien à quel $K$-ev appartient le vecteur $x$.

**THÉORÈME X.6.3**

> *Soit deux* $K$-evn $E$ *et* $F$, *et* $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
> (I) $u$ *est continue.* (II) $u$ *est continue en* $0_E$.
> (III) $\exists C \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall x \in E) \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$.
> (IV) $u$ *est uniformément continue.*
> (V) $u$ *est lipschitzienne.*
> (VI) $u$ *est bornée sur la boule unité* $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ *de* $E$.
> (VII) $u$ *est bornée sur la sphère unité* $\mathbf{S}(0_E, 1)$ *de* $E$.
> (VIII) *Pour toute suite* $(x_n)$ *tendant vers* $0_E$ *dans* $E$, *on a* $u(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0_F$.

*Démonstration :*

Les implications suivantes sont évidentes : (VI) $\Rightarrow$ (VII) ; (V) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (I) $\Rightarrow$ (II) ; (V) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (VI). L'équivalence de (II) et (VIII) résulte de la proposition X.5.1 (II).

Si (VII) est vrai, soit $C = \sup\limits_{x \in E,\ \|x\| = 1} \|u(x)\|$. Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, de $\left\|\dfrac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$, on tire : $\left\|u\left(\dfrac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leqslant C$, d'où $\|u(x)\| \leqslant C\|x\|$, ce qui reste vrai avec $0_E$, d'où (III).

Si (III) est vrai avec $C$,

$$(\forall (x, y) \in E^2), \quad \|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| \leqslant C\,\|x-y\|,$$

d'où (V).

Enfin, si (II) est vrai, soit $r$ réel $> 0$ tel que

$$(x \in E \text{ et } \|x\| \leqslant r) \Rightarrow \|u(x)\| \leqslant 1 .$$

Pour $x \in E \setminus \{0_E\}$, on en déduit

$$\left\| u\left(\frac{r}{\|x\|}\,x\right)\right\| \leqslant 1 \ \left(\text{car } \left\|\frac{r}{\|x\|}\,x\right\| = r\right),$$

donc $\|u(x)\| \leqslant \dfrac{1}{r}\,\|x\|$ qui reste vraie avec $x = 0_E$, d'où (III). ■

***Exemple 1 :*** Soit deux réels $a, b$ $(a < b)$. Munissons le $K$-ev $E = \mathscr{C}^0([a,b], K)$ de la norme $\nu_1 : f \mapsto \displaystyle\int_a^b |f|$. La forme linéaire $I : E \longrightarrow K,\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ vérifie

$$(\forall f \in E) \quad |I(f)| \leqslant \int_a^b |f| = \nu_1(f),$$

donc est *continue*.

Mais la forme linéaire $\delta : f \mapsto f(0)$ (en supposant $a = 0$, $b = 1$) n'est *pas continue* sur $(E, \nu_1)$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction $f_n : x \mapsto 0$ si $x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, $x \mapsto 1 - nx$ si $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$. On a : $(\forall n)\ \delta(f_n) = 1$ tandis que $\nu_1(f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

**Espaces normés d'applications linéaires continues**

Reprenons les notations du théorème X.6.3, en supposant $E \neq \{0\}$. Nous conviendrons de noter $\mathscr{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires *continues :* $E \longrightarrow F$. Si $F = E$, on abrégera $\mathscr{L}_K(E, E)$ en $\mathscr{L}_K(E)$. Si $F = K$, on écrira : $\mathscr{L}_K(E, K) = E'$.

Par la proposition X.5.2, **$\mathscr{L}_K(E, F)$ est un sous-$K$-ev de $\mathrm{Hom}_K(E, F)$.** En particulier $\mathscr{L}_K(E, K)$ $(= E')$ est un sous-$K$-ev de $E^*$, dual de $E$ ; ce $K$-ev $E'$ s'appelle **dual topologique** de $E$. Les propositions X.5.2 et X.5.1 (I) montrent que **$\mathscr{L}_K(E)$ est une sous-$K$-algèbre de $\mathrm{Hom}_K(E)$.**

Fixons $u \in \mathscr{L}_K(E, F)$. Les éléments

$$A_1 = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|, \quad A_2 = \sup_{x \in E,\ \|x\| = 1} \|u(x)\|,$$

$$A_3 = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, \quad A_4 = \mathrm{Min}\ \{C \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\,\|x\|\}$$

sont tous bien définis dans $\mathbb{R}_+$, à cause du théorème X.6.3. Vérifions que $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$ : il est d'abord clair que $A_2 \leqslant A_1$ ; si $x \in \setminus \{0\}$ et $\|x\| \leqslant 1$, on a :

$$\|u(x)\| \leqslant \frac{1}{\|x\|} \|u(x)\| = \left\| u\left( \frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1 ,$$

d'où, $\|u(x)\| \leqslant A_2$ et cela reste vrai pour $x = 0_E$, donc $A_1 \leqslant A_2$ et finalement $A_1 = A_2$.

Puisque $$(\forall x \in E \setminus \{0\}) \quad \left\| u\left( \frac{1}{\|x\|} x \right) \right\| = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} ,$$

il est clair que $A_2 = A_3$. Enfin, comme $u(0_E) = 0_F$, $A_4$ est le minimum des $C \in \mathbb{R}_+$ tels que $(\forall x \in E \setminus \{0\}) \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant C$, autrement dit $A_4 = A_3$.

**PROPOSITION X.6.1**

*Soit $E$ et $F$ deux $K$-*evn, *avec $E \neq \{0\}$. La fonction*

$$\mathcal{N} : \mathcal{L}_K(E, F) \longrightarrow \mathbb{R}_+ , u \mapsto \mathcal{N}(u) = \sup_{x \in E,\ \|x\| \leqslant 1} \|u(x)\|$$

$$= \sup_{x \in E,\ \|x\| = 1} \|u(x)\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

$= \operatorname{Min} \{C \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C \|x\|\}$ *est une* ***norme*.**

*Démonstration :*

Le seul point méritant vérification détaillée est l'inégalité du triangle. Soit donc $u$ et $v$ dans $\mathcal{L}_K(E, F)$. Pour $x \in E$ et $\|x\| \leqslant 1$, on a :

$$\|(u + v)(x)\| = \|u(x) + v(x)\| \leqslant \|u(x)\| + \|v(x)\| \leqslant \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v) .$$

Prenant la borne supérieure sur les $x \in \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$, On obtient alors : $\mathcal{N}(u + v) \leqslant \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$. ■

La norme $\mathcal{N}$ définie dans cette proposition X.6.1 s'appelle **norme associée aux normes de *E* et *F*.** On la note souvent $\| \,.\, \|$ lorsqu'aucune confusion ne s'ensuit. Sauf mention contraire, on munit systématiquement $\mathcal{L}_K(E, F)$ de cette norme. En voici une remarquable propriété :

**THÉORÈME X.6.4**

*Soit $E$, $F$, $G$ trois $K$-*evn *non nuls. On munit $\mathcal{L}_K(E, F)$, $\mathcal{L}_K(F, G)$ et $\mathcal{L}_K(E, G)$ des normes associées à celles de $E$, $F$ et $G$ (on note $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ ces normes associées). Si $u \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}_K(F, G)$, on a : $v \circ u \in \mathcal{L}_K(E, G)$ et :*

$$|\!|\!| v \circ u |\!|\!| \leqslant |\!|\!| v |\!|\!| \times |\!|\!| u |\!|\!| .$$

*En particulier, sur $\mathcal{L}_K(E)$, la norme $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ est une* ***norme d'algèbre stricte.***

*Démonstration :*

Que $v \circ u \in \mathscr{L}_K(E, G)$ découle de la proposition X.5.1 (I). Si $x \in E$, on a :

$$\|v \circ u(x)\| \leqslant |||v||| \times \|u(x)\| \leqslant |||v||| \times |||u||| \times \|x\| ,$$

d'où $|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \times |||u|||$ (dernière expression de $\mathscr{N}$ dans la proposition X.6.1). Enfin, la proposition X.6.1 rend évident que $|||\mathrm{Id}_E||| = 1$. ■

***Remarque 1 :*** Dans les trois premières expressions de $\mathscr{N}$ dans la proposition X.6.1, en général les bornes supérieures *ne sont pas atteintes*. Toutefois, lorsque *E est de dimension finie*, elles le sont (cf. § XI.1, exemple 2).

***Exemple 2 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Equipons $K^n$ de la norme $N_1 : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Notons $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sa base canonique, et $\mathscr{B}^* = (e_i^*)$ sa *base duale* dans $E^*$.

Pour $\varphi = \sum \lambda_i e_i^* \in E^*$, notons $N_\infty^*(\varphi) = \operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$ ; pour $x \in E$, on voit :

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right| \leqslant N_\infty^*(\varphi) N_1(x) .$$

D'où $\varphi \in E'$, donc $E' = E^*$. Soit $|||\ .\ |||$ la norme de $E'$ associée à $N_1$. Le calcul précédent montre : $(\forall \varphi \in E')$ $|||\varphi||| \leqslant N_\infty^*(\varphi)$. Mais fixant $\varphi = \sum \lambda_i e_i^*$, soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $N_\infty^*(\varphi) = |\lambda_j|$. De $|\varphi(e_j)| = |\lambda_j| = N_\infty^*(\varphi)$ et $N_1(e_j) = 1$, on déduit (première expression de $\mathscr{N}$ dans la proposition X.6.1) $N_\infty^*(\varphi) = |||\varphi|||$. Donc $|||\ .\ ||| = N_\infty^*$.

***Exemple 3 :*** Soit $E$ un espace *euclidien* de dimension $n \geqslant 1$, de produit scalaire $(.\,|\,.)$ et de norme $\|\ .\ \|$. Notons $I : E \longrightarrow E^*$ l'isomorphisme canonique qui associe, à tout $x \in E$, la forme linéaire $y \mapsto (x\,|\,y)$. Si $x \in E$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$(\forall y \in E) \quad |I(x)(y)| \leqslant \|x\|\ \|y\| ,$$

donc $I(x)$ est continue (d'où $E' = E^*$) et $|||I(x)||| \leqslant \|x\|$. Supposons $x \neq 0_E$ ; alors

$$I(x)\left(\frac{1}{\|x\|} x\right) = \|x\| , \quad \text{et} \quad \left\|\frac{1}{\|x\|} x\right\| = 1 ,$$

donc en fait $|||I(x)||| = \|x\|$. Donc *$I$ est isométrique de E sur* $(E', |||\ .\ |||)$.

***Exemple 4 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, nulles en 0, équipé de la *norme uniforme* $f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. La forme linéaire $I$ sur $E$ qui à $f$ associe $\int_0^1 f$ est continue, car

$$(\forall f \in E) \quad |I(f)| \leqslant \int_0^1 \|f\| = \|f\| .$$

Cela prouve aussi que $|||I||| \leqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \in E$ qui vaut 1 sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et $nx$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ; on a : $\|f_n\| = 1$ et $I(f_n) = 1 - \frac{1}{2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Donc $|||I||| = 1$. Cependant il n'existe aucune $f \in E$ telle que $\|f\| = 1$ et $|I(f)| = 1$, car pour une telle $f$, il faut $I(1-f) = 0$, d'où $f = 1$ sur $[0, 1]$ car $1 - f$ est continue $\geqslant 0$, et cela interdirait $f(0) = 0$.

***Exemple 5 :*** Soit $E$ un $K$-evn non nul, sur lequel nous donnons une forme linéaire $\varphi \neq 0$, de noyau $H$ (rappelons que $H$ est un *hyperplan*). Fixons $a \in E \backslash H$, d'où $E = H \oplus Ka$. Nous allons prouver la relation bien connue (par convention $\frac{1}{0} = +\infty$) :

(1) $\sup\limits_{x \in E,\ \|x\| \leqslant 1} |\varphi(x)| = \dfrac{|\varphi(a)|}{d(a, H)}$, où $d$ désigne la distance de $E$.

Pour abréger, notons $S = \sup\limits_{x \in E,\ \|x\| \leqslant 1} |\varphi(x)|$ $(0 \leqslant S \leqslant +\infty)$. Soit $x \in \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$.

Ecrivons $x = \lambda a + y$ $(\lambda \in K, y \in H)$, d'où $\varphi(x) = \lambda\varphi(a)$. Si $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}x = a - z$, avec $z \in H$, donc $\frac{1}{|\lambda|}\|x\| = \|a - z\| \geqslant d(a, H)$, donc $|\lambda| \leqslant \frac{1}{d(a, H)}$ (car $\|x\| \leqslant 1$). Par suite $S \leqslant \frac{|\varphi(a)|}{d(a, H)}$. Soit maintenant $\varepsilon$ réel $> 0$ : choisissons $z \in H$ tel que $\|a - z\| \leqslant \varepsilon + d(a, H)$. On a :

$$a - z \neq 0\,, \quad \left\| \frac{1}{\|a - z\|}(a - z) \right\| = 1\,,$$

et $$\left| \varphi\left( \frac{1}{\|a - z\|}(a - z) \right) \right| = \frac{1}{\|a - z\|}|\varphi(a)| \geqslant \frac{|\varphi(a)|}{\varepsilon + d(a, H)}\,,$$

d'où $$S \geqslant \frac{|\varphi(a)|}{\varepsilon + d(a, H)}\,.$$

C'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $S \geqslant \frac{|\varphi(a)|}{d(a, H)}$, ce qui achève d'établir (1). Comme application, supposons $H$ *fermé*. Alors $d(a, H) > 0$ ; la relation (1) montre que $\varphi$ est bornée sur $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$, donc $\varphi$ est continue. Réciproquement, si $\varphi$ est continue, $H = \varphi^{-1}(0)$ est fermé (cf. théorème X.5.1). Donc *$\varphi$ est continue ssi $H$ est fermé.*

***Exemple 6 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ équipé de la norme uniforme $\nu_\infty$. Fixons $g \in E \backslash \{0\}$ : elle définit une forme linéaire $\mu_g : f \mapsto \int_0^1 gf$ sur $E$.

Notons $\nu_1$ la norme de la convergence en moyenne sur $E$ $\left(\nu_1(\varphi) = \int_0^1 |\varphi|\right)$. Il est clair que :

$$(\forall f \in E) \quad |\mu_g(f)| \leqslant \int_0^1 |gf| \leqslant \nu_1(g)\,\nu_\infty(f)\,.$$

Donc $\mu_g$ est continue et $|||\mu_g||| \leqslant \nu_1(g)$. Nous allons montrer que $|||\mu_g||| = \nu_1(g)$. Pour cela, soit $U$ l'ouvert $\{x \in\, ]0, 1[\ |\ g(x) \neq 0\}$. Raisonnons dans le cas où $U$ a une infinité de composantes connexes (dans l'autre cas, ce qui suit reste vrai mais se simplifie), et rangeons ces composantes en une suite : $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} =$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\lambda_n = b_n - a_n$, et soit $f_{n,\varepsilon} \in E$ (où $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\varepsilon < 1$ est donné) la fonction continue, nulle en dehors de $\omega$ valant

$$\frac{g(x)}{|g(x)|} \quad \text{sur} \quad \left[a_n + \frac{\lambda_n \varepsilon}{2^{n+2}}, b_n - \frac{\lambda_n \varepsilon}{2^{n+2}}\right],$$

affine sur $\left[a_n, a_n + \frac{\lambda_n \varepsilon}{2^{n+2}}\right]$ et sur $\left[b_n - \frac{\lambda_n \varepsilon}{2^{n+2}}, b_n\right]$. Enfin, soit $S_{n,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{n} f_{k,\varepsilon}$. On a :

$$\int_0^1 g(x)\, S_{n,\varepsilon}(x)\,\mathrm{d}x \underset{n \to \infty}{\uparrow} \int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x = \nu_1(g)\,.$$

Mais $(\forall n)\ \ \nu_\infty(S_{n,\varepsilon}) = 1$ ; donc $|||\mu_g||| \geqslant \nu_1(g)$, ce qui achève d'établir : $|||\mu_g||| = \nu_1(g)$. On a donc construit une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mu : g \mapsto \mu_g$, $(E, \nu_1) \mapsto ((E, \nu_\infty)', |||\ .\ |||)$ qui est *isométrique*.

### Applications multilinéaires continues

**Théorème X.6.5**

*Soit $E_1, \dots, E_n$, $F$ des $K$-evn $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\mu : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ multilinéaire. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de sa topologie produit. Il y a équivalence entre les propriétés :*

(I) *$\mu$ est continue.* (II) *$\mu$ est continue en $0_E$.*

(III) *$\exists C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E$*

$$\|\mu(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant C\, \|x_1\| \times \cdots \times \|x_n\|\,.$$

(IV) *$\mu$ est bornée sur $\tilde{\mathbf{B}}(0_{E_1}, 1) \times \cdots \times \tilde{\mathbf{B}}(0_{E_n}, 1)$.*

(V) *$\mu$ est bornée sur $\mathbf{S}(0_{E_1}, 1) \times \cdots \times \mathbf{S}(0_{E_n}, 1)$.*

*Démonstration* (abrégée) :

Pour éviter des notations encombrantes, traitons seulement le cas $n = 2$. Comme les raisonnements sont très voisins de ceux mis en œuvre au théorème X.6.3, contentons-nous à titre d'exemple de prouver les implications (II) $\Rightarrow$ (III) et (III) $\Rightarrow$ (I). Pour cela définissons la topologie de $E$ par la norme standard $\mathcal{N}((x_1, \dots, x_n)) = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} (\|x_i\|)$.

Supposons (II) vraie : soit $r$ réel $> 0$ tel que $(\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E)$,

$$\mathcal{N}((x_1, \dots, x_n)) \leqslant r \Rightarrow \|\mu(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant 1\,.$$

Si $(x_1, \dots, x_n) \in (E_1 \setminus \{0\}) \times \cdots \times (E_n \setminus \{0\})$, à partir de

$$\mathcal{N}\left(\left(\frac{r}{\|x_1\|} x_1, \dots, \frac{r}{\|x_n\|} x_n\right)\right) \leqslant 1$$

on déduit : $$|\mu(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \frac{1}{r^n} \|x_1\| \dots \|x_n\|\,,$$

et cela reste vrai $\forall (x_1, \dots, x_n)$, d'où (III). Supposons (III) vraie

$n = 2$). Fixons $(a_1, a_2) = a \in E$ ; pour $(x_1, x_2) \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\|\mu(a_1 + x_1, a_2 + x_2) - \mu(a_1, a_2)\| &= \|\mu(x_1, a_2) + \mu(a_1, x_2) + \mu(x_1, x_2)\| \\ &\leqslant C(\|x_1\|\,\|a_2\| + \|a_1\|\,\|x_2\| + \|x_1\|\,\|x_2\|)\,.\end{aligned}$$

Il est bien clair d'après cela que

$$\mu(a_1 + x_1, a_2 + x_2) \underset{\mathcal{N}(x_1, x_2) \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \mu(a_1, a_2)\,.$$

Donc $\mu$ est continue en $a$. ■

Si $\mu$ est fixée, de même qu'au théorème X.6.3, on vérifie que les nombres

$$\sup_{(\forall i)\, x_i \in E_i \text{ et } \|x_i\| \leqslant 1} \|\mu(x_1, \ldots, x_n)\| \ ; \qquad \sup_{(\forall i)\, x_i \in E_i \text{ et } \|x_i\| = 1} \|\mu(x_1, \ldots, x_n)\| \ ;$$

$$\sup_{(\forall i)\, x_i \in E_i \setminus \{0\}} \frac{\|\mu(x_1, \ldots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} \qquad \text{et}$$

$$\operatorname{Min}\,\{C \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x_1 \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \|\mu(x_n, \ldots, x_n)\| \leqslant C\,\|x_1\| \cdots \|x_n\|\}$$

sont égaux. Notons $\mathcal{N}(\mu)$ leur valeur commune.

Notons aussi $\mathcal{ML}_K(E_1, \ldots, E_n\,;F)$ l'ensemble des applications $E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ multilinéaires continues : c'est un sous-$K$-ev du $K$-ev $\mathrm{ML}(E_1, \ldots, E_n\,;F)$ des applications multilinéaires $E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ ; si $(\forall i)$ $E_i =$ un même espace $G$, on notera $\mathcal{ML}_K^n(G\,;F)$ au lieu de $\mathcal{ML}_K(E_1, \ldots, E_n\,;F)$.

La fonction $\mathcal{N}$ définie ci-dessus sur $\mathcal{ML}_K(E_1, \ldots, E_n\,;F)$ est une **norme** (preuve analogue à celle de la proposition X.6.1) dite **associée** à celles des $E_i$ et de $F$, et souvent notée $|||\,.\,|||$ (si aucune confusion n'en résulte).

***Exemple 7 :*** Soit $\mathcal{A}$ une $K$-algèbre non nulle. Une norme $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ est compatible avec la structure d'algèbre de $\mathcal{A}$ ssi le *produit* $\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $(x, y) \longrightarrow x\,.\,y$ de cette $K$-algèbre (qui est $K$-bilinéaire) est *continu*. La norme $\mathcal{N}$ est une *norme d'algèbre* ssi ce produit est continu et vérifie $|||\,\mu\,||| \leqslant 1$.

***Exercice 1 :*** Soit $E$ et $F$ deux $K$-evn et $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $E$ tendant vers $0_E$, la suite $(u(x_n))$ est *bornée*. Montrer que $u$ est continue.

***Exercice 2 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On donne une partie $A$ de $\mathbb{R}$ non vide et *bornée*. Si $P \in E$, soit $\mathcal{N}_A(P) = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

*a*) Vérifier que $\mathcal{N}_A(P) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $P \in E$, et que $\mathcal{N}_A$ est une semi-norme sur $E$. C.N.S. sur $A$ pour que $\mathcal{N}_A$ soit une norme ?

*b*) On suppose $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $A$ et $B$ bornées et non vides tels que $\mathcal{N}_A$ et $\mathcal{N}_B$ soient des normes sur $E$. Comparer ces normes.

*c*) Si $a \in \mathbb{R}$, soit $\delta_a : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto P(a)$ ($\delta_a \in E^*$). On choisit $A \subset \mathbb{R}$, non vide et borné pour que $\mathcal{N}_A$ soit une norme de $E$ ; C.N.S. sur $a \in \mathbb{R}$ pour que $\delta_a$ soit continue ? Si c'est le cas, donner $|||\,\delta_a\,|||$ associée à $\mathcal{N}_A$.

***Exercice 3 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn. On munit $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|||\,.\,|||$ associée à la norme de $E$. On donne $u$ et $v$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

Montrer que $uv - vu \neq \mathrm{Id}_E$.

*Indication :* Si $uv - vu = \mathrm{Id}_E$, calculer $uv^n - v^n u$ pour $n \in \mathbb{N}$.

***Exercice 4 :*** Soit $E$ un $K$-evn, et $P \in K[X]$ de valuation 1.

*a*) Montrer que l'endomorphisme nul est point isolé de l'ensemble $\{u \in \mathscr{L}_K(E) \mid P(u) = 0\}$ (on utilisera à fond la norme $|||\ .\ |||$ de $\mathscr{L}_K(E)$).

*b*) Pourquoi, lorsque $\dim_K(E) \geq 2$, cette propriété devient-elle fausse avec val $(P) \geq 2$ ?

***Exercice 5 :*** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-evn et $f : E \longrightarrow F$ continue. On suppose que pour un réel $M \geq 0$, on a : $(\forall (x, y) \in E^2)\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq M$.

*a*) Si $M = 0$, $f$ est linéaire. Cela reste-t-il vrai avec des $\mathbb{C}$-evn ?

*b*) Si $M > 0$, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $v_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$. Montrer qu'il existe $G : E \longrightarrow F$ telle que $(\forall x \in E)\ v_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} G(x)$. Montrer que $G$ est $\mathbb{R}$-linéaire, continue, et que $G$ est l'unique application $\mathbb{R}$-linéaire $g$ telle que $f - g$ soit bornée.

***Exercice 6 :*** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-evn et $u : E \longrightarrow F$ un *homomorphisme de groupes additifs*. Si $u$ est borné sur $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ montrer que $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Cela reste-t-il vrai avec des $\mathbb{C}$-evn ?

***Exercice 7 :*** Pour les $K$-evn $E$ et $F$, et l'élément $u \in \mathscr{L}_K(E, F)$ spécifiés ci-dessous, calculer la norme $|||u|||$ associée aux normes de $E$ et $F$ :

*a*) $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$ ($p$ et $q$ entiers $\geq 1$), les normes de $E$ et $F$ sont les normes standard $N_1$ (si $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\|x\| = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$ et si $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, $\|y\| = \sum_{j=1}^{q} |y_j|$) et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ est donnée par sa matrice $[a_{ij}]$ dans les bases canoniques.

*b*) $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$ ($p \geq 1, q \geq 1$), les normes de $E$ et $F$ étant respectivement les normes $N_\infty$ et $N_1$ $\left( \|x\| = \operatorname*{Max}_{i=1}^{p} |x_i|,\ \|y\| = \sum_{j=1}^{q} |y_j| \right)$ et $u$ est donnée comme au *a*).

*c*) $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, la norme de $E$ est la norme $\nu_1$ de la convergence en moyenne $\left( \nu_1(f) = \int_0^1 |f| \right)$, et $u$ est la forme linéaire sur $E$ définie par $u(f) = \int_0^1 \alpha f$, où $\alpha \in E$ est fixée.

*d*) $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, la norme de $E$ étant la norme $\nu_p$ de la convergence en moyenne d'ordre $p$ ($p \in ]1, +\infty[$), et $u$ comme au *c*).

*e*) $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, la norme de $E$ et $F$ est la norme uniforme, et $u : E \longrightarrow F$ est l'application $f \mapsto g$ telle que $(\forall x \in [0, 1])\ g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

***Exercice 8 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie $n \geq 1$. On munit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|||\ .\ |||$ associée à la norme donnée $\|\ .\ \|$ de $E$.

*a*) Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ est un projecteur non nul de $E$, montrer que $|||u||| \geq 1$.

*b*) Soit $L$ un sous-$\mathbb{R}$-ev non nul fixé de $E$ et soit $\mathscr{P}_L$ l'ensemble des projecteurs de $E$ d'image $L$. On pose $\omega(L, E) = \inf_{u \in \mathscr{P}_L} (|||u|||)$.

$b_1$) Chercher un exemple où $\omega(L, E) > 1$.

$b_2$) On suppose $E$ *euclidien*. Montrer qu'un projecteur $u$ non nul est orthogonal ssi $|||u||| = 1$. Montrer que $\omega(L, E) = 1$ et qu'il existe alors un et un seul $u \in \mathscr{P}_L$ tel que $|||u||| = 1$.

***Exercice 9*** (théorème de Von Neumann) : Soit $(E, \|\ .\ \|)$ un $\mathbb{R}$-evn. On sait que si la norme de $E$ provient d'un *produit scalaire*, elle vérifie

$$(1) \qquad \forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

On se propose inversement de prouver que si (1) est vraie, la norme de $E$ provient d'un produit scalaire. On suppose donc (1) vraie et on pose :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mid y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

*a*) En remplaçant dans (1) $y$ par $y \pm z$, montrer : $(\forall (x, y, z) \in E^3)$

$$(2) \qquad (x + y \mid z) + (x - y \mid z) = 2(x \mid z),$$

et en déduire $(2x \mid z) = 2(x \mid z)$.

*b*) En posant $x + y = p$, $x - y = q$ dans (2) obtenir :

$$(\forall (p, q, z) \in E^3) \quad (p \mid z) + (q \mid z) = ((p + q) \mid z).$$

*c*) Utilisant la continuité de $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, montrer que $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, et conclure.

***Exercice 10 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn. On munit $\mathscr{L}(E)$ de la norme $|||\ .\ |||$ associée à la norme $\|\ .\ \|$ de $E$. Montrer que l'ensemble des projecteurs de $E$ est un fermé dans $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$. Plus généralement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\{u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E) \mid P(u) = 0\}$ est un fermé de $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

***Exercice 11*** (variante de l'exercice n° 11 du § X.1) : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn non nul.

*a*) On donne un sous-$\mathbb{R}$-ev $F$ strict de $E$ et une forme linéaire $f$ sur $F$, *continue,* telle que $|||f||| \leqslant C$ $(C \geqslant 0)$.

Soit $x \in E \setminus F$. On pose

$$m = \inf_{y \in F} (C\|x + y\| - f(y)), \quad M = \sup_{y \in F} (-C\|x + y\| - f(y)).$$

Montrer que $M \leqslant m$, et en déduire qu'il existe $g$ forme linéaire sur $G = F \oplus \mathbb{R}x$ telle que $|||g||| \leqslant C$.

*b*) On suppose désormais $E$ *de dimension finie*. Soit $F$ un sous-$\mathbb{R}$-ev strict de $E$ et $f$ une forme linéaire continue sur $F$. Déduire de *a*) qu'il existe $g$ forme linéaire continue sur $E$ telle que $|||g||| = |||f|||$. (N.B. On verra au Chapitre XI que toute forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie est nécessairement continue, *i.e.* que $E' = E^*$). Soit alors $(E'', |||\ .\ |||)$ le dual topologique de $(E', |||\ .\ |||)$ (donc $E'' = E^{**}$, $E' = E^*$). Montrer que la bijection canonique $J_E : E \longrightarrow E^{**}$ (qui envoie $x$ sur la forme linéaire $\varphi \mapsto \varphi(x)$ sur $E' = E^*$) est *isométrique* de $(E, \|\ .\ \|)$ sur $(E'', |||\ .\ |||)$.

# *Chapitre XI*

# *COMPACITÉ, COMPLÉTUDE, CONNEXITÉ*

## § XI.1 *ESPACES COMPACTS*

### Recouvrements ouverts ; axiome de Borel-Lebesgue

Dans un ensemble $E$, on appelle **recouvrement** de $E$ toute famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de $E$, telle que $\bigcup_{i \in I} X_i = E$ ; une sous-famille d'un recouvrement est un **sous-recouvrement** ssi elle forme encore un recouvrement.

Si $E$ est un espace topologique, on appelle **recouvrement ouvert** de $E$ tout recouvrement $(X_i)_{i \in I}$ où chaque $X_i$ est ouvert dans $E$.

Soit maintenant $F$ une partie de cet espace $E$ : pour qu'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'ouverts de $E$ *recouvre* $F$, c'est-à-dire vérifie $F \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, il faut et il suffit que la famille $(X_i \cap F)_{i \in I}$ soit un recouvrement ouvert du *sous-espace* $F$. Réciproquement tout recouvrement ouvert du sous-espace $F$ est obtenu de cette manière, par définition des ouverts relatifs dans $F$.

Dans un espace topologique $E$, on appelle **axiome de Borel-Lebesgue** l'axiome suivant :

(BL) *Pour* **tout** *recouvrement ouvert* $(\omega_i)_{i \in I}$ *de* $E$, *il existe au moins un sous-recouvrement* **fini** (*i.e.* il existe $J \subset I$, ($J$ fini), tel que $E = \bigcup_{i \in J} \omega_i$).

**Définition XI.1.1**

*Un espace topologique $E$ (séparé) est dit* **compact** *ssi il vérifie l'axiome* (BL). *Une partie $F$ de $E$ est dite* **compacte** *ssi c'est un espace compact pour la topologie induite.*

En vertu des considérations précédentes, *$F$ est une partie compacte de $E$ ssi, pour toute famille d'ouverts de $E$ qui recouvre $F$, il existe au moins une sous-famille finie qui recouvre encore $F$.*

***Exemple 1 :*** Nous avons vu (cf. théorème III.2.6) que les parties compactes de $\mathbb{R}$ usuel (qui n'est pas un espace compact) en sont les parties *fermées et bornées*.

### Axiome dual de (BL)

Soit $E$ un espace topologique. Par *dualité* dans $\mathcal{P}(E)$ les ouverts correspondent aux fermés, et l'union correspond à l'intersection. Donc (BL) équivaut à :

(BL*) *Pour* **toute** *famille* $(X_i)_{i \in I}$ *de fermés de E telle que* $\bigcap_{i \in I} X_i = \varnothing$ *, il existe au moins une sous-famille* **finie** $(X_i)_{i \in J}$ *telle que* $\bigcap_{i \in J} X_i = \varnothing$ .

Nous nous référerons à (BL*) sous le nom d'axiome de Borel-Lebesgue **sous forme duale** (ou : *pour les fermés*).

### Propriétés élémentaires des espaces compacts

**THÉORÈME XI.1.1**

> *Soit E un espace topologique.*
> (I) *Si E est compact, toute partie* fermée *F de E est compacte.*
> (II) *Si F est une partie compacte de E, F est fermée.*

*Démonstration :*

(I) Vérifions (BL*) pour le sous-espace $F$. Soit donc $(X_i)_{i \in I}$, famille de fermés *de* $F$ telle que $\bigcap_{i \in I} X_i = \varnothing$ . Puisque $F$ est fermé dans $E$, chaque $X_i$ est fermé *dans* $E$ ; donc (BL*) s'applique aux $X_i$ et fournit $J$, partie finie de $I$, telle que $\bigcap_{i \in J} X_i = \varnothing$ .

(II) Montrons que $U = E \setminus F$ est ouvert : si $a \in U$, pour chaque $x \in F$, choisissons $\omega_x$ et $S_x$ ouverts de $E$ *disjoints* tels que $x \in \omega_x$ et $a \in S_x$ (axiome de Hausdorff pour $E$). On a $F \subset \bigcup_{x \in F} \omega_x$ ; donc, par (BL), on a une partie finie $J$ de $F$ telle que $F \subset \bigcup_{x \in J} \omega_x$. Posons $S = \bigcap_{x \in J} S_x$ et $\omega = \bigcup_{x \in J} \omega_x$. Alors $\omega \cap S = \varnothing$ , donc $S \subset U$, et $S$ est un voisinage de $a$, donc $U$ aussi. Ainsi $U$ est voisinage de chacun de ses points, donc ouvert. ■

***Remarque 1 :*** La deuxième partie de cette preuve établit que, dans un espace topologique, étant donnés un point $a$ et une partie compacte $F$ telle que $a \notin F$, il existe deux ouverts $\omega$ et $S$ *séparant* $a$ et $F$, c'est-à-dire : $a \in S$, $F \subset \omega$ et $S \cap \omega = \varnothing$ .

**COROLLAIRE**

> *Dans un* espace compact, *les parties compactes sont les parties fermées.*

Une conséquence évidente de (BL*) est (se reporter au corollaire du théorème III.2.6 pour une preuve détaillée) :

**PROPOSITION XI.1.1**

> *Soit* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite* **décroissante pour l'inclusion** *de parties* **fermées, non vides** *d'un espace* **compact.** *Alors* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \varnothing$ .

**THÉORÈME XI.1.2**

> *Soit E et F deux espaces topologiques et* $f : E \longrightarrow F$. *Si f est* **continue** *et si E est* **compact,** *alors* $\boldsymbol{f(E)}$ **est compact** *dans F.*

*Démonstration :*

Il suffit de vérifier (BL) pour $f(E)$ : soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $F$ recouvrant $f(E)$. Pour tout $i \in I$, l'ensemble $X_i = f^{-1}(Y_i)$ est ouvert dans $E$. Comme

$$f(E) \subset \bigcup_{i \in I} Y_i \,, \quad \text{on a :} \quad \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} Y_i\Big) = E \,.$$

D'après (BL) appliqué aux $X_i$ dans $E$, il existe $J \subset I$, $J$ *fini*, tel que $\bigcup_{i \in J} X_i = E$. Alors

$$f\Big(\bigcup_{i \in J} X_i\Big) = \bigcup_{i \in I} f(X_i) = f(E) \subset \bigcup_{i \in J} Y_i \,,$$

car $$(\forall i) \quad f(f^{-1}(Y_i)) \subset Y_i \,. \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE 1**

> *Avec les notations et hypothèses du théorème* XI.1.2, *l'application f est* **fermée,** *c'est-à-dire vérifie : pour tout fermé X de E,* $f(X)$ *est fermé dans F.*

*Démonstration :*

$E$ étant compact, si $X$ est fermé dans $E$, il est compact dans $E$ (cf. théorème XI.1.1). Donc $f(X)$ est compact dans $F$ (théorème XI.1.2 appliqué à $f|_X$), donc fermé dans $F$ (théorème XI.1.1). $\blacksquare$

**COROLLAIRE 2**

> *Toute* **bijection continue** *f d'un espace topologique E* **compact** *sur un espace topologique F est un* **homéomorphisme.**

*Démonstration :*

Soit $g = f^{\langle -1 \rangle}$. Pour toute partie fermée $X$ de $E$, on a $g^{-1}(X) = f(X)$, donc (cf. corollaire 1 ci-dessus), $g^{-1}(X)$ est fermé dans $F$. Donc $g$ est continue d'après le théorème X.5.1 ■

**COROLLAIRE 3**

> *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$* **continue,** *où $E$ est un espace topologique* **compact et non vide.** *Alors $f$ possède un* **maximum** *et un* **minimum.** *(En particulier, si $f(E) \subset \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(E) \subset [\alpha, +\infty[$).*

*Démonstration :*

$f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}$, donc fermé et borné dans $\mathbb{R}$, et $f(E) \neq \varnothing$ car $E \neq \varnothing$. La conclusion en découle (cf. exemple 4, § III.3). ■

**THÉORÈME XI.1.3**

> *Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques, $A$ une partie non vide de $E$, $a \in \mathrm{Adh}_E(A)$ et $f : A \longrightarrow F$, $F$ étant supposé* **compact.**
>
> (I) *$f$ possède en $a$ au moins une valeur d'adhérence.*
>
> (II) *Soit $\mathscr{A}_{f,a}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f$ en $a$. Pour que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, il faut et il suffit que $\mathscr{A}_{f,a}$ soit un singleton $\{l\}$. Si c'est le cas, $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.*

*Démonstration :*

(I) Soit $\mathfrak{V}$ l'ensemble des voisinages de $a$ dans $E$. On sait que $\mathscr{A}_{f,a} = \bigcap\limits_{V \in \mathfrak{V}} \overline{f(U \cap A)}$. Si $\mathscr{A}_{f,a}$ était vide, on aurait $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_n$ éléments de $\mathfrak{V}$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{f(U_i \cap A)} = \varnothing$ (cf. (BL*)). Or,

$$f(A \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n) \subset \overline{f(A \cap U_1 \cap \dots \cap U_n)} \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n} f(U_i \cap A)}$$
$$\subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{f(U_i \cap A)} = \varnothing\ ,$$

On aurait donc $A \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_n) = \varnothing$, ce qui est absurde car $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathfrak{V}$. Donc $\mathscr{A}_{f,a} \neq \varnothing$.

(II) Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ $(l \in F)$, on sait que $\mathscr{A}_{f,a} = \{l\}$ (cf. § X.4). Réciproquement, supposons $\mathscr{A}_{f,a} = \{l\}$ $(l \in F)$. Soit $V$ un voisinage *ouvert* de $l$. Posons $G = F \setminus V$ : puisque $G$ est fermé dans $F$, c'est un compact de $F$. Notons $B = f^{-1}(G)$, et $\varphi = (f|_B)|^G$. Si l'on avait $a \in \mathrm{Adh}_E(B)$, $\varphi$ admettrait en $a$ au moins une valeur d'adhérence (appliquer (I) à $\varphi$), qui serait donc valeur d'adhérence de $f$ en $a$ (cf. § X.4), contrairement au fait que $\mathscr{A}_{f,a} = \{l\}$. Donc $a \notin \mathrm{Adh}_E(B)$. Soit donc un ouvert $U$ de $E$ tel que $a \in U \subset E \setminus B$ : il est sûr que $f(U) \subset V$. Donc $f(x) \longrightarrow l$. ■

Une importante conséquence est que, **dans un espace compact, toute suite admet au moins une valeur d'adhérence.**

### Compacité dans les espaces métrisables

Soit $E$ un espace topologique *métrisable*. On sait (cf. § X.4) que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)$ de $E$ est l'ensemble des limites des suites convergentes extraites de $(u_n)$.

**THÉORÈME XI.1.4**

> *Pour qu'un espace topologique* **métrisable** *E soit* **compact,** *il faut et il suffit qu'il vérifie l'axiome suivant (dit* de Bolzano-Weierstrass, *et appelé axiome de* **compacité séquentielle)** *:*
>
> (BW) *De toute suite de points de E, on peut extraire au moins une suite convergente.*

L'axiome (BW) signifie (cf. § X.4) que *toute suite de E admet au moins une valeur d'adhérence.*

Le théorème XI.1.3 a montré que *tout espace compact E, métrisable ou non, vérifie* (BW). Le théorème XI.1.4 prouvera que, *si E est métrisable, on a dans E l'équivalence :* (BL) $\Leftrightarrow$ (BW).

*Démonstration du théorème* XI.1.4 :

L'implication (BL) $\Rightarrow$ (BW) ayant déjà été établie, il s'agit de voir que, si $E$ vérifie (BW), il vérifie (BL). Définissons la topologie de l'espace métrisable $E$ par une distance $d$.

*a*) Soit $\varepsilon$ réel $>0$. Montrons : $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_1, \ldots, a_n$ éléments de $E \mid \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{B}}(a_i, \varepsilon) = E$. En effet, si ce n'était pas le cas, par récurrence sur $n$, on construirait une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ a_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{\mathbf{B}}(a_i, \varepsilon)$. Aucune suite extraite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $(a_i)$ ne peut converger, car,

$$(\forall (k, l) \in \mathbb{N}^{*2}) \quad (k \neq l) \Rightarrow d(b_k, b_l) \geqslant \varepsilon\ .$$

Donc la suite $(a_i)$ mettrait (BW) en échec, d'où par l'absurde la propriété souhaitée.

*b*) Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $E$. Nous allons en extraire un sous-recouvrement fini.

1^re^ *étape :* Montrons l'existence de $\varepsilon$ réel $>0$ tel que $(\forall a \in E)$ $\exists i \in I \mid \tilde{\mathbf{B}}(a, \varepsilon) \subset \omega_i$. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on aurait $a_n \in E$ tel que $(\forall i \in I)$ $\tilde{\mathbf{B}}\left(a_n, \dfrac{1}{n}\right) \not\subset \omega_i$. On pourrait alors extraire de la suite $(a_n)$ une suite $(b_k) = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$convergente, de limite $a$. On aurait $i_0 \in I$ tel que $a \in \omega_{i_0}$, d'où $r$ réel $>0$ pour lequel $\tilde{\mathbf{B}}(a, r) \subset \omega_{i_0}$. Choisissant $k \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_k} \leqslant \dfrac{r}{3}$ et $d(a, a_{n_k}) \leqslant \dfrac{r}{3}$, on en déduirait $\tilde{\mathbf{B}}\left(a_{n_k}, \dfrac{1}{n_k}\right) \subset \omega_{i_0}$, ce qui est contraire au choix des $(a_n)$ ; d'où, par l'absurde, l'existence de $\varepsilon$ (un tel $\varepsilon$ s'appelle un *nombre de Lebesgue* du recouvrement $(\omega_i)$).

2[e] *étape :* Choisissons donc un *nombre de Lebesgue* $\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ de $(\omega_i)_{i \in I}$. Puis choisissons $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $E$ tels que $\bigcup_{k=1}^{n} \tilde{\mathbf{B}}(a_k, \varepsilon) = E$ (cf. $(a)$). Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, soit $i_k \in I$ tel que $\tilde{\mathbf{B}}(a_k, \varepsilon) \subset \omega_{i_k}$. Alors $\bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k} = E$. ■

***Remarque 2 :*** Dans un espace métrique compact $E$, l'existence, pour un recouvrement ouvert $(\omega_i)_{i \in I}$ donné, d'un nombre de Lebesgue $\varepsilon$, est une conséquence très simple de (BL) (cf. $(a)$). La difficulté de la preuve du théorème XI.1.4 a consisté à déduire directement de (BW) cette existence.

***Remarque 3 :*** En réétudiant le § III.3, le lecteur n'aura aucune peine à établir l'équivalence, dans un espace topologique *métrisable* $E$, de (BW) avec (BW′) :

(BW′) *Toute partie infinie de E admet au moins un point d'accumulation.*

**THÉORÈME XI.1.5**

*Soit $E_1, \ldots, E_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des espaces topologiques* ***métrisables*** *et* ***compacts.*** *Leur* ***produit topologique*** *E (qui est, on le sait, métrisable), est* ***compact.***

*Démonstration :*

Comme $E$ est métrisable, il s'agit d'y vérifier (BW). Soit donc $(X_p)_{p \in \mathbb{N}} = (X_{p,1}, X_{p,2}, \ldots, X_{p,n})_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $E$ $(\forall (p, k)\ X_{p,k} \in E_k)$. Appliquant (BW) dans $E_1$, on obtient une partie infinie $J_1$ de $\mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(X_{p,1})_{p \in J_1}$ de $(X_{p,1})_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $E_1$, disons vers $l_1$. Opérant de même dans $E_2$, mais *à partir de la suite* $(X_{p,2})_{p \in J_1}$, on obtient $J_2 \subset J_1$, $J_2$ infinie, telle que la suite $(X_{p,2})_{p \in J_2}$ converge dans $E_2$, disons vers $l_2$. Par récurrence, on obtient des parties *infinies* $J_1, \ldots, J_n$ de $\mathbb{N}$ telles que $J_n \subset J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1$, et $l_1 \in E_1$, $l_2 \in E_2, \ldots, l_n \in E_n$, avec : $(\forall k \in [\![1, n]\!])$ la suite $(X_{p,k})_{p \in J_k}$ converge dans $E_k$ vers $l_k$. Soit la suite extraite $(X_p)_{p \in J_n}$ de $(X_p)$. Pour chaque $k$, la suite de ses $k$-ièmes coordonnées converge dans $E_k$ vers $l_k$, donc (proposition X.4.1 (II)), la suite $(X_p)_{p \in J_n}$ converge dans $E$ vers $l = (l_1, \ldots, l_n)$. ■

***Remarque 4 :*** De manière générale, un produit topologique d'un nombre fini d'espaces compacts (métrisables ou non) est compact (cf. [11]).

**COROLLAIRE**

*Dans $K^n$ usuel $(n \in \mathbb{N}^*)$, les parties* ***compactes*** *sont les parties* ***fermées et bornées.***

*Démonstration :*

On peut supposer $K = \mathbb{R}$ (cf. § X.2, exemple 9). Soit $E$ une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. On sait qu'elle est fermée. En app au recouvrement de $E$ par les ouverts $(]-k, k[^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on voit que $E$ est bornée.

Réciproquement, si $E$ est bornée et fermée dans $\mathbb{R}^n$, soit $A$ réel $> 0$ tel que $E \subset [-A, A]^n$. Comme $[-A, A]$ est compact dans $\mathbb{R}$, le pavé $[-A, A]^n$ de $\mathbb{R}^n$ est compact (théorème XI.1.5 et fin du § II.6) ; mais $E$, fermée dans $\mathbb{R}^n$, l'est aussi dans $[-A, A]^n$, donc est aussi compacte (théorème XI.1.1). ■

La matière essentielle de ce corollaire a été vue avec le théorème III.3.8). Ce corollaire est d'une importance primordiale en Analyse réelle (cf. par exemple le théorème V.4.2).

**Théorème XI.1.6**

*Toute application* **continue** *$f$ d'un espace* **métrique compact** *$(E_1, d_1)$ dans un espace* **métrique** *$(E_2, d_2)$ est* **uniformément continue.**

*Démonstration :*

Prouvons-le par l'absurde : sinon il y aurait un $\varepsilon$ réel $> 0$ tel que $(\forall \alpha \text{ réel} > 0)\ \exists (x, y) \in E_1^2 \mid d_1(x, y) \leqslant \alpha$ et $d_2(f(x), f(y)) > \varepsilon$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_n \in E_1$ et $y_n \in E_1$ tels que $d_1(x_n, y_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $d_2(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Extrayons de $(x_n)$ une suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers $a \in E$. Alors $y_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a$, puisque $d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Il en découle (continuité de $f$, et propriété $(\mathrm{L}_2)$ du § X.4) :

$$f(x_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a), \quad f(y_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a), \text{ d'où } d_2(f(x_{n_k}), \quad f(y_{n_k})) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui contredit $(\forall k)\ d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) > \varepsilon$. ■

### Equivalence des normes en dimension finie

Le théorème qui va suivre est la plus puissante application du corollaire du théorème XI.1.5.

**Théorème XI.1.7**

*Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.* ***Toutes les normes de E sont équivalentes entre elles,*** *et $E$ admet au moins une norme.*

*Démonstration :*

Si $K = \mathbb{C}$, toute norme de $E$ est une norme de $E_{(\mathbb{R})}$, $\mathbb{R}$-ev déduit de $E$ par restriction des scalaires, qui est aussi de dimension finie. On peut donc supposer $K = \mathbb{R}$. Fixons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev que définit $\mathscr{B}$. Noto[illegible]

$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\mathrm{Max}} |x_i|$ de $\mathbb{R}^n$. Alors $N = \nu \circ \varphi^{\langle -1 \rangle}$ est une norme de $E$ (on a donc déjà prouvé que $E$ admet au moins une norme). Posons

$$\mathfrak{S} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \nu(x_1, \ldots, x_n) = 1\} \text{ et } S = \varphi(\mathfrak{S}) = \{x \in E \mid N(x) = 1\} .$$

La norme $\nu$ définit la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ et puisque $\nu$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ (théorème X.6.1), $\mathfrak{S} = \nu^{-1}(1)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ ; en outre $\mathfrak{S}$ est bornée, donc c'est une *partie compacte* de $\mathbb{R}^n$, et $\mathfrak{S} \neq \varnothing$ car $n \geqslant 1$. Comme $\varphi : (\mathbb{R}^n, \nu) \longrightarrow (E, N)$ est isométrique, $\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ usuel sur $(E, N)$. Donc $S = \varphi(\mathfrak{S})$ est compact dans $(E, N)$.

Soit alors $\mathcal{N}$ une norme de $E$. Prouvons que $\mathcal{N}$ est continue sur $(E, N)$ : en fait, pour $x = \sum x_i e_i \in E$, on a : $\mathcal{N}(x) \leqslant \sum |x_i| \mathcal{N}(e_i) \leqslant CN(x)$ ($C$ désignant $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}(e_i)$), d'où

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leqslant \mathcal{N}(x - y) \leqslant CN(x - y) ,$$

d'où $\mathcal{N}$ est $\mathrm{Lip}_C$ sur $(E, N)$, donc continue. On en déduit que, sur le compact non vide $S$, $\mathcal{N}$ possède un maximum $b$ et un minimum $a$. Mais $x \in S \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \mathcal{N}(x) > 0$, donc $0 < a \leqslant b$. Si alors $x \in E \setminus \{0_E\}$, de : $N\left(\frac{1}{N(x)} x\right) = 1$, on tire par ce qui précède :

$$a \leqslant \mathcal{N}\left(\frac{1}{N(x)} x\right) \leqslant b , \quad \text{d'où} \quad aN(x) \leqslant \mathcal{N}(x) \leqslant bN(x) ,$$

relation qui reste encore vraie pour $x = 0_E$. Finalement, $aN \leqslant \mathcal{N} \leqslant bN$, ce qui prouve l'équivalence des normes $\mathcal{N}$ et $N$. ■

Voici quelques conséquences immédiates de ce théorème :

**COROLLAIRE 1**

*Sur un $K$-ev de dimension finie, toutes les normes définissent la même topologie.*

Cette topologie s'appelle la **topologie des normes** sur $E$. Par exemple, sur $K^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), la topologie des normes est la topologie usuelle !

*Un $K$-ev de dimension finie sera toujours tacitement équipé de sa topologie des normes.*

**COROLLAIRE 2**

*Dans un $K$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, toutes les normes définissent les mêmes ensembles bornés (on les appelle **bornés de E**). Pour toute base $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $E$, l'isomorphisme de $K$-ev $\varphi_{\mathscr{B}} : K^n \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$ est un **homéomorphisme** de $K^n$ usuel sur $E$, qui établit une bijection entre les bornés de $K^n$ et ceux de $E$.*

**COROLLAIRE 3**

*Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie. Les parties **compactes** de $E$ en sont les parties **fermées et bornées.***

(C'est une conséquence évidente du théorème XI.1.5 et du corollaire 2 ci-dessus).

Voici une conséquence importante du corollaire 2, et de la proposition X.4.1 (II) :

**COROLLAIRE 4**

*Considérons un K-ev E de dimension finie $n \geq 1$, muni de la topologie des normes. Soit T un espace topologique, A une partie non vide de T, $a \in \mathrm{Adh}_T(A)$, et $f : A \longrightarrow E$. Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, si $f_1, \ldots, f_n$ sont les composantes de f dans $\mathscr{B}$ ($\forall x \in T$, $f(x) = \sum f_i(x)\, e_i$), la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ existe ssi ($\forall i$) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f_i(x)$ existe ; et lorsque c'est le cas, on a :*

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left( \lim_{x \longrightarrow a} f_i(x) \right) e_i \, .$$

**COROLLAIRE 5**

*Soit E et F deux K-evn, avec E* de dimension finie. *Alors* $\mathscr{L}_K(E, F) = \mathrm{Hom}_K(E, F)$.

*Démonstration :*

Cela signifie que tout $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$ est une application *continue*. Soit en effet $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $E$ et $u \in \mathrm{Hom}_K(E, F)$ donné. Notons $\mathscr{N}$ la norme $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, e_i \mapsto \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ de $E$, et $\| \cdot \|$ les normes données sur $E$ et $F$. On a, pour $x = \sum x_i\, e_i \in E$ :

$$\|u(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|u(e_i)\| \leq A \mathscr{N}(x) \, , \quad \text{où} \quad A = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\| \, .$$

Pour $C \in \mathbb{R}_+^*$ convenable, on sait que $\mathscr{N}(x) \leq C \|x\|$ ($\forall x \in E$), d'où $\|u(x)\| \leq AC \|x\|$, donc $u$ est une application continue. ■

Si $E$ et $F$ sont des $K$-evn tous deux de dimension finie, il est commode de définir la topologie de $\mathscr{L}_K(E, F) = \mathrm{Hom}_K(E, F)$ (qui est aussi de dimension finie) par la norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ associée à celles de $E$ et $F$.

***Exemple 2 :*** Soit $E$ un $K$-evn de dimension finie $n \geq 1$, $F$ un $K$-evn et $u \in \mathscr{L}_K(E, F) = \mathrm{Hom}_K(E, F)$. Notons $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ la norme de $\mathscr{L}_K(E, F)$ associée à celles de $E$ et $F$. La sphère unité $\mathbf{S}(0_E, 1)$ de $E$ est *non vide et compacte* (corollaire 3 du théorème XI.1.7, le fait que $\mathbf{S}(0_E, 1)$ est fermée découlant de la continuité sur $E$ de la norme de $E$).

$E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|u(x)\|$ est continue, donc admet sur $\mathbf{S}(0_E, 1)$ un maximum (corollaire 3 du théorème XI.1.2). On sait que $|\!|\!| u |\!|\!| = \sup\limits_{x \in \mathbf{S}(0_E, 1)} \|u(x)\|$.

Donc en fait, ici, $|\!|\!| u |\!|\!| = \operatorname*{Max}\limits_{x \in \mathbf{S}(0_E, 1)} \|u(x)\|$.

**COROLLAIRE 6**

> *Soit $E_1, \ldots, E_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des $K$-*ev *non nuls de dimension finie, et $F$ un $K$-*evn. *Toute application multilinéaire $\mu : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ est continue. En conséquence, si $\mathscr{A}$ est une $K$-algèbre de dimension finie $p \geqslant 1$ (c'est-à-dire le $K$-*ev *$\mathscr{A}$ est de dimension $p$), le produit $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathscr{A}$ est continu sur $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$, donc toute norme de $\mathscr{A}$ est compatible avec sa structure d'algèbre, et il existe* au moins une norme d'algèbre *sur $\mathscr{A}$ (voir fin du* § X.1).

*Démonstration :*

Traitons le cas $p = 2$, pour éviter des notations trop encombrantes. Soit $\mathscr{B}_i = (e_{1,i}, \ldots, e_{n_i, i})$ $(i = 1$ ou $2$, $n_i \in \mathbb{N}^*)$ une base de $E_i$. Définissons la topologie des normes de $E_1 \times E_2$ par la norme

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \operatorname{Max}\left( \operatorname*{Max}_{k=1}^{n_1} |x_k|, \operatorname*{Max}_{l=1}^{n_2} |y_l| \right)$$

pour $\qquad x = \sum\limits_k x_k\, e_{k,1} \in E_1 \quad$ et $\quad y = \sum\limits_l y_l\, e_{l,2} \in E_2$.

$$\text{Alors } \|\mu(x, y)\| = \left\| \sum_{k,l} x_k\, y_l\, \mu(e_{k,1}, e_{l,2}) \right\| \leqslant C \left( \sum_{k,l} |x_k|\,|y_l| \right),$$

où $\quad C = \operatorname*{Max}\limits_{k,l} \|\mu(e_{k,1}, e_{l,2})\|$, $\quad$ d'où $\quad \|\mu(x, y)\| \leqslant C n_1 n_2 \|(x, y)\|$,

ce qui prouve la continuité annoncée, en vertu du théorème X.6.5. ■

Avec les notations ci-dessus, on remarquera que *si $F$ est aussi de dimension finie, $\mu$ est nécessairement polynomiale sur $E_1 \times \cdots \times E_p$.* En effet, nous en tenant au cas $p = 2$, notant $(\varepsilon_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ une base de $F$ et, pour tout $(k, l) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!]$, $\mu(e_{k,1}, e_{l,2}) = \sum\limits_{j=1}^{q} \lambda_{klj}\, \varepsilon_j$ $(\lambda_{klj} \in K)$, on voit que

$$\mu(x, y) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x, y)\, \varepsilon_j\,, \quad \text{où} \quad (\forall j) \quad f_j(x, y) = \sum_{(k,l) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_2]\!]} \lambda_{klj}\, x_k\, y_l\,,$$

ce qui prouve bien que chaque $f_j$ est polynomiale sur $E_1 \times E_2$.

**COROLLAIRE 7**

> *Soit $F$ un sous-$K$-*ev *de dimension finie d'un $K$-*evn *$E$ $(F \neq E)$. Pour tout $x \in E \setminus F$, il existe $y_0 \in F$ tel que $\|(x - y_0)\|$ = distance de $x$ à $F$. En particulier, $F$ est fermé dans $E$.*

*Démonstration :*

Donnons $x \in E \setminus F$. L'ensemble $L = F \cap \tilde{\mathbf{B}}(x, \|x\|)$ est borné et fermé non vide ($0_E \in F$) dans le sous-$K$-evn $F$ de $E$, qui est de dimension finie. Donc (corollaire 3 ci-dessus) $L$ est compact dans $F$, donc dans $E$. Par suite la fonction continue $y \mapsto \|x - y\|$ admet sur $L$ un *minimum*. Soit $y_0 \in L$ tel que $(\forall y \in L)\ \|x - y_0\| \leq \|x - y\|$. Alors $(\forall y \in F)\ \|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ (évident si $y \in L$ ; sinon $\|x - y_0\| \leq \|x - 0_E\| \leq \|x - y\|$). Enfin, puisque $x \notin F$, cela prouve que $\|x - y_0\| > 0$. ■

***Remarque 5 :*** En général, il n'y a pas unicité du $y_0$ figurant dans le corollaire 7.

**Le théorème de Riesz**

On a vu, avec le corollaire 3 du théorème XI.1.7, que les boules fermées d'un $K$-evn de dimension finie sont compactes. Cette propriété caractérise les $K$-ev de dimension finie.

**Théorème XI.1.8** (Fr. Riesz)

*Soit $E$ un $K$-evn non nul où la **boule unité** $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ est **compacte**. Alors $E$ est **de dimension finie.***

*Démonstration :*

Supposons $E$ de dimension infinie ; soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Le vecteur $e_1 = \dfrac{1}{\|x\|} x$ est de norme 1. Posons $e_0 = 0_E$ et notons $d$ la distance de $E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construits $e_1, \dots, e_n$ de norme 1 dans $E$ tels que $(\forall k \in [\![1, n]\!]$ $d(e_k, \text{Vect } (e_i)_{0 \leq i < k}) = 1$. Soit $x \in E \setminus \text{Vect } (e_1, \dots, e_n)$ ($x$ existe car $E$ est de dimension infinie). Choisissons $y \in \text{Vect } (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\|x - y\| = d(x, \text{Vect } (e_1, \dots, e_n))$ (corollaire 5 ci-dessus). Posant $e_{n+1} = \dfrac{1}{\|x - y\|}(x - y)$, on a

$$\|e_{n+1}\| = 1 \quad \text{et} \quad d(e_{n+1}, \text{Vect } (e_1, \dots, e_n)) = 1 .$$

Par récurrence on a donc une suite infinie $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant ces propriétés à tout rang $n$. On voit : $(\forall n)\ e_n \in \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$, et $(\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2)\ \|e_n - e_p\| \geq 1$. On ne peut donc extraire de $(e_n)$ aucune suite convergente. Donc $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$ n'est pas compacte. ■

Ce théorème donne une *caractérisation topologique* de la finitude de la dimension d'un $K$-evn, sans avoir besoin de connaître la *valeur* de cette dimension. En effet, compte tenu du corollaire 3 du théorème XI.1.7 et du théorème XI.1.8, *pour qu'un $K$-evn soit de dimension finie, il faut et il suffit que sa boule unité fermée soit compacte.*

***Exercice 1 :*** Soit $E$ un espace topologique *compact* et $A$, $B$ deux parties de $E$ *fermées et disjointes*. Montrer qu'il existe des ouverts $U$ et $V$ de $E$ *disjoints* tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

***Exercice 2 :*** Soit $E$ un espace topologique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $E$.

*a*) Si la suite $(u_n)$ converge dans $E$ vers $l \in E$, l'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{l\}$ est un compact de $E$.

*b*) On suppose $(E, d)$ métrique, et que pour un compact non vide $L$ de $E$, on ait $d(u_n, L) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}$ des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est contenu dans $L$ et que $\mathscr{A} \cup \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est compact.

***Exercice 3 :*** Montrer que tout espace métrique compact $(E, d)$ est séparable.

*Indication :* Revoir la preuve du théorème XI.1.4 ; pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ soit $J_n$ une partie finie de $E$ telle que $\bigcup_{x \in J_n} \tilde{\mathbf{B}}\left(x, \frac{1}{n}\right) = E$. Etudier alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} J_n$.

***Exercice 4 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact. On donne dans $E$ une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, décroissante pour l'inclusion, de compacts non vides ; soit $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que $\operatorname{diam}(A_n) \underset{n \to \infty}{\downarrow} \operatorname{diam}(A)$.

***Exercice 5 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact et $(A_n)$ une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides de $E$. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ continue. Montrer : $\varphi\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi(A_n)$.

***Exercice 6 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique. Montrer l'équivalence entre (1) et (2).

(1) $(E, d)$ est compact.

(2) De tout recouvrement ouvert *dénombrable* de $E$, on peut extraire un recouvrement fini.

*Indication :* Cf. exercice 1 du § X.2.

***Exercice 7 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique, $L$ une partie compacte de $E$, et $D$ une partie de $L$ *dense dans* $L$. Montrer : pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une partie finie $J$ *de* $D$ telle que $L \subset \bigcup_{x \in J} \tilde{\mathbf{B}}(x, \varepsilon)$.

***Exercice 8 :*** Soit $X$ un espace topologique compact non vide. On se propose d'étudier les *idéaux maximaux* de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$ des fonctions continues : $X \longrightarrow \mathbb{R}$ (*i.e.* les idéaux $\mathfrak{M}$ de l'anneau $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$ tels que $\mathfrak{M} \neq \mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$ et que les seuls idéaux $\mathfrak{N}$ contenant $\mathfrak{M}$ soient $\mathfrak{M}$ et $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$).

*a*) Soit $a \in X$ ; l'ensemble $\mathfrak{M}_a = \{f \in \mathscr{C}^0(X, \mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ est un idéal maximal, et *l'anneau quotient* (cf. tome 1, § VII.7) $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})/_{\mathfrak{M}_a}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

*b*) Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$.

On pose $\mathscr{V}(\mathfrak{M}) = \{x \in X \mid \forall f \in \mathfrak{M}, f(x) = 0\}$. Prouver que $\mathscr{V}(\mathfrak{M})$ est un fermé non vide de $X$. En déduire : les seuls idéaux maximaux de $\mathscr{C}^0(X, \mathbb{R})$ sont ceux définis au *a*).

*c*) Montrer que si $X$ est *métrisable,* l'application $a \mapsto \mathfrak{M}_a$ (définie sur $X$ en *a*)) est *injective.*

*Indication :* Soit $d$ une distance compatible avec la topologie de $X$. Considérer des fonctions du type $x \mapsto d(x, a)$.

***Exercice 9 :*** Un espace topologique (séparé) est dit *localement compact* ssi chacun de ses points admet au moins un voisinage compact. Montrer que, dans un tel espace, tout point admet une *base* de voisinages compacts.

***Exercice 10 :*** Soit $X$ un espace topologique et $Y$ un espace *localement compact* (cf. exercice 9). On donne $f : X \longrightarrow Y$ *continue* et telle que, pour tout compact $L$ de $Y$, $f^{-1}(L)$ soit compact dans $X$. Montrer que $f$ est *fermée, i.e.* transforme tout fermé de $X$ en un fermé de $Y$.

***Exercice 11 :*** *a*) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn *de dimension finie* $n \geqslant 1$, et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+) \quad \exists R \in \mathbb{R}_+ \mid (x \in E \quad et \quad \|x\| \geqslant R) \Rightarrow (f(x) \geqslant A)).$$

Montrer que $f$ admet un *minimum* sur $E$.

*b*) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ équipé de la *norme uniforme* ($E$ est le $\mathbb{R}$-ev des suites de réels à support fini, et si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \underset{n \in \mathbb{N}}{\operatorname{Max}} |u_n|$). On note $H$ l'hyperplan

$$\left\{ u = (u_n) \in E \mid \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} u_n = 0 \right\}$$

et $a$ l'élément $(\delta_{0k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $E$ ($\delta$ = symbole de Kronecker). Montrer que la fonction $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto d(a, u)$ est continue. Vérifier que $f(u) \underset{\|u\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mais que $f$ n'admet pas de minimum sur $H$.

***Exercice 12 :*** Soit $E$ un espace topologique compact et $F$ un espace topologique. Montrer que la projection $g : E \times F \longrightarrow F$, $(x, y) \mapsto y$ est une application *fermée, i.e.* transforme tout fermé de $E \times F$ en un fermé de $F$.

*Application :* Soit $\varphi : F \longrightarrow E$ ; montrer que $\varphi$ est continue ssi le graphe de $\varphi$ est fermé dans $F \times E$ (cf. exercice n° 3 du § X.5).

***Exercice 13 :*** Soit deux espaces topologiques et $A$ un compact de $E$, $B$ un compact de $F$. On donne un ouvert $\Omega$ de $E \times F$ contenant $A \times B$. Montrer qu'il existe des ouverts $U \subset E$ et $V \subset F$ tels que $A \times B \subset U \times V \subset \Omega$.

*Indication :* Prouver d'abord cette propriété dans l'hypothèse où $E$ et $F$ sont métrisables, puis reprendre l'exercice dans le cas général.

***Exercice 14 :*** Montrer que toute union finie de compacts d'un espace topologique séparé est un compact. Pourquoi l'hypothèse « espace séparé » est-elle nécessaire ?

***Exercice 15 :*** Montrer qu'un espace métrique compact infini ne peut être que dénombrable, ou équipotent à une partie de $\mathbb{R}$. S'il est sans point isolé, il ne peut pas être dénombrable.

***Exercice 16 :*** Soit $A$ un espace topologique, $B$ un espace topologique *compact* et $f : A \longrightarrow B$ telle que

1) $(\exists p \in \mathbb{N})$, $p \geqslant 2 \mid \forall y \in B$, card $f^{-1}(y) = p$.

2) $\forall y \in A$, $\exists V_y$ voisinage de $y$ dans $A$, $\exists W_y$ voisinage de $f(y)$ dans $B$ tels que $f(V_y) \subset W_y$ et $f\Big|_{V_y}^{W_y} : V_y \longrightarrow W_y$ soit un homéomorphisme de $V_y$ sur $W_y$.

Montrer que $A$ est compact.

***Exercice 17 :*** Montrer directement (sans utiliser le théorème de Riesz) que les boules unités de $(\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), N_\infty)$ et de $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), N_1)$ (où $N_\infty$ est la *norme uniforme* et où $N_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ si $u \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$) sont *non compactes*.

***Exercice 18 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension *finie*. On donne un voisinage compact $R$ de $0_E$ dans $E$, muni de sa topologie des normes. Soit

$$L = \{ u \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(E) \mid u(R) \subset R \} .$$

*a*) Montrer que $L$ est une partie compacte de $\operatorname{Hom}_{\mathbf{R}}(E)$.

*b*) Si $f \in L$, prouver que $|\det(f)| \leqslant 1$.

***Exercice 19 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie, $L$ un compact non vide de $E$, $M$ un fermé non vide de $E$, avec $L \cap M = \varnothing$. Montrer que : $\exists (x, y) \in L \times M \mid \|x - y\| = d(L, M)$. Cette propriété subsiste-t-elle si $E$ n'est pas de dimension finie ?

***Exercice 20 :*** On munit $\mathbb{R}^n$ ($n$ entier $\geqslant 2$) de la norme euclidienne. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Pour chaque $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, soit $\Gamma_x = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}_+} \lambda \tilde{\mathbf{B}}(x, \varepsilon)$ (cône convexe engendré par $\tilde{\mathbf{B}}(x, \varepsilon)$, auquel on rajoute $0_E$).

Montrer que $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbf{Z}^n \setminus \{0\}} \Gamma_x = E$.

*Application :* Si l'Univers était *statique, euclidien,* peuplé d'étoiles de dimension minorée par un réel $> 0$, réparties *uniformément* (c'est-à-dire selon une partie assimilable base convenable), et brillant *depuis toujours* (le temps, newtonien, étant représenté par $\mathbb{R}$), alors le ciel, la nuit, ne devrait pas être noir, mais uniformément éclairé et brillant (c'est le paradoxe d'Olbers-de Chésaux (fin du XVIII$^e$ siècle) qui n'en est plus un de nos jours puisqu'on sait qu'aucune des hypothèses supposées ne se trouve réalisée dans la nature).

***Exercice 21 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn.

*a*) Si $A$ est un compact de $E$ et $B$ un fermé de $E$, l'ensemble $A + B = \{a + b\}_{(a,b) \in A \times B}$ est fermé dans $E$.

*b*) Soit $F$ un sous-$\mathbb{R}$-ev *fermé* de $E$ et $G$ un sous-$\mathbb{R}$-ev *de dimension finie* de $E$. Montrer que le sous-$\mathbb{R}$-ev $F + G$ est *fermé* dans $E$ (on opérera par récurrence sur dim $(G)$).

*c*) Soit $H$ un *hyperplan fermé* de $E$ ; on considère une droite $D$ supplémentaire algébrique de $F$ dans $E$. Montrer que la bijection canonique $H \times D \longrightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$ est un *homéomorphisme* lorsqu'on munit $H \times D$ de la topologie produit des topologies induites par $E$.

*d*) Soit $F$ un sous-$\mathbb{R}$-ev de $E$, de codimension finie $n \geqslant 2$ dans $E$. Pour tout supplémentaire algébrique $S$ de $F$ dans $E$, prouver que la bijection canonique $F \times S \longrightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$ est un homéomorphisme quand $F \times S$ est muni de la topologie produit des topologies induites par celle de $E$.

***Exercice 22 :*** Soit $E$ un $K$-evn de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $B$ la boule unité ouverte de $E$, et $H$ une partie compacte de $\mathrm{Hom}_K(E)$ incluse dans $\mathrm{GL}_K(E)$.

*a*) Montrer que $V = \bigcap_{u \in H} u(B)$ est un voisinage de $0_E$ dans $E$.

*b*) $V$ est-il ouvert dans $E$ ?

***Exercice 23 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact. On suppose que l'ensemble $E'$ des points d'accumulation de $E$ est dénombrable. Prouver que $E$ est dénombrable.

***Exercice 24 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$ $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Montrer que $f$ est isométrique et bijective.

***Exercice 25 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact non vide et $f : E \longrightarrow E$ telle que $(\forall (x, y) \in E^2)\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Montrer que $f$ admet un point fixe unique.

*Indication :* Considérer $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, f(x))$.

***Exercice 26 :*** Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue de l'espace métrique compact $(E, d)$ dans l'espace métrique $(F, \delta)$. On suppose trouvé $\alpha$ réel $> 0$ tel que $(\forall y \in F)$ diam $(f^{-1}(y)) < \alpha$ (par convention diam $(\varnothing) = 0$). Montrer qu'il existe $\varepsilon$ réel $> 0$ tel que pour toute boule $B$ de $F$ de diamètre $\leqslant \varepsilon$, on ait : diam $(f^{-1}(B)) < \alpha$.

***Exercice 27 :*** Soit $f$ une application continue d'un espace topologique $E$ dans un espace topologique $F$ et *localement injective* (*i.e.* telle que pour tout point $x \in E$ il existe un voisinage $V$ de $x$ pour lequel $f|_V$ est injective). Soit $A$ une partie *compacte* de $E$ telle que $f|_A$ soit injective. Montrer qu'il existe un ouvert $\omega$ de $E$ contenant $A$ tel que $f|_\omega$ soit injective.

*Indication :* Commencer par le cas où $E$ et $F$ sont métrisables (utiliser alors des suites), puis examiner le cas général en montrant que l'hypothèse « $f$ est localement injective » équivaut à celle-ci : si $\Delta = \{x, x\}_{x \in E}$ et $L = \{(x, y) \in E \times E \mid f(x) = f(y)\}$, l'ensemble $L \setminus \Delta$ est fermé dans $E \times E$.

***Exercice 28*** (autre démonstration du théorème de Riesz) : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn et $F$ un sous-$\mathbb{R}$-ev de $E$.

*a*) On donne $B$ partie de $E$ telle que : $(\forall \lambda \in [0, 1])\ \lambda B \subset B$, et : $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*} \lambda B = E$. Montrer :

$a_1$) $(\exists \alpha \in\ ]0, 1[\ \mid B \subset F + \alpha B) \Rightarrow (E = F + B)$

$a_2$) $E = F + B \Rightarrow (\forall \alpha > 0)\ B \subset F + \alpha B$.

*b*) Soit $B = \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$. Vérifier les conditions du *a*). Supposons alors $B$ *compacte*. Recouvrir $B$ par un nombre fini de boules de rayon $\dfrac{1}{2}$. Trouver $\alpha \in\ ]0, 1[$ et un sous-$\mathbb{R}$-ev $F$ de dimension finie de $E$ tels que $B \subset F + \alpha B$. En déduire $E = F$ et conclure.

***Exercice 29 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn non nul. On donne une partie $L$ de $E$ *compacte, convexe* (*i.e.* $(\forall (x, y) \in L^2, \forall \lambda \in [0, 1])\ \lambda y + (1 - \lambda) x \in L$) et de cardinal $\geqslant 2$. On note $D = \operatorname{diam}\ (L)$ et $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties $P$ de $L$ telles que $(\forall (x, y) \in P^2)$, $(x \neq y) \Rightarrow \|x - y\| = D$.

*a*) Montrer que $\exists P \in \mathscr{P} \mid \operatorname{card}\ (P) \geqslant 2$.

*b*) Montrer : $(\forall P \in \mathscr{P})$ $P$ est fini.

*c*) Montrer l'existence d'un élément $M \in \mathscr{P}$ *maximal pour l'inclusion* dans $\mathscr{P}$.

*Indication :* Recouvrir $L$ par un nombre fini $N$ de boules ouvertes de rayon $\dfrac{D}{2}$, montrer que $(\forall P \in \mathscr{P})\ \operatorname{card}\ (P) \leqslant N$ et considérer un élément de $\mathscr{P}$ de cardinal maximum.

*d*) Montrer : $\exists h \in L \mid (\forall x \in L)\ \|x - h\| < D$.

*Indication :* Choisir $M$ comme en *c*) et considérer $h = \dfrac{1}{N} \sum\limits_{x \in M} x$, où $N = \operatorname{card}\ (M)$.

***Exercice 30*** (théorème de Kakutani) : Soit $E$ un $K$-evn et $L$ une partie de $E$ compacte, convexe (cf. exercice 29) et non vide. On donne $u \in \mathscr{L}_K(E)$ tel que $u(L) \subset L$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}(\mathrm{Id}_E + u + \cdots + u^n)$.

*a*) Prouver : $(\forall n)\ u_n(L) \subset L$, et $u_n(L)$ est compact et convexe.

*b*) Prouver : $(\forall k, \forall n)\ u_{kn-1}(L) \subset u_{n-1}(L)$. En déduire que l'ensemble $H = \bigcap\limits_n u_n(L)$ est compact, convexe, non vide.

*c*) Si $x \in u_{n-1}(L)$, prouver : $\exists y \in L \mid u(x) - x = \dfrac{1}{n}(u^n(y) - y)$.

*d*) L'ensemble $\Delta = \{a - b \mid (a, b) \in L \times L\}$ est compact.

*e*) Si $x \in L$, alors $(u(x) = x) \Rightarrow x \in H$ (utiliser *c*)).

*f*) Soit $\Lambda$ une partie non vide de $\mathscr{L}_K(E)$ formée d'éléments *deux à deux permutables*, telle que $(\forall u \in \Lambda)\ u\ (L) \subset L$. Montrer que l'ensemble $\{x \in L \mid \forall u \in \Lambda, u(x) = x\}$ est un compact convexe *non vide* de $E$.

***Exercice 31*** (cercles du plan euclidien) : Pour $n \in \{2, 3\}$, on considère $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, dont la distance sera notée $d$ pour $\mathbb{R}^2$, $D$ pour $\mathbb{R}^3$. Soit $\Gamma$ l'ensemble des cercles de $\mathbb{R}^2$ de rayon $\geqslant 0$ et $\Gamma^*$ l'ensemble des cercles de $\mathbb{R}^2$ de rayon $> 0$. Si $C \in \Gamma$, on pose $\rho(C) =$ unique élément $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $C$ soit défini, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, par l'équation $x^2 + y^2 - 2\,ax - 2\,by + c = 0$. Vérifier que $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est injective. Pour $(C, C') \in \Gamma^2$, on pose $\Delta(C, C') = D(\rho(C), \rho(C'))$ : vérifier que $\Delta$ est une distance sur $\Gamma$. On considère alors l'espace métrique $(\Gamma, \Delta)$.

*a*) Prouver que $\Gamma^*$ est un ouvert de $\Gamma$. Préciser sa frontière.

*b*) Soit un fermé non vide $F$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\{C \in \Gamma \mid C \cap F \neq \varnothing\}$ est un fermé de $\Gamma$.

*c*) Soit $L$ un compact non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\{C \in \Gamma \mid C \subset L\}$ est un compact non vide de $L$. En déduire : parmi les cercles $C$ inclus dans $L$, l'un au moins est de rayon maximum, et prouver qu'un tel cercle rencontre la frontière de $L$.

*d*) Soit $L_1, L_2, L_3$ des compacts non vides deux à deux disjoints de $\mathbb{R}^2$, tels que $(\forall (x_1, x_2, x_3) \in L_1 \times L_2 \times L_3)$ les points $x_1, x_2, x_3$ sont non alignés. Montrer que parmi les cercles rencontrant $L_1$, $L_2$ et $L_3$, l'un au moins a un rayon minimum. Si $C$ est un tel cercle, prouver que tout point commun à $C$ et $L_i$ appartient à $\operatorname{Fr}\ (L_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Si chaque $L_i$ est un disque euclidien, qu'a-t-on ainsi prouvé ?

***Exercice 32 :*** Soit $E$ l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{N}, [0, 1])$. Vérifier que si $(\forall (u, v) \in E^2)$ on pose

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Min}\ (1, |u_n - v_n|)$$

(où $u = (u_n)$, $v = (v_n)$), alors $d$ est une distance sur $E$, et que $(E, d)$ est un espace métrique *compact*.

*Indication :* Pour la compacité, on utilisera le *procédé diagonal*, qu'il est avantageux de présenter ainsi : soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $E$, où $(\forall k)\ X_k = (x_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Il s'agit d'extraire de $(X_k)$ une suite convergente dans $(E, d)$. Pour cela, l'étape essentielle est d'extraire de $(X_k)$, considérée comme *suite de fonctions* $\mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$, une suite *simplement convergente* sur $\mathbb{N}$ (cf. § VII.1) en opérant ainsi : soit $J_0$ une partie infinie de $\mathbb{N}$ tell

$(x_{n,0})_{n \in J_0}$ converge dans $[0, 1]$ vers une limite $\lambda_0$ (théorème de Bolzano-Weierstrass dans $[0, 1]$). On pose $N_0 = \text{Min}\,(J_0)$. Supposant construits $J_0, J_1, \ldots, J_p$ parties infinies de $\mathbb{N}$, de minimums respectifs $N_0, N_1, \ldots, N_p$, telles que $J_p \subset J_{p-1} \subset \cdots \subset J_0$ et $N_p > N_{p-1} > \cdots > N_0$ et que $(\forall q \in [\![0, p]\!])$, la suite $(x_{n,q})_{n \in J_q}$ converge dans $[0, 1]$ vers une limite $\lambda_q$, utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $[0, 1]$ pour construire $J_{p+1}$ vérifiant les conditions analogues. On obtient ainsi une suite infinie $(J_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions ci-dessus à tout rang $p$. Montrer alors que la suite extraite $(X_{N_p})_{p \in \mathbb{N}}$ de $(X_k)$ converge simplement sur $\mathbb{N}$, vers $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, *i.e.* que $(\forall n \in \mathbb{N})\, x_{N_p, n} \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \lambda_n$. Cela acquis, prouver *enfin* que $d(X_{N_p}, \lambda) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et conclure.

*b*) Soit $(X, \delta)$ un espace métrique compact infini. On suppose que $(\forall (x, y) \in X^2)\, d(x, y) \leqslant 1$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective partout dense dans $X$ (cf. exercice 3). A chaque $x \in X$, on associe $f(x) \in E$ définie par $f(x) = (\delta(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $f$ est continue et en déduire que $f|^{\text{Im}(f)}$ est un *homéomorphisme* de $X$ sur $\text{Im}\,(f)$.

***Exercice 33 :*** Soit un espace métrique $(E, d)$, un espace topologique $T$, et $f : E \longrightarrow T$ une application *injective* qui transforme tout compact de $E$ en un compact de $T$. Montrer que $f$ est continue.

***Exercice 34*** (Ensembles absorbants) : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn non nul. Un ensemble $A$ de $E$ est dit *absorbant* ssi

$$(\forall x \in E)\,, \quad \exists \rho \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall \lambda \in [-\rho, \rho])\,, \quad \lambda x \in A\,.$$

*a*) Si $E$ est de dimension finie, montrer que toute partie $A$ de $E$ à la fois convexe et absorbante, est un voisinage de $0_E$. (Utiliser l'exercice 9 du § X.1). Montrer par un exemple que si $A$ n'est pas convexe, elle peut être absorbante sans être un voisinage de $0_E$.

*b*) Donner un exemple, avec $E$ de dimension infinie, de partie $A$ de $E$ à la fois convexe et absorbante, et qui ne soit pas voisinage de $0_E$.

***Exercice 35*** (Fonctions convexes) : Soit $\Omega$ un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-evn non nul $E$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* ssi

$$(\forall (x, y, \lambda) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1]) \quad f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x)\,.$$

Dans ce qui suit, on suppose $E$ de dimension finie $\geqslant 2$, on donne l'ouvert convexe $\Omega$ de $E$ et la fonction convexe $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $f$ est nécessairement *continue*. Pour cela, il suffit de supposer que $0_E \in \Omega$ et de prouver que $f$ est continue en $0_E$. Procéder ainsi :

*a*) Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, et posons : $\mathscr{C}_\varepsilon = f^{-1}(]-\infty, \varepsilon + f(0_E)])$. Montrer que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est convexe et absorbant dans $E$ (considérer les restrictions de $f$ aux $\mathscr{D} \cap \Omega$, où $\mathscr{D}$ est une droite vectorielle de $E$) ; en déduire que $\mathscr{C}_\varepsilon$ est un voisinage de $0_E$ (cf. exercice 34).

*b*) Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, et posons : $\mathscr{D}_\varepsilon = f^{-1}(]-\infty, f(0_E) - \varepsilon[)$ ; déduire de *a*) que $\mathscr{D}_\varepsilon$ est convexe et ouvert. Montrer que $0_E \notin \text{Fr}\,(\mathscr{D}_\varepsilon)$ (si $a \in \mathscr{D}_\varepsilon$, $b \in \Omega$ et $b \in \text{Fr}\,(\mathscr{D}_\varepsilon)$, considérer la restriction de $f$ à $[a, b]$), et achever de prouver la continuité de $f$ en $0_E$.

## § XI.2 *ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS*

### Suites de Cauchy

**DÉFINITION XI.2.1**

*Une suite $(u_n)$ d'un espace métrique $(E,d)$ est dite de* **Cauchy** *ssi elle vérifie :*

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2),$$
$$(N \leqslant n < p) \Rightarrow (d(u_n, u_p) \leqslant \varepsilon).$$

Les propriétés $(\mathscr{C}_1)$ à $(\mathscr{C}_5)$ ci-dessous sont de vérification élémentaire :

$(\mathscr{C}_1)$ *Soit $(u_n)$ une suite d'un espace métrique $(E, d)$ ; elle est de Cauchy ssi les ensembles $U_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sont bornés et vérifient :* diam $(U_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. La condition « diam $(U_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ » est suffisante pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit de Cauchy. En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition XI.2.1 il est alors clair que

$$d(u_n, u_p) \leqslant 1 + \max_{0 \leqslant i < j \leqslant N} d(u_i, u_j),$$

donc $U_0$ est borné, et *a fortiori* tous les $U_n$ puisque la suite $(U_n)$ est décroissante pour l'inclusion, et la définition XI.2.1 signifie que diam $(U_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Notons qu'en particulier *toute suite de Cauchy est bornée.*

$(\mathscr{C}_2)$ *Toute suite convergente est de Cauchy* (mais nous savons depuis le § I.3, exemple 4, que la réciproque est fausse).

$(\mathscr{C}_3)$ *Une suite de Cauchy $(u_n)$ d'un espace métrique $(E, d)$ converge ssi elle admet au moins une valeur d'adhérence* (si c'est le cas, cette valeur est unique, et c'est la limite). En effet :

Soit $l \in E$, valeur d'adhérence de $(u_n)$, $\varepsilon$ réel $> 0$, et $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ et $N_1 \leqslant n < p$ entraînent $d(u_n, u_p) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis $N_2 \geqslant N_1$ tel que $d(u_{N_2}, l) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant N_2$, $d(u_n, l) \leqslant d(u_n, u_{N_2}) + d(u_{N_2}, l) \leqslant \varepsilon$.

$(\mathscr{C}_4)$ Soit deux espaces métriques $(E_1, d_1)$ et $(E_2, d_2)$, et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *uniformément continue. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans $E_1$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $E_2$.* En conséquence, sur un ensemble, **deux distances équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy.**

$(\mathscr{C}_5)$ Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des espaces métriques. Equipons $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ d'une *distance standard* $d$ associée aux $d_i$ :

*suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((X_{n,1}, \dots, X_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\forall (n,k)\ X_{n,k} \in E_k$) *soit de Cauchy dans* $(E, d)$, *il faut et il suffit que chaque suite composante* $(X_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ *soit de Cauchy dans* $(E_k, d_k)$.

En effet, d'après $(\mathscr{C}_4)$ on peut supposer que $d$ est la distance $((x_i), (y_i)) \mapsto \underset{1\leqslant i\leqslant p}{\operatorname{Max}}\ d_i(x_i, y_i)$ qui rend l'assertion immédiate à vérifier.

***Remarque 1 :*** Avec les notations de $(\mathscr{C}_4)$, si $f$ est continue mais pas uniformément continue, il se peut que $(u_n)$ soit de Cauchy sans que $(f(u_n))$ le soit. Par exemple, avec $E_1 = E_2 = \mathbb{R}_+^*$, $d_1$ = distance usuelle, $d_2 : (x, y) \mapsto \left|\operatorname{Log}\dfrac{x}{y}\right|$ et $f = \mathrm{Id}_E$, la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour $d_1$, mais pas pour $d_2$.

### Espaces complets

#### DÉFINITION XI.2.2

*Un espace métrique* $(E, d)$ *est dit* ***complet*** *ssi* ***toute suite de Cauchy de E converge*** *(c'est-à-dire ssi les suites convergentes de E sont les suites de Cauchy de E). Un K-*evn *E est dit* ***complet*** *(on l'appelle alors un K-*evn ***de Banach****) ssi c'est un espace métrique complet.*
*Une partie F d'un espace métrique* $(E, d)$ *est dite* ***complète*** *ssi, regardée comme sous-espace métrique de E, c'est un espace métrique complet.*

Soit $d_1$, $d_2$ deux *distances équivalentes* sur un ensemble $E$ : les espaces métriques $(E, d_1)$ et $(E, d_2)$ sont complets, ou non, ensemble (cf. $(\mathscr{C}_4)$).

***Exemple 1 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour une norme standard, $K^n$ est complet (cf. § II.2). Plus généralement :

#### THÉORÈME XI.2.1

*Tout K-*evn *E de dimension finie est complet.*

*Démonstration :*

On peut supposer $\dim_K(E) = n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i<n}$ une base de $E$ et $\gamma : K^n \longrightarrow E$, $(x_i) \mapsto \sum x_i e_i$ l'isomorphisme de $K$-ev défini par $\mathscr{B}$. Notons $\nu$ une norme standard de $K^n$ et $N$ la norme $\nu \circ \varphi^{\langle -1\rangle}$ de $E$. Puisque $\varphi : (K^n, \nu) \longrightarrow (E, N)$ est isométrique, $\varphi$ et $\varphi^{\langle -1\rangle}$ sont $\mathrm{Lip}_1$. Or $(K^n, \nu)$ est complet. Donc $(E, N)$ est complet, et comme toute norme de $E$ est équivalente à $N$, le théorème en découle. ■

***Remarque 2 :*** A cause de ce résultat très simple, l'expression « espace de Banach » ne s'emploie guère pour un $K$-evn de dimension finie. Elle appartient plutôt au vocabulaire de l'Analyse fonctionnelle.

***Exemple 2 :*** Montrons que le $K$-evn $E = l^1(\mathbb{N}, K)$ (cf. § X.1, exemple 5) *est complet*.

Soit $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $E$, où $s_p$ désigne, pour chaque $p$, la suite $(u_{p,n})_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_n : E \longrightarrow K$, $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto x_n$ est $K$-linéaire et vérifie :

$$(\forall x \in E) \quad |\varphi_n(x)| = |x_n| \leqslant N_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \ ,$$

donc est $\mathrm{Lip}_1$. Donc (cf. $(\mathscr{C}_4)$) la suite $(\varphi_n(s_p))_{p \in \mathbb{N}} = (u_{p,n})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $K$, donc converge dans $K$, vers $\lambda_n \in K$. Posons alors $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous allons montrer successivement *a*) que $\lambda \in E$ et *b*) que $s_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \lambda$ dans $(E, N_1)$, c'est-à-dire que $N_1(s_p - \lambda) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouvera que la suite de Cauchy $(s_p)$ converge dans $E$ vers $\lambda$.

*a*) La suite $(s_p)$ est bornée (cf. $(\mathscr{C}_1)$) : soit $A$ réel $> 0$ tel que $(\forall p)\, N_1(s_p) \leqslant A$. Pour tout entier $n$, on a : $(\forall p) \sum_{k=0}^{n} |u_{p,k}| \leqslant N_1(s_p) \leqslant A$, d'où en passant à $\lim\limits_{p \to \infty}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \lim_{p \to \infty} u_{p,k} \right| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \leqslant A \ .$$

C'est vrai pour tout $n$, donc $\lambda \in E$ et $N_1(\lambda) \leqslant A$.

*b*) Soit maintenant $\varepsilon$ réel $> 0$, puis $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_1(s_p - s_q) \leqslant \varepsilon$ dès que $n \leqslant p < q$. Fixons $p \geqslant n$, alors $\forall q \in \mathbb{N}$ $(q > p)$, et $\forall r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{r} |u_{p,k} - u_{q,k}| \leqslant N_1(s_p - s_q) \leqslant \varepsilon \ .$$

Passant à $\lim\limits_{q \to \infty}$ en laissant $r$ fixe, il s'ensuit : $\sum_{k=0}^{r} |u_{p,k} - \lambda_k| \leqslant \varepsilon$. C'est vrai $(\forall r \in \mathbb{N})$, d'où en passant à $\lim\limits_{r \to \infty}$ (ce qui a un sens car $s_p \in E$ et $\lambda \in E$, d'où $s_p - \lambda \in E$) : $N_1(s_p - \lambda) \leqslant \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout entier $p \geqslant n$, on a bien prouvé que $N_1(s_p - \lambda) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

***Exemple 3 :*** Soit $X$ un ensemble non vide. Montrons que le $K$-evn $E = (\mathscr{B}(X, K), \nu_\infty)$ (cf. § X.1, exemple 3) *est complet*. Pour cela considérons une suite de Cauchy quelconque $(f_n)$ de $E$.

Cette suite *converge simplement* sur $X$ (cf. définition VII.1.1) vers une fonction $f : X \longrightarrow K$, car pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $K$, donc converge. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_\infty(f_n - f_p) \leqslant 1$ pour $N_1 \leqslant n < p$. Alors $\forall x \in X$, $(\forall p \in \mathbb{N})$ $|f_{N_1}(x) - f_p(x)| \leqslant 1$, donc

$$|f_p(x)| \leqslant 1 + |f_{N_1}(x)| \leqslant 1 + \nu_\infty(f_{N_1}) \ ,$$

d'où en passant à $\lim\limits_{p \to \infty}$ : $|f(x)| \leqslant 1 + \nu_\infty(f_{N_1})$, donc $f \in \mathscr{B}(X, K)$. Soit ensuite $\varepsilon$ réel $>0$ et $N \in \mathbb{N}$ choisi tel que $\nu_\infty(f_n - f_p) \leqslant \varepsilon$ pour $N \leqslant n < p$. Fixant $n \geqslant N$ on a : $\forall p > n$, $\forall x \in X \,|\, f_n(x) - f_p(x)| \leqslant \varepsilon$, d'où, en passant à $\lim\limits_{p \to \infty}$ : $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Comme c'est vrai $\forall x \in X$, on a : $\nu_\infty(f_n - f) \leqslant \varepsilon$, donc $\nu_\infty(f_n - f) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie bien que $f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$ dans $(\mathscr{B}(X, K), \nu_\infty)$.

En se reportant à l'exemple 1 du § X.4, on voit en conclusion que toute suite $(f_n)$ de Cauchy dans $(\mathscr{B}(X, K), \nu_\infty)$ converge uniformément sur $X$ vers une fonction $f \in \mathscr{B}(X, K)$.

**Théorème XI.2.2**

> *Soit $(E, d)$ un espace métrique.*
> (I) *Toute partie complète $A$ de $(E, d)$ est fermée.*
> (II) *Si $(E, d)$ est complet, tout fermé $A$ de $(E, d)$ est partie complète.*
> (III) *Si $(E, d)$ est* **compact,** *il est* **complet.**

*Démonstration :*

(I) Soit $(a_n)$ une suite de $A$ convergeant dans $E$ vers $a \in E$. Elle est de Cauchy dans $E$, donc dans $A$, donc converge dans $A$ vers $a' \in A$, donc converge dans $E$ vers $a'$. Par unicité de la limite $a = a'$, donc $a \in A$. Donc $A$ est fermé dans $E$ (cf. théorème X.4.3).

(II) Soit $(a_n)$ une suite de Cauchy dans $A$. Elle est de Cauchy dans $E$, donc converge dans $E$ vers $a \in E$. Puisque $A$ est fermé, $a \in A$, et donc $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ dans $A$. Donc toute suite de Cauchy de $A$ converge dans $A$.

(III) Résulte de $(\mathscr{C}_3)$ et, lorsque $(E, d)$ est compact, du fait que l'axiome (BW) y est vérifié. ■

***Exemple 4 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Montrons que le $K$-evn $E = (\mathscr{C}^0([a, b], K), \nu_\infty)$ est complet.

Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy de $E$. Comme $E$ est un sous-$K$-evn de $(\mathscr{B}([a, b], K), \nu_\infty)$, on voit d'après l'exemple 3 que la suite $(f_n)$ converge *uniformément* sur $[a, b]$ vers une limite $f \in \mathscr{B}([a, b], K)$. Mais, puisque chaque $f_n$ est continue, $f$ l'est aussi (cf. théorème VII.1.1). Donc $f \in E$ et toute suite de Cauchy de $E$ y converge donc.

**Théorème XI.2.3**

> *Soit $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des espaces métriques, et $d$ une distance standard associée aux $d_i$ sur $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. Si chaque $(E_i, d_i)$ est complet, $(E,d)$ est complet.*

*Démonstration :*

C'est une conséquence de $(\mathscr{C}_5)$ et de la proposition X.4.1 (II). ■

***Remarque 3 :*** Si les $E_i$ sont non vides, la réciproque est vraie (cf. exercice 1).

**Fermés emboîtés**

**THÉORÈME XI.2.4**

> *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique* **complet** *et* $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* **fermés bornés non vides, décroissante** *pour l'inclusion, telle que* diam $(B_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. *Alors* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ *est un* **singleton,** *donc est non vide.*

*Démonstration :*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n \in B_n$ et $U_n = \{u_p\}_{p \geqslant n}$. Puisque $U_n \subset B_n$ pour tout $n$, on a : diam $(U_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, donc (cf. $(\mathscr{C}_1)$) la suite $(u_n)$ est de Cauchy, donc elle converge, disons vers $l \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_p \underset{p \to \infty, p \geqslant n}{\longrightarrow} l$, donc $l \in \mathrm{Adh}_E(U_n) \subset \mathrm{Adh}_E(B_n) = B_n$. Donc $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Soit $l' \in E$, $l' \neq l$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que diam $(B_n) \leqslant \dfrac{1}{2} d(l, l')$. Alors $l \in B_n$, donc $l' \notin B_n$. ■

**COROLLAIRE 1**

> *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique* **complet** *et* $(B_i)_{i \in I}$ *une famille de* **fermés non vides** *de* $E$ *telle que :*
>
> a) *Pour toute partie* $J$ finie *de* $I$, *il existe* $i \in I$ *vérifiant* $B_i \subset \bigcap_{j \in J} B_j$.
>
> b) *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $i \in I$ *tel que* diam $(B_i) \leqslant \varepsilon$.
>
> *Alors* $\bigcap_{i \in I} B_i$ *est un* **singleton,** *donc est non vide.*

*Démonstration :*

A cause de $b$), on est sûr que card $\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \leqslant 1$.

Choisissons $i_1 \in I$ tel que diam $(B_{i_1}) \leqslant 1$. En utilisant $a$) et $b$) on construit par récurrence sur $n$ une suite $(i_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans $I$ telle que $(\forall n \geqslant 1)$ diam $(B_{i_n}) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $B_{i_{n+1}} \subset B_{i_n}$. Par le théorème XII.2.4, il existe $l \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{i_n} = \{l\}$. Il s'agit de voir que $l \in \bigcap_{i \in I} B_i$ : si $i \in I$, à cause de $a$), $(\forall n)\, B_i \cap B_{i_n} \neq \varnothing$, d'où $d(l, B_i) \leqslant$ diam $(B_{i_n}) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Donc $d(B_i, l) = 0$ et comme $B_i$ est fermé, il s'ensuit $l \in B_i$. ■.

**COROLLAIRE 2** (critère de Cauchy des fonctions)

> *Soit* $T$ *un espace topologique,* $A$ *une partie de* $T$ *et* $a \in \mathrm{Adh}_T(A)$, *puis* $(E, d)$ *un espace métrique* **complet** *et* $f : A \longrightarrow E$. *Pour que* $\lim_{x \to a} f(x)$ *existe, il faut et il suffit que soit satisfait le critère suivant :*
>
> $(\mathscr{CF})$ *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, $\exists U$ *voisinage de* $a \,|\,$ diam $(f($

*Démonstration :*

La condition ($\mathscr{CF}$) est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante : on vérifie d'abord que, pour toute partie $B$ de $E$ non vide, diam (Adh($B$)) = diam ($B$) (par convention, si $B$ n'est pas bornée, on pose diam ($B$) = $+\infty$). Soit ensuite $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \ldots, U_n$ des voisinages de $a$. Posant $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, on a :

$$\mathrm{Adh}\,(f(U \cap A)) \subset \mathrm{Adh}\left(\bigcap_{i=1}^{n} f(U_i \cap A)\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Adh}\,(f(U_i \cap A))\,;$$

d'où : les ensembles Adh $(f(U \cap A))$, où $U$ est voisinage de $a$, vérifient les conditions du corollaire 1 du théorème XI.2.4. Donc, pour un $l \in E$, $\bigcap_{U \text{ voisinage de } a} \mathrm{Adh}\,(f(U \cap A)) = \{l\}$. Il reste à montrer pour finir que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ : soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Prenons $U$ voisinage de $a$ tel que diam (Adh $(f(U \cap A))) \leqslant \varepsilon$ : on est sûr que $l \in$ Adh $(f(U \cap A))$, donc $f(U \cap A) \subset \tilde{\mathbf{B}}(l, \varepsilon)$. ■

On a déjà vu au § IV.1 un cas particulier majeur de ce théorème ainsi que quelques applications [1].

**Théorème du point fixe**

Soit $(E, d)$ un espace métrique. Une application $f : E \longrightarrow E$ est dite **contractante** ssi elle est $\mathrm{Lip}_C$ pour au moins un $C \in ]0, 1[$.

**THÉORÈME XI.2.5** (dit « du point fixe »)

> *Soit $(E, d)$ un espace métrique* **complet non vide** *et $f : E \longrightarrow E$* **contractante.** *Alors $f$ possède un et un seul* point fixe (i.e., *tel que* $f(x) = x$).

*Démonstration :*

Fixons $a \in E$. Soit $C \in ]0, 1[$ tel que $f$ soit $\mathrm{Lip}_C$. Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f^{\langle n \rangle}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ $(x_0 = a,\ (\forall n)\, x_{n+1} = f(x_n))$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on montre par récurrence que $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant AC^n$, où $A$ désigne $d(x_1, x_0)$. D'où, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2 (n < p)$ :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_p) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{p-1}, x_p) \\ &\leqslant A(C^n + C^{n+1} + \cdots + C^{p-1}) \leqslant A \sum_{k=n}^{+\infty} C^k = \frac{A}{1-C} C^n \end{aligned}$$

ce qui, du fait que $C^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, entraîne que la suite $(x_n)$ est de Cauchy. Elle converge donc vers $l \in E$. Comme $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l$, et que $f$ est continue (car $\mathrm{Lip}_C$), $x_{n+1} = f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(l)$ ; d'où $f(l) = l$. Enfin, si $l' \in E$, $l' \neq l$, on a : $d(f(l), f(l')) = d(l, f(l')) \leqslant C d(l, l')$, ce qui prouve que $f(l')$ ne peut pas être égal à $l'$ car $0 < C < 1$. L'équation $f(x) = x$ a donc bien une solution unique. ■

---

[1] Lorsque $T$ est *métrisable,* le corollaire 2 du théorème XI.2.4 se prouve par application directe du théorème X.4.4, comme au théorème IV.1.4.

***Exercice 1 :*** Avec les notations du théorème XI.2.3, prouver que si les $E_i$ sont non vides, et si $(E, d)$ est complet, alors chaque $(E_i, d_i)$ est complet.

***Exercice 2 :*** Montrer que le $K$-evn $(\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \nu_1)$ (cf. § X.1, exemple 2) n'est pas complet.

*Indication :* On pourra par exemple considérer la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(\forall n)$ $f_n$ est continue sur $[0, 1]$, affine sur $\left[0, \dfrac{1}{n^2}\right]$, nulle en 0, et $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right]$.

Plus généralement, montrer que, pour $p \in [1, +\infty[$, le $K$-evn $(\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \nu_p)$ n'est pas complet.

***Exercice 3 :*** Pour qu'un espace métrique soit complet, il suffit que ses parties fermées bornées soient complètes.

***Exercice 4 :*** Soit un $K$-evn $E$ de dimension infinie. On suppose que $E$ admet une base algébrique dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Montrer que $E$ n'est pas complet.

*Indication :* Utiliser le corollaire 7 du théorème XI.1.6 pour construire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $E$ telle que $\varepsilon_1 = e_1$ et $\quad (\forall n \geqslant 2) \quad \varepsilon_n \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, $\|\varepsilon_n\| = 1$ et $d(\varepsilon_n, \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})) = 1$. Considérer ensuite la suite $(S_N)_{N \geqslant 1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{3^n} \varepsilon_n\right)_{N \geqslant 1}$ qui est de Cauchy et divergente.

***Exercice 5 :*** Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, on pose $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-|x-y|}$ si $x \neq y$.

*a*) Vérifier que $(\mathbb{N}, d)$ est un espace métrique complet, définissant sur $\mathbb{N}$ la topologie discrète.

*b*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $B_n = \tilde{\mathbf{B}}\left(n, \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-2n}\right)$ ; montrer que la suite de boules fermées admet une suite extraite décroissante pour l'inclusion et d'intersection vide. Quelle conclusion en tire-t-on ?

***Exercice 6 :*** Soit $E$ un $K$-evn de Banach. On donne une suite $(B_n) = \tilde{\mathbf{B}}(x_n, r_n)$ $(x \in \mathbb{N})$ de boules fermées de $E$ telle que : $(\forall n)\, B_{n+1} \subset B_n$, et $r_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\downarrow} a$, avec $a > 0$. Montrer que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$.

Comparer ce résultat avec celui de l'exercice 5.

*Indication :* On montrera que la suite $(x_n)$ converge.

***Exercice 7 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\mathcal{N} : P \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} |P^{(n)}(n)|$ (on vérifiera qu'il s'agit bien d'une norme).

*a*) Montrer par un raisonnement direct que $(E, \mathcal{N})$ n'est pas complet.

*b*) (Question difficile) Etudier la continuité, pour $n \in \mathbb{N}$, de la forme linéaire $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto$ coefficient de $X^n$ dans $P$.

***Exercice 8 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique complet non vide et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose trouvé $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\langle p \rangle}$ soit contractante. Prouver que $f$ a un point fixe unique.

***Exercice 9 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \leqslant b)$ et $k : [a, b]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note $E$ le $\mathbb{R}$-ev $(\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \nu_\infty)$ où $\nu_\infty$ est la norme uniforme, et on donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in E$.

Soit $A : E \longrightarrow E$ ainsi défini : si $\quad f \in E$

$$(A(f))\ (x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

pour $x \in [a, b]$. Montrer : $\exists p \in \mathbb{N}^* \mid A^{\langle p \rangle}$ est contractante.

En utilisant l'exercice 8, en déduire l'existence d'une et une seule solution $f \in E$ à l'équation $A(f) = f$.

***Exercice 10 :*** Soit $E$ un $K$-evn et $F$ un sous-ev de $E$. On note $\varphi : E \longrightarrow E/F_F$ l'application canonique. Pour $X \in E/_F$, soit $\mathcal{N}(X) = \inf \{ \|x\| \mid x \in E \text{ et } \varphi(x) = X \}$.

*a*) Montrer : $\mathcal{N}$ est une norme de $E/_F$ ssi $F$ est fermé dans $E$.

*b*) On suppose $F$ fermé, on munit $E/_F$ de la norme $\mathcal{N}$. Prouver que $\varphi$ est continue, et *ouverte* (i.e. transforme tout ouvert de $E$ en un ouvert de $E/_F$) ; que $|||\varphi||| = 1$. Prouver enfin que si $E$ est complet, alors $(E/_F, \mathcal{N})$ est complet.

***Exercice 11 :*** Montrer que l'espace ultramétrique $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ de l'exercice 10 du § X.2 est complet, mais que l'espace $(\mathbb{Q}, d)$ du même exercice ne l'est pas. Montrer que l'espace métrique $(E, d)$ de l'exercice 11 du § X.2 est complet.

Reprendre aussi l'exercice 6 du § X.2 et dire si l'espace métrique $(E, d)$ étudié est ou non complet.

***Exercice 12 :*** Un espace métrique $(E, d)$ est dit **précompact** ssi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie *finie* $J_\varepsilon$ de $E$ telle que $\bigcup_{x \in J_\varepsilon} \mathring{\mathbf{B}}(x, \varepsilon) = E$.

*a*) Vérifier que si $(E, d)$ est compact, il est précompact.

*b*) On suppose $(E, d)$ à la fois *précompact et complet*. Montrer que $(E, d)$ est compact.

*Indication :* Soit $(x_n)$ une suite dans $E$ ; utiliser la précompacité de $(E, d)$ et un *procédé diagonal* (cf. exercice 32 du § XI.1) pour extraire de $(x_n)$ une suite de Cauchy, et conclure.

*c*) Soit $E = [0, 1]^{\mathbb{N}^*} = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, [0, 1])$. Pour $x = (x_n) \in E$ et $y = (y_n) \in E$, on pose $d(x, y) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} |x_n - y_n|$. Vérifier que $d$ est une distance sur $E$ ; puis montrer que $(E, d)$ est précompact et complet, donc compact.

***Exercice 13 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique non vide ; on note $(\mathcal{B}, \delta)$ l'espace métrique associé au $\mathbb{R}$-evn $(\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), \nu_\infty)$ (cf. exemple 3). On fixe $x_0 \in E$. A chaque $x \in E$ on associe $f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto d(z, x) - d(z, x_0)$. Vérifier que $f_x \in \mathcal{B}$, puis prouver que $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{B}$, $x \mapsto f_x$ est isométrique.

On note $\widehat{E} = \mathrm{Adh}_{\mathcal{B}}(\varphi(E))$ et $J$ l'application : $E \longrightarrow \widehat{E}$, $x \mapsto \varphi(x)$. Montrer que, pour tout espace métrique *complet* $G$, et toute $\alpha : E \longrightarrow G$ uniformément continue, il existe $\widehat{\alpha} : \widehat{E} \longrightarrow G$ unique qui soit continue et telle que $\widehat{\alpha} \circ J = \alpha$. De plus, $\widehat{\alpha}$ est uniformément continue.

***Exercice 14 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique et $U$ un ouvert non vide de $E$, distinct de $E$. Pour $(x, y) \in U^2$, on pose :

$$D(x, y) = \mathrm{Max}\left[d(x, y), \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|\right], \quad \text{où} \quad F = E \backslash U .$$

*a*) Montrer que $D$ est une distance sur $U$, topologiquement équivalente à $d$ sur $U$.

*b*) Si $(E, d)$ est complet, montrer que $(U, D)$ est complet.

*c*) Soit $(U_n)$ une suite d'ouverts de $E$, tous non vides et distincts de $E$. On suppose que $\mathcal{B} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est non vide. Pour chaque $n$, soit $F_n = E \backslash U_n$ ; on note $D_n$ la distance sur $U_n$ définie par $\quad D_n(x, y) = \mathrm{Max}\left[d(x, y), \left| \frac{1}{d(x, F_n)} - \frac{1}{d(y, F_n)} \right|\right]$.

Pour $(x, y) \in \mathcal{B}^2$, on pose enfin : $\quad D(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{Min}\,(1, D_n(x, y))$.

On suppose $(E, d)$ complet. Montrer que $(\mathcal{B}, D)$ est un espace métrique complet et que $D$ est topologiquement équivalente à $d$ sur $\mathcal{B}$.

***Exercice 15 :*** On donne deux espaces métriques $(X, d)$, $(Y, \delta)$ et on suppose $(Y, \delta)$ *complet.* Soit $f : X \longrightarrow Y$ *continue, surjective* et *ouverte.* Montrer que, pour tout compact $L$ de $Y$, il existe un compact $H$ de $X$ tel que $f(H) = K$ (exercice difficile !)

***Exercice 16 :*** Soit $E$ un $K$-evn et $(X_n)$ une suite *croissante* pour l'inclusion de sous-$K$-ev de dimension finie de $E$. Pour $f \in E$, soit $\mathcal{E}_n(f) = d(f, X_n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

*a*) Vérifier que, pour $f$ donnée, la suite $(\mathcal{E}_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ décroît ; et

$$(\forall (f, g) \in E^2), (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mathcal{E}_n(f) \leqslant \mathcal{E}_n(g) + \|f - g\| .$$

*b*) Montrer : $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ est dense dans } E\right) \Leftrightarrow \left((\forall f \in E)\, \mathscr{E}_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right)$.

*c*) Soit $L$ une partie non vide de $E$ ; on pose $\mathscr{E}_n(L) = \sup_{f\in L} \mathscr{E}_n(f)$. Montrer que si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est dense dans $E$ et si $L$ est précompact (cf. exercice 12) alors $\mathscr{E}_n(L) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Réciproquement, si $L$ est bornée et si $\mathscr{E}_n(L) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $L$ est précompact.

***Exercice 17 :*** Soit $E = (\mathscr{C}^0[0,1], \mathbb{R}), \nu_\infty)$ (cf. exemple 4). On considère une bijection $n \mapsto r_n$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

*a*) Montrer que $\varphi : \mathbb{R},\ f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(r_n)$ est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $E$.

*b*) Soit $\mathscr{C} = \left\{f \in \tilde{\mathbf{B}}(0_E, 2) \mid \varphi(f) = 1\right\}$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie fermée bornée non vide, complète de $E$, que $d(0_E, \mathscr{C}) = 1$, mais que $(\forall f \in \mathscr{C})\ \|f\| > 1$.

***Exercice 18 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn de Banach. On munit $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ de la norme $|||\ .\ |||$ associée à la norme de $E$. Une application $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ sera dite *complètement continue* ssi Adh $(f(\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)))$ est un *compact* de $E$. L'ensemble des telles $f$ sera noté $\mathscr{C}(E)$.

*a*) Montrer que $\mathscr{C}(E)$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ ; que : $(\forall u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E))$, $(\forall v \in \mathscr{C}(E))$, $u \circ v \in \mathscr{C}(E)$ et $v \circ u \in \mathscr{C}(E)$.

*b*) Soit $u \in \mathscr{C}(E)$ et soit $f = \mathrm{Id}_E + u$.

$b_1$) Montrer que Ker $(f)$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension finie de $E$ (on pourra utiliser le théorème de Riesz XI.1.8).

$b_2$) Montrer : $\exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \mathrm{Im}\,(f) \cap \tilde{\mathbf{B}}(0_E, r) \subset f(\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1))$.

En déduire : la corestriction $\hat{f}$ de $f$ à Im $(f)$ est une application *ouverte* (raisonner par l'absurde pour l'existence de $r$).

$b_3$) Montrer que Im $(f)$ est fermé dans $E$.

*c*) Soit $(u_n)$ une suite dans $\mathscr{C}(E)$ convergente *dans* $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ vers $u \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$. Montrer que $u \in \mathscr{C}(E)$, et en déduire que $\mathscr{C}(E)$ est fermée dans $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

*Indication :* De toute suite d'éléments de $u(\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1))$ montrer qu'on peut extraire une suite de Cauchy.

***Exercice 19*** *(Distance de Hausdorff) :* Soit $(E, d)$ un espace métrique non vide et $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties non vides *fermées et bornées* de $E$. Pour $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ on pose :

(1) $$\rho(A, B) = \sup_{x\in A} d(x, B)\ ; \quad \Delta(A, B) = \mathrm{Max}\,(\rho(A, B), \rho(B, A)).$$

$a_1$) Montrer que $\Delta$ définit une distance (dite « de Hausdorff ») sur $\mathscr{F}$.

$a_2$) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathscr{F}$, $x \mapsto \{x\}$. Montrer que $\varphi$ est isométrique de $(E, d)$ dans $(\mathscr{F}, \Delta)$ et que $\varphi(E)$ est fermé dans $\mathscr{F}$.

$a_3$) Montrer que l'application $\mathscr{F} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $A \mapsto \mathrm{diam}\,(A)$ est continue.

*b*) On suppose $(E, d)$ complet. On se propose de prouver que $(\mathscr{F}, \Delta)$ l'est aussi.

$b_1$) Soit $(A_n)$ une suite de Cauchy de $(\mathscr{F}, \Delta)$ telle que $(\forall n)\ A_{n+1} \subset A_n$. Montrer : il existe une suite $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(A_n)$ telle que $(\forall k)\ \Delta(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) \leqslant 2^{-k}$. Construire alors une suite $(x_p)$ dans $E$ telle que $(\forall p)\ x_p \in A_{n_p}$ et $d(x_p, x_{p+1}) \leqslant 2^{-p+1}$. Montrer que $(x_p)$ est de Cauchy dans $E$ et que sa limite appartient à $A = \bigcap_n A_n$. Enfin, prouver que $\Delta(A_n, A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$b_2$) Soit $(A_n)$ une suite de Cauchy quelconque de $(\mathscr{F}, \Delta)$. On pose : $B_n = \mathrm{Adh}\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_m\right)$.

Prouver : $(\forall n)\ B_n \in \mathscr{F}$, puis : $\Delta(A_n, B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Prouver que $(B_n)$ est une suite de Cauchy de $(\mathscr{F}, \Delta)$, décroissante pour l'inclusion. En déduire que la suite $(A_n)$ converge dans $(\mathscr{F}, A)$. Quelle est sa limite ?

*c*) On se propose de prouver que si $(E, d)$ est compact, alors $(\mathscr{F}, A)$ l'e

$c_1$) $(E, d)$ étant ici quelconque, si $A \in \mathscr{F}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $\Phi_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} \mathbf{B}(x, \varepsilon)$. Pour $(A, B) \in \mathscr{F}^2$, montrer :

$$(\Delta(A, B) < \varepsilon) \Rightarrow (B \subset \Phi_\varepsilon(A) \text{ et } A \subset \Phi_\varepsilon(B))$$
$$(B \subset \Phi_\varepsilon(A) \text{ et } A \subset \Phi_\varepsilon(B)) \Rightarrow (\Delta(A, B) \leqslant \varepsilon).$$

$c_2$) Si $(E, d)$ est compact, montrer :

$$(B \subset \Phi_\varepsilon(A) \text{ et } A \subset \Phi_\varepsilon(B)) \Rightarrow (\Delta(A, B) < \varepsilon).$$

$c_3$) On suppose $(E, d)$ compact. Montrer que $(\mathscr{F}, \Delta)$ est compact en prouvant qu'il est complet et précompact (cf. exercice 12).

***Exercice 20*** (*Espaces de Baire* [1]) : Soit $A$ une partie d'un espace topologique $E$. On dit que $A$ est *rare* ssi Int (Adh $(A)$) $= \varnothing$, et que $A$ est *maigre* ssi $A$ est union au plus dénombrable d'ensembles rares.

*a*) Montrer que les conditions (I) et (II) sont équivalentes :

(I) Pour toute famille *dénombrable* $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts denses de $E$, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ est dense dans $E$.

(II) Toute partie maigre de $E$ est d'intérieur vide. Si ces conditions sont réalisées, on dit que $E$ est un *espace de Baire*.

*b*) Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire. Si $(\Omega_i)_{i \in I}$ est une famille *dénombrable* d'ouverts denses d'un espace de Baire $E$, alors $\bigcap_{i \in I} \Omega_i$ est un espace de Baire.

*c*) Si un espace $E$ est *localement compact* (*i.e.* tout point admet au moins un voisinage compact), alors c'est un espace de Baire.

*d*) Soit $(E, d)$ un espace métrique complet. Montrer que $E$ est un espace de Baire.

*Indication :* Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de $E$, et soit $\omega$ un ouvert non vide de $E$. Poser : $U_n = \bigcap_{k=0}^{n} \Omega_k$. Construire par récurrence une suite $(\tilde{B}_n)$ de boules fermées de rayon $> 0$ telle que $(\forall n \geqslant 1)$ $\tilde{B}_n \subset \omega \cap U_n \cap \operatorname{Int}(\tilde{B}_{n-1})$ et conclure.

*e*) Soit $(F_n)$ une suite de fermés d'un espace de Baire $e$ telle que $\bigcup_n F_n = E$. Prouver que $\bigcup_n \operatorname{Int}(F_n)$ est dense dans $E$.

***Exercice 21 :*** Utiliser les résultats de l'exercice 20 pour résoudre les questions suivantes :

*a*) Soit $(x_n)$ une suite réelle telle que $(\forall a \in \mathbb{R})$ $d(ax_n, \mathbb{Z}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Prouver que $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

*b*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ $f(nx) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

*c*) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. On considère $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall x \in [a, b])\, \exists n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que $f$ est polynomiale (théorème de Corominas).

*Indications :* 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $T_n = \{x \in [a, b] \mid f^{(n)}(x) = 0\}$, et $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}_{[a,b]}(T_n)$. Chaque $T_n$ est fermé dans $[a, b]$, et $U$ est ouvert non vide dans $[a, b]$.

2) Si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $u < v$ et $]u, v[ \subset U$, alors $f|_{]u,v[}$ est polynomiale, ce qui permet de conclure si $U = [a, b]$.

3) Si $L = [a, b] \setminus U \neq \varnothing$, montrer : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists (x, y) \in \mathbb{R}$, $x < y$ et $]x, y[ \cap L_n \neq \varnothing$ et $]x, y[ \cap L = ]x, y[ \cap L_n$ et $]x, y[ \subset [a, b]$, où $L_n = L \cap T_n$. Choisissant un tel $n$ et de tels $x$, $y$, on pose $J = ]x, y[$ et $A = ]x, y[ \cap L$.

4) Tout point de $A$ est point d'accumulation de $L_n$.

5) $\forall z \in A \quad \forall m \geqslant n \quad f^{(m)}(z) = 0$.

---

[1] René Louis *Baire* (1874, 1932), mathématicien français qui a introduit les concepts d'ensemble maigre et de fonction semi-continue.

6) Soit $z \in J \setminus A$. Noter $\omega_z$ la composante connexe de $z$ dans l'ouvert $J \setminus A = J \cap U$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $f|_{\omega_z}$ est polynomiale ; montrer : $\omega_z \neq J$. Appliquer la formule de Taylor en une extrémité de $\omega_z \cap J$, en déduire : $\omega_z \subset \operatorname{Int}_{[a,b]}(T_n)$.

7) En déduire $J \subset \operatorname{Int}_{[a,b]}(T_n)$. En déduire une contradiction. Qu'en résulte-t-il pour $f$?

***Exercice 22*** (espaces $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$) : Dans ce problème, on note $\mathscr{C}_0$ le $\mathbb{R}$-ev des suites de réels *à support fini,* on note $l^\infty$ l'espace $\mathscr{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et pour $p \in [1, +\infty[$ on notera $l^p = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (cf. § X.1, exemple 5). Si $u = (u_n) \in l^p$ (resp. $l^\infty$) on pose :

$$N_p(u) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} \quad \left(\text{resp. } N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|\right).$$

**Partie I :** *a*) Montrer que chaque $(l^p, N_p)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ est un $\mathbb{R}$-evn *complet* (cf. exemple 2) et que $(\forall p)$ $\mathscr{C}_0$ est dense dans $(l^p, N_p)$ ; si $p_1 > p_2 > 1$, $l^{p_2} \underset{\neq}{\subset} l^{p_1}$.

*b*) Soit $p_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 > 1$ et soit $u = (u_n) \in l^{p_0}$. Montrer : $\lim\limits_{p \to +\infty, p \geq p_0} N_p(u)$ existe ; préciser cette limite.

*c*) On fixe $p$ réel $> 1$ ; soit $q$ le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On note $E_p$ le *dual topologique* de $(l^p, N_p)$ muni de sa norme naturelle $|||\,.\,|||_p$ définie par $|||\varphi|||_p = \sup\limits_{N_p(u) \leq 1} |\varphi(u)|$ pour $\varphi \in E_p$.

$c_1$) Soit $v \in l^q$, $v = (v_n)$. Montrer que $(\forall u)$, si $(u_n) \in l^p$, la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, et que si l'on pose : $\tilde{v}(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n v_n$, alors $\tilde{v} \in E_p$.

$c_2$) Montrer : l'application $v \mapsto \tilde{v}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, bijective et isométrique de $(l^q, N_q)$ sur $(E_p, |||\,.\,|||_p)$.

*Indication* pour la surjectivité : pour $k \in \mathbb{N}$, soit $e_k \in \mathscr{C}_0$ la suite $(\delta_{kl})_{l \in \mathbb{N}}$ (où $\delta$ = symbole de Kronecker) ; si $\varphi \in E_p$, poser $v_k = \varphi(e_k)$, prouver que $v = (v_k) \in l^q$ et que $\tilde{v} = \varphi$.

*d*) On fixe $p$ réel $> 1$ ; soit $(\alpha_n)$ une suite de $\mathbb{R}_+$. On note $L$ l'ensemble

$$\{u = (u_n) \in l^p \mid (\forall n) |u_n| \leq \alpha_n\}.$$

Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) $L$ est un compact de $(l^p, N_p)$ ;

(II) la série $\sum\limits_n |\alpha_n|^p$ converge.

*Indication :* On aura besoin du *procédé diagonal* (cf. § XI.1, exercice 32).

**Partie II :** *a*) Montrer que $(l^1, N_1)$ et $(l^\infty, N_\infty)$ sont complets, et prouver que $\mathscr{C}_0$ est partout dense dans $l^1$.

*b*) Soit $E$ le dual topologique de $l^1$, muni de sa norme naturelle $|||\,.\,|||_1$ définie par $|||\varphi|||_1 = \sup\limits_{u \in l^1, N_1(u) \leq 1} |\varphi(u)|$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $e_k \in \mathscr{C}_0$, $e_k = (\delta_{kl})_{l \in \mathbb{N}}$ ; et soit, pour $\varphi \in E$ fixée, $v = (\varphi(e_k))_{k \in \mathbb{N}} = (v_k)$.

$b_1$) Prouver que $v \in l^\infty$.

$b_2$) Montrer que $\varphi \mapsto v$ est un isomorphisme isométrique de $E$ sur $l^\infty$.

*c*) On munit $\mathscr{C}_0$ de la norme $N_\infty$, et on note $F$ le dual topologique de $\mathscr{C}_0$ muni de la norme naturelle associée. En raisonnant comme ci-dessus, définir un isomorphisme isométrique naturel de $F$ sur $l^1$.

*d*) Soit $(u_{(\alpha)})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ une suite dans $l^1$ (pour $\alpha \in \mathbb{N}$, $u_{(\alpha)} = (u_{\alpha,n})_{n \in \mathbb{N}}$). Soit $(W)$ la condition : $(\forall \varphi \in E)$ $\varphi(u_{(\alpha)}) \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$d_1$) Montrer que si $N_1(u_{(\alpha)}) \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(W)$ est satisfaite.

$d_2$) On suppose $(W)$ satisfaite. Montrer que si le réel $\varepsilon > 0$ est donné, il existe deux suites strictement croissantes d'entiers, $(n(k))$ et $(\alpha(k))$ vérifiant :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad \sum_{0 \leqslant i < n(k)} |u_{\alpha(k),i}| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{i=n(k+1)}^{\infty} |u_{\alpha(k),i}| \leqslant \varepsilon \,.$$

$d_3$) En raisonnant par l'absurde, en déduire que si $(W)$ est vraie, alors $N_1(u_{(\alpha)}) \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (question difficile).

***Exercice 23*** (*sous-groupes additifs de* $\mathbb{R}^n$) : Soit $n$ entier $\geqslant 2$. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie usuelle issue d'une norme $\nu$ fixée une fois pour toutes.

**Partie I :** $a_1$) Soit $G$ un sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $G$ est discret, alors $G$ est fermé.

$a_2$) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbb{R}^n$. On note $G$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$ engendré par les $a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Montrer que : (les $a_i$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants) $\Rightarrow$ ($G$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ fermée et discrète). Est-ce encore vrai si les $a_i$ sont seulement $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ?

$b$) Soit $G$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$. Une suite $(a_1, \ldots, a_p)$ dans $G$ sera appelée une $\mathbb{Z}$-*base* de $G$ ssi l'homomorphisme de groupes $\mathbb{Z}^p \longrightarrow G$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$ est bijectif. Une $\mathbb{Z}$-base $(a_1, \ldots, a_p)$ de $G$ sera dite $\mathbb{R}$-*libre* ssi les $a_i$ sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

$b_1$) On suppose que $G$ admet une $\mathbb{Z}$-base $(a_1, \ldots, a_p)$. Montrer que $p = \dim_{\mathbb{Q}} (\mathscr{V}_{\mathbb{Q}}(G))$, où $\mathscr{V}_{\mathbb{Q}}(G)$ est le sous-$\mathbb{Q}$-ev de $\mathbb{R}^n$ engendré par $G$.

$b_2$) $G$ admettant une $\mathbb{Z}$-base $(a_1, \ldots, a_p)$, soit $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(G)$ le sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathbb{R}^n$ engendré par $G$. Montrer l'équivalence entre (I), et (II), et (III), et (IV) :

(I) $\dim_{\mathbb{Q}} (\mathscr{V}_{\mathbb{Q}}(G)) = \dim_{\mathbb{R}} (\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(G))$.

(II) $G$ est une partie discrète et fermée de $\mathbb{R}^n$.

(III) $G$ est discret.

(IV) Toute $\mathbb{Q}$-base de $\mathscr{V}_{\mathbb{Q}}(G)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(G)$.

$c$) Jusqu'au $e$) inclus, on note $G$ un sous-groupe additif fixé de $\mathbb{R}^n$ tel que $G \neq \{0\}$ et que $G$ soit une partie discrète de $\mathbb{R}^n$. On note $p = \dim_{\mathbb{R}} (\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(G))$ et on se propose d'établir que $G$ admet au moins une $\mathbb{Z}$-base $\mathbb{R}$-libre à $p$ termes.

$c_1$) Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ une suite $\mathbb{R}$-libre d'éléments de $G$ et soit $K$ l'ensemble des éléments de $G$ de la forme $\sum_{i=1}^{p} t_i a_i$, avec $(\forall i)$ $t_i \in [0, 1]$. Montrer que $\Gamma = K \cap G$ est un ensemble fini.

$c_2$) Soit $x \in G$ et soit $t_1, \ldots, t_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} t_i a_i$. Etablir : $(\forall i)$ $t_i \in \mathbb{Q}$.

$c_3$) Montrer que $\Gamma$ est une partie génératrice du groupe $G$.

$d$) Etablir l'existence de $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(\forall x \in G) \quad \exists (k_1, k_2, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p \mid x = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{p} k_i a_i \,.$$

On désigne par $s_0$ le plus petit de ces entiers $s$.

$e$) Pour tout système $\mathbb{R}$-libre d'éléments de $G$, on définit l'entier $D(x_1, \ldots, x_p)$ par $D(x_1, \ldots, x_p) = \det\left([k_{ij}]_{i \in [\![1,p]\!],\, j \in [\![1,p]\!]}\right)$, $(k_{ij})$ étant l'unique système d'éléments de $\mathbb{Z}$ tel que

$$(\forall i \in [\![1,p]\!]) \,, \quad x_i = \frac{1}{s_0} \sum_{j=1}^{p} k_{ij} a_j \,.$$

$e_1$) Montrer l'existence d'une suite $\mathbb{R}$-libre $(b_1, \ldots, b_p)$ d'éléments de $G$ telle que, pour toute suite $\mathbb{R}$-libre $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de $G$, on ait :

$$|D(x_1, x_2, \ldots, x_p)| \geqslant |D(b_1, b_2, \ldots, b_p)| \,.$$

$e_2$) Tout système $(b_1, \ldots, b_p)$ vérifiant cette condition est une $\mathbb{Z}$-base $\mathbb{R}$-libre de $G$.

$e_3$) Si $(b_1, \ldots, b_p)$ est une $\mathbb{Z}$-base $\mathbb{R}$-libre de $G$, comment peut-on en déduire [illegible] $\mathbb{Z}$-bases de $G$ ?

*f*) Soit maintenant $G$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$ à la fois *fermé et non discret*. On se propose d'établir que $G$ contient au moins une droite vectorielle du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$. On note : $\bar{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nu(x) \leqslant 1\}$.

$f_1$) Montrer l'existence d'une suite $(x_p)$ de points de $G \cap \bar{B}$, tous non nuls, telle que $\lim_{p \to \infty} (x_p) = 0$.

$f_2$) Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, vérifier qu'il existe un plus grand des entiers $k$ tels que $kx_p \in \bar{B}$ ; on le notera $k_p$. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(k_p x_p)$ qui converge vers un point $a \in \bar{B}$.

Prouver que tout tel point $a$ vérifie à la fois : $a \in G$ et $\nu(a) = 1$.

Prouver que pour tout tel point $a$, on a : $(\forall t \in \mathbb{R})$, $t_a \in G$.

*Indication :* Si $a = \lim_{n \to \infty} (k_{p_n} x_{p_n})$, considérer $y_{p_n} = \text{Ent}\,(tk_{p_n})\, x_{p_n}$.

*g*) Soit $G$ un sous-groupe additif *fermé* de $\mathbb{R}^n$. On note $V$ la réunion de $\{0\}$ et des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$ qui sont incluses dans $G$. Montrer que Vect $(V)$ est le plus grand sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathbb{R}^n$ contenu dans $G$. A l'aide des résultats de cette partie I, donner une description précise du groupe $G$.

**Partie II :** Soit $G$ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$, non réduit à $\{0\}$, mais maintenant quelconque.

*a*) Prouver que si $G$ est non discret, 0 est point d'accumulation de $G$.

*b*) Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. A l'aide de la partie I, prouver l'équivalence entre (V) et (VI) :

(V) Le sous-groupe $\mathbb{Z}v + \mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ est discret.

(VI) $(\forall i \in [\![1, n]\!])$, $v_i \in \mathbb{Q}$.

*c*) Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. Déduire du *b*) la relation :

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \quad \exists (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n \mid n_0 \geqslant m$$

et
$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad |n_0 \theta_i - \pi p_i| \leqslant \varepsilon\,.$$

En déduire que, dans l'espace topologique $E$ de l'exercice 6 du § X.4, la suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définie par $(\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1])$ $f_j(x) = \sin jx$ admet la fonction nulle pour valeur d'adhérence alors que l'on ne peut en extraire aucune suite convergente de limite 0 dans $E$.

***Exercice 24* : Partie I :** On désigne par $t$ un entier $\geqslant 2$, par $\mathscr{D}_t'$ l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *d'entiers* telles que $a_n \in [\![0, t-1]\!]$ pour tout $n$, et que pour $N \in \mathbb{Z}$ convenable (dépendant de $a$), on ait, $a_n = 0$ dès que $n \leqslant N$. On note $\mathscr{D}_t$ le sous-ensemble de $\mathscr{D}_t'$ formé des suites $a = (a_n) \in \mathscr{D}_t'$ pour lesquelles l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < t - 1\}$ est infini. $\mathscr{D}_t'$ est muni de l'*ordre lexicographique*. On désigne par $\Phi'$ l'application canonique

$$\mathscr{D}_t' \longrightarrow \mathbb{R}_+\,, \quad (a_n) = a \mapsto \left(\sum_{n<0} \frac{a_n}{t^n}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{t^n}\right), \quad \text{noté} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_n}{t^n},$$

et par $\Phi$ la restriction $\Phi'|_{\mathscr{D}_t}$. On rappelle que $\Phi'$ est croissante et surjective, que $\Phi$ est une bijection croissante.

$a_1$) Montrer qu'il n'existe pas de bijection croissante de $\mathscr{D}_t'$ sur $\mathbb{R}_+$.

$a_2$) Montrer que toute partie $E$ de $\mathscr{D}_t'$ non vide et majorée admet une borne supérieure, et préciser comment on peut former cette borne supérieure à l'aide des éléments de $E$.

$a_3$) Montrer qu'*il n'existe pas* de loi de composition $\mathscr{D}_t' \times \mathscr{D}_t' \longrightarrow \mathscr{D}_t'$, $(a, b) \mapsto a \oplus b$ telle que $\Phi'(a \oplus b) = \Phi'(a) + \Phi'(b)$ pour tous $a$ et $b$ dans $\mathscr{D}_t'$, et que les applications $\mathscr{D}_t' \longrightarrow \mathscr{D}_t'$, $x \mapsto a \oplus x$ et $x \mapsto x \oplus a$ soient toutes injectives lorsque $a$ parcourt $\mathscr{D}_t'$.

$b_1$) Soit $(a, b) \in \mathscr{D}_t' \times \mathscr{D}_t'$. Si $a = b$ on pose : $d(a, b) = 0$ ; si $a \neq b$ on pose : $d(a, b) = \exp(-\omega(a, b))$ où $\omega(a, b) = \text{Min}\,\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq b_n\}$. Montrer que pour tous $a$, $b$, $c$ dans $\mathscr{D}_t'$ : $d(a, c) \leqslant \text{Max}\,(d(a, b), d(b, c))$.

$b_2$) Montrer que $(\mathscr{D}_t', d)$ est un espace métrique complet, sans point isolé.

$b_3$) Montrer que dans $(\mathscr{D}_t', d)$, toute boule ouverte est un fermé. Qu'en déduit-on pour les composantes connexes de $(\mathscr{D}_t', d)$ ?

$b_4$) Montrer que les parties compactes de $(\mathscr{D}_t', d)$ sont les parties fermée

$c_1$) On munit $\mathbb{R}_+$ de sa distance usuelle. Montrer que l'application $\Phi' : (\mathscr{D}_t', d) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est uniformément continue. Est-elle lipschitzienne ?

$c_2$) Montrer que $\mathscr{D}_t$ est partout dense dans $(\mathscr{D}_t', d)$.

$c_3$) L'application $\Phi : \mathscr{D}_t \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est-elle un homéomorphisme ?

$d_1$) Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\Psi(x) = (a_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ l'élément $\Phi^{<-1>}(x)$ de $\mathscr{D}_t$. On fixe $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a_n(x)$, est en escalier sur tout segment $[0, A]\,(A > 0)$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 a_n(t)\,dt$. Préciser les points de continuité, de discontinuité, à droite ou à gauche de la fonction $f_n$.

$d_2$) Pour $n \in \mathbb{Z}$, étudier la continuité sur $(\mathscr{D}_t', d)$ de la fonction $g_n : a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto a_n$ ; cette fonction est-elle lipschitzienne ?

**Partie II :** On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-ev des suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ *de réels,* et $K$ la partie de $\mathscr{E}$ formée des suites $u = (u_n) \in \mathscr{E}$ telles que $u_n \in [0, 2]$ pour tout $n$. Soit $\mathscr{S}$ la partie de $K$ formée des suites $u = (u_n) \in \mathscr{E}$ telles que $(\forall n \geqslant 1)\ u_n \in \{0, 2\}$. Si $u = (u_n) \in \mathscr{E}$ et $v = (v_n) \in \mathscr{E}$, on pose :

$$\delta(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Min}\,(1, |u_n - v_n|)\,.$$

Vérifier que $\delta(u, v) \in \mathbb{R}_+$.

$a_1$) Montrer que $\delta$ est une distance sur $\mathscr{E}$.

$a_2$) On donne $N \in \mathbb{N}^*$. Si $u = (u_n) \in \mathscr{E}$, on pose $P_N(u) = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ muni de sa topologie usuelle. Montrer que $P_N : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue.

$a_3$) Existe-t-il sur $\mathscr{E}$ une norme dont $\delta$ soit la distance associée ?

$b_1$) Montrer que l'espace métrique $(\mathscr{E}, \delta)$ est complet.

$b_2$) Montrer que $K$ est une partie compacte dans $(\mathscr{E}, \delta)$.

$b_3$) Montrer que $\mathscr{S}$ est une partie compacte dans $(\mathscr{E}, \delta)$.

$c_1$) Soit $\varphi : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui envoie tout $a = (a_n)_{n \geqslant 1} \in \mathscr{S}$ sur $\varphi(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$. On désignera par $\mathscr{C}$ l'image de $\mathscr{S}$ par $\varphi$ et on notera $F : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{C}$ l'application de même graphe que $\varphi$. Montrer que $F$ est continue et bijective. En déduire que $F$ est un homéomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{C}$ et que $\mathscr{C}$ est un compact de $[0, 1]$.

$c_2$) Montrer que $\mathscr{C}$ n'admet aucun point isolé. Montrer que $\mathscr{C}$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Décrire $[0, 1] \setminus \mathscr{C}$.

$d_1$) Soit $L$ la partie de $K$ formée des suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ telles que $u_n \in \mathscr{C}$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $\alpha : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ une bijection fixée une fois pour toutes. Si $s \in L$, $s = (s_n)_{n \geqslant 1}$, on pose : $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{n,p}}{3^p}$, où $(a_{n,p})_{p \geqslant 1}$ est l'élément $a$ de $\mathscr{S}$ tel que $F(a) = s_n$. On définit alors l'élément $G(s) \in \mathscr{S}$ par : $G(s) = (v_q)_{q \geqslant 1}$, où $v_q = a_{\alpha(q)}$ pour tout $q$. Montrer que $G$ est un homéomorphisme de $L$ sur $\mathscr{S}$, et que $F \circ G$ est un homéomorphisme de $L$ sur $\mathscr{C}$.

$d_2$) Montrer que l'application $\Theta : \mathscr{C} \longrightarrow [0, 1]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ est continue et surjective (la suite $(a_n)$ écrite ici appartient, bien sûr, à $\mathscr{S}$).

$d_3$) On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\Theta_N : \mathscr{C}^N \longrightarrow [0, 1]^N\,, \quad (a_1, a_2, \dots, a_N) \mapsto (\Theta(a_1), \Theta(a_2), \dots, \Theta(a_N))$$

est continue et surjective. A l'aide de $d_1$), en déduire une application continue et surjective de $\mathscr{C}$ dans $[0, 1]^N$.

$d_4$) Construire de même une application continue et surjective de $\mathscr{C}$ dans $K$.

$e_1$) Soit $T$ l'un des espaces $[0, 1]^N$ pour $N \in \mathbb{N}^*$, ou l'espace $K$. On considère $T$ comme plongé dans le $\mathbb{R}$-evn $\mathbb{R}^n$ dans le premier cas, dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}$ dans le second cas. Soit $h : \mathscr{C} \longrightarrow T$ une application continue. On *prolonge* $h$ en $H : [0, 1] \longrightarrow T$ de la façon suivante : pour toute *composante connexe* $]\alpha, \beta[$ de $[0, 1] \setminus \mathscr{C}$, on pose :

$$H(t\beta + (1 - t)\,\alpha) = th(\beta) + (1 - t)\,h(\alpha) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1]$$

(autrement dit, $H|_{\mathscr{C}} = h$, et $H|_{[\alpha, \beta]}$ est affine pour toute composante connexe $]\alpha, \beta[$ de $[0, 1] \setminus \mathscr{C}$). Vérifier que $H$ est bien à valeurs dans $T$ et prouver que $H$ est continue.

$e_2$) En déduire l'existence de $H : [0, 1] \longrightarrow T$ *continue* et *surjective.*

## § XI.3 *CONNEXITÉ*

**DÉFINITION XI.3.1**

*Un espace topologique $T$ est dit* **connexe** *ssi les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $T$ sont $\varnothing$ et $T$. Une partie $E$ de $T$ est dite* **connexe** *ssi c'est un sous-espace topologique connexe de $T$.*

L'espace $T$ est donc connexe ssi les relations « $U$ et $V$ sont deux ouverts de $T$ tels que $U \cup V = T$ et $U \cap V = \varnothing$ » impliquent : « $U = \varnothing$ ou $V = \varnothing$ ». Ou encore, *par dualité*, $T$ est connexe ssi les relations « $A$ et $B$ sont fermés dans $T$, $A \cup B = T$ et $A \cap B = \varnothing$ » impliquent : « $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ ». Vu la définition d'un sous-espace, une *partie* $E$ de $T$ est connexe ssi, pour tout couple $(U, V)$ d'ouverts (resp. de fermés) de $T$ tels que $U \cap V \cap E = \varnothing$ et $E \subset U \cup V$, on a : $U \cap E = \varnothing$ ou $V \cap E = \varnothing$.

La notion d'espace connexe correspond à l'idée intuitive « d'espace d'un seul tenant ».

Voici tout d'abord deux propriétés simples, dans lesquelles $T$ désigne un espace topologique :

$(\Gamma_1)$ *Si $E$ est une partie connexe de $T$, alors* Adh $(E)$ *l'est aussi,* car alors des ouverts $U$, $V$ de $T$ tels que $U \cup V = \text{Adh}\,(E)$ et $U \cap V \cap \text{Adh}\,(E) = \varnothing$ ne peuvent rencontrer tous deux Adh $(E)$ sans rencontrer tous deux $E$.

$(\Gamma_2)$ *Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties connexes de $T$ ayant un point commun $a$ $\left(a \in \bigcap_{i \in I} E_i\right)$. Alors $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ est connexe.*

En effet, soit deux ouverts $U$ et $V$ de $T$ tels que $E \subset U \cup V$ et $U \cap V \cap E = \varnothing$. Pour tout $i$, $E_i \subset U \cup V$ et $E_i \cap U \cap V = \varnothing$, donc $E_i \cap U = \varnothing$ ou $E_i \cap V = \varnothing$. Raisonnons en supposant que $a \in U$ ; alors $(\forall i)\, a \in E_i \cap U$, donc $E_i \cap V = \varnothing$, d'où $E \cap V = \varnothing$. Finalement, $U \cap E = \varnothing$ ou $V \cap E = \varnothing$.

**THÉORÈME XI.3.1**

*Sur un espace topologique $T$, la relation linéaire $\mathcal{R}$ définie par « $a \,\mathcal{R}\, b$ ssi il existe une partie connexe $E$ de $T$ contenant $a$ et $b$ » est* **d'équivalence.** *Ses classes sont* **fermées** *et* **connexes.** *Ce sont les parties connexes de $T$* **maximales pour l'inclusion.**

*Démonstration :*

$\mathcal{R}$ est réflexive (un singleton est connexe), symétrique, et sa transitivité résulte de $(\Gamma_2)$. Les classes de $\mathcal{R}$ sont fermées à cause de $(\Gamma_1)$, elles sont connexes à cause de $(\Gamma_2)$. Et la définition de $\mathcal{R}$ montre que si $E$ est une classe de $\mathcal{R}$, toute partie connexe $F$ de $T$ contenant $E$ est nécessairement égale à $E$. ■

**DÉFINITION XI.3.2**

> *Avec les notations du théorème* XI.3.1, *les classes de* $\mathscr{R}$ *s'appellent* ***les composantes connexes*** *de* $T$.

***Exemple 1 :*** Les composantes connexes d'un espace discret $T$ sont les $\{x\}$, $x \in T$. Si $T = \mathbb{Q}$ (équipé de la *topologie usuelle*, induite par $\mathbb{R}$), les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$, car pour tous $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ avec $x < y$, choisissant $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $x < \theta < y$, les ouverts $U = \mathbb{Q} \cap \,]-\infty, \theta[$ et $V = \mathbb{Q} \cap \,]\theta, +\infty[$ de $\mathbb{Q}$ partagent $\mathbb{Q}$, et $x \in U$, $y \in V$ (noter que $\mathbb{Q}$ n'est pas discret).

***Exemple 2 :*** Soit $\omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$ usuel. Les composantes connexes du sous-espace $\omega$ de $\mathbb{R}$ sont les intervalles définis au § III.3 et déjà désignés sous le nom de composantes connexes : ce sont les intervalles maximaux pour l'inclusion inclus dans $\omega$.

Soit deux réels $a, b$ $(a \leq b)$, et $I$ une union finie d'intervalles contenue dans $[a, b]$. Les composantes connexes de $I$ sont les intervalles que nous avons appelés « composantes de $I$ » au § VII.2.

**THÉORÈME XI.3.2**

> *Soit $E$ et $F$ deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$. Si $f$ est* ***continue,*** *et $E$* ***connexe,*** *alors $f(E)$ est* ***connexe.***

*Démonstration :*

Soit deux ouverts $U$ et $V$ de $F$ tels que

$$U \cap V \cap f(E) = \varnothing \quad \text{et} \quad f(E) \subset U \cup V .$$

Alors $f^{-1}(U \cup V) = E = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, et

$$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U \cap V \cap f(E)) = \varnothing \quad \text{et} \quad f^{-1}(U) \quad \text{et} \quad f^{-1}(V)$$

sont ouverts (théorème X.5.1). Donc $f^{-1}(U) = \varnothing$ ou $f^{-1}(V) = \varnothing$, d'où $U \cap f(E) = \varnothing$ ou $V \cap f(E) = \varnothing$. ■

***Exemple 3 :*** Si l'espace topologique $T$ est connexe, toute fonction continue $f$ de $T$ dans $\mathbb{Z}$ (ou même de $T$ dans $\mathbb{Q}$) est constante, car $f(T)$ doit être une partie connexe de $\mathbb{Z}$ (resp. de $\mathbb{Q}$) et l'on a vu dans l'exemple 1 que les seules parties connexes de $\mathbb{Z}$ (resp. de $\mathbb{Q}$) en sont les singletons.

**THÉORÈME XI.3.3**

> *Les parties* ***connexes*** *de* $\mathbb{R}$ *en sont les* ***intervalles.***

*Démonstration :*

Soit $I$ une partie connexe de $\mathbb{R}$ : si $I$ n'est pas un intervalle, soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash I$ tel que $I \cap \,]-\infty, \alpha[ \neq \varnothing$ et $I \cap \,]\alpha, +\infty[ \neq \varnothing$.
Les ouverts $U = \,]-\infty, \alpha[$ et $V = \,]\alpha, +\infty[$ de

$U \cap V \cap I = \varnothing$ , $U \cap I \neq \varnothing$ , $V \cap I \neq \varnothing$ et $I \subset U \cup V$, donc $I$ n'est pas connexe.

Réciproquement, soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (on sait déjà que les singletons sont connexes). Supposons trouvés deux fermés $F_1$, $F_2$ de $\mathbb{R}$ tels que $F_1 \cap I$ et $F_2 \cap I$ partagent $I$ en deux parties non vides ; choisissons $a \in F_1 \cap I$ et $b \in F_2 \cap I$, en supposant $a < b$. Les ensembles $F_1 \cap [a, b]$ et $F_2 \cap [a, b]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$, non vides, bornés, disjoints et d'union $[a, b]$. L'ensemble $F_1 \cap [a, b]$ admet un *maximum,* noté $c$. Comme $c \notin F_2 \cap [a, b]$, on a : $]c, b] \subset F_2$ et $c < b$ (car $b \in F_2$). Donc $c \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}\,(]c, b])$, d'où $c \in \mathrm{Adh}_{\mathbb{R}}\,(F_2) = F_2$ et par suite $c \in F_2 \cap [a, b]$, ce qui est absurde. ■

En combinant les théorèmes XI.3.2 et XI.3.3, on voit que *l'image, par une fonction continue à valeurs réelles, d'un intervalle, est un intervalle ;* on retrouve donc ainsi le théorème des valeurs intermédiaires (théorème III.5.3).

***Remarque 1 :*** Réciproquement, il est facile de déduire le théorème XI.3.3 du théorème III.5.3. En effet, de manière générale, *un espace topologique $T$ est non connexe ssi il existe une fonction continue $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ d'image $\{0, 1\}$*. (C'est une conséquence immédiate du théorème X.5.1 : pour une telle $f$, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont deux ouverts non vides disjoints de réunion $T$ dans $T$ ; réciproquement si $U$ et $V$ sont deux tels ouverts dans $T$, la fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \in U$, $x \mapsto 1$ si $x \in V$, est continue).

Soit alors $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ; si $I$ n'était pas connexe, on aurait une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ d'image $\{0, 1\}$ et continue, ce qui mettrait en défaut le théorème des valeurs intermédiaires supposé acquis. Donc $I$ est connexe.

### Connexité par arcs

Soit $T$ un espace topologique, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow T$ une fonction continue. D'après les théorèmes XI.3.2 et XI.3.3, $f(I)$ est connexe dans $T$.

**DÉFINITION XI.3.3**

*Un espace topologique $T$ est dit* **connexe par arcs** *ssi* $(\forall\, (a, b) \in T^2)$, $\exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(\alpha < \beta)$, $\exists f : [\alpha, \beta] \longrightarrow T$, $f$ continue, *telle que* $f(\alpha) = a$ *et* $f(\beta) = b$.

**THÉORÈME XI.3.4**

|| *Tout espace topologique $T$* **connexe par arcs** *est* **connexe.**

*Démonstration :*

D'après la remarque précédant la définition XI.3.3, deux points quelconques de $T$ sont dans la même composante connexe de $T$. ■

Mais attention ! un espace connexe n'est pas toujours connexe par arcs. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le graphe $\Gamma$ de $f : ]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x$ 1 connexe (théorème XI.3.2). Donc $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ est connexe (cf. $(\Gamma_1)$), et cependant $\bar{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs (voir la figure 1).

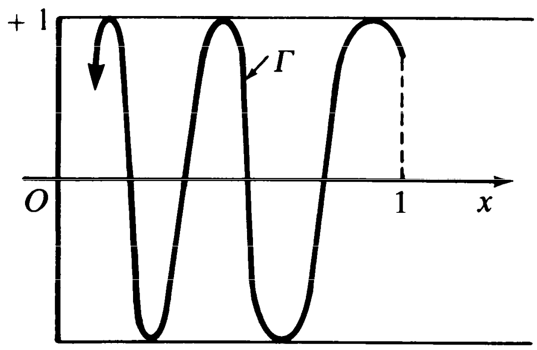



**Fig. 1.**

Nous allons voir que la distinction entre connexité et connexité par arcs s'efface dans un cas remarquable :

**Domaines d'un $\mathbb{R}$-evn**

Dans un $\mathbb{R}$-evn on appelle **domaine** tout **ouvert connexe.**

**THÉORÈME XI.3.5**

|| *Tout* ***domaine*** *$U$ d'un $\mathbb{R}$-evn $E$ est* ***connexe par arcs.***

*Démonstration :*

Supposons $U \neq \varnothing$ ; et soit $a \in U$. Notons $\omega$ l'ensemble des $x \in U$ qui peuvent être « *joints à a par un chemin continu tracé dans U* », c'est-à-dire pour lesquels il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha < \beta)$ et $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow U$ continue telle que $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = x$. Si $x \in \omega$, soit $r$ réel $> 0$ tel que $\mathbf{B}(x, r) \subset U$ ; alors $\mathbf{B}(x, r) \subset \omega$ (pour *joindre* $a$ à $y \in \mathbf{B}(x, r)$, on le *joint* à $x$, puis on *joint* $x$ à $y$ par le *rayon* $t \mapsto x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$). Donc $\omega$, voisinage de chacun de ses points est ouvert dans $E$, donc dans $U$. Mais si $x \in \mathrm{Adh}(\omega) \cap U$, soit $r$ réel $> 0$ tel que $\mathbf{B}(x, r) \subset U$, puis $b \in \omega$ tel que $d(x, b) < r$. On *joint* $a$ à $b$, puis on *joint* $b$ à $x$ par le *rayon* $t \mapsto b + t(x - b)$ $(t \in [0, 1])$, ce qui permet de *joindre* $a$ à $x$. Donc $x \in \omega$. Finalement $\omega$ est fermé *dans U*. Comme $a \in U$, on a $\omega \neq \varnothing$ . Etant à la fois ouvert et fermé dans $U$ et non vide, l'ensemble $\omega$ ne peut être que $U$. ■

***Exercice 1 :*** *a*) Dans un $K$-evn, les composantes connexes d'un ouvert sont des domaines.
*b*) Donner un ou plusieurs exemples de suite décroissante pour l'inclusion $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties fermées et connexes de $\mathbb{R}^2$ telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ soit non connexe.

***Exercice 2 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique *connexe* et *non borné*. Montrer que toute sphère de $E$ est non vide. En déduire que $E$ n'est pas dénombrable.

***Exercice 3 :*** *a*) Pour $n \geqslant 2$, un domaine non vide $D$ de $\mathbb{R}^n$ n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$ (remarquer que $D$ privé d'un point est encore un domaine).
*b*) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique on considère un damier $3 \times 3$ dont les carrés élémentaires ont pour longueur des côtés 1. On colorie certains des 24 côtés fermés de ces carrés. Combien de figures distinctes obtient-on, en convenant d'identifier deux figures homé

***Exercice 4 :*** Montrer que dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ le complémentaire de tout pavé compact est connexe.

***Exercice 5 :*** Soit $E$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$. Montrer que si une partie connexe $\Gamma$ de $E$ rencontre Int $(A)$ et Int $(E \setminus A)$, elle rencontre Fr $(A)$.

***Exercice 6 :*** *a*) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points qui ont au moins une coordonnée irrationnelle est connexe.

*b*) Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple très simple de parties $A$ et $B$ homéomorphes telles que $\mathbb{R}^2 \setminus A$ soit connexe et $\mathbb{R}^2 \setminus B$ ne le soit pas.

***Exercice 7 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique compact tel que :

$$(\forall x \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+) \quad \text{Adh}\,(\mathbf{B}(x, r)) = \tilde{\mathbf{B}}(x, r)\,.$$

Montrer que toute boule ouverte de $(E, d)$ est connexe.

***Exercice 8 :*** Montrer que la partie $\Gamma$ suivante de $\mathbb{R}^2$ est connexe :

$$\Gamma = \left( \bigcup_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} (\{r\} \times [0, 1]) \right) \cup \left( \bigcup_{r \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}} (\{r\} \times [-1, 0[) \right).$$

$\Gamma$ est-elle connexe par arcs ?

***Exercice 9 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique.

*a*) Soit $a \in E$ et $\varepsilon$ réel $> 0$. On note $X_{a,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels existent $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E$ tels que $a_0 = a, \ldots, a_n = x$ et $(\forall i \in [\![0, n-1]\!])\ d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$. Montrer que $X_{a,\varepsilon}$ est à la fois ouvert et fermé dans $E$ et que c'est un voisinage de $a$.

*b*) On suppose $(E, d)$ compact. Si $a \in E$, montrer que $X_a = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*} X_{a,\varepsilon}$ est la composante connexe de $a$ dans $E$ et que c'est l'intersection des voisinages à la fois ouverts et fermés de $a$ dans $E$.

***Exercice 10 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces *affines* de $E$ de codimension $\geqslant 2$. Montrer que l'ensemble $R = E \setminus \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \right)$ est connexe par arcs.

*Indication :* Soit $a$ et $b$ deux points distincts de $R$. Considérer des hyperplans affines $(\mathscr{H}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(\mathscr{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$) tels que $(\forall k)$ $\{a\} \cup F_k \subset \mathscr{H}_k$, $\{b\} \cup F_k \subset \mathscr{L}_k$. Utiliser l'exercice 20 du § XI.2 pour prouver que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathscr{H}_k \cup \mathscr{L}_k) \neq E$ ; si $c \in E \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\mathscr{H}_k \cup \mathscr{L}_k)$, utiliser $c$ pour construire un chemin continu de $a$ à $b$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

***Exercice 11 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$ et $U$ un domaine de $E$. Si $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-espaces affines de $E$ de codimension $\geqslant 2$, alors $U \setminus \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k \right)$ est connexe par arcs (utiliser la méthode de l'exercice 10).

***Exercice 12 :*** Soit $X$ un espace topologique connexe et $F$ un fermé de $X$. Si Fr $(F)$ est connexe, montrer que $F$ est connexe.

***Exercice 13 :*** Dans un espace topologique $E$, soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts connexes non vides *décroissante* pour l'inclusion. Montrer que $L = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n$ est non vide, compact et connexe.

*Indication :* Utiliser l'exercice 1 du § XI.1.

***Exercice 14 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$. On donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E$ bornée, telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0_E$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est non vide, *compact* et *connexe*.

***Exercice 15 :*** Soit $X$ et $Y$ deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ *surjective* et *ouverte* (*i.e.* l'image de tout ouvert de $X$ est ouverte dans $Y$). On suppose que $Y$ est conne
tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est connexe. Montrer que $X$ est connexe.

***Exercice 16 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ polynomiale non nulle. Montrer que $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(0)$ est connexe par arcs, ouvert et dense dans $\mathbb{C}^n$.

*Indication :* Traiter d'abord le cas $n = 1$.

En déduire que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Que dire si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ ?

***Exercice 17 :*** Soit $a$ et $B$ deux parties d'un espace topologique $E$.

*a*) Si $A$ et $B$ sont fermées et si $A \cup B$ et $A \cap B$ sont connexes, alors $A$ et $B$ sont connexes.

*b*) Si $A$ et $B$ sont connexes et si $\mathrm{Adh}\,(A) \cap B \neq \varnothing$ , alors $A \cup B$ est connexe.

***Exercice 18 :*** Soit $E$ un espace topologique connexe de cardinal $\geqslant 2$.

*a*) Soit $A$ une partie connexe de $E$, $B$ une partie de $A' = E \setminus A$ ouverte et fermée *dans* $A'$. Montrer que $A \cup B$ est connexe (utiliser l'exercice 14 du § X.2 avec $A \cup B$ et $A'$).

*b*) Soit $A$ une partie connexe de $E$ et $B$ une composante connexe de $A' = E \setminus A$. Montrer que $B' = E \setminus B$ est connexe.

*c*) En déduire qu'on peut trouver deux parties $M$ et $N$ de $E$ distinctes de $E$ et connexes telles que $M \cup N = E$ et $M \cap N = \varnothing$ .

***Exercice 19 :*** Soit $X$ et $Y$ deux espaces *connexes*, $A$ (resp. $B$) une partie de $X$ (resp. de $Y$) distincte de $X$ (resp. $Y$). Montrer que $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ est connexe dans $X \times Y$.

***Exercice 20 :*** Soit $X$, $Y$, $Z$ trois espaces topologiques et $f : X \times Y \longrightarrow Z$ une application telle que $(\forall y \in Y)$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue, et : $(\forall x \in X)$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est continue.

Montrer que, si $X$ et $Y$ sont connexes, alors $\mathrm{Im}\,(f)$ est connexe.

***Exercice 21 :*** *a*) Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ *fermée* et *dénombrable*, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $f$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus A$, alors $f$ est constante.

*b*) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble triadique de Cantor (cf. exercice 24 du § X.2, partie II). Construire une fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, constante sur chaque composante connexe de $[0, 1] \setminus \mathscr{C}$, mais non constante.

***Exercice 22 :*** On reprend l'espace topologique $\Gamma$ des cercles de l'exercice 31 du § XI.1. On donne trois points distincts $M_1$, $M_2$, $M_3$ de $\mathbb{R}^2$. Prouver que l'ensemble $U$ des cercles $C \subset \Gamma$ ne contenant aucun $M_i$ est un ouvert dense de $\Gamma$ et donner les composantes connexes de $U$.

***Exercice 23 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. On note

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\} \ .$$

*a*) Montrer que $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe *connexe par arcs* de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (on utilisera la décomposition d'une matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ en produit de matrices de transvections et de dilatations (cf. Tome 1, Chap. XI) pour joindre par un chemin continu $M \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ à $I_n$).

*b*) En déduire quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ; vérifier que ce sont des ouverts de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$.

*c*) Montrer par la même méthode que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs, ce qui a déjà été proposé autrement dans l'exercice 16.

***Exercice 24*** (Grassmanniennes) : Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ ; on note $\|\,.\,\|$ sa norme, $d$ la distance euclidienne associée, et $S$ la sphère unité de $E$. Si $L$ et $M$ sont deux sous-$\mathbb{R}$-ev non nuls de $E$, on pose :

$$\theta(L, M) = \mathrm{Max}\left(\sup_{x \in S \cap M} d(x, L),\ \sup_{x \in S \cap L} d(x, M)\right) .$$

Pour tout sous-$\mathbb{R}$-ev $H$ de $E$, on note $P_H$ le projecteur orthogonal de $E$ d'image $H$ et $H^{\perp}$ le supplémentaire orthogonal de $H$.

*a*) Si $L$ et $M$ sont deux sous-$\mathbb{R}$-ev non nuls de $E$, prouver : $(\forall x \in M)$ $d(x, L) = \|P_M(x) - P_L(x)\|$. En déduire : $\theta(L, M) = \|\!| P_M - P_L |\!\|$ (on prouvera d'abord que

$$(\forall x \in E) \quad \|(P_M - P_L)(x)\|^2 = \|P_M(\mathrm{Id}_E - P_L)(x)\|^2 + \|(\mathrm{Id}_E - P_M)$$

*b*) Montrer que $\theta$ est une distance sur l'ensemble $\check{\mathscr{G}}(E)$ des sous-$\mathbb{R}$-ev non nuls de $E$. Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on notera $\mathscr{G}_p(E)$ l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension $p$ de $E$.

*c*) Si $L \in \check{\mathscr{G}}(E)$ et $M \in \check{\mathscr{G}}(E)$, prouver : $\theta(L^\perp, M^\perp) = \theta(L, M)$.

*d*) Pour $L \in \check{\mathscr{G}}(E)$ et $M \in \check{\mathscr{G}}(E)$, prouver :

$$(\theta(L, M) = 1) \Leftrightarrow (L \cap M^\perp \neq \{0\} \text{ ou } M \cap L^\perp \neq \{0\}).$$

En déduire que si $\theta(L, M) < 1$, alors $\dim(L) = \dim(M)$.

*e*) Montrer que l'espace métrique $(\check{\mathscr{G}}(E), \theta)$ est compact. Pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$, montrer à l'aide de l'exercice 23 que $\mathscr{G}_p(E)$ est connexe par arcs ; enfin prouver que les $\mathscr{G}_p(E)$ $(p \in [\![1, n]\!])$ sont les composantes connexes de $\check{\mathscr{G}}(E)$ et qu'ils sont compacts.

***Exercice 25 :*** On donne $k \in \mathbb{N}^*$ et des fonctions $a_1, a_2, \dots, a_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiales. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^k + a_1(x)\, y^{k-1} + \cdots + a_k(x)$. Montrer que $f^{-1}(0)$ et $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(0)$ ont un nombre fini de composantes connexes, et que ces composantes sont connexes par arcs.

***Exercice 26 :*** Soit $n$ entier $\geqslant 1$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto$ nombre de racines distinctes (dans $\mathbb{C}$) du polynôme $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$. Etudier la continuité de la fonction $f$.

***Exercice 27 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, et $\check{\mathscr{G}}(E)$ l'ensemble des sous-$\mathbb{R}$-ev non nuls de $E$. Montrer que les distances $\theta$ définies sur $\check{\mathscr{G}}(E)$ comme à l'exercice 24 par les diverses structures euclidiennes de $E$ sont toutes topologiquement équivalentes. Sont-elles équivalentes ?

***Exercice 28 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-evn non nul de dimension finie et $\Omega$ un ouvert de $E$. Montrer que l'ensemble des composantes connexes de $\Omega$ est au plus dénombrable.

Ce résultat demeure-t-il vrai si $E$ n'est pas supposé de dimension finie ?

## § XI.4 *SÉRIES DANS UN EVN*

### Langage de base

Soit $E$ un $K$-evn ; pour une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $E$, on peut étendre de façon naturelle le vocabulaire introduit au § II.5 : la suite $(S_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ $(n \in \mathbb{N})$ s'appelle **suite des sommes partielles** de la **série** $\sum_n u_n$. On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** ssi la suite $(S_n)$ converge dans $E$, et si c'est le cas, $\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n$ est appelé la **somme** de la série $\sum u_n$ et noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. On dit que la série $\sum u_n$ **diverge** lorsqu'elle ne converge pas. Si la série $\sum_n u_n$ converge, et si $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, la suite $(R_n)$ définie par $(\forall n)$ $R_n = S - S_n$ s'appelle **suite des restes ;** pour $n$ fixé, $R_n$ est le **reste d'ordre** $\boldsymbol{n}$**.** Dans l'étude d'une série $\sum u_n$, on parle de $u_n$ en disant que c'est le **terme général** de la série $\sum u_n$.

Une série $\sum u_n$ à valeurs dans $E$ est dite **absolument conve** *série numérique* $\sum \|u_n\|$ converge, et **commutativement convergente** ssi, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, la série $\sum\limits_{n} u_{\sigma(n)}$ converge.

**Extension de propriétés des séries aux séries dans un evn.**

Les propriétés générales des séries vues au § II.5 peuvent être reprises mot pour mot sans changer les démonstrations. Ainsi, *pour qu'une série $\sum u_n$ à valeurs dans E converge, il est nécessaire que son terme général $u_n$ tende vers $0_E$.*

De même, on ne modifie pas la *nature* d'une série $\sum u_n$ en modifiant un nombre *fini* des $u_n$. Si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum\limits_{k \geqslant n+1} u_k$ converge pour tout $n$ et a pour somme le reste $R_n$. Si, à partir d'une série *convergente* $\sum u_n$ de somme $S$, on forme une nouvelle série par *groupement de termes consécutifs* (cf. § II.5), la nouvelle série converge et a pour somme $S$. Si on *supprime les termes nuls* de la suite $(u_n)$, on obtient une suite $(v_k)$ telle que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_k$ ont *même nature,* et, en cas de convergence, *même somme.*

Les propriétés des limites de suites à valeurs dans un evn (cf. proposition X.4.3 (II)) montrent que *l'ensemble des suites $(u_n)$ de E telles que la série $\sum u_n$ converge forme un sous-K-*ev *de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$, sur lequel l'application $(u_n) \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ est K-linéaire.*

Notons enfin que *si on remplace la norme de E par une norme équivalente,* une série $\sum u_n$ de *E ne change pas de nature,* et, en cas de convergence, *garde la même somme* (cf. fin du § X.5).

**Le critère de Cauchy**

Notons $(S_n)$ la suite des sommes partielles d'une série $\sum u_n$ d'un $K$-evn $E$. Pour tous entiers $n, p$ $(n < p)$, on a : $S_p - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{p} u_k$. En traduisant à l'aide de cette expression, la propriété « la suite $(S_n)$ est de Cauchy » on obtient donc, en tenant compte de la définition XI.2.2 et de $(\mathscr{C}_2)$, § XI.2 :

**THÉORÈME XI.4.1**

*Soit $\sum u_n$ une série dans un K-*evn *E.*

(I) *Si cette série converge, elle vérifie le* **critère de Cauchy des séries :**

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2),$$
$$(N \leqslant n < p) \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right\| \leqslant \varepsilon .$$

(II) *Si $E$ est* ***complet,*** *le critère de Cauchy ci-dessus est nécessaire et* ***suffisant*** *pour que la série $\sum u_n$* ***converge.***

En particulier, **si $E$ est de dimension finie,** le critère de Cauchy est une C.N.S. de convergence d'une série $\sum u_n$. Le théorème XI.4.1 conduit à une intéressante généralisation du théorème II.5.5.

**Théorème XI.4.2**

*Soit $E$ un $K$-evn. Si $E$ est* ***complet,*** *toute série* ***absolument convergente*** *de $E$ est* ***convergente.***
*Réciproquement, si toute série absolument convergente de $E$ est convergente, alors $E$ est complet.*

*Démonstration :* Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente à valeurs dans $E$ supposé complet. En remplaçant, dans la preuve du théorème II.5.5, les valeurs absolues par des normes, on voit qu'elle satisfait au critère de Cauchy des séries, donc la série $\sum u_n$ converge (théorème XI.4.1).

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente de $E$ converge. Soit $(a_n)$ une suite de Cauchy de $E$. Pour chaque entier $n$, soit $N_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2) \quad (N_n \leqslant p < q) \Rightarrow \|a_p - a_q\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Construisons par récurrence une suite strictement croissante $(p_n)$ d'entiers telle que $(\forall n)\ p_n > N_n$. Alors $(\forall n)\ \|a_{p_{n+1}} - a_{p_n}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, donc la série $\sum (a_{p_{n+1}} - a_{p_n})$ est absolument convergente, donc converge par hypothèse ; donc la *suite* $(a_{p_n})$, qui est extraite de $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge. Et d'après $(\mathscr{C}_3)$, § XI.2, la suite $(a_n)$ converge. En fin de compte, toute suite de Cauchy de $E$ converge. ■

***Remarque 1 :*** Le $K$-evn $E$ étant supposé complet, et la série $\sum u_n$ de $E$ absolument convergente, on a $(\forall n)\ \left\|\sum_{k=0}^{n} u_k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$, d'où par passage à $\lim_{n \to \infty}$ :

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| .$$

En appliquant cette propriété au reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, on obtient la fondamentale **majoration du reste :** $\|R_n\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\|$.

**Séries d'un $K$-ev de dimension finie**

Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$ ; munissons-le de la *topologie des normes*. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $E$, dont $(S_n)$ est la suite des sommes partielles associée, la série $\sum u_n$ est dite **convergente** ssi la suite $(S_n)$ converge *dans l'espace topologique* $E$ et l'on définit facilement les termes : *somme* $S$ d'une série convergente $\sum u_n$, suite $(R_n)$ des restes, *reste d'ordre* $n$ de la série $\sum u_n$.

Or, on sait que $E$ admet au moins une norme, et que toutes les normes de $E$ sont *équivalentes entre elles*. Donc, pour une suite donnée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E$, il revient au même de dire :

(1) Pour une norme $\mathcal{N}$ *donnée* de $E$, la série $\sum u_n$ converge dans le $K$-evn $(E, \mathcal{N})$.

(2) Pour *toute* norme $\mathcal{N}$ de $E$, la série $\sum u_n$ converge dans le $K$-evn $(E, \mathcal{N})$.

(3) La série $\sum u_n$ converge dans $E$ muni de la *topologie* des normes.

De plus, lorsque ces conditions sont réalisées, la somme de la série $\sum u_n$ dans $(E, \mathcal{N})$ *ne dépend pas* du choix de la norme $\mathcal{N}$ de $E$, et c'est la somme de la série $\sum u_n$ dans $E$ muni de la topologie des normes. D'autre part (cf. corollaire 4 du théorème XI.1.7) pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de $E$, si $(\forall n)\ u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i}\, e_i$, la convergence de la série $\sum_n u_n$ équivaut à celle de toutes les séries numériques $\sum_n u_{n,i}$, et en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,i} \right) e_i \, .$$

Enfin, toujours grâce à l'équivalence des normes, il revient au même de dire :

(4) Pour une norme $\mathcal{N}$ de $E$, la série $\sum u_n$ converge absolument.

(5) Pour toute norme $\mathcal{N}$ de $E$, la série $\sum u_n$ converge absolument.

On dira alors simplement que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** sans préciser de norme, et l'on sait qu'alors (cf. théorème XI.4.2) la série $\sum u_n$ est convergente.

En résumé, *pour une série* $\sum u_n$ *à valeurs dans un* $K$-ev $E$ **de dimension finie,** *on peut parler de convergence ou divergence, de somme, de convergence absolue, de reste d'ordre n, sans avoir à préciser la norme choisie. Pour n'importe quel choix de base de E, toutes ces notions se ramèner* *analogues pour les séries numériques formées en prenant les composantes dans cette base.*

**Exponentielle dans une algèbre de Banach**

Considérons maintenant une *K-algèbre de Banach* non nulle $\mathscr{A}$, d'élément unité $e$, dans laquelle nous fixons un élément $u \in \mathscr{A}$. A partir de $(\forall (a, b) \in \mathscr{A}^2)\ \ \|ab\| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$, une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$ (attention ! cette inégalité ne subsiste pas pour $n = 0$, puisque $\|e\| \geqslant 1$, l'inégalité pouvant être stricte).

La série $\sum \frac{\|u^n\|}{n!}$ est donc convergente, et il s'ensuit que la série $\sum_n \frac{1}{n!} u^n$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ est absolument convergente, donc converge. Sa somme s'appelle **exponentielle de u,** et se note $\exp(u)$. On a donc, par définition :

$$(6) \qquad \boxed{(\forall u \in \mathscr{A})\ \ \exp(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n}\ .$$

***Exemple 1 :*** Soit $\lambda \in K$. Alors $\exp(\lambda \operatorname{Id}_E)$ (où $E$ est le $K$-ev sous-jacent à $\mathscr{A}$) $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda \operatorname{Id}_E)^n$ (et compte tenu du fait que $\mathscr{A}$ est une algèbre et que $(\operatorname{Id}_E)^n = \operatorname{Id}_E$) $= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n\right) \operatorname{Id}_E = \exp(\lambda) \operatorname{Id}_E$.

Bien sûr la définition (6) est choisie pour que, si $\mathscr{A} = K$, on retrouve l'exponentielle ordinaire d'un nombre réel ou complexe. Mais l'analogie risque d'être trompeuse : **si $\mathscr{A}$ n'est ni $\mathbb{R}$, ni $\mathbb{C}$, la propriété fondamentale de l'exponentielle ordinaire :**

$$(\forall (\lambda, \mu) \in K^2)\quad \exp(\lambda + \mu) = \exp(\lambda) \times \exp(\mu)$$

**ne s'étend pas à l'exponentielle des éléments de $\mathscr{A}$.**

***Exemple 2 :*** Prenons $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Pour la norme $\| \cdot \|$ définie par

$$A = [a_{i,j}] \mapsto \|A\| = 2 \max_{(i,j) \in \{1,2\}^2} |a_{i,j}|\ ,$$

$\mathscr{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre normée, complète puisque de dimension finie $p = 4$. Prenons par exemple

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\pi/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \pi/2 & 0 \end{bmatrix}$$

pour lesquelles le calcul de l'exponentielle est rapide. On a :

$$\exp(U) = \begin{bmatrix} 1 & -\pi/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \exp(V) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pi/2 & \ \end{bmatrix}$$

d'où $$\exp(U)\exp(V) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\pi^2}{4} & -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

alors que $\exp(U+V) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ce qui est très différent !

**Exponentielle dans une *K*-algèbre de dimension finie**

Soit $\mathscr{A}$ une $K$-algèbre de dimension finie $p \geqslant 1$, d'élément unité $e$. D'après tout ce qui précède, et en tenant compte du corollaire 6 du théorème XI.1.7, pour tout $u \in \mathscr{A}$, la série $\sum_n \frac{1}{n!} u^n$ est absolument convergente, donc convergente, et pour toute norme d'algèbre $\mathscr{N}$ de $\mathscr{A}$, sa somme est l'exponentielle de $u$ dans l'algèbre normée $(\mathscr{A}, \mathscr{N})$. Cette somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$ sera notée $\exp(u)$ et appelée simplement **exponentielle de $u$ dans $\mathscr{A}$**, sans qu'il soit besoin de préciser sur $\mathscr{A}$ une norme d'algèbre.

Pour toute base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ de $\mathscr{A}$, si, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $(a_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est la suite des coordonnées de $u^n$ dans $\mathscr{B}$, on a :

$$\exp(u) = \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_{n,i} \right) \varepsilon_i \,. \tag{7}$$

Un exemple fondamental est celui où $\mathscr{A} = \mathrm{Hom}_K(E)$ $(= \mathscr{L}_K(E))$, $E$ étant un $K$-ev donné de dimension finie $p \geqslant 1$. Un autre exemple (qui se ramène d'ailleurs au précédent) est celui où $\mathscr{A} = \mathfrak{M}_p(K)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$.

**Théorème XI.4.3**

> *Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E$. Soit $u \in \mathrm{Hom}_K(E)$, et posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors :*
>
> $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp(u)) = \exp(M)}\,.$$

*Démonstration :*

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, soit $u_{ij} \in \mathrm{Hom}_K(E)$ défini par $u_{ij}(e_k) = \delta_{kj}\, e_i$ ($\delta$ = symbole de Kronecker). On sait que $(u_{ij})_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}$ est une base du $K$-ev $\mathrm{Hom}_K(E)$, et l'application $\mathrm{Hom}_K(E) \longrightarrow \mathfrak{M}_p(K)$, $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ associe précisément à chaque $u \in \mathrm{Hom}_K(E)$ la famille $(a_{ij})$ de ses coordonnées dans cette base $(u_{ij})$ : cette application est donc un *homéomorphisme pour les topologies des normes* de $\mathrm{Hom}_K(E)$ et $\mathfrak{M}_p(K)$ (corollaire 2 du théorème XI.1.7), et comme c'est aussi un *isomorphisme de $K$-algèbres* (ce qui entraîne $(\forall n)$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$), la conclusion en résulte. ■

**COROLLAIRE**

*Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$, et soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ des sous-$K$-ev non nuls de $E$ tels que $\bigoplus_{i=1}^{q} E_i = E$. Donnons-nous $u \in \mathrm{Hom}_K(E)$ laissant stable chaque $E_i$, et posons $u_i = u \|_{E_i}$ pour chaque $i$. Alors $\exp(u) = \bigoplus_{i=1}^{q} \exp(u_i)$.*

*Démonstration :*

Soit $\mathscr{B}$ une base ordonnée de $E$ formée en *juxtaposant* des bases ordonnées $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_q$ de $E_1, \dots, E_q$ respectivement. Posons

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \quad \text{et} \quad (\forall i \in [\![1, q]\!]) \quad M_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_i}(u_i)\,.$$

Alors, *par blocs,*

$$M = \mathrm{diag}\,(M_1, \dots, M_q) \quad \text{d'où} \quad (\forall n)\ M^n = \mathrm{diag}\,(M_1^n, \dots, M_q^n).$$

Par un passage à la limite immédiat, il s'ensuit : $\exp(M) = \mathrm{diag}\,(\exp(M_1), \dots, \exp(M_q))$, d'où d'après le théorème XI.4.3

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp(u)) &= \mathrm{diag}\,(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\exp(u_1), \dots, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_q}(\exp(u_q)))) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\exp(u_1) \oplus \cdots \oplus \exp(u_q))\end{aligned}$$

ce qui entraîne bien :

$$\exp(u) = \bigoplus_{i=1}^{q} \exp(u_i)\,. \quad \blacksquare$$

## Produit de séries absolument convergentes dans des evn

**THÉORÈME XI.4.4**

*Soit $E$, $F$ et $G$ trois $K$-evn* ***de Banach*** *et $\mu : E \times F \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \,.\, y$ une application* ***bilinéaire*** *et* ***continue.*** *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries* ***absolument convergentes*** *(donc convergentes) respectivement de $E$ et $F$, et si $(\forall n)\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$, alors la série $\sum w_n$ est* ***absolument convergente*** *(donc convergente) dans $G$ et sa somme est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right).$$

*Démonstration :*

Aucune assertion n'est affectée, aucune hypothèse modifiée, aucune somme de série convergente changée si on remplace les normes de $E$, $F$, $G$ par des normes équivalentes. Or, notons $\mathcal{N}_E$, $\mathcal{N}_F$, $\mathcal{N}_G$ les normes données de $E$, $F$, $G$. Choisissons $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(\forall (x, y) \in E \times F) \quad \mathcal{N}_G(x \cdot y) \leqslant C \mathcal{N}_E(x) \mathcal{N}_F(y)$. En posant $\|x\| = C \mathcal{N}_E(x)$, $\|y\| = C \mathcal{N}_F(y)$ et $\|z\| = C \mathcal{N}_G(z)$ pour $(x, y, z) \in E \times F \times G$, on obtient sur $E$, $F$ et $G$ des normes équivalentes à $\mathcal{N}_E$, $\mathcal{N}_F$, $\mathcal{N}_G$ respectivement, et telles que

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \, \|y\| .$$

Autrement dit, il suffit de prouver le théorème XI.4.4 dans l'hypothèse où

$$(\forall (x, y) \in E \times F) \quad \|x \cdot y\| \leqslant \|x\| \, \|y\| .$$

Or dans ce cas, en tenant compte du théorème XI.4.1, il suffit de reprendre pas à pas la démonstration du théorème IX.5.1 (II) en y remplaçant les valeurs absolues par des normes. ■

**Application à l'exponentielle**

Reprenons une $K$-algèbre de Banach non nulle $A$, d'élément unité $e$.

**Théorème XI.4.5**

> *Soit deux éléments $u$ et $v$* **permutables** *(i.e. $uv = vu$) d'une $K$-algèbre $\mathcal{A}$ de Banach non nulle, d'élément unité $e$. alors :*
>
> (8) $$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v) = \exp(v) \exp(u) .$$

*Démonstration :*

On a, en appliquant le théorème XI.4.4 :

$$\exp(u) \cdot \exp(v) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n , \quad \text{où} \quad (\forall n) \quad w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!\,(n-p)!} u^p v^{n-p} .$$

Mais puisque $uv = vu$, la *formule du binôme* (cf. Tome 1, Chap. III) montre que

$$(u + v)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} u^p v^{n-p} , \quad \text{d'où :} \quad w_n = \frac{1}{n!} (u + v)^n ,$$

et par suite :

$$\exp(u) \cdot \exp(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (u + v)^n = \exp(u + v). \quad ■$$

***Remarque 2 :*** Si $u$ et $v$ ne sont pas permutables, il reste vrai que

$$\exp(u) \cdot \exp(v) = \sum_{p=0}^{\infty} \left( \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!\,(n-p)!} u^p v^{n-p} \right) ,$$

mais ce qui est modifié, c'est qu'en général, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}(u+v)^n$ et $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} u^p v^{n-p}$ sont distincts, du fait que le développement exact de $(u+v)^n$ est $(u+v)^n = \sum_{J \subset [\![1,n]\!]} P_J$, où pour chaque $J \subset [\![1,n]\!]$, $P_J = x_1 x_2 \dots x_n$ en notant $x_i = u$ pour $i \in J$ et $x_i = v$ pour $i \notin J$, et il est clair que $P_J$ ne se réduit plus à $u^p v^{n-p}$ à cause de l'ordre des facteurs.

Voici des conséquences simples, mais importantes, de ce théorème XI.4.5 dont nous conservons les notations et hypothèses :

• Pour $u \in \mathscr{A}$ fixé, étant donné que $(\forall(\lambda,\mu) \in K^2)$ $(\lambda u).(\mu u) = (\mu u).(\lambda u) = \lambda\mu \, . \, u^2$, on en déduit :

$$(9) \quad \forall(\lambda,\mu) \in K^2 \quad \exp(\lambda u).\exp(\mu u) = \exp((\lambda+\mu)u) = \exp(\mu u).\exp(\lambda u).$$

• En particulier,

$$\exp(u).\exp(-u) = \exp(0_{\mathscr{A}}) = e = \exp(-u).\exp(u).$$

Donc **$\exp(u)$ est toujours un élément inversible de $\mathscr{A}$.**

• En conséquence, pour $u \in \mathscr{A}$ fixé, *l'application* $\mathscr{E}_u : K \longrightarrow \mathscr{A}$, $\lambda \mapsto \exp(\lambda u)$ *définit un homomorphisme du groupe additif* $(K,+)$ *dans le groupe des éléments inversibles de* $\mathscr{A}$.

• Notons enfin que *la relation* (8) *a lieu chaque fois que* $u$ *et* $v$ *sont deux éléments* **permutables** *d'une $K$-algèbre de dimension finie* $\geqslant 1$.

***Exemple 3 :*** Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, dans lequel on donne $u \in \mathrm{Hom}_K(E)$ de polynôme caractéristique $\chi_u(X)$, *dissocié dans* $K[X]$, sous la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$$

($p \geqslant 1$, les $\alpha_i \geqslant 1$ et les $\lambda_i$ distincts). Pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$, soit $N_i = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \,\mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique de $u$ relatif à la valeur propre $\lambda_i$ (qui est $u$-stable) et $u_i = u \|_{N_i}$. On sait que $\dim_K(N_i) = \alpha_i$ et que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} N_i$ (cf. Tome 1, § XV.5). Posons aussi, pour chaque $i$, $\nu_i = u_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N_i}$ ; $\nu_i$ est nilpotent, de période $\beta_i \in [\![1,\alpha_i]\!]$. La décomposition de $u$ en somme d'un diagonalisable et d'un nilpotent *permutables* (cf. Tome 1, théorème XV.5.5, page 643) est :

$$u = \Delta + \nu\,, \quad \text{où} \quad \Delta = \bigoplus_{i=1}^{p} \lambda_i \,\mathrm{Id}_{N_i} \quad \text{et} \quad \nu = \bigoplus_{i=1}^{p} \nu_i\,.$$

On en déduit (conséquence du théorème XI.4.5) :

$$\exp(u) = \exp(\Delta) \,.\, \exp(\nu) = \exp(\nu) \,.\, \exp(\Delta) \,.$$

Cela fournit une première expression globale de $\exp(u)$ sous forme d'une somme *finie,* car (puisque $\nu$ est nilpotent, et que sa période est $\leqslant n$) $\exp(\nu) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, \nu^k$, ce qui donne :

$$\exp(u) = \exp(\Delta) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, \nu^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\, \nu^k \exp(\Delta) \,.$$

Mais le corollaire du théorème XI.4.3 permet d'affiner, car il donne, en tenant compte de l'exemple 1 :

$$\exp(\Delta) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_i}\, \mathrm{Id}_{N_i}\,, \quad \exp(\nu) = \bigoplus_{i=1}^{p} \exp(\nu_i) = \bigoplus_{i=1}^{p} \left( \sum_{k=0}^{\beta_i - 1} \frac{1}{k!}\, \nu_i^k \right) ,$$

d'où enfin :

$$\boxed{\exp(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \left( \mathrm{e}^{\lambda_i} \sum_{k=0}^{\beta_i - 1} \frac{1}{k!}\, \nu_i^k \right)} \,.$$

Nous avons vu au Tome 1, exemple 4 du § XV.5, comment on peut tirer parti de cette expression finie de $\exp(u)$.

**Convergence absolue et convergence commutative**

Compte tenu du théorème XI.4.2, on voit que la démonstration du théorème IX.4.3 peut être reprise mot à mot dans un $K$-evn de Banach, en remplaçant les valeurs absolues par des normes, d'où :

**THÉORÈME XI.4.6**

*Dans un $K$-evn $E$ de Banach, si une série $\sum u_n$ est absolument convergente, elle est commutativement convergente, et pour toute $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, on a : $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, la série $u_{\sigma(n)}$ étant absolument convergente.*

En revanche, le théorème IX.4.4 est en défaut (cf. exercice 2) lorsque $E$ n'est pas de dimension finie.

Si $E$ est de dimension finie, en passant aux coordonnées dans une base, on étend facilement les théorèmes IX.4.3 et IX.4.4, sans même avoir besoin de préciser quelle norme est utilisée sur $E$.

***Exercice 1 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} a & b \operatorname{sh} a \\ \frac{1}{b}\ . & . \end{bmatrix}$.

***Exercice 2 :*** On considère le $\mathbb{R}$-evn $E = (\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \nu_\infty)$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n$ la fonction $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, nulle hors de $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, valant $\frac{1}{n}$ au point $\alpha_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$, et affine sur $\left[\frac{1}{n+1}, \alpha_n\right]$ et sur $\left[\alpha_n, \frac{1}{n}\right]$. Montrer que dans $E$, la série $\sum f_n$ est commutativement convergente. Est-elle absolument convergente ?

***Exercice 3 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-evn $(l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R}), N_1)$ (où $N_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ pour $u = (u_n) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$) et $F$ le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \nu_\infty)$ où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. A chaque $a = (a_n) \in E$, on associe l'élément $f_a$ de $F$ défini par :

$$(\forall x \in [0,1]) \quad f_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \,.$$

*a*) Vérifier que cette définition de $f_a$ a un sens (cf. § VII.1), et qu'on peut écrire $(\forall a \in E)\ f_a = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a)$, où l'on précisera le mode de convergence de la série $\sum u_n(a)$ *dans F.*

*b*) Montrer que l'application $E \longrightarrow F$, $a \mapsto f_a$ est $\mathbb{R}$-linéaire, isométrique, et que son image est un sous-espace *fermé* de $F$, distinct de $F$ (penser à l'exemple 2 du § XI.2).

***Exercice 4 :*** Soit $\mathscr{A}$ une $K$-algèbre de Banach non nulle, d'élément unité $e$.

*a*) On donne $a \in \mathscr{A}$ tel que $\|a\| < 1$. Montrer que $e - a$ est inversible dans $\mathscr{A}$, son inverse étant $b = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$.

*b*) En déduire que l'ensemble $\mathscr{U}_{\mathscr{A}}$ des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ est un ouvert de $\mathscr{A}$.

*c*) Si $\mathscr{A}$ est *de dimension finie* sur $K$, vérifier *directement* le résultat du *b*).

*Indication :* Associer à $a \in \mathscr{A}$ l'élément $f_a \in \mathrm{Hom}_K(\mathscr{A})$ tel que $(\forall x \in \mathscr{A})\ f_a(x) = ax$ et l'élément $g_a \in \mathrm{Hom}_K(\mathscr{A})$ tel que $(\forall x \in \mathscr{A})\ g_a(x) = xa$. Vérifier que les applications $\Phi : a \mapsto f_a$ et $\Psi : a \longrightarrow g_a$ sont linéaires ; se souvenir que le fait que $\mathrm{GL}_K(\mathscr{A})$ est ouvert dans $\mathrm{Hom}_K(\mathscr{A})$ est élémentaire ; conclure en remarquant que

$$\mathscr{U}_{\mathscr{A}} = \Phi^{-1}(\mathrm{GL}_K(\mathscr{A})) \cap \Psi^{-1}(\mathrm{GL}_K(\mathscr{A}))\,.$$

***Exercice 5 :*** Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $n \geq 1$. On donne une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_K(E)$ telle que la série $\sum u_k$ converge et que les $u_k$ soient deux à deux permutables et tous diagonalisables. Montrer que $v = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres en fonction de celles des $u_k$.

***Exercice 6 :*** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\ .\ \|$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \|\exp(tA)\| \leq \alpha\, e^{\beta |t|}\,.$$

***Exercice 7 :*** Soit $L$ le compact $[0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$. On donne $f : L \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\underset{x \in L}{\mathrm{Max}}\,(|f(x)|) < 1$. On note $E$ le $\mathbb{R}$-ev $(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \nu_\infty)$, où $\nu_\infty$ est la *norme uniforme.*

Soit $\Phi : E \longrightarrow E$ ainsi définie : si $h \in E$,

$$(\forall t \in [0,1]) \quad (\Phi(h))(t) = h(t) + \int_0^1 f(t,u)\,h(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

*a*) Justifier que $\Phi$ est bien définie.

*b*) Montrer que $\Phi$ est un *homéomorphisme* de $E$ sur $E$.

***Exercice 8 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}), N_2)$ où $N_2$ est la norme définie, pour $f \in E$, par $N_2(f) = \left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$, et $F$ un sous-ev de dimension finie $n$ de $E$.

*a*) Soit $(f_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $F$ telles que $(\forall q)\ N_2(f_q) \leq 1$. Mor
extraire de $(f_q)$ une suite de fonctions qui soit uniformément convergente d

*b*) Montrer que cette propriété tombe en défaut si l'on prend pour $F$ un sous-ev de $E$ de dimension infinie (penser à $g_n(x) = x^n$).

***Exercice 9 :*** Soit $(a_n)$ une suite *arbitraire* dans un espace normé $E$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)$ de points de $E$ vérifiant $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 0_E$ et une suite strictement croissante $(k_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n$, $a_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k_n}$.

***Exercice 10 :*** Soit $\sum\limits_n x_n$ une série *convergente* dans un espace normé $E$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ et soit enfin $r(n) = |\sigma(n) - n| \sup\limits_{m \geqslant n} \|x_m\|$. Montrer que si $\lim\limits_{n \to \infty} r(n) = 0$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente dans $E$ et que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

*Indication :* Evaluer, pour $n$ assez grand, la différence $\sum\limits_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

***Exercice 11 :*** Soit $(u_{pq})_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}}$ une suite double de points d'un espace normé $E$. On suppose :

1) Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_q u_{pq}$ est convergente dans $E$. On note $U_p = \sum\limits_{q=0}^{\infty} u_{pq}$ sa somme et on pose $r_{pq} = \sum\limits_{k=q}^{\infty} u_{pk}$.

2) Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la msérie $\sum\limits_j r_{jq}$ est convergente dans $E$. On note $R_q = \sum\limits_{j=0}^{\infty} r_{jq}$ sa somme.

*a*) Montrer que, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_p u_{pq}$ est convergente dans $E$. Soit $V_q = \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_{pq}$ sa somme.

*b*) Pour que $\sum\limits_{p=0}^{\infty} U_p = \sum\limits_{q=0}^{\infty} V_q$, il faut et il suffit que $\lim\limits_{q \to \infty} R_q = 0$.

***Exercice 12*** (familles absolument sommables) : Soit $I$ un ensemble *dénombrable* d'indices, et une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace de Banach $E$. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est *absolument sommable* s'il existe une bijection $\varphi$ de $\mathbb{N}$ sur $I$ telle que la série $\sum\limits_n u_{\varphi(n)}$ soit absolument convergente.

Montrer que cette propriété est indépendante de la bijection particulière $\varphi$ et que l'on peut définir la *somme* de la famille $(u_i)_{i \in I}$ comme étant égale à $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{\varphi(n)}$ que l'on note $S = \sum\limits_{i \in I} u_i$. Définir également ce qu'est une partie dénombrable $A$ de $E$ absolument sommable.

Montrer que pour qu'une famille dénombrable $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace de Banach soit absolument sommable, il faut et il suffit que les sommes finies $\sum\limits_{i \in J} \|u_i\|$, où $J$ est une partie *finie* quelconque de $i$, soient bornées, et en déduire que si $(u_i)_{i \in I}$ est absolument sommable, toute sous-famille l'est également. (Attention ! ne pas confondre cette notion avec la notion de *famille sommable dans un Banach,* notion qui d'ailleurs n'a pas été abordée dans ce livre).

## § XI.5 *DÉRIVATION DES FONCTIONS A VALEURS DANS UN K-EVN*

Les définitions données aux §§ IV.6 et IV.7 s'étendent sans peine à des fonctions à valeurs dans un $K$-evn quelconque, définies sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Donnons ci-dessous les grandes lignes de cette extension sans trop nous attarder sur les détails.

Soit donc $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $E$ un $K$-evn, puis $f : I \longrightarrow E$ une fonction ; $f$ est dite **dérivable en $t_0 \in I$** ssi

$$\lim_{\substack{t \longrightarrow t_0 \\ \neq}} \frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0))$$

existe. Si c'est le cas, cette limite s'appelle **dérivée** de $f$ en $t_0$ et se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$. On dit que $f$ est **dérivable** (sur $I$) ssi $f$ est dérivable en tout point $t \in I$ ; dans ce cas la fonction $I \longrightarrow E$, $t \mapsto f'(t)$ s'appelle **fonction dérivée** de $f$ et se note $f'$.

Les notions de dérivée à droite (resp. à gauche) de $f$ se définissent à partir de là exactement comme à la définition IV.6.2.

Bien entendu, en prenant $E = K^p$ (où $p \in \mathbb{N}^*$) muni d'une norme standard, on retrouve les définitions données au § IV.6.

La dérivée étant définie comme *limite,* son existence et sa valeur ne dépendent que de la *topologie* de l'evn $E$ ; en particulier l'existence et la valeur de la dérivée ne sont pas affectées si on remplace la norme de $E$ par une norme *équivalente.*

### Calcul des dérivées

En remplaçant $K^p$ par un $K$-evn quelconque $E$, et une norme standard de $K^p$ par une norme quelconque de $E$, on peut reprendre point par point les démonstrations du § IV.6, obtenant ainsi :

($D_1$) *Si $f : I \longrightarrow E$,* définie sur l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$, *est dérivable en $t_0 \in I$, elle est continue en $t_0$.*

($D_2$) Avec les notations de ($D_1$), *pour que $f$ soit dérivable en $t_0 \in \mathring{I}$, il faut et il suffit que $f'_g(t_0)$ et $f'_d(t_0)$ existent et soient égales,* et si c'est le cas, on a : $f'(t_0) = f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$.

($D_3$) Fixons l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$, et $t_0 \in I$ : *l'ensemble $\mathscr{D}_{t_0}(I, E)$ des fonctions $f : I \longrightarrow E$ dérivables en $t_0$ est un sous-*$K$-ev *de $\mathscr{F}(I, E)$, et l'application $\mathscr{D}_{t_0}(I, E) \longrightarrow E$, $f \mapsto f'(t_0)$ est $K$-linéaire.* En conséquence, l'ensemble $\mathscr{D}(I, E)$ des fonctions $f : I \longrightarrow E$ dérivables est un sous-$K$-ev de $\mathscr{F}(I, E)$, et l'application $\mathscr{D}(I, E) \longrightarrow \mathscr{F}(I, E)$, $f \mapsto f'$ est $K$-linéaire.

($D_4$) Soit $I$ et $J$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f : I \longrightarrow J$, $x_0 = f(t_0)$ et $g : J \longrightarrow E$. *Si $f'(t_0)$ et $g'(x_0)$ existent, alors $(g \circ f)'(t_0)$ existe et vaut $f'(t_0) \times g'(x_0)$.*

Par application de la proposition X.4.1 (II), on obtient :

($D_5$) Supposons que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), où les $E_i$ sont des $K$-evn et où $E$ est muni d'une norme standard associée à celles des $E_i$. Soit, pour chaque $i$, $f_i : I \longrightarrow E_i$, la $i$-ième composante de $f$ ; *pour que $f$ soit dérivable en $t_0 \in I$, il faut et il suffit que chaque $f_i$ le soit, et si c'est le cas, alors $f'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$.*

Les diverses règles de calcul de la dérivée d'un produit rencontrées au § IV.6 sont toutes des cas particuliers de la propriété générale suivante :

**Théorème XI.5.1**

*Soit $E_1, \ldots, E_n$ et $F$ des $K$-evn, et soit $\mu : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application **multilinéaire** et **continue**. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : I \longrightarrow E_i$ définie sur l'intervalle non trivial $I$, et dérivable en $t_0 \in I$. Alors l'application $g : I \longrightarrow F$, $t \mapsto \mu(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ est dérivable en $t_0$, et on a : $g'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \mu(u_{i_1}(t_0), \ldots, u_{i_n}(t_0))$ en posant*

$$u_{ij}(t_0) = f_j(t_0) \quad \text{si} \quad j \neq i \quad \text{et} \quad u_{ii}(t_0) = f_i'(t_0)$$

*pour tous $i$ et $j$.*

*Démonstration :*

Soit $t \in I \setminus \{t_0\}$. Ecrivons :

$$\frac{1}{t - t_0}(g(t) - g(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(t),$$

où
$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad \Delta_i(t) = \mu(w_{i_1}(t), \ldots, w_{i_n}(t)),$$

avec
$$w_{ij}(t) = f_j(t_0) \quad \text{si} \quad j < i, \quad w_{ii}(t) = \frac{1}{t - t_0}(f_i(t) - f_i(t_0))$$

et
$$w_{ij}(t) = f_j(t) \quad \text{si} \quad j > i.$$

Pour chaque $i$, on a : $w_{ii}(t) \longrightarrow f_i'(t_0)$, et $(\forall j > i)$ $w_{ij}(t) \underset{t \longrightarrow t_0}{\overset{\neq}{\longrightarrow}} f_j(t_0)$ (cf. ($D_1$)) ; par continuité de $\mu$ sur $E_1 \times \cdots \times E_n$, et par composition de limites, il s'ensuit :

$$\Delta_i(t) \underset{t \longrightarrow t_0}{\overset{\neq}{\longrightarrow}} \mu(\mu_{i_1}(t_0), \ldots, u_{i_n}(t_0)),$$

d'où le résultat par addition de limites. ■

***Exemple 1 :*** L'application $K \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est bilinéaire et continue. Donc si $\varphi : I \longrightarrow K$ et $f : I \longrightarrow E$ sont deux fonctions dérivables en $t_0 \in I$, la fonction $g : I \longrightarrow E$, $t \mapsto \varphi(t) f(t)$ l'est aussi ; et $g'(t_0) = \varphi'(t_0) f(t_0) + \varphi(t_0) f'(t_0)$.

***Exemple 2 :*** Munissons $\mathscr{L}_K(E)$ de sa norme $|||\ .\ |||$ associée à celle de $E$. L'application bilinéaire $\mathscr{L}_K(E) \times E \longrightarrow E$, $(u, x) \mapsto u\,.\,x$ est continue, car $(\forall\,(u, x))$, $\|u\,.\,x\| \leqslant |||\,u\,|||\ .\ \|x\|$. Donc, si $\alpha : I \longrightarrow \mathscr{L}_K(E)$ et $f : I \longrightarrow E$ sont deux fonctions dérivables en $t_0 \in I$, la fonction $g : I \longrightarrow E$, $t \mapsto \alpha(t)\,.\,f(t)$ l'est aussi ; et $g'(t_0) = \alpha'(t_0)\,.\,f(t_0) + \alpha(t_0)\,.\,f'(t_0)$.

***Exemple 3 :*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et des fonctions $a_{ij} : I \longrightarrow K$ $((i, j) \in [\![1, n]\!]^2)$ dérivables en $t_0 \in I$. Notons $M(t)$ la matrice $[a_{ij}(t)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(K)$ $(t \in I)$, et $\mathscr{C}_1(t), \ldots, \mathscr{C}_n(t)$ ses vecteurs colonnes.

La fonction $\Delta : t \mapsto \det\,(M(t))$, $I \longrightarrow K$ est dérivable en $t_0$, et on a : $\Delta'(t_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \det\,(M_i)$, où $(\forall i)$ $M_i$ est la matrice de colonnes $\Gamma_{ij}$ avec $\Gamma_{ii} = \mathscr{C}_i'(t_0)$ et $\Gamma_{ij} = \mathscr{C}_i(t_0)$ si $j \neq i$. En effet, notant can la base canonique de $K^n$ l'application $n$-linéaire $\mu : (K^n)^n \longrightarrow K$, $(V_1, \ldots, V_n) \mapsto \det_{\mathrm{can}}(V_1, \ldots, V_n)$ est continue ; puisque $\Delta(t) = \mu(\mathscr{C}_1(t), \ldots, \mathscr{C}_n(t))$, le théorème XI.5.1 s'applique.

## Dérivées quand l'espace d'arrivée est de dimension finie

Supposons maintenant $E$ de dimension finie $n \geqslant 1$ sur $K$. Comme toutes les normes de $E$ sont équivalentes, le concept de *fonction dérivable* à valeurs dans $E$ et définie sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, ainsi que la valeur de la dérivée quand elle existe, sont des notions liées à la seule *topologie des normes* de $E$. N'importe quel choix de norme sur $E$ suffit à reconnaître la dérivabilité et à calculer une dérivée. Le corollaire 4 du théorème XI.1.7 entraîne immédiatement :

### THÉORÈME XI.5.2

*Soit $E$ un $K$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et $f : I \longrightarrow E$ une fonction définie sur l'intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$ ; soit enfin $t_0 \in I$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(I) *$f$ est dérivable en $t_0$.*

(II) *Il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que les composantes $f_1, \ldots, f_n$ de $f$ dans $\mathscr{B}$ soient dérivables en $t_0$.*

(III) *Pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, les composantes $f_1, \ldots, f_n$ de $f$ dans $\mathscr{B}$ sont dérivables en $t_0$.*

*Si c'est le cas, pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$, en notant les composantes de $f$ : $f_1, \ldots, f_n$, on a :*

$$\boxed{f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0)\, e_i}\ .$$

Ce théorème ramène donc l'étude des dérivées de fonctions à valeurs dans $E$ ($K$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$) à celle des dérivées de fonctions à valeurs dans $K^n$ déjà étudiées aux §§ IV.6 et IV.7.

**Dérivées successives**

La notion de *dérivées successives* s'étend sans difficulté aux fonctions à valeurs dans un $K$-evn $E$ ; ainsi on définit la notion de fonction $p$ fois dérivable ($p \in \mathbb{N}$), de fonction de classe $\mathscr{C}^p$, de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ (resp. de fonction de classe $\mathscr{C}^k$ par morceaux, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) définie sur un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (resp. sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$) et à valeurs dans $E$. Le lecteur vérifiera facilement que les propriétés générales vues au § IV.7 lorsque $E = K^p$ muni d'une norme standard restent valables avec $E$ quelconque. Contentons-nous de signaler l'extension suivante de la *formule de Leibniz,* aisée à vérifier par récurrence sur $n$, utilisation de la relation de Pascal :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1, n]\!]) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

et du théorème XI.5.1.

**Théorème XI.5.3**

*Soit $E$, $F$, $G$ trois $K$-evn et $\mu : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow E$, $g : I \longrightarrow F$ des fonctions.*
*Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables ($n \in \mathbb{N}^*$) (resp. de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$), la fonction $h : t \mapsto \mu(f(t), g(t))$ l'est aussi, et :*

$$(\forall t \in I) \quad h^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu\left(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\right).$$

De même :

**Théorème XI.5.4**

*Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E$ un $K$-evn, $I$ et $J$ deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, et $f_1 : J \longrightarrow I$, $g : I \longrightarrow E$ deux fonctions $n$ fois dérivables (resp. de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$). Alors $g \circ f_1$ l'est aussi.*

**Le théorème des accroissements finis**

Nous avons vu aux chapitres V et VI l'importance fondamentale des égalités et inégalités d'accroissements finis pour l'étude des fonctions de variable réelle à valeurs dans $K^p$. Etendons le théorème V.1.5 aux fonctions à valeurs dans un evn quelconque.

**Théorème XI.5.5**

*On donne un $K$-evn $E$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions* **continues.** *On suppose $f$ et $g$* **dérivables à droite** *sur $]a, b[$ et telles que $(\forall x \in ]a, b[)$ $\|f'_d(x)\| \leq g'_d(x)$. Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

*Démonstration :*

Nous allons prouver que

$$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad -\varepsilon(b-a+1) \leqslant g(b)-g(a)-\|f(b)-f(a)\|$$

et ainsi le théorème en découlera immédiatement.

Soit donc $\varepsilon$ réel $> 0$. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble

$$\{x \in [a,b] \mid -\varepsilon(x-a+1) \leqslant g(x)-g(a)-\|f(x)-f(a)\|\}\ .$$

$\mathscr{E}$ est non vide (car $a \in \mathscr{E}$) et majoré (par $b$), donc il admet une borne supérieure $c$, et $c \in [a,b]$. La fonction $h_\varepsilon : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) - g(a) - \|f(x)-f(a)\| + \varepsilon(x-a+1)$ est continue, donc $\mathscr{E} = h_\varepsilon^{-1}(\mathbb{R}_+)$ est fermé dans $[a,b]$ (donc dans $\mathbb{R}$), car $\mathbb{R}_+$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Donc $c \in \mathscr{E}$. Comme $h_\varepsilon(a) = \varepsilon > 0$, la continuité de $h_\varepsilon$ en $a$ montre que $\mathscr{E}$ contient un intervalle $[a, a+\alpha]$ avec $\alpha > 0$ ; donc $c > a$. Il s'agit de prouver que $c = b$. *Supposons que l'on ait* $c < b$ (d'où $a < c < b$), la définition de $f'_d(c)$ et de $g'_d(c)$ entraînerait l'existence de $c' \in\ ]c, b[$ tel que

$$(1) \qquad \left(g'_d(c) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(c'-c) \leqslant g(c') - g(c)$$

et $$\|f(c') - f(c) - (c'-c)\, f'_d(c)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(c'-c)\,.$$

Avec un tel $c'$, on a : $\quad \|f(c')-f(c)\| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + \|f'_d(c)\|\right)(c'-c)$,

d'où, à cause de l'hypothèse de l'énoncé :

$$(2) \qquad \|f(c')-f(c)\| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{2} + g'_d(c)\right)(c'-c)\,.$$

Par addition, (1) et (2) entraînent :

$$-\varepsilon(c'-c) \leqslant g(c') - g(c) - \|f(c')-f(c)\|\ .$$

Compte tenu du fait que $c \in \mathscr{E}$ :

$$(3) \qquad -\varepsilon(c-a+1) \leqslant g(c)-g(a)-\|f(c)-f(a)\|$$

et de $$\|f(c')-f(a)\| \leqslant \|f(c')-f(c)\| + \|f(c)-f(a)\|$$

à nouveau par addition, il s'ensuit :

$$-\varepsilon(c'-a+1) \leqslant g(c')-g(a)-\|f(c')-f(a)\|\ ,$$

ce qui exprime que $c' \in \mathscr{E}$, en contradiction avec le fait que $c = \operatorname{Max}(\mathscr{E})$. On en déduit (par l'absurde) que $c = b$, ce qui signifie :

$$-\varepsilon(b-a+1) \leqslant g(b)-g(a)-\|f(b)-f(a)\|\ . \quad \blacksquare$$

A partir de là, par les mêmes techniques qu'au § V.1 on

**COROLLAIRE**

> *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ *et* $E$ *un* $K$-evn, *puis* $f : [a,b] \longrightarrow E$ **continue,** *et* **dérivable à droite** *sur* $]a,b[$ (*resp.* **dérivable** *sur* $]a,b[$). *Donnons-nous* $M \in \mathbb{R}_+$. *Pour que f soit* **M-lipschitzienne,** *il faut et il suffit que :* $(\forall x \in \,]a,b[)$ $\|f'_d(x)\| \leqslant M$ (*resp.* $(\forall x \in \,]a,b[)$ $\|f'(x)\| \leqslant M$).
> *En particulier, pour que f soit* **constante,** *il faut et il suffit que :*
>
> $$(\forall x \in \,]a,b[) \quad f'_d(x) = 0 \quad (resp.\ (\forall x \in \,]a,b[ \quad f'(x) = 0)\,.$$

En combinant ce corollaire avec le *critère de Cauchy des fonctions* (corollaire 2 du théorème XI.2.4), on obtient, par la même technique qu'au théorème V.1.8 et à ses corollaires :

**THÉORÈME XI.5.6**

> *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b)$, *E un K*-evn **complet** *et* $f : \,]a,b] \longrightarrow E$ *une fonction* **continue** *sur* $]a,b]$ et **dérivable à droite** (*resp.* **dérivable**) *sur* $]a,b[$. *Si* $f'_d$ *est* **bornée** (*resp. si* $f'$ *est* **bornée**) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ *existe dans E, autrement dit f* se prolonge par continuité en *a*.

**COROLLAIRE 1**

> *Avec les notations du théorème* XI.5.6, *avec E K*-evn **complet,** *supposons* $f : \,]a,b] \longrightarrow E$ *continue sur* $]a,b]$, **dérivable à droite** *sur* $]a,b[$ (*resp. dérivable sur* $]a,b[$) *et que* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f'_d(x) = L$ (*resp.* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f'(x) = L$) *existe dans E. Alors f est prolongeable par continuité en a, et si* $\tilde{f}$ *est ce prolongement,* $\tilde{f}'(a)$ *existe et vaut L.*

**COROLLAIRE 2**

> *Soit* $I = [a,b]$ $(a < b)$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}$ *une partie* finie *de I, E un K*-evn **complet** *et* $f : I \longrightarrow E$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *dans chaque composante connexe de* $I \setminus (\mathscr{D} \cup \{a,b\})$.
> *Pour que f soit de classe* $\mathscr{C}^k$ *par morceaux sur I, il faut et il suffit que pour chaque composante connexe* $J = \,]\alpha, \beta[$ *de* $I \setminus (\mathscr{D} \cup \{a,b\})$, *les limites* $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow \alpha}} f^{(k)}(x)$ *et* $\lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow \beta}} f^{(k)}(x)$ *existent dans E.*

**Dérivée de exp$(ta)$ pour $t$ réel**

Comme application des résultats ci-dessus, soit $\mathscr{A}$ une $K$-algèbre de Banach non nulle, d'élément unité $e$. Fixons $a \in \mathscr{A}$, et notons $\omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{A}$ l'application $t \mapsto \exp(ta)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n a^n\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \|a^n\|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \|a\|^n = \mathrm{e}^{|t| \cdot \|a\|} - 1 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Cela montre que $\varphi$ est continue en 0. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, la continuité de l'application $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$, $(x, y) \mapsto x \,.\, y$ montre que :

$$\varphi(t) - \varphi(0) = (ta) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} a^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} a^n\right) \cdot (ta)$$
$$= ta \,.\, \psi(t) = t\psi(t) \,.\, a ,$$

avec
$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} a^n ,$$

d'où

(4) $$\frac{1}{t}(\varphi(t) - \varphi(0)) = a \,.\, \psi(t) = \psi(t) \,.\, a \underset{\substack{\neq \\ t \to 0}}{\longrightarrow} a ,$$

autrement dit $\varphi'(0)$ existe et vaut $a$.

Soit maintenant $t_0 \in \mathbb{R}$ ; on sait que

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = (\varphi(t - t_0) - \varphi(0)) \,.\, \varphi(t_0)$$
$$= \varphi(t_0) \,.\, (\varphi(t - t_0) - \varphi(0)) \quad (\text{cf. § XI.4}) ,$$

d'où, toujours par continuité du produit sur $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ et grâce à (4) :

$$\frac{1}{t - t_0}(\varphi(t) - \varphi(t_0)) \underset{\substack{\neq \\ t \to t_0}}{\longrightarrow} a \,.\, \varphi(t_0) = \varphi(t_0) \,.\, a ,$$

ce qui prouve que $\varphi'(t_0)$ existe et vaut $a \,.\, \varphi(t_0) = \varphi(t_0) \,.\, a$, d'où :

**Théorème XI.5.7**

*Soit $\mathscr{A}$ une $K$-algèbre de Banach non nulle et $a \in \mathscr{A}$. La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{A}$, $t \mapsto \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est :*

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(ta) = a \,.\, \exp(ta) = \exp(ta) \,.\, a .$$

**Extension des résultats des Chapitres VI, VII, VIII**

Nous verrons au tome 3 que le théorème XI.5.5 permet d'étendre l'essentiel des techniques étudiées au Chapitre VI à des fonctions à valeurs dans un $K$-evn quelconque : comparaison locale des fonctions, formules de Taylor, développements limités.

Nous y étendrons également la notion de fonction bornée intégrable à des fonctions définies sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un $K$-ev **de dimension finie.**

***Exercice 1 :*** Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{A}$ une $K$-algèbre de Banach non nulle, et $f : I \longrightarrow \mathscr{A}$ dérivable en $t_0 \in I$, telle que $(\forall t \in I)$ $f(t)$ est inversible dans $\mathscr{A}$. Montrer que $g : I \longrightarrow \mathscr{A}$, $t \mapsto (f(t))^{-1}$ est dérivable en $t_0$, et que $g'(t_0) = -g(t_0)\, f'(t_0)\, g(t_0)$.

***Exercice 2 :*** On donne $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une application *continue* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui est en même temps un homomorphisme de groupes, *i.e.* $(\forall (t, u) \in \mathbb{R}^2)$ $\Phi(t+u) = \Phi(t)\, \Phi(u)$. On note $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$, et pour tous réels $t_1$, $t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \Phi(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \left[ \int_{t_1}^{t_2} a_{ij}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}.$$

*a*) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \Phi(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ est dérivable, et $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que, pour $t$ assez petit et $t \neq 0$, $F(t) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

*b*) On choisit $\alpha$ réel $> 0$ tel que $F(\alpha) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $\Phi(t) = (F(\alpha))^{-1}(F(t+\alpha) - F(t))$ ; en déduire que $\Phi$ est dérivable.

*c*) On pose $M_0 = \Phi'(0)$. Prouver :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Phi'(t) = M_0\, \Phi(t) = \Phi(t)\, M_0 .$$

En considérant $f(t) = \Phi(t) \exp(-tM_0)$, en déduire : $(\forall t)$ $\Phi(t) = \exp(tM_0)$.

***Exercice 3 :*** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. On donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ telle que, pour tout réel $t$, $f(t)$ possède $n$ valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$,

$$(\lambda_i(t))_{1 \leqslant i \leqslant n}\ (\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_n(t)).$$

*a*) Montrer que chaque fonction $\lambda_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

*b*) Montrer qu'il existe $n$ fonctions $V_1, \dots, V_n : \mathbb{R} \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que, pour tout réel $t$, $V_i(t)$ soit un vecteur propre de $f(t)$ pour la valeur propre $\lambda_i(t)$.

***Exercice 4 :*** Montrer que dans le théorème des accroissements finis (théorème XI.5.5) on peut sans modifier le résultat affaiblir les hypothèses en supposant seulement $f$ et $g$ dérivables à droite et $\| f'_d(x) \| \leqslant g'_d(x)$ seulement sur $]a, b[ \setminus D$, où $D$ est un ensemble *fini ou dénombrable* de points de $]a, b[$ ($f$ et $g$ restant continues sur $[a, b]$) ; mais que le théorème tombe en défaut si $D$ est un ensemble quelconque de mesure nulle.

***Exercice 5 :*** On donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, un espace de Banach $E$ et une application $f : [a, b] \longrightarrow E$ continue. Montrer que, pour que $f$ soit dérivable en un point $x_0 \in ]a, b[$, il faut et il suffit que $\dfrac{1}{h+k}(f(x_0+h) - f(x_0-k))$ ait une limite dans $E$ lorsque le point $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tend vers $(0, 0)$ dans l'ensemble des couples tels que $h > 0$, $k > 0$.

***Exercice 6 :*** *a*) Soit $a$, $b$ deux points d'un espace de Banach $E$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \| a + tb \|$ a une dérivée à droite (resp. à gauche) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

*Indication :* Prouver d'abord

$$(0 < t < s) \Rightarrow \frac{1}{t}(\| a + bt \| - \| a \|) \leqslant \frac{1}{s}(\| a + bs \| - \| a \|).$$

*b*) Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et une application $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si, en un point $t_0 \in I$, $u$ a une dérivée à droite, alors la fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \| u(t) \|$ a en $t_0$ une dérivée à droite, et que $g'_d(t_0) \leqslant \| u'_d(t_0) \|$.

***Exercice 7 :*** Soit $a$ et $b$ deux réels $(a < b)$, $E$ un espace de Banach et $f : [a, b] \longrightarrow E$ une fonction continue. On suppose que $f$ admet en tout point de $[a, b[$ une dérivée à droite continue. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $[a, b[$.

***Exercice 8 :*** Soit $a$ et $b$ deux réels $(a \neq b)$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre réel $c$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} = \mathrm{i}(b-a)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}c}$.

En déduire que *l'égalité* des accroissements finis classique ne s'étend pas aux fonctions à valeur dans un espace vectoriel.

# Chapitre XII

# SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Nous allons reprendre ici l'étude amorcée au § VII.1. Comme toujours, $K$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappelons que, par convention, tous les espaces topologiques abstraits considérés sont supposés *séparés*.

## § XII.1 *GÉNÉRALITÉS*

**DÉFINITION XII.1.1**

*Soit $X$ un ensemble et $T$ un espace topologique non vides. On dit qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $X \longrightarrow T$* ***converge simplement*** *sur $X$ ssi $(\forall x \in X)\ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existe dans $T$. S'il en est ainsi, la fonction $f : X \longrightarrow T$, $x \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ est appelée* ***limite simple*** *sur $X$ de la suite $(f_n)$ ; on dit que la suite $(f_n)$* ***converge simplement vers f*** *sur $X$, et on écrit $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$.*

Lorsqu'elle existe, la limite simple d'une suite $(f_n)$ est évidemment unique (cf. unicité de la limite d'une suite de $T$).

On définit comme au § VII.1, pour une suite $(f_n)$ de fonctions : $X \longrightarrow T$, la notion d'*ensemble de convergence simple* de $(f_n)$ : c'est toute partie $Y$ de $X$ telle que la suite des restrictions $(f_n|_Y)$ converge simplement sur $Y$. Toute partie d'un ensemble de convergence simple en est un, ainsi que toute *réunion* de tels ensembles. L'ensemble des points de convergence de $(f_n)$ est « le plus grand » ensemble de convergence simple. Les propriétés des limites vues au § X.4 nous amènent à compléter comme suit la proposition VII.1.1 :

**PROPOSITION XII.1.1**

*Soit $X$ un ensemble et $T$ un espace topologique non vides.*

(I) *Si $T$ est un $K$-evn, pour toutes suites $(f_n)$ et $(g_n)$ de fonctions : $X \longrightarrow T$ qui convergent simplement, vers $f$ et $g$, sur $X$, et pour tout $(\lambda, \mu) \in K^2$, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge simplement sur $X$, vers $\lambda f + \mu g$.*

(II) *Si $T$ est le produit topologique d'espaces topologiques $T_1, \dots, T_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $X \longrightarrow T$, de composantes respectives $(f_{1,n}, \dots, f_{p,n})$ $(f_{i,n} : X \longrightarrow T_i)$, la suite $(f_n)$ converge simplement sur $X$ ssi $(\forall i)$ la suite $(f_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $X$. Lorsqu'il en est ainsi, on a :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f_n = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} f_{1,n}, \lim_{n \longrightarrow \infty} f_{2,n}, \dots, \lim_{n \longrightarrow \infty} f_{p,n}\right).$$

(III) *Si $Y$ est un autre ensemble non vide, et $\varphi : Y \longrightarrow X$ une application, pour toute suite $(f_n)$ de fonctions : $X \longrightarrow T$ qui converge simplement sur $X$, la suite $(f_n \circ \varphi)$ converge simplement sur $Y$, et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (f_n \circ \varphi) = \left(\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f_n\right) \circ \varphi$.*

(IV) *Soit $T_1, T_2, \dots, T_p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $E$ des $K$-evn et $\mu : T_1 \times \cdots \times T_p \longrightarrow E$ une application p-linéaire continue. Si, pour tout i, la suite $(f_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $X \longrightarrow T_i$ converge simplement sur $X$, vers $f_i$, alors la suite de fonctions $g_n : X \longrightarrow E$ donnée par $(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X)$ $g_n(x) = \mu(f_{1,n}(x), \dots, f_{p,n}(x))$ converge simplement sur $X$, vers $g : X \longrightarrow E$, $x \mapsto \mu(f_1(x), \dots, f_p(x))$.*

**DÉFINITION XII.1.2**

*Soit $X$ un ensemble et $(E, d)$ un espace métrique non vides. On donne une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $X \longrightarrow E$, et une fonction $f : X \longrightarrow E$. On dit que* **la suite $(f_n)$ converge uniformément vers f sur X** *ssi elle vérifie :*

$$(\mathscr{CU}) \quad (\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N}),$$
$$(n \geq N) \Rightarrow (\forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon).$$

*On dit alors que $f$ est* **limite uniforme sur X** *des $f_n$. La suite $(f_n)$ est dite* uniformément convergente sur *$X$ ssi elle admet une limite uniforme sur $X$.*

Pour chaque couple $(f, g)$ de fonctions : $X \longrightarrow E$, notons $\mathscr{D}_\infty(f, g)$ l'élément $\sup\limits_{x \in X} d(f(x), g(x))$ de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La relation $(\mathscr{CU})$ signifie exactement que :

(1)
$$\boxed{\mathscr{D}_\infty(f_n, f) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0}.$$

En particulier, si $(E, d)$ est l'espace métrique défini par un $K$-evn $E$, on a : $\mathscr{D}_\infty(f, g) = \mathscr{N}_\infty(f - g)$, où, pour toute fonction $\varphi : X \longrightarrow E$, on a posé :

$$\mathscr{N}_\infty(\varphi) = \sup_{x \in X} \|\varphi(x)\| \quad (\mathscr{N}_\infty(\varphi) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}).$$

On voit immédiatement comme au § VII.1, que *la convergence uniforme d'une suite* $(f_n)$ *de fonctions vers une fonction* $f$ *entraîne la convergence simple de* $(f_n)$ *vers* $f$. D'où l'*unicité* de la limite uniforme lorsqu'elle existe. En revanche la suite $(f_n)$ peut avoir $f$ pour limite simple sans avoir de limite uniforme (cf. § VII.1).

On définit comme au § VII.1 les *ensembles de convergence uniforme* d'une suite $(f_n)$ de fonctions : $X \longrightarrow E$ : ce sont les ensembles $Y \subset X$ tels que la suite des restrictions $(f_n|_Y)$ converge uniformément sur $Y$. Toute partie d'un ensemble de convergence uniforme en est encore un. Toute *réunion finie* de tels ensembles est ensemble de convergence uniforme (mais ce n'est plus le cas en général pour une réunion quelconque). Un ensemble *fini* de convergence simple est ensemble de convergence uniforme.

La proposition VII.1.2 se généralise comme suit :

**Proposition XII.1.2**

> *Soit $X$ un ensemble non vide, $E$ un $K$-*evn, *et $(f_n)$, $(g_n)$ deux suites de fonctions : $X \longrightarrow E$ qui convergent uniformément sur $X$ vers $f$ et $g$ respectivement.*
>
> (I) *Pour $(\lambda, \mu) \in K^2$, la suite $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $\lambda f + \mu g$.*
>
> (II) *La suite $(h_n)$ (où $(\forall n)\, h_n(x) = \|f_n(x)\|$ pour $x \in X$) converge uniformément sur $X$ vers $h : x \mapsto \|f(x)\|$.*

Les détails de la vérification sont laissés au lecteur. On notera aussi que si $(E, d)$ est un espace métrique quelconque et $(f_n)$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow E$ qui converge uniformément vers $f$ sur $X$, pour tout ensemble non vide $Y$ et toute application $\varphi : Y \longrightarrow X$, la suite $(f_n \circ \varphi)$ converge uniformément sur $Y$ vers $f \circ \varphi$.

Enfin, revenant au cas où $E$ est un $K$-evn, si $(f_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $f$, pour toute fonction *bornée* $h : X \longrightarrow K$, la suite $(hf_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $hf$.

**Cas de fonctions bornées**

Reprenons un espace métrique quelconque $(E, d)$ et, l'ensemble non vide $X$ étant fixé, munissons l'ensemble $\mathscr{B}(X, E)$ des fonctic

$X \longrightarrow E$ de la *distance uniforme* $D$ (cf. proposition X.1.2). Remarquons d'abord que si une suite $(f_n)$ de fonctions *bornées* : $X \longrightarrow E$ converge uniformément sur $X$ vers $f$, alors $f$ est nécessairement bornée (car choisissant $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \geq N_1, \forall x \in X)\ d(f_n(x), f(x)) \leq 1$, on a : $\operatorname{diam}(f(X)) \leq 2 + \operatorname{diam}(f_{N_1}(X))$). De plus cette convergence uniforme (cf. (1)) se traduit ici par $D(f_n, f) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Réciproquement, si pour une fonction $f \in \mathscr{B}(X, E)$ on a : $D(f_n, f) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, il est clair que $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $X$. En résumé, *si toutes les* $(f_n)$ *sont bornées, la convergence uniforme de* $(f_n)$ *sur* $X$ *équivaut à l'existence d'une limite* $f$ *de la suite* $(f_n)$ *dans l'espace métrique* $(\mathscr{B}(X, E), D)$, *et si cette limite existe, c'est la limite uniforme de* $(f_n)$ *sur* $X$.

**Suites qui sont uniformément de Cauchy**

Soit $X$ un ensemble non vide, $(E, d)$ un espace métrique et $(f_n)$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow E$. Nous appellerons **critère de Cauchy uniforme sur** $\boldsymbol{X}$ le critère suivant, relatif aux $f_n$ :

$$(2) \quad (\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid (\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2),$$
$$(N \leq n < p) \Rightarrow (\forall x \in X, d(f_n(x), f_p(x)) \leq \varepsilon)\,.$$

La suite $(f_n)$ sera dite **uniformément de Cauchy sur** $\boldsymbol{X}$ ssi elle satisfait la condition (2). Si $Y$ est une partie non vide de $X$, on dira que la suite $(f_n)$ est **uniformément de Cauchy sur** $\boldsymbol{Y}$ ssi la suite des restrictions $(f_n|_Y)$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $Y$.

Supposons toutes les $(f_n)$ *bornées*. Munissons l'ensemble $\mathscr{B}(X, E)$ des fonctions bornées : $X \longrightarrow E$ de la *distance uniforme* $D$. On constate que la suite $(f_n)$ est uniformément de Cauchy sur $X$ ssi, considérée comme suite de points de $(\mathscr{B}(X, E), D)$, c'est une suite de Cauchy « ordinaire », *i.e.* au sens de la définition XI.2.1 de cet espace métrique.

**Théorème XII.1.1**

> *Soit* $X$ *un ensemble non vide,* $(E, d)$ *un espace métrique non vide et* $(f_n)$ *une suite de fonctions :* $X \longrightarrow E$.
>
> (I) *Si la suite* $(f_n)$ *converge uniformément sur* $X$*, elle est uniformément de Cauchy sur* $X$.
>
> (II) *Si* $(E, d)$ *est* **complet,** *et si la suite* $(f_n)$ *est uniformément de Cauchy sur* $X$*, elle converge uniformément sur* $X$.

*Démonstration :*

(I) est une conséquence immédiate des définitions.

(II) Supposons le critère de Cauchy uniforme (2) satisfait par les $f_n$. Montrons d'abord que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $X$. Fixons $x_0 \in X$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ et $N \in \mathbb{N}$ rendant (2) vraie avec $\varepsilon$

$(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2) \quad (N \leqslant n < p) \Rightarrow d(f_n(x_0), f_p(x_0)) \leqslant \varepsilon$. Donc la suite $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $E$, donc converge dans $E$ puisque $(E, d)$ est complet. Désignons par $f$ la limite simple des $f_n$ sur $X$. Il reste à prouver que la suite $(f_n)$ converge *uniformément* sur $X$ vers $f$. Soit encore $\varepsilon$ réel $> 0$ et $N \in \mathbb{N}$ rendant (2) vraie avec cet $\varepsilon$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$. Alors, pour $x \in X$, on a $d(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \varepsilon$ pour tout $p > n$, donc, en passant à $\lim\limits_{p \to \infty}$ : $d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$. C'est vrai pour tout $x \in X$, et pour tout $n$ entier $\geqslant N$. Finalement $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X)$, $(n \geqslant N) \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$, ce qui établit la convergence uniforme des $f_n$ sur $X$ vers $f$. ∎

Lorsque toutes les $f_n$ sont *bornées*, on a vu plus haut que le critère de Cauchy uniforme (2) est vérifié par les $f_n$ ssi la suite $(f_n)$ est de Cauchy dans l'espace métrique $(\mathscr{B}(X, E),\ D =$ distance uniforme$)$, et que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $X$ ssi, en tant que suite de l'espace métrique $(\mathscr{B}(X, E), D)$, elle converge. On obtient donc :

**COROLLAIRE**

> *Soit $X$ un ensemble non vide et $(E, d)$ un espace métrique* **complet.** *Alors l'espace métrique $(\mathscr{B}(X, E), D)$ (où $D$ est la* **distance uniforme**) *est* **complet.** *En particulier, si $E$ est un $K$-*evn *de Banach, $\mathscr{B}(X, E)$ muni de la norme uniforme est un $K$-*evn *de Banach.*

On retrouve ainsi, dans un cadre général, le résultat de l'exemple 3 du § XI.2.

**Extension à des familles de fonctions**

Les notions qui précèdent peuvent facilement être étendues à des *familles de fonctions dépendant d'un paramètre,* de la manière suivante :

Soit $X$ un ensemble non vide, $T$ et $L$ deux espaces topologiques non vides, $\Lambda$ une partie de $L$ et $\omega \in L$ un point *d'accumulation* de $\Lambda$ dans $L$.

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, on considère $f_\lambda : X \longrightarrow T$ (la donnée de la famille des $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ équivaut à celle d'une application $F : \Lambda \times X \longrightarrow T$, $(\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$). Dans ces conditions :

• On dit que la famille $(f_\lambda)$ **converge simplement sur $X$ quand $\lambda$ tend vers $\omega$** ssi $(\forall x \in X)$ $\lim\limits_{\lambda \to \omega} f_\lambda(x)$ existe. Si c'est le cas, la fonction $f : X \longrightarrow T$, $x \mapsto \lim\limits_{\lambda \to \omega} f_\lambda(x)$ est appelée **limite simple** des $f_\lambda$ sur $X$, et on dit que $(f_\lambda)$ **converge simplement vers $f$ sur $X$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$.** On définit comme plus haut les ensembles de convergence simple de la famille $(f_\lambda)$. Toutes les propriétés vues avec les limites simples de *suites* restent vraies avec les limites simples de *familles :* la limite simple, si elle existe, est *unique ;* les résultats des propositions VII.1.1 et XII.1.1 s'étendent aux familles de fonctions du type ci-dessus. On retrouve le cas particulier des suites de fonctions en prenant, ci-dessus $L = \overline{\mathbb{R}}$, $\omega = +\infty$ et $\Lambda = \mathbb{N}$.

• Soit $f : X \longrightarrow T$ une fonction, $T$ étant issu d'un espace métrique $(E, d)$. On dit que la famille $(f_\lambda)$ **converge uniformément quand $\lambda \longrightarrow \omega$ sur $X$ vers la fonction $f$** ssi elle vérifie :

(3) $\quad (\forall \varepsilon$ réel $> 0)$ $\exists V$ voisinage de $\omega$ dans $L \mid (\forall \lambda \in V \cap \Lambda)$,
$(\forall x \in X) \quad d(f_\lambda($

On définit comme pour les suites la notion *d'ensemble de convergence uniforme de la famille* $(f_\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$.

Avec la notation $\mathscr{D}_\infty$ de (1), cette condition (3) signifie :

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\mathscr{D}_\infty(f_\lambda, f) \underset{\lambda \to \omega}{\longrightarrow} 0}\,.$$

Ce qui a été prouvé avec les limites uniformes de *suites* de fonctions s'étend sans difficulté à de telles *familles :* ainsi la convergence uniforme entraîne la convergence simple (d'où l'unicité de la limite uniforme, lorsqu'elle existe). Les propositions VII.1.2 et XII.1.2 restent vraies avec des *familles* $(f_\lambda)$, $(g_\lambda)$ au lieu de *suites* $(f_n)$, $(g_n)$.

Si toutes les $(f_\lambda)$ sont **bornées,** *la convergence uniforme, quand* $\lambda \longrightarrow \omega$, *de la famille* $(f_\lambda)$ *vers une limite f équivaut à l'existence dans l'espace métrique* $(\mathscr{B}(X, E)$, $D =$ *distance uniforme), d'une limite à la fonction :* $\Lambda \longrightarrow \mathscr{B}(X, E)$, $\lambda \mapsto f_\lambda$ *lorsque* $\lambda \longrightarrow \omega$ ; *et en cas d'existence de cette limite, c'est la limite uniforme des* $f_\lambda$ *sur X quand* $\lambda \longrightarrow \omega$.

• Enfin, toujours avec $T$ issu d'un espace métrique $(E, d)$, on dit que **la famille** $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ **est uniformément de Cauchy au voisinage de** $\boldsymbol{\omega}$ ssi elle vérifie le **critère de Cauchy uniforme** suivant :

(5) $(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0) \quad \exists V$ voisinage de $\omega$ dans $L \mid \forall\ (\lambda, \mu) \in (V \cap \Lambda)^2$,
$$\forall x \in X \quad d(f_\lambda(x), f_\mu(x)) \leqslant \varepsilon\,.$$

Le théorème XII.1.1 devient :

**Théorème XII.1.2**

> *Soit X un ensemble non vide,* $(E, d)$ *un espace métrique, L un espace topologique,* $\Lambda$ *une partie de L et* $\omega$ *un point d'accumulation de* $\Lambda$ *dans L. On considère une famille* $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *de fonctions :* $\Lambda \longrightarrow E$.
>
> (I) *Si la famille* $(f_\lambda)$ *converge uniformément sur X quand* $\lambda \longrightarrow \omega$, *elle est uniformément de Cauchy sur X au voisinage de* $\omega$.
>
> (II) *Si la famille* $(f_\lambda)$ *est uniformément de Cauchy au voisinage de* $\omega$, *et si* $(E, d)$ *est* **complet,** *alors la famille* $(f_\lambda)$ *converge uniformément sur X quand* $\lambda \longrightarrow \omega$.

*Démonstration :*

Elle diffère sur un point de celle du théorème XII.1.1 : supposons $(E, d)$ complet et la famille $(f_\lambda)$ uniformément de Cauchy au voisinage $\omega$ ; soit $x_0 \in X$ et $\varepsilon$ réel $> 0$. Fixons un voisinage $V$ de $\omega$ dans $L$ tel que (5) soit vrai pour cet $\varepsilon$. Alors $(\forall (\lambda, \mu) \in (V \cap \Lambda)^2)$, $d(f_\lambda(x_0), f_\mu(x_0)) \leqslant \varepsilon$. On a donc établi que la fonction $\varphi_{x_0} : \Lambda \longrightarrow E$, $\lambda \mapsto f_\lambda(x_0)$ satisfait au point $\omega$ *le critère de Cauchy des fonctions* (cf. théorème XI.2.4, cor. 2) ; puisque $(E, d)$ est complet, le corollaire 2 du théorème XI.2.4 montre que $\varphi_{x_0}$ admet une limite quand $\lambda \longrightarrow \omega$. C'est vrai $(\forall x_0 \in X)$, donc la famille $(f_\lambda)$ converge bien *simplement* sur $X$ vers une fonction $f : X \longrightarrow E$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$. On achève la démonstration comme au théorème XII.1.1. ■

Lorsque toutes les $(f_\lambda)$ sont **bornées,** dire que la famille $(f_\lambda)$ est **uniformément de Cauchy au voisinage de** $\boldsymbol{\omega}$ signifie que l'application $\Phi : \Lambda \longrightarrow \mathscr{B}(X, E)$, $\lambda \mapsto f_\lambda$ vérifie, au voisinage de $\omega$, le **critère de Cauchy des fonctions** lorsque muni de la distance uniforme $D$. Supposons $(E, d)$ *complet :* on a vu (corollaire du théorème XII.1.1) que $(\mathscr{B}(X, E), D)$ est alors *complet,* et compte tenu de ce qui précède, le théorème XII.1.2 (II) apparaît ici comme un simple cas particulier du corollaire 2 du théorème XI.2.4.

***Exercice 1 :*** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f|$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n(t) = \int_0^t \left( \int_{ny}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$. Montrer que la suite $(F_n)$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$ ?

***Exercice 2 :*** On donne $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall t \in [0, 1])$ $f_n(t) = \int_0^t f(x^n)\,\mathrm{d}x$.

***Exercice 3 :*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Montrer que la suite $(f_n)$ converge vers $\exp(z)$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

***Exercice 4 :*** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos^{2n}(p!\,\pi x)}{p!}$. Montrer que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $F$ mais que la convergence n'est uniforme sur aucun intervalle non trivial.

***Exercice 5 :*** Soit $X$ un ensemble infini, et soit $H$ un sous-$\mathbb{R}$-ev *de dimension finie* du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$. On donne une suite $(f_n)$ d'éléments de $H$ qui converge *simplement* sur $X$ vers $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Prouver que $f$ est un élément de $H$ et que la suite $(f_n)$ converge *uniformément* sur $X$ vers $f$.

***Exercice 6*** (*Polynômes de meilleure approximation*) : On donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et on désigne par $\mathscr{B}$ le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R}), \nu_\infty)$ (où $\nu_\infty$ est la norme uniforme), et par $E$ son sous-$\mathbb{R}$-evn $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n$ le sous-$\mathbb{R}$-ev de $E$ formé des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$.

*a*) On donne $f \in \mathscr{B}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\{\varphi \in E_n \mid \nu_\infty(f - \varphi) = d(f, E_n)\}$ est non vide (corollaire 7 du théorème XI.1.7). Tout élément de cet ensemble sera appelé un *polynôme de meilleure approximation de f de degré* $\leqslant n$.

*b*) On donne $f \in \mathscr{B}$, $n \in \mathbb{N}$ et on considère un polynôme $P$ de meilleure approximation de $f$ de degré $\leqslant n$. Supposons trouvés $Q \in E_n$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ tels que $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+2} = b$ et que $(f - Q)(x_i)$ soit $\neq 0$ et du signe de $\varepsilon(-1)^i$ pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$. Montrer que : $\min_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |f(x_i) - Q(x_i)| \leqslant \nu_\infty(f - P)$.

*Indication :* Etudier $(f - P) - (f - Q)$.

*c*) Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E \setminus E_n$. Démontrer, pour $P \in E_n$, l'équivalence des conditions (I) et (II) suivantes :

(I) $P$ est un polynôme de meilleure approximation de $f$ de degré $\leqslant n$.

(II) Il existe $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \mid a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leqslant b$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $(\forall i \in [\![0, n+1]\!])$ $f(x_i) - P(x_i) = \varepsilon(-1)^i \nu_\infty(f - P)$.

*d*) *Application :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Vérifier que le polynôme $g \in E_{n-1}$ tel que $x^n - g(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ (où $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x)$ pour $|x| \leqslant 1$) est un polynôme de meilleure approximation de $f$ de degré $\leqslant n - 1$.

***Exercice 7 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $2\pi$-périodique. Montrer l'équivalence entre les assertions (I) à (III) suivantes :

(I) $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(II) La *famille* $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ de fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$(\forall \lambda > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad g_\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t} f(x-t)\, dt$$

converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ quand $\lambda \xrightarrow{>} 0$.

(III) La *suite* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \varphi_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!} f(x-t)\, dt$$

converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$.

***Exercice 8 :*** Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)$ de fonctions : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f_0$ est constante de valeur 1, et

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1]) \quad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t - t^2)\, dt\,.$$

***Exercice 9 :*** On donne $a$ réel $> 0$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n$ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{a^n x}{1 + n a^n x^2}$. Même question avec la suite $(g_n)$ définie par $g_n(x) = \dfrac{a^n x}{1 - n a^n x^n}$.

***Exercice 10 :*** Déterminer les intervalles de convergence, simple ou uniforme, de la suite $f_n$ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^4 \cos \frac{t}{n}\, dt.$

***Exercice 11 :*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée continue. Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)$ définie par : $\quad f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

***Exercice 12 :*** Préciser pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ (resp. quelles parties de $\mathbb{C}$) la suite $(S_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n(z) = \frac{-1}{1-z} + \frac{z}{1-z^2} + \cdots + \frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^n}}$$

converge (resp. converge uniformément). Calculer sa limite lorsqu'elle existe.

## § XII.2 *CONTINUITÉ ET LIMITES UNIFORMES*

### THÉORÈME XII.2.1

> *Soit $X$ un espace topologique non vide, $(E, d)$ un espace métrique non vide, et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow E$. On suppose que la suite $(f_n)$* ***converge uniformément sur X*** *vers une fonction $f : X \longrightarrow E$ et que toutes les $f_n$ sont* ***continues*** *en un point $a \in X$. Alors $f$ est* ***continue*** *en $a$.*

*Démonstration :*

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N) \Rightarrow \left( (\forall x \in X),\, d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

puis un voisinage $V$ de $a$ dans $X$ tel que

$$(\forall x \in X) \quad x \in V \Rightarrow d(f_N(x) - f_N(a)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(continuité de}$$

Alors, pour $x \in V$, on a :

$$d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + \\ + d(f_N(a), f(a)) \leqslant \varepsilon .$$

Donc $f$ est continue en $a$. ■

**COROLLAIRE 1**

> *Avec les notations du théorème* XII.2.1, *supposons chaque $f_n$* **continue** *sur $X$ et la suite $(f_n)$* **uniformément convergente sur $X$** *vers $f : X \longrightarrow E$. Alors $f$ est* **continue** *sur $X$.*

La continuité d'une fonction $f : X \longrightarrow E$ est une propriété *locale* (*i.e.* pour que $f$ soit continue, il faut et il suffit que chaque point $x \in X$ possède un *voisinage* $V_x$ dans $X$ tel que $f|_{V_x}$ soit continue). On en déduit immédiatement :

**COROLLAIRE 2**

> *Avec les notations du théorème* XII.2.1, *soit $f : X \longrightarrow E$. On suppose chaque $f_n$* **continue** *sur $X$, et pour tout $x \in X$, l'existence d'un voisinage $V_x$ de $x$ dans $X$ tel que la suite des restrictions $(f_n|_{V_x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $V_x$ vers $f|_{V_x}$. Alors $f$ est* **continue.**

**COROLLAIRE 3**

> *Avec les notations du théorème* XII.2.1, *soit $f : X \longrightarrow E$. Supposons $X$* **métrisable.** *Si la suite $(f_n)$ converge vers $f$* **uniformément sur tout compact** *de $X$, et si chaque $f_n$ est* **continue,** *alors $f$ est* **continue.**

*Démonstration :*

D'après le corollaire 1, $f|_L$ est continue pour tout compact $L$ de $X$. Fixons $a \in X$ et soit $(x_n)$ une suite de $X$ convergeant vers $a$. L'ensemble $L = \{a\} \cup \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un compact de $X$ (car si $(\omega_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $X$ qui recouvre $L$, choisissant $i_0 \in L$ tel que $a \in \omega_{i_0}$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_n\}_{n \geqslant N} \subset \omega_{i_0}$, enfin, pour chaque $k \in [\![0, \mathbb{N}]\!]$ un élément $j_k \in I$ tel que $x_k \in \omega_{j_k}$, on voit que $L \subset \omega_{i_0} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{N} \omega_{j_k}\right)$).

Donc $f|_L$ est continue, ce qui entraîne (cf. § X.4, propriété ($L_2$)) : $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(a)$. Comme c'est vrai pour toute suite $(x_n)$ de $X$ tendant vers $a$, on en déduit (cf. théorème X.4.4) que $f$ est continue en $a$. ■

Lorsque $X$ est localement compact (*i.e.* tout point de $X$ admet au moins un voisinage compact) et également métrisable, on peut utiliser aussi bien le corollaire 2 que le corollaire 3 : ce cas se présente fréquemment en pratique, par exemple lorsque $X$ est une partie ouverte (resp. fermée) d'un $K$-evn *de dimension finie,* ou plus généralement l'intersection d'un ouvert et d'un fermé d'un $K$-evn de dimension finie.

## Double limite

**Théorème XII.2.2**

> *Soit $X$ un espace topologique, $A$ une partie non vide de $X$, $a$ un point d'accumulation de $A$. Considérons un espace métrique* **complet** *$(E, d)$, une fonction $f : A \longrightarrow E$ et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $A \longrightarrow E$. Si la suite $(f_n)$ converge* **uniformément** *vers $f$ sur $A$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f_n(x) = b_n$ existe dans $E$, alors :*
>
> (I) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (b_n)$ *existe dans $E$.*
>
> (II) $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$ *existe dans $E$.*
>
> (III) *Ces deux limites sont égales, ce qui peut s'écrire :*
>
> $$(1) \qquad \boxed{\lim_{n \longrightarrow \infty} \left( \lim_{x \longrightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \longrightarrow a} \left( \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \right)}\ .$$

En raison de (1), ce théorème est souvent appelé **théorème de la double limite.** Il donne des conditions **suffisantes** pour qu'on puisse **intervertir** les limites suivant $n$ et suivant $x$ dans (1) sans changer le résultat final. Il permet d'obtenir de nombreuses identités non évidentes en Analyse.

*Démonstration :*

Montrons d'abord que la suite $(b_n)$ est de Cauchy dans $E$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in A) \quad n \geqslant N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Fixons des entiers $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. On a alors :

$$(\forall x \in A) \quad d(f_n(x), f_p(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

puis passons à $\lim\limits_{x \longrightarrow a}$. On obtient $d(b_n, b_p) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve bien que la suite $(b_n)$ est de Cauchy dans $E$, donc cette suite converge dans $E$, puisque $E$ est complet. Posons $b = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b_n$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons $g_n : A \cup \{a\} \longrightarrow E$ la fonction telle que $g_n(a) = b_n$ et $g_n|_A = f_n$. Comme $g_n(a) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} b$ et que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $A$ vers $f$, il en résulte que la suite $(g_n)$ converge uniformément sur $A \cup \{a\}$ vers $g : A \cup \{a\} \longrightarrow E$, où $g|_A = f$ et où $g(a) = b$. De plus, chaque $g_n$ est continue en $a$, puisque $f_n(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} b_n = g_n(a)$. Donc (théorème XII.2.1) $g$ est continue signifie : $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, et entraîne, en prenant la restriction à $A$ : $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$. ■

**Extension à des familles de fonctions**

Ce qui précède s'étend facilement à des familles générales de fonctions. Pour les énoncés ci-après, notons $(\mathscr{H})$ les hypothèses suivantes :

$(\mathscr{H})$ $\left\{\right.$ $(E, d)$ est un espace métrique, $X$ et $L$ sont deux espaces topologiques, $\Lambda$ est une partie non vide de $L$, $\omega \in L$ est un point d'accumulation de $\Lambda$, enfin $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'applications : $X \longrightarrow E$ et $f$ est une application : $X \longrightarrow E$ ($X$, $L$ et $E$ non vides).

On obtient alors :

**Théorème XII.2.3**

*Sous les hypothèses $(\mathscr{H})$, si la famille $(f_\lambda)$ converge **uniformément** sur $X$ vers $f$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$ et si chaque $f_\lambda$ est continue en $a \in X$, alors $f$ est **continue** en $a$.*

La démonstration, laissée au lecteur, est pratiquement identique à celle du théorème XII.2.1. Les corollaires 1, 2 et 3 de ce théorème ont leurs analogues obtenus en remplaçant, dans les énoncés, les *suites* $(f_n)$ par des *familles* $(f_\lambda)$ de fonctions.

Arrêtons-nous un peu plus longuement sur l'extension du théorème de la double limite :

**Théorème XII.2.4**

*Sous les hypothèses $(\mathscr{H})$, supposons en outre que $X$ est un sous-espace d'un espace topologique $T$, que $a \in T$ est point d'accumulation de $X$, et que $(E, d)$ est **complet**. Dans ces conditions, si $\lim\limits_{x \to a} f_\lambda(x) = \varphi(\lambda)$ existe dans $E$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et si la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge **uniformément** vers $f$ sur $X$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$, alors :*

(I) $\lim\limits_{\lambda \to \omega} \varphi(\lambda)$ *existe dans $E$.*

(II) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe dans $E$.*

(III) *Ces limites sont égales, c'est-à-dire :*

$$(2) \qquad \boxed{\lim_{x \to a} \left( \lim_{\lambda \to \omega} f_\lambda(x) \right) = \lim_{\lambda \to \omega} \left( \lim_{x \to a} f_\lambda(x) \right)}\,.$$

*Démonstration :*

Une fois prouvée l'assertion (I), on raisonne exactement comme dans la preuve du théorème XII.2.2. Pour prouver (I) il suffit d'établir que la fonction $\varphi$ vérifie le *critère de Cauchy des fonctions* au voisinage de $\omega$. Soit donc $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons un voisinage $V$ de $\omega$ dans $L$ tel que

$$(\forall \lambda \in V, \forall x \in X) \quad d(f_\lambda(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Alors, si on fixe $(\lambda, \mu) \in V^2$, par inégalité triangulaire, il s'ensuit :

$$(\forall x \in X) \quad d(f_\lambda(x), f_\mu(x)) \leq \varepsilon .$$

Passant à $\lim\limits_{x \to a}$, on en déduit : $d(\varphi(\lambda), \varphi(\mu)) \leq \varepsilon$. C'est vrai $\forall (\lambda, \mu) \in V^2$, donc le critère de Cauchy des fonctions est bien vérifié par $\varphi$. ■

On notera, dans le théorème XII.2.4, les rôles symétriques joués par les espaces $L$ et $T$ dans les hypothèses de départ. Cette symétrie est encore mieux mise en évidence si on introduit l'application $F$ :

$$(\Lambda \cup \{\omega\}) \times (X \cup \{a\}) \setminus \{\omega, a\} \longrightarrow E , \quad (\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x) \quad \text{si} \quad (\lambda, x) \in \Lambda \times X ,$$

$$(\omega, x) \mapsto f(x) \quad \text{si} \quad x \in X , \quad (\lambda, a) \mapsto \varphi(\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda \in \Lambda \quad \text{(cf. fig. 1)} .$$

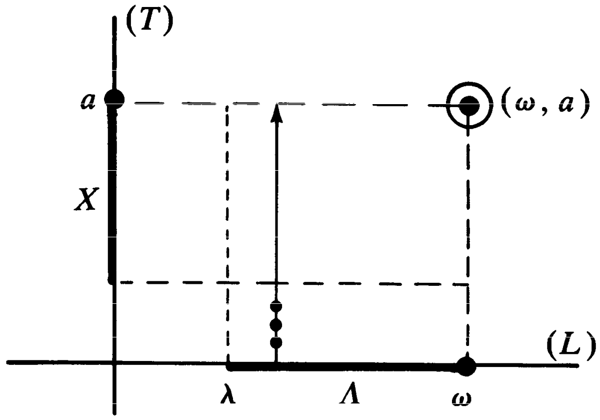



**Fig. 1.**

Le théorème XII.2.4 assure que si $F|_{\Lambda \times X}$ admet des limites en $a$ suivant les « verticales » $\lambda$ = Cte de $\Lambda \times X$, et si $(E, d)$ étant complet, la famille $(f_\lambda)$ converge uniformément sur $X$ vers $f$ quand $\lambda \longrightarrow \omega$, alors $F$ admet au point $(\omega, a)$ une limite « verticale » et une limite « horizontale », et ces limites sont égales.

***Exercice 1 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $E_0$ le sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap E$ et $\mathscr{L}$ le sous-$\mathbb{R}$-ev : $\left\{ f \in E \mid \lim\limits_{T \to +\infty, T>0} \left( \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f \right) \text{ existe} \right\}$ de $E$.

Si $f \in \mathscr{L}$, on pose : $\mu(f) = \lim\limits_{T \to +\infty, T>0} \left( \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f \right)$.

*a*) Vérifier que $\mu$ est une forme linéaire sur $\mathscr{L}$, et que $\mathscr{L}$ contient toute fonction $f \in E$ *continue et périodique*.

*b*) Montrer : $E_0 \not\subset \mathscr{L}$, et $\mathscr{L} \not\subset E_0$.

*c*) Montrer que $\mathscr{L} \cap E_0$ est *fermé* dans $(E_0, \nu_\infty)$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme (utiliser le théorème de la double limite).

***Exercice 2 :*** Soit $(E, d)$ un espace métrique *complet* et $(F, \delta)$ un espace métrique, tous deux non vides. On donne une suite $(f_n)$ de fonctions *continues* : $E \longrightarrow F$ qui converge *simplement* sur $E$ vers $f : E \longrightarrow F$.

*a*) Pour $n$, $p$ entiers $\geq 1$, soit $\quad A_{n,p} = \left\{ x \in E \mid \forall q \geq n, \forall r \geq n, d(f_q(x), f_r(x)) \leq \frac{1}{p} \right\}$.

Prouver : $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$ l'ensemble $\Omega_p = \bigcup\limits_{n \geq 1} \operatorname{Int}(A_{n,p})$ est un ouvert dense de $E$ (utiliser l'exercice 20 du § XI.2). En déduire : $D = \bigcap\limits_{p} \Omega_p$ est une partie dense de $E$ (cf. *ibid.*) et vérifier que tout point $x \in D$ est point de continuité de $f$.

*b) Application :* Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que l'ensemble des points de continuité de $f'$ est dense dans $I$.

**Exercice 3 :** *a)* Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide et $(X_n)$ une suite de parties non vides de $X$. On pose :

$$\limsup_{n \to \infty} (X_n) = \{x \in X \mid \forall V \text{ voisinage de } x, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p > n, V \cap X_p \neq \emptyset\}$$

$$\liminf_{n \to \infty} (X_n) = \{x \in X \mid \forall V \text{ voisinage de } x, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, V \cap X_p \neq \emptyset\}.$$

Prouver :

$a_1$) $\liminf (X_n) \subset \limsup (X_n)$.

$a_2$) $x \in \liminf (X_n) \Leftrightarrow \exists (x_n)$ suite de $X \mid (\forall n)\, x_n \in X_n$ et $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$.

$a_3$) $\limsup (X_n)$ et $\liminf (X_n)$ sont fermés.

Si $\limsup (X_n) = \liminf (X_n)$ on note $\lim (X_n) = \liminf (X_n) = \limsup (X_n)$.

*b)* Soit deux espaces métriques compacts $X$ et $Y$, $f: X \longrightarrow Y$ et $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow Y$. Pour $g: X \longrightarrow Y$ soit $\Gamma(g)$ le graphe de $g$. Montrer : pour que $\lim (\Gamma(f_j))$ existe et soit $\Gamma(f)$, il faut et il suffit que $f$ soit continue et que la suite $(f_j)$ converge uniformément sur $X$ vers $f$.

**Exercice 4 :** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide, et $E$ le $K$-ev $\mathscr{C}^0(X, K)$. Une partie $H$ de $E$ est dite *équicontinue* ssi $\forall \varepsilon$ réel $> 0$

$$\exists \alpha > 0 \mid \forall f \in H \quad \forall (x, y) \in X^2 \quad d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

*a)* S'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $H \subset \mathrm{Lip}_C(X, K)$, alors $H$ est équicontinue.

*b)* Donc, si $X = [a, b]$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$) et si $H$ est formé de fonctions dérivables pour lesquelles $\exists C \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall f \in H) \quad \forall x \in [a, b] \ |f'(x)| \leq C$, alors $H$ est équicontinue.

*c)* Soit $H$ une partie *équicontinue* de $E$ ; on donne une suite $(f_n)$ dans $H$ qui converge simplement sur $X$ vers $f: X \longrightarrow K$. Montrer que $(f_n)$ converge uniformément sur $X$ vers $f$.

*d)* Si $H$ est une partie *compacte* de $E$ pour la norme uniforme $\nu_\infty$, alors $H$ est équicontinue.

*e)* Si $H$ est une partie équicontinue de $E$, alors $\mathrm{Adh}(H)$ (pour $\nu_\infty$) est équicontinue.

*f)* Soit $H$ une partie de $E$ *équicontinue, bornée et fermée* pour $\nu_\infty$. Montrer que $H$ est compacte dans $(E, \nu_\infty)$.

*Indication :* Soit $(a_n)$ une suite dense dans $X$ (cf. exercice 3 du § XI.1). par le *procédé diagonal,* si $(f_n)$ est une suite donnée dans $H$, extraire de $(f_n)$ une suite $(g_p) = (f_{n_p})$ simplement convergente sur $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Prouver ensuite que $(g_p)$ converge simplement sur $X$ (suite de Cauchy), puis que si $g = \lim g_p$, $(g_p)$ converge uniformément vers $g$ sur $X$.

**Exercice 5 :** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide. On munit $\mathscr{B}(X, X)$ de la distance uniforme $D$. Soit $G$ l'ensemble des bijections *isométriques :* $X \longrightarrow X$. Vérifier que $G$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_X$, puis que $G$ est une partie *compacte* de $(\mathscr{B}(X, X), D)$.

*Indication :* Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans $G$, extraire de $(f_n)$ une suite $(g_p)$ qui converge simplement sur $\{a_n\}$, où $(a_n)$ est une suite dense de $(X, d)$. Puis prouver que $(g_p)$ converge uniformément sur $X$ vers une application isométrique $g: X \longrightarrow X$, et utiliser l'exercice du § XI.1 pour conclure que $g \in G$.

**Exercice 6** (Théorème de Dini) : Soit $X$ un espace topologique compact et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues : $X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $(\forall x \in X)\ f_n(x) \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers 0 sur $X$.

1re *méthode :* Soit $\varepsilon$ réel $> 0$ ; vérifier que la suite $(F_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$, où $(\forall n)\ F_{n,\varepsilon} = f_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est une suite décroissante pour l'inclusion de fermés de $X$, telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$, et utiliser l'axiome de Borel-Lebesgue des fermés.

2e *méthode* (seulement pour $X$ métrisable) : Raisonner par l'absurde ; sinon, on aurait $\alpha > 0$ et une suite $(x_n)$ de $X$ tels que $(\forall n)\ f_n(x_n) \geq \alpha$. Extraire alors de $(x_n)$ une suite convergente vers $a \in X$ et aboutir à une contradiction en utilisant la continuité des $f_k$ en $a$.

## § XII.3 *DÉRIVATION ET PASSAGE À LA LIMITE*

**THÉORÈME XII.3.1**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $(f_n)$ une suite d'applications* dérivables *de $I$ dans un $K$*-evn *$E$. On suppose que $(f_n)$ converge* simplement *vers une fonction $f$ sur $I$ et que la suite $(f'_n)$ converge* **uniformément** *sur $I$ vers une fonction $g : I \longrightarrow E$. Alors $f$ est dérivable sur $I$, et $f' = g$. En outre la convergence de la suite $(f_n)$ est* uniforme *sur toute partie* bornée *de $I$.*

*Démonstration :*

Fixons $x_0 \in I$ ; notons $\varphi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $\varphi$ les fonctions : $I \longrightarrow E$ ainsi définies :

$$(\forall x \in I) \quad \text{si} \quad x \neq x_0 , \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{x - x_0}(f_n(x) - f_n(x_0)) ,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)) \quad \text{et} \quad \varphi_n(x_0) = f'_n(x_0) , \quad \varphi(x_0) = g(x_0) .$$

On voit immédiatement que la suite $(\varphi_n)$ converge simplement vers $\varphi$ sur $I$, et que chaque $\varphi_n$ est continue en $x_0$. Montrons qu'en fait la suite $(\varphi_n)$ converge *uniformément* vers $\varphi$ sur $I$.

Soit $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f'_n(x) - g(x)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in I$. Alors

$$(\forall n \geqslant N)\,(\forall p \geqslant N)\,(\forall x \in I) \quad \|f'_n(x) - f'_p(x)\| \leqslant \varepsilon .$$

Le théorème des accroissements finis appliqué entre $x_0$ et $x$ ($x \in I$, $x$ fixé) à $f_n - f_p$, pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$ fixés, montre alors que

$$\|f_n(x) - f_p(x) - (f_n(x_0) - f_p(x_0))\| \leqslant \varepsilon\,|x - x_0| ;$$

d'où, si $x \neq x_0$ : $\|\varphi_n(x) - \varphi_p(x)\| \leqslant \varepsilon$, ce qui reste évidemment vrai avec $x = x_0$. On a donc ainsi prouvé que la suite $(\varphi_n)$ satisfait le *critère de Cauchy uniforme* sur $I$, et comme on sait déjà qu'elle converge simplement vers $\varphi$, on en déduit bien la convergence uniforme annoncée.

Cela dit, il suffit d'appliquer le théorème XII.2.1 pour voir que $\varphi$ est continue en $x_0$, et cela entraîne :

$$\frac{1}{x - x_0}(f(x) - f(x_0)) \underset{\substack{\neq \\ x \longrightarrow x_0}}{\longrightarrow} g(x_0) ,$$

autrement dit : $\varphi'(x_0)$ existe et vaut $g(x_0)$.

Enfin, on a vu qu'étant donné $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n(x) - f_p(x) - (f_n(x_0) - f_p(x_0))\| \leqslant \varepsilon\,|x - x_0|$$

pour tous entiers $n \geqslant N$, $p \geqslant N$ et tout $x \in I$, d'où dans ces conditions :

$$\| f_n(x) - f_p(x) \| \leqslant \varepsilon |x - x_0| + \| f_n(x_0) - f_p(x_0) \| ,$$

ce qui montre que $(f_n)$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur toute partie bornée de $I$ contenant $x_0$, donc en fin de compte sur tout borné de $I$, d'où la dernière assertion du théorème puisque $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$. ■

En utilisant le théorème des accroissements finis avec dérivée à droite, on démontrerait de même :

**THÉORÈME XII.3.2**

> *Avec les notations du théorème* XII.3.1, *supposons que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$, chaque $f_n$ étant* continue *sur $I$ et* dérivable à droite *sur* Int $(I)$. *Si la suite $(f_n)'_d$ des dérivées à droite converge* ***uniformément*** *sur $I$ vers une fonction $g$, alors $f$ est dérivable à droite sur* Int $(I)$ *et* $(\forall x \in \text{Int } (I))$ $f'_d(x) = g(x)$.

Pour qu'une fonction $h$ à valeurs dans un $K$-evn $E$, et définie sur un intervalle non trivial $I$ de $\mathbb{R}$, soit dérivable sur $I$, il faut et il suffit que, pour tout sous-intervalle *compact* $L$ de $I$, la restriction $h|_L$ soit dérivable. Le théorème XII.3.1 entraîne donc le résultat suivant, très important dans la pratique :

**THÉORÈME XII.3.3**

> *Avec les notations du théorème* XII.3.1, *supposons que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$, que les $f_n$ soient toutes dérivables sur $I$ et que la suite $(f'_n)$ converge* uniformément sur tout compact *de $I$ vers une fonction $g$. Alors $f$ est dérivable sur $I$, $f' = g$, et la convergence de la suite $(f_n)$ est uniforme sur tout compact de $I$.*

Par une récurrence facile, on déduit de là :

**THÉORÈME XII.3.4**

> *Avec les notations du théorème* XII.3.1, *supposons que chaque $f_n$ soit $p$ fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^p$), où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, que la suite $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers une fonction $f$, et que pour tout entier $k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $I$ vers une fonction $g_k$. Alors $f$ est $p$ fois dérivable (resp. de classe $\mathscr{C}^p$) et pour tout entier $k \leqslant p$, on a : $f^{(k)} = g_k$.*

*Démonstration :*

Plaçons-nous dans le cas où les $f_n$ sont seulement supposées $p$ fois dérivables, les autres hypothèses étant satisfaites. Le théorème XII.3.3 prouve déjà que $f$ est dérivable sur $I$ et (

Supposons prouvé que $f$ est $k$ fois dérivable avec $1 \leq k < p$, et que $f^{(k)} = g_k$ ; le théorème XII.3.3 s'applique à la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ et montre que $g_k$ est dérivable sur $I$, de dérivée $g_{k+1}$, d'où : $f$ est $k+1$ fois dérivable et $f^{(k+1)} = g_{k+1}$. Par récurrence, $f$ est donc bien $p$ fois dérivable sur $I$ et $f^{(k)} = g_k$ pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$.

Supposons maintenant les $f_n$ de classe $\mathscr{C}^p$. Si $p = +\infty$ il n'y a plus rien à prouver. Si $p < +\infty$, il est déjà sûr que $f$ est au moins de classe $\mathscr{C}^{p-1}$, puisque $p$ fois dérivable. Mais la dérivée $f^{(p)}$ est par hypothèse limite uniforme sur tout compact de $I$ de la suite de fonctions *continues* $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$, donc $f^{(p)}$ est aussi continue (corollaire 2 du théorème XII.2.1) et $f$ est bien de classe $\mathscr{C}^p$. ■

**Cas où l'espace d'arrivée est complet**

Lorsque le $K$-evn $E$ est complet, on peut affaiblir de façon sensible les hypothèses du théorème fondamental XII.3.1.

**THÉORÈME XII.3.5**

*Avec les notations du théorème* XII.3.1, *supposons* $E$ ***complet,*** *les* $f_n$ *toutes dérivables sur* $I$, *la suite* $(f_n')$ *uniformément convergente sur* $I$ *vers une fonction* $g$ *et que, pour un* $x_0 \in I$, *la suite* $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge dans* $E$. *Alors la suite* $(f_n)$ *converge simplement dans* $E$ *et donc les conclusions du théorème* XII.3.1 *sont applicables.*

*Démonstration :*

Soit $x \in I$, $x \neq x_0$. A $\varepsilon$ réel $> 0$ associons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n'(t) - f_p'(t)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{|x - x_0|}$ pour tout $t \in X$ et tous entiers $n \geq N$ et $p \geq N$. Le théorème des accroissements finis, appliqué entre $x_0$ et $x$ à $f_n - f_p$ pour $n \geq N$ et $p \geq N$, $n$ et $p$ fixés, donne :

$$\|f_n(x) - f_p(x) - (f_n(x_0) - f_p(x_0))\| \leq \frac{\varepsilon}{|x - x_0|}\,|x - x_0| = \varepsilon\,,$$

d'où :

$$\|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon + \|f_n(x_0) - f_p(x_0)\| \leq 2\,\varepsilon\,,$$

ce qui établit que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $E$ est complet, cette suite converge, et c'est vrai $\forall x \in I$. ■

***Exemple 1 :*** A titre d'application, montrons, *indépendamment de toute théorie de l'intégration,* qu'**une fonction continue** $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où $I$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, **admet au moins une primitive.** Il suffit pour cela de prouver que pour tout intervalle compact $[a, b] \subset I$ $(a < b)$, la restriction $g = f|_{[a,b]}$ admet une primitive. A cet effet considérons une suite $(g_n)$ de fonctions : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et affines par morceaux qui converge uniformément vers $g$ sur $[a, b]$ (cf. proposition VII.1.3). Chaque $g_n$ admet au moins une primitive (car c'est une combinaison linéaire de fonctions du type $h_\alpha$ : $x \mapsto |x - \alpha|$, et que $h_\alpha$ admet sur $\mathbb{R}$ la primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}$ $(\operatorname{sgn}(x - \alpha) \times (x - \alpha)^2)$. Pour chaque $n$, notons $G_n$ la primitive de $g_n$ telle que $G_n(a) = 0$. Le théorème XII.3.5 s'applique à la suite $(G_n)$

cette suite converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction $G$ qui est primitive de $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g$.

***Remarque 1 :*** Les résultats de ce § peuvent être étendus sans difficulté à des *familles* générales de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'un intervalle non trivial $I$ dans un $K$-evn $E$, $\Lambda$ étant un sous-espace d'un espace topologique $L$. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les théorèmes correspondant aux théorèmes XII.3.1 à XII.3.5 dans ce cadre général, et d'en vérifier la validité.

***Exercice 1 :*** On donne deux réels $a, b$ $(a < b)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et *dérivables* définies sur le *compact* $I = [a, b]$ et à valeurs dans un $K$-evn $E$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$, indépendant de $n$, tel que $\|f_n'(t)\| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$. Montrer que si la suite $(f_n)$ converge *simplement* vers une fonction $f$ sur $I$, elle converge *uniformément* sur $I$.

***Exercice 2 :*** Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles *p fois dérivables* dans un intervalle ouvert $I$. On suppose que la suite $(f_n)$ converge *simplement* sur $I$ vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $p$ fois dérivable. Pour tout $r$ tel que $1 \leqslant r \leqslant p$, montrer que, quels que soient les nombres réels $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ et le point $x_0 \in I$, il existe un entier $N$ tel que, pour chaque $n \geqslant N$, il existe un point $x_n$ pour lequel $|x_n - x_0| \leqslant \delta$ et $|f^{(r)}(x_n) - f^{(r)}(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

*Indication :* Etablir ce résultat pour $r = 1$, puis raisonner par récurrence sur $r$.

***Exercice 3 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. Désignons par $E$ le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \nu_\infty)$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. Soit $F$ un sous-$\mathbb{R}$-ev de $E$ inclus dans $\mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que si $F$ est *fermé* dans $E$, alors $F$ est de dimension finie.

*Indication :* Le point crucial consiste à prouver que l'application $F \longrightarrow E$, $f \mapsto f'$ est ici continue (cf. l'exercice 20 du § XI.2 sur les espaces de Baire). On en déduit alors que la boule unité $\tilde{B}(0_F, 1)$ est équicontinue (cf. exercice 4 du § XII.2), puis, qu'elle est compacte, et on applique le théorème de Riesz.

***Exercice 4 :*** Soit $E = (\mathscr{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \nu_\infty)$ où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. On considère un sous-$\mathbb{R}$-ev $H$ de $E$ possédant les propriétés suivantes :

(I) $H \subset \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $H$ est fermé dans $E$, et toute fonction $f \in H$ est *uniformément continue.*

(II) Pour toute $f \in H$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction ${}_\tau f : x \mapsto f(x + \tau)$ appartient à $H$.

Montrer : $H \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Le sous-$\mathbb{R}$-ev $H$ est-il nécessairement de dimension finie ?

***Exercice 5 :*** Soit $E_i = \mathscr{C}^i([0, 1], \mathbb{R})$. Notant $\nu_\infty$ la norme uniforme, on définit sur $E_i$ la norme $p_i : f \mapsto \sum\limits_{j=0}^{i} \nu_\infty(f^{(j)})$.

*a*) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $(E_1, p_1)$. Montrer qu'on peut en extraire une suite convergeant dans $(E_0, p_0)$.

$b_1$) En déduire : $\forall \varepsilon$ réel $> 0$ $\exists C_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall u \in E_2)$ $\nu_\infty(u') \leqslant \varepsilon \nu_\infty(u'') + C_\varepsilon \nu_\infty(u)$.

$b_2$) Soit $a_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et *bornées*. Montrer que si $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie l'équation différentielle : $(\forall t)\; u''(t) + a_1(t)\, u'(t) + a_0(t)\, u(t) = 0$, et si $u$ est bornée, alors $u'$ et $u''$ sont bornées.

***Exercice 6 :*** Pour $x$ réel, on considère la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

*a*) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge ssi $x \geqslant 0$.

*b*) Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Montrer que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

## § XII.4 *SÉRIES DE FONCTIONS, PRODUITS INFINIS DE FONCTIONS*

### Définitions

Soit $X$ un ensemble non vide et $E$ un $K$-evn. Donnons-nous une suite de fonctions : $X \longrightarrow E$, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par définition, étudier la **convergence simple,** ou la **convergence uniforme,** de la **série de fonctions** $\sum u_n$, c'est étudier la convergence simple, ou la convergence uniforme, de la *suite* de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, appelée *suite des sommes partielles de la série de fonctions* $\sum u_n$, définie par :

$$(\forall n) \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Ainsi on dit que *la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge simplement* (resp. *uniformément*) *sur* $X$ ssi la suite de fonctions $(S_n)$ converge simplement (resp. uniformément) sur $X$, etc.

De même on dit que *la série de fonctions* $\sum u_n$ *vérifie sur* $X$ *le critère de Cauchy uniforme* ssi la suite de fonctions $(S_n)$ vérifie sur $X$ le critère de Cauchy uniforme.

Lorsque la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $X$, la limite simple de $(S_n)$ sur $X$ s'appelle **somme de la série de fonctions** $\sum u_n$ et se note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Rappelons que la série de fonctions $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $X$ ssi :

(1) $$(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0), \quad \exists N \in \mathbb{N} \mid \quad (\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2)$$

$$\boxed{(N \leqslant n < p) \Rightarrow \left( (\forall x \in X) \left\| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right\| \leqslant \varepsilon \right)}\,.$$

Supposons à présent $E = K$, et les $u_n$ à valeurs dans $K^*$. Par définition, étudier la **convergence simple**, ou la **convergence uniforme,** du produit infini de fonctions $\prod u_n$, c'est étudier celle de la *suite* de fonctions $(P_n)$, appelée *suite des produits partiels du produit infini de fonctions* $\prod u_n$, définie par :

$$(\forall n) \quad P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k \,.$$

Ainsi on dit que *le produit infini de fonctions* $\prod u_n$ *converge simplement* (*resp. uniformément*) *sur* $X$ ssi la suite de fonctions $(P_n)$ converge simplement (resp. uniformément) sur $X$, etc.

De même on dit que *le produit infini de fonctions* $\prod u_n$ *vé* *critère de Cauchy uniforme* ssi on a : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leqslant n < p$, on ait :

$$(\forall x \in X) \quad \left| \left( \prod_{j=n+1}^{p} u_j(x) \right) - 1 \right| \leqslant \varepsilon .$$

Lorsque le produit infini de fonctions $\prod u_n$ converge simplement sur $X$, la limite simple de $P_n$ sur $X$ s'appelle **produit** des $u_n$ et se note $\prod_{k=0}^{\infty} u_k$.

**Propriétés immédiates**

Il est facile d'appliquer aux séries et produits infinis de fonctions les résultats des §§ XII.1 à XII.3. Bornons-nous aux conséquences les plus simples, étant entendu que dans les énoncés qui suivent, $X$ désigne un ensemble non vide, $E$ un $K$-evn et $(u_n)$ une suite de fonctions : $X \longrightarrow E$.

$(\mathrm{SF}_1)$ *Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur X, la suite de fonctions $(u_n)$ converge uniformément vers $0_E$ sur X.* En effet, les suites $(S_n)$ et $(S_{n-1})_{n \geqslant 1}$ convergeant uniformément sur $X$, par différence, la suite $(S_n - S_{n-1}) = (u_n)$ converge uniformément vers $0_E$. Naturellement, cette **condition nécessaire** de convergence uniforme de la série $\sum u_n$ n'est en général pas suffisante.

$(\mathrm{SF}_2)$ supposons que la série de fonctions $\sum u_n$ converge *simplement* sur $X$, et soit $S$ sa somme. Soit $(R_n)$ la suite de fonctions définie par $(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X)$ $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ (*suite des restes*).
*Pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur X, il faut et il suffit que la suite $(R_n)$ converge uniformément vers $0_E$ sur X.*

***Exemple 1 :*** Soit $X = \mathbb{R}_+^*$, $E = \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{nx}$ $(x > 0)$. On sait que la série $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. § IX.4, exemple 4) ; mais $u_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) = \dfrac{2}{\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est donc exclu que la suite de fonctions $(u_n)$ puisse converger uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$. En conséquence la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

***Exemple 2 :*** Soit $X = ]-1, +\infty[$ et $E = \mathbb{R}$. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite de fonctions définie par $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ $(x > -1)$. Le théorème des séries alternées montre que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1, +\infty[$. Notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, le même théorème montre que si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \geqslant -1+\alpha) \ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x} \leqslant \frac{1}{n+\alpha}$, ce qui montre que la suite $(R_n)$ converge uniformément vers 0 sur $J_\alpha = [-1+\alpha, +\infty[$. Donc la série de fonctions de somme : $x \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge *uniformément* sur tout ensemble $J_\alpha$ $(\alpha > 0)$, et en particulier *sur tout compact* de $]-1, +\infty[$.

$(SF_3)$ *Si la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur X, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X.* Réciproquement, si elle vérifie ce critère sur $X$, **et si** $\boldsymbol{E}$ **est complet,** la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $X$.

$(SF_4)$ *Supposons* que $X$ soit un espace topologique, *que la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* $X$ *et que chaque* $u_n$ *soit continue en un point* $a \in X$ ; *alors la somme* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est continue en* $a$.

En effet, chaque $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, somme *finie* de fonctions continues en $a$, est alors continue en $a$ et on peut appliquer le théorème XII.2.1 à la suite $(S_n)$.

On tire de $(SF_4)$ des conséquences analogues aux corollaires 1 à 3 du théorème XII.2.1.

$(SF_5)$ (Double limite). Supposons que $X$ est un sous-espace d'un espace topologique $T$, que $a \in T$ est un point d'accumulation de $X$, et que $\boldsymbol{E}$ **est complet.** *Si chaque* $u_n$ *possède une limite en* $a$ *et si la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur X, alors la série* $\sum_n \lim_{x \to a} u_n(x)$ *converge, la somme* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *possède une limite en* $a$*, et on a :*

$$(2) \qquad \boxed{\lim_{x \to a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \lim_{x \to a} u_n(x) \right)}\,.$$

En effet, dans ces conditions, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ possède en $a$ une limite (limite d'une somme *finie*), et le théorème XII.2.2 peut donc s'appliquer à la suite de fonctions $(S_n)$.

$(SF_6)$ Supposons que $X$ soit un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, que chaque $u_n$ soit *dérivable* sur $X$, que la série de fonctions $\sum u_n$ converge *simplement* sur $X$ et que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge **uniformément** sur $X$. *Alors la fonction* $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est dérivable sur X et* $(\forall x \in X)$ $S'(x) = \sum_n^{\infty} u_n'(x)$. *De plus la convergence de la série* $\sum u_n$ *est uniforme sur tout bo*

En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est dérivable sur $X$, de dérivée $\sum_{k=0}^{n} u_k'$, donc le théorème XII.3.1 s'applique à la suite de fonctions $(S_n)$.

On déduit de $(SF_6)$ les analogues des théorèmes XII.3.2 à XII.3.5 avec des séries de fonctions. Par exemple, avec les notations de $(SF_6)$, si on suppose seulement (les autres hypothèses restant inchangées) que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n'$ est *uniforme sur tout compact de X,* il est vrai que $S$ est dérivable et que $S' = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'$. De même, si chaque $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $X$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ et si, pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact de $X$, alors $S$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et, pour $k$ entier $\in [\![1, p]\!]$, on a : $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}$.

***Exemple 3 :*** Reprenons la série de fonctions $\sum u_n$ de l'exemple 2 $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ ]-1, +\infty[,\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}\right)$. Chaque $u_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+k}\, k!}{(n+x)^{k+1}}$ $(x > -1)$. Or $(\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1)$, la série $\sum u_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente. De plus la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout ensemble $J_\alpha = [-1+\alpha, +\infty[$, où $\alpha$ est un réel $> 0$. Donc la fonction somme $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée $k$-ième est $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+k}\, k!}{(n+x)^{k+1}}$.

### Convergence normale

**DÉFINITION XII.4.1**

*Soit $X$ un ensemble non vide, $E$ un $K$-*evn **complet,** *et $\sum u_n$ une série de fonctions de $X$ dans $E$. On dit que* ***la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur X*** *ssi $\sup_{x \in X} \|u_n(x)\| \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n$, et la série numérique $\sum_n \left(\sup_{x \in X} \|u_n(x)\|\right)$ converge. On appelle* ***ensemble de convergence normale*** *de la série de fonctions $\sum u_n$ toute partie $Y$ de $X$ telle que la série des restrictions $\sum (u_n|_Y)$ converge normalement sur $Y$.*

Dans ces conditions, si la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $X$, pour tout $x \in X$, la série $\sum u_n(x)$ d'éléments de $E$ *converge absolument, donc converge* (cf. théorème XI.4.2), ce qui signifie en particulier que la convergence normale entraîne la convergence simple ; une partie *finie* $Y$ de $X$ est ensemble de convergence normale ssi pour chaque $x \in Y$, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument. La comparaison des séries à termes positifs (cf. théorème II.5.3) donne immédiatement :

**THÉORÈME XII.4.1**

*Avec les notations de la définition* XII.4.1 *(où l'on rappelle que E est* ***complet****), pour que la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge normalement sur X, il faut et il suffit qu'il existe une* ***série convergente*** $\sum \alpha_n$ *à termes réels* $\geq 0$ *telle que :*

(3) $$(\forall n) \quad \sup_{x \in X} \|u_n(x)\| \leq \alpha_n .$$

*Si c'est le cas, pour toute série* $\sum \alpha_n$ *vérifiant ces conditions, notant* $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right)$ *la suite des restes, on a :*

(4) $$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X) \quad \|R_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k .$$

*En conséquence,* ***la convergence normale de la série de fonctions*** $\sum u_n$ ***sur X entraîne sa convergence uniforme sur X.***

*Démonstration :*

Seule la dernière assertion nécessite une explication. Supposons donc que la série à termes positifs $\sum \alpha_n$ convergente vérifie (3), d'où (4) de façon évidente et montrons que la série de fonctions $\sum u_n$ (dont on sait déjà qu'elle converge simplement sur $X$) converge uniformément sur $X$. Soit $\varepsilon$ réel $> 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$, on a, d'après (4) : $\|R_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \leq \varepsilon$, d'où la convergence uniforme sur $X$ de la suite de fonctions $(R_n)$, donc de la série de fonctions $\sum u_n$ d'après ($SF_2$). ■

***Remarque 1 :*** En revanche, la convergence uniforme d'une série de fonctions n'entraîne pas nécessairement sa convergence normale : ainsi dans l'exemple 2, la série de fonctions $\sum u_n$ considérée converge uniformément sur $J_\alpha = [-1 + \alpha, +\infty[$ $(\alpha > 0)$, et cependant il n'existe pour cette série de fonctions aucun ensemble non vide de convergence normale série numérique $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ n'est absolument convergente pour aucun $x \in \left]-1, +\infty\right[$.

Il résulte de ce qui précède que la convergence normale d'une série de fonctions est un mode de convergence encore bien plus restrictif que la convergence uniforme. Raison de plus pour la signaler quand elle a lieu, même si on n'a besoin d'utiliser en fait que la convergence uniforme. Une raison pratique supplémentaire provient du fait que la convergence normale est en général beaucoup plus facile à repérer (dans l'exemple 3, c'est le cas de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, où $u_n^{(k)} = \dfrac{(-1)^{n+k}\, k!}{(n+x)^{k+1}}$ dont la convergence est visiblement normale sur $J_\alpha$) que la convergence uniforme non normale. En pratique, lorsqu'on a besoin d'une convergence uniforme, on commencera donc par rechercher systématiquement des ensembles simples de convergence normale, s'il y en a.

***Exemple 4 :*** Soit à prouver que la fonction $f : \left]1, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-s \operatorname{Log} n}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \left]-1, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto n^{-s}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée $k$-ième est $u_n^{(k)} : \left]-1, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto (-1)^k \dfrac{\operatorname{Log}^k n}{n^s}$. Pour $k$ fixé, étudions la convergence de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$. Pour $\alpha$ réel $> 0$, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \left[1+\alpha, +\infty\right[) \quad \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{\operatorname{Log}^k n}{n^{1+\alpha}} = \lambda_n .$$

Or la série numérique $\sum \lambda_n$ converge (par comparaison avec la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{2}}}$). Donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge *normalement, donc uniformément,* sur $\left[1+\alpha, +\infty\right[$. C'est vrai pour tout $\alpha > 0$. On en déduit que chaque série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact de $\left]+1, +\infty\right[$, et par suite, la fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sa dérivée $k$-ième étant donnée, pour $k \in \mathbb{N}$, par $f^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{\operatorname{Log}^k n}{n^s}$ $(s > 1)$.

***Exemple 5 :*** Soit à montrer que la fonction $\psi : \left]0, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^s}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \left]0, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^s}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sa dérivée $k$-ième étant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)} : \left]0, +\infty\right[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto (-1)^{n+k} \dfrac{\operatorname{Log}^k n}{n^s}$. On remarque tout d'abord que, pour $k$ fixé, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout compact de $]1, +\infty[$ (cf. exemple 4), ce qui montre déjà que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. Il reste à étudier ce qui se passe sur l'intervalle $]0, 1]$ où nous allons reprendre la question autrement, en essayant d'utiliser au mieux le théorème des séries alternées. Il est clair que pour $s$ donné $> 0$, la suite $n \mapsto \dfrac{\operatorname{Log}^k n}{n^s}$ a pour limite 0 pour $n \longrightarrow +\infty$, et décroît dès que $n$ est assez grand (l'étude des variations de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log}^k x}{x^s}$ montre que c'est le cas pour $n \geqslant e^{k/s}$). Soit alors $\alpha$ un réel $> 0$. Pour $s \geqslant \alpha$, on a : $e^{k/s} \leqslant e^{k/\alpha}$, donc $n \geqslant e^{k/\alpha} \Rightarrow n \geqslant e^{k/s}$. Par suite, par le théorème des séries alternées, en notant $R_{n,k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n^{(k)}$, on a, dès que $n \geqslant e^{k/\alpha}$ :

$$(\forall s \in [\alpha, +\infty[) \quad |R_{n,k}(s)| \leqslant \frac{\operatorname{Log}^k (n+1)}{(n+1)^s} \leqslant \frac{\operatorname{Log}^k (n+1)}{(n+1)^\alpha} = \lambda_{n,k} \, .$$

Comme $\lambda_{n,k} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, on voit que la suite $(R_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[\alpha, +\infty[$. Par conséquent la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout ensemble $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$ (et *a fortiori* sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$). Cela est vrai pour tout $\alpha > 0$, d'où l'on conclut que $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sa dérivée $k$-ième étant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donnée par $\psi^{(k)} : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \dfrac{\operatorname{Log}^k n}{n^s}$.

***Exemple 6*** (constante d'Euler) : La constante d'Euler $\gamma$ peut s'écrire : $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \dfrac{1}{n} - \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$. Pour $x \in ]-1, 1]$, on voit, en intégrant entre 0 et $x$ la relation : $\dfrac{1}{1+t} = \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \right) + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$, et en remarquant que

$$0 \leqslant \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}\, dt}{1+t} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \, ,$$

que :
$$\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \, .$$

En particulier on retrouve $\operatorname{Log} 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$. On en déduit :

$$(5) \qquad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right) .$$

Essayons de renverser l'ordre des sommations dans (5).

$1^{re}$ *méthode : Utilisation du théorème de la double limite*

On a : $\gamma = \lim_{N \to \infty} f(N)$ en posant

$$(\forall N \in \mathbb{N}^*) \quad f(N) = \sum_{n=1}^{N} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right),$$

soit : $f(N) =$ (somme *finie* de séries convergentes) $= \sum_{k=2}^{\infty} f_k(N)$, avec $(\forall k \geqslant 2)\ f_k(N) = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k}$. Pour $N$ donné, la suite de terme général $|f_k(N)|$ $(k \geqslant 2)$ tend vers 0 en décroissant ; le théorème des séries alternées montre alors que $(\forall m \geqslant 2)$ :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(N) \right| \leqslant \frac{1}{m+1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{m+1}} \leqslant \frac{1}{m+1} \zeta(m+1) \leqslant \frac{1}{m+1} \zeta(3).$$

Comme $\frac{\zeta(3)}{m+1} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, cela suffit à établir que la série de fonctions de $N$ $\sum f_k(N)$ converge uniformément sur $\mathbb{N}$.

D'autre part

$$(\forall k \geqslant 2) \quad f_k(N) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

On peut donc appliquer ($SF_5$) (avec $T = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$), ce qui donne :

1) $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(N)$ existe (ce qu'on savait déjà : cette limite vaut $\gamma$),

2) la série $\sum_{k \geqslant 2} \lim_{N \to \infty} f_k(N)$ converge,

3) la somme de cette série est $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(N)$.

Autrement dit :

$$\boxed{\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)} \quad \text{(relation due à Euler)}.$$

Le lecteur attentif aura remarqué qu'ici l'interversion de l'ordre des sommations n'avait rien d'évident, car il convient d'observer que la famille double $\left( \frac{(-1)^k}{kn^k} \right)_{k \geqslant 2, n \geqslant 1}$ *n'est pas sommable.*

*2^e méthode : Utilisation des propriétés des familles sommables*

La suite double $\left(\dfrac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k \geqslant 2,\, n \geqslant 1}$ n'est pas sommable, mais en revanche la suite double $\left(\dfrac{(-1)^k}{kn^k}\right)_{k \geqslant 2,\, n \geqslant 2}$ *est sommable,* car pour toute partie finie $J$ de $[\![2, +\infty[\![^2$, on a :

$$\sum_{(k,n)\in J} \frac{1}{kn^k} \leqslant \sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

(pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand) $\leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{M} \frac{1}{k} \times \frac{1}{k-1} \leqslant 1.$

Il convient donc de mettre à part dans (5) les termes relatifs à $n = 1$ en l'écrivant :

$$\gamma + \operatorname{Log} 2 - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k} \right). \tag{6}$$

Dans le second membre de (6) on peut renverser l'ordre des sommations (cf. § IX.7, exemple 3), ce qui donne :

$$\gamma + \operatorname{Log} 2 - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (\zeta(k) - 1),$$

et en tenant compte de : $\operatorname{Log} 2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, on retrouve bien : $\gamma = \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k)$.

**Produits infinis et dérivées logarithmiques**

**Théorème XII.4.2**

> *Soit $I$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions : $I \longrightarrow K^*$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que la série de fonctions $\sum \dfrac{u_n'}{u_n}$ converge uniformément sur tout compact de $I$, et que le produit infini $\prod u_n$ converge en au moins un point $x_0 \in I$.*
> *Alors le produit infini $\prod u_n$ converge simplement sur $I$, la fonction $P : I \longrightarrow K^*$, $x \mapsto \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée vérifie : $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n'}{u_n}$.*

*Démonstration :*

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $0 \in I$ et que $x_0 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k'}{u_k}$. La fonction $P_n$ est dérivable et $\dfrac{P'_n}{P_n} = S_n$. Désignons par $S$ la somme de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{u'_k}{u_k}$, qui en vertu des hypothèses, est une fonction continue sur $I$. Notons encore $F_n(x) = \int_0^x S_n(t)\,dt$ et $F(x) = \int_0^x S(t)\,dt$ pour $x \in I$. En fixant $x \in I$, on voit par application du théorème VII.3.5 que $F_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} F(x)$, puisque la convergence de la suite de fonctions $(S_n)$ est uniforme sur le segment d'extrémités 0 et $x$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto [\exp(-F_n(x))]\,P_n(x)$ est dérivable sur $I$, de dérivée

$$[\exp(-F_n(x))][P'_n(x) - P_n(x)\,S_n(x)] = 0\,,$$

donc est constante. On en déduit :

$$(\forall x \in I) \quad P_n(x) = P_n(0)\exp(F_n(x))\,.$$

Puisque la suite $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $K^*$, et que $F_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} F(x)$ pour chaque $x \in I$, il s'ensuit que

$$(\forall x \in I) \quad P_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda\,\exp(F(x)), \quad \text{où } \lambda = \lim_{n \to \infty} P_n(0)\,.$$

Donc le produit infini $\prod u_n$ converge simplement sur $I$, et sa valeur $P(x)$ en $x$ est :

$$P(x) = \lambda\,\exp(F(x)) = P(0)\exp(F(x))\,.$$

Puisque $F$ est dérivable, de dérivée $F' = S$, on voit bien que $P$ est dérivable et que $\dfrac{P'}{P} = S$. ■

***Exemple 7 :*** Fixons $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Rappelons (§ IX.6, exemple 5) que $\sin \pi z \neq 0$, et $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{n^2}\right)$. Considérons alors un réel $\alpha > 0$ tel que le segment $[z - \alpha, z + \alpha]$ ne rencontre pas $\mathbb{Z}$, et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t) = 1 - \dfrac{(z+t)^2}{n^2}$ ($t \in [-\alpha, \alpha]$). Chaque $u_n(t)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\alpha, \alpha]$, et $\dfrac{u'_n(t)}{u_n(t)} = \dfrac{-2(z+t)}{n^2 - (z+t)^2}$. La convergence normale sur $[-\alpha, \alpha]$ de la série de fonctions $\sum \dfrac{u'_n}{u_n}$ est flagrante, donc cette série converge uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$, et nous savons déjà que le produit $\prod u_n$ converge simplement sur $[-\alpha, \alpha]$ vers $\dfrac{\sin \pi(z+t)}{\pi(z+t)}$. Le théorème XII.4.2 s'applique donc, et en particulier en prenant la dérivée logarithmique de $\prod u_n$ au point $t = 0$, on obtient :

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} \times \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin \pi(z+t)}{\pi(z+t)}\right)\right]_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}\,,$$

soit :

(7) $$\boxed{\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}}.$$

Ce n'est pas tout : posons maintenant $v_n(t) = \dfrac{-2(z+t)}{n^2 - (z+t)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-\alpha, \alpha]$, c'est-à-dire $v_n(t) = \dfrac{1}{z+t-n} + \dfrac{1}{z+t+n}$.

La fonction $v_n$ est dérivable sur $[-\alpha, \alpha]$, de dérivée

$$t \mapsto v_n'(t) = -\left[\frac{1}{(z+t-n)^2} + \frac{1}{(z+t+n)^2}\right].$$

Les séries de fonctions de $t$ : $\sum v_n$ et $\sum v_n'$ convergent de toute évidence normalement, donc uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$, et $\operatorname{cotg} \pi(z+t)$ est définie et dérivable pour $t \in [-\alpha, \alpha]$. La formule (7) (avec $z+t$ à la place de $z$) donne :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi(z+t) = \frac{1}{z+t} + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t),$$

d'où par dérivation terme à terme :

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \pi \operatorname{cotg} \pi(z+t)\right]_{t=0} = \frac{-1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{(z-n)^2} + \frac{-1}{(z+n)^2}\right),$$

soit :

(8) $$\boxed{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right)}.$$

***Exemple 8 :*** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a vu que $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x} \mathrm{e}^{-\gamma x} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x/n}}{1 + \dfrac{x}{n}}$ (c'est la relation (2) du § IX.6). Gardons le symbole $\Gamma$ pour désigner la fonction : $]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \Gamma(x)$. Chaque fonction $u_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x/n}}{1 + \dfrac{x}{n}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et sa dérivée vérifie :

$$(\forall x > 0) \quad \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

Les hypothèses du théorème XII.4.2 sont toutes satisfaites, d'où l'on déduit que $\Gamma$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que :

(9) $$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

A partir de (9), il devient évident que $\Gamma$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, les dérivées s'obtenant par dérivation terme à terme. En particulier, en se l dérivation, on obtient :

$$(10) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0 \,,$$

d'où résulte la convexité logarithmique de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Produits infinis normalement convergents**

Ci-dessous fixons un ensemble non vide $X$, et une série $\sum u_n$ de fonctions : $X \longrightarrow K$ **normalement convergente sur $X$.** Pour chaque $x \in X$, le produit infini $\prod (1 + u_n(x))$ est absolument convergent, donc convergent (se souvenir de la convention qui suit le théorème IX.6.2), donc la suite $(P_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)\right)$ des produits partiels converge *simplement* sur $X$. Nous dirons par définition qu'un produit infini $\prod (1 + u_n)$ de ce type (c'est-à-dire tel que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $X$) est **normalement convergent sur $X$.** Nous étendons à ces produits infinis les notions de convergence uniforme, et de critère de Cauchy uniforme, introduites au début du § pour les produits infinis généraux au sens strict.

**Théorème XII.4.3**

*Avec les notations ci-dessus, un produit infini $\prod (1 + u_n)$ qui converge* ***normalement*** *sur $X$ converge* ***uniformément*** *sur $X$ et vérifie sur $X$ le critère de Cauchy uniforme.*

*Démonstration :* Pour $n \in \mathbb{N}$, posons : $\alpha_n = \sup_{x \in X} \|u_n(x)\|$. Le produit infini $\prod_n (1 + \alpha_n)$ converge. Posons $A = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ et

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k(x)) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X) \,.$$

Il est clair que $|P_n(x)| \leqslant \prod_{k=0}^{n} (1 + \alpha_k) \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$. Soit alors $\varepsilon$ réel $> 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\prod_{k=n+1}^{p} (1 + \alpha_k) - 1 \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$ dès que $N \leqslant n < p$ (cf. théorème IX.6.1). Pour tous entiers $n$, $p$ tels que $N \leqslant n < p$, on a :

$$(\forall x \in X) \quad \left|\prod_{k=n+1}^{p} (1 + u_k(x)) - 1\right| \leqslant \prod_{k=n+1}^{p} (1 + \alpha_k) - 1 \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$$

(cf. le calcul dans la preuve du théorème IX.6.2), d'où :

$$|P_p(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{A}\, |P_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{A} \times A = \varepsilon \,.$$

Et l'on a bien prouvé que la suite de fonctions $(P_n)$ est uniformément de Cauchy sur $X$. De plus la preuve ci-dessus montre que le produit $\prod (1 + u_n)$ vérifie bien sur $X$ le critère de Cauchy uniforme. ■

**Exercice 1 :** *a*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$. Prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \mathrm{e} - 2 - \int_0^1 \mathrm{e}^t \operatorname{Log} t \, \mathrm{d}t .$$

*b*) Prouver les égalités :

$$\int_0^1 x^{-x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} .$$

**Exercice 2 :** Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que :

$$\left( \forall t \in \left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) \quad g(t) = t(1 - 4t^2) .$$

*a*) Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n!\,x)}{(n!)^2}$ est définie et dérivable.

*b*) Sachant que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$, montrer que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$, $f'(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Exercice 3 :** Soit $a$ réel $> 0$, $\lambda \in ]-1, 1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Montrer qu'il existe une et une seule fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x + a) - \lambda F(x) = f(x) .$$

**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \operatorname{Ent}(x)$. Etudier, pour tout $x$, la continuité, la limite éventuelle à droite et à gauche, de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} F(nx)$.

**Exercice 5 :** Soit $n \mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap ]-1, 1[$. Montrer que $f : ]-1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x - r_n|$ est définie, *convexe*, et indiquer les points où elle est dérivable (elle n'est dérivable en aucun $r_n$).

**Exercice 6 :** Soit $X$ un ensemble non vide et $E$ un $K$-evn de Banach. On donne deux fonctions $\varphi : X \longrightarrow X$ et $f : X \longrightarrow E$, un réel $C > 1$, enfin une fonction $\alpha : X \longrightarrow E$ telle que $f \circ \varphi = Cf + \alpha$, et que $\alpha$ soit *bornée*. Montrer qu'il existe une et une seule fonction $g : X \longrightarrow E$ telle que $g \circ \varphi = Cg$ et que $g - f$ soit bornée.

*Indication :* Utiliser la suite $(f_n) = \left( \dfrac{1}{C^n} f \circ \varphi^{\langle n \rangle} \right)$.

**Exercice 7 :** Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante vers 0. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $u_n(x) = f(x) - f(n + x)$. Etudier la convergence simple, normale et uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 8 :** Etudier la convergence simple, uniforme et normale des séries de fonctions $\sum u_n$ ci-après :

*a*) $u_n(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{-nx^2}$ ($\alpha > 0$ donné) sur $[0, +\infty[$.

*b*) $u_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{z + n}$ (sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$).

*c*) $u_n(x) = nx\,\mathrm{e}^{-n^2 x}$ (sur $\mathbb{R}_+$).

*d*) $u_n(x) = (-1)^n n^\alpha x^{(n^\beta)}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}_+$.

*e*) $u_n(x) = x^{s_n}$ (où pour $n \geq 1$, $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$) sur $\mathbb{R}_+$.

*f*) $u_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{n(1 + nx^2)}$ ($\alpha > 0$, par convention $u_n(0) = 0$) sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 9 :** On donne $\alpha$ réel $> 0$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n^\alpha x)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

***Exercice 10 :*** Donner un exemple de suite $(u_n)$ de fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continues,* telles que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, mais que la convergence ne soit normale sur aucun intervalle non trivial.

***Exercice 11 :*** Pour $x \in I = ]-1, +\infty[$ on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{1+t}$. Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$, que $(\forall x \in I)\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n+1}$, et que $(\forall x \in ]-1, 1[)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$, avec

$$(\forall n)\quad A_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}^n\,\mathrm{d}t}{1+t} = (-1)^{n+1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^{n+1}}.$$

***Exercice 12*** (constante d'Euler) : A partir de : $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n} + \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$, démontrer que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}$ (Euler).

***Exercice 13*** (exemples de fonctions continues non dérivables) : *a*) Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique définie par $f_1(x) = |x|$ pour $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $n \geqslant 1$ soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4^{n-1}} f_1(4^{n-1}x)$. Montrer que $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et n'est nulle part dérivable (Van der Waerden).

*b*) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^{4^n} \pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable (Weierstrass).

*Remarque :* Hardy a montré que si $\alpha \in ]0, 1[$ et si $b$ est un entier $\geqslant 2$, la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n\alpha} \sin(b^n \pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.

***Exercice 14 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $E_p$ le $K$-ev $\mathscr{C}^p([a, b], K)$ des fonctions : $[a, b] \longrightarrow K$ de classe $\mathscr{C}^p$, cet espace étant muni de la norme $N : f \mapsto \sum_{k=0}^{p} \nu_\infty(f^{(k)})$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. Montrer que $(E_p, N)$ est *complet.*

***Exercice 15 :*** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$. On désigne par $E$ le $K$-ev $\mathscr{C}^\infty([a, b], K)$ des fonctions : $[a, b] \longrightarrow K$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On donne une suite $\alpha = (\alpha_n) \in l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ avec $(\forall n)\ \alpha_n > 0$. Pour $(f, g) \in E^2$, soit $D_\alpha(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \operatorname{Min}(1, \nu_\infty(f^{(n)} - g^{(n)}))$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. Montrer que $(E, D_\alpha)$ est un espace métrique complet, dont la topologie ne dépend pas de $\alpha$, et que $D_\alpha$ n'est associée à aucune norme. Décrire la C.N.S. pour qu'une suite $(f_n)$ de $E$ converge dans $(E, D_\alpha)$.

***Exercice 16 :*** Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^{n^2} x)$ est définie et continue, mais qu'elle n'est dérivable en aucun point.

*Indication :* Former les rapports $\Delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, pour $h = \varepsilon_1 2^{-p^2-1}\pi$ et pour $h = \varepsilon_2 \times 3 \times 2^{-p^2-1}\pi$ $(\varepsilon_i^2 = 1, p \in \mathbb{N})$.

***Exercice 17 :*** *a*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $g_n$ la fonction :

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \int_{1/n}^{n} t^{x-1}(\mathrm{Log}\, t)\, \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que la suite $(g_n)$ converge uniformément vers $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}($ [illegible] tout intervalle $[a, b]$ avec $0 < a < b$. En utilisant la relation (9) de l'exemple 8, en déduire en particulier : $-\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{Log} t \, dt$.

*b*) Déduire du *a*) le développement asymptotique $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \operatorname{Log} \frac{1}{y} - \gamma + 0(1)$ lorsque $y \xrightarrow{>} 0$. En déduire que pour toute fonction $f : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que l'intégrale $\int_y^{+\infty} f(t) \, dt$ soit convergente pour tout $y > 0$ et que l'on ait $\int_y^{+\infty} f(t) \, dt = \operatorname{Log} \frac{1}{y} + 0(1)$, on peut écrire $\gamma = \int_0^{+\infty} \left( f(t) - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt$, et en particulier $\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

***Exercice 18 :*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, +1]$ on pose $u_n(x) = \frac{x^n \sin nx}{n}$.

*a*) Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément pour $|x| \leqslant 1$ vers une fonction continue $f$.

*b*) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-1, +1[$. Calculer $f'$ et en déduire $f(x) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x \sin x}{1 - x \cos x}$.

*c*) Peut-on en déduire la somme des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ ?

***Exercice 19 :*** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la série de fonctions $\sum u_n$ définie par $(\forall x \in \mathbb{R})$ $u_0(x) = 1$ et pour $n > 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad u_n(x) = \frac{x(x + \lambda n)^{n-1}}{n!}.$$

*a*) Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument si $|\lambda| \leqslant \frac{1}{e}$ et qu'elle diverge (pour $x \neq 0$) si $|\lambda| > \frac{1}{e}$. On suppose désormais que $|\lambda| \leqslant \frac{1}{e}$.

*b*) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$. On note sa somme $f_\lambda$.

*c*) Exprimer $u_n'$ en fonction de $u_{n-1}$. Montrer que la fonction $f_\lambda$ est dérivable et que l'on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f_\lambda' = f_\lambda(x + \lambda)$. En déduire que $f_\lambda$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

*d*) Montrer : $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R})$ $u_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \, u_{n-k}(y)$. En déduire : $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R})$ $f_\lambda(x + y) = f_\lambda(x) \cdot f_\lambda(y)$. Conclure à l'existence, pour tout $\lambda \in \left[ \frac{-1}{e}, \frac{1}{e} \right]$, d'un nombre $\alpha(\lambda)$ tel que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f_\lambda(x) = e^{\alpha(\lambda)x}$. Montrer que $\alpha(\lambda) > 0$ et que $\lambda = \frac{\operatorname{Log} \alpha(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$. Cela suffit-il à déterminer $\alpha(\lambda)$ ? Montrer que $\alpha\left(\frac{1}{e}\right) = e$.

*e*) Montrer que $\left( \forall \lambda \in \left[ \frac{-1}{e}, \frac{1}{e} \right] \right)$ $\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} \lambda^k$. En déduire que la fonction $\alpha$ est croissante et majorée par e. Quelle est la fonction réciproque de $\alpha$ ?

***Exercice 20 :*** Les produits infinis $\prod_{n \geqslant 1} (1 + z^n)$ et $\prod_{n \geqslant 1} (1 - z^{2n-1})$ sont simplement convergents dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Désignant leur somme respectivement par $S$ et $T$, montrer que $S \, . \, T = 1$ (si $f = ST$, $f(z) = f(z^2) \ldots$).

***Exercice 21 :*** Préciser l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui font converger les séries de terme général $u_n(z) = \frac{z^n}{1 - z^n}$ $(n \geqslant 1)$, $v_n(z) = \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$. Où ces séries convergent-elles uniformément ?

## § XII.5 *EXEMPLES ET APPLICATIONS*

Nous allons dans ce dernier § illustrer par quelques exemples les méthodes étudiées dans les §§ précédents, puis nous donnerons quelques applications simples à l'Analyse fonctionnelle.

***Exemple 1 :*** *Proposons-nous d'étudier, au voisinage de* 1, *la série de fonctions* $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ *définie par :*

$$(\forall t \in \left]-1, 1\right[) \quad u_n(t) = \frac{t^n}{1 + t^n}.$$

Soit $\alpha \in \left]0, 1\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a : $|u_n(t)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1 - \alpha}$. Comme la série numérique $\sum \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-\alpha, \alpha]$ ; donc elle converge *uniformément* sur tout compact de $\left]-1, 1\right[$. Désignons sa somme par $S$ : $S$ est continue sur $\left]-1, 1\right[$ puisque chaque $u_n$ l'est.

On constate ensuite que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(t) \underset{t \to 1}{\overset{<}{\longrightarrow}} \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de prévoir que $S(t) \underset{t \to 1}{\overset{<}{\longrightarrow}} +\infty$, mais comme nous désirons étudier de façon plus précise le comportement de $S$ au voisinage de 1, nous sommes conduits à écrire $S$ sous une forme différente.

Soit $t$ fixé sur $\left]-1, 1\right[$. Alors $u_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n}$, d'où :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{(k+1)n}.$$

Ici l'interversion des sommations est facile à justifier (soit par le théorème de la double limite, soit par le fait que la famille $(t^{(k+1)n})_{k \geq 0, n \geq 1}$ est sommable, cf. § XII.4, exemple 6), d'où :

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} t^{(k+1)n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1 - t^{k+1}}.$$

En particulier :

$$(1 - t)\, S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t), \quad \text{en posant} \quad (\forall k) \quad v_k(t) = \frac{(-1)^k t^{k+1}}{1 + t + \cdots + t^k}.$$

Pour chaque $t \in [0, 1[$, $|v_k(t)| \underset{k \to \infty}{\downarrow} 0$ et $|v_k(t)| \leq \dfrac{1}{k+1}$ pour tout entier

$k$ (car $1 + t + \cdots + t^k - (k+1)\,t^{k+1} = \sum_{i=0}^{k} (t^i - t^{k+1}) \geqslant 0$). Notons $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k(t)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Le théorème des séries alternées montre que

$$(\forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |R_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+2}.$$

Donc la suite de fonctions $(R_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1[$, c'est-à-dire que la série de fonctions de $t$ : $\sum v_k$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

Comme $(\forall k \in \mathbb{N})$ $v_k(t) \underset{\substack{< \\ t \to 1}}{\longrightarrow} \frac{(-1)^k}{k+1}$, le théorème de la double limite $(SF_5)$ s'applique et entraîne :

$$(1-t)\,S(t) \underset{\substack{< \\ t \to 1}}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

On reconnaît au second membre la série harmonique alternée qui a pour somme Log 2, ce qui permet de conclure par : $S(t) \underset{\substack{< \\ t \to 1}}{\sim} \frac{\mathrm{Log}\, 2}{1-t}$.

***Exemple 2 :*** Voici un problème classique : *on donne une série numérique* $\sum c_n$ *convergente. Montrer que la fonction* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$ *est définie et continue, que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt$ *converge, et que* $\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$. (Hardy).

*Solution :* Tout d'abord, la suite $(c_n)$ est bornée. Soit $M > 0$ un majorant de tous les $|c_n|$. On a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+) \quad \left| \frac{c_n}{n!} t^n \right| \leqslant M \frac{t^n}{n!},$$

d'où on déduit la convergence normale (donc uniforme) sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions continues de $t$ : $\sum \frac{c_n}{n!} t^n$. Donc $g$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Soit maintenant $X \in \mathbb{R}_+$. Posons $f(X) = \int_0^X e^{-t} g(t)\, dt$. La série de fonctions continues de $t$ : $\sum \frac{c_n}{n!} t^n e^{-t}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, X]$. On peut donc l'intégrer terme à terme sur $[0, X]$, d'où : $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(X)$, où

$$(\forall n) \quad \varphi_n(X) = \frac{1}{n!} \int_0^X t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-X} \left( 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} \right).$$

On voit que $(\forall n)\ \varphi_n(X) \underset{X \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, et la dernière expression de $\varphi_n(X)$ prouve que

$$(\forall X)\ (\forall n) \quad 0 \leqslant \varphi_{n+1}(X) \leqslant \varphi_n(X) \leqslant 1\ .$$

Montrons maintenant que la série de fonctions de $X$ : $\sum c_n \varphi_n(X)$ converge uniformément *sur* $\mathbb{R}_+$, et pour cela, montrons qu'elle satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Soit $X \in \mathbb{R}_+$ et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < p$. Par une *transformation d'Abel* (formule (3) du § IX.4), on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{p} c_k \varphi_k(X) = s_{n,p} \varphi_p(X) + \sum_{k=n+1}^{p-1} s_{n,k}(\varphi_k(X) - \varphi_{k+1}(X))\ ,$$

en désignant par $s_{\alpha,\beta}$ la somme $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i$ pour tous entiers $\alpha, \beta$ $(\alpha \leqslant \beta)$ et en convenant que $s_{\alpha,\alpha} = 0$. D'où :

$$(1) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{p} c_k \varphi_k(X) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |s_{n,p}| + \left( \sup_{k \geqslant n+1} |s_{n,k}| \right) \sum_{k=n+1}^{p} (\varphi_k(X) - \varphi_{k+1}(X))$$

$$\leqslant 2 \sup_{k \geqslant n+1} |s_{n,k}|\ .$$

Comme $\sup_{k \geqslant n+1} |s_{n,k}| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ (à cause de la convergence de la série $\sum c_n$), l'inégalité (1), valable pour tout $X > 0$ et pour tous entiers $n, p$ $(n < p)$ montre bien que la série de fonctions $\sum c_n \varphi_n(X)$ satisfait le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de la double limite ($\mathrm{SF}_5$) s'applique donc (avec $X = \mathbb{R}_+$, $T = \bar{\mathbb{R}}$ et $a = +\infty$) et donne :

$$\lim_{X \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(X) \quad \text{existe et vaut} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lim_{X \longrightarrow +\infty} \varphi_n(X)\ ,$$

autrement dit, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} g(t) \, \mathrm{d}t$ converge, et sa valeur est $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

**Exemple 3 :** *Intégrales* $I(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} zt}{\operatorname{sh} t}\,dt$ et $J(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} zt}{\operatorname{ch} t}\,dt$ *pour* $z \in \mathbb{C}^*$ $(|z| < 1)$.

Il est d'abord élémentaire que ces intégrales convergent absolument, donc convergent, car les fonctions à intégrer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{\operatorname{sh} zt}{\operatorname{sh} t}$ si $t \neq 0$, $0 \mapsto z$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{\operatorname{ch} zt}{\operatorname{ch} t}$ sont paires, continues, et que :

$$f(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\in} O(e^{-(1-|z|)t}), \quad g(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\in} O(e^{-(1-|z|)t}).$$

*a*) Exprimons d'abord $I(z)$ et $J(z)$ sous forme de *séries de fractions rationnelles de z :*

$$I(z) = 2\,I_+(z),$$

où
$$I_+(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} zt}{\operatorname{sh} t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{zt} - e^{-zt}}{1 - e^{-2t}}\, e^{-t}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} [e^{(-1-2k+z)t} - e^{(-1-2k-z)t}] \right) dt\ ;$$

pour $N \in \mathbb{N}$, écrivons :

$$(2) \qquad I_+(z) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{N} [e^{(-1-2k+z)t} - e^{(-1-2k-z)t}] \right) dt + \rho_N\,,$$

où :
$$\rho_N = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} zt}{\operatorname{sh} t} \times e^{-(2N+2)t}\,dt\ ;$$

notant $M = \underset{t \in \mathbb{R}_+}{\operatorname{Max}} |f(t)|$ $\left(M < +\infty \text{ car } f(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0\right)$, on voit que : $|\rho_N| \leqslant \frac{M}{2N+2}$, d'où $\rho_N \underset{N \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ en intégrant terme à terme dans (2), on en déduit :

$$I_+(z) = \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N} \left( \frac{1}{2k+1-z} - \frac{1}{2k+1+z} \right)$$
$$= \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{2z}{(2k+1)^2 - z^2}.$$

Autrement dit (la convergence de la série $\sum \frac{2z}{(2k+1)^2 - z^2}$ étant d'ailleurs manifeste *a priori*), on a prouvé :

$$(3) \qquad I(z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2z}{(2k+1)^2 - z^2}.$$

Par une méthode analogue, on obtient :

$$(4) \qquad J(z) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - z^2}.$$

*b*) Nous allons maintenant exprimer $I(z)$ et $J(z)$ à l'aide de fonctions usuelles. Pour cela, reprenons la relation (7) du § XII.4 :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

On en déduit :

$$(5) \qquad \pi \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} = \pi \left( \operatorname{cotg} \pi \frac{z}{2} - 2 \operatorname{cotg} \pi z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4z}{z^2 - (2k+1)^2},$$

puis :

$$(6) \qquad \frac{2\pi}{\sin \pi z} = \pi \left( \operatorname{cotg} \frac{\pi z}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} \right) = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4z}{z^2 - n^2} = \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{2}{z-n} + \frac{2}{z+n} \right]$$

et en remplaçant, dans (6), $z$ par $\frac{1}{2} - z$ :

$$(7) \qquad \frac{2\pi}{\cos \pi z} = \frac{4}{1-2z} + \frac{4}{1+2z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{4}{2n+1-2z} + \frac{4}{2n+1+2z} \right) = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - 4z^2}.$$

En rapprochant (3) de (5) et (4) de (7), cela donne les expressions cherchées :

$$(8) \qquad \boxed{I(z) = \pi \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} \; ; \quad J(z) = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi z}{2}}}.$$

(La deuxième des relations (8) est due à Ramanujan.)

*c*) Cherchons enfin des développements en *série entière* des expressions ainsi obtenues (c'est-à-dire, des développements sous forme de série de puissances entières de $z$). Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, du fait que $\left| \frac{z}{n} \right| < 1$, on peut écrire :

$$\frac{2z}{n^2 - z^2} = \frac{2z}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}}.$$

En raisonnant comme dans l'exemple 6 du § XII.4 (soit par double limite sur $\mathbb{N}$ au voisinage de $+\infty$, soit par le fait, ici évident, que la famille $\left(\dfrac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}}\right)_{k \geqslant 0,\, n \geqslant 1}$ est sommable), on justifie que :

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}} =$$

$$= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{n^{2k+2}} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta(2k+2)\, z^{2k+1},$$

d'où en reportant dans (5) :

$$\boxed{\pi \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2n+2}}\right) \zeta(2n+2)\, z^{2n+1}}. \tag{9}$$

De même, la famille $((-1)^n z^{2k}/(2n+1)^{2k+1})_{k \geqslant 1,\, n \geqslant 0}$ étant sommable :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2k+1)\, z^{2k},$$

avec, pour $s$ réel $> 0$, $\eta(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$. D'où :

$$\boxed{J(z) = \frac{\pi}{\cos \dfrac{\pi z}{2}} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2k+1)\, z^{2k}}. \tag{10}$$

A titre d'exercice, le lecteur pourra obtenir directement (9) et (10) en justifiant les relations

$$I(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \left( \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t}\, \mathrm{d}t \right),$$

$$J(z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \left( \frac{1}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t \right),$$

puis en montrant, par les techniques ci-dessus exposées, que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{\operatorname{sh} t}\, \mathrm{d}t = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{2n+2}}\right) \zeta(2n+2),$$

et :

$$\frac{1}{(2n)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{\operatorname{ch} t}\, \mathrm{d}t = 2\, \eta(2n+1).$$

***Exemple 4 :*** *Développement de* $\Gamma(1+z)$ *pour* $|z|<1$.

Fixons $z \in \mathbb{C}$ ($|z|<1$). Rappelons (cf. § VIII.4) que

$$\Gamma(1+z) = \int_0^{+\infty} t^z \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ecrivons $t^z = \exp(z \operatorname{Log} t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \operatorname{Log}^n t$ pour $t>0$, d'où :

$$\Gamma(1+z) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \right) \mathrm{d}t = \lim_{A \longrightarrow +\infty,\, A>1} (\varphi(A))\,,$$

où

$$\varphi(A) = \int_{1/A}^{A} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \right) \mathrm{d}t\,.$$

Pour $A$ fixé $>1$, la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonctions continues de $t$ : $\sum_n \frac{z^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t$ sur $\left[\frac{1}{A}, A\right]$ est immédiate, d'où par intégration terme à terme :

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(A)\,, \quad \text{en posant} \quad (\forall n) \quad \varphi_n(A) = \frac{z^n}{n!} \int_{1/A}^{A} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrons maintenant que la série de fonctions de $A$ : $\sum \varphi_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $A>1$, on a :

$$|\varphi_n(A)| \leqslant \left| \frac{z^n}{n!} \int_{1/A}^{1} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t\,\mathrm{d}t \right| + \left| \frac{z^n}{n!} \int_{1}^{A} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \alpha_n + \beta_n\,,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} |\operatorname{Log}^n t| \frac{|z|^n}{n!}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{et} \quad \beta_n = \int_1^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t\,\mathrm{d}t\,.$$

Il ne fait aucun doute que la série numérique $\sum (\alpha_n + \beta_n)$ converge, car

$$(\forall N \in \mathbb{N}) \quad \sum_{n=0}^{N} (\alpha_n + \beta_n) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left( \sum_{n=0}^{N} \frac{|z|^n}{n!} |\operatorname{Log} t|^n \,\mathrm{d}t \right) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \exp(|z|\ |\operatorname{Log} t|)\,\mathrm{d}t$$

et que la dernière intégrale écrite converge (c'est

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{-|z|}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{|z|}\,\mathrm{d}t)\,.$$

Donc la série de fonctions de $A$ : $\sum \varphi_n$ converge normal uniformément) sur $]1, +\infty[$. D'autre part

$$(\forall n) \quad \varphi_n(A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{z^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \, \mathrm{d}t$$

(intégrale dont la convergence est immédiate).

Par double limite quand $A \longrightarrow +\infty$, on en déduit : la série

$$\sum_n \frac{z^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} (\operatorname{Log} t)^n \, \mathrm{d}t$$

converge, et $\quad \varphi(A) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \, \mathrm{d}t ,$

soit :

$$(3) \qquad \boxed{\Gamma(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \, \mathrm{d}t} \, .$$

Comme application, prenons $x \in \,]0, 1[$ et revenons sur la formule (9) du § XII.4 :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

En écrivant chaque $\dfrac{1}{n+x}$ sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n^{k+1}} x^k$, et en justifiant comme d'habitude l'interversion des sommations, il vient :

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k \zeta(k+1) \, .$$

Par intégration (la justification, facile, est laissée au lecteur), on arrive à :

$$(4) \qquad \Gamma(1+x) = x\Gamma(x) = \mathrm{e}^{-\gamma x} \exp\left( \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p \frac{\zeta(p)}{p} x^p \right).$$

A partir de (4), on peut obtenir une nouvelle forme du développement en série entière de $\Gamma(1+x)$ au voisinage de 0, et en admettant qu'on peut identifier les coefficients des mêmes puissances de $x$ (ce qui sera justifié dès le début du tome 3), le rapprochement de (3) et (4) conduit à des expressions remarquables pour les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^n t \, \mathrm{d}t$. Par exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log} \mathrm{d}t = -\gamma$ (cf. exercice 17 du § XII.4) ;

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \operatorname{Log}^2 t \, \mathrm{d}t = \gamma^2 + \zeta(2) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \, ; \ldots$$

**Quelques applications en Analyse fonctionnelle**

1) Voici d'abord un important théorème concernant les evn.

**THÉORÈME XII.4.1**

*Soit $E$ et $F$ deux $K$-evn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) non nuls. Si $F$ est* **complet,** *le $K$-evn $(\mathscr{L}_K(E, F), ||| \, . \, |||)$ (où la norme $||| \, . \, |||$ est celle associée aux normes données de $E$ et $F$) est* **complet.**

*Démonstration :* Soit $(u_n)$ une suite quelconque dans $\mathscr{L}_K(E, F)$, et $u \in \mathscr{L}_K(E, F)$. La relation $||| u_n - u ||| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ signifie exactement que la *suite de fonctions $(u_n)$ converge, uniformément sur tout borné de $E$, vers $u$.*

En effet, si $||| u_n - u ||| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, soit $A \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \tilde{\mathbf{B}}(0_E, A)$, on a :

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leqslant ||| u_n - u ||| \times \|x\| \leqslant A ||| u_n - u ||| ,$$

donc la suite $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, A)$.

Réciproquement, si $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur tout borné de $E$, on a en particulier : $\sup\limits_{x \in E, \, \|x\| \leqslant 1} (\|u(x) - u_n(x)\|) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie exactement : $||| u_n - u ||| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit maintenant une suite $(u_n)$ de Cauchy dans $(\mathscr{L}_K(E, F), ||| \, . \, |||)$. On voit, comme ci-dessus, que *la suite de fonctions $(u_n)$ est uniformément de Cauchy sur tout borné de $E$.* Comme $F$ est complet, il en résulte (cf. théorème XII.1.1) que la suite de fonctions $(u_n)$ converge, uniformément sur tout borné de $E$, vers une fonction $u : E \longrightarrow F$. On voit ensuite que $u$ est $K$-linéaire (en fait on sait qu'une *limite simple* d'applications linéaires est linéaire). D'autre part $u$ est bornée sur $\tilde{\mathbf{B}}(0_E, 1)$, car c'est sur cette boule une limite *uniforme* de fonctions bornées. D'où : $u \in \mathscr{L}_K(E, F)$. Enfin, puisque $u$ est limite uniforme de la suite $(u_n)$ *sur tout borné de $E$,* il s'ensuit, d'après le préliminaire que : $||| u_n - u ||| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc montré que la suite de Cauchy $(u_n)$ admet la limite $u$ dans $(\mathscr{L}_K(E, F), ||| \, . \, |||)$. ∎

**COROLLAIRE**

*Pour tout $K$-evn $E$,* **le dual topologique** *$(\mathscr{L}_K(E, K), ||| \, . \, |||)$* **est complet.**

2) Pour finir, étudions l'**approximation uniforme** des fonctions numériques **continues** sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ par des *fonctions polynomiales.*

**LEMME 1**

*Sur $[-1, 1]$, la fonction $g_0 : x \mapsto |x|$ peut être approchée uniformément, d'aussi près qu'on le veut, par des fonctions polynomiales.*

*Démonstration :* *a*) En appliquant la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale à la fonction $t \mapsto \sqrt{1 - t}$ sur le segment $[0, u]$, pour $u \in \, ]0, 1[$, il vient : $(1 - u)^{1/2} = P_n(u) + \rho_n(u)$, où $P_n$ est la fonction polynôme

$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{1/2}{k} t^k$, et où :

$$\rho_n(u) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_0^u (u-t)^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-n\right)(1-t)^{-n-\frac{1}{2}}\, dt < 0 .$$

On majore $|\rho_n(u)|$ en remplaçant, sous le signe $\int$, $u-t$ par $1-t$, d'où

$$|\rho_n(u)| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1.3 \ldots. (2n-1)}{2.4 \ldots. 2n} \int_0^u (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \times \frac{1.3 \ldots. (2n-1)}{2.4 \ldots. 2n} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt ,$$

soit $|\rho_n(u)| \leq \frac{1.3 \ldots. (2n-1)}{2.4 \ldots. 2n} = \alpha_n$, et l'on a vu dès l'exemple 9 du § II.4 que la suite numérique $(\alpha_n)$ du second membre tend vers 0 (en décroissant) quand $n \longrightarrow \infty$. On obtient donc : $(\forall u \in ]0,1[)$ $|(1-u)^{1/2} - P_n(u)| \leq \alpha_n$, et cela reste vrai pour $u = 0$ et pour $u = 1$.

*b*) Il suffit maintenant de poser $u = 1 - t^2$ avec $t \in [-1, 1]$ pour voir que : $(\forall t \in [-1,1])$ $||t| - P_n(1-t^2)| \leq \alpha_n$ ce qui permet d'approcher la fonction $t \mapsto |t|$ d'aussi près qu'on le veut, et uniformément sur $[-1, 1]$ par une fonction polynomiale en choisissant $n$ assez grand, $P_n(1-t^2)$ étant un polynôme pair en $t$, de degré $2n$. ■

**Lemme 2**

*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Les fonctions $g_c : t \mapsto |t - c|$ $(c \in [a, b])$ forment une base du* $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}$ *des fonctions continues et affines par morceaux* $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

*Démonstration :*

La famille $(g_c)_{c \in [a,b]}$ est libre car si l'on considère une combinaison linéaire $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |t - c_i|$ nulle sur $[a, b]$, les $\lambda_i$ correspondant à des $c_i \in ]a, b[$ sont nécessairement nuls (sinon la fonction $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{c_i}$ serait non dérivable en $t = c_i$) et les $\lambda_i$ restant éventuellement pour $c_i = a$ ou $c_i = b$ sont aussi nuls (faire respectivement $t = b$ ou $t = a$), d'où l'indépendance linéaire des $g_c$.

Il reste à prouver que les $g_c$ engendrent le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}$. Soit pour cela $\xi_0$, $\xi_1$, …, $\xi_n$ tels que $\xi_0 = a < \xi_1 < \cdots < \xi_{n-1} < b = \xi_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Le sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}_\xi$ de $\mathscr{E}$ formé des $f \in \mathscr{E}$ affines sur chaque $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq n-1)$ est de dimension $\leq n+1$, car l'application linéaire $\mathscr{E}_\xi \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $f \mapsto (f(\xi_i))_{0 \leq i \leq n}$ est injective. Comme $\mathscr{E}_\xi$ contient $g_{\xi_0}$, …, $g_{\xi_n}$ qui sont indépendantes, on voit que $(g_{\xi_i})_{0 \leq i \leq n}$ est *une base* de $\mathscr{E}_\xi$. Toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et affine par morceaux est donc combinaison linéaire de certaines des $g_c$, ce qui achève de démontrer le lemme. ■

**Théorème XII.4.2** (théorème d'approximation de Weierstrass)

*Soit deux réels $a, b$ $(a < b)$. Toute fonction* **continue** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *peut être approchée* **uniformément,** *aussi près qu'on veut, par*

**polynomiales.** *Autrement dit, le sous-*$\mathbb{R}$-ev *des fonctions polynomiales est* **partout dense** *dans* $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, *pour la* **norme uniforme** $\nu_\infty$.

*Démonstration :*

Par translation et homothéties, il résulte immédiatement du lemme 1 que pour tout $c \in [a, b]$, la fonction $g_c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto |t - c|$ est approchable uniformément, aussi près qu'on veut, par des fonctions polynomiales. La propriété indiquée de $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ reste stable par combinaisons linéaires finies, ce qui entraîne, compte tenu du lemme 2, que toute fonction *affine par morceaux et continue* sur $[a, b]$ est approchable aussi près qu'on veut uniformément par des fonctions polynomiales. Mais on a vu (proposition VII.1.3) que le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{E}$ des fonctions affines par morceaux et continues $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est partout dense dans $(\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \nu_\infty)$. Le théorème s'ensuit par transitivité de l'approximation uniforme. ■

***Exercice 1 :*** Connaissant $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} - \operatorname{Log} \operatorname{th} t \, dt$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{8}$.

***Exercice 2 :*** Démontrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{1 - t^n} \underset{t<1}{\sim} \frac{\pi^2}{6(1 - t)^2}$.

***Exercice 3 :*** Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1 - t^n} \underset{t<1}{\sim} \frac{- \operatorname{Log}(1 - t)}{1 - t}$.

***Exercice 4 :*** Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{Log} n)^x}{n^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{(\operatorname{Log} t)^x}{t^2} dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \Gamma(x + 1)$.

***Exercice 5 :*** Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 - e^{-nt}) \underset{t>0}{\sim} \frac{-\pi^2}{6t}$.

***Exercice 6 :*** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{\cos(zt)}{\operatorname{sh} t} dt = \frac{2\pi^2 e^{\pi z}}{(1 + e^{\pi z})^2}$.

***Exercice 7 :*** Pour $x \in ]-1, +\infty[$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - t^x}{1 - t} dt$.

*a*) Montrer que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + x} \right)$. Pour $x \neq 0$ reconnaître (cf. exemple 8 du § XII.4) $g(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \gamma + \dfrac{1}{x}$.

*b*) Pour $x \in ]-1, 1[$, démontrer :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k + 1) x^k = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}^k t}{1 - t} dt.$$

Une simple « identification » permet d'en déduire : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\zeta(k + 1) = \dfrac{(-1)^k}{k!} \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}^k t}{1 - t} dt$. Vérifier ces relations à l'aide des techniques exposées dans ce chapitre.

***Exercice 8 :*** On considère la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x + n}$.

*a*) Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

*b*) Montrer que $x \mapsto xg(x) - g(x + 1)$ est une fonction constante. Etudier les variations des restrictions $g|_{]-1,0[}$ et $g|_{]0,+\infty[}$.

*c*) Montrer : $(\forall N \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R})\ \mathrm{e}^{-u} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{u^n}{n!} + (-1)^{N+1} \mathrm{e}^{-u} \frac{u^{N+1}}{N!} \int_0^1 t^N \mathrm{e}^{tu}\,\mathrm{d}t$ et en déduire : $g(x) = \int_0^1 u^{x-1} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

*d*) Calculer, pour $x \notin \mathbb{Z}$, $J_n(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \int_0^1 \cos((x+n)\pi t)\,\mathrm{d}t$, puis $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((x+n)\pi t)}{n!}$ et montrer : $g(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \int_0^1 \mathrm{e}^{\cos \pi t} \cos(\pi t x + \sin \pi t)\,\mathrm{d}t$.

***Exercice 9*** (théorème de Borel) : *a*) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, nulle hors de $]0,1[$, égale à $\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$ sur $]0,1[$. Vérifier que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Si $I = \int_0^1 \varphi$, la fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{I} \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et égale à 1 sur $[1, +\infty[$.

*b*) Utiliser le *a*) pour construire une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, égale à 1 sur $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, à 0 hors de $[-1,+1]$. Dans ce qui suit $u$ est ainsi choisie.

*c*) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. Si $a_n = 0$, on pose : $r_n = 1$ ; si $a_n \neq 0$, on pose : $r_n = \mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{4|a_n|^{2/n}}\right)$. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n u\left(\frac{x}{r_n}\right)$ est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (nulle en dehors de $[-1,+1]$, et que $(\forall n)$ $f^{(n)}(0) = a_n$.

***Exercice 10 :*** Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 hors de $[-1,1]$, et égale à $\exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)$ sur $]-1,1[$. Vérifier que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que son support est $[-1,1]$. Pour tout intervalle ouvert borné $J = ]a,b[$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$, on pose : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f_J(x) = \varphi\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)$. Vérifier que $f_J$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Quel est son support ? Soit maintenant un compact $L$ de $\mathbb{R}$, et un réel $A > 0$ tel que $L \subset ]-A, A[$. On suppose que l'ouvert $]-A,A[\setminus L$ admet une infinité de composantes connexes, qu'on numérote $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n$ la demi-longueur de $J_n$.

Montrer que la fonction $g : ]-A, A[ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda_n}} f_{J_n}(x)$ est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que *l'ensemble de ses zéros est exactement L.*

***Exercice 11 :*** Démontrer : $(\forall x \in [-1,1])$

$$\int_0^1 \frac{t^3 - zt + 2}{1 - x^3 t^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \left[\frac{1}{3n+4} - \frac{3}{3n+2} + \frac{2}{3n}\right].$$

***Exercice 12 :*** Soit $a$ réel $> 0$ et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue :

*a*) Prouver : $\quad (\forall t \in [0,a]) \quad \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^a \mathrm{e}^{-uk(x-t)} f(x)\,\mathrm{d}x.$

*b*) On suppose : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\int_0^a \mathrm{e}^{nx} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M$. Montrer que $f = 0$.

*c*) Soit $A$ réel $> 1$ et $g : [1, A] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|\int_1^A x^n g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M.$$

Montrer que $g = 0$.

***Exercice 13 :*** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-evn $(\mathscr{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \nu_\infty)$, où $\nu_\infty$ est la norme uniforme. On donne $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \lambda < 1$. Soit $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ défini par $(\forall f \in E)$ $f \mapsto g$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(x) - \lambda f(\mu x)$.

*a*) Vérifier que $T \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

*b*) Montrer que $T$ est inversible dans $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

***Exercice 14 :*** On désigne par $G$ l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (on sait que $G = \sqrt{\pi}$) et par $\varphi$ la fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{G} e^{-x^2}$.

*a*) Vérifier que pour tout $a > 0$ $\lambda \int_{-a}^{a} \varphi(\lambda x)\,dx \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

*b*) Prouver que $(\forall k \in \mathbb{N})\ \exists P_k \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$(\forall x \in [-2k, 2k]) \quad |\varphi(kx) - P_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}.$$

*c*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $k \in \mathbb{N}$ on pose $f_k(x) = k \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\varphi(k(x-u))\,du$.

$c_1$) Montrer que $(f_k)$ converge uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$. (*Indication :* Utiliser la continuité uniforme de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ et couper l'intégrale en trois).

$c_2$) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(\forall x \in [-1, 1])\ |Q_k(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{k}$.

$c_3$) Conclure en redémontrant le théorème de Weierstrass.

N.B. Cette méthode, dite *de convolution,* sera étudiée systématiquement au Tome 3 (§ IV.2).

***Exercice 15 :*** Soit $a, b$ deux réels $(a < b)$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue par morceaux* et nulle en dehors de $[a, b]$.

*a*) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g$, nulle en dehors d'un intervalle fermé borné, telle que $f \leq g$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt + \varepsilon$. (*Indication :* Au voisinage des discontinuités de $g$, prendre $f$ affine).

*b*) Montrer en utilisant le théorème de Weierstrass que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes $P$ et $Q$ encadrant $f$ sur $[a, b]$ et tels que $\int_a^b Q(t)\,dt - \int_a^b P(t)\,dt \leq \varepsilon$.

*c*) On suppose que $f$ vérifie en outre la condition : $(\forall n \text{ entier} \geq 0)$ $\int_a^b f(t)\,t^n\,dt = 0$.

Montrer qu'alors $f(x) = 0$ sauf aux points de discontinuité de $f$.

***Exercice 16 :*** **Partie I :** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on pose $b_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt$, $P_n(x) = \frac{1}{b_n} \int_0^x (1-t^2)^n\,dt$ et $Q_n(x) = \int_0^x P_n(t)\,dt$.

*a*) Etudier la convergence simple et uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite de fonctions polynomiales $(P_n)$.

*b*) Montrer que la suite de fonctions $(Q_n)$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

**Partie II :** Soit $(X, d)$ un espace métrique compact non vide. On note $\mathscr{C}(X)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $X$ dans $\mathbb{R}$, munie de la norme uniforme $f \mapsto \|f\| = \sup\limits_{x \in X} f(x)$, et de la distance et de la topologie définies par cette norme. La sous-algèbre de $\mathscr{C}(X)$ constituée des fonctions constantes sera identifiée à $\mathbb{R}$.

Une partie $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}(X)$ est dite *séparante* ssi $(\forall x \in X, \forall y \in X)$, $(x \neq y) \Rightarrow (\exists f \in \mathscr{E} \mid f(x) \neq f(y))$. Vérifier que l'ensemble $\mathscr{C}(X)$ est séparant (utiliser des fonctions « distance d'un point à un ensemble »). Dans ce qui suit, on considère une partie $\mathscr{E}$ de $\mathscr{C}(X)$ vérifiant les conditions suivantes : (I) $\mathscr{E}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{C}(X)$ ; (II) Si $f \in \mathscr{E}$ et $g \in \mathscr{E}$, alors $fg \in \mathscr{E}$.

*a*) Montrer que si $f \in \mathscr{E}$, alors $|f| \in \bar{\mathscr{E}}$ (où $\bar{\mathscr{E}}$ désigne $\mathrm{Adh}_{\mathscr{C}(X)}(\mathscr{E})$). En déduire : si $f \in \mathscr{E}$ et $g \in \mathscr{E}$, alors $\sup(f, g) \in \bar{\mathscr{E}}$ et $\inf(f, g) \in \bar{\mathscr{E}}$. Prouver aussi : si $f \in \bar{\mathscr{E}}$ et $g \in \bar{\mathscr{E}}$, alors $\sup(f, g) \in \bar{\mathscr{E}}$ et $\inf(f, g) \in \bar{\mathscr{E}}$.

*b*) On suppose que $\mathscr{E}$ vérifie en outre les propriétés : (III) $\mathscr{E}$ est séparante ; (IV) $\mathbb{R} \subset \mathscr{E}$ (autrement dit, $\mathscr{E}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{C}(X)$).

$b_1$) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in X$, $y \in X$ avec $x \neq y$. Montrer qu'il existe $g \in \mathscr{E}$ telle que $g(x) = \alpha$ et $g(y) = \beta$.

$b_2$) Soit $f \in \mathscr{C}(X)$, $x \in X$ et $\varepsilon$ réel $> 0$. Montrer qu'il existe $g_x \in \bar{\mathscr{E}}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et que $(\forall y \in X)\ g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$. En déduire que : $\bar{\mathscr{E}} = \mathscr{C}(X)$ (la compacité de $X$ est à utiliser deux fois).

$c$) On suppose ici que $\mathscr{E}$ est un *idéal* de l'anneau $\mathscr{C}(X)$, non nul et distinct de $\mathscr{C}(X)$. On note $V$ l'ensemble $\bigcap_{f \in \mathscr{E}} f^{-1}(0)$ ($V$ vérifie (I) et (II)).

$c_1$) Démontrer que $V$ est un fermé non vide de $X$.

$c_2$) On considère un élément $\varphi$ de $\mathscr{C}(X)$ tel que $V \subset \varphi^{-1}(0)$. Démontrer successivement :

• Pour $x \in X$ et $y \in X$ il existe une fonction $g \in \mathscr{E}$ telle que $g(x) = \varphi(x)$ et $g(y) = \varphi(y)$.

• Pour $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $g_x \in \bar{\mathscr{E}}$ telle que $g_x(x) = \varphi(x)$ et que : $(\forall y \in X)$ $g_x(y) \leq \varphi(y) + \varepsilon$.

En déduire : $\varphi \in \bar{\mathscr{E}}$.

$d$) Dans cette question, on donne $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On prend $X = [a, b]$, et $\mathscr{E}$ = ensemble des fonctions polynomiales associées à des *polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Z}$.

$d_1$) Parmi les propriétés (I) à (IV), quelles sont celles satisfaites par $\mathscr{E}$ ?

$d_2$) Montrer que si $X \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$ , alors $\bar{\mathscr{E}} \neq \mathscr{C}(X)$.

$d_3$) On suppose : $X \subset ]0, 1[$. On note $(p_n)$ la suite strictement croissante des nombres premiers ($p_1 = 2$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$B_n(T) = \frac{1}{p_n}[1 - T^{p_n} - (1 - T)^{p_n}]\ ;\quad A_n(T) = p_n\, B_n(T)\,.$$

Vérifier que $B_n \in \mathbb{Z}[T]$ ; étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(A_n)$ sur $X$. Utiliser les polynômes $A_n$ et $B_n$ pour montrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}^*)$, la fonction constante égale à $\frac{1}{k}$ appartient à $\bar{\mathscr{E}}$. En déduire alors : $\bar{\mathscr{E}} = \mathscr{C}(X)$.

**Partie III :** $(X, d)$ désigne à nouveau un espace métrique compact non vide. Si $x \in X$, $\mathfrak{M}_x$ désigne l'ensemble des $f \in \mathscr{C}(X)$ telles que $f(x) = 0$. Pour toute partie $A$ de $X$, on pose $\mathfrak{I}(A) = \{f \in \mathscr{C}(X) \mid A \subset f^{-1}(0)\}$ (ainsi, si $x \in X$, $\mathfrak{M}_x = \mathfrak{I}(\{x\})$). Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de l'anneau $\mathscr{C}(X)$, on pose $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} f^{-1}(0)$.

$a$) Démontrer les propriétés suivantes :

$a_1$) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathscr{C}(X)$, $V(\mathfrak{a})$ est un fermé de $X$, qui est non vide ssi $\mathfrak{a} \neq \mathscr{C}(X)$.

$a_2$) Pour tous idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de $\mathscr{C}(X)$, on a :

$$(\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}) \Rightarrow (V(\mathfrak{a}) \supset V(\mathfrak{b}))\ ;$$

$$V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b})\ ;\quad V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})\,,\quad \text{et}\quad V(\bar{\mathfrak{a}}) = V(\mathfrak{a})\,.$$

$a_3$) Pour toute partie $A$ de $X$, $\mathfrak{I}(A)$ est un idéal *fermé* de $\mathscr{C}(X)$, qui est distinct de $\mathscr{C}(X)$ ssi $A \neq \varnothing$ ; et on a : $V(\mathfrak{I}(A)) = \bar{A}$.

$a_4$) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathfrak{M}_x$ est un idéal *maximal* de $\mathscr{C}(X)$ ; et l'application $I_x : x \mapsto \mathfrak{M}_x$ est une bijection de $X$ sur l'ensemble $\mathscr{M}_X$ des idéaux maximaux de $\mathscr{C}(X)$.

$a_5$) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathscr{C}(X)$, on a : $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = \bar{\mathfrak{a}}$ (utiliser II.$c$).

$b_1$) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathscr{C}(X)$. Montrer que $V(\mathfrak{p})$ est un singleton ; quelle est alors l'adhérence de $\mathfrak{p}$ ?

$b_2$) On prend $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathscr{C}(X)$ tel que $V(\mathfrak{a})$ soit un singleton. L'idéal $\mathfrak{a}$ est-il nécessairement premier ?

$c$) Soit maintenant $(Y, \delta)$ un deuxième espace métrique compact non vide. A toute application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$, on fait correspondre l'application $\mathscr{C}(\varphi) : \mathscr{C}(Y) \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ telle que : $\quad (\forall g \in \mathscr{C}(Y))\quad \mathscr{C}(\varphi)(g) = g \circ \varphi$.

$c_1$) Vérifier que pour toute $\varphi : X \longrightarrow Y$ continue, $\mathscr{C}(\varphi)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres et une application continue.

$c_2$) On donne maintenant un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\Phi : \mathscr{C}(Y) \longrightarrow$

$J_X$ (resp. $J_Y$) l'application $I_X^{\langle -1 \rangle} : \mathcal{M}_X \longrightarrow X$ (resp. $I_Y^{\langle -1 \rangle} : \mathcal{M}_Y \longrightarrow Y$). On définit une application $\varphi$ de la manière suivante : si $x \in X$, $\varphi(x) = J_Y(\mathfrak{M})$, où $\mathfrak{M}$ est l'adhérence de l'idéal $\Phi^{-1}(\mathfrak{M}_x)$. Justifier avec soin la définition de $\varphi : X \longrightarrow Y$. Montrer que pour tout $g \in \mathscr{C}(Y)$, $\Phi(g) = g \circ \varphi$. En déduire que $\varphi$ est continue et que $\Phi = \mathscr{C}(\varphi)$, ce qui implique que l'homomorphisme $\Phi$ est continu. En déduire : $\forall x \in X, \quad \Phi^{-1}(\mathfrak{M}_x) = \mathfrak{M}_{\varphi(x)}$.

$c_3$) Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(*) Les espaces métriques compacts $X$ et $Y$ sont homéomorphes.

(**) Les $\mathbb{R}$-*algèbres* $\mathscr{C}(X)$ et $\mathscr{C}(Y)$ sont isomorphes.

# BIBLIOGRAPHIE

*Les références citées dans le texte sont signalées par un astérisque. Nous avons en outre réuni quelques titres d'ouvrages accessibles en rapport avec le niveau du livre.*


[1] CAMPBELL R., *Intégrales eulériennes,* Dunod, 1966.

[2] CARTAN H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques,* Hermann, 1961.

[3] CASANOVA G., *Les séries mathématiques,* P.U.F., coll. « Que Sais-je ? ».

[4]* CHOQUET G., *Cours d'analyse,* T 2. *Topologie,* Masson, 1969.

[5]* COX D. A., *The arithmetic geometric mean of Gauss.* « L'Enseignement Mathématique », T 30, 1984, pp. 275-330.

[6]* DENJOY A., *Sur les fonctions dérivées sommables,* Ann. Scient. de l'Ecole Normale, 1917.

[7] DEHEUVELS P., *L'intégrale,* P.U.F., coll. « Que Sais-je ? », 1985.

[8] DIEUDONNÉ J., *Calcul infinitésimal,* Hermann, 1980.

[9]* GELFOND A. O., *Transcendantal and algebraic numbers,* trad. anglaise, Dover, 1960.

[10] HARDY G. H., LITTLEWOOD G., POLYA G., *Inequalities,* Cambridge Un. Press.

[11]* KURATOWSKI K., *Topology,* T 1 et 2, trad. anglaise, Academic Press.

[12] LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration,* Gauthier-Villars, éd. 1926.

[13] LELONG-FERRAND J., COMBES M., *Problèmes d'analyse,* Dunod, 1967.

[14]* LEVEQUE W. J., *Topics in number theory,* Addison Wesley.

[15]* RIESZ F., NAGY B., *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Gauthier-Villars, 1952.

[16] SCHWARTZ L., *Topologie générale et analyse fonctionnelle,* Hermann, 1980.

[17]* SIEGEL C. L., *Topics in complex-function theory,* Wiley, 1961.

[18]* TITCHMARSH E. G., *The theory of functions,* Oxford, Un. Press.

[19]* VALIRON G., *Théorie des fonctions,* Masson, 1966.

[20]* VERDIER J. L., *Enoncé de l'épreuve de math* 6 h *du concours d'entrée à l'ENS Ulm, Option M'* (Session 1969).

# INDEX ALPHABÉTIQUE

*Imprimé en France*
*Saisie MATHOR — Photocomposition PHOTOMAT*
JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 14426. Dépôt légal 1re édition : 3e trimestre 1989. Dépôt légal : J

Ce volume du *COURS DE MATHÉMATIQUES* développe les bases de l'analyse indispensables tant aux concours d'entrée aux grandes écoles que pour entreprendre des études scientifiques à dominante mathématique.

La conception de cet ouvrage est celle d'un outil de travail utilisable immédiatement et permettant d'obtenir des résultats concrets et pratiques : les bases de l'analyse y sont définies et exploitées de manière approfondie.

Plus de 930 exercices jalonnent le texte et permettent ainsi une lecture active et une assimilation progressive.

Les futurs élèves des grandes écoles, mais aussi les candidats à l'agrégation et les professeurs de lycées trouveront, en petits caractères, tous les approfondissements désirables.

*Ce cours de mathématiques se compose de 4 tomes :*
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie

9 782040 165017
ISBN 2-04-016501-0