J. M. Arnaudiès
H. Fraysse

Cours de mathématiques - 3

Compléments d'analyse

Classes préparatoires
1er cycle universitaire

Dunod Université

Cours de mathématiques - 3

Compléments d'analyse

Jean-Marie ARNAUDIÈS **Henri FRAYSSE**

Professeurs de Mathématiques Spéciales
au Lycée Pierre de Fermat à Toulouse
Anciens élèves de l'École Normale Supérieure

Dunod

Nouveau tirage 1990

ISBN 2-04-016525-8

PRÉFACE

Ce tome 3 du cours de mathématiques intéresse essentiellement les étudiants de seconde année, et ceux qui entament une licence ou préparent un concours de recrutement.

Il regroupe les notions de base sur les séries entières, les séries de Fourier, le calcul différentiel, les intégrales multiples et les équations différentielles. Sa lecture implique une connaissance sérieuse des techniques introduites au tome 2, notamment sur l'intégration des fonctions d'une variable réelle, et sur les suites et séries de fonctions.

Chaque thème est approfondi au maximum, mais non débordé. Nous pensons en effet qu'un exposé ne laissant rien dans l'ombre, même si à première vue il paraît plus ambitieux, *est finalement plus facile à comprendre*. En mathématiques, plus souvent qu'on ne croit, on est bloqué ou découragé (sans toujours s'en rendre bien compte) par une foule de questions conscientes ou non, que l'esprit se pose, et auxquelles un livre trop concis ne répond pas, ou même n'invite pas.

Pour aider le lecteur dans ce travail de fond, comme aux deux premiers tomes, ce tome 3 et le suivant offrent tous les exemples indispensables à l'assimilation des concepts, et incorporent au texte une vaste gamme d'exercices classés.

Nous ne prétendons pas qu'il faille retenir les détails de la théorie des intégrales multiples, traitée aux chapitres VII et VIII. Mais nous avons tenu à prouver qu'une présentation correcte et cohérente de l'intégrale multiple des ingénieurs et physiciens est raisonnablement possible à ce niveau, *dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue,* à partir des fonctions en escalier. A nos yeux, cette construction s'imposait au moins pour deux raisons : d'abord, parce qu'elle illustre toute la portée de la méthode suivie au chapitre VII du tome 2, qui évite, on le voit, l'écueil d'un confinement forcé aux fonctions *d'une seule* variable réelle. Et ensuite, parce que de fil en aiguille, soit en « simplifiant » pour rester correct, soit au contraire en abusant d'énoncés sans preuve et sans hypothèses bien définies faute de notions précises, on en est arrivé à une intégrale-peau de chagrin, qui débouche actuellement sur le renoncement pur et simple à l'enseigner. Or ce renoncement paraît absurde et néfaste, tant du point de vue strictement mathématique que de celui de l'utilisation concrète. Que resterait-il de certaines branches de la physique sans le théorème du changement de variable ou celui de Fubini ?

Nous n'avons évidemment pu être exhaustifs sur les équations différentielles, puisqu'avec ce seul sujet, on pourrait garnir une bibl chapitre IX sur les équations linéaires, nous avons traité en priorité tout ce qui peut l'être sans nécessiter le théorème général d'existence, rejeté en fin de chapitre. Le chapitre X contient tous les outils théoriques suffisants pour résoudre la plupart des exercices et problèmes dits élémentaires, jusqu'à un niveau respectable. Et on trouvera des approfondissements fort utiles en appendice.

D'avance, nous remercions les lecteurs qui voudront bien nous adresser leurs remarques, ou nous signaler les inévitables erreurs résiduelles.

Nous exprimons notre reconnaissance aux éditions Dunod, et à Gisèle MAIUS et Pierre RIOTORT. C'est à leur ténacité, et à leur goût du travail bien fait sans compter les heures, que le public doit toutes les qualités de clarté et de présentation de ces ouvrages.

J. M. ARNAUDIES, H. FRAYSSE.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre I

INTÉGRATION ET COMPARAISON DES FONCTIONS VECTORIELLES DE VARIABLE RÉELLE

Dans tout ce chapitre K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les K-ev considérés sont de dimension finie et sont munis de leur topologie des normes (cf. tome 2, § XI.1). On suppose connue la matière du chapitre VII du tome 2 (intégration des fonctions scalaires de variable réelle).

§ I.1 *FONCTIONS BORNÉES INTÉGRABLES ET LEUR INTÉGRALE*

Soit E sur K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, et deux réels a, b $(a < b)$. On pose $I = [a, b]$. Rappelons que $\mathscr{L}^1_B([a, b], K)$ et $\mathfrak{R}([a, b], K)$ désignent respectivement le K-ev des fonctions bornées intégrables et Riemann-intégrables de $[a, b]$ dans K.

Lemme 1

> *Soit $f : I \longrightarrow E$. Les conditions suivantes* (I) *et* (II) *sont équivalentes :*
>
> (I) *Il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle les fonctions coordonnées (f_i) de f sont bornées intégrables : $I \longrightarrow K$ (resp. Riemann-intégrables).*
>
> (II) *Dans toute base, les fonctions coordonnées de f sont bornées intégrables (resp. Riemann-intégrables).*
>
> *De plus si ces conditions sont remplies, le vecteur $V = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j \right) e_j$ est indépendant de la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.*

Démonstration :

Comme E a au moins une base, il suffit d'établir : (I) $\Rightarrow$ (II). Donnons-nous donc deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E et supposons que les coordonnées $f_1, \dots, f_n$ de f dans $\mathscr{B}$ soient bornées intégrables (resp. Riemann-intégrables). Soit $A = [a_{kl}]$ la matrice de $(e_1, \dots, e_n)$ dans la base β. Les coordonnées $g_1, \dots, g_n$ de f dans β sont données par $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$. Comme $\mathscr{L}_B^1([a, b], K)$ (resp. $\mathfrak{R}([a, b], K)$) est un sous-K-ev de $\mathscr{F}([a, b], K)$, on voit bien que $g_i \in \mathscr{L}_B^1([a, b], K)$ (resp. $\mathfrak{R}([a, b], K)$) pour tout i. D'où (I) $\Rightarrow$ (II). D'autre part la linéarité de l'intégrale entraîne : $(\forall i) \int_a^b g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_a^b f_j$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b g_i \right) \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_a^b f_j \right) \varepsilon_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \varepsilon_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f_j \right) e_j$$

car $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \varepsilon_i = e_i$ pour tout i. ■

DÉFINITION I.1.1

Avec les notations du lemme 1, *une fonction* $f : I \longrightarrow E$ *est dite* ***bornée intégrable*** *(resp.* ***Riemann-intégrable****) ssi les coordonnées de f dans les diverses bases de E le sont. On appelle alors* ***intégrale de f*** *sur* $[a, b]$ *le vecteur* $V \in E$ *tel que, pour toute base* $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *de E, on ait (en notant* $f_1, \dots, f_n$ *les fonctions coordonnées de f dans* $\mathscr{B}$*) :*

$$V = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i \right) e_i \,. \tag{1}$$

Ce vecteur V se note $\int_a^b f$ *ou* $\int_a^b f(\,.\,)\,\mathrm{d}\,.$ *(le point remplaçant ici une lettre muette).*

Premières propriétés

Les propriétés les plus simples des fonctions scalaires bornées intégrables (resp. Riemann-intégrables) se transmettent élémentairement grâce à (1) aux fonctions bornées intégrables (resp. Riemann-intégrables) à valeurs dans E, dont nous noterons l'ensemble $\mathscr{L}_B^1([a, b], E)$ (resp.

C'est ainsi que :

• $\mathscr{L}_B^1([a,b],E)$ est un *sous-K*-ev de $\mathscr{F}([a,b],E)$ formé de fonctions *bornées* (nous reviendrons ci-dessous sur cette notion de fonction bornée). Et $\mathfrak{R}([a,b],E)$ est un sous-K-ev de $\mathscr{L}_B^1([a,b],E)$.

• Sur le K-ev $\mathscr{L}_B^1([a,b],E)$, l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est *K-linéaire.*

• Toute fonction *continue par morceaux* (et en particulier toute fonction *en escalier*) : $I \longrightarrow E$ est Riemann-intégrable.

• Soit c un réel $> b$, et $\Phi = [a,c] \longrightarrow E$; posons $f = \Phi|_{[a,b]}$ et $g = \Phi|_{[b,c]}$. Pour que Φ soit bornée intégrable (resp. Riemann-intégrable), il faut et il suffit que f et g le soient. Et si c'est le cas, on a : $\int_a^c \Phi = \int_a^b f + \int_b^c g$, qu'on préfère écrire :

(2) $$\int_a^c \Phi = \int_a^b \Phi + \int_b^c \Phi \quad \text{(relation de Chasles)}\,.$$

Avec la convention $\int_b^a f = -\int_a^b f$ pour $f \in \mathscr{L}_B^1([a,b],E)$, on obtient : pour tout α, β, γ pris dans $[a,b]$, on a $\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f$.

• Soit $E_1, \dots, E_p$, F des K-ev de dimension finie, $\mu : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ une application p-linéaire, et pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$ donnons $f_i \in \mathscr{L}_B^1([a,b],E_i)$ (resp. $f_i \in \mathfrak{R}([a,b],E_i)$). Soit f la fonction $[a,b] \longrightarrow F$, $t \mapsto \mu(f_1(t), \dots, f_p(t))$. Alors $f \in \mathscr{L}_B^1([a,b],F)$ (resp. $f \in \mathfrak{R}([a,b],F)$. Cela résulte du fait que $\mathscr{L}_B^1([a,b],K)$ et $\mathfrak{R}([a,b],K)$ sont des *sous-K-algèbres* de $\mathscr{F}([a,b],K)$ et que μ est *polynomiale* sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, ce qui entraîne que les coordonnées de f dans une base fixée de F sont des polynômes en les coordonnées des diverses f_k relativement à des bases fixées de $E_1, \dots, E_p$.

Questions de limites

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base du K-ev E, et $f : X \longrightarrow E$ une fonction définie sur la partie X d'un espace topologique T. Soit $a \in T$ un point adhérent à X, et $(f_1, \dots, f_n)$ les coordonnées de f dans $\mathscr{B}$. On sait (cf. tome 2, § XI.1, corollaire 4 du théorème sur l'équivalence des normes) que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe ssi $(\forall i)$ $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ existe, et que lorsqu'il en est ainsi :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sum\limits_{i=1}^n \left(\lim\limits_{x \to a} f_i(x)\right) e_i$. On pourra donc étendre aux suites de

fonctions bornées intégrables vectorielles les propriétés (

fonctions bornées intégrables à valeurs dans K. Encore faut-il préciser la notion de *suite u-bornée* de fonctions à valeurs dans E. On sait (cf. ibidem, corollaire 2) que la notion *d'ensemble borné* dans E se définit indépendamment du choix d'une norme de E. Si X est un ensemble non vide, une fonction $f : X \longrightarrow E$ est dite *bornée* ssi $f(X)$ est une partie bornée de E (cela revient à dire que les composantes de f dans une base quelconque de E sont des fonctions bornées de X dans K). Une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de fonctions : $X \longrightarrow E$ est dite **u-bornée** ssi il existe une partie bornée B de E indépendante de λ telle que $(\forall \lambda \in \Lambda)\ f_\lambda(X) \subset B$ (ce concept s'applique en particulier aux suites $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $X \longrightarrow E$). Soit $\|.\|$ une norme quelconque de E. Pour que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ soit u-bornée, il faut et il suffit qu'il existe M réel > 0 tel que $(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall x \in X) \|f_\lambda(x)\| \leq M$.

THÉORÈME I.1.1

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite ***u-bornée*** *de fonctions* ***bornées intégrables :*** *$[a, b] \longrightarrow E$, qui* ***converge simplement*** *sur $[a, b]$ vers une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$. Alors f est bornée intégrable, et on a :* $\displaystyle\int_a^b f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

COROLLAIRE 1

Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions ***bornées intégrables :*** *$[a, b] \longrightarrow E$, qui* ***converge uniformément*** (1) *sur $[a, b]$ vers une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$. Alors f est* ***bornée intégrable,*** *et* $\displaystyle\int_a^b f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Remarque 1 : Supposons en particulier que toutes les f_k soient **continues.** Alors on sait que la limite uniforme f est continue, ce qui entraîne *a fortiori* son intégrabilité (cf. tome 2, théorèmes VII.1.1 et XII.2.1 qui sont tout à fait élémentaires).

Remarque 2 : On peut prouver que ce corollaire 1 reste vrai en y remplaçant partout « bornée intégrable » par « Riemann-intégrable ».

Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$. Notons Sub $([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ (cf. tome 2, § VII.2). A toute $\sigma = (a_0, \ldots, a_N) \in$ Sub $([a, b])$, avec

---

(1) La définition de cette notion nécessite le choix d'une norme de E. Mais le concept obtenu, à cause de l'équivalence des normes en dimension finie, est indépendant du choix de cette norme. La convergence uniforme a lieu ssi elle a lieu sur les fonctio

$a = a_0 < \ldots < a_N = b$, et à toute suite $\xi = (\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant N-1}$ *subordonnée* à σ (*i.e.* $\forall i \in [\![0, N-1]\!]$ $a_i \leqslant \xi_i \leqslant a_{i+1}$), on fait correspondre le vecteur

$$(3) \qquad S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i)\, f(\xi_i)$$

appelé **somme de Riemann** de f pour σ et ξ. Soit $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées de f dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. On a :

$$(4) \qquad S(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=1}^{n} S(f_k, \sigma, \xi)\, e_k\,.$$

Soit alors $V \in E$; $\left(V = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i\right)$. Nous dirons que les sommes de Riemann $S(f, \sigma, \xi)$ **convergent vers V lorsque le pas de σ tend vers zéro** ssi pour tout voisinage ω de V il existe un η réel > 0 tel que, pour *toute* subdivision $\sigma \in$ Sub $([a, b])$ de pas $\leqslant \eta$, et *toute* suite ξ subordonnée à σ, on ait : $S(f, \sigma, \xi) \in \omega$. Cela revient à dire que $(\forall k \in [\![1, n]\!])$ les sommes de Riemann $S(f_k, \sigma, \xi)$ convergent vers v_k. Compte tenu des résultats du § VII.5 du tome 2 et de la définition I.1.1, on en déduit :

PROPOSITION I.1.1

Avec les notations qui précèdent, pour que les sommes de Riemann de f convergent vers un vecteur $V \in E$, il faut et il suffit que f soit **Riemann-intégrable.** *Si c'est le cas, V est alors unique, et c'est $V = \int_a^b f$.*

Primitives

Toujours en raisonnant sur les coordonnées dans une base de E, on obtient :

- Soit $f \in \mathscr{L}_B^1([a, b], E)$, et $x_0 \in [a, b[$. Si $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} x_0} f(x)$ existe, alors la fonction $F : [a, b] \longrightarrow E$, $X \mapsto \int_a^X f$ est dérivable à droite en x_0, et on a $F'_d(x_0) = f(x_0 + 0)$. De même, pour $x_0 \in]a, b]$, si $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)$ existe, F est dérivable à gauche en x_0, et $F'_g(x_0) = f(x_0 - 0)$.

En conséquence, *si f est continue en x_0, $F'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$.*

- Appelons **primitive** d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow E$ toute fonction $G : [a, b] \longrightarrow E$, s'il en existe, qui est dérivable et admet f pour dérivée. Si f admet une primitive F, l'ensemble des primitives de f est celui des fonctions : $x \mapsto F(x) + C$ $(C \in E$ constante arbitraire).

THÉORÈME I.1.2

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ **continue.** *Alors* $F : [a, b] \longrightarrow E$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est une* **primitive** *de f, et pour toute primitive G de f, on a :*

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = [G(x)]_{x=a}^{x=b}}\ .$$

COROLLAIRE 1

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ **continue,** *et* $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ *de classe* $\mathscr{C}^1$; $((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha < \beta)$. *Alors :*

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(t) \times [f \circ \varphi(t)]\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

(formule du changement de variable*).*

COROLLAIRE 2 (intégration par parties)

*Soit F et G deux autres K-*ev *de dimension finie et* $\mu : E \times F \longrightarrow G$ *une application K-bilinéaire, enfin* $f : [a, b] \longrightarrow E$ *et* $g : [a, b] \longrightarrow F$ *deux applications de classe* $\mathscr{C}^1$. *Alors :*

$$\int_a^b \mu(f(t), g'(t))\,\mathrm{d}t = [\mu(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b \mu(f'(t), g(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

COROLLAIRE 3 (formule de Taylor-reste intégrale)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$ *de classe* $\mathscr{C}^{N+1}$. *Alors :*

$$f(b) = f(a) + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) + \\ + \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

§ I.2 *L'INÉGALITÉ DE LA NORME*

Dans ce §, E désigne un K-evn de dimension $n \geqslant 1$, dont la norme est notée $\|\cdot\|$, et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME I.2.1 *(inégalité de la norme)*

Si $f : [a, b] \longrightarrow E$ *est* **bornée intégrable,** *alors* $\|f\| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|f(t)\|$ *l'est aussi, et on a :*

$$(1) \qquad \boxed{\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|(t)\,\mathrm{d}t} .$$

Pour des fonctions $f : [a, b] \longrightarrow E$ **réglées** (*i.e.* par définition qui sont sur $[a, b]$ *limite uniforme* d'une suite de fonctions en escalier, ce qui d'après la remarque 2 du § I.1 entraîne leur intégrabilité au sens de Riemann), cette propriété de f n'est pas très difficile à établir, sans être toutefois complètement évidente. Seul le cas où f est *en escalier* est véritablement simple : soit en effet dans ce cas une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_N)$ de $[a, b]$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b)$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$. Pour chaque $i \in [\![0, N-1]\!]$, soit C_i la valeur constante de f sur $]a_i, a_{i+1}[$. On vérifie, en raisonnant sur les coordonnées dans une base, que $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i)\, C_i$, et d'autre part il est bien clair que $\|f\|$ est en escalier et que $\displaystyle\int_a^b \|f\| = \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) \|C_i\|$. L'inégalité du triangle entraîne alors : $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| = \left\|\sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i)\, C_i\right\| \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) \|C_i\| = \int_a^b \|f\|$, c'est-à-dire (1).

Démonstration du théorème I.2.1 *lorsque* f *est* ***continue :*** Dans ce cas $\|f\|$ est aussi continue. Toujours en raisonnant sur les coordonnées dans une base, on voit qu'il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f (cf. tome 2, proposition VII.1.3). Ayant choisi une telle suite, on a : $\displaystyle\int_a^b f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$, d'où $\displaystyle\left\|\int_a^b f_k\right\| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \left\|\int_a^b f\right\|$ (cf. § I.1, remarque 1). Mais comme $(\forall t \in [a, b])$ $\big|\,\|f(t)\| - \|f_k(t)\|\,\big| \leqslant \|f(t) - f_k(t)\|$, la suite de fonctions en escaliers $(\|f_k\|)$ converge uniformément vers $\|f\|$ sur $[a, b]$, d'où $\displaystyle\int_a^b \|f_k\| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \|f\|$. Or $(\forall k) \displaystyle\left\|\int_a^b f_k\right\| \leqslant \int_a^b \|f_k\|$ car on vient de voir que (1) est vraie avec les fonctions en escalier. Par passage des inégalités larges à la limite, on en déduit bien (1) pour f continue. ■

Démonstration du théorème I.2.1 *lorsque* f *est* **bornée intégrable :**

Nous avons besoin de quelques compléments sur les fonctions $[a, b] \longrightarrow E$ bornées intégrables.

Proposition I.2.1

Soit (f_k) *une suite* **u-bornée** *de fonctions* $[a, b] \longrightarrow E$ **bornées intégrables,** *qui converge* **simplement presque partout** *vers une fonction bornée* $f : [a, b] \longrightarrow E$*. Alors* f *est bornée intégrable, et* $\displaystyle\int_a^b f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Démonstration :

En raisonnant sur les coordonnées dans une base, il suffit d'établir la proposition en supposant que les f_k et f sont à valeurs dans K (et même dans $\mathbb{R}$ par le biais des parties réelle et imaginaire si $K = \mathbb{C}$). Plaçons-nous donc dans l'hypothèse où f et les f_k sont numériques.

On a donc une partie $\mathcal{N}$ *négligeable* de $[a, b]$ (cf. tome 2, § VII.4) telle que (f_k) converge simplement vers f sur $[a, b] \backslash \mathcal{N} = A$. Remplaçons les f_k et f par $\tilde{f}_k = f_k \chi_A$ et $\tilde{f} = f \chi_A$. Chaque $\tilde{f}_k$ est bornée intégrable, la suite $(\tilde{f}_k)$ est u-bornée, et converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $[a, b]$ tout entier. Donc $\tilde{f}$ est bornée intégrable, et $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}$. Mais $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}_k = \int_a^b f_k$ pour tout k car $\mathcal{N}$ est négligeable. Puisque f est bornée, $f - \tilde{f}$ est bornée et nulle sur A, donc *bornée négligeable,* donc bornée intégrable, et de plus : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f} = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k$. ■

Proposition I.2.2.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow E$*. Il y a équivalence entre les assertions* (I) *et* (II) *suivantes :*

(I) $f \in \mathscr{L}^1_B([a, b], E)$.

(II) *Il existe une suite* **u-bornée** *de fonctions* **en escalier** *de* $[a, b]$ *dans* E *qui converge simplement vers* f **presque partout.**

Démonstration :

Il suffit encore de se placer dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La proposition précédente montre que (II) $\Rightarrow$ (I). Il reste à prouver que (I) $\Rightarrow$ (II). Soit M un réel > 0 qui majore $|f|$ sur $[a, b]$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, construisons une fonction $g_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que $\displaystyle\int_a^b |g_k - f| \leqslant \frac{1}{k}$ (c'est possible : cf ; tome 2, théorème VII.8.3). La fonction $f_k = \sup\,(-M, \inf\,(g_k, M))$ est encore en escalier et vérifie $|f_k - f| \leqslant |g_k - f|$, donc $\displaystyle\int_a^b |f_k - f| \leqslant \frac{1}{k}$. La suite $(\psi_k) = (|f_k - f|)$ de fonctions en escalier $\geqslant 0$ vérifie $\displaystyle\int_a^b \psi_k \underset{k}{\to} 0$. Par un raisonnement que nous exposerons en détail pour démontrer le théorème VIII.1.4 du présent ouvrage, on en déduit qu'on peut extraire de la suite (f_k) une suite $(f_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers f sur $[a, b]$. Cette suite sera aussi u-bornée puisque (f_k) l'est. ■

Démonstration du théorème I.2.1 :

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B([a, b], E)$, et (f_k) une suite u-bornée de fonctions en escalier qui converge presque partout vers f sur $[a, b]$ (cf. proposition I.2.2). Alors la suite $(\|f_k\|)$ de fonctions en escalier est u-bornée et converge presque partout vers $\|f\|$. Donc $\|f\|$ est bornée intégrable (cf. proposition I.2.1 avec $E = \mathbb{R}$) et $\int_a^b \|f_k\| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b \|f\|$. Comme les f_k sont en escalier, on sait que $(\forall k) \left\| \int_a^b f_k \right\| \leqslant \int_a^b \|f_k\|$ et d'après la proposition I.2.1 : $\int_a^b f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$. Par passage des inégalités larges à la limite, on a donc $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$, c'est-à-dire (1). ■

Intégrales généralisées

Les notions vues au § VIII.3 du tome 2 relatives aux intégrales généralisées s'étendent immédiatement aux fonctions vectorielles :

• Si $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, une fonction $f : [a, b[\longrightarrow E$ est dite *localement bornée intégrable* ssi $(\forall c \in [a, b])$ $f|_{[a, c]} \in \mathscr{L}^1_B([a, c], E)$. Il est équivalent de dire que dans une base donnée de E (ou dans toute base de E) les fonctions coordonnées de f sont localement bornées intégrables. C'est le cas en particulier si f est *continue*.

• Si $f : [a, b[\longrightarrow E$ est localement bornée intégrable, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ **converge** ssi la fonction $X \mapsto \int_a^X f$, $[a, b[\longrightarrow E$, possède une limite lorsque $X \xrightarrow{<} b$. Cette limite s'appelle alors **intégrale** (généralisée) de f sur $[a, b[$ et se note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(.)\,d(.)$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ d'une fonction $f : [a, b[\longrightarrow E$ localement bornée intégrable. Pour que l'intégrale $\int_a^b f$ converge, il faut et il suffit que les intégrales $\int_a^b f_i$ convergent pour $i \in [\![1, n]\!]$, et quand c'est vérifié, on a : $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i \right) e_i$.

Etant donné que $(E, \|.\|)$ est complet en tant que K-evn de dimension finie, on obtient exactement comme au § VIII.3 du tome 2 :

THÉORÈME I.2.2 (critère de Cauchy)

Soit a et b dans $\bar{\mathbb{R}}$ tels que $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et $f : [a, b[\longrightarrow E$ localement bornée intégrable. Pour que l'intégrale $\int_a^b f$ ***converge,*** *il faut et il suffit que soit vérifié le critère suivant (dit* ***de Cauchy****)*
$(\forall \varepsilon$ réel $> 0)$ $\exists c \in [a, b[\mid (\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2)$,

$$(c \leqslant X < Y < b) \Rightarrow \left(\left\| \int_X^Y f \right\| \leqslant \varepsilon \right).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner l'effet d'un changement de variable ou d'une intégration par parties sur les intégrales généralisées, ainsi que celui de définir des intégrales généralisées sur des intervalles $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

• Si $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ et si $f : [a, b[\longrightarrow E$ est localement bornée intégrable, le théorème I.2.1 montre que $\|f\| : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+ , t \mapsto \|f(t)\|$ l'est aussi, ce qui permet de poser :

DÉFINITION I.2.1

Dans les conditions ci-dessus, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est ***absolument convergente*** *ssi l'intégrale $\int_a^b \|f\|$ converge.*

Grâce aux théorèmes I.2.1 et I.2.2 on prouve, exactement de la même façon que pour les fonctions à valeurs dans K :

THÉORÈME I.2.3

Soit $f : [a, b[\longrightarrow E$ localement bornée intégrable $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$. Si l'intégrale $\int_a^b f$ est ***absolument convergente,*** *alors elle est* ***convergente.***

La réciproque est évidemment fausse puisqu'elle l'est déjà avec $E = K$. Lorsque l'intégrale $\int_a^b f$ converge sans converger absolument, on dit qu'elle est **semi-convergente.**

Intégrales à paramètres

Bornons-nous à considérer des intégrales à paramètres définies sur un intervalle *compact* $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, ce qui est en pratique suffisant pour les applications. Si jamais on veut considérer des intégrales paramètres, on utilisera des techniques de suites et séries de fonctions tout à fait analogues à ce qui a été fait au § VIII.5 du tome 2, auquel nous renvoyons.

THÉORÈME I.2.4

> *Soit (X, d) un espace métrique, Λ une partie de X, $\alpha \in \bar{\Lambda}$ un élément de X et $f : \Lambda \times [a, b] \longrightarrow E$, $(\lambda, t) \mapsto f(\lambda, t)$ une fonction* **bornée** *telle que : $(\forall \lambda \in \Lambda)$, la fonction $f_{[\lambda]} : t \mapsto f(\lambda, t)$ est bornée intégrable et $(\forall t \in [a, b])$ $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow \alpha} f(\lambda, t)$ existe. Alors la fonction $g : [a, b] \longrightarrow E$, $t \mapsto \lim\limits_{\lambda \longrightarrow \alpha} f(\lambda, t)$ est bornée intégrable et*
> $$\int_a^b f(\lambda, t)\, \mathrm{d}t \underset{\lambda \longrightarrow \alpha}{\longrightarrow} \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Il est inutile de transcrire une preuve qui est rigoureusement calquée sur celle du théorème VIII.5.1 du tome 2, compte tenu des résultats des § I.1 et I.2.

COROLLAIRE

> *Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \times [a, b] \longrightarrow E$, $(\lambda, t) \mapsto f(\lambda, t)$ une fonction* bornée, *séparément bornée intégrable en t sur $[a, b]$ et séparément continue en λ. Alors la fonction $F : X \longrightarrow E$, $\lambda \mapsto \int_a^b f(\lambda, t)\, \mathrm{d}t$ est continue.*

THÉORÈME I.2.5

> *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, Λ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : \Lambda \times [a, b] \longrightarrow E$, $(\lambda, t) \mapsto f(\lambda, t)$ telle que :* a) *f est séparément bornée intégrable en t sur $[a, b]$,* b) *la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ existe sur $\Lambda \times [a, b]$ et* ***y est bornée.*** *Alors $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ est séparément bornée intégrable en t sur $[a, b]$; la fonction $F : \lambda \longrightarrow E$, $\lambda \mapsto \int_a^b f(\lambda, t)\, \mathrm{d}t$ est dérivable, et $(\forall \lambda \in \Lambda)$ $F'(\lambda) = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, \mathrm{d}t$.*

La preuve peut se faire directement (en imitant celle du théorème VIII.5.2 du tome 2), soit en appliquant ce même théorème aux coordonnées de *f*.

§ I.3 *COMPARAISON DES FONCTIONS*

Nous supposons maintenant connue la matière des § VI.1 et VI.2 du tome 2 (propriétés locales et comparaison des fonctions au voisinage d'un point) et nous allons voir comment étendre les concepts qui y ont été introduits au cas où *la variable* est prise dans un espace topologique arbitraire [1] et où les fonctions étudiées sont *à valeurs dans des* K-ev *de dimension finie.*

Germes de fonctions en un point

Soit X et Y deux espaces topologiques séparés non vides, D une partie non vide de X, a un point adhérent à D. On note $\mathscr{F}_D(a, Y)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans Y définies sur un ensemble du type $V \cap D$, où V est un voisinage de a dans X. Ces fonctions sont dites définies au voisinage de a dans D. Sur l'ensemble $\mathscr{F}_D(a, Y)$, la relation binaire $(\mathscr{R})$: il existe V voisinage de a dans X tel que f et g soient définies sur $V \cap D$ et $f|_{V \cap D} = g|_{V \cap D}$ $(f \in \mathscr{F}_D(a, Y), g \in \mathscr{F}_D(a, Y))$ est une *relation d'équivalence*. Les classes de cette relation s'appellent **germes au point *a* de fonctions** de D dans Y. La relation $(\mathscr{R})$ se lit : « f et g sont égales au voisinage de a ». La classe mod $(\mathscr{R})$ de $f \in \mathscr{F}_D(a, Y)$ s'appelle **germe de *f* en *a*.**

Par définition, une propriété de $f \in \mathscr{F}_D(a, Y)$ est dite **locale en *a*** ssi elle ne dépend que du germe de f en a.

Exemple 1 : L'existence d'une limite de f en a est une propriété locale en a de f.

Exemple 2 : Si $b \in Y$, la propriété « il existe V voisinage de a tel que f est définie sur $V \cap D$ et $(\forall x \in V \cap D)\ f(x) \neq b$ » est *locale en a.*

• Lorsque Y est un K-ev de dimension finie, pour toute fonction $f \in \mathscr{F}_D(a, Y)$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, Y)$, la somme $f(x) + g(x)$ peut être définie pour $x \in D$ assez voisin de a, et le germe de la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ ne dépend que de ceux de f et g. On convient de noter $f + g$ l'un quelconque des représentants de ce germe.

• Soit $Y_1, \dots, Y_N$, Z des K-ev de dimension finie, et $\mu : Y_1 \times \cdots \times Y_N \longrightarrow Z$ une application N-linéaire. Donnons-nous $f_i \in \mathscr{F}_D(a, Y_i)$ pour $i \in [\![1, N]\!]$. Alors la fonction $x \mapsto \mu(f_1(x), \dots, f_N(x))$ est définie pour $x \in D$ assez voisin de a, et son germe en a ne dépend que de ceux des f_i. On convient de noter $\mu(f_1, \dots, f_N)$ l'un quelconque des représentants de ce germe.

• Si $Y = K$, et si $f(x)$ reste $\neq 0$ pour $x \in D$ assez voisin de a, la fonction

(1) Rappelons que l'on ne considère dans ce Cours que des espaces topo

$x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est définie au voisinage de a dans D, et son germe en a ne dépend que de celui de f. On convient de noter $\dfrac{1}{f}$ l'un quelconque des représentants de ce germe.

• Si T est un autre espace topologique séparé non vide, Δ une partie non vide de T et α un point adhérent à Δ. Supposons donnée $\varphi \in \mathscr{F}_{\Delta}(\alpha, D)$ telle que $\varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$. Alors, pour toute $f \in \mathscr{F}_D(a, Y)$, la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))$ est définie pour $t \in \Delta$ assez voisin de α, et son germe ne dépend que de celui de φ en α et de celui de f en a. On convient de noter $f \circ \varphi$ l'un quelconque des représentants de ce germe.

Notations de Landau

Les définitions données au § VI.2 du tome 2 peuvent facilement être étendues. C'est ainsi que dans ce qui suit X désigne un espace topologique non vide, D une partie non vide de X et a un point adhérent à D.

DÉFINITION I.3.1

*Soit E et F des K-*evn *de dimension finie (dont la norme sera notée $\|.\|$) et $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$, $g \in \mathscr{F}_D(a, E)$.*

a) *On dit que* ***f* est dominée par *g* au voisinage de *a*** *ssi : $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\exists V$ voisinage de a dans X tels que f et g sont définies sur $V \cap D$ et $(\forall x \in V \cap D)\ \|f(x)\| \leqslant M\|g(x)\|$. On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{\preccurlyeq} g(x)$ ou $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$.*

b) *On dit que* ***f* est négligeable devant *g* au voisinage de *a*** *(ou que f est* ***infiniment petit devant*** *g au voisinage de a) ssi : $\forall \varepsilon$ réel > 0, $\exists V$ voisinage de a dans $X \mid f$ et g sont définies sur $V \cap D$ et $(\forall x \in V \cap D)\ \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\|g(x)\|$. On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$ ou $f \underset{a}{\ll} g$.*

Les propriétés $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ et $f \underset{a}{\ll} g$ sont *locales en a*. De plus elles restent *invariantes si on change les normes* de E et F, à cause de l'équivalence des normes en dimension finie.

DÉFINITION I.3.2

*Soit E un K-*ev *de dimension finie, et $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$, $g \in \mathscr{F}_D(a, E)$. On dit que f est* ***équivalente à *g* au voisinage de *a*,*** *et l'on écrit $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ ssi $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$*

La propriété $f \underset{a}{\sim} g$ est *locale en a* et ne dépend pas du choix de la norme de E.

• Dans la définition I.3.1, fixons g. L'ensemble des $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$ telles que $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ $\left(\text{resp. } f \underset{a}{\ll} g\right)$ se note aussi $O_a(g)$ (resp. $o_a(g)$) ou plus simplement $O(g)$ (resp. $o(g)$) lorsqu'aucune confusion n'est possible. $f \underset{a}{\preccurlyeq} g$ peut donc s'écrire $f \underset{a}{\in} O(g)$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\in} O(g(x))$. De même $f \underset{a}{\ll} g$ peut s'écrire $f \underset{a}{\in} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\in} o(g(x))$. Par abus de langage on écrit aussi parfois $f(x) = O(g(x))$ (resp. $f(x) = o(g(x))$ quand $x \longrightarrow a$.

• Les propriétés essentielles, dont nous laissons au lecteur le soin de reconstituer les démonstrations s'il le désire, relatives à ces notions sont les suivantes :

(L_1) Soit E et F deux K-ev, et $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$, $g \in \mathscr{F}_D(a, E)$. Si $f \underset{a}{\in} o(g)$, alors $f \underset{a}{\in} O(g)$ et si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f \underset{a}{\in} O(g)$.

(L_2) Soit E et F deux K-ev, $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de $\mathscr{F}_D(a, E)$ et $g \in \mathscr{F}_D(a, F)$. Si $(\forall i)\ f_i \underset{a}{\in} O(g)$, alors

$$(\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n) \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \underset{a}{\in} O(g)\,;$$

si $(\forall i)\ f_i \underset{a}{\in} o(g)$, alors $(\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n) \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \underset{a}{\in} o(g)$.

(L_3) Soit E, F, G trois K-ev et $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$, $g \in \mathscr{F}_D(a, F)$, $h \in \mathscr{F}_D(a, G)$.
Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$ alors $f \underset{a}{\in} O(h)$.

Si $f \underset{a}{\in} O(g)$ et $g \underset{a}{\in} o(h)$, alors $f \underset{a}{\in} o(h)$.

Si $f \underset{a}{\in} o(g)$ et $g \underset{a}{\in} O(h)$, alors $f \underset{a}{\in} o(h)$.

(L_4) Soit F un K-ev et $g \in \mathscr{F}_D(a, F)$ qui reste $\neq 0_F$ au voisinage de a, et soit E un K-ev et $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$. Alors $f \underset{a}{\in} O(g)$ ssi $\dfrac{1}{\|g(x)\|} f(x)$ *reste bornée au voisinage de a* et $f \underset{a}{\in} o(g)$ ssi $\dfrac{1}{\|g(x)\|} f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} 0$.

(L_5) Soit T un autre espace topologique non vide, Δ une partie non vide de T, α un point adhérent à Δ et $\varphi \in \mathscr{F}_\Delta(\alpha, D)$ telle que $\varphi(t) \underset{t \to \alpha}{\longrightarrow} a$. Donnons-nous deux K-ev E et F, puis $f \in \mathscr{F}_D(a, E)$, $g \in \mathscr{F}_D(a, F)$. Si $f \underset{a}{\in} O(g)$, alors $f \circ \varphi \underset{\alpha}{\in} O(g \circ \varphi)$; si $f \underset{a}{\in} o(g)$, alors $f \circ \varphi \underset{\alpha}{\in} o(g \circ \varphi)$.

(L_6) Soit E un K-ev, $f_i \underset{a}{\in} \mathscr{F}_D(a, K)$ et $g_i \underset{a}{\in} \mathscr{F}_D(a, E)$ $(i \in \{1, 2\})$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} O(g_2)$ alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} O(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} o(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} O(g_2)$ alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$.

Si $f_1 \underset{a}{\in} O(f_2)$ et $g_1 \underset{a}{\in} o(g_2)$ alors $f_1 g_1 \underset{a}{\in} o(f_2 g_2)$.

(L_7) Soit des K-ev $E_1, \dots, E_n, F, G_1, \dots, G_n$ et une application n-linéaire $\mu : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$. Donnons-nous des fonctions $f_i \in \mathscr{F}_D(a, E_i)$ et $g_i \in \mathscr{F}_D(a, G_i)$ $(i \in [\![1, n]\!])$. Munissons les G_i de normes notées $\| \cdot \|$. Si $(\forall i)$ $f_i \underset{a}{\in} O(g_i)$ alors

$$\mu(f_1(x), \dots, f_n(x)) \underset{x \to a}{\in} O(\|g_1(x)\| \times \cdots \times \|g_n(x)\|).$$

Si $(\forall i)$ $f_i \underset{a}{\in} O(g_i)$ et $\exists i \mid f_i \underset{a}{\in} o(g_i)$ alors

$$\mu(f_1(x), \dots, f_n(x)) \underset{x \to a}{\in} o(\|g_1(x)\| \times \cdots \times \|g_n(x)\|).$$

(L_8) Dans les conditions de la définition I.3.2, sur l'ensemble $\mathscr{F}_D(a, E)$, la relation $f \underset{a}{\sim} g$ est *d'équivalence*. Si E est muni d'une norme notée $\| \cdot \|$, $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \|f\| \underset{a}{\sim} \|g\|$.

(L_9) Sous les hypothèses de (L_5), si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \circ \varphi \underset{\alpha}{\sim} g \circ \varphi$.

(L_{10}) Soit E un K-ev et f et g dans $\mathscr{F}_D(a, E)$ telles que $f \underset{a}{\sim} g$. Pour que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe il faut et il suffit que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe. S'il en est ainsi, ces limites sont égales.

(L_{11}) Sous les notations et hypothèses de (L_6), si $f_1 \underset{a}{\sim} f_2$ et $g_1 \sim g_2$ alors

$f_1 g_1 \underset{a}{\sim} f_2 g_2$ (mais attention ! cette propriété ne s'étend pas aux produits multilinéaires quelconques).

§ I.4 *FORMULES DE TAYLOR*

Rassemblons ici les *formules de Taylor* les plus utiles pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un K-ev de dimension finie.

• Rappelons d'abord la *formule de Taylor-reste intégrale* vue au § I.1. Soit E un K-ev de dimension finie, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^{N+1}$. Alors :

$$\text{(1)} \quad \boxed{f(b) = f(a) + \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \frac{1}{N!} \int_a^b (b-t)^N f^{(N+1)}(t)\, \mathrm{d}t} \, .$$

• Soit maintenant E un K-evn de dimension finie, de norme $\| \cdot \|$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $f : [a, b] \longrightarrow E$, $N + 1$ fois dérivable dans $]a, b[$, de classe $\mathscr{C}^N$ sur $[a, b]$ $(N \in \mathbb{N})$, telle que $\| f^{(N+1)} \|$ reste bornée sur $]a, b[$ par un réel $A \geqslant 0$. Alors on a la *formule de Taylor-Lagrange :*

$$\text{(2)} \quad \boxed{\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{N} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant A \, \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}} \, .$$

La démonstration est la même que pour le théorème VI.3.2 du tome 2, compte tenu du théorème des accroissements finis le plus général (cf. tome 2, théorème XI.5.5).

• La *formule de Taylor-Young* s'étend aussi : soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, E un K-ev de dimension finie, et $f : I \longrightarrow E$ une fonction N fois dérivable sur I et admettant en un point $a \in I$ une dérivée $(N + 1)$-ième $(N \geqslant 0)$. Alors :

$$\text{(3)} \quad \boxed{\frac{1}{(x-a)^N} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) \underset{\substack{\neq \\ x \longrightarrow a}}{\longrightarrow} 0_E}$$

ce qui s'écrit, avec les notations de Landau :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \underset{x \longrightarrow a}{\in} o((x-a)^N) \, .$$

Ici aussi il faut adapter la démonstration du théorème VI.3.3 du tome 2 en tenant compte du théorème des accroissements finis le plus général. Grâce aux résultats rappelés dans les §§ I.3 et I.4, le lecteur pourra étendre les propriétés des *développements limités* étudiés au tome 2 au cas où certaines des fonctions étudiées prennent leurs valeurs dans un K-evn de dimension finie quelconque. Nous ne nous y attarderons pas davantage pour aborder des sujets plus importants.

Exercice 1 : Reprendre avec des fonctions à valeurs dans un K-ev de dimension finie :

a) Le théorème VI.3.4 du tome 2.

b) Les exercices 4, 5 et 10 du § VI.3 du tome 2.

c) La théorie des développements asymptotiques, § VI.6 du tome 2.

Chapitre II

SÉRIES ENTIÈRES

§ II.1 *RAYON DE CONVERGENCE*

DÉFINITION II.1.1

Soit $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ *une série formelle à coefficients dans* $\mathbb{C}$ (cf. tome 1, §§ VIII.4 et 5). *On appelle* **série entière** *définie par S la série de fonctions* (cf. tome 2, Chap. XII), *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$, $\sum u_n(z)$ *définie par*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall z \in \mathbb{C}) \quad u_n(z) = a_n z^n .$$

Une série entière provient donc d'une et *d'une seule* série formelle $S \in \mathbb{C}[[X]]$, qui sera dite *associée* à cette série entière.

Pour une série entière donnée, comme pour toute série de fonctions se posent les deux problèmes fondamentaux : déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de convergence, et étudier la fonction $f : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par la somme de cette série. Il se trouve que sur ces deux points les séries entières ont des propriétés particulièrement remarquables, et cela en grande partie à cause du très simple résultat suivant :

LEMME 1 (Lemme d'Abel)

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$. *Supposons trouvé* $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit **bornée.** *Alors, pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < |z_0|$, *la série* $\sum a_n z^n$ **converge absolument** *(donc converge).*

De plus, pour tout réel r tel que $0 \leq r < |z_0|$, *la série entière* $\sum a_n z^n$ **converge normalement, donc uniformément,** *sur le disque fermé* $\tilde{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Démonstration :

Soit M réel > 0 majorant tous les $|a_n z_0^n|$ $(n \in \mathbb{N})$. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < |z_0|$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leqslant M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n ;$$

comme $\left| \dfrac{z}{z_0} \right| < 1$, la série géométrique $\sum \left| \dfrac{z}{z_0} \right|^n$ converge, d'où la première assertion.

Soit maintenant r réel tel que $0 \leqslant r < |z_0|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \tilde{D}_r$, on a : $|a_n z^n| \leqslant |a_n r^n|$, et puisque $r < |z_0|$ on vient de voir que la série numérique $\sum |a_n r^n|$ converge, d'où résulte la deuxième assertion. ■

Reprenons la série formelle $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ et désignons par $\mathscr{E}_1$ l'*ensemble des points de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$, par $\mathscr{E}_2$ l'ensemble des *points de convergence absolue* de cette série entière, par $\mathscr{E}_3$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit *bornée* et par $\mathscr{E}_4$ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ *diverge*.

PROPOSITION II.1.1

Avec les notations précédentes, désignons par R_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ les éléments du segment $[0, +\infty]$ de $\bar{\mathbb{R}}$ définis par : $R_i = \sup\limits_{z \in \mathscr{E}_i} (|z|)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, et $R_4 = \inf\limits_{z \in \mathscr{E}_4} (|z|)$ (en convenant que $R_4 = +\infty$ si $\mathscr{E}_4 = \varnothing$). Alors $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

Démonstration :

Observons d'abord que $0 \in \mathscr{E}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$; donc les R_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ sont bien définis.

Remarquons ensuite que $\mathscr{E}_2 \subset \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_3$, d'où $R_2 \leqslant R_1 \leqslant R_3$. Si $R_3 = 0$, il s'ensuit $R_1 = R_2 = R_3 = 0$, et dans ce cas il est clair que $R_4 = 0$; si $R_3 > 0$, soit un réel $\rho \in [0, R_3[$. On peut toujours trouver dans $\mathscr{E}_3$ un nombre complexe z_0 tel que $\rho < |z_0| < R_3$. Le *lemme d'Abel* montre alors que $\rho \in \mathscr{E}_2$, d'où $R_2 \geqslant \rho$. Puisque c'est vrai pour tout $\rho \in [0, R_3[$, on en déduit : $R_2 \geqslant R_3$, et finalement $R_2 = R_3 = R_1$. Le raisonnement précédent montre que si $\rho \in [0, R_3[$, $\rho \in \mathscr{E}_1$, donc $\rho \notin \mathscr{E}_4$, donc $\rho \leqslant R_4$, d'où on déduit $R_3 \leqslant R_4$. Soit enfin $\rho \in [0, R_4[$; par définition de R_4, on a $\rho \in \mathscr{E}_1$, d'où $\rho \leqslant R_1$; c'est vrai pour tout $\rho \in [0, R_4[$, d'où $R_4 \leqslant R_1$ et finalement $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$. ■

DÉFINITION II.1.2

Avec les notations de la proposition II.1.1, *on appelle* **rayon de convergence** *de la série formelle* $S = \sum a_n X^n$ *(ou : de la série entière définie par S) l'élément* $R \in \bar{\mathbb{R}}$ *tel que* $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

Nous désignerons ce rayon de convergence par $R_{cv}(S)$, ou en abrégé $R(S)$ si aucune confusion n'en résulte.

THÉORÈME II.1.1

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

(I) $R_{cv}(S) = 0$ *ssi la série* $\sum a_n z^n$ *diverge pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$.

(II) $R_{cv}(S) = +\infty$ *ssi la série* $\sum a_n z^n$ *converge (absolument) pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

(III) *Soit* $R \in \,]0, +\infty[$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $R = R_{cv}(S)$.

2) *La série* $\sum |a_n z^n|$ *converge pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$ *et diverge pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > R$.

3) *La série* $\sum a_n z^n$ *converge (absolument) pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$, *et pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > R$, *la suite* $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est* non bornée.

Démonstration :

Toutes ces assertions sont des conséquences immédiates de la proposition II.1.1. ■

Vocabulaire

Pour une série donnée $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$,

• le disque **ouvert** $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_{cv}(S)\}$ s'appelle **disque (ouvert) de convergence** de S (ou *de la série entière définie par S*) ; nous le noterons $\mathscr{D}_{cv}(S)$;

• l'intervalle ouvert $\{x \in \mathbb{R} \mid -R_{cv}(S) < x < R_{cv}(S)\}$ s'appelle **intervalle (ouvert) de convergence** de S ; nous le noterons $I_{cv}(S)$.

Il résulte de l'étude précédente que :

• $\mathscr{D}_{cv}(S) = \varnothing$ ssi $R_{cv}(S) = 0$ (c'est le cas par exemple pour la série $\sum n!\, z^n$) ;

• $\mathscr{D}_{cv}(S) = \mathbb{C}$ ssi $R_{cv}(S) = +\infty$ (penser par exemple à la série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$).

Dans le cas où $0 < R_{cv}(S) < +\infty$, le cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_{cv}(S)\}$ est habituellement appelé, de façon malencontreuse, *cercle de convergence* de S, parce que son rayon est le rayon de convergence de S. Nous préférons nommer ce cercle **cercle d'incertitude** de S ; nous le noterons $\Gamma_I(S)$ et nous conviendrons que $\Gamma_I(S) = \{0\}$ lorsque $R_{cv}(S) = 0$, et que $\Gamma_I(S) = \varnothing$ lorsque $R_{cv}(S) = +\infty$. On constate alors que dans tous les cas l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de convergence de la série entière définie par S vérifie :

$$\mathscr{D}_{cv}(S) \subset \mathscr{C} \subset \mathscr{D}_{cv}(S) \cup \Gamma_I(S) .$$

En revanche, on ne peut rien dire, en général, de $\mathscr{C} \cap \Gamma_I(S)$. Selon les cas, cet ensemble peut être $\varnothing$ (par exemple pour $\sum z^n$), ou $\Gamma_I(S)$ tout entier $\left(\text{par exemple pour } \sum \frac{z^n}{n^2}\right)$, mais ce peut être aussi un singleton, ou le complémentaire d'une partie finie, ou une partie dense dans $\Gamma_I(S)$ et de complémentaire dense dans $\Gamma_I(S)$ comme on pourra le voir en exercice, d'où notre appellation *cercle d'incertitude*.

Détermination du rayon de convergence

La définition qui a été donnée pour le rayon de convergence et le théorème II.1.1 qui la suit permettent déjà dans un très grand nombre de cas, pour peu qu'on ait en mémoire les *règles de Cauchy et de d'Alembert* concernant les séries à termes $\geqslant 0$ (cf. tome 2, § VIII.1), le calcul effectif de ce rayon de convergence.

Exemple 1 : Considérons les séries $S = \sum n^n X^n$ et $T = \sum \frac{X^n}{n^n}$. Pour la première, il est clair que si $z \neq 0$, $n^n z^n \not\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ et par conséquent $\sum n^n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Il en résulte que $R_{cv}(S) = 0$.

Pour la seconde, on a : $\left(\frac{|z|^n}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{|z|}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $\sum \frac{z^n}{n^n}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc $R_{cv}(T) = +\infty$.

Exemple 2 : Soit $S = \sum n^n X^{n^2}$ et la série entière associée $\sum n^n z^{n^2}$. Donnons d'abord à z des valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $|z| = r < 1$. Il est clair que la série numérique $\sum n^n r^{n^2}$ converge car, en posant $u_n = n^n r^{n^2}$, on voit que $(u_n)^{1/n} = nr^n$, d'où $(u_n)^{1/n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et la règle de Cauchy donne l'assertion. Cela prouve déjà que $R_{cv}(S) \geqslant 1$. En revanche pour les valeurs de z telles que $|z| = r \geqslant 1$, la série $\sum n^n z^{n^2}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Cela prouve que $R_{cv}(S) \leqslant 1$, d'où finalemer

Exemple 3 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Cherchons le rayon de convergence de la série $S = \sum (\cos n\theta)\, X^n$.

Pour $|z| < 1$, il est clair que la série $\sum (\cos n\theta)\, z^n$ converge absolument (en effet $(\forall n)\ |\cos n\theta| \leqslant 1$ et par conséquent $(\forall n)\ |z^n \cos n\theta| \leqslant |z|^n$, terme général d'une série géométrique convergente). Il en résulte que $R_{\mathrm{cv}}(S) \geqslant 1$.

Prenons maintenant pour z la valeur 1. Alors la série numérique $\sum \cos n\theta$ diverge : il suffit pour le prouver d'établir que $\cos n\theta \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$ (si l'on avait $\cos n\theta \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, il s'ensuivrait :

$$\cos 2\, n\theta = 2 \cos^2 n\theta - 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -1\,,$$

ce qui est contradictoire avec $\cos 2\, n\theta \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$). Ainsi la série entière associée à S *diverge au point* 1, d'où l'on conclut que $R_{\mathrm{cv}}(S) \leqslant 1$, et finalement $R_{\mathrm{cv}}(S) = 1$.

Si $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ est donnée, la proposition II.1.1 montre que $R_{\mathrm{cv}}(S)$ *ne dépend que de la suite* $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Il peut même s'exprimer par la formule suivante :

THÉORÈME II.1.2 (de Hadamard [1])

Soit $S = \sum a_n X^n \in [[X]]$. *On a :* $R_{\mathrm{cv}}(S) = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} (|a_n|)^{1/n}}$

(*en convenant que* $\dfrac{1}{0} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).

Démonstration :

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $(\forall n)\ (|a_n|\, r^n)^{1/n} = r |a_n|^{1/n}$. Utilisons la règle de Cauchy (cf. tome 2, § VIII.1), et tenons compte de :

$$\limsup_{n \to \infty} (r |a_n|^{1/n}) = r \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}\,.$$

On obtient :

si $r \limsup\limits_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} < 1$, la série $\sum |a_n| r^n$ converge,

---

[1] Jacques Salomon *Hadamard* (1865-1963), mathématicien français auquel on doit en particulier la démonstration de la loi de raréfaction des nombres premiers.

si $r \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} > 1$, la série $\sum |a_n| r^n$ diverge,

d'où la valeur de $R_{\mathrm{cv}}(S)$ par utilisation du théorème II.1.1. ■

La formule de Hadamard présente l'avantage d'être absolument générale. Cependant en pratique on lui préfère souvent l'application directe du théorème II.1.1 et dans les cas les plus simples la conséquence suivante de la *règle de d'Alembert* (cf. tome 2, § VIII.1) :

PROPOSITION II.1.2

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ avec $(\forall n)\ a_n \neq 0$.

Si $\lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$R_{\mathrm{cv}}(S) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert à la série $\sum |a_n z^n|$ et de conclure en utilisant le théorème II.1.1. ■

Exemple 4 : $S = \sum \dfrac{X^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ car $\left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exemple 5 : Soit F une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$, n'ayant aucun pôle dans $\mathbb{N}$, et non nulle. Par application directe de la proposition II.1.2, du fait que $\dfrac{F(n+1)}{F(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient : la série $\sum F(n) X^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

De même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série formelle $\sum |F(n)|^{\alpha} X^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Remarque 1 : Reprenons l'exemple 2, où $S = \sum n^n X^{n^2}$. Si l'on veut appliquer le théorème de Hadamard à cette série, il faut l'écrire $S = \sum a_k X^k$, avec $a_k = 0$ si k n'est pas carré parfait dans $\mathbb{N}$, et $a_{n^2} = n^n$ pour $n \in \mathbb{N}$; d'où : $|a_k|^{1/k} = 0$ si k non carré ; $(n^n)^{1/n^2} = n^{1/n}$ si $k = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$. On obtient bien alors $\limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1$, et on retrouve $R_{\mathrm{cv}}(S) = 1$.

Rayon de convergence et opérations sur les séries

PROPOSITION II.1.3

> *Soit* $S \in \mathbb{C}[[X]]$ *et* $T \in \mathbb{C}[[X]]$.
> (I) $R_{cv}(S+T) \geqslant \mathrm{Min}\ (R_{cv}(S), R_{cv}(T))$, *et si* $R_{cv}(S) \neq R_{cv}(T)$ *il y a égalité.*
> (II) $R_{cv}(ST) \geqslant \mathrm{Min}\ (R_{cv}(S), R_{cv}(T))$.

Démonstration :

Soit $S = \sum a_n X^n$, $T = \sum b_n X^n$. Posons $m = \mathrm{Min}\ (R_{cv}(S), R_{cv}(T))$. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie : $|z| < m$, les séries numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, convergent absolument, donc la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ aussi, de même que la série $\sum c_n z^n$, en notant $\sum c_n X^n = ST$ (cf. tome 2, théorème IX.5.1). Les inégalités annoncées en I) et II) en résultent par utilisation du théorème II.1.1.

Si de plus $R_{cv}(S) \neq R_{cv}(T)$ (disons par exemple $R_{cv}(S) < R_{cv}(T)$), pour tout $r \in]R_{cv}(S), R_{cv}(T)[$, on est sûr que la série $\sum (a_n + b_n) r^n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente. Le théorème II.1.1 montre donc que, dans ce cas, $R_{cv}(S+T) = R_{cv}(S)$. ■

Remarque 2 : Si $R_{cv}(S) < R_{cv}(T)$ on n'a pas pour le produit l'analogue de ce qui se passe pour la somme. Par exemple, soit $S = \sum X^n$ et $T = 1 - X$. Alors $ST = 1$. On a $R_{cv}(S) = 1$, $R_{cv}(T) = +\infty$ et $R_{cv}(ST) = +\infty \geqslant 1$ (mais pas égal à 1).

Résumons sous forme de proposition quelques résultats utiles concernant le rayon de convergence :

PROPOSITION II.1.4

> *Soit* $S = \sum a_n X^n$ *et* $T = \sum b_n X^n$ *deux éléments de* $\mathbb{C}[[X]]$.
> (I) *Si* $(\forall n)\ |a_n| \leqslant |b_n|$, *alors* $R_{cv}(S) \geqslant R_{cv}(T)$.
> (II) *Si* $S - T \in \mathbb{C}[X]$, $R_{cv}(S) = R_{cv}(T)$.
> (III) *Soit* $p = \mathrm{val}\ (S)$; *alors* $R_{cv}(S) = R_{cv}\left(\dfrac{S}{X^p}\right)$.
> (IV) *Si* $a_n = \lambda_n b_n$, *avec* $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\in} O(n^\alpha)$ *pour un* $\alpha \in \mathbb{R}$, *alors* $R_{cv}(S) \geqslant R_{cv}(T)$.
> (V) *On a :* $R_{cv}\left(\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}X}\right) = R_{cv}(S)$.

Démonstration :

(I) Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R_{cv}(T)$, la séri converge, donc la série $\sum |a_n|\,|z|^n$ converge aussi par comparaison ; d'où le résultat par le théorème II.1.1.

(II) Pour $z \in \mathbb{C}$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent ou divergent en même temps puisque la suite $(a_n - b_n) z^n$ est stationnaire ; d'où l'assertion par le théorème II.1.1.

(III) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Les séries $\sum\limits_{n \geqslant p} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n \geqslant p} a_n z^{n-p}$ convergent ou divergent en même temps puisque les suites $(a_n z^n)$ et $(a_n z^{n-p})$ sont proportionnelles ; d'où le résultat par le théorème II.1.1.

(IV) Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < R_{\text{cv}}(T)$, et soit $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $(\forall n)$ $|\lambda_n| \leqslant A n^\alpha$. Fixons $r \in \,]|z|, R_{\text{cv}}(T)[$: la série $\sum |b_n| r^n$ converge et par conséquent la suite $(|b_n| r^n)$ est bornée. On a :

$$(\forall n) \quad |a_n|\,|z|^n \leqslant A \times (|b_n| r^n) \times n^\alpha \left(\frac{|z|}{r} \right)^n \leqslant B n^\alpha \left(\frac{|z|}{r} \right)^n .$$

La série $\sum n^\alpha \left(\frac{|z|}{r} \right)^n$ converge d'après la règle de d'Alembert car $\frac{|z|}{r} \in [0, 1[$. Donc la série $\sum |a_n|\,|z|^n$ converge aussi. Le théorème II.1.1 montre alors que $R_{\text{cv}}(S) \geqslant R_{\text{cv}}(T)$.

(V) D'après (III) : $R_{\text{cv}}\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}X} \right) = R_{\text{cv}}\left(X \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}X} \right) = R_{\text{cv}}\left(\sum n a_n X^n \right)$, et d'après (IV)

$$R_{\text{cv}}\left(\sum n a_n X^n \right) = R_{\text{cv}}\left(\sum a_n X^n \right) = R_{\text{cv}}(S). \quad \blacksquare$$

Exemple 6 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Cherchons le rayon de convergence de $S = \sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha} X^n$. Une double application de la proposition II.1.4 (IV) montre que le rayon de convergence de S est le même que celui de la série $\sum (\cos n\theta) X^n$ qui a été étudié dans l'exemple 3, et donc $R_{\text{cv}}(S) = 1$.

Une importante conséquence de la proposition II.1.4 est :

THÉORÈME II.1.3

L'ensemble des $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ de rayon > 0 est une ***sous-$\mathbb{C}$-algèbre*** *de $\mathbb{C}[[X]]$. C'est aussi l'ensemble des $S \in \mathbb{C}[[X]]$ admettant une* ***majorante géométrique,*** i.e. *telles que, pour un $A \in \mathbb{R}_+$ et un $C \in \mathbb{R}_+^*$ convenables (dépendant de S), on ait : $(\forall n)$ $|a_n| \leqslant A C^n$.*

Démonstration :

La première assertion résulte des parties (I) et (II) de la proposition II.1.4. Si $(\forall n)\ |a_n| \leqslant AC^n$, avec $A \in \mathbb{R}_+$ et $C > 0$, il est clair que pour tout z vérifiant $|z| < \dfrac{1}{C}$ la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, d'où $R_{cv}(S) \geqslant \dfrac{1}{C}$ et par conséquent $R_{cv}(S) > 0$. Réciproquement si $R_{cv}(S) > 0$, le lemme d'Abel montre immédiatement que S admet une majorante géométrique. ■

Une série formelle $S \in \mathbb{C}[[X]]$ est dite **convergente** ssi $R_{cv}(S) > 0$. L'ensemble des séries formelles convergentes se note $\mathbb{C}\{X\}$: d'après le théorème II.1.3, c'est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}[[X]]$. On a vu dans l'exemple 1 qu'il existe des séries S telles que $R_{cv}(S) = 0$.

THÉORÈME II.1.4

Soit $S \in \mathbb{C}\{X\}$ avec val $(S) = 0$. *Alors $\dfrac{1}{S} \in \mathbb{C}\{X\}$. Autrement dit, le groupe $\mathcal{U}(\mathbb{C}\{X\})$ des **éléments inversibles** de l'anneau $\mathbb{C}\{X\}$ est $\mathbb{C}\{X\} \cap \mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ (où $\mathcal{U}(\mathbb{C}[[X]])$ est le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$), c'est-à-dire l'ensemble des $S \in \mathbb{C}\{X\}$ **de valuation nulle.***

Démonstration :

Posons : $S = \sum a_n X^n$; par hypothèse, $a_0 \neq 0$. On peut, quitte à remplacer S par $\dfrac{1}{a_0} S$, supposer $a_0 = 1$. Alors $\dfrac{1}{S} = \sum b_n X^n$, où $b_0 = 1$ et où $(\forall n \geqslant 1)\ b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$. Soit A et C dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $(\forall k)\ |a_k| \leqslant AC^k$. Quitte à agrandir C, on peut supposer $A = 1$ car $a_0 = 1$. Pour $n \geqslant 1$, on a alors :

$$(1) \qquad |b_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C^k |b_{n-k}| \,.$$

Définissons alors une suite (β_n) de la manière suivante : $\beta_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1$, $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} C^k \beta_{n-k}$. Une récurrence facile utilisant les inégalités (1) montre que $(\forall n)\ |b_n| \leqslant \beta_n$. Mais, par construction même, la série formelle $\sum \beta_k X^k$ n'est autre que $1/T$, avec $T = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} C^k X^k = \dfrac{1 - 2CX}{1 - CX}$; On a donc :

$$\sum \beta_k X^k = \frac{1 - CX}{1 - 2CX} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} C^k X^k \,.$$

Par suite, $(\forall k \geqslant 1)\ |b_k| \leqslant 2^{k-1} C^k = \dfrac{1}{2}(2C)^k$, et donc en utilisant le théorème II.1.3, $\dfrac{1}{S} \in \mathbb{C}\{X\}$. ■

Exercice 1 : Trouver le rayon de convergence des séries formelles $\sum a_n X^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = \left(\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ *b)* $a_n = a^{n^\alpha}$ $(a > 0, \alpha \in \mathbb{R})$

c) $a_n = n$-ième décimale après la virgule dans le développement décimal de $\sqrt{2}$

d) $a_n = \left(1 + \dfrac{e^{in\theta}}{n}\right)^{n^2}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ *e)* $a_n = \left(1 + \dfrac{\cos n\theta}{n}\right)^{n^2}$

f) $a_n = 0$ si $n \equiv 0 \bmod (3)$, $a_n = 2^{2p+i}$ si $n = 3p + i$ $(i \in \{1, 2\})$

g) $a_n = \sin(n^\alpha \theta)$ $(\alpha > 0, \theta \in \mathbb{R})$ *h)* $a_n = \dfrac{1}{\sin(n\pi\sqrt{3})}$.

Exercice 2 : Pour $\alpha > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ déterminer le rayon de convergence des séries $\sum (n!)^\alpha X^{(n!)^p}$ et $\sum (n!)^\alpha X^{(p^{n!})}$, ($p \geqslant 2$ pour la dernière).

Exercice 3 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$, avec $(\forall n)\ a_n \neq 0$. On suppose que pour un entier $p \geqslant 2$ et des nombres complexes $l_1, \dots, l_p$ convenables, on a : $(\forall i \in [\![1, p]\!])\ \dfrac{a_{pn+i}}{a_{pn+i-1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} l_i$.

Calculer le rayon de convergence de S en fonction des l_i.

Exercice 4 : Soit $S = \sum a_n X^n$ et $T = \sum b_n X^n$ deux séries formelles de rayons de convergence respectifs R et R', avec $R \leqslant R'$. On pose $c_{2p} = a_p$, $c_{2p+1} = b_p$ pour $p \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum c_n X^n$?

Exercice 5 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$, de rayon de convergence R. Trouver le rayon de convergence des séries formelles suivantes :

a) $\sum (a_n)^p X^n$ $(p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$ *b)* $\sum a_n X^{np}$ $(p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$

c) $\sum a_n X^{p^n}$ $(p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$ *d)* $\sum \dfrac{a_n}{1 + |a_n|} X^n$

e) $\sum (a_n \cos n\theta) X^n$ $(\theta \in \pi\mathbb{Q})$ *f)* $\sum (a_n \sin n\theta) X^n$ $(\theta \in \pi\mathbb{Q})$

g) si $R > 0$, $\sum \dfrac{a_n}{n!} X^n$ *h)* $\sum \dfrac{a_n \sin n\theta}{n!} X^{n^2}$ $(\theta \in \pi\mathbb{Q})$

Exercice 6 : Calculer le rayon de convergence des séries formelles suivantes :

a) $S = \sum \dfrac{(2n)!\, n^{2n}}{2^n\, n!\,[(3n)!]} X^n$ *b)* $\sum \operatorname{Arc\,cos}\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right) X^n$ $(\alpha > 0)$

c) $\sum a^{n^\alpha} X^{n^p}$ $(a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*)$

d) $\sum a^{n^2} X^{n(n+1)/2}$ $(a > 0)$

Exercice 7 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ (donc $R_{cv}(S) = R > 0$). On donne une suite (b_n) dans $\mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} q$, et on pose $(\forall n)$ $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$.

Montrer que, si $|q| < R$, alors $\dfrac{c_n}{b_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{S}(q)$.

Exercice 8 : On donne une suite complexe (a_n) telle que :

$$(\forall n \geqslant 5) \quad a_n = a_{n-2}\,\frac{(n-2)^2 + \lambda - 1/4}{4n-2} + \mathrm{i}a_{n-1}\,\frac{4(n-1)^2 + 2\lambda - 1}{4n^2},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est donné. On pose $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

Montrer que, si $\lambda \leqslant 1/4$, alors $R_{cv}(S) \geqslant 2(\sqrt{2} - 1)$.

Exercice 9 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$, de rayon de convergence R, avec $0 < R < +\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Si $z_0 \in \mathbb{C}^*$, déterminer le rayon de la série formelle $\sum S_n(z_0) X^n$.

Exercice 10 : Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge. Trouver le rayon de convergence de la série formelle $\sum\limits_{n \geqslant 1} (a_1 a_2 \ldots a_n) X^n$.

Exercice 11 : Soit $S = \sum\limits_{n \geqslant 1} c_n X^n$, où c_n est défini pour tout $n \geqslant 1$ par : $c_n = \dfrac{p_n}{n}$, avec $p_n = \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N}^* \mid k! \text{ divise } n\}$.

a) Montrer que $R_{cv}(S) = 1$.

b) Montrer que si $r \in \mathbb{Q}$, la série entière définie par S diverge au point $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}r\pi}$.

c) Montrer que la série entière définie par S converge au point $z = \exp(2\,\mathrm{ei}\pi)$.

Indication : Montrer d'abord que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \mathrm{e}k! - \operatorname{Ent}(\mathrm{e}k!) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{k+1}$.

Exercice 12 : On donne une suite réelle (a_n) vérifiant $a_n \downarrow 0$ et telle que la série numérique $\sum a_n$ soit divergente. On pose $S = \sum a_n X^n$. Montrer que $R_{cv}(S) = 1$ et que la série entière associée à S converge en tout point du cercle $|z| = 1$ sauf au point $z = 1$.

Indication : Penser à la sommation partielle d'Abel.

Exercice 13 : Montrer que la série formelle $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{\operatorname{Ent}(\sqrt{n})}}{n} X^n$ a un rayon de convergence égal à 1, que la série entière associée converge *en tout point* du cercle d'incertitude, mais qu'elle n'est absolument convergente en aucun point de ce cercle.

Exercice 14 : Soit $S = \sum a_n X^n$ et $T = \sum b_n X^n$ deux séries formelles de rayons respectifs R et R', avec $0 < R < +\infty$ et $0 < R' < +\infty$.

a) Montrer que le rayon de convergence R'' de $U = \sum a_n b_n X^n$ vérifie $R'' \geqslant RR'$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

b) On suppose de plus $(\forall n)\, b_n \neq 0$. Montrer que le rayon de convergence R''' de $\sum \dfrac{a_n}{b_n} X^n$ vérifie $R''' \leqslant \dfrac{R}{R'}$.

Exercice 15 : Déterminer le rayon de convergence de $S = \sum a_n X^n$, où :

$$(\forall n) \quad a_n = \int_n^{n+1/2} \frac{dt}{1+t^p} \quad (p \text{ exposant réel}) .$$

Exercice 16 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = \left[\frac{z(1-z)}{2} \right]^{4^n}$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme dans $\mathbb{C}$ de la série de fonctions $\sum u_n(z)$ (on exécutera un croquis).

b) On développe chaque $u_n(z)$ par la formule du binôme : $u_n(z) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2.4^n} b_k z^k$. Soit S la série entière $\sum_{k \geqslant 1} b_k z^k$. Montrer que $R_{\text{cv}}(S) = 1$. Comparer avec les résultats du *a*) (phénomène de « supra-convergence »).

c) Montrer que la série entière S diverge pour $z = -1$ et converge pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Exercice 17 : On pose $P_0(u) = 1$ et, si $q \in \mathbb{N}^*$, $P_q(u) = \dfrac{u(u+q)^{q-1}}{q!}$.

a) Vérifier que, si $q \geqslant 1$, $P'_q(u) = P_{q-1}(u+1)$; et montrer par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $P_n(u+v) = \sum_{p=0}^{n} P_p(v) P_{n-p}(u)$.

b) Pour $u \in \mathbb{C}$ fixé, soit $S_n(X) = \sum_{n \geqslant 0} P_n(u) X^n$. Déterminer le rayon de convergence R de S_u.

c) Pour $|z| < R$, montrer que $\tilde{S}_u(z) \tilde{S}_v(z) = \tilde{S}_{u+v}(z)$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

d) Si $u \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{S}_u(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$.

§ II.2 *FONCTION DÉFINIE PAR UNE SÉRIE FORMELLE CONVERGENTE*

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$. On peut lui associer la fonction, notée $\tilde{S}$, définie par $\quad \tilde{S} : \mathscr{D}_{\text{cv}}(S) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Cette fonction est appelée la **fonction série entière** définie par S. Le lecteur aura remarqué que son ensemble de définition est le *disque (ouvert) de convergence* de $\sum a_n z^n$. Même si la série $\sum a_n z^n$ converge en certains points du cercle d'incertitude $\Gamma_I(S)$, nous nous interdisons dans ce § d'étudier le prolongement de $\tilde{S}$ en ces points.

Premières propriétés de $\tilde{S}$

PROPOSITION II.2.1

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ et $T = \sum b_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$.

(I) *Pour* $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\widetilde{(\lambda S)} = \lambda \tilde{S}$.
(II) *Pour* $z \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \cap \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(T)$, *on a :*

$$\widetilde{(S+T)}(z) = \tilde{S}(z) + \tilde{T}(z) \quad et \quad \widetilde{(ST)}(z) = \tilde{S}(z)\,.\,\tilde{T}(z)\,.$$

(III) *Si S est de valuation nulle, alors pour* $z \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \cap \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}\left(\frac{1}{S}\right)$ *on a :* $\widetilde{\left(\frac{1}{S}\right)}(z) = \dfrac{1}{\tilde{S}(z)}$ *(et en particulier,* $\tilde{S}(z) \neq 0$).

Démonstration :

Ce sont des conséquences quasi immédiates des résultats du § II.1, et en particulier du fait que si $z \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \cap \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(T)$ les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument. Pour (III) on pose $T = 1/S$ et on applique (II) à la série-produit $ST = 1$. ■

Continuité de $\tilde{S}$ et conséquences

THÉORÈME II.2.1

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$.

(I) *La fonction* $\tilde{S}$ *est continue sur* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S)$.
(II) *Soit a et b réels, avec* $-R_{\mathrm{cv}}(S) < a < b < R_{\mathrm{cv}}(S)$. *Alors :*

$$(1) \qquad \int_a^b \tilde{S}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{(n+1)} - a^{(n+1)}}{n+1}\,.$$

(III) *La série entière* $\sum a_n z^n$ *converge normalement, donc uniformément, sur tout compact du disque* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S)$.

Démonstration :

(I) Les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = S_n(z)$ sont polynomiales, donc continues sur $\mathbb{C}$. D'autre part la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\tilde{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ tel que $0 \leqslant r < R_{\mathrm{cv}}(S)$ (lemme d'Abel). Soit alors $z_0 \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S)$. Fixons $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z_0| < r < R_{\mathrm{cv}}(S)$. D'après ce qui précède, $\tilde{S}|_{\tilde{D}_r}$ est continue (cf. tome 2, théorème XII.2.1), en particulier en z_0. Mais $\tilde{D}_r$ est voisinage de z_0, donc $\tilde{S}$ est continue en z_0, d'où l'assertion (I).

(II) Soit $r = \mathrm{Max}\,(|a|, |b|)$. D'après ce qui précède, fonctions continues de t, $\sum a_n t^n$, converge normalement, donc uniformément sur $[-r, r]$ (car $[-r, r] \subset \tilde{D}_r$), ce qui autorise l'intégration terme à terme, d'où la formule (1).

(III) Soit L une partie compacte non vide du disque de convergence $\mathscr{D}_{\text{cv}}(S)$. Notons $F = \mathbb{C} \setminus \mathscr{D}_{\text{cv}}(S)$ $(= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant R_{\text{cv}}(S)\})$: F est fermé dans $\mathbb{C}$, et $F \cap L = \varnothing$. La fonction $f : L \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $z \mapsto \mathrm{d}(z, F) = \inf_{t \in F} |z - t|$ est continue (voir tome 2, § X.5, exemple 2), donc admet, puisque L est compact non vide, un *minimum* α. Comme $\alpha > 0$, le nombre $r = R_{\text{cv}}(S) - \alpha$ est $< R_{\text{cv}}(S)$. De plus $L \subset \tilde{D}_r$. La convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est normale sur $\tilde{D}_r$, donc *a fortiori* sur L. ■

COROLLAIRE 1

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$, *et* $p = \text{val}(S)$. *Supposons* $p \geqslant 1$. *La fonction* $f : \mathscr{D}_{\text{cv}}(S) \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{\tilde{S}(z)}{z^p}$ *si* $z \neq 0$, $0 \mapsto a_p$, *est continue.*

Démonstration :

Soit T la série formelle $\dfrac{S(X)}{X^p} = \sum\limits_{n \geqslant p} a_n X^{n-p}$. On sait que $T \in \mathbb{C}\{X\}$ et que $R_{\text{cv}}(T) = R_{\text{cv}}(S)$. La fonction $\tilde{T}$ est continue d'après le théorème II.2.1. Or justement on constate que $f = \tilde{T}$. ■

COROLLAIRE 2

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$. *Il existe un réel* $r \in \,]0, R_{\text{cv}}(S)[$ *tel que* $\tilde{S}(z) \neq 0$ *pour tout* z *vérifiant* $z \neq 0$ *et* $|z| \leqslant r$.

Démonstration :

Soit $p = \text{val}(S)$. Notons T la série formelle qui vérifie : $S = a_p X^p(1 + XT)$. On a : $R_{\text{cv}}(T) = R_{\text{cv}}(S)$. Comme la fonction $\tilde{T}$ est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0, et $z\tilde{T}(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0$. On peut donc choisir $r \in \,]0, R_{\text{cv}}(S)[$ tel que $|z\tilde{T}(z)| < 1$ pour $|z| \leqslant r$. Du fait que $a_p \neq 0$, on voit alors que $\tilde{S}(z) = a_p z^p(1 + z\tilde{T}(z)) \neq 0$ pour $z \neq 0$ et $|z| \leqslant r$. ■

En d'autres termes, si $\tilde{S}(0) = 0$, ce nombre 0 est un **zéro isolé** de $\tilde{S}$. De manière précise :

COROLLAIRE 3

> *Si* $S \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$, *l'ensemble* $Z_S = \{z \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \mid \tilde{S}(z) = 0\}$ *n'admet pas* 0 *pour point d'accumulation.*
> *En conséquence, si* $S \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$ *et* $T \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$, *et s'il existe un ensemble* A admettant 0 pour point d'accumulation, *tel que* $\tilde{S}(z) = \tilde{T}(z)$ *pour tout* $z \in A$, *alors* $S = T$.

COROLLAIRE 4

> *Soit* S *et* T *dans* $\mathbb{C}\{X\}$; *supposons trouvé* $A \subset \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \cap \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(T)$ *tel que* $\tilde{S}(z)\,\tilde{T}(z) = 0$ *pour tout* $z \in A$, et que 0 soit point d'accumulation de A, *alors* $S = 0$ *ou* $T = 0$.

Démonstration :

Il résulte du corollaire 3 que $ST = 0$ (car pour tout $z \in A$, $(ST)(z) = \tilde{S}(z)\,\tilde{T}(z) = 0$). Mais on sait que la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[X]]$ est intègre (cf. tome 1, § VIII.4), d'où $S = 0$ ou $T = 0$. ■

Une conséquence particulière du corollaire 3 est la suivante : une fonction f donnée, définie dans un disque ouvert non vide D de centre 0 et de rayon R, ne peut être la somme que *d'au plus une seule* série entière convergeant dans D.

Séries formelles et développements limités

Soit A une partie de $\mathbb{C}$ admettant 0 pour point d'accumulation. Si $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ admet un *développement limité à l'ordre n en* 0 (en abrégé : un $\mathrm{DL}_n(0)$) ssi on peut trouver $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\dfrac{f(z) - P_n(z)}{z^n} \underset{\substack{\neq \\ z \longrightarrow 0}}{\longrightarrow} 0$, avec la condition que si $0 \in A$, alors $f(0) = P_n(0)$.

Pour n *fixé,* P_n*, s'il existe, est unique.* On l'appelle alors la *partie régulière* du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f. Le $\mathrm{DL}_n(0)$ est dit *fort* si $\dfrac{f(z) - P_n(z)}{z^{n+1}}$ reste borné au voisinage de 0 pour $z \neq 0$ (*un* $\mathrm{DL}_n(0)$ fort de f fournit évidemment un $\mathrm{DL}_n(0)$).

Les propriétés des DL_n de fonctions de variable réelle (cf. tome 2, § VI.4) qui s'étendent sans difficulté, avec des démonstrations pratiquement inchangées (remplacer la valeur absolue de $\mathbb{R}$ par celle de $\mathbb{C}$), sont celles relatives à la *troncature*, à la *somme*, au *produit*, au *quotient* et à la *composée* de DL_n. Voici un résultat nouveau :

PROPOSITION II.2.2

> *Si* $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $\tilde{S}$ *admet un* $\mathrm{DL}_n(0)$ *fort : sa partie régulière est* $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Démonstration :

La relation $S = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + X^{n+1} T_n$ définit un unique $T_n \in \mathbb{C}[[X]]$, et on a : $R_{\mathrm{cv}}(T_n) = R_{\mathrm{cv}}(S)$. La fonction $\tilde{T}_n$, continue, est bornée au voisinage de 0, ce qui montre que $\dfrac{\tilde{S}(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{z^{n+1}}$ reste bornée pour $z \neq 0$ et z voisin de 0. De plus $\tilde{S}(0) = a_0 = P_n(0)$ si l'on a posé $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. ■

Exercice 1 : Donner la somme des séries entières suivantes dans leur disque de convergence :

a) $\sum_{n \geqslant 0} (\cos^p n\theta)\, z^n$ $(\theta \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*)$ *b*) $\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{\cos^p n\theta}{n!} z^n$ $(\theta \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}^*)$

c) $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{kn + r}$ $(k \in \mathbb{N}^*,\ r \in [\![1 - k, k - 1]\!]$ et ici $z \in \mathbb{R})$ *d*) $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \sigma_n X^{2n}$, avec $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

e) $\sum \dfrac{P(n)}{Q(n)} z^n$, où $Q(X) = (X - r_1)\dots(X - r_q)$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $r_1 < r_2 < \dots < r_q$, les $r_i \in \mathbb{Q}$, et $P \in \mathbb{C}_{q-1}[X]$; (si nécessaire, on se bornera à z réel).

Exercice 2 : Soit $S \in \mathbb{C}\{X\}$ de rayon de convergence R. Que dire de S

a) Si $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| < R_{\mathrm{cv}}(S) \Rightarrow \tilde{S}(z) \in \mathbb{R}$?

b) Si $|\tilde{S}(z)|$ reste constant pour $|z| < R_{\mathrm{cv}}(S)$?

Exercice 3 : Trouver un équivalent de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Réponse : $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Exercice 4 : Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, les a_n étant *non tous nuls pour* $n \geqslant 1$. Pour $r \in [0, R[$, on pose :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta .$$

a) Montrer que $I(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$. En déduire que I est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et strictement croissante sur $[0, R[$.

b) Pour $u \in]-\infty, \mathrm{Log}\, R[$ on pose $\varphi(u) = \mathrm{Log}\,[I(\mathrm{e}^u)]$. Montrer que φ est croissante et convexe.

c) Trouver $\lim\limits_{r \underset{>}{\to} 0} \dfrac{\mathrm{Log}\,[I(r)]}{\mathrm{Log}\,(r)}$. On notera $\chi(f)$ cette limite.

d) On suppose $R < +\infty$ et *f bornée* sur le disque $\mathscr{D}_{cv}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathscr{D}_{cv}(f)$ ($M \in \mathbb{R}_+$). Montrer :

$$(\forall r \in [0, R[) \quad I(r) \leqslant M^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\chi(f)}.$$

Exercice 5 : Soit $S = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ une série formelle telle que $R_{cv}(S) = 1$. On pose $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $t_n = \dfrac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$ pour $n \geqslant 0$, et $U = \sum\limits_{n \geqslant 0} s_n X^n$, $V = \sum\limits_{n \geqslant 0} t_n X^n$.

a) Montrer que $R_{cv}(U) = R_{cv}(V) = 1$.

b) Montrer que, pour tout $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} \left(\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n\right) = \sum\limits_{n \geqslant 0} s_n z^n$.

Exercice 6 : Soit $S = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ une série formelle dont les coefficients sont définis par les relations de récurrence suivantes : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ sont donnés.

a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant (2c)^{n-1}$, où $c = \mathrm{Max}\left(|\alpha|, |\beta|, \dfrac{1}{2}\right)$ et en déduire que $R_{cv}(S) > 0$.

b) Montrer que, pour $|z| < R_{cv}(S)$, on a : $S(z) = \dfrac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}$.

c) Soit z_1, z_2 les deux racines de $\beta X^2 + \alpha X - 1 = 0$. Exprimer a_n à l'aide de z_1 et z_2 et en déduire que $R_{cv}(S) = \mathrm{Min}\,(|z_1|, |z_2|)$.

Exercice 7 : *a*) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que le rayon de convergence de $T = \sum a_n X^n$ soit égal à 1 et que la série $\sum a_n$ soit *divergente*. Soit $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $\dfrac{c_n}{a_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{C}$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $U = \sum c_n X^n$?

Prouver que $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n} \underset{t \underset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \lambda$.

b) *Applications :* *b*1) En admettant que $\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ pour tout x réel tel que $|x| < 1$ (ce sera démontré au § II.4, et on peut aussi le déduire du théorème II.2.1), donner un équivalent simple de l'intégrale $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-\lambda^2 t^2)}}$ lorsque $\lambda \underset{<}{\to} 1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). (*Réponse :* $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1}{1-\lambda}$).

*b*2) Si $\alpha > 0$, montrer l'existence de $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(1-t)^\alpha \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} t^n\right) \underset{t \underset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} l$.

Exercice 8 : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Trouver les séries formelles $S \in \mathbb{C}[[X]]$ de valuation $\geqslant 1$ telles que $S(\lambda X) = S(X) - \exp(-X)$. Montrer que leur rayon de convergence est infini. Si S est l'une de ces séries, la série entière définie par S converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Exercice 9 : Comparer les ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ ci-dessous :

$$\mathscr{A} = \{S \in \mathbb{C}\{X\} \text{ de rayon } +\infty \mid \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall z \in \mathbb{C} \ |\tilde{S}(z)| \leqslant M e^{\varepsilon |z|}\}$$

$$\mathscr{B} = \left\{S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\} \text{ de rayon } +\infty \mid (k!\,|a_k|)^{1/k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0\right\}.$$

Indication : On utilisera la formule de Stirling (cf. tome 2, § IX.1).

Exercice 10 : On donne $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z)$, ce qui a un sens car le produit infini écrit est absolument convergent (cf. tome 2, § IX.6).

a) Vérifier : $(1 - qz) f(qz) = f(z)$.

b) Montrer que s'il existe $S \in \mathbb{C}[[X]]$, $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, telle que $f(z) = \tilde{S}(z)$ pour tout z, on a nécessairement : $a_0 = 1$, $a_n = (-1)^n \dfrac{q^{n(n+1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^n)}$ pour $n \geqslant 1$.

c) Soit $S = 1 + \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \dfrac{q^{n(n+1)/2}}{(1-q)\dots(1-q^n)} X^n$. Vérifier que $R_{cv}(S) = +\infty$. Calculer $\lim_{n \to \infty} \tilde{S}(q^n z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ fixé. Donner une relation entre $\tilde{S}(z)$ et $\tilde{S}(q^n z)$, et en déduire que $\tilde{S}(z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (donc f est une *fonction entière,* c'est-à-dire la somme d'une série entière de rayon $+\infty$).

Exercice 11 : On donne $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que lorsque $x \longrightarrow 1$ en restant réel et < 1, on a : $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n \sim \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$p_n = \operatorname{card} \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n\},$$

et $S = 1 + \sum_{n \geqslant 1} p_n X^n$. Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on pose : $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - z^n}$ (ce qui a un sens car le produit infini écrit est absolument convergent).

a) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que $g_N(z) = \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - z^n}$ s'écrit (pour $|z| < 1$) $g_N(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,N} z^n$, où les $p_{n,N}$ sont à préciser. Pour n fixé trouver $\lim_{N \to \infty} p_{n,N}$. En remarquant que, si $t \in [0, 1[$, $0 < g_N(t) \leqslant g(t)$, en déduire : $(\forall t \in [0, 1[)$, la série S converge au point t et sa somme vérifie $\tilde{S}(t) = g(t)$; puis : $R_{cv}(S) = 1$.

b) On fixe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer directement que $1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,N} z^n \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{S}(z)$ (on considérera le premier membre comme somme d'une série de fonctions de N), et en déduire : $\tilde{S}(z) = g(z)$.

Exercice 13 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ de valuation $\geqslant 1$. On donne $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_{cv}(S)$. Montrer que la série $\sum_k \tilde{S}(\lambda^k z)$ converge et que $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{S}(\lambda^k z) = \tilde{T}(z)$, où $T \in \mathbb{C}\{X\}$ est à préciser et a même rayon de convergence que S.

Exercice 14 : Soit $S = \sum a_n X^n$ et $T = \sum b_n X^n$ deux séries formelles vérifiant :

1) $(\forall n)$ $\sum_{k=0}^{n} a_k \in \mathbb{R}_+$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k \in \mathbb{R}_+$; 2) les rayons de convergence de S et T sont $\geqslant 1$; 3) les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ divergent et 4) $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que $\tilde{S}(t) \underset{t \overset{<}{\to} 1}{\sim} \tilde{T}(t)$.

Exercice 15 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ de rayon de convergence 1.

a) On suppose que la série numérique $\sum a_n$ est convergente et de somme s. Montrer que lorsque x est réel et tend vers 1 en restant < 1, $\tilde{S}(x) \longrightarrow s$ (théorème d'Abel). *Indication :* Majorer en valeur absolue la somme $\sum_{k=n}^{N} a_k(1 - x^k)$ grâce à une « sommation par parties ».

b) On suppose que les a_n sont dans $\mathbb{R}_+$ et que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que $\tilde{S}(x) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Pour $a_n = (-1)^n n$, vérifier que $\left| \sum_{k=0}^{2n} a_k \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que cependant $\tilde{S}(x)$ a une limite finie quand $x \overset{<}{\to} 1$.

Exercice 16 : *a*) Soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Prouver : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que, sur $[0, 1]$, $P \leqslant g \leqslant Q$ et $\int_0^1 (Q - P) \leqslant \varepsilon$.

b) Etendre le résultat du *a*) si g est *continue par morceaux* sur $[0, 1]$.

c) Soit $S = \sum a_n X^n$ une série formelle à coefficients *réels,* de rayon de convergence 1, telle que $\tilde{S}(x) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\sim} \dfrac{1}{1 - x}$.

*c*1) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ $(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n P(x^n) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t$.

*c*2) Etendre le résultat précédent au cas où P est remplacé par une fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Application : En utilisant la fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie ainsi : $t \mapsto 0$ si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ si $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant t \leqslant 1$, établir la propriété $\sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N \to +\infty}{\sim} N$.

Exercice 17 : Soit $(a, z) \in \mathbb{C}^2$ avec $|z| < 1$ et $|az| < 1$. Vérifier que $\psi(a, z) = \prod_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - az^j}$ est bien défini, et qu'on a : $\psi(az, z) = (1 - az)\, \psi(a, z)$. En déduire, par analyse et synthèse comme à l'exercice 10, que $\psi(a, z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z)\, a^m$, où l'on explicitera les $c_m(z)$.

b) En déduire : $\prod_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - z^k} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{z^m}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^m)}$.

c) Rapprocher de l'exercice 10.

Exercice 18 : (relation de Jacobi, démonstration de Cayley).

a) En raisonnant comme à l'exercice 17, montrer que ($\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$)

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1} z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1 - q^2) \cdots (1 - q^{2n})} z^n .$$

b) Soit $\sum a_n X^n$ et $\sum b_n X^n$ deux séries formelles de rayon $+\infty$. Montrer :

(1) pour $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum_{q=0}^{\infty} a_{k+q}\, b_q$ et $d_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_p\, b_{p+k}$ sont définis

(2) $(\forall z \in \mathbb{C}^*)$ $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k z^k + d_k z^{-k})$ $(A_0 = c_0 = d_0)$.

c) Soit $(q, z) \in \mathbb{C}^2(|q| < 1,\ |z| < 1)$. On pose $\Phi(z, q) = \prod_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - q^j z}$ et, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $F_0(z, q) = 1$, $F_m(z, q) = \prod_{k=1}^{m} \dfrac{1}{1 - q^k z}$.

*c*1) Vérifier : $\Phi(zq, q) = (1 - zq)\,\Phi(z, q)$ et

$$(\forall m)\quad F_m(zq, q) = (1 - zq)[F_m(z, q) + zq^{m+1} F_{m+1}(z, q)]\,.$$

*c*2) Soit $E_m(q)$ une suite de fonctions de q telles que $(\forall q)$ $|q| < 1 \Rightarrow$ la série $\sum_m E_m(q)$ est absolument convergente, et que

$$(\forall (z, q) \in \mathbb{C}^2)\quad (|z| < 1,\ |q| < 1) \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} E_m(q)\, z^m F_m(z, q) = 0\,.$$

Montrer : $(\forall n)$ $E_m(q) = 0$ pour $|q| < 1$.

*c*3) En déduire par analyse et synthèse la relation $(\mathscr{R})$:

$$(\forall (z, q) \in \mathbb{C}^2 \text{ avec } |z| < 1,\ |q| < 1)\quad \Phi(z, q) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(q)\, z^m F_m(z, q)$$

où $c_0 = 1$ et pour $m \geqslant 1$ $c_m(q) = \dfrac{q^{m^2}}{(1 - q)(1 - q^2)\ldots(1 - q^m)}$.

d) Qu'obtient-on en remplaçant dans $(\mathscr{R})$ q par q^2 et z par q^{2n} $(n \geqslant 1,\ |q| < 1)$?

e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'on peut écrire la relation (2) du *b*) avec $a_0 = b_0 = 1$ et $(\forall n \geqslant 1)$ $a_n = b_n = \dfrac{q^{n^2}}{(1 - q^2)\ldots(1 - q^{2n})}$. A l'aide de *d*), en déduire une expression de $\prod_{m=1}^{\infty} (1 + q^{2m-1} z)(1 + q^{2m-1} z^{-1})$, et en déduire la célèbre *relation de Jacobi :* pour $|q| < 1$ et $z \in \mathbb{C}^*$

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 + q^{2m-1} z)(1 + q^{2m-1} z^{-1}) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} q^{n^2}(z^n + z^{-n})\,.$$

Exercice 19 : Comparer les rayons de convergence de $S = \sum \left(\dfrac{2}{3^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) X^n$, $T = 1 + \sum X^n$ et de ST. Calculer $\tilde{S}$.

§ II.3 *FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE FORMELLE CONVERGENTE* (suite)

Rappelons que, si $S \in \mathbb{C}\{X\}$, nous notons $\tilde{S} : \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \longrightarrow \mathbb{C}$ sa fonction associée. La restriction de $\tilde{S}$ à l'intervalle ouvert de convergence $]-R_{\mathrm{cv}}(S), R_{\mathrm{cv}}(S)[$ de S sera notée $\check{S}$.

$\mathbb{C}$-dérivées

DÉFINITION II.3.1

*Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est **$\mathbb{C}$-dérivable** en un point $z_0 \in U$ ssi l'élément $\lim\limits_{\substack{\neq \\ z \longrightarrow z_0}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$. Si c'est le cas, cet élément s'appelle $\mathbb{C}$-dérivée de f en z_0 et se note $f'(z_0)$. On dit que f est **$\mathbb{C}$-dérivable** sur U ssi elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point $z_0 \in U$. Si c'est le cas, la fonction (notée f') $U \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \mapsto f'(z_0)$ s'appelle $\mathbb{C}$-dérivée de f.*

Exemple 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est $\mathbb{C}$-dérivable, et sa $\mathbb{C}$-dérivée est la fonction $f' : z \mapsto nz^{n-1}$. La fonction exponentielle complexe $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$. C'est évident au point 0 puisque

$$\frac{\exp(z) - \exp(0)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \underset{\substack{\neq \\ z \longrightarrow 0}}{\longrightarrow} 1 ,$$

et de là en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ car

$$\frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0} = \exp(z_0) \frac{\exp(z - z_0) - 1}{z - z_0} \underset{\substack{\neq \\ z \longrightarrow z_0}}{\longrightarrow} \exp(z_0) .$$

La $\mathbb{C}$-dérivée de l'exponentielle est donc $g' :$ $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow \exp(z)$.

Voici quelques propriétés élémentaires de la $\mathbb{C}$-dérivation :

- Une fonction constante est $\mathbb{C}$-dérivable, de $\mathbb{C}$-dérivée nulle.
- La $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en $z_0 \in U$ entraîne sa continuité en z_0.
- Soit f et $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 ; alors $f + g$ et fg le sont aussi, et $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$. De plus, si f ne s'annule jamais, $1/f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(z_0) = -\dfrac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$.
- Soit V un autre ouvert de $\mathbb{C}$, tel que Im $(f) \subset V$, et soit $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ et si Φ est $\mathbb{C}$-dérivable en $u_0 = f(z_0)$, alors $\Phi \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et $(\Phi \circ f)'(z_0) = \Phi'(u_0) \times f'(z_0)$.

Ces propriétés s'établissent comme celles, correspondantes, des fonctions de variable réelle (cf. tome 2, § IV.6) en remplaçant la valeur absolue des réels par celle des nombres complexes. De même :

PROPOSITION II.3.1

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et U un ouvert de $\mathbb{C}$, puis $\varphi : I \longrightarrow U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions. Si φ est dérivable en $t_0 \in I$ et si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 = \varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0, et $(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0)\, f'(z_0)$.

En particulier, lorsque $I \subset U$, en prenant pour φ *l'injection canonique :* $I \longrightarrow U$, on obtient : si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $t_0 \in I$, $f|_I$ est dérivable en t_0, et $(f|_I)'(t_0) = f'(t_0)$.

Laissons au lecteur le soin de préciser la notion de $\mathbb{C}$-*dérivées successives.*

$\mathbb{C}$-dérivées de fonctions rationnelles

THÉORÈME II.3.1

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\mathscr{D}_F$ son domaine de définition ($\mathscr{D}_F = \mathbb{C} \setminus \{$pôles de $F\}$). La fonction rationnelle $\tilde{F}$ définie par F sur $\mathscr{D}_F$ est $\mathbb{C}$-dérivable, et sa $\mathbb{C}$-dérivée $(\tilde{F})'$ est $\widetilde{F'}$ fonction définie par la dérivée formelle F' de F.

Démonstration :

Si $F = A/B$, où A et B sont deux polynômes premiers entre eux, on sait (cf. tome 1, § VIII.3) que $F' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$. Les règles de calcul des $\mathbb{C}$-dérivées pour un *quotient* montrent donc qu'il suffit de prouver l'assertion lorsque $F \in \mathbb{C}[X]$. Or, si F est *constante,* $\tilde{F}$ est $\mathbb{C}$-dérivable de $\mathbb{C}$-dérivée nulle ; si $F = X$, $\tilde{F}$ est $\mathbb{C}$-dérivable de $\mathbb{C}$-dérivée constante égale à 1 ; si F est un polynôme quelconque, l'assertion se démontre en utilisant les règles de calcul sur la $\mathbb{C}$-dérivée d'une *somme* ou d'un *produit.* ■

$\mathbb{C}$-dérivées de fonctions séries entières

THÉORÈME II.3.2

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$.

(I) *La fonction $\tilde{S}$ est $\mathbb{C}$-dérivable dans $\mathscr{D}_{cv}(S)$, et sa $\mathbb{C}$-dérivée $(\tilde{S})'$ est la fonction $\widetilde{(S')}$ définie par la dérivée formelle S' de S. Autrement dit :*

$$(\forall z) \quad |z| < R_{cv}(S) \Rightarrow (\tilde{S})'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n .$$

(II) *La fonction $\check{S}$ est dérivable sur $I_{cv}(S) =]-R_{cv}($*

$$(\check{S})'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, t^n = (\check{S'})(t)$$
$$\textit{pour} \quad -R_{\mathrm{cv}}(S) < t < R_{\mathrm{cv}}(S)\ .$$

Démonstration :

Il suffit de prouver (I), car (II) en est une conséquence évidente.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R_{\mathrm{cv}}(S)$. Fixons un réel $r \in \,]|z_0|, R_{\mathrm{cv}}(S)[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons u_n le polynôme $a_n(X^{n-1} + X^{n-2} z_0 + \cdots + z_0^{n-1})$. Si $z \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \setminus \{z_0\}$, on a : $\dfrac{\tilde{S}(z) - \tilde{S}(z_0)}{z - z_0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(z)$. Mais, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $|z| \leqslant r$, $|u_n(z)| \leqslant n|a_n| r^{n-1}$. Or la série numérique $\sum n|a_n| r^{n-1}$ converge (car $R_{\mathrm{cv}}(S) = R_{\mathrm{cv}}(S')$). Donc la série de fonctions de z, $\sum u_n(z)$, converge normalement donc uniformément sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ vers une somme T, et comme chaque u_n est continue sur D (car polynomiale), T est continue sur D. En conséquence,

$$T(z) \xrightarrow[z \to z_0,\ z_0 \in D]{\neq} T(z_0) = (\widetilde{S'})(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z_0^n\,.$$

Mais D est voisinage de z_0, et comme on a vu plus haut, $T(z) = \dfrac{\tilde{S}(z) - \tilde{S}(z_0)}{z - z_0}$ pour $z \neq z_0$ et $|z| < R_{\mathrm{cv}}(S)$. Finalement, on a prouvé :

$$\frac{\tilde{S}(z) - \tilde{S}(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{\neq} (\widetilde{S'})\,(z_0). \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE

Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\} \setminus \{0\}$.

(I) *La fonction* $\tilde{S}$ *est indéfiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable dans* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S)$, *et*

$$(\forall z_0 \in \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S))(\forall p \in \mathbb{N})(\tilde{S})^{(p)}(z_0) = (\widetilde{S^{(p)}})(z_0) =$$
$$= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\, a_n\, z_0^{n-p}\,,$$

et en particulier :

(1) $$\boxed{(\forall p \in \mathbb{N}) \quad (\tilde{S})^{(p)}(0) = p!\, a_p}\,.$$

(II) *La fonction $\check{S}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans l'intervalle de convergence $I_{cv}(S)$ de S, et*

$$(\forall t \in I_{cv}(S), \forall p \in \mathbb{N}) \quad (\check{S})^{(p)}(t) = $$
$$= \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\, a_n t^{n-p}.$$

En particulier :

$$(2) \qquad \boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad (\check{S})^{(p)}(0) = p!\, a_p}.$$

Nous savions déjà (corollaire 3 du théorème II.2.1 et proposition II.2.2 d'unicité du $DL_n(0)$) que la connaissance de $\tilde{S}$ (resp. $\check{S}$) *dans un voisinage arbitraire de* 0 dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) suffisait à *déterminer* les coefficients a_n de S. La formule (1) (resp. (2)) fournit maintenant la valeur explicite de ces coefficients à partir de $\tilde{S}$ (resp. de $\check{S}$).

Application aux fonctions rationnelles

THÉORÈME **II.3.3**

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction n'ayant pas 0 pour pôle, *et soit S_F la série formelle associée* (cf. tome 1, § VIII.5).

(I) *La série formelle S_F est convergente. Plus précisément, $R_{cv}(S_F) = \text{Min}\{\,|a|\;|a$ pôle de $F\}$, en convenant que ce minimum est $+\infty$ si F n'a pas de pôles, i.e. si $F \in \mathbb{C}[X]$.*

(II) *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_{cv}(S_F)$, on a : $\tilde{F}(z) = \tilde{S}_F(z)$, autrement dit la fonction rationnelle $\tilde{F}$ et la fonction $\tilde{S}_F$ associée au DSF de F prennent même valeur en z.*

Démonstration :

Si $F \in \mathbb{C}[X]$ toutes les assertions énoncées sont évidentes. Supposons donc $F \in \mathbb{C}(X)\backslash\mathbb{C}[X]$ et posons $\lambda = \text{Min}\{\,|a|\;|\;a$ pôle de $F\}$. D'après l'hypothèse $\lambda > 0$.

Montrons d'abord que $R_{cv}(S_F) \geqslant \lambda$. Pour cela prouvons que $\tilde{S}_F(z)$ existe et que $\tilde{S}_F(z) = \tilde{F}(z)$ pour tout z tel que $|z| < \lambda$. Cette assertion étant stable par combinaisons linéaires, décomposons F en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et vérifions la pour chaque élément simple. Par homothétie sur la variable on voit qu'il suffit d'établir, pour chaque entier $k \geqslant 1$, la proposition (R_k) : si $F_k = \dfrac{1}{(1-X)^k}$, alors $(\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1)$ $\tilde{S}_{F_k}(z)$ existe et vaut $\tilde{F}_k(z)$. Or, $F_k = (F_1)^k$, d'où : $S_{F_k} = (S_{F_1})^k = \Phi^k$, en posant $\Phi = \dfrac{1}{1-X} = F_1$, d'où $S_\Phi = S_{F_1} = \sum_{n \geqslant 0} X^n$. Nous avons vu dans le cours d'Algèbre (cf. tome 1, théorème VIII.5.3) que

$$S_{F_k} = \frac{1}{(1-X)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{k+n-1}{n} X^n .$$

Le rayon de convergence de S_{F_k} est 1 ; si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < 1$, alors $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ (série géométrique), c'est-à-dire $\tilde{\Phi}(z) = \widetilde{S_\Phi}(z)$. On en déduit : $\widetilde{S_{F_k}}(z) = \widetilde{[(S_\Phi)^k]}(z) =$ (par proposition II.2.1) $= [\widetilde{S_\Phi}(z)]^k = \dfrac{1}{(1-z)^k}$, ce qui achève de prouver (R_k) [1].

Il reste à montrer maintenant que $R_{cv}(S_F) \leq \lambda$. Raisonnons par l'absurde, en supposant $R_{cv}(S_F) > \lambda$. Fixons un pôle a de F tel que $|a| = \lambda$, et soit ν sa multiplicité. Il existe donc $G \in \mathbb{C}(X)$ *définie au point* a telle que $G(a) \neq 0$ et $F(X) = \dfrac{G(X)}{(X-a)^\nu}$. Pour $r > 0$ et suffisamment petit, $\tilde{G}(z)$ est définie dès que $|z-a| < r$, et par suite

$$|\tilde{F}(z)| \underset{z \to a,\ |z-a| < r}{\sim} \frac{|\tilde{G}(a)|}{|z-a|^\nu},$$

d'où $|\tilde{F}(z)| \xrightarrow[\substack{\neq \\ z \to a,\ |z-a| < r}]{} +\infty$, ce qui entraîne :

(3) $$|\tilde{F}(z)| \xrightarrow[z \to a,\ |z| < \lambda]{} +\infty .$$

D'un autre côté, la fonction $\tilde{S}_F$ est définie et continue dans le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_{cv}(S_F)\}$, et en particulier continue au point a, d'où l'on déduit que $\lim\limits_{z \to a,\ |z| < R_{cv}(S_F)} \tilde{S}_F(z)$ existe dans $\mathbb{C}\,(= \tilde{S}_F(a))$, d'où *a fortiori*

(4) $$\tilde{S}_F(z) \xrightarrow[z \to a,\ |z| < \lambda]{} \tilde{S}_F(a) .$$

Puisque pour $|z| < \lambda$, $\tilde{S}_F(z) = \tilde{F}(z)$, il est clair que (3) et (4) sont contradictoires, ce qui prouve que l'hypothèse $R_{cv}(S_F) > \lambda$ ne tient pas. Finalement $R_{cv}(S_F) = \lambda$. ■

Exemple 2 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$F = \frac{1}{1 - 2X\cos\theta + X^2} \quad \text{et} \quad G = \frac{1 - X\cos\theta}{1 - 2X\cos\theta + X^2} .$$

En convenant de poser $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = (-1)^{nk}(n+1)$ pour $\theta = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a, dans $\mathbb{C}[[X]]$, par décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$S_F = \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} X^n , \quad S_G = \sum_{n \geq 0} (\cos n\theta) X^n \quad (\text{même si } \theta = k\pi) .$$

---

[1] On peut aussi utiliser l'exemple 3 du § IX.5, tome 2.

Les pôles de F sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (un pôle double si $\theta = k\pi$), ceux de G aussi (sauf si $\theta = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$, cas pour lequel G a un seul pôle, $(-1)^k$, et il est simple). Le théorème II.3.3 montre alors que $R_{\text{cv}}(S_F) = R_{\text{cv}}(S_G) = 1$ et prouve les identités :

$(\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{C})$

$$|z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} z^n ,$$

et :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| < 1 \Rightarrow \frac{1 - z\cos\theta}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\theta) z^n ,$$

formules dont la vérification est d'ailleurs immédiate en effectuant le produit de deux séries entières.

Application à certaines équations différentielles

Considérons deux entiers p et $q \geqslant 1$, des séries formelles *convergentes* $\Phi_1, \dots, \Phi_p ((\forall k \in [\![1, p]\!])\ \Phi_k \in \mathbb{C}\{X\})$, et un *polynôme* $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_p, Z_0, Z_1, \dots, Z_q]$. Posons $\varphi_k = \tilde{\Phi}_k$ et $\psi_k = \check{\Phi}_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$ et intéressons-nous à *l'équation différentielle*

$$(\check{\mathscr{E}}) \qquad F(\psi_1, \dots, \psi_p, g, g', \dots, g^{(q)}) = 0 .$$

Les fonctions ψ_k sont définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. La résolution de $(\check{\mathscr{E}})$ consiste en la recherche des fonctions $g : I \longrightarrow \mathbb{C}$, q fois dérivables, définies sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$ où toutes les ψ_k sont définies, et vérifiant :

$$(\forall t \in I) \quad F(\psi_1(t), \dots, \psi_p(t), g(t), g'(t), \dots, g^{(q)}(t)) = 0 .$$

Sans prétendre ici résoudre complètement $(\check{\mathscr{E}})$ nous allons voir qu'il est possible d'en découvrir certaines solutions particulières, et que cela peut avoir d'intéressantes applications.

PROPOSITION II.3.2

Avec les notations ci-dessus, soit $S \in \mathbb{C}\{X\}$ et $f = \tilde{S}$.
(I) *Supposons trouvé un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ admettant* 0 *pour point d'accumulation, sur lequel toutes les φ_k et f soient définies, et tel que :*

$$(\tilde{\mathscr{E}}) \ (\forall z \in A) \ F(\varphi_1(z), \dots, \varphi_p(z), f(z), f'(z), \dots, f^{(q)}(z)) = 0.$$

Alors la relation $(\mathscr{E})$ suivante est vraie dans $\mathbb{C}[[X]]$:

$$(\mathscr{E}) \qquad F(\Phi_1, \dots, \Phi_p, S, S', \dots, S^{(q)}) = 0 .$$

(II) *Réciproquement, si* $(\mathscr{E})$ *est vraie avec* $S \in \mathbb{C}\{X\}$, *alors* $\tilde{S}$ *est solution de* $(\tilde{\mathscr{E}})$ *sur un voisinage de* 0.

La relation $(\mathscr{E})$ sera appelée l'*équation différentielle formelle* associée à $(\check{\mathscr{E}})$ dans $\mathbb{C}[[X]]$.

Démonstration :

Notons $H = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_p, S, S', \ldots, S^{(q)})$. En vertu de la Proposition II.2.1 et du théorème II.3.2, on a :

$$(5) \quad (\forall z \in A) \quad F(\varphi_1(z), \ldots, \varphi_p(z), f(z), f'(z), \ldots, f^{(q)}(z)) = \tilde{H}(z).$$

Si $H = 0$, il s'ensuit $\tilde{H} = 0$, d'où $(\tilde{\mathscr{E}})$ pour tout z assez voisin de 0. Et si (5) est vérifiée, il résulte du corollaire 3 du théorème II.2.1 que $H = 0$, ce qui est justement la relation $(\mathscr{E})$. ■

• *Application à la détermination de certaines solutions de* $(\check{\mathscr{E}})$

L'équation formelle $(\mathscr{E})$ peut être résolue *dans* $\mathbb{C}\{X\}$. Pour cela, en pratique, on la résout d'abord dans $\mathbb{C}[[X]]$, puis **on calcule le rayon de convergence** de chaque solution, en ne conservant bien sûr que celles de rayon > 0. Soit alors S une solution de $(\mathscr{E})$ dans $\mathbb{C}\{X\}$ et $f = \tilde{S}$ la fonction associée. Notons r un réel > 0 tel que $r \leqslant \mathrm{Min}\ (R_{\mathrm{cv}}(S), \{R_{\mathrm{cv}}(\Phi_k)\}_{1 \leqslant k \leqslant p})$. Puisque $H = 0$ (proposition II.3.2), on a : $\tilde{H}(z) = 0$ pour tout $z \in\ ]-r, r[$. En vertu de (5), cela entraîne que *f est solution de* $(\check{\mathscr{E}})$ *sur* $]-r, r[$. Réciproquement, soit *J un intervalle de* $\mathbb{R}$ *admettant* 0 *pour point d'accumulation* sur lequel toutes les ψ_k sont définies, et soit $f : J \longrightarrow \mathbb{C}$ une solution de $(\check{\mathscr{E}})$ de la forme $f = \check{S}|_J$, avec $S \in \mathbb{C}\{X\}$; il est clair que f est obtenue par restriction à J d'une solution du type ci-dessus.

Autrement dit, **la résolution de** $(\mathscr{E})$ **fournit *toutes* les solutions *f* de** $(\check{\mathscr{E}})$ **du type** $f = \check{S}|_J$, avec $S \in \mathbb{C}\{X\}$ et J intervalle de $\mathbb{R}$ admettant 0 pour point d'accumulation.

• *Application à la détermination de certaines séries formelles*

Il est possible qu'on connaisse une solution f de $(\mathscr{E})$, définie sur un intervalle J admettant 0 pour point d'accumulation, et dont on sait qu'elle est du type $f = \check{S}|_J$ (où $S \in \mathbb{C}\{X\}$) sans toutefois connaître explicitement S. La proposition II.3.2 offre alors justement *une méthode de calcul explicite de* S *: on résout* $(\mathscr{E})$ *dans* $\mathbb{C}[[X]]$, *puis on recherche* S *parmi les solutions trouvées* (généralement en examinant $\lim\limits_{t \longrightarrow 0,\, t \in J} f^{(k)}(t)$ pour $0 \leqslant k \leqslant q-1$).

Nous allons illustrer les principes ci-dessus par des exemples pour en montrer l'efficacité dans les cas où l'équation formelle $(\mathscr{E})$ se résout facilement.

Exemple 2 : *En admettant que* $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (\text{Arc} \sin t)^2$ *est de la forme* $\check{S}|_I$ *(avec* $I =]-1, 1[$*, et* $R_{cv}(S) \geqslant 1$*), déterminer* S*.*

Solution : Le fait que f est du type indiqué sera pleinement justifié au § II.4. Admettons le provisionnement. En revanche l'unicité de S est une conséquence de la proposition II.2.1.

On sait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I,.et en la dérivant deux fois, on constate :

$$(\check{\mathscr{E}}) \qquad (\forall t \in I) \quad (1-t^2)\, f''(t) - t f'(t) = 2\,.$$

Procédons d'abord à la *résolution formelle de* $(\check{\mathscr{E}})$ *dans* $\mathbb{C}[[X]]$: c'est-à-dire cherchons les $\mathscr{S} = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ telles que :

$$(\mathscr{E}) \qquad (1-X^2)\,\mathscr{S}'' - X\mathscr{S}' = 2\,.$$

Le calcul de $\mathscr{S}' = \sum\limits_{n \geqslant 0} (n+1)\, a_{n+1} X^n$, $\mathscr{S}'' = \sum\limits_{n \geqslant 0} (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} X^n$ et des coefficients de chaque X^n au premier membre de $(\mathscr{E})$ montre que $(\mathscr{E})$ équivaut au système d'équations numériques (en nombre infini) suivant, aux inconnues (a_n) :

$$(\mathscr{E}_1) \qquad a_2 = 1\,; \quad (\forall n \geqslant 1) \quad (n+2)\,(n+1)\, a_{n+2} = n^2 a_n\,.$$

(Ecrire $(\mathscr{E}_1)$ pour traduire $(\mathscr{E})$, c'est par définition *procéder par identification*). La résolution de $(\mathscr{E}_1)$ est immédiate, et fournit l'ensemble suivant de solutions : $a_0 = \lambda$ (λ quelconque, $\lambda \in \mathbb{C}$) ; $a_1 = \mu$ (μ quelconque, $\mu \in \mathbb{C}$) ,

$$a_2 = 1\,; \quad a_{2n+1} = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{(2n+1)!}\,\mu \qquad (n \geqslant 1)\,;$$

$$a_{2n} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{(2n)!} \qquad (n \geqslant 2)\,.$$

Autrement dit, en posant $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $\alpha_{2n+1} = \dfrac{1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{(2n+1)!}$ pour $n \geqslant 1$; $\alpha_{2n} = \dfrac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{(2n)!} = \dfrac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{(2n)!}$ pour $n \geqslant 2$, l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ s'écrit

$$\left\{\lambda + \mu\left(\sum_{n \geqslant 0} \alpha_{2n+1} X^{2n+1}\right) + T\right\}_{(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2}, \quad \text{avec} \quad T = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_{2n} X^{2n}\,.$$

Procédons ensuite à la *détermination de* S. Puisque $f(0) = 0 = f'(0)$, S doit vérifier : val $(S) \geqslant 2$. Or le résultat ci-dessus montre que la seule solution $\mathscr{S}$ de $(\mathscr{E})$ telle que val $(\mathscr{S}) \geqslant 2$ est T. Comme S est n l'une des $\mathscr{S}$ (proposition II.3.2), c'est que $S = T$, ce qui entraîne (cf. le début) que $R_{cv}(T) \geqslant 1$.

Il est d'ailleurs facile de vérifier (règle de d'Alembert) que $R_{cv}(T) = 1$.

On peut maintenant *conclure :* $f = \check{T}$, autrement dit :

$$(\forall t \in]-1, 1[) \quad (\operatorname{Arc} \sin t)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} t^{2n}.$$

(Bien sûr, en pratique, la rédaction précédente doit être abrégée, on peut tenir compte plus tôt de la valuation et de la parité de S, mais *la résolution formelle de* $(\mathscr{E})$ *ne suffit pas.*)

Exemple 3 : *Soit* $I =]-1, 1[$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$; *on note* f_λ *la fonction* $I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \cos\ (\lambda \operatorname{Arc} \cos t)$.

a) *En admettant que* $f_\lambda = \check{S}|_I$ *avec* $R_{cv}(S) \geqslant 1$, *trouver* S.

b) *En utilisant la théorie des équations différentielles qui est exposée dans un chapitre ultérieur, prouver que* f_λ *est bien de la forme indiquée* $\check{S}|_I$.

Solution : a) En prenant $x = \operatorname{Arc} \cos t$ et en effectuant deux dérivations, on trouve : $x'(t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$, $f'_\lambda(t) = -x'(t).\lambda \sin \lambda x$,

$$f''_\lambda(t) = -\lambda^2 x'^2(t).\cos \lambda x - \lambda x''(t) \sin \lambda t\ , \quad \text{avec} \quad x''(t) = \frac{t}{1-t^2} x'(t)\ ,$$

d'où l'équation différentielle suivante vérifiée par f_λ :

$$(\check{\mathrm{E}}) \qquad (\forall t \in I) \quad (1-t^2)\, y''(t) - t y'(t) + \lambda^2 y(t) = 0\ .$$

Résolution formelle de $(\check{\mathrm{E}})$ *dans* $\mathbb{C}[[X]]$: on veut résoudre

$$(\mathrm{E}) \quad (1-X^2)\, \mathscr{S}''(X) - X\mathscr{S}'(X) + \lambda^2 \mathscr{S}(X) = 0\ , \quad \mathscr{S} \in \mathbb{C}[[X]]\ .$$

Posant $\mathscr{S}(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, *par identification,* on voit que $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (\mathrm{E}_1)$:

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \begin{cases} (n+1)(n+2)\, a_{n+2} = (n^2 - \lambda^2)\, a_n \text{ pour } n \geqslant 0 \\ a_0 \text{ et } a_1 \text{ arbitraires} \end{cases}$$

dont la résolution immédiate fournit l'ensemble des solutions de (E) : c'est $\{\mathscr{S}_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2}$, avec :

$$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2) \quad \mathscr{S}_{\alpha,\beta} = \alpha U + \beta V\ ;$$

$$U = \sum_{n \geqslant 0} u_n X^{2n}\ ; \quad V = \sum_{n \geqslant 0} v_n X^{2n+1}\ ; \quad u_0 = 1\ ; \quad v_0 = 1\ ;$$

$$(\forall n \geqslant 1) \quad u_n = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} [(2k)^2 - \lambda^2]\,;$$

$$(\forall n \geqslant 1) \quad v_n = \frac{1}{(2n+1)!} \prod_{k=1}^{n} [(2k-1)^2 - \lambda^2]\,.$$

Calcul de S : On constate facilement que $R_{cv}(U) = 1$ si $\lambda \notin 2\mathbb{Z}^*$, et $R_{cv}(U) = +\infty$ si $\lambda \in 2\mathbb{Z}^*$ car dans ce cas $U \in \mathbb{C}[X]$. De même $R_{cv}(V) = 1$ si $\lambda + 1 \notin 2\mathbb{Z}$, et $R_{cv}(V) = +\infty$ si $\lambda + 1 \in 2\mathbb{Z}$ car dans ce cas $V \in \mathbb{C}[X]$. Dans tous les cas $R_{cv}(U) \geqslant 1$ et $R_{cv}(V) \geqslant 1$, d'où $(\forall(\alpha, \beta))$ $R_{cv}(\mathscr{S}_{\alpha,\beta}) \geqslant 1$. Donc $\check{\mathscr{S}}_{\alpha,\beta}|_I$ *est définie et c'est une solution sur I de l'équation* $(\check{\mathrm{E}})$.

Cela dit, $f_\lambda(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)$ et $f'_\lambda(0) = \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)$, donc $\mathrm{val}\left(S - \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - X\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\right) \geqslant 2$. Or la seule $\mathscr{S}_{\alpha,\beta}$ telle que $\mathrm{val}\left(\mathscr{S}_{\alpha,\beta} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) - X\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\right) \geqslant 2$ est $\mathscr{S}_{\cos(\pi\lambda/2),\, \lambda \sin(\pi\lambda/2)}$, et puisque f_λ vérifie $(\check{\mathrm{E}})$, S vérifie (E) (cf. proposition II.3.2), d'où :

$$S = \mathscr{S}_{\cos(\pi\lambda/2),\, \lambda\sin(\pi\lambda/2)} = \left(\cos\frac{\pi\lambda}{2}\right) U + \left(\lambda \sin\frac{\pi\lambda}{2}\right) V\,.$$

b) Posons $\varphi = \check{U}$, $\psi = \check{V}$. Ces fonctions φ et ψ sont linéairement indépendantes (φ est paire, ψ est impaire). Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha\varphi + \beta\psi$ est solution de $(\check{\mathrm{E}})$ et l'ensemble de ces fonctions constitue un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2. Or l'équation $(\check{\mathrm{E}})$ est linéaire, du second ordre en y, homogène, à coefficients continus et sans point singulier sur I. Dans ces conditions l'ensemble de ses solutions forme un sous-$\mathbb{C}$-ev de dimension 2 de $\mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ (cf. Chapitre IX) ; contenant Vect (φ, ψ), il lui est donc égal. En particulier, f_λ, qui est solution de $(\check{\mathrm{E}})$, est donc élément de Vect (φ, ψ), ce qui justifie bien que f_λ est de la forme indiquée $\check{S}|_I$, avec $S \in \mathbb{C}\{X\}$, S convenable.

Exercice 1 : Soit $B \in \mathbb{C}[[X]]$ de la forme $B = 1 + \sum_{n \geqslant 1} b_n X^n$ et de rayon de convergence $R > 0$.

a) Chercher les séries formelles $S \in \mathbb{C}[[X]]$ qui vérifient l'équation $XS' - B(X)S = 0$.

b) Montrer que les séries S trouvées en *a*) ont un rayon de convergence > 0.

Exercice 2 : *a*) Soit $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$, et pour $n \geqslant 1$: $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(a+k)(b+k)}{c+k}$. On note $S(a, b, c\,; X)$ la série formelle $\sum \frac{u_n}{n!} X^n$. Quel est son rayon de convergence ?

b) Montrer que $S(a, b, c\,; X)$ vérifie dans $\mathbb{C}[[X]]$ l'équation différentielle formelle : $X(1-X)\,S'' + (c - (a+b+1)X)\,S' - abS = 0$.

c) Montrer que $S\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\,; X\right)$ et $S\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\,; X(1-X)\right)$ vérifient la même équation différentielle. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3 : Trouver les séries formelles $S \in \mathbb{C}[[X]]$ telles que :

$$X^2 S'' + (3X - 1) S' + S = \frac{1}{(1-X)^2}.$$

Pour chacune d'elles, calculer le rayon de convergence.

Exercice 4 : On donne $A = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ et $B = \sum b_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ et on suppose que leurs rayons de convergence sont ≥ 1. On suppose de plus qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| < 1 \Rightarrow |\tilde{A}(z)| \leq M \quad \text{et} \quad |\tilde{B}(z)| \leq M.$$

Existe-t-il des séries formelles convergentes S telles que :

(E) $$XS'' - XA(X)S' - B(X)S = 0\ ?$$

Exercice 5 : Pour chacune des équations différentielles suivantes, chercher les solutions formelles $S \in \mathbb{C}[[X]]$ et préciser celles dont le rayon de convergence est > 0 :

a) $(x^2 + x) y'' + y' + y = 0$ *b)* $x^2 y''' + 4(x-1) y'' - y = 3x + 2$

b) $(1 + x) y'' + y' = \dfrac{2}{1+x}$ *d)* $xy'' - (x + \lambda) y' + \lambda y = 0$ $(\lambda \in \mathbb{C}^*)$.

Exercice 6 : Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ainsi définie : $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, et, pour $n \geq 3$:

$$2\, n a_n = 2\, n a_{n-1} - a_{n-3}.$$

a) Vérifier (en étudiant $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$) que $R_{cv}(S) = 1$.

b) Trouver un polynôme P tel que $(1 - X) S' - P(X) S = 0$. En déduire S.

Exercice 7 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle :

(F) $$x^2(x^2 + 4\,\mathrm{i}x - 4) y'' + (\lambda x^2 + 2\,\mathrm{i}\lambda x - 1) y = 0,$$

étudiée pour $x \in\,]0, +\infty[$.

a) Soit $Y = x^{-1/2} y$. Former l'équation différentielle (E), condition nécessaire et suffisante vérifiée par Y pour que y vérifie (F).

b) Trouver les $S \in \mathbb{C}[[X]]$ qui vérifient formellement (E), et montrer que leur rayon de convergence est > 0. En déduire des solutions particulières à (F).

Exercice 8 : *a)* Soit $S = \sum \dfrac{a_n}{n!} X^n \in \mathbb{C}\{X\}$. On suppose trouvé $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R_{cv}(S)$ et que la série $\sum_p \tilde{S}^{(p)}$ converge. Montrer que $R_{cv}(S) = +\infty$. Montrer que la série de fonctions de z : $\sum_n \tilde{S}^{(n)}(z)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

b) S ayant la même signification, on suppose trouvé $z_0 \in \mathbb{C}$ $(|z_0| < R_{cv}(S))$ tel que la suite $\left(|\tilde{S}^{(p)}(z_0)|^{1/p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ soit *bornée.* Montrer que $R_{cv}(S) = +\infty$. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C})$, la suite $|\tilde{S}^{(p)}(z)|^{1/p}$ est bornée.

§ II.4 *FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE*

Nous avons vu dans le tome 2 (cf. § VI.5) que si I est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0 (soit à l'intérieur de I, soit à une extré fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$, on peut associer sa *série formelle de Taylor-Mac Laurin :* $T_f = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, X^n \in \mathbb{C}[[X]]$.

Notons $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$) le $\mathbb{C}$-ev (resp. le $\mathbb{R}$-ev) des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de I dans $\mathbb{C}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) ; $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. L'application $f \mapsto T_f$ est $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ et $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$; si $f = u + \mathrm{i}v$ avec u et v dans $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors $T_f = T_u + \mathrm{i}T_v$, ce qui permet de n'étudier que les T_f pour *f à valeurs réelles.* La définition rappelée ci-dessus montre que, pour $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, on a $T_{f'} = (T_f)'$ et l'on sait par ailleurs (cf. tome 2, théorème VI.5.2) que, pour $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, $g \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, on a : $T_{fg} = T_f . T_g$, que si $f(0) \neq 0$: $T_{1/f} = \frac{1}{T_f}$. On sait aussi (*ibidem*) que si I et J sont des intervalles non triviaux contenant 0, si $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(I) \subset J$ et si $g \in \mathscr{C}^\infty(J, \mathbb{C})$, alors $T_{g \circ f} = T_g \circ T_f$. Rappelons enfin (cf. tome 2, théorème VI.5.3) que si $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, *si* $f(0) = 0$, en notant $\frac{f(x)}{x}$ la fonction $0 \mapsto f'(0)$, $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ pour $t \in I \setminus \{0\}$, on a : $T_{\frac{f(x)}{x}} = \frac{T_f(X)}{X}$, ce qui a bien un sens car val $(T_f) \geqslant 1$. Deux questions naturelles viennent immédiatement à l'esprit : *si* $f \in \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{C})$, *quel est le rayon de convergence de sa série de Mac-Laurin associée* T_f ? En supposant que ce rayon de convergence est > 0, *quel rapport précis existe-t-il entre les fonctions* f *et* $\check{T}_f$?

Notion de fonction développable en série entière

DÉFINITION II.4.1

> (I) *Soit A une partie de $\mathbb{C}$ admettant* 0 *pour point d'accumulation, et* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. *On dit que f est* **développable en série entière** *(sous-entendu : au point* 0*), et on écrit, en abrégé, que f est* DSE_0, *ssi il existe* $S \in \mathbb{C}\{X\}$ *telle qu'on ait* $\tilde{S}(z) = f(z)$ *pour tout z* **assez voisin de 0** *et appartenant à A.*
>
> (II) *Soit B une partie de $\mathbb{C}$ admettant $a \in \mathbb{C}$ pour point d'accumulation et* $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$. *On dit que g est* **développable en série entière au point a** *(en abrégé :* DSE_a*) ssi la fonction* $g_a : z \mapsto g(a+z)$ $(z \in B \setminus \{a\})$ *est* DSE_0.

La deuxième partie de la définition permet de ramener l'étude des fonctions DSE_a à celle des fonctions DSE_0. Nous ne nous occuperons que de ces dernières dans presque tout ce §.

Une chose est sûre en tout cas : si f est DSE_0, il y a *une et une seule* $S \in \mathbb{C}\{X\}$ telle que $\tilde{S}(z) = f(z)$ pour $z \in A$ et z assez vo corollaire 3 du théorème II.2.1). Notons-la S_f. Dans ces conditions, nous appellerons **ensemble de validité (du développement de f en 0)** l'ensemble $\{z \in A \cap \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S_f) | \tilde{S}(z) = f(z)\}$. Cet ensemble contient donc un ensemble $V \cap A$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$.

Si f est DSE_a, on définit de même l'**ensemble de validité du DSE_a de f.** Nous conservons ci-dessous toutes les notations qui viennent d'être introduites pour énoncer quelques propriétés élémentaires qui se déduisent immédiatement des propositions II.1.4 et 5, des théorèmes II.1.3 et 4, des théorèmes II.2.1 (et de son corollaire 1) et II.3.2.

• DSE 1) Si f est DSE_0, alors si $0 \in A$, elle est continue au point 0, ou bien, si $0 \notin A$, *elle se prolonge par continuité au point* 0 ; dans tous les cas, posant $S_f = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n$, on a : $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = a_0$; et lorsque $0 \notin A$, notant $\tilde{f}$ le prolongement par continuité en 0 de f à $A \cup \{0\}$, on a : $S_{\tilde{f}} = S_f$.

• DSE 2) Si $f_1 : A \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : A \longrightarrow \mathbb{C}$ sont DSE_0, alors pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ *est* DSE_0, *et* $f_1 f_2$ *est* DSE_0 ; *on a :* $S_{\lambda f_1 + \mu f_2} = \lambda S_{f_1} + \mu S_{f_2}$; $S_{f_1 f_2} = S_{f_1} \times S_{f_2}$.

• DSE 3) Supposons que $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ soit DSE_0 et que $\lim\limits_{z \to 0} f(z) \neq 0$ (*i.e.*, que val $(S_f) = 0$). Notons $1/f$ la fonction, définie *au voisinage de* 0 *dans* A, envoyant z sur $1/f(z)$. *Alors* $1/f$ *est* DSE_0 et $S_{1/f} = 1/S_f$.

• DSE 4) Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE_0 *et telle que* $f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0$, en notant h la fonction $A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)/z$, *alors* h *est* DSE_0 *et* $S_h(X) = \dfrac{S_f(X)}{X}$.

• DSE 5) Supposons que A soit un *intervalle* non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0 ; si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE_0, *alors il existe un réel* $r > 0$ *tel que* $f|_{A \cap [-r, r]}$ *soit de classe* $\mathscr{C}^\infty$, *et l'on a :* $S_f = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) X^n$, autrement dit : $S_f = T_f$ (T_f désignant la série formelle de Taylor de f en 0).

De même, supposons que A soit un *voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}$; si f est DSE_0, alors il existe r réel > 0 tel que $\mathbf{B}(0, r) \subset A$ et que $f|_{\mathbf{B}(0,r)}$ soit indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable, et l'on a : $S_f = \sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) X^n$.

• DSE 6) Supposons que A soit un *intervalle* non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0. *Si* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *est* DSE_0 *et dérivable, alors* f' *est* DSE_0 *et* $S_{f'} = (S_f)'$. De plus, pour tout intervalle $I \subset A$ tel que $f(x) = \tilde{S}_f(x)$ pour tout $x \in I$, on a : $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \tilde{S}_{f'}(x)$. (Rappelons que par convention, $\tilde{S}_f$ n'a été définie que sur le *disque ouvert* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S_f)$, et que donc l'hypothèse implique $I \subset \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S_f)$.) *Si* $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *est* DSE_0 *et continue, alor*

$F : A \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* DSE_0, *et posant* $S_f = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, *on a :* $S_F = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} X^{n+1}$. De plus, pour tout intervalle $I \subset A$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \tilde{S}_f(x)$ pour tout $x \in I$, on a :

$$(\forall x \in I) \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(Là encore les hypothèses impliquent que I est contenu dans le *disque ouvert* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(f)$.)

Remarque 1 : Le lecteur avisé pourra déduire directement les propriétés (DSE2) et (DSE3) du théorème VI.5.2 du tome 2, et constater que la propriété (DSE4) est une autre expression du *théorème de division.*

Remarque 2 : Dans (DSE2), l'ensemble de validité du développement de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ (resp. de $f_1 f_2$) *contient l'intersection de ceux de* f_1 *et* f_2 (cf. proposition II.2.1).

Dans (DSE4), l'ensemble de validité de h est évidemment *égal* à celui de f (cf. tome 2, théorème VI.3.4 *dans le cas particulier* des fonctions DSE_0).

Fonctions usuelles DSE_0

Commençons par les fonctions rationnelles. Le théorème II.3.3 donne :

PROPOSITION II.4.1

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, *n'ayant pas* 0 *pour pôle. La fonction rationnelle* $f = \tilde{F} : \mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est* DSE_0, *et* $S_f = S_F$ *(série formelle associée à* F *en* 0*), l'ensemble de validité étant le disque de convergence de* S_F, *c'est-à-dire* $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S_F) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \mathrm{Min}\,(|a|,\ a \text{ pôle de } F)\}$.

Envisageons ensuite les fonctions qui ont été *définies* comme sommes de séries entières : c'est le cas de la fonction exponentielle, somme de la série exponentielle $\sum \frac{1}{n!} X^n$ qui converge sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par définition exp est DSE_0, l'ensemble de validité du DSE_0 de exp étant $\mathbb{C}$. On en déduit immédiatement (par DSE2) que les fonctions ch, sh, cos, sin sont DSE_0, l'ensemble de validité étant $\mathbb{C}$, c'est-à-dire :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$
$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

formules déjà rencontrées au § V.3 du tome 2. Pour poursuivre nous avons besoin des zéros des fonctions cos, sin, ch, sh dans le champ complexe.

PROPOSITION II.4.2

L'ensemble des zéros de cos (resp. sin, ch, sh) *dans* $\mathbb{C}$ *est* $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ (*resp.* $\pi\mathbb{Z}$, $\frac{i\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}$, $i\pi\mathbb{Z}$).

Démonstration :

Il suffit de le prouver pour sin, à cause des relations $\cos z = \sin\ (z + \pi/2)$, $\operatorname{ch}\ z = \cos iz$, $\operatorname{sh}\ z = -i \sin iz$, valables pour $z \in \mathbb{C}$.

On sait déjà que $\sin k\pi = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin z = 0$; alors $e^{iz} = e^{-iz}$, d'où $e^{2iz} = 1$. Or on sait (cf. tome 2, théorème V.4.1) que l'homomorphisme exp : $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est surjectif et a pour noyau $2i\pi\mathbb{Z}$, d'où ici $z \in \pi\mathbb{Z}$. ■

On en déduit que les fonctions tg (resp. th) sont définies dans les ouverts $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$ (resp. $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{i\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}\right\}$). *Elles sont* DSE_0 (par les propriétés (DSE2) et (DSE3)). Pour z assez voisin de 0, on a donc :

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} z^{2n+1}, \quad \operatorname{th} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_{2n+1} z^{2n+1},$$

avec $$A_1 = 1, \quad A_3 = \frac{1}{3}, \quad A_5 = \frac{2}{15}, \quad A_7 = \frac{17}{315}, \dots$$ (1).

Quant à la fonction cotg, elle ne peut évidemment être DSE_0, mais la fonction $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $0 \mapsto 1$, $z \mapsto z \operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z/z}$ pour $z \neq 0$, elle, est bien DSE_0 (par les propriétés (DSE1, 2 et 3)). En utilisant (DSE4), cela signifie que $g : \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ (2) *se prolonge par continuité en*

---

(1) Les premiers coefficients ont été calculés par division (cf. tome 1, page 327). L'expression générale des A_n résulte de la formule (9) du § XII.5 du tome 2.

(2) Le DSE_0 exact de $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$ s'obtient rapidement à partir de son développement eulérien (cf. tome 2, § XII.5).

0 *en une fonction* DSE_0. Il en va de même de la fonction $h : \mathbb{C}\backslash i\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \coth\ z - \frac{1}{z}$. De manière générale, quand une fonction se présente comme la somme d'une série entière $S \in \mathbb{C}\{X\}$, il est évident que la fonction $\tilde{S}: \mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S) \longrightarrow \mathbb{C}$ est DSE_0, avec $S_{\tilde{S}} = S$, l'ensemble de validité étant $\mathscr{D}_{\mathrm{cv}}(S)$.

Revenons maintenant à des fonctions usuelles de variable réelle. La fonction $]-1, +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Log}\ (1+x)$ est dérivable, de dérivée $\frac{1}{1+x}$. Par intégration de $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, développement valable pour $|x| < 1$, on déduit (par DSE6) : *La fonction* $]-1, +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Log}\ (1+x)$ *est* DSE_0, et

$$(1) \qquad (\forall x \in\ ]-1, 1[)\quad \mathrm{Log}\ (1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

l'ensemble de validité du développement étant exactement $]-1, 1[$ puisque le rayon de convergence de $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$ est $R = 1$.

Il est plus facile de retenir par cœur (1) sous la forme suivante :

$$(2) \qquad (\forall x \in\ ]-1, 1[)\quad \boxed{\mathrm{Log}\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}\ .$$

Par soustraction on pourrait en déduire le développement de la fonction $]-1, 1[\ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Arg\ th}\ x = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\ \frac{1+x}{1-x}$, mais il est plus commode d'utiliser (DSE6) et de procéder par intégration, de même que pour la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Arg\ tg}\, x$ qui a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. On obtient ainsi :

$$(3) \qquad \boxed{\mathrm{Arg\ th}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad \mathrm{Arc\ tg}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

l'ensemble de validité du développement étant à chaque fois $]-1, 1[$ car le rayon de convergence des séries formelles $\sum \frac{1}{2n+1} X^{2n+1}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}$ vaut 1.

Remarque 3 : En réalité l'égalité figurant dans (1) reste vraie pour $x = 1$, celle de (2) pour $x = -1$, et la 2ᵉ égalité de (3) pour $x = 1$ et $x = -1$. Les formules $\mathrm{Log}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$ et $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ étaient connues au XVIIᵉ siècle dès les premiers pas du Calcul Intégral et se démontrent très élémentairement (cf. tome 2, § VII.6, exercice 18 par exemple).

Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$

La fonction puissance $\varphi_\alpha :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t^\alpha$ a été définie au tome 2, d'abord pour α réel, puis pour $\alpha \in \mathbb{C}$ (cf. la fin du § V.3), par $\varphi_\alpha(t) = \exp(\alpha \operatorname{Log} t)$. On sait qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sa dérivée n-ième étant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,\varphi_{\alpha-n}$. On sait aussi que la notation t^α est justifiée par le fait que si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\varphi_\alpha(t)$ n'est autre que la puissance α-ième, au sens de l'algèbre, de $t > 0$ dans le corps $\mathbb{R}$. Mais cette fonction, hormis le cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$, ne peut pas être DSE_0 car la fonction prolongée de φ_α par continuité en 0 (à supposer qu'elle existe) ne serait pas de classe $\mathscr{C}^\infty$ (dès que $n > \operatorname{Re}(\alpha)$, $\varphi_\alpha^{(n)}(0)$ n'existe pas). On se tourne alors vers la fonction $f_\alpha : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, et $I =]-1, +\infty[$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, $I = \mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$. Cette fonction f_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_\alpha^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,f_{\alpha-n}\,.$$

Notons S_α la série formelle de Taylor de f_α : $S_\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} X^n$. On constate que $R_{\mathrm{cv}}(S_\alpha) = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $R_{\mathrm{cv}}(S_\alpha) = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (dans ce cas, S_α est un polynôme).

Théorème II.4.1

Avec les notations qui précèdent, la fonction f_α est DSE_0. *L'ensemble de validité de son développement en* 0 *est* $]-1, 1[$ *si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, *et c'est* $\mathbb{R}$ *si* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Dans tous les cas :*

$$(\forall x \in]-1,1[) \quad \boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n}\,.$$

C'est la *formule du binôme généralisé* ($x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$).

Démonstration :

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, f_α n'est autre que la fonction polynomiale $\tilde{S}_\alpha$ associée à S et il n'y a rien à prouver. Supposons donc maintenant que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Sur $]-1,1[$, la fonction f_α vérifie l'équation différentielle à condition initiale suivante :

$$(4) \qquad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad (\forall x \in]-1,1[) \quad (1+x)\,y'(x) - \alpha y(x) = 0\,.$$

a) f_α *est l'unique solution de* (4) *sur* $]-1,1[$. En effet si g est solution de (4), en posant $z = g \cdot f_{-\alpha}$, on voit que z est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée

$$z' = g' \cdot f_{-\alpha} + g \cdot (f_{-\alpha})' = g'\,f_{-\alpha} - \alpha g f_{-\alpha-1} = f_{-\alpha-1}[f$$

puisque g vérifie (4). Donc z est constante sur $]-1,1[$; et comme $z'(0) = g(0) \quad f_{-\alpha}(0)$, la constante vaut 1, d'où $f_\alpha = (g f_{-\alpha})\, f_\alpha = g(f_{-\alpha}\, f_\alpha) = g \,.\, 1 = g$.

b) L'équation différentielle formelle associée à (4) dans $\mathbb{C}[[X]]$ est :

(5) $$(1 + X)\, S' - \alpha S = 0 \quad \text{avec} \quad \operatorname{val}\,(S - 1) \geqslant 1 \,.$$

En posant $S = \sum a_n X^n$, on obtient par identification le système équivalent :

(6) $$(\forall n \geqslant 1) \quad a_n = \frac{1}{n}\,(\alpha - n + 1)\, \alpha_{n-1} \quad \text{et} \quad a_0 = 1 \,.$$

Cela prouve que, puisque (6) a pour solution unique $S_\alpha = \sum\limits_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} X^n$ dont le rayon de convergence est 1, la fonction $g = \check{S}_\alpha$ est définie sur $]-1,1[$, de classe $\mathscr{C}^\infty$, et du fait que S_α vérifie (5) on déduit que g vérifie (4) (cf. preuve de la proposition II.3.2). Or l'unique solution de (4) est f_α (d'après *a*)), donc $g = f_\alpha$. ■

En donnant à α des valeurs particulières, on obtient des formules remarquables, par exemple :

(7) $$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1 - x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n}\, x^n$$

(8) $$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1 + x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n}\, x^n$$

(9) $$\forall x \in\,]-1,1[\quad (1 - x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-3)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \ldots \,.\, 2n}\, x^n$$

On en déduit facilement par intégration $\forall t \in\,]-1,1[$:

(10) $$\boxed{\operatorname{Arc\,sin} t = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n}\, t^{2n+1}}$$

(11) $$\boxed{\operatorname{Arg\,sh} t = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, \frac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n}\, t^{2n+1}}$$

Remarque 4 : Nous laissons au lecteur à titre d'exercice le soin de démontrer que les égalités des formules (8), (9), (10) et (11) restent vraies pour $x = 1$, ce qui lui permettra d'obtenir en particulier (en posant $a_n = \dfrac{1}{2n+1} \quad \dfrac{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n}$) les *sommes des séries* $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n a_n$.

Remarque 5 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le développement en série entière de la fonction $]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^n}$ s'obtient indifféremment par dérivation (à l'ordre $n-1$) de celui de $\dfrac{1}{1+x}$, ou par utilisation de la formule du binôme généralisée avec $\alpha = -n$.

Caractérisation des fonctions DSE_0 parmi les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous appelons **reste d'ordre *n* (en 0) de *f*** la fonction $R_{n,f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$. La propriété (DSE5) et la définition de la convergence d'une série montrent :

Proposition II.4.3

Avec les notations ci-dessus, pour que f soit DSE_0, *il faut et il suffit qu'il existe un réel $r > 0$ tel que*

$$(\forall x \in I \cap [-r, r]) \quad R_{n,f}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

On voit ainsi tout l'intérêt d'une bonne expression du reste $R_{n,f}$, c'est-à-dire une expression qui permette une majoration commode de sa valeur absolue. Rappelons que nous avons obtenu au tome 2 :

- la *forme de Lagrange* du reste de la formule de Mac-Laurin (§ VI.3)

$$(\forall x \in I) \quad \exists \theta \in\,]0,1[\mid R_{n,f}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

- grâce à une intégration par parties, *le reste-intégrale* (cf. § VII.6)

$$(\forall x \in I) \quad R_{n,f}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t .$$

Par exemple, pour retrouver le fait que la fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est DSE_0, on pourrait utiliser le reste de Lagrange car la méconnaissance de θ n'empêche pas de majorer simplement $|f^{(n+1)}(\theta x)|$; pour retrouver le développement du binôme $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ il vaudrait mieux utiliser le reste-intégrale, qui présente l'avantage supplémentaire d'être encore valable si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Indiquons un résultat général permettant l'utilisation du reste de Lagrange.

Théorème II.4.2

> *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour que f soit DSE_0, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$, $A > 0$ et $r > 0$ tels que*
>
> $$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in]-r, r[\cap I) \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant C A^n n!$$

Démonstration :

a) Supposons la condition énoncée satisfaite. On en déduit :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in]-r, r[\cap I) \quad |R_{n,f}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times C A^n n! \leqslant C r (A|x|)^n .$$

En particulier, si $x \in]-\alpha, \alpha[\cap I$, où $\alpha = \mathrm{Min}\left(r, \frac{1}{A}\right)$, on voit que $R_{n,f}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Donc f est DSE_0 en vertu de la proposition II.4.3.

b) Réciproquement, supposons que f soit DSE_0 et posons $T_f(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, avec $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ pour tout n. Par hypothèse $T_f \in \mathbb{C}\{X\}$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < R_{\mathrm{cv}}(T_f)$ et que, pour $x \in [-\alpha, \alpha] \cap I$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. De $\alpha < R_{\mathrm{cv}}(T_f)$ on déduit la convergence absolue de la série $\sum a_n \alpha^n$, ce qui permet de poser $M = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \alpha^n$, d'où $(\forall n)\ |a_n| \leqslant \frac{M}{\alpha^n}$. Le théorème II.3.2 montre

$$(\forall p \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [-\alpha, \alpha] \cap I) \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} ,$$

d'où, si $x \in I \cap]-\alpha, \alpha[$, la majoration :

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) \frac{M}{\alpha^n} |x|^{n-p} .$$

Fixons $r \in]0, \alpha[$. Pour $x \in I \cap [-r, r]$, on en déduit :

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\leqslant \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) \frac{M}{\alpha^p} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n-p} = \\ &= \frac{M}{\alpha^p} p! \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{n-p} = \frac{Mp!}{\alpha^p} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{p+q}{p} \left(\frac{r}{\alpha}\right)^q \\ &= \frac{Mp!}{\alpha^p} \times \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)^{-p-1} = \frac{M}{1 - r/\alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha - r}\right)^p . p! \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 6 : Il faut noter qu'*une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être de classe $\mathscr{C}^\infty$ sans être* DSE_0, **même si sa série de Taylor T_f en 0 possède un rayon de convergence > 0.** En voici un exemple classique : soit α un fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $0\mapsto 0$, $x\mapsto \exp\left(\dfrac{-1}{|x|^{\alpha}}\right)$ pour $x\neq 0$, est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ et toutes ses dérivées en 0 sont nulles (cf. tome 2, § IV.7, exercice 7). Donc sa série de Taylor en 0 est la série formelle nulle, qui a un rayon de convergence infini. Cependant il n'existe aucun réel $r>0$ tel que $f(x)=\tilde{T}_f(x)$ pour $|x|\leqslant r$ puisque $\tilde{T}_f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et que $f(x)>0$ pour $x\neq 0$. Donc f n'est pas DSE_0.

Points réguliers, points singuliers

Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur I, intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Pour tout $x_0\in I$ désignons par $T_{f,x_0}=T_{f,x_0}(X)$ la *série de Taylor de f en* x_0, c'est-à-dire la série $T_{f,x_0}(X)=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)X^n$ (en particulier, si $0\in I$, $T_{f,0}$ est la série que nous avons notée en abrégé T_f). Il est clair que, si f est DSE_{x_0}, il existe une et une seule $S\in\mathbb{C}\{X\}$ telle que $f(x)=\tilde{S}(x-x_0)$ pour x assez voisin de x_0 dans I : c'est $S=T_{f,x_0}$.

DÉFINITION **II.4.2**

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. Un point $x_0\in I$ est appelé :

***point régulier** de f (ou **point d'analyticité réelle** de f) ssi f est* DSE_{x_0}

***point de pseudo-convergence** de f ssi $T_{f,x_0}\in\mathbb{C}\{X\}$ sans que f soit* DSE_{x_0}

***point de divergence** de f ssi* $R_{\mathrm{cv}}(T_{f,x_0})=0$, i.e. $T_{f,x_0}\notin\mathbb{C}\{X\}$

***point singulier** de f ssi x_0 n'est pas régulier,* i.e. *ssi x_0 est point de divergence ou de pseudo-convergence de f.*

Par exemple, pour la fonction f considérée dans la remarque 5 ci-dessus, 0 est point de pseudo-convergence de f (donc singulier) tandis qu'il est facile de voir que tous les autres points sont réguliers.

On trouvera en exercice des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ admettant des points de divergence, et même au Chapitre III des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ dont tous les points de définition sont points de divergence. Prouvons ici :

PROPOSITION **II.4.4**

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. L'ensemble Ω des points réguliers est ouvert *dans I.*

Démonstration :

Soit $x_0\in I$. D'après le théorème II.4.2, pour que faut et il suffit qu'il existe $C > 0$, $A > 0$, $r > 0$ tels que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in I \cap [x_0 - r, x_0 + r]) \quad |f^{(n)}(x)| \leqslant C A^n n!$$

Si $x_0 \in \Omega$, choisissons C, A et r ainsi. Alors pour $x_0' \in \left[x_0 - \frac{r}{2},\ x_0 + \frac{r}{2}\right] \cap I$ l'inégalité précédente est vérifiée $\forall x \in I \cap \left[x_0' - \frac{r}{2},\ x_0' + \frac{r}{2}\right]$, ce qui signifie que $x_0' \in \Omega$. Ainsi $I \cap \left[x_0 - \frac{r}{2},\ x_0 + \frac{r}{2}\right] \subset \Omega$, autrement dit Ω est voisinage de chacun de ses points dans I, donc ouvert dans I. ■

Exercice 1 : Utiliser l'*identité*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

valable pour tout x réel $\neq -1$ pour retrouver simplement le développement en série entière de $\operatorname{Log}(1+x)$ sur $]-1, 1[$, avec en prime la formule donnant la somme de la série harmonique alternée. Procéder de même avec $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2 : *a*) Utiliser la formule de Taylor avec reste-intégrale pour retrouver le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$.

Indication : Pour $x \in\ ]-1, 0[$ trouver un majorant simple de $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|^n$.

b) Pour quels α l'égalité obtenue reste-t-elle vraie au point $x = 1$?

Exercice 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \dfrac{1}{2n+1}\,\dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}$ (cf. remarque 3).

a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.

b) En déduire que les séries entières représentant $\operatorname{Arc\,sin} t$ et $\operatorname{Arg\,sh} t$ sont normalement convergentes sur $[-1, 1]$. Leur somme se prolonge donc par continuité aux points 1 et -1. Ecrire les égalités numériques ainsi obtenues.

Exercice 4 : Soit $f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \mapsto 1,\ x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arc\,sin}\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

a) Expliquer pourquoi f est DSE_0.

b) En utilisant une équation différentielle simple vérifiée par f, trouver son développement et l'ensemble de validité.

c) Si $S = T_f$, donner l'expression de $\tilde{S}$ sur $]-1, 0[$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 5 : *a*) Pour $x \in \mathbb{R}$, développer en série entière la fonction *rationnelle* $t \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2}$.

b) En déduire, pour $t \in \mathbb{C}$ et $|t| \neq 1$, la valeur de $I_p(t) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x \sin px}{1 - 2t\cos x + t^2}\,dx$ $(p \in \mathbb{N})$ (on commencera par le cas où $|t| < 1$).

Exercice 6 : Par intégration terme à terme, donner un DSE_0 des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ *b*) $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \exp(x\,e^{i\theta})\,d\theta$

c) $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - x\sin^2 t)^\alpha\,dt\ (a > 0)$ *d*) $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^k}{1 - xt^b}\,dt\ (a > 0,$

Exercice 7 : Démontrer les égalités suivantes :

$a)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\operatorname{Log}(1-x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$ $\quad b)$ $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{-\operatorname{Log}(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = 1$

$c)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x^2 \operatorname{Log} x}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} - 1$ $\quad d)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$

Mettre également $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arc\,sin} x}{x}\,dx$ sous forme de somme d'une série numérique.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}^2(1-x)}{x}\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{(n+1)^2}.$

Exercice 8 : Développer en série entière les fonctions suivantes (à l'origine) :

$a)$ $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg}(x+a)$ $(a \in \mathbb{R})$

$b)$ $x \mapsto \operatorname{Log}(1+x) \times \operatorname{Log}(1-x)$

$c)$ $x \mapsto e^{x \operatorname{cotg} a} \cos x$

$d)$ $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg}\left(\dfrac{1-x}{1+x} \operatorname{tg} \alpha\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$e)$ $x \mapsto (1+x^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \operatorname{Arc\,tg} x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$f)$ $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\operatorname{Arc\,sin} x$

$g)$ $x \mapsto \operatorname{Arc\,tg} x \times \operatorname{Log}(1+x^2)$

$h)$ $x \mapsto \operatorname{Log}(1+\sqrt{1+x})$

$i)$ $x \mapsto e^x \times \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n\,n!}$

$j)$ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 9 : Développer en série entière les fonctions suivantes (à l'origine) en cherchant une équation différentielle simple qu'elles vérifient :

$a)$ $x \mapsto \exp(i\lambda \operatorname{Arc\,sin} x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$b)$ $x \mapsto (x + \sqrt{1+x^2})^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$c)$ $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

$d)$ $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)(\sqrt{1+x^2}-1)^{3/2}$

$e)$ $x \mapsto (1+ax+bx^2)^{\alpha}$ $(a, b, \alpha$ réels$)$

$f)$ $x \mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

$g)$ $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ et $x \mapsto \sqrt{-x+\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 10 : A partir de $(1+x)^t = \exp(t \operatorname{Log}(1+x))$, trouver, pour chaque entier $r \geq 1$, une expression du DSE_0 de $(\operatorname{Log}(1+x))^r$.

Appliquer à $r = 2$ et $r = 3$.

Exercice 11 : $a)$ Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, donner le DSE_0 de $x \mapsto e^{\lambda \operatorname{Arc\,sin} x}$ en recherchant une équation différentielle simple vérifiée par cette fonction.

$b)$ En déduire une expression du DSE_0 de $(\operatorname{Arc\,sin} x)^r$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.

Appliquer à $r = 2$ et $r = 3$.

Exercice 12 (*Un exemple de point de divergence d'une fonction*) :

On considère deux suites (a_n), (b_n) dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, $b_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $(\forall k)$ la série $\sum a_n (b_n)^k$ converge.

$a)$ Vérifier que ces conditions sont satisfaites si $(\forall n)$ $a_n = e^{-n}$ et $b_n = n^2$.

$b)$ Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b_n x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^{\infty}$.

$c)$ Montrer que 0 est point de divergence de f (*i.e.*, que $R_{cv}(T_f) = 0$).

Exercice 13 : *a*) Pour $x \in]-1,1[$, montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3 - 3t + 2}{1 - x^3 t^3}\,\mathrm{d}t$ est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$, où $\qquad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \dfrac{1}{3n+4} - \dfrac{3}{3n+2} + \dfrac{2}{3n+1}$.

b) Montrer que : $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} s = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3 - 3t + 2}{1 - x^3 t^3}\,\mathrm{d}t \underset{x \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{2 - t - t^2}{1 + t + t^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la valeur de s.

d) Calculer directement la somme de la série $\sum a_n$.

Exercice 14 (*fonction* ζ) : On rappelle que pour s réel > 1, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Si $t \in \mathbb{R}_+^*$, soit $\Phi(t) = \zeta(1+t) - \dfrac{1}{t}$.

a) Prouver que $\Phi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, où $(\forall n)\ f_n(t) = \dfrac{1}{n^{1+t}} - \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{1}{n^t} - \dfrac{1}{(n+1)^t}\right)$.

b) Développer en série entière de t chaque fonction f_n.

c) Soit $t \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{N \to +\infty} \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{Log}^p\, n}{n}\right) - \frac{1}{p+1}\mathrm{Log}^{p+1}(N+1)\right]$$

existe. Notons-la C_p. Montrer alors : $\Phi(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} C_p t^p$. Reconnaître C_0.

N.B. On ne demande pas le rayon de convergence de cette série (par la théorie des fonctions analytiques il est possible de prouver que ce rayon est infini).

Exercice 15 : On garde les notations de l'exercice 14. Soit $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x+1}$ $(|x| < 1, x \in \mathbb{R})$.

a) Montrer : $g(x) = \displaystyle\sum_{q=0}^{\infty} R_q x^q$ avec $R_q = \dfrac{(-1)^q}{q!} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{Log}^q\, n$. Prouver que, pour $x > 0$ assez petit, on a : $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2^x}\right) \zeta(1+x)$.

b) En identifiant $\zeta(1+x) = \dfrac{g(x)}{1 - 1/2^x}$ avec l'expression trouvée dans l'exercice 14, en déduire les C_p en fonction des R_q. En particulier, écrire la *constante d'Euler* γ sous la forme :

$$\gamma = \frac{\mathrm{Log}\, 2}{2} + \frac{1}{\mathrm{Log}\, 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \mathrm{Log}\, n}{n}.$$

Exercice 16 : *a*) Prouver que la constante d'Euler γ est égale à $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{Log}\,(1+t)}\right) \mathrm{d}t$ (cf. tome 2, § VIII.3, exercice 31).

b) Vérifier que la fonction $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{-t}{\mathrm{Log}\,(1-t)}$ prolongée par continuité en 0 est DSE_0, et que son DSE_0, écrit sous la forme $t \mapsto 1 - \displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n t^n$, vérifie : $(\forall n \geq 1)$ $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

c) Montrer : $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

Exercice 17 : *a*) Soit $\theta(n,l) = \sum_{k=n-l}^{n} (-1)^{k-n} \binom{n}{k} \binom{2k}{2n-2l}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\theta(n,l)$ vaut 0 si $l > n/2$ et $2^{2l}\binom{n}{2l}$ si $l \leq \frac{n}{2}$.

Indication : écrire $(1+2X)^n = [(1+X)^2 - X^2]^n$.

b) Soit $f_u : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\operatorname{ch} ux}{\cos x}$, avec $u \in \mathbb{R}$. Prouver que f est DSE_0, et que ce DSE_0 s'écrit $f_u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}(u) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, où

$$(\forall n) \quad u_{2n} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} S_{2m}(u) \binom{2n}{2m}.$$

c) En déduire, à l'aide de *a*), que

$$f_1(x) = \sum_{n \geq 0} s_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{où} \quad (\forall n) \qquad s_{2n} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad s_{2n} \equiv 0 \bmod (2^n).$$

Exercice 18 (*théorème de Serge Bernstein*).

a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et g une fonction paire : $[-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$(\forall n \geq 0), (\forall x \in [-a,a]) \quad g^{(2n)}(x) \geq 0.$$

*a*1) Prouver que $g^{(2p)}$ est croissante sur $[0,a]$ pour tout p.

*a*2) Montrer : $\exists M \geq 0$ tel que

$$\forall (u,v) \quad 0 \leq u \leq v \leq a, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq \frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \leq M.$$

*a*3) Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $I_p : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} g^{(2k)}(0)$. Montrer que I_p est paire, positive, égale à $x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!} g^{(2p+2)}(t)\,dt$. Si $x \in]-a,a[$ est fixé, prouver : $I_p(x) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Qu'en déduit-on ?

b) Soit $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall n \geq 0)$ $\forall x \in [-a,a]$ $f^{(2k)}(x) \geq 0$.

Prouver : $$\forall x \in]-a,a[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Indication : Introduire la fonction $x \mapsto g(x) = f(x) + f(-x)$.

c) Appliquer les résultats précédents pour trouver l'ensemble de validité du DSE_0 de $\operatorname{tg} z$ et le rayon de sa série de Taylor à l'origine.

Exercice 19 : Démontrer les identités ci-après :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha \sin x)}{\sin x}\,dx = \frac{1}{2}[\pi \operatorname{Arc\,sin} \alpha - (\operatorname{Arc\,sin} \alpha)^2]$ $(|\alpha| < 1)$.

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha \sin^2 x)}{\sin^2 x}\,dx = \pi(\sqrt{1+\alpha} - 1)$ $(|\alpha| < 1)$.

Exercice 20 : Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Trouver le DSE_0 de la fonction : $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{x+n}$.

Exercice 21 : Soit α réel > 0. Trouver le DSE_0 de la fonction

$$x \mapsto \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\alpha - 1/2} \cos(xt)\,dt.$$

Expliciter complètement les coefficients si $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22 : Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum |a_n|^2$ soit convergente.

On suppose : $\left(\forall t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n-t} = 0$ (vérifier que le premier membre a bien un sens).

Montrer : $(\forall n)\ a_n = 0$.

Exercice 23 :

Notations : 1) Si $n \in \mathbb{Z}$, on pose : $p(n) = 0$ pour $n < 0$; $p(0) = 1$; et, si $n \geqslant 1$:

$$p(n) = \text{card } \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = n\right\}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose encore :

$$p_N(n) = \text{card } \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \mid \alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \cdots + N\alpha_N = n\right\}.$$

2) Si $z \in \mathbb{C}$, on pose : pour $n \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$: $P_n(z) = \prod_{r=1}^{n} (1 - z^r)$.

Et : $P_0(z) = 1$.

PARTIE I

1) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite *non nulle,* qu'on notera $\Phi(z)$. Cela s'écrit : $\Phi(z) = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - z^r)$.

On notera aussi : $\Psi(z) = \dfrac{1}{\Phi(z)}$, d'où : $\Psi(z) = \prod_{r=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 - z^r}$.

2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer que $1/P_N(z)$ s'exprime comme la somme d'une série entière de z : $\dfrac{1}{P_N(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{N,n} z^n$, où l'on précisera les coefficients $B_{N,n}$ à l'aide des $p_N(n)$. Quel est le rayon de cette série entière ?

3) *a*) Si x est réel et $0 \leqslant x < 1$, démontrer :

$$\Psi(x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} p(n) x^n.$$

b) Quel est le rayon de la série entière $1 + \sum_{n\geqslant 1} p(n) X^n$?

c) Prouver : si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, alors :

$$\Psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n.$$

PARTIE II

Pour $n \in \mathbb{Z}^*$, on pose : $\omega(n) = \frac{1}{2}(3\,n^2 - n)$. (Il pourra être utile d'observer que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\omega(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (3\,k + 1)$). D'autre part, si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$S_n(z) = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \left[z^{\omega(r)} + z^{\omega(-r)}\right] ; \quad F_n(z) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{P_n(z)}{P_r(z)} z^{rn + g(r)},$$

avec $g(r) = \frac{1}{2} r(r+1)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

1) On fixe un réel $x \in [0, 1[$. Pour abréger, on écrit : $P_n = P_n(x)$; $S_n = S_n(x)$; $F_n = F_n(x)$.

a) Vérifier : $F_1 = S_1$.

b) Prouver, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $F_n - S_n = F_{n-1} - S_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$.

(*Indication :* Dans l'expression développée de F_n, remplacer P_n par $(1 - x^n) P_{n-1}$, distribuer le produit par $1 - x^n$, et dans le résultat procéder à des groupements de te *c*) En déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |S_n - P_n| \leqslant n x^{n+1}$, puis :

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[x^{\omega(n)} + x^{\omega(-n)}\right].$$

(On étudiera $F_n - P_n$.)

2) Montrer : pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, on a : $\Phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[z^{\omega(n)} + z^{\omega(-n)}\right]$.

Préciser le rayon de la série entière ainsi mise en évidence.

3) *a*) A l'aide de I 3) *c*) et II 2), démontrer :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[p(n - \omega(k)) + p(n - \omega(-k))\right].$$

b) A l'aide de cette relation ou directement avec I 3) *c*) et II 2), calculer $p(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 150$.

On pourra s'aider d'une calculatrice, et si l'on compose un programme BASIC ou autre, on en donnera l'organigramme.

PARTIE III

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x réel, $0 < x < 1$. (Notation en vigueur toute cette partie.)

a) Montrer : $\Psi(x) > \dfrac{p(n)\, x^n}{1 - x}$.

b) En posant $t = \dfrac{1 - x}{x}$, en déduire : $\operatorname{Log}(p(n)) < \operatorname{Log} \Psi(x) + (n - 1)\, t + \operatorname{Log} t$.

2) *a*) Démontrer : $\operatorname{Log} \Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k} \dfrac{x^k}{1 - x^k}$.

b) Démontrer : $(\forall m \in \mathbb{N}^*)\ \dfrac{1}{m^2} \dfrac{x^m}{1 - x} \leqslant \dfrac{1}{m} \dfrac{x^m}{1 - x^m} \leqslant \dfrac{1}{m^2} \dfrac{x}{1 - x}$.

c) En utilisant $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, en déduire : $\operatorname{Log} \Psi(x) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6t}$, et :

$$\operatorname{Log} p(n) \leqslant \frac{\pi^2}{6t} + (n - 1)\, t + \operatorname{Log} t.$$

3) *a*) Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\pi^2}{6t} + (n - 1)\, t + \operatorname{Log} t$.

b) En déduire : $p(n) > \pi \dfrac{e^{\pi \sqrt{2/3} \times \sqrt{n}}}{\sqrt{6(n - 1)}}$ $(n \geqslant 2)$.

PARTIE IV

1) A l'aide de III 2) *a*), prouver : $x \dfrac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{mn} \right)$ pour $0 < x < 1$ (x réel).

2) Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma_1(k) = \sum_{d \in \mathbb{N}^*, d | k} d$. Déduire de 1) : $x \Psi'(x) = \Psi(x) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_1(k)\, x^k$ pour $0 < x < 1$ (x réel).

3) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ n - p(n) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_1(k)\, p(n - k)$.

Chapitre III

COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES, APPLICATIONS

§ III.1 *COMPOSITION ET RÉVERSION*

Inégalités de Cauchy

THÉORÈME III.1.1

> *Soit* $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$. *Pour tout réel* $r \in \,]0, R_{\mathrm{cv}}(S)[$, *on a :*
>
> (1) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\,.$$
>
> *En conséquence, si* $M(r) = \operatorname*{Max}_{|z| = r} \left|\tilde{S}(z)\right|$:
>
> (2) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{(inégalités de Cauchy)}\,.$$

Démonstration :

Soit $r \in \,]0, R_{\mathrm{cv}}(S)[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\tilde{S}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, r^k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}$. La série de fonctions continues de $\theta : \sum a_k\, r^k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)\theta}$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$, car $(\forall k \in \mathbb{N})$ $(\forall \theta \in [0, 2\pi])$ le module de son terme général est égal à $|a_k|\, r^k$, terme général d'une série numérique convergente (puisque $r < R_{\mathrm{cv}}(S)$). L'intégration terme à terme est donc permise et donne : $\int_0^{2\pi} \tilde{S}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \, d\theta = 2\pi a_n r^n$, d'où (1) ; (2) s'en déduit immédiatement par l'inégalité de la norme des intégrales. ■

Composition des séries entières convergentes

THÉORÈME III.1.2

> *Soit* $S \in \mathbb{C}\{X\}$ et $T \in \mathbb{C}\{X\}$, avec val $(S) \geqslant 1$. *Alors* $T \circ S \in \mathbb{C}\{X\}$. *De manière précise, soit* σ *un réel* > 0 *et* $\leqslant R_{cv}(S)$ *tel que, pour* $|z| < \sigma$, *on ait* $|\tilde{S}(z)| < R_{cv}(T)$; *alors* $R_{cv}(T \circ S) \geqslant \sigma$, *et de plus, pour* $|z| < \sigma$, *on a :* $\widetilde{T \circ S}(z) = \tilde{T}[\tilde{S}(z)]$.

Démonstration :

Posons $S = \sum_{n \geqslant 1} a_n X^n$, $T = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$, $U = T \circ S = \sum_{n \geqslant 0} c_n X^n$. Fixons σ réel > 0 tel que $\sigma \leqslant R_{cv}(S)$ et $|\tilde{S}(z)| < R_{cv}(T)$ pour $|z| < \sigma$ (un tel σ existe, par continuité de $\tilde{S}$ en 0). Posons enfin, pour $n \in \mathbb{N}$: $U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$, $T_n(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. Il est clair que pour $z \in \mathbb{C}$ fixé tel que $|z| < \sigma$, $T_n(\tilde{S}(z)) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{T}[\tilde{S}(z)]$. Nous allons prouver que $U_n(z) - T_n[\tilde{S}(z)] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui entraînera évidemment toutes les assertions du théorème.

Pour cela utilisons les inégalités de Cauchy appliquées à S^k $(k \in \mathbb{N})$. Ecrivons $S^k = \sum_{n \geqslant k} a_{n,k} X^n$. Pour tous réels $s \in \,]0, R_{cv}(S)[$ et $t \in \,]0, R_{cv}(T)[$, en posant $M_S(s) = \operatorname{Max}_{|z| = s} |\tilde{S}(z)|$ et $M_T(t) = \operatorname{Max}_{|z| = t} |\tilde{T}(z)|$, il vient :

$$(3) \qquad (\forall n \geqslant k) \quad |a_{n,k}| \leqslant \frac{(M_S(s))^k}{s^n} \quad \text{et} \quad (\forall n) \quad |b_n| \leqslant \frac{M_T(t)}{t^n}.$$

D'autre part, par définition de la série composée, $(\forall n \geqslant 1)$ $c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n,k}$,

d'où aisément : $\tilde{T}_n[\tilde{S}(z)] - U_n(z) = \sum_{\nu = n+1}^{\infty} z^{\nu}(b_1 a_{\nu,1} + \cdots + b_n a_{\nu,n})$.

D'après (3), pour $s < R_{cv}(S)$ et $t < R_{cv}(t)$, on a (avec $M = M_S(s)$ pour abréger) $(\forall \nu \geqslant 1)$:

$$|z^{\nu}(b_1 a_{\nu,1} + \cdots + b_n a_{\nu,n})| \leqslant M_T(t) |z|^{\nu} s^{-\nu} \left(\frac{M}{t} + \frac{M^2}{t^2} + \cdots + \frac{M^n}{} \right.$$

En choisissant s tel que $|z| < s < \sigma \leqslant R_{cv}(S)$ et t tel que $M_S(s) < t < R_{cv}(T)$ (ce qui est possible puisque $|\tilde{S}(u)|$ reste $< R_{cv}(T)$ pour $|u| = s$), on obtient :

$$(\forall \nu \geqslant n+1) \quad |z^\nu(b_1 a_{\nu,1} + \cdots + b_n a_{\nu,n})| \leqslant \frac{M_S(s)}{t - M_S(s)} \left|\frac{z}{s}\right|^\nu M_T(t)$$

d'où par addition :

$$\left|\tilde{T}_n[\tilde{S}(z)] - U_n(z)\right| \leqslant \frac{M_S(s)}{t - M_S(s)} \times \left|\frac{z}{s}\right|^{n+1} \times \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{s}\right|} \times M_T(t) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

On a donc bien prouvé que $U_n(z) - T_n[\tilde{S}(z)] \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$ ■

Retenons en abrégé que, si les séries S (de valuation $\geqslant 1$) et T ont des rayons de convergence > 0, l'égalité $\widetilde{T \circ S}(z) = \tilde{T}[\tilde{S}(z)]$ est vraie à condition de ne donner à la variable z que des valeurs assez petites.

Remarque 1 : Dans le cas particulier où $R_{cv}(T) = +\infty$, il résulte de la démonstration précédente que $R_{cv}(T \circ S) \geqslant R_{cv}(S)$.

COROLLAIRE

Soit A et B deux parties de $\mathbb{C}$ admettant 0 pour point d'accumulation, et soit $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions. Si f est DSE$_0$ ***telle que $f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} 0$,*** *et si g est* DSE$_0$, *alors $g \circ f$ est* DSE$_0$, *et les séries formelles S, T, U représentant respectivement f, g et $g \circ f$ sont liées par : $U = T \circ S$.*

Ce corollaire s'applique en particulier, si A et B sont des *intervalles de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0, aux séries de Taylor de f, g et $g \circ f$. Mais la relation $T_{g \circ f} = T_g \circ T_f$ a déjà été démontrée au tome 2 (cf. théorème VI.5.2) pour f et g de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Il peut permettre de reconnaître au premier coup d'œil que certaines fonctions sont DSE$_0$; par exemple : $z \mapsto \operatorname{tg}(\operatorname{Log}(\cos z))$ est DSE$_0$.

Réversion d'une série entière convergente

THÉORÈME III.1.3

Soit $S \in \mathbb{C}[[X]]$, $S = \sum_{n \geqslant 1} a_n X^n$ (i.e. val$(S) \geqslant 1$). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(I) $a_1 \neq 0$ (*i.e. :* val$(S) = 1$).

(II) *Il existe* $T \in \mathbb{C}[[X]]$ *telle que* $T \circ S = X$.
(III) *Il existe* $U \in \mathbb{C}[[X]]$ *de valuation* $\geqslant 1$ *telle que* $S \circ U = X$.

De plus, si ces conditions sont satisfaites, il y a unicité de T *dans* (II), *de* U *dans* (III), *et* $T = U$.

Démonstration :

La dernière assertion est facile à prouver : en effet, si T et U éléments de $\mathbb{C}[[X]]$, avec val $(U) \geqslant 1$ vérifient $T \circ S = X$ et $S \circ U = X$, alors, par associativité (cf. tome 1, théorème VIII.4.3) $(T \circ S) \circ U = T \circ (S \circ U)$, d'où $X \circ U = T \circ X$, c'est-à-dire $U = T$, d'où la *totalité* de l'assertion.

(II) $\Rightarrow$ (I) car si $T = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$ vérifie $T \circ S = X$, cela entraîne $b_0 = 0$ et $b_1 a_1 = 1$, d'où $a_1 \neq 0$.

(III) $\Rightarrow$ (I) car si $U = \sum_{n \geqslant 1} c_n X^n$ vérifie $S \circ U = X$, alors $a_1 c_1 = 1$, d'où $a_1 \neq 0$ (les coefficients b_n et c_n sont dans $\mathbb{C}$).

Il reste à démontrer, pour $a_1 \neq 0$, l'existence de T et U. En notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$, on sait (cf. tome 2, théorème VI.4.7) qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ unique, de valuation 1, tel que val $(P_n \circ S_n - X) > n$ et val $(S_n \circ P_n - X) > n$. Cela est vrai pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que val $(P_{n+1} \circ S_{n+1} - P_n \circ S_n) > n$ et val $(S_{n+1} \circ P_{n+1} - S_n \circ P_n) > n$, ce qui montre, vu *l'unicité* de P_n, que la somme des termes de degré $\leqslant n$ de P_{n+1} n'est autre que P_n. On a donc une unique série formelle $T \in \mathbb{C}[[X]]$, $T = \sum b_n X^n$, de valuation 1, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} b_k X^k = P_n$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, val $(T \circ S - X) > n$ car

$$\text{val}\,(T \circ S - X) = \text{val}\,(T \circ S - P_n \circ S + P_n \circ S - P_n \circ S_n) \geqslant$$
$$\geqslant \text{Min}\,(\text{val}\,(T \circ S - P_n \circ S), \text{val}\,(P_n \circ S - P_n \circ S_n)) > n\,.$$

Donc $T \circ S = X$, et on voit de même que $S \circ T = X$. ■

DÉFINITION III.1.1

Soit $S \in \mathbb{C}[[X]]$ *de valuation* 1. *On appelle* ***série formelle réciproque*** *de* S *l'unique série formelle* T *de valuation* $\geqslant 1$, *telle que* $T \circ S = S \circ T = X$.

Cette série formelle réciproque de S sera notée $S^{\langle -1 \rangle}$. Il reste à trouver un moyen pratique de calculer ses coefficients. Une première idée consiste à « identifier » $S \circ T$ et X, c'est-à-dire à égaler les coefficients de X^n dans $a_1 T + a_2 T^2 + \cdots$ et dans X, ce qui donne : $a_1 b_1 = 1$, et pour $n > 1$: $a_1 b_n + R_n(a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}) = 0$, où R_n est un polynôme connu à coefficients dans $\mathbb{N}$, linéaire en $a_2, \ldots, a_n$. Les inconnues b_n peuvent donc se calculer par récurrence puisque $a_1 \neq 0$. Voici un procédé plus sophistiqué, en vue duquel nous introduisons la notation suivante : p quelconque $T(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ nous désignons par $C_m(T)$ le coefficient de X^m.

THÉORÈME III.1.4 (Schur)

Soit $S = \sum_{n \geq 1} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ *de valuation* 1. *Posons* $A = \dfrac{S(X)}{X}$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$ *et tout entier* $k \geqslant n$, *on a :*

$$C_k((S^{\langle -1 \rangle})^n) = \frac{n}{k} C_{k-n}\left(\left(\frac{1}{A}\right)^k\right).$$

Démonstration :

a) Pour $k \geqslant n \geqslant 1$, posons $a_{k,n} = C_k(S^n)$ et $b_{k,n} = C_k((S^{\langle -1 \rangle})^n)$, de sorte que : $(\forall n \geqslant 1)$ $S^n = \sum_{k \geq n} a_{k,n} X^k$ et $(S^{\langle -1 \rangle})^n = \sum_{k \geq n} b_{k,n} X^k$. Il est clair que $a_{k,k} = (a_1)^k$ et $b_{k,k} = 1/a_{k,k}$ pour tout $k \geqslant 1$. Il s'agit de calculer les $b_{k,n}$ à partir des $a_{k,n}$ qui sont connus, puisque S est donnée. Pour cela on remarque que : $(\forall n \geqslant 1)$ $(S^n) \circ (S^{\langle -1 \rangle}) = (S \circ S^{\langle -1 \rangle})^n = X^n$, c'est-à-dire : $\sum_{m \geq n} a_{m,n} (S^{\langle -1 \rangle})^m = X^n$; d'où par identification : $\sum_{m=n}^{k} a_{m,n} b_{k,m} = 0$ pour $k > n \geqslant 1$.
Or on vérifie aisément par récurrence que le système $(\mathscr{S}')$ suivant, à une infinité d'équations en les inconnues $(x_{k,n})_{k \geq n \geq 1}$:

$$(\mathscr{S}') \qquad \{(\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} a_{n,n} x_{n,n} = 1 \\ \displaystyle\sum_{n \leqslant m \leqslant k} a_{m,n} x_{k,m} = 0 \text{ pour } k > n \end{cases}$$

admet une solution unique, et que c'est $(b_{k,n})_{k \geq n \geq 1}$. En effet les $x_{n,n}$ sont parfaitement déterminés par $(\mathscr{S}')$. On trouve ensuite les $x_{n+1,n}$, puis les $x_{n+2,n}$, etc., l'existence d'une solution étant assurée par le fait que les $a_{k,k}$ sont *tous non nuls*.

b) Posons maintenant $b'_{k,n} = \dfrac{n}{k} C_{k-n}\left(\left(\dfrac{1}{A}\right)^k\right)$ pour $k \geqslant n \geqslant 1$, ce qui a un sens car A est bien inversible dans $\mathbb{C}[[X]]$. Pour démontrer le théorème, d'après ce qui vient d'être dit, il suffit de vérifier que les $(b'_{k,n})_{k \geq n \geq 1}$ sont solution du système $(\mathscr{S}')$, ce qui conduit à poser, pour $k \geqslant n \geqslant 1$: $E_{k,n} = \sum_{m=n}^{k} a_{m,n} b'_{k,m}$. On vérifie d'abord que $E_{n,n} = a_{n,n} b'_{n,n} = 1$ pour tout n, car il est clair que $b'_{n,n}$, terme constant de $\left(\dfrac{1}{A}\right)^n$ est égal à $(a_1)^{-n}$. Si $k > n$, $E_{k,n} = \sum_{m=n}^{k} \dfrac{m}{k} C_{k-m}(A^{-k}) \times C_m(X^n A^n)$ (car $S = XA$) $= \dfrac{1}{k} \sum_{m=n}^{k} C_{k-m}(A^{-k}) \times m C_m(X^n A^n)$. Mais de façon évidente : $m C_m(S^n) = C_m\left(X \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S^n)\right)$, d'où

$$E_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{m=n}^{k} C_{k-m}(A^{-k}) \times C_m\left(X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S^n)\right),$$

et par la règle de formation du produit de deux séries formelles,

$$\begin{aligned} E_{k,n} &= \frac{1}{k} C_k\left(XA^{-k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S^n)\right) = \frac{1}{k} C_k(XA^{-k} nS^{n-1} S') \\ &= \frac{n}{k} C_k(X^n A^{n-1-k}(XA' + A)) = \frac{n}{k} C_{k-n}\left(\frac{A + XA'}{A^{k-n+1}}\right) \\ &= \frac{n}{k} C_{k-n}\left(\frac{1}{A^{k-n}} + \frac{1}{n-k} X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{1}{A^{k-n}}\right)\right), \end{aligned}$$

soit en posant $U = \dfrac{1}{A^{k-n}}$, $E_{k,n} = \dfrac{n}{k} C_{k-n}\left(U + \dfrac{1}{n-k} XU'\right) = 0$, ce qui achève de prouver que les $(b'_{k,n})$ vérifient $(\mathscr{S}')$. ■

Corollaire (formule de réversion de Lagrange)

Avec les notations du théorème III.1.4, *la série réciproque* $S^{\langle -1\rangle}$ *est donnée par :*

$$(\forall k \geqslant 1) \quad C_k(S^{\langle -1\rangle}) = \frac{1}{k} C_{k-1}\left(\left(\frac{1}{A}\right)^k\right).$$

Le problème du calcul de $S^{\langle -1\rangle}$ est ainsi ramené à celui des diverses puissances entières $\geqslant 0$ de la série $\dfrac{1}{A} = \dfrac{X}{S(X)}$, ce qui peut se révéler plus commode.

De plus se trouve résolu le problème laissé en suspens au tome 2 (après le théorème IV.7.1) du calcul de la *dérivée n-ième d'une fonction réciproque,* car si I et J sont deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ contenant 0 et si $f : I \longrightarrow J$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ et bijective, il suffit d'appliquer le corollaire ci-dessus à $S = T_f$ pour obtenir l'expression « explicite » de $T_{f^{\langle -1\rangle}}$ en fonction des $f^{(k)}(0)$.

Théorème III.1.5

Soit $S \in \mathbb{C}\{X\}$ *de valuation* 1. *Alors* $S^{\langle -1\rangle} \in \mathbb{C}\{X\}$, *autrement dit* $R_{\mathrm{cv}}(S^{\langle -1\rangle}) > 0$.

Démonstration :

Soit $A = \dfrac{S(X)}{X}$. Le rayon de convergence de A, égal à celui de S, est donc > 0. Le rayon ρ de $\dfrac{1}{A}$ est donc aussi > 0 (cf. théorème II.1.4). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rayon de $\left(\dfrac{1}{A}\right)^n$ est $\geqslant \rho$ (cf. Proposition II.1.3). Fixons $r \in \,]0, \rho[$, et posons $M = \max\limits_{|z| = r} \left| \dfrac{1}{\tilde{A}(z)}\right|$. Les inégalités de

Cauchy montrent : $(\forall n \geqslant 1, \forall p \in \mathbb{N})$ $\left| C_p\left(\left(\frac{1}{A}\right)^n\right)\right| \leqslant \frac{M^n}{r^p}$. En particulier, $\left|\frac{1}{n} C_{n-1}\left(\left(\frac{1}{A}\right)^n\right)\right| \leqslant \frac{r}{n}\left(\frac{M}{r}\right)^n$.

Comme $S^{\langle -1\rangle} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} C_{n-1}\left(\left(\frac{1}{A}\right)^n\right) X^n$, on voit bien que le rayon de $S^{\langle -1\rangle}$ est $\geqslant \frac{r}{M}$, donc > 0. ■

Il s'ensuit que la fonction $\widetilde{S^{\langle -1\rangle}}$ vérifie, *pour z assez voisin de* 0, $\tilde{S}(\widetilde{S^{\langle -1\rangle}}(z)) = \widetilde{S^{\langle -1\rangle}}(\tilde{S}(z)) = z$. Il existe donc des voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{C}$ tels que $\tilde{S} : U \longrightarrow V$ et $\widetilde{S^{\langle -1\rangle}} : V \longrightarrow U$ soient des bijections réciproques l'une de l'autre. Dans un chapitre ultérieur nous retrouverons ce résultat d'une autre manière comme conséquence d'un théorème général de réversion locale.

Exercice 1 : Soit $S = \sum_{n\geqslant 1} a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$, avec $a_1 = 1$, de rayon R $(0 < R \leqslant +\infty)$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 inclus dans $\mathscr{D}_{\text{cv}}(S)$ tel que si $f(z) = \tilde{S}(z) - z$ on ait :

$$(\forall (z_i, z_2) \in V^2) \quad |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \frac{1}{2}|z_1 - z_2| .$$

b) Trouver un voisinage W de 0 inclus dans V tel que $(\forall z \in W)$ la suite (z_n) telle que $z_0 = 0$ et $(\forall n)\ z_{n+1} = z - f(z_n)$ soit à valeurs dans V et converge vers un élément ζ de V qui vérifie $\tilde{S}(\zeta) = z$. En déduire l'existence de deux voisinages ouverts V_1 et W_1 de 0, avec $V_1 \subset \mathscr{D}_{\text{cv}}(S)$, tels que $\tilde{S} : V_1 \longrightarrow W_1$ soit bijective. (On retrouve ainsi une des conséquences du théorème III.1.5).

Exercice 2 : On donne la série formelle $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{1}{2n+1} X^{2n+1}$. Calculer explicitement les 5 premiers termes de la série formelle réciproque.

Exercice 3 : En appliquant la formule de réversion de Lagrange, avec $S = X\exp(-X)$, démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$ on a :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} z^n\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!} z^n .$$

Exercice 4 : Justifier le fait que, pour z assez petit, l'équation $y\,\mathrm{e}^{-y} = z$ définit de façon unique une fonction $y = f(z)$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, et z assez petit, prouver :

$$\exp(\alpha f(z)) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n+\alpha)^{n-1}}{n!} z^n .$$

Exercice 5 (équation de Képler) : Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $y - z\sin y = a$, pour z réel assez petit, définit $y = f(z)$ de façon unique, et que $f(z) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} a$. Puis, montrer que, si z est assez petit (il s'agit de l'excentricité de l'orbite d'une planète ou d'un :

développer :

$$f(z) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} (\sin^n t) \right]_{t=a}.$$

Exercice 6 : Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que l'équation $y = a + \frac{1}{2}(y^2 - 1)z$ définit, pour z et $y - a$ assez petits, $y = f(z)$ de façon unique, et que $f(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} a$. Prouver, pour z assez petit :

$$f(z) = a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!\, 2^m} \left[\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}} (t^2 - 1)^m \right]_{t=a}.$$

Exercice 7 : On donne R réel > 0 et $r \in]0, R[$. Soit $\mathscr{E}_R$ l'ensemble des $S \in \mathbb{C}\{X\}$ de rayon $\geqslant R$.

a) Vérifier que $\mathscr{E}_R$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathbb{C}\{X\}$.

b) On pose, si $S \in \mathscr{E}_R : N_r(S) = \sup\limits_{|z| \leqslant r} (|\tilde{S}(z)|)$. Vérifier que N_r est une norme. Montrer que $(\mathscr{E}_r, N_r)$ est un espace de Banach. Comparer entre elles les diverses normes N_r $(0 < r < R)$.

Exercice 8 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$, de rayon de convergence 1. On suppose que la fonction $\tilde{S}$ se prolonge *par continuité* en une fonction $f : \bar{\mathscr{D}} \longrightarrow \mathbb{C}$, où $\bar{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes $(P_n \in \mathbb{C}[X])$ qui converge uniformément sur $\bar{\mathscr{D}}$ vers f.

§ III.2 *NOTION DE FONCTION ANALYTIQUE COMPLEXE*

Définition III.2.1

*Soit Ω un **ouvert** non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **analytique** sur Ω ssi $(\forall a \in \Omega)$ f est* DSE_a.

Il est clair que toute restriction de f à un sous-ouvert de Ω est encore analytique. On dit aussi que f est *holomorphe* [1] sur Ω. Dans ce qui suit, si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, nous désignerons par $\mathscr{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytiques sur Ω. En outre, si $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ et si $a \in \Omega$, l'*unique* série formelle $S \in \mathbb{C}\{X\}$ telle que $\tilde{S}(z - a) = f(z)$ pour z assez voisin de a sera notée provisoirement $S_{f,a}$. Les propriétés (DSE1) à (DSE6) du § II.4 et le corollaire du théorème III.1.2 entraînent immédiatement, en désignant par U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$:

An1) Soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors f est **indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable** sur U (en particulier, f est **continue**), et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f^{(n)}$ *est elle-même élément de* $\mathscr{H}(U)$.

---

[1] Une fonction holomorphe sur Ω est une fonction continûment $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω mais nous verrons plus loin (Appendice 4) que l'holomorphie entraîne bien l'analyticité, d'où la notation $\mathscr{H}(\Omega)$.

An2) Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ et $a \in U$. La série formelle $S_{f,a}$ n'est autre que : $S_{f,a} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) X^n$. Par analogie avec le cas réel nous dirons que c'est la *série de Taylor* de f en a et nous la noterons $T_{f,a}$.

Remarque 1 : On peut prouver que réciproquement, une fonction indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U est analytique sur U. Mieux : il suffit que $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ soit $\mathbb{C}$-dérivable et à dérivée f' continue sur U pour avoir $f \in \mathscr{H}(U)$ (cf. théorème 2 de l'Appendice 4).

An3) *$\mathscr{H}(U)$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{F}(U, \mathbb{C})$.* C'est une conséquence de DSE2 et du fait que $\mathscr{H}(U)$ contient toute fonction constante sur U.

An4) *Si $f \in \mathscr{H}(U)$ et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$, alors $\frac{1}{f} \in \mathscr{H}(U)$.*

An5) Si $f \in \mathscr{H}(U)$ et si f prend ses valeurs dans V, pour toute $g \in \mathscr{H}(V)$ on a : $g \circ f \in \mathscr{H}(U)$.

An6) Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ et $a \in U$. Alors la fonction $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto f'(a)$, $z \mapsto \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ pour $z \in U \setminus \{a\}$, *est analytique sur U,* et de plus : $T_{g,a}(X) = \dfrac{T_{f,a}(X)}{X}$.

Premiers exemples de fonctions analytiques

Soit d'abord F une *fraction rationnelle* ($F \in \mathbb{C}(X)$). Pour tout $a \in \mathbb{C}$, si a n'est pas pôle de F, la fonction : $z \mapsto \tilde{F}(a + z)$ est rationnelle sur son ensemble de définition (associée à la fraction $F(a + X) \in \mathbb{C}(X)$). En utilisant le théorème II.3.3, on obtient :

Proposition III.2.1

Si $F \in \mathbb{C}(X)$, la fonction rationnelle $\tilde{F}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{\text{pôles de } F\}$. En conséquence, ***toute fonction rationnelle*** *sur un ouvert* ***est analytique*** *sur cet ouvert.*

L'exemple le plus simple de fonction analytique non rationnelle est le suivant :

Proposition III.2.2

La fonction $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z = \exp(z)$ *est analytique sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors $(\forall z \in \mathbb{C})$ $\exp(z + a) = \exp(a) . \exp(z) = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, ce qui montre bien que exp est DSE$_a$. ■

Il en résulte que les fonctions ch, sh, cos, sin sont analytiques sur $\mathbb{C}$, et que les fonctions th, coth, tg et cotg sont analytiques sur les ouverts où elles sont définies (à savoir respectivement $\mathbb{C}\setminus\left(\dfrac{i\pi}{2}+i\pi\mathbb{Z}\right)$, $\mathbb{C}\setminus i\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$).

Les opérations rationnelles et le théorème de composition An5) permettent déjà, à partir des fonctions « usuelles », de disposer d'une large gamme de fonctions analytiques dans des ouverts convenables.

Exemple 1 : La fonction $f: 0 \mapsto 0,\ z \mapsto z \sin \dfrac{1}{z}$ pour $z \neq 0$ est définie et continue sur $\mathbb{C}$, et analytique sur l'ouvert $\mathbb{C}^*$ (mais pas sur $\mathbb{C}$ puisqu'elle n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en 0).

La fonction $z \mapsto \exp\left(\sin z + \dfrac{1}{\sin z}\right)$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

Cette gamme de fonctions analytiques peut être considérablement élargie grâce au théorème ci-après :

THÉORÈME III.2.1

Soit $S = \sum\limits_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$, de rayon R $(0 < R \leq +\infty)$. Alors la fonction $\tilde{S}$ est analytique sur $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Démonstration :

Par hypothèse $\tilde{S}$ est DSE_0, mais il n'est pas évident que $\tilde{S}$ soit DSE_a pour tout $a \in \mathscr{D}$. Fixons donc $a \in \mathscr{D}$; posons $r = |a|$ et choisissons ρ réel > 0 tel que $r + \rho < R$.

La série formelle $T = \sum |a_n| X^n$ est de rayon R, donc $(\forall k \in \mathbb{N})$ la série $T^{(k)} = \sum\limits_{n \geq k} \dfrac{n!}{(n-k)!} |a_n| X^{n-k}$ est aussi de rayon R.

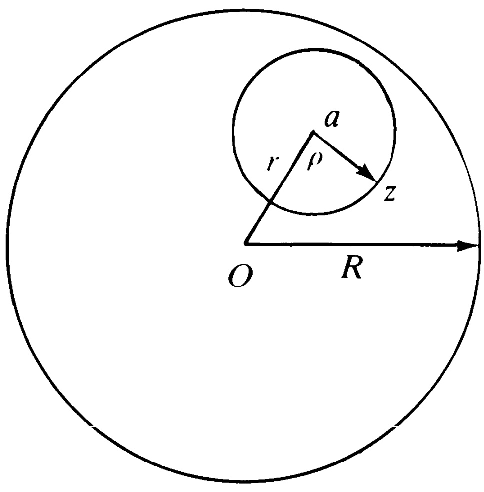


Fig. 1.

a) Montrons que la série $\sum_k \frac{\rho^k}{k!} \tilde{T}^{(k)}(r)$ *converge.* Elle est à termes $\geqslant 0$ et on peut majorer les sommes partielles $\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} \tilde{T}^{(k)}(r) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} |a_n| r^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{0 \leqslant k \leqslant \operatorname{Min}(n,N)} \binom{n}{k} \rho^k r^{n-k} \right)$ par $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho^k r^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+\rho)^n$. Mais la série $\sum_n |a_n| (r+\rho)^n$ est convergente, car $r + \rho < R$. Cela prouve bien la convergence de $\sum_k \frac{\rho^k}{k!} \tilde{T}^{(k)}(r)$.

b) Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| \leqslant \rho$. Il s'agit de prouver que la série $\sum_n \frac{\tilde{S}^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ converge et a pour somme $\tilde{S}(z)$. Pour cela, écrivons :
$\tilde{S}(z) = \lim_{N \to \infty} A_N$, avec

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - a + a)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-a)^k a^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v_k(N), \qquad \text{en posant } v_k(N) = 0 \text{ si } k > N \text{, et}$$

$$v_k(N) = \frac{(z-a)^k}{k!} \sum_{k \leqslant n \leqslant N} a_n \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} \quad \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant N .$$

Or $(\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N})$ $|v_k(N)| \leqslant \frac{\rho^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| r^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{\rho^k}{k!} \tilde{T}^{(k)}(r)$, dont on vient de voir que c'est le terme général d'une série numérique convergente.

Donc la série de fonctions de N : $\sum_k v_k(N)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{N}$.

D'autre part, pour k fixé, $\lim_{N \to \infty} v_k(N)$ existe : c'est $\frac{(z-a)^k}{k!} \tilde{S}^{(k)}(a)$. Le *théorème de la double limite* s'applique donc quand $N \longrightarrow \infty$ et fournit :

1) la série $\sum_k \frac{S^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ converge.

2) $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} A_N$ existe (on sait que par construction cette limite est $\tilde{S}(z)$).

3) $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} A_N = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{S^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$.

La comparaison de 2) et 3) achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 2 : La démonstration ci-dessus prouve en fait que le rayon de convergence de $T_{\tilde{S}, a}$ est $\geqslant R - |a|$, puisqu'il est $\geqslant \rho$ pour tout $\rho > 0$ tel que $r + \rho < R$; mais il n'y a rien d'anormal si l'inégalité est stricte.

Le principe du prolongement analytique

THÉORÈME III.2.2

> *Soit Ω un* ***domaine*** *de $\mathbb{C}$ (on appelle ainsi un* ***ouvert connexe****), et $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si l'ensemble Z des* zéros *de f possède dans $\mathbb{C}$* ***un point d'accumulation α qui appartient à Ω,*** *alors $f = 0$.*

Démonstration :

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble $\{z \in \Omega \mid \exists r$ réel > 0 tel que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \Omega$ vérifiant $|t - z| \leqslant r\}$.

a) Puisque Ω est ouvert, il est clair que $\mathscr{E}$ est voisinage de chacun de ses points, donc est lui-même *ouvert*. D'autre part $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f^{(n)}$ est nulle sur $\mathscr{E}$.

b) Soit $z_0 \in \Omega \cap \operatorname{Adh}(\mathscr{E})$; alors $f^{(n)}$ nulle sur $\mathscr{E}$ et continue sur Ω vérifie $f^{(n)}(z_0) = 0$. Donc la série de Taylor T_{f, z_0} est la série nulle, et puisque f coïncide avec T_{f, z_0} au voisinage de z_0, on en déduit : $z_0 \in \mathscr{E}$. Donc $\mathscr{E}$ est *fermé relativement à Ω.*

c) La fonction f coïncide avec $\tilde{T}_{f, \alpha}$ au voisinage de α ; donc $\tilde{T}_{f, \alpha}$ est nulle sur un ensemble du type $W \cap Z$, où W est un voisinage de α, et comme α est un point d'accumulation de $W \cap Z$, il en résulte que $T_{f, \alpha}$ est la série formelle nulle (principe des zéros isolés vu au § II.2), ce qui entraîne $\alpha \in \mathscr{E}$. Donc $\mathscr{E}$ *est non vide.*

d) Compte tenu du fait que Ω *est connexe,* il résulte de *a*), *b*) et *c*) que $\mathscr{E} = \Omega$. Donc $f = 0$ sur Ω. ■

COROLLAIRE 1

> *Soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ et $g \in \mathscr{H}(\Omega)$, où Ω est un* ***ouvert connexe*** *de $\mathbb{C}$. Si $f(z) = g(z)$ en tout point z d'un ensemble E admettant dans $\mathbb{C}$ un point d'accumulation α appartenant à Ω, alors $f =$*

C'est le *principe du prolongement analytique*. Il suffit que $f|_E$ et $g|_E$ coïncident pour que cette égalité s'étende à Ω tout entier. Par exemple E peut être un segment de droite arbitrairement petit inclus dans Ω. L'hypothèse de connexité de Ω est indispensable car si l'on prenait par exemple pour Ω la réunion de deux disques ouverts disjoints $D_1 \cup D_2$, on pourrait prendre pour f la fonction prenant sur D_1 la valeur $a_1 \in \mathbb{C}$ et sur D_2 la valeur a_2 et pour g la fonction prenant sur D_1 la valeur a_1 et sur D_2 la valeur $a_2' \neq a_2$: alors f et g sont bien analytiques sur Ω, coïncident sur D_1 mais pas sur Ω.

COROLLAIRE 2

Soit Ω un ouvert **connexe** *de $\mathbb{C}$. Alors l'algèbre $\mathscr{H}(\Omega)$ est un anneau* ***intègre.***

Démonstration :

Soit f et g dans $\mathscr{H}(\Omega)$ telles que $f \neq 0$ et $fg = 0$. Puisque f est continue, il existe $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $|z - z_0| < r$ entraîne $z \in \Omega$ et $f(z) \neq 0$. D'où $g(z) = 0$ pour $|z - z_0| < r$, d'où $g = 0$ par le théorème III.2.2. ■

Exemple 2 : Reprenons la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $0 \mapsto 0$, $z \mapsto z \sin \frac{1}{z}$ pour $z \neq 0$. Les zéros de f sont 0 et $\left\{ \frac{1}{k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z}^*}$. Cet ensemble admet $\alpha = 0$ pour point d'accumulation. Si f était analytique sur $\mathbb{C}$, elle devrait être nulle partout (théorème III.2.2), ce qui est absurde. Elle est cependant, comme on l'a vu dans l'exemple 1, analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Exemple 3 : La fonction $z \mapsto \operatorname{tg} z$ est analytique sur $\mathbb{C} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\} = \Omega$. Soit $S = \sum_{n \geqslant 0} t_n X^n$ la série qui la représente en 0. L'exercice 18 du § II.4 prouve que $R_{cv}(S) = \frac{\pi}{2}$. Donc $\tilde{S}$ est analytique dans $\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < \frac{\pi}{2} \right\}$ (cf. théorème III.2.1). Comme $\tilde{S}$ coïncide avec $z \mapsto \operatorname{tg} z$ au voisinage de 0, il résulte du théorème III.2.2 que $\tilde{S}(z) = \operatorname{tg} z$ pour tout $z \in \mathscr{D}$.

Exemple 4 *(fonctions analytiques réelles) :* Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *analytique réelle* c'est-à-dire DSE_a pour tout $a \in I$. Nous allons montrer qu'il existe *un ouvert Ω de* $\mathbb{C}$ et une fonction $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique tels que $I \subset \Omega$ et $\Phi|_I = f$. Pour cela considérons, pour chaque $a \in I$, d'une part la série de Taylor $T_{f,a}$ de rayon de convergence R_a $(0 < R_a \leqslant +\infty)$, de disque de convergence $\mathscr{D}_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R_a\}$ et la fonction associée $\Phi_a : \mathscr{D}_a \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \tilde{T}_{f,a}(z - a)$, d'autre part soit r_a un réel > 0 tel que $r_a \leqslant R_a$, Δ_a 1

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r_a\}$, r_a étant tel que $\tilde{T}_{f,a}(z-a) = f(z)$ pour $|z-a| < r_a$ et $z \in I$. Posons $F_a = \Phi_a|_{\Delta_a}$: les fonctions Φ_a et F_a sont toutes deux analytiques (théorème III.2.1). Soit enfin $\Omega = \bigcup_{a \in I} \mathscr{D}_a$ et $\omega = \bigcup_{a \in I} \Delta_a$: ce sont des *ouverts connexes* de $\mathbb{C}$, contenant I.

Considérons $a \in I$ et $b \in I$ tels que $\Delta_a \cap \Delta_b \neq \varnothing$: alors $\Delta_a \cap \Delta_b \cap I$ est un intervalle ouvert non vide sur lequel F_a et F_b coïncident avec f. Donc (corollaire 1 ci-dessus) F_a et F_b coïncident sur $\Delta_a \cap \Delta_b$ qui est un ouvert connexe. On peut donc définir $F : \omega \longrightarrow \mathbb{C}$ par la condition que $(\forall a \in I)\ F|_{\Delta_a} = F_a$, et il est clair que F est analytique sur ω et que $F|_I = f$. Donc F répond à la question. On peut même faire mieux et prolonger F à un ouvert plus grand que ω : à Ω. En effet soit $(a, b) \in I^2$ tels que $\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b \neq \varnothing$, avec $a < b$ pour fixer les idées. Notons $J_{a,b}$ l'intervalle (ouvert non vide) $\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b \cap I$. Les fonctions analytiques Φ_a et F coïncident sur Δ_a, donc sur la composante connexe $\omega_{a,b}$ de $\omega \cap \mathscr{D}_a$ qui contient a : cet ouvert $\omega_{a,b}$ contient $J_{a,b}$ (car l'intervalle minimal contenant a et $J_{a,b}$ est inclus dans $\omega \cap \mathscr{D}_a$). En particulier $\Phi_a|_{J_{a,b}} = F|_{J_{a,b}}$; de même $\Phi_b|_{J_{a,b}} = F|_{J_{a,b}}$. Comme $\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b$ est connexe, on en déduit que $\Phi_a|_{\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b} = \Phi_b|_{\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_b}$. On peut donc définir $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ par la condition que $(\forall a \in I)\ \Phi|_{\mathscr{D}_a} = \Phi_a$ et il est clair que Φ est analytique sur Ω et que $\Phi|_I = f$.

On remarque que $\omega \subset \Omega$ et que Φ *prolonge* f.

Exercice 1 : Soit $S \in \mathbb{C}\{X\}$ et $T \in \mathbb{C}\{X\}$, avec val $(T) \geq 1$. Définir un ouvert, le meilleur possible, $\Omega \subset \mathscr{D}_{\text{cv}}(T)$ tel que $(\forall z \in \Omega)\ \tilde{S}(\tilde{T}(z))$ et $\widetilde{(S \circ T)}(z)$ soient définis et égaux. Peut-il exister $z \in \mathscr{D}_{\text{cv}}(T)$ tel que $\tilde{S}(\tilde{T}(z))$ et $\widetilde{(S \circ T)}(z)$ soient définis et distincts ?

Exercice 2 : Soit $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, e^{itz}\, dt$ est analytique.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On donne $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. On suppose que, pour tout $z_0 \in \mathbb{U}$, on peut trouver r_0 réel > 0 tel que f admette un prolongement g_{z_0} de f à $\mathscr{D} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r_0\}$ qui soit une fonction analytique. Montrer qu'il existe un réel $R > 1$ tel que f se prolonge en une fonction $g : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui soit *analytique.*

N.B. On verra dans un chapitre ultérieur qu'une fonction analytique *sur un disque ouvert* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ (où $0 < r \leq +\infty$) est nécessairement somme d'une série entière de rayon $\geq r$, ce qui constitue une réciproque du théorème III.2.1.

Exercice 4 : PARTIE I. *a*) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $(\forall x \in\ ]0, 1[)\ f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)$. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est régulier pour f. Que dire des points de $\mathbb{Z}$?

b) Soit $C_p = \operatorname{Max}_{x \in \mathbb{R}} |f^{(p)}(x)|$ $(p \in \mathbb{N})$ et $M_p = \operatorname{Max}_{i \in [\![0, p]\!]} (1, C_i)$. On définit $g_0 = f$ et, si $m \in \mathbb{N}^*$, $(\forall x \in \mathbb{R})\ g_m(x) = \dfrac{1}{2^{m(m+1)} M_m} f(2^m x)$.

*b*1) Montrer que la série de fonctions de x : $\sum_m g_m(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

*b*2) Montrer : $(\forall (q,r)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}),\ \frac{q}{2^r}$ est point de pseudo-convergence pour g. En déduire : tout point $x\in\mathbb{R}$ est *singulier* pour f.

PARTIE II. Soit E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$\mu_n(f,x) = \underset{0\le k\le n}{\mathrm{Max}} \left|\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\right|^{\frac{1}{k+2}}$; $M_n(f) = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} (\mu_n(f,x))$, $(0\le M_n(f)\le +\infty)$.

Vérifier : $\forall (f,g)\in E^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mu_n(f+g,x) = \mu_n(f,x)+\mu_n(g,x)$.

a) Soit $f\in E$ et $x\in\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence de (I) et (II) :

(I) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(f,x) < +\infty$; (II) le rayon de convergence de $T_{f,x}$ est >0.

b) On pose $a_0=1$, $b_0=0$ et on note $u_0 : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto 1$ pour tout x. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $(\mathscr{R}_n)$ la proposition suivante :

$(\mathscr{R}_n)$ $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont réels >0 ; $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont entiers naturels et ces nombres vérifient les conditions (i), (ii), (iii) ci-après :

(i) $\forall p\in [\![1,n]\!]\ \ 0<a_p<1\le b_p$

(ii) si $u_p(x) = a_p\cos b_p x$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $p\in[\![0,n]\!]$, on a :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall k\in [\![0,n]\!])\ \mu_{2k}(u_0+u_1+\cdots+u_n, x) > k$$

(iii) $(\forall p\in[\![0,n]\!])\ \left[\dfrac{a_n(b_n)^p}{p!}\right]^{1/(p+2)} \le \dfrac{4}{n+1}$.

On donne $n\ge 1$, et on suppose construits $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$; $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ de façon que $(\mathscr{R}_{n-1})$ soit satisfaite. On pose $u_p(x) = a_p\cos b_p x$ $(p\in[\![0,n-1]\!])$.

*b*1) Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, montrer : $\lambda_{k,n} = \inf\limits_{x\in\mathbb{R}} (\mu_{2k}(u_0+\cdots+u_{n-1},x)-k)\in\mathbb{R}_+^*$. On posera $\alpha_n = \underset{0\le k\le n-1}{\mathrm{Min}} (\lambda_{k,n})$.

*b*2) Soit $B_n = n+1+\mathrm{Ent}\,(M_{2n}(u_0+\cdots+u_{n-1}))$. Justifier que $B_n\in\mathbb{N}^*$. On donne $q\in\mathbb{R}_+^*$, et on pose : $C_n = (2n)!\times(B_n)^{2n+2}$; $b_n = (C_n)^{q/(2n-1)}$ et $a_n = (C_n)^{1-q}\times\sqrt{2}$. Montrer qu'il est possible de choisir q de façon qu'on ait à la fois :

$$a_n<1\ ;\quad (\forall p\in[\![0,2n-2]\!])\ \left(\frac{1}{p!}a_n(b_n)^p\right)^{1/(p+2)} \le \frac{1}{2}\alpha_n\ ;$$

$$(\forall p\in[\![0,n]\!])\ \left(\frac{1}{p!}a_n(b_n)^p\right)^{1/(p+2)} \le \frac{1}{n+1}.$$

Prouver qu'ayant ainsi choisi q, la famille $(a_0, a_1, \dots, a_n\ ;\ b_0, b_1, \dots, b_n)$ satisfait $(\mathscr{R}_n)$.

c) On fixe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manière que $(\mathscr{R}_n)$ soit vraie pour tout n (avec $a_0=1$, $b_0=0$), et on pose : $u_p : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto a_p\cos(b_p x)$ $(p\in\mathbb{N}, x\in\mathbb{R})$.

*c*1) Montrer que $g : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est définie et que $g\in E$.

*c*2) Montrer : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall k\in\mathbb{N})\ \mu_{2k}(g,x)\ge k$. En déduire que *tout* $x\in\mathbb{R}$ *est point de divergence de* g.

PARTIE III. On donne $f\in E$; Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des points réguliers de f, et $\mathscr{S} = \mathbb{R}\backslash\mathscr{R}$. On rappelle que $\mathscr{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose trouvés α, β réels $(\alpha<\beta)$ tels que $(\forall x\in[\alpha,\beta])\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(f,x) < +\infty$. Soit $A_p = \left\{x\in[\alpha,\beta]\mid \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu_n(f,x)\le p\right\}$ et Ω l'union des intérieurs des A_p $(p\in\mathbb{N})$.

Montrer que $\Omega\cap\mathscr{R}\ne\varnothing$ en utilisant le théorème de Baire (cf. tome 2, chapitre XI, exercice 20 du § 2).

b) Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des points de pseudo-convergence de f est

Exercice 5 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ de rayon de convergence 1.

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer :

$$\left(a_n \underset{n \to \infty}{\in} O(n^p)\right) \Rightarrow \tilde{S}(z) \underset{|z| \leq 1}{\in} O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{p+1}}\right)$$

et réciproquement

$$\tilde{S}(z) \underset{|z| \leq 1}{\in} O\left(\frac{1}{(1-|z|)^{p+1}}\right) \Rightarrow a_n \underset{n \to \infty}{\in} O(n^p).$$

Indication : Utiliser les inégalités de Cauchy.

b) Soit $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 2π-périodique. Supposons trouvé $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \underset{n \to \infty}{\in} O(n^p)$.

Prouver que $\lim\limits_{r \to 1-0} \int_0^{2\pi} f(r\,e^{i\theta})\, \varphi(\theta)\, d\theta$ existe dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ de rayon $+\infty$.

a) Soit $r > 0$. On suppose :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |z| \leq r \Rightarrow \operatorname{Re}(f(z)) \leq 0.$$

Montrer que $(\forall n \geq 1)\ |a_n| \leq \dfrac{-2\operatorname{Re}(a_0)}{r^n}$.

b) Montrer que $\sup\limits_{|z| \leq r} \operatorname{Re}(f(z)) = B(r) \in \mathbb{R}_+$, et que

$$\left(\frac{B(r)}{r} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0\right) \Rightarrow (S = a_0).$$

c) Soit $\varphi(z) = \exp(\tilde{S}(z))$. On suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que $(\forall z \in \mathbb{C})\ |\varphi(z)| \leq K\, e^{\varepsilon |z|}$. Montrer que φ est constante.

Exercice 7 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}\{X\}$ de rayon R. On considère r réel > 0 et $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < r < R$.

a) Calculer
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{I_m(\tilde{S}(r\,e^{it}))}{r - z\,e^{-it}}\, dt.$$

b) Montrer que si $t \mapsto \tilde{S}(r\,e^{it})$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $S = a_0$.

§ III.3 *NOTIONS SUR LE LOGARITHME COMPLEXE*

Logarithmes d'un nombre complexe non nul

Rappelons quelques-uns des résultats établis au tome 2, §§ V.3 et 4 et utilisés dès le tome 1 §§ VI.7 et 8 :

L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z$ définit un homomorphisme surjectif du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$, de noyau $2\,i\pi\mathbb{Z}$.

L'application $\mathscr{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit un homomorph du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle *argument de z*, et on note arg (z), l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. On a toujours arg $(z) \neq \varnothing$, et si $\theta_0 \in \arg(z)$, on a vu que : $\arg(z) = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

Si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, on appelle *argument principal de z* l'unique élément de $\arg(z) \cap]-\pi, \pi[$, et on le note Arg (z). Rappelons la proposition V.4.1 du tome 2 : **si** $z \in \mathbb{U}\setminus\{-1\}$, en posant $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

(1) $$\operatorname{Arg}(z) = 2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{1+x}.$$

On sait en outre (cf. § III.2) que exp est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ tout entier (on dit que c'est une **fonction entière**) et que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{d^n}{dz^n} \exp(z) = \exp(z).$$

DÉFINITION III.3.1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. *On appelle* ***logarithme de z*** *dans* $\mathbb{C}$ *l'ensemble* $\{t \in \mathbb{C} \mid \exp(t) = z\}$. *Nous noterons* log (z) *cet ensemble.*

Soit $t = u + iv \in \mathbb{C}$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, et soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $e^t = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} = z = \frac{z}{|z|}|z|$, et du fait que $e^u > 0$ et que $e^{iv} \in \mathbb{U}$, on déduit :

$$t \in \log(z) \Leftrightarrow (|z| = e^u \text{ et } v \in \arg(z))$$

soit encore, en utilisant le fait que $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \operatorname{Log} u$ est bijective :

(2) $$t \in \log(z) \Leftrightarrow (u = \operatorname{Log}|z| \text{ et } v \in \arg(z)).$$

Compte tenu des propriétés de arg (z), cela donne :

THÉORÈME III.3.1

Si $z \in \mathbb{C}^*$, *l'ensemble* log (z) *est* ***non vide,*** *c'est l'ensemble* $\{\operatorname{Log}|z| + i\theta\}_{\theta \in \arg(z)}$.
En conséquence, pour tout $\theta_0 \in \arg(z)$, *on a :*

(3) $$\boxed{\log z = \operatorname{Log}|z| + i\theta_0 + 2i\pi\mathbb{Z}}.$$

L'argument principal d'un nombre complexe z n'est défini que si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$. Cet ensemble devant jouer un rôle important, no en abrégé $\mathbb{L}$. Il est clair que

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \pi \notin \arg(z)\} = \left\{z \in \mathbb{C}^* \,\middle|\, \frac{z}{|z|} \neq -1\right\}.$$

Pour $z \in \mathbb{L}$, on a donc : $\operatorname{Log}|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z) \in \log(z)$, ce qui conduit à la définition suivante :

DÉFINITION III.3.2

Pour $z \in \mathbb{L} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, *on appelle* ***logarithme principal*** *de* z *le* nombre $\operatorname{Log}|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)$. *Nous le noterons* $\operatorname{Log}(z)$. *La fonction* $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Log}(z)$ *s'appelle* ***fonction logarithme principal.***

On a : $\operatorname{Arg}(z) = 0$ ssi $z \in \mathbb{R}_+^*$. Donc *la restriction de* Log *à* $\mathbb{R}_+^*$ *est le logarithme népérien usuel.*

L'application $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Log}(z)$, est *injective,* puisque $\exp(\operatorname{Log}(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{L}$. Cherchons l'image de cette fonction. On sait que $\mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $(t, \lambda) \mapsto \lambda t$ est bijective ; la restriction de cette bijection à $(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}_+^*$ est une bijection $f : (\mathbb{U} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{L}$. D'autre part, $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ établit une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ (voir tome 2, § V.4) et $u \mapsto \mathrm{e}^u$, $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective. D'où, en composant, une bijection $g : \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{L}$, $(u, v) \mapsto \mathrm{e}^u\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{u + \mathrm{i}v}$. La définition III.3.2 montre que pour $(u, v) \in \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$, $\operatorname{Log}(\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}) = u + \mathrm{i}v$. Donc l'image de $\operatorname{Log} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ est la *bande ouverte* de $\mathbb{C}$, que nous noterons Λ, définie par :

$$\Lambda = \{u + \mathrm{i}v \mid (u, v) \in \mathbb{R} \times]-\pi, \pi[\} ;$$

cette image est un ouvert de $\mathbb{C}$. En résumé :

PROPOSITION III.3.1

La fonction logarithme principal définit une bijection de $\mathbb{L}$ *sur* Λ, *dont la bijection réciproque est* $\exp|_{\Lambda}$.

Quand z décrit la demi-droite ouverte réelle $\mathscr{D}_0$ de $\mathbb{C}$ d'origine 0 et d'argument $\theta_0 \in]-\pi, \pi[$, $\operatorname{Log}(z)$ décrit bijectivement la droite réelle $\{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(Z) = \theta_0\}$.

Quand z décrit le cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$, privé du point image de $-r$, $\operatorname{Log}(z)$ décrit bijectivement l'intervalle ouvert vertical :

$$\{Z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Log} r \text{ et } \operatorname{Im}(z) \in]-\pi, \pi[\}.$$

(Cf. fig. 1, où les flèches indiquent le sens de parcours.)

En tenant compte de la $2\,\mathrm{i}\pi$-périodicité de l'exponentielle, si l'on désigne, pour $k \in \mathbb{Z}$, par Λ_k la bande $2\,\mathrm{i}k\pi + \Lambda$, on a :

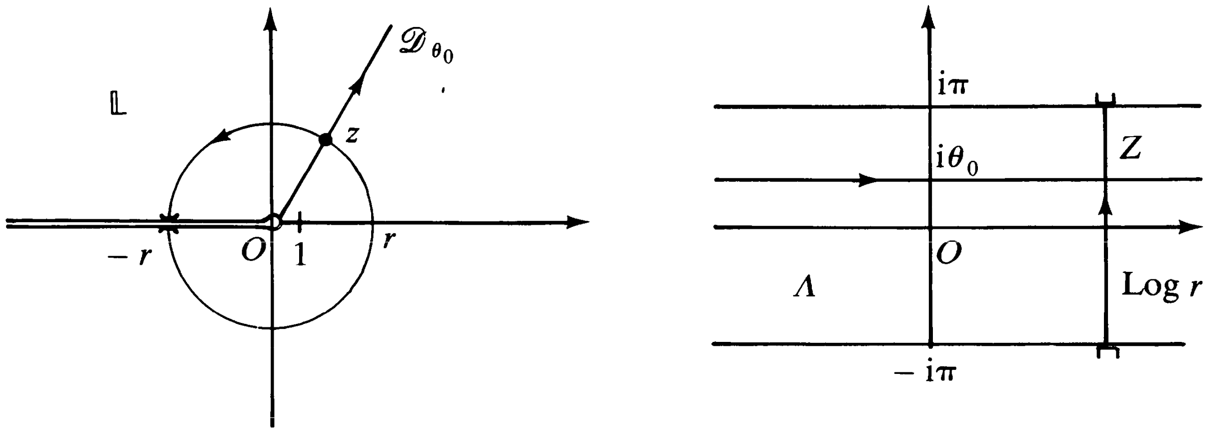


Fig. 1.

COROLLAIRE 1

Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'application exponentielle définit une bijection de Λ_k sur $\mathbb{L}$, dont la bijection réciproque est $z \mapsto \operatorname{Log}(z) + 2ik\pi$.

Compte tenu de $e^{i\pi} = -1$, en désignant, pour $k \in \mathbb{Z}$, par Λ'_k la bande $(2k+1)i\pi + \Lambda$, on obtient de même :

COROLLAIRE 2

Pour $k \in \mathbb{Z}$, l'application exponentielle définit une bijection de Λ'_k sur $\mathbb{L}' = -\mathbb{L} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, dont la bijection réciproque est

$$z \mapsto \operatorname{Log}(-z) + (2k+1)i\pi .$$

Déterminations du logarithme ou de l'argument

DÉFINITION III.3

Soit Ω un **domaine** *de $\mathbb{C}^*$. On appelle* **détermination du logarithme** *sur Ω toute fonction* **continue** *$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $(\forall z \in \Omega)$ $\exp(\varphi(z)) = z$.*
On appelle **détermination de l'argument** *sur Ω toute fonction* **continue** *$\Theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$(\forall z \in \Omega) \quad \frac{z}{|z|} = \exp(i\Theta(z)) .$$

Or, pour que $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ soit continue, il faut et il suffit que les fonctions Re (φ) et Im (φ) le soient, ce qui donne, combiné avec (2) :

(4) *f est une détermination du logarithme sur Ω ssi* Re (f) *est la fonction $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \operatorname{Log}|z|$ et* Im (z) *est une détermination de l'argument sur Ω.*

PROPOSITION III.3.2

> *Le logarithme principal (resp. l'argument principal) est* ***une détermination*** *du logarithme (resp. de l'argument) sur le domaine* $\mathbb{L}$.

Démonstration :

Pour $z \in \mathbb{L}$, on sait que $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)$. On sait déjà que la fonction $z \mapsto \operatorname{Log}|z|$ est continue sur $\mathbb{L}$. Il reste à prouver que Arg est continue sur $\mathbb{L}$. Or cela résulte de

$$(5) \quad \operatorname{Arg}(z) = 2 \operatorname{Arg} \operatorname{tg} \frac{y}{x+r}, \quad \text{où} \quad x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z) \text{ et } r = |z|$$

et des théorèmes sur les fonctions continues. ■

COROLLAIRE 1

> *La fonction* $z \mapsto \operatorname{Log}(-z) + \mathrm{i}\pi$ *est une détermination du logarithme sur le domaine* $\mathbb{L}' = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$.

Sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$, on a : $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(-z) + \mathrm{i}\pi$, mais sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$, on a : $\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(-z) - \mathrm{i}\pi$. Donc les déterminations du logarithme trouvées à la proposition III.3.2 et à son corollaire 1 coïncident sur une des composantes de $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}'$, mais pas sur l'autre.

COROLLAIRE 2

> *Pour chaque* $k \in \mathbb{Z}$ *(avec les notations des corollaires 1 et 2 de la proposition III.3.1), les bijections*
>
> $$\exp|_{\Lambda_k} : \Lambda_k \longrightarrow \mathbb{L}, \quad \textit{et} \quad \exp|_{\Lambda'_k} : \Lambda'_k \longrightarrow \mathbb{L}'$$
>
> *sont des* ***homéomorphismes,*** *respectivement de l'ouvert* Λ_k *sur l'ouvert* $\mathbb{L}$, *et de l'ouvert* Λ'_k *sur l'ouvert* $\mathbb{L}'$.

THÉORÈME III.3.2

> *Soit* Ω *un* ***domaine*** *de* $\mathbb{C}^*$ *; supposons trouvée une détermination* f *du logarithme (resp. une détermination* Θ *de l'argument) sur* Ω. *Alors les déterminations du logarithme (resp. de l'argument) sur* Ω *sont les fonctions :*
>
> $$f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) + 2\,\mathrm{i}k\pi, \quad \textit{où} \quad k \in \mathbb{Z}).$$
>
> *(resp.* $\Theta_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \Theta(z) + 2\,k\pi$, *où* $k \in \mathbb{Z}$).

Démonstration :

En vertu de (4) il suffit de prouver l'ass logarithmes. Il est évident (à cause de la $2\,i\pi$-périodicité de exp) que chacune des f_k est bien une détermination du logarithme sur Ω. Il reste à prouver qu'on les a toutes. Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une telle détermination. Pour $z \in \Omega$, on a :

$$\exp(f(z) - g(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1\,, \quad \text{d'où} \quad f(z) - g(z) \in 2\,i\pi\mathbb{Z}\,.$$

Mais $\dfrac{f-g}{i}$ est *continue* sur l'ouvert *connexe* Ω : son image est donc une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle (cf. théorèmes XI.3.2 et 3 du tome 2) inclus dans $2\,\pi\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $f - g$ est *constante*. Il existe donc un $k \in \mathbb{Z}$ convenable tel que $g(z) = f(z) + 2\,ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$, autrement dit : $g = f_k$. ■

Remarque 1 : On se gardera bien de croire que si Ω est un domaine quelconque de $\mathbb{C}^*$ il soit toujours possible de trouver une détermination f du logarithme (resp. de l'argument). Prenons par exemple $\Omega = \mathbb{C}^*$. Il est facile de constater qu'une telle détermination n'existe pas. En effet, supposons que f en soit une ; alors $f|_{\mathbb{L}}$ serait nécessairement de la forme $g : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \operatorname{Log} z + 2\,ik\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Or (5) montre que :

$$\operatorname{Arg}(z) \xrightarrow[z \longrightarrow -1,\ \operatorname{Im}(z) > 0]{} \pi \quad \text{tandis que} \quad \operatorname{Arg}(z) \xrightarrow[z \longrightarrow -1,\ \operatorname{Im}(z) < 0]{} -\pi\,,$$

donc g ne peut pas se prolonger par continuité au point -1, ce qui contredit la *continuité* de f en ce point. Donc f n'existe pas.

COROLLAIRE

> *Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}^*$ sur lequel on dispose d'une détermination f du logarithme (resp. θ de l'argument). Fixons $z_0 \in \Omega$ et $t_0 \in \log(z_0)$ (resp. $\theta_0 \in \arg(z_0)$). Il existe une, et une seule, détermination F du logarithme (resp. Θ de l'argument) sur Ω telle que $F(z_0) = t_0$ (resp. $\Theta(z_0) = \theta_0$).*

Démonstration :

Il suffit de prouver ce corollaire pour les logarithmes. Or par hypothèse $f(z_0) \in \log(z_0)$, donc pour un $k \in \mathbb{Z}$ convenable, $t_0 = f(z_0) + 2\,ik\pi$, ou, avec les notations du théorème III.3.2 : $t_0 = f_k(z_0)$. Si $k' \in \mathbb{Z}$ et $k' \neq k$, on a : $f_{k'}(z_0) = f_k(z_0) + 2\,i(k' - k)\,\pi \neq f_k(z_0)$, d'où l'assertion ; l'unique détermination F cherchée est f_k. ■

Exemple 1 : Le logarithme principal $\operatorname{Log} : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'unique détermination f du logarithme sur $\mathbb{L}$ telle que $f(1) = 0$. (C'est aussi l'unique détermination f du logarithme sur $\mathbb{L}$ telle que $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ soit le logarithme népérien usuel).

Nous aurons besoin pour la suite du résultat suivant :

LEMME 1

> *Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable. Pour que f soit* **constante**, *il faut et il suffit que* ***sa $\mathbb{C}$-dérivée f' soit nulle.***

Démonstration :

La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la remplie. Comme Ω est connexe, il suffit de prouver que $f' = 0 \Rightarrow f$ est localement constante (car alors, fixant $z_0 \in \Omega$, il en résultera aisément que l'ensemble $\mathscr{F} = \{z \in \Omega \mid f(z) = f(z_0)\}$ est à la fois non vide, et ouvert et fermé relativement à Ω, d'où $\mathscr{F} = \Omega$).

Soit donc $z_0 \in \Omega$. Choisissons r réel > 0 tel que $z \in \Omega$ pour $|z - z_0| < r$. Puis fixons z tel que $|z - z_0| < r$. La fonction $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(z_0 + t(z - z_0))$ est dérivable, et

$$(\forall t \in [0, 1]) \quad \varphi'(t) = (z - z_0)\, f'(z_0 + t(z - z_0)) = 0 .$$

Donc φ est constante, et $\varphi(1) = f(z) = \varphi(0) = f(z_0)$, donc $f(z) = f(z_0)$ pour z assez voisin de z_0. ■

THÉORÈME III.3.3

> *Pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$, on a :*
>
> $$\text{(6)} \qquad \boxed{\operatorname{Log}(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}} .$$

Démonstration :

Soit S la série formelle $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} X^n$, dont le rayon de convergence est 1. La fonction $\tilde{S}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur le disque $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et

$$\tilde{S}'(z) = (\widetilde{S'})(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1 + z} \quad \text{pour} \quad z \in \mathscr{D}.$$

Soit $\varphi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(\tilde{S}(z))$: c'est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable, de $\mathbb{C}$-dérivée $\tilde{S}'(z)\,\varphi(z) = \dfrac{\varphi(z)}{1 + z}$, d'où $(\forall z \in \mathscr{D})$ $(1 + z)\,\varphi'(z) - \varphi(z) = 0$, ce qui équivaut à $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{\varphi(z)}{1 + z}\right) = 0$. Donc, par le lemme 1, la fonction $z \mapsto \dfrac{\varphi(z)}{1 + z}$ reste constante sur $\mathscr{D}$ et y garde sa valeur au poi

Donc $(\forall z \in \mathscr{D})$ $\varphi(z) = 1 + z$. Il est ainsi prouvé que $\tilde{S}(z)$ est une détermination du logarithme de $1 + z$ sur $\mathscr{D}$, et comme $\tilde{S}(0) = 0$, le corollaire du théorème III.3.2 montre que : $\tilde{S}(z) = \text{Log}\,(1 + z)$ pour $z \in \mathscr{D}$. ■

THÉORÈME III.3.4

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^*$. Si f est une détermination du logarithme sur Ω, alors f est **analytique** *sur Ω, et*

$$(\forall z \in \Omega)\ f'(z) = \frac{1}{z}.$$

Démonstration :

Notons encore $\mathbb{L}' = -\mathbb{L} = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$. Puisque $\mathbb{L} \cup \mathbb{L}' = \mathbb{C}^*$, si $z_0 \in \Omega$, on peut choisir (ce qu'on fait) r réel > 0 tel que $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ soit inclus dans $\mathbb{L}$ ou inclus dans $\mathbb{L}'$. Si $V \subset \mathbb{L}$, $f|_V$ et $\text{Log}|_V$ étant deux déterminations du logarithme sur le domaine V diffèrent d'une constante. De même si $V \subset \mathbb{L}'$, $f|_V$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \text{Log}\,(-z)$ diffèrent d'une constante. Or les propriétés affirmées dans l'énoncé du théorème III.3.4 sont *locales*. Ce qui précède montre donc qu'*il suffit de prouver le théorème lorsque $\Omega = \mathbb{L}$ et $f = \text{Log}$* (logarithme principal).

Fixons alors $z_0 \in \mathbb{L}$, et soit r_0 la distance de z_0 à $\mathbb{R}_-$ ($r_0 = |\text{Im}\,(z_0)|$ si $\text{Re}\,(z_0) \leqslant 0$, $r_0 = |z_0|$ si $\text{Re}\,(z_0) \geqslant 0$). Le disque $\mathscr{D}_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r_0\}$ est inclus dans $\mathbb{L}$. Les fonctions $z \mapsto \text{Log}\,(z)$ et $z \mapsto \text{Log}\,(z_0) + \text{Log}\left(1 + \dfrac{z - z_0}{z_0}\right)$ sont deux déterminations du logarithme sur $\mathscr{D}_0$ (car si $z \in \mathscr{D}_0$,

$$\exp\left[\text{Log}\,(z_0) + \text{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right] = z_0\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right) = z),$$

qui coïncident en $z = z_0$.

Donc : $\quad (\forall z \in \mathscr{D}_0)\ \ \text{Log}\,(z) = \text{Log}\,(z_0) + \text{Log}\left(1 + \dfrac{z - z_0}{z_0}\right).$

Or si $z \in \mathscr{D}_0$, $|z - z_0| < r_0 \leqslant |z_0|$, donc $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$. Par le théorème III.3.3, il s'ensuit, pour $z \in \mathscr{D}_0$:

$$\text{Log}\,(z) = \text{Log}\,(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z - z_0)^n,$$

ce qui prouve bien que Log est *analytique* sur $\mathbb{L}$. En particulier, Log est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{L}$. Par composition des $\mathbb{C}$-dérivées, si $z \in \mathbb{L}$, on déduit de

$\exp(\mathrm{Log}\,(z)) = z$: $\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Log}\,(z))\right] \times \exp[\mathrm{Log}\,(z)] = 1$,

soit : $z \times \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Log}\,(z)) = 1$, c'est-à-dire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{Log}\,(z)) = \frac{1}{z}. \quad \blacksquare$$

Exercice 1 : Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$.

a) Trouver l'ensemble $\Omega_p = \{(z_1, z_2, \ldots, z_p) \in \mathbb{L}^p \mid z_1 z_2 \ldots z_p \in \mathbb{L}\}$. C'est un ouvert. Quelles sont ses composantes connexes ?

b) Pour $(z_1, z_2, \ldots, z_p) \in \Omega_p$, comparer $\mathrm{Log}\,(z_1 z_2 \ldots z_p)$ et $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Log}\,(z_k)$.

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$. Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on pose

$$\sigma_k(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{pn+k+1} \quad (N \in \mathbb{N}^*).$$

a) Utiliser le *logarithme principal* pour démontrer, en posant $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/p}$ que :

$$\sigma_k(N) = \frac{1}{p}\left[\gamma + \mathrm{Log}\,[(p+1)N] + \sum_{r=1}^{p-1} \omega^{-(k+1)r}(-\mathrm{Log}\,(1-\omega^r))\right] + \rho(N),$$

où $\rho(N) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$, γ désignant la constante d'Euler, dans le cas où p est *impair*.

Donner une expression analogue lorsque p est pair.

b) Mettre les expressions ainsi trouvées sous forme *réelle*.

Exercice 3 : Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m < n$, utiliser le logarithme principal pour calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 : Soit a et b deux entiers naturels, avec $1 \leqslant a < b$. On note, comme d'habitude, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ pour $1 < s < +\infty$. On se propose de calculer $S = \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n)\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

a) Montrer : $S = a \sum_{m=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{bm-a} - \dfrac{1}{bm}\right)$.

b) En déduire : $S = -\dfrac{a}{b} \sum_{\zeta \in \mu_b \setminus \{1\}} (\zeta^a - 1)\,\mathrm{Log}\,(1-\zeta)$, où μ_b désigne $\{z \in \mathbb{C} \mid z^b = 1\}$.

c) Ecrire l'expression de S sous forme *réelle*.

§ III.4 *FONCTIONS USUELLES DANS LE CHAMP COMPLEXE*

Nous conservons dans ce § la notation $\mathbb{L}$ pour $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Fonction puissance

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit la fonction $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{\alpha}$ par la formule :

$$\boxed{z^{\alpha} = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))} \quad (z \in \mathbb{L}) . \tag{1}$$

Il est clair que la restriction de cette fonction à $\mathbb{R}_+^*$ n'est autre que la *puissance α-ième* déjà définie à la fin du § V.3 du tome 2. Voyons les propriétés qui sont transmises à la nouvelle fonction.

• C'est tout d'abord la règle d'addition des exposants : si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$$\boxed{z^{\alpha} \cdot z^{\beta} = z^{\alpha + \beta}} \quad (z \in \mathbb{L}) . \tag{2}$$

En effet

$$\exp(\alpha \operatorname{Log}(z)) \times \exp(\beta \operatorname{Log}(z)) = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z) + \beta \operatorname{Log}(z)) = \\ = \exp((\alpha + \beta) \operatorname{Log}(z)) = z^{\alpha + \beta} .$$

En particulier, comme $z^0 = 1$, $z^{-\alpha} z^{\alpha} = 1$.

• Dans le cas particulier des exposants *entiers* : si $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{L}$, on retrouve, pour $\alpha > 0$:

$$z^{\alpha} = [\exp(\operatorname{Log}(z))] \times \cdots \times [\exp(\operatorname{Log}(z))] = \underbrace{z \times \cdots \times z}_{\alpha \text{ fois}} ;$$

pour $\alpha = 0$: $z^0 = 1$ et pour $\alpha < 0$: $z^{\alpha} = \dfrac{1}{z^{-\alpha}}$. Autrement dit, *lorsque* $\alpha \in \mathbb{Z}$, la fonction $z \mapsto z^{\alpha}$ définie par (1) *coïncide avec la restriction à* $\mathbb{L}$ *de la fonction rationnelle définie antérieurement* sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^*$ et notée de la même manière $z \mapsto z^{\alpha}$.

• Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on déduit de (2), et du fait que $z^{\beta} z^{-\beta} = 1$ pour tout β, que, si $z \in \mathbb{L}$:

$$\boxed{(z^{\alpha})^n = z^{\alpha n}} .$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{L}$:

$$\boxed{(z^{1/n})^n = z} .$$

Mais attention, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ quelconques tels que $z \in \mathbb{L}$ et $z^{\alpha} \in \mathbb{L}$, en général $(z^{\alpha})^{\beta} \neq z^{\alpha\beta}$.

• Enfin, la fonction $\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{\alpha}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* (puis de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables), et sa dérivée est

$$z^\alpha \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\alpha \operatorname{Log}(z)) = \frac{\alpha}{z} \times z^\alpha = \alpha z^{-1} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Par récurrence, on en déduit que cette fonction est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{L}$, avec $(\forall z \in \mathbb{L})\ (\forall p \in \mathbb{N}^*)$

(3) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}z^p}(z^\alpha) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)\, z^{\alpha-p}}.$$

Théorème III.4.1

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ donné, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

(4) $$\boxed{(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n}.$$

Démonstration :

Notons S_α la série formelle $\sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} X^n$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$ on obtient le polynôme $\sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} X^n$; si $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$ on trouve immédiatement que $\mathrm{R}_{\mathrm{cv}}(S_\alpha) = 1$. Notons $\mathscr{D}$ le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Un calcul facile montre que $(1+X)S'_\alpha - \alpha S_\alpha = 0$. Le terme constant de S_α étant 1, on en déduit que la fonction $y = \tilde{S}_\alpha$ vérifie, pour $z \in \mathscr{D}$, les conditions suivantes :

$y : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ dérivable, $y(0) = 1$ et $(1+z)y'(z) - \alpha y(z) = 0$. Soit alors $\varphi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto y(z) \times (1+z)^{-\alpha} = \dfrac{y(z)}{(1+z)^\alpha}$. C'est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable telle que $\varphi(0) = 1$ et

$$\begin{aligned}(\forall z \in \mathscr{D}) : \varphi'(z) &= y'(z)(1+z)^{-\alpha} + y(z)(-\alpha)(1+z)^{-\alpha-1} = \\ &= (1+z)^{-\alpha-1}[(1+z)y'(z) - \alpha y(z)] = 0.\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme 1 du § III.3, φ est constante sur $\mathscr{D}$. Elle y vaut $\varphi(0) = 1$, d'où $(\forall z \in \mathscr{D})\ y(z) = (1+z)^\alpha$. ■

Corollaire

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ fixé, la fonction $f : z \mapsto z^\alpha$ est analytique sur $\mathbb{L}$.

Démonstration :

L'analyticité de z^α est immédiate puisque c'est la composée de fonctions analytiques. Mais ne nous contentons pas théorique et cherchons à *expliciter* le DSE_{z_0} tout en redémontrant son existence. On a vu dans la preuve du théorème III.3.4 que, si $z_0 \in \mathbb{L}$, il existe $r_0 > 0$ tel que, pour $|z - z_0| < r_0$, on ait :

$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z_0) + \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{z - z_0}{z_0}\right)$, d'où dans ces conditions :

$$z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z)) = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z_0)) \times$$
$$\times \exp\left[\alpha \operatorname{Log}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)\right] = z_0^\alpha\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right)^\alpha .$$

Mais comme alors $\left|\dfrac{z - z_0}{z_0}\right| < 1$, par le théorème III.4.1, on obtient :

$$z^\alpha = z_0^\alpha\left[\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z_0^{\alpha - n}(z - z_0)^n . \quad \blacksquare$$

Fonctions circulaires et hyperboliques usuelles

Rappelons que, par définition, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Les quatre fonctions ch, sh, cos, sin, sont sommes de séries entières de rayon infini ; par la proposition III.2.2, elles sont *analytiques* sur $\mathbb{C}$. Leurs $\mathbb{C}$-dérivées s'obtiennent immédiatement : $\dfrac{d}{dz}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z$, $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z$, $\dfrac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$, $\dfrac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$. Les principales formules algébriques vérifiées par ces fonctions ont été établies dans le tome 2 (cf. § V.3). L'une de leurs propriétés des plus remarquables est leur *périodicité* qui résulte de celle de l'exponentielle : le groupe des périodes dans $\mathbb{C}$ de ch et de sh est $2i\pi\mathbb{Z}$, celui de cos et sin est $2\pi\mathbb{Z}$. Nous avons également obtenu *tous les zéros* de ces fonctions (cf. § II.4), ce qui a permis de préciser le domaine de définition des fonctions tg, cotg, th et coth qui sont *analytiques dans leurs domaines respectifs* leurs $\mathbb{C}$-dérivées étant respectivement $1 + \operatorname{tg}^2 z$, $-1 - \operatorname{cotg}^2 z$, $1 - \operatorname{th}^2 z$ et $\operatorname{coth}^2 z - 1$, leur groupe de périodes étant $\pi\mathbb{Z}$ pour les deux premières et $i\pi\mathbb{Z}$ pour les deux dernières.

Enfin il est clair que les fonctions *circulaires* se ramènent aux fonctions *hyperboliques* par les formules $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$, $\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz$, et réciproquement.

Extension à des domaines de $\mathbb{C}$ de Arc tg et Arg th

Rappelons que, devant l'impossibilité de définir une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, nous nous sommes contentés de définir logarithme principal (notée Log) sur le domaine $\mathbb{L} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Nous procédons ici de la même manière pour définir de nouvelles fonctions Arc tg et Arg th dans des *domaines* de $\mathbb{C}$ suffisamment vastes. A cet effet, notons $\mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geqslant 1\}$ et $\mathbb{T}' = \mathrm{i}\mathbb{T} = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}x\}_{x \in \mathbb{R},\, |x| \geqslant 1}$, ensembles représentés ci-dessous dans le plan d'Argand-Cauchy.

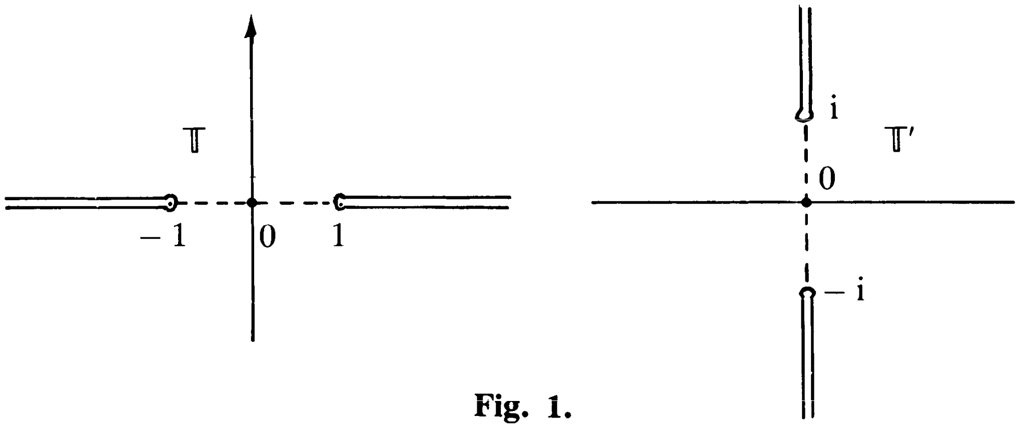


Fig. 1.

Il est clair que si $z \in \mathbb{T}$, $1 + z \in \mathbb{L}$ et $1 - z \in \mathbb{L}$. De même, si $z \in \mathbb{T}'$, $1 + \mathrm{i}z \in \mathbb{L}$ et $1 - \mathrm{i}z \in \mathbb{L}$. On pose alors :

Définition III.4.1

Pour $z \in \mathbb{T}$ on appelle **argument th principal** *de z (et l'on note* Arg th z*) le nombre défini par :*

(5) $$\operatorname{Arg\,th} z = \frac{1}{2}\,[\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z)]\,.$$

Pour $z \in \mathbb{T}'$ on appelle **arc tangente principal** *de z (et l'on note* Arc tg z) *le nombre défini par :*

(6) $$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{-\mathrm{i}}{2}\,[\operatorname{Log}(1+\mathrm{i}z) - \operatorname{Log}(1-\mathrm{i}z)] = -\mathrm{i}\operatorname{Arg\,th} \mathrm{i}z\,.$$

Se trouvent ainsi définies deux fonctions : $\operatorname{Arg\,th} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\operatorname{Arc\,tg} : \mathbb{T}' \longrightarrow \mathbb{C}$, dont voici les propriétés essentielles :

- Arg th et Arc tg sont visiblement des fonctions *impaires*.
- Ce sont des fonctions *analytiques*, et leurs $\mathbb{C}$-dérivées se calculent immédiatement, par exemple

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Arg\,th} z = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Log}(1+z) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\operatorname{Log}(1-z) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1+z} + \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{\ }\,,$$

et de même pour Arc tg. Nous retiendrons :

$$\boxed{\begin{array}{lll} (7) & (\forall z \in \mathbb{T}) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\operatorname{Arg\,th} z) = \dfrac{1}{1-z^2} \\ (8) & (\forall z \in \mathbb{T}') & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\operatorname{Arc\,tg} z) = \dfrac{1}{1+z^2} \end{array}}\ .$$

• *La restriction* de Arg th à l'intervalle $]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$ *est l'Arg th ordinaire* de la variable réelle car pour $z \in\ ]-1, 1[$ $(z \in \mathbb{R})$ $\operatorname{Log}(1+z)$ et $\operatorname{Log}(1-z)$ sont les logarithmes népériens usuels de $1+z$ et $1-z$.

• *La restriction* de Arc tg à $\mathbb{R}$ est *l'Arc tg ordinaire* de la variable réelle car cette restriction a pour $\mathbb{R}$-dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et que $\operatorname{Arc\,tg}(0) = 0$.

• Par le théorème III.3.3 on obtient les DSE_0 valables pour $|z| < 1$:

$$(9) \qquad \boxed{\operatorname{Arg\,th} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} z^{2n+1}, \quad \operatorname{Arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}}\ .$$

• Si $z \in \mathbb{T}$, alors $\operatorname{ch}(\operatorname{Arg\,th} z) \neq 0$ et $\boxed{\operatorname{th}(\operatorname{Arg\,th} z) = z}$. En effet, en posant $u = \operatorname{Arg\,th} z$ pour $z \in \mathbb{T}$, il vient

$$\mathrm{e}^{2u} + 1 = \mathrm{e}^{\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z)} + 1 = \frac{1+z}{1-z} + 1 = \frac{2}{1-z} \neq 0\,,$$

donc
$$2 \operatorname{ch} u = \mathrm{e}^{-u}(\mathrm{e}^{2u} + 1) \neq 0\,;$$

puis
$$\operatorname{th} u = \frac{\mathrm{e}^{2u} - 1}{\mathrm{e}^{2u} + 1} = \frac{\dfrac{1+z}{1-z} - 1}{\dfrac{1+z}{1-z} + 1} = z\,.$$

• Si $z \in \mathbb{T}'$, alors $\cos(\operatorname{Arc\,tg} z) \neq 0$ et $\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} z) = z}$.
En effet

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,tg} z) = \frac{1}{\mathrm{i}} \operatorname{th}(\mathrm{i} \operatorname{Arc\,tg} z) = \frac{1}{\mathrm{i}} \operatorname{th}(\operatorname{Arg\,th} \mathrm{i}z) = \frac{1}{\mathrm{i}}\, \mathrm{i}z = z\,.$$

Extension à des domaines de $\mathbb{C}$ de Arg sh et Arc sin

Nous utilisons encore les notations $\mathbb{L}$, $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$.

Lemme 1

Si $z \in \mathbb{T}'$, *alors* $1 + z^2 \in \mathbb{L}$ *et* $z + (1+z^2)^{1/2} \in \mathbb{L}$.

Si $z \in \mathbb{T}$, *alors* $1 - z^2 \in \mathbb{L}$ *et* $\mathrm{i}z + (1-z^2)^{1/2} \in \mathbb{L}$.

Démonstration :

On passe de la première assertion à la seconde par le changement $z \mapsto iz$. Il suffit donc de prouver la première. Soit $z \in \mathbb{T}'$: il est flagrant que $1 + z^2 \in \mathbb{L}$, ce qui permet de définir $(1 + z^2)^{1/2}$. Il reste à prouver que $z + (1 + z^2)^{1/2} \notin \mathbb{R}_-$. Désignons ce nombre par ρ et supposons qu'il soit réel. On voit d'abord qu'il est $\neq 0$ car $(1 + \rho^2)^{1/2} = -\rho$ est impossible. Ensuite, en écrivant $(\rho - z)^2 = 1 + z^2$, on voit que $z = \dfrac{\rho^2 - 1}{2\rho} \in \mathbb{R}$. D'après l'étude de la fonction $z \mapsto z^\alpha$, il s'ensuit alors que $(1 + z^2)^{1/2}$ n'est autre que $\sqrt{1 + z^2}$, ce qui montre que $\rho = z + \sqrt{1 + z^2} \in \mathbb{R}_+^*$. En définitive ρ n'est jamais un réel $\leqslant 0$, donc $\rho \in \mathbb{L}$. ■

DÉFINITION III.4.2

Pour $z \in \mathbb{T}'$, *on pose :*

$$(10) \qquad \boxed{\operatorname{Arg\,sh} z = \operatorname{Log}\,(z + (1 + z^2)^{1/2})}\,.$$

Pour $z \in \mathbb{T}$, *on pose :*

$$(11) \qquad \boxed{\operatorname{Arc\,sin} z = -\,\mathrm{i}\operatorname{Log}\,(\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{1/2}) = -\,\mathrm{i}\operatorname{Arg\,sh}\mathrm{i}z}\,.$$

On a ainsi défini deux fonctions dont voici les propriétés de base :

• Arg sh (et par conséquent Arc sin) sont des fonctions *impaires*. En effet, si $z \in \mathbb{T}'$, $(z + (1 + z^2)^{1/2})(-z + (1 + z^2)^{1/2}) = 1$.

Or, pour tout $u \in \mathbb{L}$, $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{u}\right)$ est l'opposé de $\operatorname{Log}(u)$ car la fonction $u \mapsto \operatorname{Log}\left(\dfrac{1}{u}\right) + \operatorname{Log}(u)$ a une $\mathbb{C}$-dérivée nulle et s'annule au point $u = 1$. D'où $\operatorname{Arg\,sh}(-z) = -\operatorname{Arg\,sh} z$.

• Arg sh et Arc sin sont des fonctions *analytiques* comme composées de telles fonctions. Leurs $\mathbb{C}$-dérivées sont faciles à calculer et donnent :

$$\boxed{\begin{array}{lll} (12) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\operatorname{Arg\,sh} z) = (1 + z^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{(1 + z^2)^{1/2}} & \text{pour tout } z \in \mathbb{T}', \text{ et} \\ (13) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\operatorname{Arc\,sin} z) = (1 - z^2)^{-1/2} = \dfrac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} & \text{pour tout } z \in \mathbb{T}\,. \end{array}}$$

• *La restriction* à $\mathbb{R}$ de Arg sh défini par (10) n'est autre que *l'Arg sh ordinaire* de la variable réelle, car si $z \in \mathbb{R}$, $(1 + z^2)^{1/2} = \sqrt{1 + z^2}$, $z + \sqrt{1 + z^2} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\operatorname{Log}|_{\mathbb{R}_+^*}$ est le logarithme népérien usu

• De même, *la restriction* à $]-1, 1[$ de Arc sin défini par (11) *est l'Arc sin ordinaire* de la variable réelle.

C'est une conséquence de la formule (13) et de $\text{Arc}\sin 0 = 0$.

• Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

(14) $$\boxed{\text{Arg}\,\text{sh}\,z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} z^{2n+1}}$$

(15) $$\boxed{\text{Arc}\sin z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} z^{2n+1}}\,.$$

En effet les séries formelles S et T qui apparaissent aux seconds membres de (14) et (15) ont un rayon de convergence égal à 1. Dans $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, les fonctions $\tilde{S}$ et $\tilde{T}$ sont $\mathbb{C}$-dérivables, et on s'aperçoit, en comparant avec le théorème III.4.1, que $\tilde{S}'(z) = (1+z^2)^{-1/2}$ et $\tilde{T}'(z) = (1-z^2)^{-1/2}$. Grâce au lemme 1 du § III.3 et au fait que $\tilde{S}(0) = \text{Arg}\,\text{sh}\,0 = 0 = \tilde{T}(0) = \text{Arc}\sin 0$, on aboutit bien à (14) et (15).

• Enfin, par un calcul direct facile, on vérifie les relations :

(16) $$(\forall z \in \mathbb{T}') \quad \text{sh}\,(\text{Arg}\,\text{sh}\,z) = z\,, \quad \text{et}$$

(17) $$(\forall z \in \mathbb{T}) \quad \sin\,(\text{Arc}\sin z) = z\,.$$

Par exemple, si $z \in \mathbb{T}'$, $\exp[\text{Log}\,(z + (1+z^2)^{1/2})] = z + (1+z^2)^{1/2}$;

$$\exp[-\text{Log}\,(z + (1+z^2)^{1/2})] = \frac{1}{z + (1+z^2)^{1/2}} = -z + (1+z^2)^{1/2}\,;$$

d'où $\text{sh}\,(\text{Arg}\,\text{sh}\,z) = z$.

Exercice 1 : Montrer, pour tout $z \in \mathbb{C}$, les inégalités suivantes :

$$|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|\, e^{|z|}\,.$$

Exercice 2 : Montrer que si $-\pi < a < \pi$, et si $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\text{ch}\,ay}{\text{ch}\,\pi y} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = n + \frac{1}{2} + iy \quad (y \in \mathbb{R})$$

et $$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\text{ch}\,a\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\text{sh}\,\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = x + i\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

Exercice 3 : Calculer les parties réelle et imaginaire des nombres suivants, où $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) z^{α}, où $z \in \mathbb{L}$ et $\alpha = a + ib$ (a et b réels), par exemple i^i.
b) Arc sin z, où $z \in \mathbb{T}$ *c*) Arg th z, où $z \in \mathbb{T}$.

Exercice 4 : Pour $z \in \mathbb{C}$, calculer *lorsqu'ils sont définis* : Arg th (th z) ; Arc tg (tg z) ; Arg sh (sh z) ; Arc sin (sin z) et faire un dessin.

Exercice 5 : *a*) Si $\alpha \in \mathbb{C}$, trouver l'ensemble Δ_α des $z \in \mathbb{L}$ tels que $z^{\alpha} \in \mathbb{L}$; puis, pour $z \in \Delta_\alpha$, comparer α Log (z) et Log (z^{α}).
b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $z \in \Delta_\alpha$. Comparer $(z^{\alpha})^{\beta}$ et $z^{\alpha\beta}$; puis, si $z \in \Delta_\alpha \cap \Delta_\beta$, comparer $(z^{\alpha})^{\beta}$, $(z^{\beta})^{\alpha}$ et $z^{\alpha\beta}$.

Exercice 6 : Etudier les transformées des courbes canoniques Re (z) = Cte et Im (z) = Cte du plan $\mathbb{C}$ d'Argaud-Cauchy par chacune des applications suivantes :
a) $z \mapsto \exp(z)$ *b*) $z \mapsto z + \dfrac{1}{z}$
c) $z \mapsto \operatorname{sh} z$ (resp. $z \mapsto \operatorname{ch} z$, $z \mapsto \cos z$, $z \mapsto \sin z$)
d) $z \mapsto \operatorname{tg} z$ (resp. $z \mapsto \operatorname{th} z$).

Exercice 7 : Soit $\Delta_1 = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1[\cup [0, 1])$ et $\Delta_2 = \mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [1, +\infty])$. Montrer que pour $k \in \{1, 2\}$, il existe $\varphi : \Delta_k \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue* telle que

(1) $$(\forall z \in \Delta_k) \quad \varphi^2(z) = z(z^2 - 1).$$

Pour k fixé, trouver toutes les fonctions φ vérifiant (1) sur Δ_k.

Exercice 8 : Soit (a_n) une suite complexe et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la suite $\left(\dfrac{|a_n|}{n^{\rho}}\right)_{n \geq 1}$ soit *bornée*.
a) Etudier les ensembles de convergence uniforme de la série de fonctions de z : $\sum u_n(z)$, où $u_n(z) = a_n \, e^{2i\pi nz}$.
b) Si $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, prouver qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout z vérifiant Im $(z) > 0$, on ait $\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right| \leq \dfrac{C}{y^{\rho+1}}$.

§ III.5 *UN THÉORÈME D'ABEL*

Soit une série formelle $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$, de rayon de convergence R, avec $0 < R < +\infty$. Nous avons remarqué dès le § II.1 que, tandis que dans le disque de convergence $\mathscr{D}_{cv}(S)$ la série entière $\sum a_n z^n$ avait un comportement parfaitement « normal », il n'en est plus de même sur le *cercle d'incertitude* $\Gamma_S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$: Γ_S peut, selon le cas, ne contenir aucun point de convergence, ou en contenir un nombre fini, ou parfois ne contenir aucun point de divergence, ou seulement un nombre fini ; il peut arriver aussi que Γ_S contienne un ensemble dense de points de convergence et un ensemble dense de points de divergence (cf. exercice 3). Au-delà de l'étude de la convergence de la série $\sum a_n z_0^n$ en un point $z_0 \in \Gamma_S$, on s'intéresse aussi au *comportement de la fonction $\tilde{S}$ lorsqu'on s'approche de* z_0. L'étude en est d'autant plus délicate qu'il y a beaucoup de manières de « s'approcher » de z_0. Nous nous limiterons ici à un résultat très simple, mais qui est déjà très performant.

Commençons par l'étude de $\tilde{S}$ au voisinage de $z_0 \in \Gamma_S$ quand la série $\sum a_n z_0^n$ diverge, $S = \sum a_n X^n$ étant donnée, de rayon R fini non nul.

PROPOSITION III.5.1

Soit $z_0 \in \Gamma_S$ un point de divergence *de la série entière $\sum a_n z^n$. Alors cette série entière ne converge uniformément sur aucun ensemble de $\mathscr{D}_S$ admettant z_0 pour point d'accumulation, $\mathscr{D}_S$ désignant le disque de convergence ($\mathscr{D}_S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$).*

Démonstration :

Soit $A \subset \mathscr{D}_S$, admettant z_0 pour point d'accumulation. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $a_n z^n \xrightarrow[z \to z_0,\, z \in A]{} a_n z_0^n$, et la fonction $z \mapsto a_n z^n$ est continue. Si la convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ était de surcroît *uniforme* sur A, le *théorème de la double limite* (cf. tome 2, théorème XII.2.2) s'appliquerait et entraînerait en particulier la convergence de la série $\sum a_n z_0^n$, ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

Passons maintenant au cas où, toujours pour $z_0 \in \Gamma_S$, la série $\sum a_n z_0^n$ converge, en remarquant au préalable que le changement de variable $z \mapsto z_0 z$ transforme S en $T = \sum_{n \geqslant 0} a_n z_0^n X^n$ de rayon 1, et que l'étude de $\tilde{S}$ au voisinage de z_0 se ramène à celle de $\tilde{T}$ au voisinage de 1, ce qui simplifie l'étude.

THÉORÈME III.5.1 (Abel)

Soit $z_0 \in \Gamma_S$ un point de convergence *de la série entière $\sum a_n z^n = S$. Alors cette série entière* **converge uniformément** *sur le rayon $\{tz_0\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$. En conséquence :*

$$\tilde{S}(tz_0) \xrightarrow[t \to 1,\, t \in \mathbb{R},\, 0 \leqslant t < 1]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

(théorème d'Abel « radial »).

Démonstration :

En vertu de la remarque précédant l'énoncé du théorème, on peut supposer $R = 1$ et $z_0 = 1$.

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha \leqslant \beta$ on peut poser $s_{\alpha,\beta} = \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} a_n$ $(s_{\alpha,\alpha} = 0)$.

Pour t réel et $t \in [0, 1]$, et pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$, la transformation d'Abel (cf. tome 2, § IX.4) permet d'écrire :

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n t^n = \sum_{n=p+1}^{q} (s_{p,n} - s_{p,n-1}) t^n = s_{p,q} t^q + \sum_{n=p+1}^{q-1} s_{p,n}(t^n - t^{n+1}),$$

d'où:

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n t^n \right| \leqslant |s_{p,q}| t^q + \left(\sup_{n \geqslant p+1} |s_{p,n}| \right) \sum_{n=p+1}^{q-1} (t^n - t^{n+1})$$

car évidemment $t^{n+1} \leqslant t^n$, soit :

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n t^n \right| \leqslant |s_{p,q}| t^q + (t^{p+1} - t^q) \left(\sup_{n \geqslant p+1} |s_{p,n}| \right)$$

$$\leqslant 2 \sup_{n \geqslant p+1} |s_{p,n}| \xrightarrow[p \to \infty]{} 0 \quad \text{puisque} \quad \sum_{n \geqslant 0} a_n \text{ converge .}$$

Donc la série de fonctions de t : $\sum a_n t^n$ vérifie sur $[0, 1]$ le *critère de Cauchy uniforme*, donc converge bien uniformément sur $[0, 1]$. Comme les fonctions $t \mapsto a_n t^n$ sont toutes continues, *la somme de la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ $(t \in [0, 1])$ *est continue au point 1,* ce qui entraîne bien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \xrightarrow[t \to 1, t \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t < 1]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \quad \blacksquare$$

Etude d'un exemple

Choisissons comme exemple simple la série formelle $S = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} X^n$, dont le rayon de convergence est 1.

Il est évident que la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$ diverge pour $z = 1$ (série harmonique) et en revanche, pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, la série $\sum \frac{1}{n} z^n$ converge (cf. tome 2, § IX.4, exemple 4). Fixons alors $z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $z_0 = e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]0, 2\pi[$, et appliquons le théorème III.5.1. On trouve :

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta_0}}{n} = \lim_{t \xrightarrow{<} 1, t \in \mathbb{R}_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n z_0^n}{n} .$$

Mais pour t réel et $0 \leqslant t < 1$, on reconnaît $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tz_0)^n}{n}$: c'est

$-\operatorname{Log}(1-tz_0)$ (cf. théorème III.3.). Par ailleurs $z \mapsto \operatorname{Log}(1-z)$ est définie et continue pour $1-z \in \mathbb{L}$, c'est-à-dire pour $z \in \mathbb{C}\setminus[1,+\infty[$. En particulier :

$$-\operatorname{Log}(1-tz_0) \underset{t\to 1,\, 0\leq t<1}{\longrightarrow} -\operatorname{Log}(1-z_0).$$

On en déduit :

$$(2)\qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta_0}}{n} = -\operatorname{Log}(1-z_0) = -\operatorname{Log}(1-e^{i\theta_0})}\,.$$

En explicitant $-\operatorname{Log}(1-\cos\theta_0 - i\sin\theta_0)$, compte tenu du fait qu'on a choisi $\theta_0 \in \,]0, 2\pi[$, il vient :

$$1-e^{i\theta_0} = 2\sin\frac{\theta_0}{2}\left(\sin\frac{\theta_0}{2} - i\cos\frac{\theta_0}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta_0}{2}\times e^{i\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\pi}{2}\right)},$$

d'où : $$-\operatorname{Log}(1-e^{i\theta_0}) = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right) + i\,\frac{\pi-\theta_0}{2},$$

et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$(3)\qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta_0}{n} = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\ ;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta_0}{n} = \frac{\pi-\theta_0}{2}}$$

pour θ_0 réel tel que $0<\theta_0<2\pi$.

Nous retrouverons les formules (3) sous un autre aspect dans la théorie des séries de Fourier au chapitre IV.

Exercice 1 : On considère la série formelle $S = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}X^n \in \mathbb{C}[[X]]$, et on pose $D = \{z\in\mathbb{C} \mid (|z|<1 \text{ et } |1-z|<1)\}$. Montrer qu'il existe une constante a telle que l'on ait :

$$(\forall z\in D)\quad \tilde{S}(z) + \tilde{S}(1-z) = a - \operatorname{Log}(z)\operatorname{Log}(1-z).$$

Utiliser le théorème d'Abel pour montrer :

$$a = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2},\quad a-(\operatorname{Log}2)^2 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2\times 2^{n-1}}.$$

Exercice 2 : Etudier sur leur cercle d'incertitude Γ_S les séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{n\sqrt{\operatorname{Log} n}}{n^2+1}z^n$ *b)* $\sum\left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]z^n$

c) $\sum\left(\operatorname{Arc}\cos\frac{n^\alpha}{n^\alpha+1}\right)z^n (0<\alpha<1)$ *d)* $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha+(-1)^n}z^n \quad (\alpha > 0)$

e) $\sum z^n \sin(\pi \sqrt[3]{n^3+n+1})$ *f*) $\sum_{n\geq 1} \frac{s_n}{n+1} z^n$, avec $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

g) les séries entières qui représentent Arc sin z, ou Arc tg z.

Exercice 3 : Soit $S = \sum_{n\geq 1} a_n X^n$ avec $a_n = \frac{1}{p}$ si $n = 3^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $a_n = \frac{-1}{p}$ si $n = 2 \times 3^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et $a_n = 0$ dans les autres cas. Montrer que $R_{cv}(S) = 1$ et que sur $\mathbb{U}$ l'ensemble $\mathscr{C}$ des points de convergence et l'ensemble $\mathbb{U}\backslash\mathscr{C}$ sont tous deux denses dans $\mathbb{U}$. *Indication :* Considérer les points $z = e^{i(2l\pi/3^k)}$ et les points $z = e^{i(2l+1)\pi/3^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*, l \in \mathbb{Z}$).

***Exercice 4** (théorème de Tauber) :* Soit (a_n) une suite de $\mathbb{C}$ telle que $a_n \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que la série $\sum |a_n|$ diverge.

a) Vérifier que si $S = \sum a_n X^n$, alors $R_{cv}(S) = 1$.

b) On suppose que $\tilde{S}(t) \underset{t \stackrel{<}{\to} 1, t\in\mathbb{R}}{\longrightarrow} 0$. Prouver qu'alors la série $\sum a_n$ converge et a une somme nulle. *Indications :*

1) Poser $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$. Pour $x \in [0,1[$, écrire : $s_m - \tilde{S}(x) = \left[\sum_{n=1}^{m} a_n(1-x^n)\right] - R_m(x)$.

2) Prouver : $1 - x^n \leq n(1-x)$ ($x \in [0,1[, n \in \mathbb{N}$) et en déduire :

$$\left|s_m - \tilde{S}(x)\right| \leq (1-x)\sum_{n=1}^{m} n|a_n| + \rho_m(x) \quad \text{avec} \quad \rho_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\, x^n.$$

3) Si $\varepsilon_m = \sup_{n>m} |na_n|$, prouver : $\rho_m(x) \leq \frac{\varepsilon_m}{m(1-x)}$. Enfin, prouver que $\tilde{S}\left(1 - \frac{1}{m}\right) - s_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et conclure.

N.B. Se reporter à l'épreuve écrite d'Analyse de X.82, M' pour un théorème plus puissant dans le même ordre d'idées.

Exercice 5 : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ telle que la série $\sum |a_n|$ diverge et que $a_n \underset{n\to\infty}{\in} o\left(\frac{1}{n}\right)$ (d'où $R_{cv}(S) = 1$).

a) On suppose que la *famille* de fonctions de φ, $(S(r\,e^{i\varphi}))_{0\leq r<1}$ converge uniformément vers une fonction $g(\varphi)$ sur $\mathbb{R}$ quand $r \stackrel{<}{\to} 1$. Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément dans $\tilde{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ (se reporter à l'exercice 4).

b) On suppose $a_n \underset{n\to\infty}{\in} O\left(\frac{1}{n}\right)$ (d'où encore $R_{cv}(S) = 1$), et :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall z \in \mathbb{C}), \quad |z| < 1 \Rightarrow \left|\tilde{S}(z)\right| \leq M.$$

Prouver : $\exists A \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall m \in \mathbb{N}) \quad \left|\sum_{n=0}^{m} a_n e^{in\varphi}\right| \leq A.$

Exemple 6 (exemple de Hardy) : Soit S la série entière $(1-z)^{-i} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \binom{-i}{n} z^n$ (où i désigne $e^{i\frac{\pi}{2}}$). On pose $b_n = (-1)^n \binom{-i}{n}$ et, pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{b_n}{\text{Log}\, n}$.

a) Vérifier que $\tilde{S}$ est bornée sur le disque unité $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

b) Montrer que $b_n \underset{n\to\infty}{\in} O(n)$ et que la série $\sum \frac{|b_n|}{\text{Log}\, n}$ diverge.

c) En utilisant l'exercice 5 *b*), montrer : $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(\forall m \geqslant 2, \forall \varphi \in \mathbb{R}), \quad \left| \sum_{n=2}^{m} b_n \, \mathrm{e}^{in\varphi} \right| \leqslant C .$$

d) Soit $S = \sum a_n X^n$. Vérifier que S est de rayon 1. Par une transformation d'Abel faisant apparaître les sommes $B_m = \sum_{n=2}^{m} b_n \, \mathrm{e}^{in\varphi}$, montrer que la série entière définie par S converge uniformément sur $\tilde{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, et que tout point de $\mathbb{U}$ est point de semi-convergence pour cette série entière.

Exercice 7 : Soit (a_n) et (b_n) deux suites de $\mathbb{C}$. On pose $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et on considère la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n b_n$. Montrer que cette série converge si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) la suite $\left(\dfrac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \right)$ est bornée, 2) la série $\sum |b_n - b_{n+1}| \sqrt{n}$ est convergente et 3) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n \sqrt{n} = 0$.

Application : Montrer que la série entière $\sum \dfrac{(-1)^{\mathrm{Ent}(\sqrt{n})}}{n} z^n$ est convergente en *tout* point du cercle d'incertitude Γ_S, mais qu'elle n'est absolument convergente en aucun point de ce cercle.

Exercice 8 : (exemple de Pringsheim) : soit $b_1 = 1$, $b_2 = \dfrac{1}{2}$, $b_n = \dfrac{1}{n \operatorname{Log} n}$ pour $n \geqslant 3$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $2^m \leqslant n \leqslant 2^{m+1} - 1$, on pose $a_n = (-1)^m b_n$.

a) Si $m \in \mathbb{N}$, soit $C_m = \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} b_n$. Prouver : $0 < c_m - \displaystyle\int_{2^m}^{2^{m+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x \operatorname{Log} x} < \frac{1}{m \, 2^m \operatorname{Log} 2}$ et en déduire que les séries $\sum (-1)^m c_m$ et $\sum a_n$ convergent.

b) Montrer que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ converge.

c) Vérifier que la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon 1 et que tout point de $\mathbb{U}$ est un point de semi-convergence.

Exercice 9 : *a*) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle $\geqslant 0$ telle que $\mathrm{R}_{\mathrm{ev}} (\sum a_n X^n) = 1$ et que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x \in \mathbb{R}, x \lesssim 1}{\longrightarrow} +\infty$.

b) Soit $S = 1 + \sum_{n \geqslant 0} X^{2^n} = 1 + X + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2^n} + \cdots$. Vérifier : $\mathrm{R}_{\mathrm{ev}}(S) = 1$; $S(X) = X + S(X^2) = X + X^2 + S(X^4) = \cdots$, et en déduire que $\mathbb{U}$ est une *coupure* pour S (cf. exercice 14).

c) On considère la série entière $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, où a_n est le coefficient binomial $\dbinom{-2}{n}$.

Montrer que les a_n sont réels, que $\left| \sum_{n=0}^{2N} a_n \right| \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que cependant $\tilde{S}(x) \underset{x \lesssim 1}{\longrightarrow} l$, où $l \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 : *a*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la suite $(n^{-i\alpha})_{n \geqslant 1}$ diverge.

b) En déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n^{1+i\alpha}}$ diverge, en calculant un équivalent de $n^{-i\alpha} - (n-1)^{-i\alpha}$ pour $n \longrightarrow \infty$.

c) Montrer que la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+i\alpha}} \right)_{N \geq 1}$ est bornée.

d) A l'aide d'une transformation d'Abel, montrer que la série $\sum \frac{1}{n^{1+i\alpha} \operatorname{Log} n}$ converge.

Exercice 11 : (théorème de Picard, 1893) : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ de rayon 1. Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, soit K_ε *l'enveloppe convexe* de l'ensemble $\{1\} \cup \tilde{\mathscr{D}}(0, 1-\varepsilon)$, où $\tilde{\mathscr{D}}(0, 1-\varepsilon)$ désigne le disque fermé de centre O et de rayon $1-\varepsilon$ (c'est-à-dire le plus petit ensemble convexe contenant 1 et $\tilde{\mathscr{D}}(0, 1-\varepsilon)$ représenté sur la figure 1). On suppose la série $\sum a_n$ semi-convergente. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, la série entière $\sum a_n z^n$ *converge uniformément* sur K_ε.

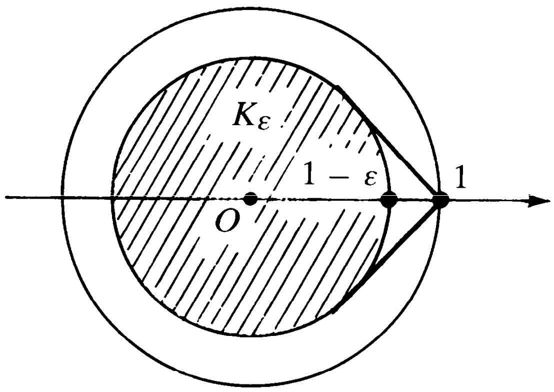


Fig. 1.

Indication : 1) Soit L un compact de $\{1\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ pour lequel il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall z \neq 1$, $(z \in L) \Rightarrow \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq C$. Poser $s_{\alpha,\beta} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} a_i$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ et $\alpha \leq \beta$. Par une transformation d'Abel, aboutir à :

$$(\forall z \in L) \quad (\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \leq q) \quad \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n z^n \right| \leq (1 + C) \sup_{n \geq p} |s_{p,n}| .$$

2) Conclure avec un peu de géométrie.

Exercice 12 : (théorème de Féjér [1]) : Soit $S = \sum a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ de rayon 1. On suppose que la série $\sum n\, |a_n|^2$ converge, et que $\tilde{S}(t) \underset{t \in \mathbb{R},\, t \stackrel{<}{\to} 1}{\longrightarrow} l \ (l \in \mathbb{C})$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme l.

Indications : 1) Se ramener à $l = 0$.

2) Poser $s_{p,q}(x) = \sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n$ et $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x^n$ pour $0 \leq x < 1$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $r_k = 1 - \frac{1}{k}$. Montrer que

$$|s_{p,k}(r_k) - R_p(r_k)| \leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} n\, |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(r_k)^{2n}}{n} \right)^{1/2}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

[1] Léopold *Féjér* (1880-1959), mathématicien qui s'est particulièrement illustré dans l'étude des séries de Fourier.

3) Prouver : $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(r_k)^{2n}}{n} \leqslant 1$. En déduire : $(\forall \varepsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N})\ \exists q > p$ tel que $\forall k \geqslant q$ $|s_{p,k}(r_k) - R_p(r_k)| \leqslant \varepsilon$.

4) Montrer que $|s_{p,k}(1) - s_{p,k}(r_k)| \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n}{k} |a_n|$, et toujours par Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{n=p+1}^{k} n\,|a_n|\right)^2 \leqslant k^2 \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} n|a_n|^2\right)$. Conclure.

Exercice 13 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On considère une partie E de $\mathbb{U}$ sur laquelle cette série converge uniformément. Montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $\widehat{E \cup \{0\}}$, *enveloppe convexe* de $E \cup \{0\}$. On pourra admettre que cette enveloppe convexe est l'union des triangles pleins OAB, où $(A, B) \in E^2$.

Exercice 14 : (notion de *coupure*) : Soit S la série formelle $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} X^{n!} = \sum_{k \geqslant 1} a_k X^k$ dont le disque de convergence est $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ comme on le vérifiera.

a) Montrer que $\sum a_k z^k$ converge uniformément sur le disque $\tilde{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$. Soit f sa somme sur $\tilde{\mathscr{D}}$ $(f|_{\mathscr{D}} = \tilde{S})$.

b) On veut montrer qu'il n'existe aucune fonction analytique g qui *prolonge* f à un domaine ω contenant *strictement* $\mathscr{D}$.

b_1) En supposant trouvée une telle g sur un tel ω, montrer qu'il existe $(k, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ convenable tel que $e^{2ik\pi/p} \in \omega$.

b_2) k et p étant ainsi choisis, on pose $\zeta = e^{2ik\pi/p}$. Soit t réel $\in [0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\tilde{S}^{(N)}(\zeta t)$ ne tend vers aucune limite dans $\mathbb{C}$ quand $t \xrightarrow{<} 1$. En quoi cela conduit-il à une contradiction ?

N.B. On dit que $\mathbb{U}$ est une *coupure* pour f parce que f est analytique dans $\mathscr{D}$, continue sur $\tilde{\mathscr{D}}$, mais ne peut être prolongée analytiquement en aucun voisinage d'aucun point de $\mathbb{U}$. Au contraire, pour $\sum z^n$ par exemple, le prolongement analytique est possible en tout point de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ puisque $\frac{1}{1-z}$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Exercice 15 (Autre preuve du théorème d'Abel radial) : *a*) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum a_n$ *diverge* et que le rayon de convergence de $S = \sum a_n X^n$ soit 1. Alors, pour toute suite (λ_n) de $\mathbb{C}$ tendant vers 1, $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n x^n}{\tilde{S}(x)} \xrightarrow[x \xrightarrow{<} 1]{} 1$.

b) Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge, $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On note $S = \sum a_n X^n$ et $T = \sum \sigma_n X^n$.

b_1) Montrer qu'il suffit de prouver que $\tilde{S}(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{<} 1]{} \sigma$ lorsque $\sigma \neq 0$ pour que ce soit prouvé dans tous les cas.

b_2) On suppose $\sigma \neq 0$. Vérifier que $R_{cv}(T) \geqslant 1$. Appliquer *a*) pour prouver : $\tilde{T}(x) \underset{x \xrightarrow{<} 1}{\sim} \frac{\sigma}{1-x}$, et en déduire : $\tilde{S}(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{<} 1]{} \sigma$.

Exercice 16 : *a*) Soit $S = \sum_{n \geqslant 1} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$. On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sigma$ ($\sigma \in \mathbb{C}^*$). Vérifier que $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum (s_1 + \cdots + s_n) X^n\right) \geqslant 1$.

Montrer, en utilisant l'exercice 15*a*) que $\sum_{n=1}^{\infty} (s_1 + \cdots + s_n) x^n \underset{x \stackrel{<}{\to} 1}{\sim} \frac{\sigma}{(1-x)^2}$,

et en déduire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \underset{x \stackrel{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \sigma$. Généraliser.

b) Déduire de *a*) que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n^2}$ possède, pour $x \stackrel{<}{\to} 1$, une limite, que l'on précisera.

c) Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$. Déduire de l'exercice 15*b*) que : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{p^n} \underset{x \stackrel{<}{\to} 1}{\sim} -\frac{\mathrm{Log}\,(1-x)}{\mathrm{Log}\,p}$.

Exercice 17 (séries lacunaires) : On utilise les notations habituelles : $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $\tilde{\mathscr{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Pour $w \in \mathbb{C}$, on pose : $\varphi(w) = \frac{1}{2}(w^\lambda + w^{\lambda+1})$. Vérifier que si $|w| \leqslant 1$ et $w \neq 1$, on a $|\varphi(w)| < 1$; et que $\varphi(1) = 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\mathscr{D} \cup \{1\}$. Montrer qu'il existe ε réel > 0 tel que $1 \in \varphi(\{z,\ |z| < 1 + \varepsilon\}) \subset \Omega$.

b) Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $U_1 = \mathscr{D} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \alpha\}$. On donne $f : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $z \in \mathscr{D}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^n$ pour $|z-1| < \alpha$ (où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites complexes convenables dont on suppose l'existence). On pose $F(w) = f(\varphi(w))$. Montrer que F est définie et analytique dans $\varphi^{-1}(U_1)$, et si $\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ est son DSE_0, ce DSE converge dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 + \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0$ est choisi vérifiant la condition écrite au *a*).

c) Soit (p_k) et (q_k) deux suites strictement croissantes dans $\mathbb{N}^*$ telles que $(\forall k \geqslant 1)$ $\lambda q_k \geqslant (\lambda + 1) p_k$, où λ est un entier $\geqslant 2$ fixé. On suppose : $(\forall k)$ $(p_k < n < q_k) \Rightarrow a_n = 0$.

Montrer : $(\forall w \in \mathbb{C})$ $|w| < 1 + \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=0}^{p_k} a_n (\varphi(w))^n = \sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k} b_m w^m$ pour tout k.

d) En déduire, si $s_{p_k}(z) = \sum_{n=0}^{p_k} a_n z^n$, que la suite (s_{p_k}) converge uniformément sur tout compact dans un voisinage convenable de 1.

e) On suppose $p_{k+1} > \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) p_k$ pour tout $k \geqslant 1$, et $\mathrm{R_{cv}}\left(\sum_{k \geqslant 1} c_k X^{p_k}\right) = 1$.

Montrer : $\forall \beta \in \mathbb{U}$, il n'existe pas de prolongement analytique f_β de f à un ensemble du type $\mathscr{D} \cup V_\beta$, où $V_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \beta| < r_\beta\}$, avec $r_\beta > 0$.

f) Etudier $f(z) = \sum_k \mathrm{e}^{-2^{k/2}} z^{2^k}$. Vérifier qu'elle satisfait à toutes les conditions précédentes (avec quelle valeur de λ ?), et cependant que f, considérée comme fonction des deux variables *réelles* $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$ est telle que toutes ses dérivées partielles de tous ordres par rapport à (x, y) se prolongent par continuité à $\tilde{\mathscr{D}}$ (ce que l'on traduit en abrégé par : « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\tilde{\mathscr{D}}$ »), ce qui donne un exemple de *coupure* plus subtil que celui de l'exercice 14.

Exercice 18 : (Une condition suffisante pour qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$, soit *analytique réelle*). Considérons d'abord une fonction $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable, avec $n \geqslant 1$, et telle que $(\forall t \in]-1, 1[)$ $|f(t)| \leqslant 1$. Pour tout sous-intervalle non trivial J de $]-1, 1[$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit $m_k(J) = \inf_{x \in J} |f^{(k)}(x)|$ (on rappelle que $f^{(o)} = f$).

a) Soit $J = [\alpha, \delta]$ avec $-1 < \alpha < \delta < 1$. On donne $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tels que

Si $k \in [\![1, n]\!]$, montrer, en posant $\lambda_1 = \gamma - \beta$:

(1) $$m_k(J) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\,(m_{k-1}([\alpha, \beta]) + m_{k-1}([\gamma, \delta]))\,.$$

Indications :

1) Il suffit de prouver (1) pour $k = 1$, quitte à remplacer f par $f^{(k-1)}$.

2) Pour $k = 1$ prendre $a \in [\alpha, \beta]$ et $b \in [\gamma, \delta]$ et appliquer le théorème des accroissements finis *avec valeur moyenne*, puis faire varier a et b.

b) On pose $\lambda = \delta - \alpha$. Déduire de (1) que :

$$(\forall k \in [\![1, n]\!]) \quad m_k(J) \leqslant \lambda^{-k} k^k 2^{k(k+1)/2}\,.$$

Indication : Pour passer de k à $k+1$, choisir β et γ convenablement. Pour la suite de l'exercice $\lambda^{-k} k^k 2^{k(k+1)/2}$ sera noté $\varphi_k(\lambda)$.

c) On suppose $n \geqslant 2$. Déduire de *b*) l'existence d'une suite $(\alpha_k)_{k \geqslant 2}$ dans $\mathbb{R}_+$ possédant la propriété suivante :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2) \quad (|f'(0)| > \alpha_n) \Rightarrow (\text{card}\,([f^{(n-1)}]^{-1}(0)) \geqslant n-1)\,.$$

Indication : $\alpha_n = \varphi_1\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)$ convient. On se ramène au cas où $f'(0) > \alpha_n$ et on prouve par récurrence sur $k \in [\![2, n]\!]$ qu'il existe $x_{k,1}, \ldots, x_{k,k}$ dans $]-1, 1[$ tels que $-\frac{k}{n} \leqslant x_{k,1} < \cdots < x_{k,k} \leqslant \frac{k}{n}$ vérifiant :

$$f^{(k)}(x_{k,1}) \geqslant n^{k-1}\left(\varphi_k\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
$$f^{(k)}(x_{k,2}) \leqslant -n^{k-1}\left(\varphi_k\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + \varphi_n\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$f^{(k)}(x_{k,3}) \geqslant \cdots$, etc... (utiliser le théorème des accroissements finis), d'où la conclusion.

d) On suppose maintenant que la fonction $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ la fonction $f^{(n)}$ s'annule *au plus* $p+1$ fois dans $]-1, 1[$. Montrer à l'aide du résultat de *c*) que f est *analytique réelle* sur $]-1, 1[$.

Indication : On utilisera le théorème II.4.2 qui caractérise ces fonctions.

e) Etendre le résultat trouvé en *d*) aux fonctions $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{C}$.

Exercice 19 : (Un exemple de série entière de rayon 1 qui possède *exactement un* point de convergence sur $\mathbb{U}$. Cet exemple est dû à Lusin (1) et Sierpinski (2)).

a) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Phi_m(X) \in \mathbb{C}[X]$ et $g_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ainsi : $\Phi_m(X) = \sum_{k=0}^{m-1} X^k$; $(\forall \varphi \in \mathbb{R})\ g_m(\varphi) = \Phi_m(e^{i\varphi})$. Démontrer : $\left(\forall \varphi \in \left[\frac{-\pi}{m}, \frac{\pi}{m}\right]\right) \quad |g_m(\varphi)| \geqslant \frac{2}{\pi} m$.

En déduire : $(\forall \varphi \in \mathbb{R}) \ \ \exists k \in [\![0, m-1]\!] \mid \left|g_m\left(\varphi - \frac{2k\pi}{m}\right)\right| \geqslant \frac{2}{\pi} m.$

b) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $\Psi_m(X) \in \mathbb{C}[X]$ ainsi défini :

$$\Psi_m(X) = \sum_{k=0}^{m-1} X^{mk}\,\Phi_m(e^{-2i(k\pi/m)}X)\,, \quad \text{que l'on écrit} \quad \sum_{q=0}^{m^2-1} A_q X^q\,.$$

Vérifier : $(\forall q \in [\![0, m^2-1]\!]) \quad |A_q| = 1$.

c) On construit la série formelle $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ ainsi : $a_0 = 0$; puis, si on pose $\sigma_m = \sum_{k=1}^{m-1} k^2$

---

(1) Nicolas Nicolaïevitch *Lusin* (1883-1950), mathématicien russe fondateur, avec M. *Souslin*, de la théorie des « ensembles analytiques ».

(2) Waclaw *Sierpinski* (1882-1969), mathématicien polonais, fleuron de la célèbre « école de Varsovie », spécialiste de théorie des nombres.

pour m entier $\geqslant 2$, $(\forall q \in [\![0, m^2-1]\!])$ $a_{\sigma_m + q} = \frac{1}{\sqrt{m}} A_q$. Autrement dit, pour chaque $m \geqslant 2$ on développe $\frac{1}{\sqrt{m}} X^{\sigma_m} \Psi_m(X)$ et on met bout à bout les tranches successives, ce qui donne S (cela réussit car le degré de la m-ième tranche est $\sigma_m + m^2 - 1 = \sigma_{m+1} - 1$).

Vérifier que $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, que le rayon de convergence de S est 1, et que la série entière définie par S diverge en tout $z \in \mathbb{U}$.

Indication : Grouper les termes convenablement et utiliser *a*) pour montrer l'impossibilité de la convergence de $\sum a_n z^n$ en un point $z = e^{i\varphi}$.

d) Soit alors T la série formelle $(1-X)\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n X^n\right) = \sum_{n \geqslant 0} b_n X^n$. Montrer que T est de rayon 1, que la série entière $\sum b_n z^n$ converge en $z = 1$ et diverge en tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.

e) (*Complément, par les auteurs*). S'inspirer du *d*) pour construire une série formelle V de rayon 1, qui converge en des points $\zeta_1, \dots, \zeta_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), éléments de $\mathbb{U}$ donnés à l'avance, mais qui diverge pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_p\}$.

Exercice 20 : (Un autre exemple de série entière de rayon 1 qui possède exactement un point de convergence sur $\mathbb{U}$). Montrer que si $(\forall n \geqslant 2)$ $a_n = \frac{1}{\operatorname{Log} n} \exp[in \operatorname{Log}(\operatorname{Log} n)]$, la série $T = \sum_{n \geqslant 3} (a_n - a_{n-1}) X^n$ possède cette propriété. Pour cela, on montrera que $S = \sum a_n X^n$ est de rayon 1, que $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que S diverge en tout point $z = e^{i\varphi} \in \mathbb{U}$.

Chapitre IV

SÉRIES DE FOURIER

§ IV.1 *GÉNÉRALITÉS*

C'est pour traiter mathématiquement le problème de la propagation de la chaleur que Fourier [1] exposa ses idées concernant les séries qui portent son nom, séries trigonométriques qui étaient déjà apparues dans l'étude d'autres phénomènes physiques, en particulier dans la *théorie des tuyaux sonores* et celle des *cordes vibrantes* par Daniel Bernoulli [2].

Il est bien connu que les phénomènes périodiques les plus simples sont, *en première approximation, sinusoïdaux,* d'où l'idée naturelle pour étudier des phénomènes périodiques plus complexes, de les représenter, en un sens à préciser, comme obtenus par *superposition* (réelle ou fictive) de phénomènes sinusoïdaux, en nombre fini ou éventuellement infini. Le cas le plus simple est celui où les fonctions sinusoïdales qui se superposent ont une période multiple d'une période fixe (penser au *timbre* d'un instrument de musique caractérisé par la superposition du son *fondamental* et de ses divers *harmoniques*).

Quand on veut traduire mathématiquement la théorie d'un tel phénomène physique périodique, on est amené à construire d'abord un espace de fonctions engendré (au sens de l'Algèbre) par les fonctions sinusoïdales de période kT ($T > 0$ [3], $k \in \mathbb{Z}$), puis à partir de cet espace, à construire, par les procédés standard de l'Analyse, une classe aussi étendue que possible de fonctions T-périodiques.

Pour une fonction T-périodique f donnée il s'agit alors de savoir dans quelle

---

[1] Jean-Baptiste-Joseph *Fourier* (1768-1830) vit son premier mémoire sur la propagation de la chaleur rejeté en 1807 par l'Académie des sciences dont il devient secrétaire en 1824, deux ans après avoir publié sa *Théorie analytique de la chaleur*.

[2] Daniel *Bernoulli* (1700-1782), fils de Jean, s'intéressa surtout à des problèmes de physique (hydrodynamique, élasticité, ...) et enseigna également les sciences naturelles.

[3] Pour normaliser, on peut prendre systématiquement $T = 2\pi$. C'est ainsi que, dans tout ce chapitre, on traite la théorie des séries de Fourier 2π-périodiques. Si T est un réel > 0, la théorie des séries de Fourier des fonctions T-périodiques s'y ramène en effectuant le changement de variable $x = (T/2\pi)t$.

mesure elle peut être représentée par une série de fonctions (sa *série de Fourier*) du type précédent, ce qui conduit à s'intéresser à des problèmes de convergence (en divers sens) et de somme de séries trigonométriques.

Polynômes trigonométriques

Pour $k \in \mathbb{Z}$, notons e_k la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\mathrm{i}kt)$. La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre un sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qu'on appelle $\mathbb{C}$-ev des **polynômes trigonométriques** sur $\mathbb{R}$, et que nous noterons $\mathscr{E}$. Autrement dit un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme $x \mapsto P(x) = \sum_{m=-N}^{N} c_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$, avec $c_m \in \mathbb{C}$ pour $-N \leqslant m \leqslant N$ $(n \in \mathbb{N})$. Il est clair que les polynômes trigonométriques sont des fonctions *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et* 2π-*périodiques*.

En vertu des formules d'Euler on peut également dire que $\mathscr{E}$ est le sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les fonctions γ_k et σ_k lorsque k parcourt $\mathbb{N}$, en posant $\gamma_k(t) = \cos kt$ et $\sigma_k(t) = \sin kt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{E}$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On pourrait démontrer ici *l'indépendance linéaire* de la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, mais comme c'est une conséquence immédiate de *l'orthogonalité* des $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, qui sera vue une peu plus loin, nous nous contenterons du résultat sous la forme : les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une **base du $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{E}$**, ou, ce qui revient au même : l'union des $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme une autre **base du $\mathbb{C}$-ev des polynômes trigonométriques.**

Considérons maintenant une suite $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$ $(c_\nu \in \mathbb{C})$. On peut lui associer la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ainsi définie :

$$(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \boxed{s_n = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e_\nu}, \text{ i.e. } (\forall t \subseteq \mathbb{R}) \quad \boxed{s_n(t) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}}.$$

Cette suite sera appelée *suite des sommes symétriques* des fonctions (e_ν). On peut exprimer s_n en fonction des (γ_k) et des (σ_k) en posant :

$$(2) \quad \boxed{a_0 = 2c_0, \quad \text{et si } \nu \in \mathbb{N}^* : \quad a_\nu = c_\nu + c_{-\nu}\ ; \quad b_\nu = \mathrm{i}(c_\nu - c_{-\nu})},$$

relations qui équivalent à :

$$(3) \quad \boxed{c_0 = \frac{1}{2} a_0, \text{ et si } \nu \in \mathbb{N}^* : \quad c_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu - \mathrm{i}b_\nu)\ ; \quad c_{-\nu} = \frac{1}{2}(a_\nu + \mathrm{i}b_\nu)}$$

ce qui conduit à :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad s_n = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \gamma_\nu + b_\nu \sigma_\nu),$$

ou plus explicitement à :

$$(4) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}) \quad \boxed{s_n(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)}\,.$$

On constate que les a_k et les b_k sont tous réels ssi $c_\nu = \overline{c_{-\nu}}$ pour tout ν. Une autre écriture possible pour s_n est $s_n = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e_k + c_{-k} e_{-k})$, où $c_k e_k + c_{-k} e_{-k} = a_k \gamma_k + b_k \sigma_k$.

La donnée de $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ équivaut à celle de $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et de $(b_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Pour une suite complexe (c_ν) donnée, la connaissance de la suite (s_n) définie par (1) équivaut à celle de la série de fonctions de t définie au second membre de (4) par ses sommes partielles. On est ainsi conduit à la définition suivante :

Définition IV.1.1

Soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. On appelle ***série trigonométrique*** *associée à cette suite la série de fonctions de t : $\sum_{n \leq 0} u_n(t)$, où $u_0(t) = \frac{1}{2} a_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, les a_k et b_k étant définis par (2) à partir des (c_ν). Les a_k et b_k s'appellent* ***coefficients trigonométriques*** *associés aux (c_ν) ; les (c_ν) s'appellent* ***coefficients exponentiels*** *de la série trigonométrique.*

Pour une série trigonométrique, comme pour toute série de fonctions, le premier problème est la détermination de l'ensemble des points de convergence.

Un cas très simple est celui où la série numérique $\sum_{k \geq 1} (|a_k| + |b_k|)$ converge. Les relations (2) et (3) montrent que cela arrive ssi la série $\sum_{\nu \geq 1} (|c_\nu| + |c_{-\nu}|)$ converge (ce qu'on traduit en disant que *la série $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu|$ converge*). Dans ce cas, les inégalités : $(\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*)$ $|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq |a_k| + |b_k|$ montrent que la série trigonométrique $\sum (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Sa somme S est donc limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (s_n) des sommes partielles symétriques $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme les (s_n) sont continues, leur limite uniforme S est continue, et comme chaque s_n est 2π-périodique, S est 2π-périodique (la 2π-périodicité passe à la limite simple). En résumé :

PROPOSITION IV.1.1

Soit $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ *la suite des coefficients exponentiels d'une série trigonométrique* $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k \geq 1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$. *Si la série numérique* $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |c_\nu|$ *converge, alors la série trigonométrique associée converge normalement, donc uniformément, sur* $\mathbb{R}$, *vers une somme* S *continue et* 2π*-périodique, qui est donc limite uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la suite* (s_n) *des sommes partielles symétriques* $\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e_k + c_{-k} e_{-k})$.

Un autre cas intéressant est celui où les suites (a_ν) et (b_ν) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et où $a_\nu \underset{\nu \to \infty}{\downarrow} 0$ et $b_\nu \underset{\nu \to \infty}{\downarrow} 0$. En effet, sous ces hypothèses, on peut évaluer les « paquets de Cauchy » $S_{p,q}(t) = \sum_{k=p+1}^{q} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ en utilisant la transformation d'Abel (cf. tome 2, § IX.4, formules (2) à (5)), ce qui donne, en posant $\mathscr{C}_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \cos nt$ et $S_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \sin nt$: pour $1 \leq p < q$,

$$S_{p,q}(t) = \mathscr{C}_q(t)\, a_q + S_q(t)\, b_q - \mathscr{C}_p(t)\, a_{p+1} - S_p(t)\, b_{p+1} + \\ + \left(\sum_{k=p+1}^{q-1} \mathscr{C}_k (a_k - a_{k+1}) \right) + \left(\sum_{k=p+1}^{q-1} S_k(t) (b_k - b_{k+1}) \right).$$

Or, on sait que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $\mathscr{C}_k(t) = \cos \frac{kt}{2} \cdot \dfrac{\sin \frac{k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$ et $S_k(t) = \sin \frac{k}{2} t \cdot \dfrac{\sin \frac{k+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$ (cf. tome 1, § VI.7, page 228). Si nous fixons ξ réel, $\xi \in]0, \pi[$, on a : $(\forall t \in [\xi, 2\pi - \xi])\ (\forall k \in \mathbb{N}^*)\ |\mathscr{C}_k(t)| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{\xi}{2}}$ et $|S_k(t)| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{\xi}{2}}$, d'où :

$$(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{\neq 2}, p < q) \quad |S_{p,q}(t)| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\xi}{2}} \left[a_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) + b_q + \sum_{k=p+1}^{q-1} (b_k - b_{k+1}) + a_{p+1} + b_{p+1} \right],$$

soit :

$$(5) \quad (\forall t \in [\xi, 2\pi - \xi]) \qquad (\forall (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}, p < q)$$
$$|S_{p,q}(t)| \leqslant \frac{2}{\sin \frac{\xi}{2}} (a_{p+1} + b_{p+1}) .$$

Etant donné ε réel > 0, en choisissant N tel que $a_n + b_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sin \frac{\xi}{2}$ pour $n \geqslant N$, on a donc $|S_{p,q}(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $N \leqslant p < q$ et tout $t \in [\xi, 2\pi - \xi]$, donc la série trigonométrique $\sum (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ vérifie le *critère de Cauchy uniforme* sur $[\xi, 2\pi - \xi]$ et converge donc uniformément sur cet ensemble, d'où :

PROPOSITION IV.1.2

Soit la série trigonométrique $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k \geqslant 1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ *avec les* a_k *et* b_k *dans* $\mathbb{R}_+$ *tels que* $a_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} 0$ et $b_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} 0$. *Alors pour tout réel* $\xi \in]0, \pi[$, *cette série converge uniformément sur l'ensemble* $[\xi, 2\pi - \xi]$. *En conséquence, elle définit une fonction* continue (*et* 2π*-périodique*)

$$\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) .$$

Séries trigonométriques et séries entières

Avec les notations qui précèdent, supposons $c_\nu = 0$ pour $\nu < 0$. Alors $s_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu t} = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (e^{it})^\nu$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donc l'étude de la suite de fonctions (s_n) *se ramène à l'étude de la série entière* $\sum_{\nu \geqslant 0} c_\nu z^\nu$ sur $\mathbb{U}$. Le cas le plus intéressant (mais le plus difficile) est évidemment celui où le rayon de convergence de cette série entière est 1. Dans ce cas étudier la série trigonométrique associée à $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ équivaut à étudier la série entière $\sum_{\nu \geqslant 0} c_\nu z^\nu$ sur son cercle d'incertitude, et réciproquement.

L'espace $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$

Nous noterons $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π-*périodiques* et telles que $f|_{[0, 2\pi]}$ est *bornée intégrable* (cf. tome 2, § VII.3). On voit facilement que $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ est un sous-$\mathbb{C}$-ev (et même une sous-$\mathbb{C}$-algèbre) de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$, pour tous réels a, b $(a < b)$, $f|_{[a, b]}$ est bornée intégrable, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_\alpha^{\alpha + 2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \text{ car } \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} f = \int_\alpha^0 f + \int_0^{2\pi} f + \int_{2\pi}^{\alpha + 2\pi} f$$

et que (par le changement de variable $t \mapsto 2\pi + t$)

$$\int_{2\pi}^{2\pi + \alpha} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_\alpha^0 f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

L'espace $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ est suffisamment vaste pour contenir la plupart des fonctions 2π-périodiques que l'on rencontre en pratique. Citons-en quelques sous-espaces intéressants :

1) Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{E}$ des *polynômes trigonométriques*, qui est en fait une *sous*-$\mathbb{C}$-*algèbre* de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

2) Le $\mathbb{C}$-ev, que nous noterons $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *continues et* 2π-*périodiques*. On a $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, et $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ est une *sous*-$\mathbb{C}$-*algèbre* de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

3) La sous-$\mathbb{C}$-algèbre, que nous noterons $\mathscr{C}^k(\mathbb{U})$, des fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques $(k \leqslant +\infty)$.

4) Le $\mathbb{C}$-ev, que nous noterons $\mathscr{C}\mathscr{M}^0(\mathbb{U})$, des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π-périodiques et telles que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit *continue par morceaux*. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est 2π-périodique, $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0(\mathbb{U})$ ssi f n'a, *sur chaque intervalle compact de* $\mathbb{R}$, *qu'un nombre fini de discontinuités, toutes de première espèce*. $\mathscr{C}\mathscr{M}^0(\mathbb{U})$ est une *sous*-$\mathbb{C}$-*algèbre* de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

5) Le sous-$\mathbb{C}$-ev du précédent, que nous noterons $\mathscr{C}\mathscr{M}^k(\mathbb{U})$ des fonctions 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit *de classe* $\mathscr{C}^k$ *par morceaux* $(k \leqslant +\infty)$ (cf. tome 2, page 178). Pour tous réels a, b $(a < b)$, $f|_{[a, b]}$ est alors de $\mathscr{C}^k$ par morceaux. $\mathscr{C}\mathscr{M}^k(\mathbb{U})$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

6) Le sous-$\mathbb{C}$-ev du précédent, que nous noterons $\mathscr{C}\mathscr{M}_c^k(\mathbb{U})$ des fonctions $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}^k(\mathbb{U})$ qui sont de plus *continues sur* $\mathbb{R}$ $(k \leqslant +\infty)$. C'est encore une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

Nous aurons l'occasion de rencontrer d'autres sous-espaces de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$.

Sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ il est commode de considérer la *forn* (notion d'algèbre bilinéaire qui sera étudiée en détail dans le tome 4) $(f,g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{f}g = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}g$. Cette forme est évidemment *positive* car $\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{f}f = \int_0^{2\pi} |f|^2 \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$. En vertu du corollaire du théorème VII.3.1 vu au tome 2, la restriction de cette forme à $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ est une **forme hermitienne définie positive,** en d'autres termes, **un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$.** Donc $(\mathscr{C}^0(\mathbb{U}), (.|.))$ est un **espace préhilbertien.** En vertu des relations (dont la vérification est immédiate) $(e_k|e_l) = 0$ si $k \neq l$ et $(e_k, e_k) = 1$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est **orthonormale** dans $(\mathscr{C}^0(\mathbb{U}), (.|.))$, ce qui entraîne bien qu'elle est libre comme annoncé au début de ce §.

Coefficients de Fourier

DÉFINITION IV.1.2

Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$. On appelle ***coefficients de Fourier complexes*** *de f les nombres $(e_\nu|f)_{\nu \in \mathbb{Z}}$, que nous noterons $c_\nu(f)$, soit :*

$$\boxed{c_\nu(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\nu t} f(t)\,dt} =$$

$$= (e_\nu|f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\nu t} f(t)\,dt\,.$$

On appelle ***coefficients de Fourier trigonométriques*** *de f les coefficients, que nous noterons $(a_\nu(f))_{\nu \in \mathbb{N}}$ et $(b_\nu(f))_{\nu \in \mathbb{N}^*}$ définis par*

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}) \quad \boxed{a_\nu(f) = c_\nu(f) + c_{-\nu}(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos \nu t\,dt}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos \nu t\,dt$$

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}^*) \quad \boxed{b_\nu(f) = i(c_\nu(f) - c_{-\nu}(f)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin \nu t\,dt}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin \nu t\,dt$$

Enfin on appelle ***série de Fourier de f*** *la série trigonométrique définie par les coefficients exponentiels $(c_\nu(f))_{\nu \in \mathbb{Z}}$.*

Remarque 1 : Si f est **paire,** on a $b_\nu(f) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, et

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}) \quad \boxed{a_\nu(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos \nu t \,\mathrm{d}t}$$

De même, si f est **impaire,** on a $a_\nu(f) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, et

$$(\forall \nu \in \mathbb{N}^*) \quad \boxed{b_\nu(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin \nu t \,\mathrm{d}t}.$$

Dans ces cas particuliers il est donc tout indiqué d'utiliser les coefficients de Fourier trigonométriques de préférence aux coefficients exponentiels, surtout si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2 : Chacune des fonctions $c_k : f \mapsto c_k(f)$ $(k \in \mathbb{Z})$ est $\mathbb{C}$-*linéaire* sur $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$.

Problèmes fondamentaux

Nous sommes maintenant en mesure de préciser les questions à peine évoquées au début de ce §.

Problème 1 : A chaque $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ est associée la suite $(c_\nu(f))_{\nu\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier, ce qui permet d'écrire la série de Fourier de f. Une question naturelle qui vient à l'esprit consiste à rechercher les propriétés de l'application : $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U}) \mapsto \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $f \mapsto (c_\nu(f))_{\nu\in\mathbb{Z}}$: cette application est-elle injective ? Quelle est son image ?

Une autre question consiste à chercher où la série de Fourier de f converge (simplement, voire uniformément), et enfin au cas où cette convergence a lieu sur $\mathbb{R}$ tout entier, la somme de cette série de Fourier va-t-elle redonner la fonction f dont on est parti ? ou quelque chose d'approchant ?

Problème 2 : A chaque série trigonométrique est associée une fonction, à savoir sa somme S, définie sur l'ensemble $\mathscr{C}$ de ses points de convergence. $\mathscr{C}$ est 2π-périodique et S aussi. Dans le cas favorable où $\mathscr{C} = \mathbb{R}$ il est naturel de chercher à savoir si $S \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. Et si $\mathscr{C} = \mathbb{R}$ et $S \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ il reste la question fondamentale : quel lien y a-t-il entre la série de Fourier de S et la série trigonométrique de départ ?

Chacun des problèmes ainsi posés soulève des questions très délicates à résoudre de manière générale. Aussi nous contenterons nous, à ce niveau élémentaire, de n'y répondre que dans des cas particuliers relativement simples, et encore que partiellement.

Remarque 3 : On peut être amené à définir des coefficients de Fourier pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique mais n'appartenant pas à $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. C'est le cas par exemple s'il existe une partie *finie* E de $[0, 2\pi]$ telle que f soit *localement bornée intégrable* sur $[0, 2\pi]\setminus E$ (cf. tome 2, § VII.6) et que *l'intégrale* $\int_0^{2\pi} |f|$ converge

Alors les intégrales $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t$ $(\varkappa \in \mathbb{Z})$ sont toutes absolument convergentes, donc convergentes (elles ont un sens car $t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} f(t)$ est localement bornée intégrable sur $[0, 2\pi]\setminus E$), donc la suite
$(c_\nu(f))_{\nu \in \mathbb{Z}} = \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} f(t)\,\mathrm{d}t \right)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ est bien définie, et on peut donc écrire dans ce cas la série de Fourier de f.

Exercice 1 : Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ telle que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit *monotone par morceaux, i.e.* que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ convenables, $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 2\pi$, la fonction $f|_{]\alpha_i, \alpha_{i+1}[}$ soit monotone pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Démontrer que $a_n(f) \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $b_n(f) \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Indication : Penser au 2-ième théorème de la moyenne.

Exercice 2 : Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{U})(k \geqslant 1)$. Montrer que $|c_n(f)| + |c_n(f)| \underset{n \to \infty}{\in} O\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ en calculant $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f^{(k)})(n \in \mathbb{Z})$.

Exercice 3 : Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad (\forall N \in \mathbb{N}^*) \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} \right| \leqslant M .$$

Exercice 4 (généralisation de l'exercice 3) : Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ pour laquelle on ait $A > 0$ tel que $(\forall n)$ $b_n \leqslant A/n$. On suppose (b_n) décroissante. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \qquad (\forall N \in \mathbb{N}^*) \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\theta \right| \leqslant M .$$

Indication : Fixer $\theta \in]0, \pi[$ et poser $p = \operatorname{Min}\left(n, \operatorname{Ent}\left(\dfrac{\pi}{\theta}\right)\right)$. Alors $S_N(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\theta = \sum_{n=1}^{p} + \sum_{n=p+1}^{N}$. Majorer en valeur absolue la première somme par $pA\theta \leqslant \pi A$ et la seconde par $\dfrac{\pi A}{(p+1)\theta} \leqslant A$ grâce à une transformation d'Abel, et conclure.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$. Pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on note ${}_\varphi f$ la fonction $\theta \mapsto f(\theta + \varphi)$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z})$ $c_n({}_\varphi f) = c_n(f)\,\mathrm{e}^{in\varphi}$; $a_0({}_\varphi f) = a_0(f)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $a_n(f) \cos n\varphi + b_n(f) \sin n\varphi$; $b_n({}_\varphi f) = b_n(f) \cos n\varphi - a_n(f) \sin n\varphi$.

Exercice 6 : Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ telle que $f|_{]0, 2\pi[}$ soit à valeurs réelles et *décroissante.* Montrer :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \left[f\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - f\left(\theta + (2k+1)\frac{\pi}{n}\right) \right] \sin\theta\,\mathrm{d}\theta ,$$

et en déduire :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad b_n(f) \geqslant 0 .$$

Exercice 7 : Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ telle que $f|_{]0, 2\pi[}$ soit à valeurs réelles et *convexe.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) - f\left(\theta + \frac{(2k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{(2k+1)\pi}{n} - \theta\right) + \right.$$
$$\left. + f\left(\frac{(2k+2)\pi}{n} - \theta\right)\right] \cos n\theta \, d\theta$$

et en déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ a_n(f) \geqslant 0$.

Exercice 8 : Si $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, montrer (en notant $S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$) :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \ S_n(x) \underset{n \to \infty}{\in} O(\operatorname{Log} n).$$

Exercice 9 : Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $f(x) = x^{-\alpha}$ si $x \in]0, 2\pi]$, avec f 2π-périodique.

a) Montrer : $a_n(f) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{2\,\Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2}}$, $b_n(f) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{n^{\alpha-1}}{2\,\Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}$.

b) Montrer que si $p \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie $p < \frac{1}{1-\alpha}$, alors la série $\sum (|a_n(f)|^p + |b_n(f)|^p)$ converge (Bromwitch).

§ IV.2 *FORMULE DE PARSEVAL*

Unités approchées

Nous nommerons *unité approchée* de $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ toute suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(UA1) $(\forall n \in \mathbb{N})$, ψ_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t)\, dt = 1$.

(UA2) Pour tout réel $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \pi)$, la suite de fonctions (ψ_n) converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$ [1].

---

[1] *a*) En fait, on peut dans la plupart des raisonnements qui vont suivre, remplacer (UA2) par la condition suivante, moins restrictive : (UA'2). Pour tout réel $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \pi)$, la suite numérique

$$\left(\int_{-\pi}^{-\varepsilon} \psi_n(t)\, dt + \int_{\varepsilon}^{\pi} \psi_n(t)\, dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{tend vers } 0 .$$

Il est clair que (UA2) $\Rightarrow$ (UA'2) ; mais (UA'2) $\not\Rightarrow$ (UA2).

b) Le terme « unité approchée » fait allusion à la structure d'algèbre de $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ quand on le munit de son *produit de convolution :* $(f, g) \mapsto f * g$ tel que $(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$: on vérifie que $*$ est une loi interne qui fait de $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ une $\mathbb{C}$-algèbre commutative et associative, mais sans élément unité. Or, la substance du Th. IV.2.1 permet de voir que pour $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, la suite $(f * \psi_n)$ approche f, pour $n \longrightarrow \infty$, en un certain sens (pour (ψ_n) unité approchée).

Intuitivement, ces conditions expriment que l'aire unité du domaine compris entre l'axe Ox, le graphe de ψ_n et les droites $x = -\pi$ et $x = \pi$ « se concentre » autour de Oy lorsque $n \longrightarrow \infty$.

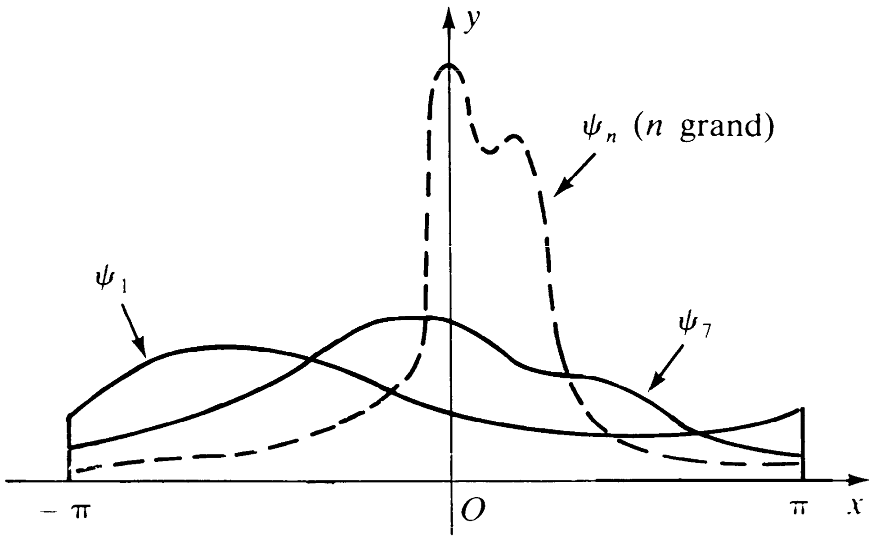


Fig. 1. Une unité approchée.

Lemme 1

> *Soit, pour* $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x$ *et* $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{I_n} \cos^{2n} \dfrac{x}{2}$. *Alors* (φ_n) *est une unité approchée, et* $(\forall n)$ $\varphi_n \in \mathscr{E}$ (¹).

Démonstration :

La condition (UA1) est évidemment vérifiée d'après la définition de φ_n. Pour voir que $\varphi_n \in \mathscr{E}$ il suffit de *linéariser* $\cos^{2n} \dfrac{x}{2}$, ce qui donne une somme de termes de la forme $\cos\left(2k\dfrac{x}{2}\right)$, avec $k \in [\![0, n]\!]$. Il reste à vérifier (UA2).

Soit un réel $\varepsilon \in \,]0, \pi[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$, on a : $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \dfrac{1}{I_n} \cos^{2n} \dfrac{\varepsilon}{2}$. Or le calcul de I_n (cf. tome 2, § VIII.2, intégrale de Wallis) montre que $I_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\sim} \dfrac{A}{\sqrt{n}}$, avec $A > 0$, d'où (puisque $\cos \dfrac{\varepsilon}{2} \in \,]0, 1[$)

$$\frac{1}{I_n} \cos^{2n} \frac{\varepsilon}{2} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$ ce qui montre la convergence uniforme vers 0 sur $[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$ de la suite (φ_n). ■

(¹) Rappelons que $\mathscr{E}$ désigne le $\mathbb{C}$-e.v. des polynômes trigonométriques, engendré par les $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

THÉORÈME IV.2.1 (« théorème de Weierstrass trigonométrique »)

> *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ (*i.e.* f continue : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, *et* 2π-périodique). *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* un polynôme trigonométrique $g \in \mathscr{E}$ *tel que* $(\forall x \in \mathbb{R}) \, |f(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$, *c'est-à-dire* qui approche f uniformément sur $\mathbb{R}$ *à* ε *près*.

En d'autres termes, si l'on munit le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ de la *norme uniforme* $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ (ce qui a un sens car toute $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ est bornée), le sous $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{E}$ est *partout dense* dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$.

Démonstration :

Reprenons l'unité approchée $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du lemme 1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, posons : $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x-t) \, f(t) \, \mathrm{d}t$ (ce qui a un sens car la fonction $t \mapsto \varphi_n(x-t) \, f(t)$ appartient à $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$). On définit ainsi $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

a) On voit d'abord que $f_n \in \mathscr{E}$. En effet la linéarisation de $\cos^{2n} \frac{x}{2} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \cos kx$ permet d'écrire $f_n(x)$ sous la forme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{I_n} \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \cos(kx - kt) \right) f(t) \, \mathrm{d}t \, ,$$

et comme $\cos(kx - kt) = \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt$, on voit que $f_n(x)$ est une somme finie de termes du type $A_k \cos kx + B_k \sin kx$, ce qui prouve bien que $f_n \in \mathscr{E}$.

b) Le changement de variable $x - t = u$ donne ensuite :

$$f_n(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} \varphi_n(u) \, f(x-u) \, \mathrm{d}u = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u) \, f(x-u) \, \mathrm{d}u$$

(car φ_n et f sont 2π-périodiques), d'où :

$$f(x) - f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \, f(x) \, \mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \, f(x-t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)(f(x) - f(x-t)) \, \mathrm{d}t \, .$$

Posons $\quad M = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} |f(y)| \left(= \|f\|_\infty = \operatorname*{Max}\limits_{y \in [0, 2\pi]} |f(y)| \right)$.

Soit ε réel > 0. Puisque f est 2π-périodique et continue s *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$. Soit $\eta \in]0, \pi[$ un module de continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$ pour $\varepsilon/2$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - f_n(x) = U_n(x) + V_n(x)\,,$$

avec : $$U_n(x) = \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(t)(f(x) - f(x-t))\,\mathrm{d}t\,,$$

et : $$V_n = \int_{\eta \leqslant |t| \leqslant \pi} \varphi_n(t)(f(x) - f_n(x-t))\,\mathrm{d}t\,,$$

d'où les majorations :

$$\begin{aligned} |U_n(x)| &\leqslant \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(t)|f(x) - f(x-t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\eta}^{\eta} \frac{\varepsilon}{2}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2}\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(n'oublions pas que $\varphi_n \geqslant 0$) ,

$$\begin{aligned} |V_n(x)| &\leqslant \int_{\eta \leqslant |t| \leqslant \pi} \varphi_n(t)(|f(x)| + |f(x-t)|)\,\mathrm{d}t \leqslant \\ &\leqslant 2M \int_{\eta \leqslant |t| \leqslant \pi} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2M \int_{\eta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Big(\sup_{\eta \leqslant |u| \leqslant \pi} \varphi_n(u)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\pi M \sup_{\eta \leqslant |u| \leqslant \pi} \varphi_n(u)\,. \end{aligned}$$

Mais d'après (UA2), on sait que $\displaystyle\sup_{\eta \leqslant |u| \leqslant \pi} \varphi_n(u) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$

Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall n \geqslant N)$ $\displaystyle\sup_{\eta \leqslant |u| \leqslant \pi} \varphi_n(u) \leqslant \frac{\varepsilon}{8\pi(M+1)}$.

Alors, pour $n \geqslant M$, on a : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $|V_n(x)| \leqslant \dfrac{4\pi M\varepsilon}{8\pi(M+1)} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour $n \geqslant N$, comme on sait déjà que $|U_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, il vient :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant |U_n(x)| + |V_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 1

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$. On a $f = 0$ ssi tous les coefficients de Fourier de f sont nuls.

Démonstration :

La fonction nulle a évidemment ses coefficients de Fourier nuls. Réciproquement, supposons $c_\nu(f) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$. Alors (par linéarité) $(f \mid g) = 0$ pour tout $g \in \mathscr{E}$. Choisissons une suite (g_n) d'éléments de $\mathscr{E}$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Posons $M = \sup\limits_{u \in \mathbb{R}} |f(u)|$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \mid f - g_n) = (f \mid f) - (f \mid g_n) = (f \mid f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(f - g_n),$$

d'où

$$0 \leqslant (f \mid f) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M |f(t) - g_n(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant M \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g_n(t)|$$

qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$ à cause du choix des g_n. Donc $(f \mid f) = 0$, c'est-à-dire $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0$. Mais, f étant *continue*, cela entraîne $f = 0$ sur $[-\pi, \pi]$, donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. ■

COROLLAIRE 2

> *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$. Alors $f \in \mathscr{E}$ ssi la famille $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est à support fini. Si c'est le cas, $f = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f)\, e_k$.*

Démonstration :

Si $f \in \mathscr{E}$, la famille $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est évidemment à support fini. Réciproquement, si cette famille est à support fini, choisissons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_k(f) = 0$ si $|k| > N$.

Alors $g = f - \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e_k \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, et on constate que tous les coefficients de Fourier de g sont nuls, d'où $g = 0$ (cf. corollaire 1 ci-dessus), d'où $f = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k(f)\, e_k \in \mathscr{E}$. ■

Semi-norme de la moyenne quadratique

Sur le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, la forme hermitienne (que nous qualifierons de naturelle) $(f, g) \mapsto (f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f} g \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} \bar{f} g \right.$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$), déjà introduite au § IV.1, est **positive.** Il lui est donc associé une **semi-norme** sur $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, à savoir la fonction $f \mapsto (f \mid f)^{1/2}$, que nous noterons $\|f\|$.

Contrairement à la **norme uniforme :** $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ ($= \sup_{x \in [-\pi+\alpha, \pi+\alpha]} |f(x)|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$), il ne s'agit pas d'une norme car $\|f\| = 0 \not\Rightarrow f = 0$ (en fait, $\|f\| = 0$ ssi $|f|^2|_{[-\pi, \pi]}$ est négligeable, c'est-à-dire **nulle hors d'une partie négligeable de $[-\pi, \pi]$** (cf. tome 2, § VII.4)).

En revanche, sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ est un produit scalaire hermitien véritable puisque ici, pour f continue, $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0 \Leftrightarrow f|_{[-\pi, \pi]} = 0$. La norme associée à ce produit scalaire est évidemment la restriction de la semi-norme ci-dessus.

Cette semi-norme : $f \mapsto \|f\|$ sur $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ sera appelée **semi-norme de la moyenne quadratique.**

Conformément au langage introduit au tome 2, § VII.8, si f et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tels que $\|f - f_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, f et les f_n étant éléments de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$, nous dirons que *la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique.* Notons tout de suite que ce mode de convergence est à manier avec prudence, justement à cause du fait qu'il est associé à une semi-norme et non pas à une norme (*on perd notamment l'unicité des limites*). Pour éviter d'introduire une topologie non séparée, ou une norme sur un espace-quotient plus abstrait, nous nous contenterons d'utiliser les définitions ci-dessus comme une simple *commodité de langage.* Notons déjà que si f, f_n ($n \in \mathbb{N}$), g, g_n ($n \in \mathbb{N}$) sont des éléments de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ tels que $\|f - f_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|g - g_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, alors il est évident que $(\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2)$ $\|\lambda f + \mu g - (\lambda f_n + \mu g_n)\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ à cause de l'inégalité du triangle vérifiée par $\|.\|$.

Une approximation au sens de la semi-norme $\|.\|$ de $\mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ sera appelée une *approximation en moyenne quadratique :* ainsi, si ε est un réel > 0 et si $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$, un élément $g \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ sera déclaré une *approximation de f à ε près en moyenne quadratique* ssi $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

Il est clair que $(\forall f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U}), \forall g \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U}))$

$$\|f - g\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)|\right]^2\right)^{1/2} \leqslant \|f - g\|_\infty .$$

Donc, si $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *toute approximation uniforme de f à ε près par une $g \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$* est *a fortiori une approximation de f à ε près en moyenne quadratique.* Mais la réciproque est grossièrement fausse, l'approximation en moyenne quadratique imposant des co moins sévères que l'approximation uniforme. Par exemple, la suite (ψ_n) définie par $\psi_n(x) = \cos^{2n} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifie $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\|\psi_n\|_\infty = 1$ et cela n'empêche pas que $\|\psi_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour ce qui suit, il sera commode de noter $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\mathscr{E}_n = \mathrm{Vect}\,((e_\nu)_{|\nu| \leqslant n})$. Chaque $\mathscr{E}_n$ est un sous-$\mathbb{C}$-ev, de dimension finie $2n+1$, de $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, et on a : $\mathscr{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{E}_n$; $(\forall n)\, \mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}_{n+1}$.

LEMME 2

> *Soit* $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Notons* $S_{n,f} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ *et* $\Delta_{n,f} = f - S_{n,f}$. *Alors* $(S_{n,f} \mid \Delta_{n,f}) = 0$; $S_{n,f}$ *est l'unique élément* $y \in \mathscr{E}_n$ *tel que* $\|f - y\| = \|\Delta_{n,f}\|$ *et pour tout* $z \in \mathscr{E}_n \setminus \{S_{n,f}\}$ *on a :* $\|f - z\| > \|\Delta_{n,f}\|$, *autrement dit : la fonction* $\mathscr{E}_n \longrightarrow \mathbb{R}_+$; $g \mapsto \|f - g\|$ *possède* ***un minimum strict absolu*** *atteint pour, et seulement pour,* $g = S_{n,f}$.

Le lecteur ne peut manquer d'être frappé par l'analogie étroite de ces propriétés avec les théorèmes de projection orthogonale étudiés en Algèbre. Cela peut aider son intuition, mais il doit rester prudent en se rappelant que $\|.\|$ n'est pas une norme. C'est pourquoi nous ne nous y attarderons pas.

Démonstration :

Pour $|k| \leqslant n$, on a :

$$(e_k \mid S_{n,f}) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu(f)(e_k \mid e_\nu) = c_k(f) = (e_k \mid f)\,.$$

Donc $(e_k \mid \Delta_{n,f}) = (e_k \mid f) - (e_k \mid S_{n,f}) = 0$. Par linéarité, il s'ensuit que $(g \mid \Delta_{n,f}) = 0$ pour tout $g \in \mathscr{E}_n$ et en particulier $(S_{n,f} \mid \Delta_{n,f}) = 0$.

Soit alors $g \in \mathscr{E}_n$. D'après ce qui précède $(g - S_{n,f} \mid \Delta_{n,f}) = 0$. D'où

$$\|f - g\|^2 = (f - g \mid f - g) = (\Delta_{n,f} - (g - S_{n,f}) \mid \Delta_{n,f} - (g - S_{n,f})) =$$
$$= \|\Delta_{n,f}\|^2 + \|g - S_{n,f}\|^2$$

puisque $(\Delta_{n,f} \mid (g - S_{n,f})) = 0$.

Cela prouve que $\|f - g\|^2 \geqslant \|\Delta_{n,f}\|^2$, l'égalité ayant lieu ssi $\|g - S_{n,f}\| = 0$. Mais comme, sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, $\|.\|$ est une norme, on a $\|g - S_{n,f}\| = 0$ ssi $g = S_{n,f}$, tandis que pour tout $z \in \mathscr{E}_n \setminus \{S_{n,f}\}$ on a :

$$\|f - z\|^2 = \|\Delta_{n,f}\|^2 + \|z - S_{n,f}\|^2 > \|\Delta_{n,f}\|^2\,. \quad \blacksquare$$

Convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier

THÉORÈME IV.2.2

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $S_{n,f} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k$ (=fonction somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f).

(I) *On a : $\|f - S_{n,f}\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit : la série de Fourier de f converge vers f* **en moyenne quadratique.**

(II) *La série numérique $\sum_{k \geqslant 1} (|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)$ converge, et*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t = |c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)$$

(« relation de Parseval ») (1).

Démonstration :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Delta_{n,f} = f - S_{n,f}$. En faisant $g = 0$ dans la preuve du lemme 2, il vient : $\|f\|^2 = \|\Delta_{n,f}\|^2 + \|S_{n,f}\|^2$, d'où en particulier $\|f\|^2 \geqslant \|S_{n,f}\|^2$. Or, du fait que la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée dans l'espace préhilbertien $(\mathscr{C}^0(\mathbb{U}), (.\,|\,.))$, on a, par un calcul immédiat :

$$(1) \quad \|S_{n,f}\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{n} (|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)\,.$$

a) L'inégalité $\|S_{n,f}\|^2 \leqslant \|f\|^2$, valable pour tout n, montre déjà que la série numérique $\sum (|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2)$ converge, et que :

$$(2) \qquad |c_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2) \leqslant \|f\|^2$$

c'est *l'inégalité de Bessel* (2).

b) Montrons que (2) est une égalité. Soit ε réel > 0. Choisissons d'abord $\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ tel que $\|f - \varphi\| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ (il suffit pour cela d'utiliser le

---

(1) Marc Antoine *Parseval,* mathématicien français (1755-1836).

(2) Friedrich Wilhelm *Bessel* (1784-1846) est surtout connu comme astroı

théorème VII.8.3 vu au tome 2 en adaptant la preuve de façon à obtenir une approximation 2π-périodique). Puis choisissons un $N \in \mathbb{N}^*$ et un $g \in \mathscr{E}_N$ tels que $\|\varphi - g\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ (c'est possible en vertu du théorème IV.2.1). On en déduit *a fortiori* : $\|f - g\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Mais par le lemme 2,

$$\|\Delta_{N,f}\| = \|f = - S_{N,f}\| \leqslant \|f - g\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,.$$

D'où : $\|S_{N,f}\|^2 = \|f\|^2 - \|\Delta_{N,f}\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \varepsilon$.

Sur l'expression (1) on voit bien que la suite $(\|S_{n,f}\|^2)_{n \geqslant 1}$ est croissante, d'où $(\forall n \geqslant N)\quad \|S_{n,f}\|^2 \geqslant \|f\|^2 - \varepsilon$. Finalement, pour $n \geqslant N$, $\|f\|^2 - \varepsilon \leqslant \|S_{n,f}\|^2 \leqslant \|f\|^2$. Comme ε est arbitraire, on a prouvé : $\|S_{n,f}\|^2 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \|f\|^2$, c'est-à-dire (II).

c) Puisque $\|\Delta_{n,f}\|^2 = \|f\|^2 - \|S_{n,f}\|^2$ pour tout n, il s'ensuit : $\|\Delta_{n,f}\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (en fait $\|\Delta_{n,f}\| \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$), ce qui démontre (I). ■

COROLLAIRE 1

> *Si* $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, *on a* $c_k(f) \underset{|k| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, *c'est-à-dire* $a_k(f) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $b_k(f) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique telle que pour un ensemble *fini* $E \subset [0, 2\pi]$, $f|_{[0,2\pi]\setminus E}$ soit *localement bornée intégrable* et **telle que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f|^2$ **converge.** Alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f|$ converge (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) car on a, sur tout segment $J \subset [0, 2\pi]$ où f est bornée intégrable :

$$\int_J |f| = \int_J |f| \cdot 1 \leqslant \left(\int_J |f|\right)^{1/2} \times (\text{longueur de } J)^{1/2}\,.$$

Cela permet de définir la série de Fourier de f (cf. la remarque 3 du § IV.1). Sous ces hypothèses, des modifications mineures permettent d'*étendre le théorème IV.2.2 et son corollaire 1* à f.

(En réalité, en théorie *générale* de l'intégrale de Lebesgue, le théorème IV.2.2 est vrai avec toute fonction $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{U})$, où $\mathscr{L}^2(\mathbb{U})$ est le $\mathbb{C}$-ev des fonctions $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{U})$ telles que $|f|^2|_{[0,2\pi]}$ soit intégrable au sens de Lebesgue.)

Remarque 2 : En Physique, si $f(x)$ représente une onde ou une vibration quelconque (x est alors le temps), $\|f\|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$ représente l'*énergie totale* de la vibration sur une période (prise égale à 2π). La relation de Parseval exprime que cette énergie totale est la somme des énergies de chacune des composantes « harmoniques » (Lord Rayleigh, 1889).

COROLLAIRE 2

> *Si $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, les $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sont* **tous nuls** *ssi $f|_{[-\pi, \pi]}$ est* **négligeable.** *S'il en est ainsi, f est nulle en chacun de ses points de continuité.*

(La dernière assertion se déduit aisément du fait que $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$ lorsque $(\forall n)\ c_n(f) = 0$).

Voici un exemple simple d'application du théorème IV.2.2.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi]$ et $f(t) = 0$ si $t \in]-\pi, 0[$. On a bien : $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}^0(\mathbb{U})$, sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. Les coefficients $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ sont donnés par : $c_0(f) = \dfrac{1}{2}$, $(\forall k \in \mathbb{Z}^*)\ c_k(f) = \dfrac{1 - (-1)^k}{2\,\mathrm{i}\pi k}$.

La relation de Parseval s'écrit ici : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}t = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

On retrouve ainsi la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, déjà rencontrée au tome 2, où nous avons vu qu'elle équivaut à : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Considérons enfin l'ensemble $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_k (|u_k|^2 + |u_{-k}|^2)$ converge. C'est un sous-$\mathbb{C}$-ev du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}} = \mathscr{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ (vérification facile). D'après le théorème IV.2.2, à chaque $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ on peut associer la suite $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

On obtient ainsi une application $\mathscr{F} : \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ dont on vérifie immédiatement qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire. Par le corollaire 1 du théorème IV.2.1, $\mathscr{F}|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{U})}$ est *injective*. Par le corollaire 2 du théorème IV.2.2, Ker $(\mathscr{F})$ est le $\mathbb{C}$-ev des $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ telles que $f|_{[-\pi, \pi]}$ soit *négligeable*.

Sur $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, l'application $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto |u_0|^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (|u_k|^2 + |u_{-k}|^2)$ est une *norme*, associée au produit scalaire $(u, v) \mapsto \overline{u_0}\, v_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{u_k}\, v_k + \overline{u_{-k}}\, v_{-k})$ pour $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Munissons $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ du produit scalaire hermitien $(.|.)$ et $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ de celui qu'on vient de définir. Alors *l'injection linéaire* $\mathscr{F}|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{U})} : \mathscr{C}^0(\mathbb{U}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est *isométrique* d'après la relation de Parseval. (Elle n'est toutefois pas bijective, car il est facile de s'assurer que $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ainsi construit est *complet*, tandis que $(\mathscr{C}^0(\mathbb{U}), (.|.))$ ne l'est pas.)

Exercice 1 : En s'appuyant sur le théorème IV.2.1, donner une nouvelle démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass (cf. tome 2, théorème XII.4.2) : « si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, toute fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être approchée *uniformément*, aussi près qu'on veut, par des fonctions polynomiales $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ».

Indication : penser au développement en série entière de $\exp z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 : Démontrer que $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni de la norme $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto |u_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|u_k|^2 + |u_{-k}|^2)$ est *complet*, et vérifier que l'image de $\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ par $\mathscr{F} : f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est *dense* dans $l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni de cette norme.

Exercice 3 : On reprend l'unité approchée (φ_n) définie au début du § IV.2. On se propose de démontrer *directement* que si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ et si $(\forall n \in \mathbb{Z})\ c_n(f) = 0$, alors $f = 0$.

a) Montrer qu'il suffit de prouver ce résultat avec f à valeurs *réelles*.

b) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ supposée non nulle et à valeurs réelles. On pose $M = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{Max}} |f(x)|$ (on peut supposer sans restreindre la généralité que $M = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{Max}} f(x)$). On fait l'hypothèse que $(\forall n \in \mathbb{Z})\, c_n(f) = 0$.

*b*1) Prouver : $(\forall \xi \in \mathbb{R}) \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

*b*2) Choisir $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $f(\xi) = M$ (en justifiant). Couper alors l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x$ en trois convenablement, et montrer que $J_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 2\pi M$, puis conclure.

Exercice 4 : *a*) Vérifier que la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{\sin n\theta}{\operatorname{Log} n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, la convergence étant uniforme sur tout ensemble $[\eta, 2\pi - \eta]$ avec $0 < \eta < \pi$, et la somme g étant donc continue sur $\mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Montrer que cependant il n'existe aucune $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ dont la série du *a*) soit la série de Fourier. (En fait Lebesgue a même prouvé qu'il n'existe aucune $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *localement intégrable au sens de Lebesgue* et 2π-périodique dont f soit la série de Fourier.)

Exercice 5 : Utiliser la formule de Parseval pour calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + x^2)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Vérifier la continuité de S en O.

§ IV.3 *PREMIÈRE ÉTUDE DE LA CONVERGENCE PONCTUELLE*

THÉORÈME IV.3.1

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ telle que la série numérique $\sum_{k \geq 1} (|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$ converge. Alors la série de Fourier de f ***converge uniformément*** *sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $\tilde{f} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$, et il existe une partie négligeable N de $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = \tilde{f}(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi] \backslash N$.*

En particulier ***si f est de plus continue,*** *on a : $f =$*

Démonstration :

D'après la proposition IV.1.1, la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique.

En définitive $\tilde{f} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$.

Fixons à présent $k \in \mathbb{Z}$. Alors, en posant $u_0(t) = c_0(f)$ et, pour $\nu \in \mathbb{N}^* : u_\nu(t) = a_\nu(f) \cos \nu t + b_\nu(f) \sin \nu t$, on a :

$$(\forall \nu \in \mathbb{N})(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad |(\cos kt)\, u_\nu(t)| \leqslant |a_\nu(f)| + |b_\nu(f)|$$

et
$$|(\sin kt)\, u_\nu(t)| \leqslant |a_\nu(f)| + |b_\nu(f)| \,,$$

d'où la convergence normale, donc uniforme sur $\mathbb{R}$ des séries de fonctions continues de t $\sum\limits_{\nu \geqslant 0} \cos kt\, u_\nu(t)$ et $\sum\limits_{\nu \geqslant 0} \sin kt\, u_\nu(t)$, ce qui permet d'intégrer terme à terme sur $[-\pi, \pi]$ les égalités $(\cos kt)\, \tilde{f}(t) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(t) \cos kt$ et $(\sin kt)\, \tilde{f}(t) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(t) \sin kt$, ce qui donne :

$$a_0(\tilde{f}) = a_0(f) \quad \text{et} \quad (\forall k \in \mathbb{N}^*)\, a_k(\tilde{f}) = a_k(f) \quad \text{et} \quad b_k(\tilde{f}) = b_k(f) \,.$$

Autrement dit : $(\forall k \in \mathbb{Z})\, c_k(\tilde{f}) = c_k(f)$, soit : $c_k(\tilde{f} - f) = 0$. Le corollaire 1 du théorème IV.2.1 et le corollaire 2 du théorème IV.2.2 permettent alors de conclure respectivement dans le cas où $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ et dans le cas où f est quelconque dans $\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. ■

THÉORÈME IV.3.2

> *Soit $f \in \mathscr{CM}^1_c(\mathbb{U})$ (i.e. f est 2π-périodique,* **continue** *et telle que $f|_{[-\pi,\pi]}$ est* **de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux**). *Alors la série numérique $\sum\limits_{k \geqslant 1} (|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$ converge, donc la série de Fourier de f converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.*

Démonstration :

Une fois acquise la convergence de la série numérique, la dernière assertion est conséquence immédiate du théorème IV.3.1. Soit φ une fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique et égale à $f'(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ où $f'(x)$ existe. Alors φ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et admet f pour primitive large sur $\mathbb{R}$ (cf. tome 2, § VII.6). La formule d'intégration par parties s'applique (cf. *ibid*, remarque 3) et donne, pour $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{-1}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} f(t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}k}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi k}c_k(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Mais par le théorème IV.2.2, la série $\sum_{n\geqslant 1}(|c_n(\varphi)|^2 + |c_{-n}(\varphi)|^2)$ converge. Posant pour $n\geqslant 1$ $\alpha_n = |c_n(\varphi)|$ et $\beta_n = |c_{-n}(\varphi)|$, on a : $\left(\alpha_n - \frac{1}{n}\right)^2 \geqslant 0$, d'où $\frac{\alpha_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \alpha_n^2\right)$ et de même $\frac{\beta_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \beta_n^2\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, il s'ensuit que les séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\beta_n}{n}$ convergent. Donc la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}(|c_k(\varphi)| + |c_{-k}(\varphi)|)$ converge, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1}(|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$. ■

Exemple 1 : Soit $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complexes telles que la série $\sum(|\alpha_k| + |\beta_k|)$ converge. Alors la série trigonométrique $\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k\geqslant 1}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $S\in\mathscr{C}^0(\mathbb{U})$ (cf. proposition IV.1.1).

En raisonnant exactement comme dans la preuve du théorème IV.3.1 on voit que *les coefficients de Fourier trigonométriques de S sont précisément les* $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ *et les* $(\beta_k)_{k\geqslant 1}$: ainsi, les coefficients de Fourier de S sont tels que la série $\sum_{k\geqslant 1}(|c_k(S)| + |c_{-k}(S)|)$ converge.

On prendra garde que le théorème IV.3.2 donne une **condition suffisante, mais non nécessaire,** pour que la série de Fourier de f soit telle que la série $\sum_{k\geqslant 1}(|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$ converge :

Exemple 2 : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ la fonction *paire*, 2π-périodique, telle que $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x\in[0,\pi]$; f est continue, mais il est clair que $f\notin\mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$ car sa dérivée n'est pas bornée au voisinage de 0. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos kx\,\mathrm{d}x$, d'où en intégrant par parties : $a_k(f) = \frac{-1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{k^{3/2}\pi}\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Mais l'intégrale $\int^{+\infty}\frac{\sin t}{\quad}\,\mathrm{d}t$

converge [1], donc la suite $\left(\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, d'où $a_k(f) \underset{k\longrightarrow\infty}{\in} O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$, ce qui prouve que la série $\sum_k (|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|)$ converge, bien que $f \notin \mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$.

Le théorème IV.3.2 est déjà très performant, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 3 : Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(t) = \cos zt$ pour $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$. Alors f est *paire*, et $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$, donc le théorème IV.3.2 s'applique. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont donnés par :

$$(\forall n \geqslant 1) \quad b_n(f) = 0$$

et

$$(\forall n \geqslant 0) \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt \cos zt\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(z+n)t + \cos(z-n)t]\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z+n}\sin(z+n)\pi + \frac{1}{z-n}\sin(z-n)\pi\right)$$

$$= (-1)^n \frac{\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) = (-1)^n \frac{\sin \pi z}{\pi}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Le théorème IV.3.2 donne donc : $(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos nt$, d'où :

$$(1) \quad (\forall t \in [-\pi, \pi]) \qquad \cos zt = \frac{\sin \pi z}{\pi}\left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 2z}{z^2-n^2}\cos nt\right].$$

Puisque $z \notin \mathbb{Z}$ (d'où $\sin \pi z \neq 0$), on peut diviser les deux membres de (1) par $\sin \pi z$. En donnant à t des valeurs particulières, on obtient des relations

[1] C'est une *intégrale de Fresnel* (cf. par exemple tome 2, exercice 37 du

remarquables. Par exemple pour $t = 0$ (resp $t = \pi$) on trouve :

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, 2z}{z^2 - n^2}} \; , \quad \text{et}$$

$$(3) \qquad \boxed{\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}} \qquad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$ [1]

Supposons maintenant z *réel* ($z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) et appliquons à f la *relation de Parseval :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 zt \, dt = \frac{\sin^2 \pi z}{\pi^2} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right)^2 \right),$$

d'où

$$\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\pi z}{4\pi z} = \frac{\sin^2 \pi z}{\pi^2} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - n^2} \right),$$

d'où en réduisant et en tenant compte de (3) :
$\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \dfrac{1}{z^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{(z-n)^2} + \dfrac{1}{(z+n)^2} \right)$, que l'on préfère écrire :

$$(4) \qquad \boxed{\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}} \; ,$$

et qui est en fait valable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, comme on l'a vu par une autre méthode au tome 2 (cf. § XII.4, exemple 7).

Exemple 4 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. L'exemple 2 du § II.3 a montré :

$$(5) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cos nt \;, \quad \text{et}$$

$$(6) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad \frac{\sin t}{1 - 2z \cos t + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sin (n+1) t \, .$$

Aux membres de droite des relations (5) et (6) figurent des séries

[1] Ces développements avaient été obtenus au tome 2 (cf. § XII.4, exemple 7 et § XII.5, exemple 3, formule (6)) par d'autres voies.

trigonométriques de la variable t vérifiant les hypothèses de la proposition IV.1.1 puisque la série $\sum |z|^n$ converge. Aux membres de gauche, on a des fonctions éléments de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{U})$. D'après le résultat de l'exemple 1, les coefficients de ces séries trigonométriques sont donc *les coefficients de Fourier* de ces fonctions, ce qui prouve, sans autre calcul, les relations :

(7) $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad z^n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - z\cos t)\cos nt}{1 - 2z\cos t + z^2}\, dt\,, \quad \text{et}$$

(8) $$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad z^n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t \sin (n+1)t}{1 - 2z\cos t + z^2}\, dt\,.$$

Exemple 5 : Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ une série formelle de rayon $R > 0$, et r un réel tel que $0 < r < R$. La fonction $F_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \tilde{S}(r\,e^{it})$ est 2π-périodique et *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ (on le voit directement par application du théorème XII.3.4 du tome 2). En utilisant le résultat de l'exemple 1, on constate que les coefficients de Fourier exponentiels de F_r sont donnés par : $c_n(F_r) = a_n r^n$ si $n \in \mathbb{N}$ et $c_n(F_r) = 0$ si $n < 0$. La formule de Parseval appliquée à F_r donne :
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{S}(r\,e^{it})|^2\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ (relation déjà rencontrée au § II.2 (cf. exercice 4)).

Si nous appliquons à la série formelle $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} X^n$ ces considérations, pour $r \in \,]0, 1[$, on trouve que les coefficients de Fourier exponentiels de la fonction $L_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto -\operatorname{Log}(1 - r\,e^{it})$ sont $c_n(L_r) = \frac{r^n}{n}$ si $n \geq 1$ et $c_n(L_r) = 0$ si $n \leq 0$. Les coefficients de Fourier trigonométriques sont donc $a_0(L_r) = 0$, $a_n(L_r) = \frac{r^n}{n}$ et $b_n(L_r) = i\,\frac{r^n}{n}$ si $n \geq 1$. Comme $\frac{r^n}{n} \in \mathbb{R}$, les parties réelle et imaginaire *se séparent* et on obtient :

$$\operatorname{Re}\,(-\operatorname{Log}\,(1 - r\,e^{it})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos nt\,,$$

$$\operatorname{Im}\,(-\operatorname{Log}\,(1 - r\,e^{it})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin nt\,,$$

soit : $$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \frac{-1}{2} \operatorname{Log}\, |1 - 2r\cos t + r^2| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos nt\,,$$

et $$\operatorname{Arc\,tg} \frac{r\sin t}{1 - r\cos t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin nt\,.$$

En raisonnant comme à l'exemple 3, on en déduit :

$$(9) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{r^n}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Log} |1 - 2r\cos t + r^2| \right) \cos nt \, dt$$

$$(10) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{r^n}{n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \operatorname{Arc\,tg} \frac{r \sin t}{1 - r\cos t} \, dt \, .$$

(On pourrait aussi déduire (9) de (8) en intégrant par parties le second membre de (9)).

Le théorème de Dirichlet

THÉORÈME IV.3.3 (Riemann-Lebesgue)

Soit a et b réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ localement bornée intégrable sur $]a, b[$ et telle que l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge. Alors $\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) \xrightarrow[\lambda \in \mathbb{R},\, \lambda \to +\infty]{} 0.$

Démonstration :

Etudions d'abord le cas où ***f* est en escalier.**

Par linéarité, ce cas se ramène à celui où $f = \chi_{[\alpha, \beta]}$, avec $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, χ désignant la fonction indicatrice : $\chi_{[\alpha, \beta]}(x) = 0$ si $x \notin [\alpha, \beta]$, $\chi_{[\alpha, \beta]}(x) = 1$ si $x \in [\alpha, \beta]$. Sous cette hypothèse,

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \int_a^b e^{i\lambda t} \chi_{[\alpha, \beta]}(t) \, dt = \int_\alpha^\beta e^{i\lambda t} \, dt = \frac{-i}{\lambda} (e^{i\lambda\beta} - e^{i\lambda\alpha}) \, ,$$

d'où
$$\left| \int_a^b e^{i\lambda t} \chi_{[\alpha, \beta]}(t) \, dt \right| \leqslant \frac{2}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0 \, .$$

Examinons ensuite le **cas général.**

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons d'abord $c \in \,]a, b[$ tel que $\int_a^c |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Puis construisons $h : [c, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ en escalier telle que $\int_c^b |h - f| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ (cf. tome 2, théorème VII.8.3). Notons g la fonction $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto 0$ si $x \notin [c, b]$ et $x \mapsto h(x)$ si $x \in [c, b]$. Cette construction assure que g est en escalier et que $\int_a^b |f - g| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors A réel > 0 tel que $\left| \int_a^b e^{i\lambda t} g(t) \, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $\lambda \geqslant A$, ce qui est possible puisque g est en escalier. Pour λ réel $\geqslant A$, on a maintenant :

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t + \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}(f(t)-g(t))|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

Remarque 1 : L'extension du théorème IV.3.3 au cas où f serait localement bornée intégrable sur $[a,b]\backslash E$, avec E *fini*, et telle que l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge ne présente aucune difficulté. (Plus généralement le théorème IV.3.3 reste vrai si f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$. On en déduit en particulier que, si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ est 2π-périodique, avec $f|_{[0,2\pi]}$ intégrable au sens de Lebesgue, alors *les coefficients de Fourier* $a_k(f)$ et $b_k(f)$ *tendent vers* 0 quand $k\longrightarrow+\infty$.)

THÉORÈME IV.3.4 (Dirichlet [1])

Soit $f\in\mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$; *soit* $x\in\mathbb{R}$ *en lequel* $f(x+0)$ *et* $f(x-0)$ *existent et tel que les intégrales* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t}\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{t}\,\mathrm{d}t$ *convergent. Alors la série de Fourier de* f *converge au point* x *vers la valeur* $\mu=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$.

Démonstration :

Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$(\forall t\in\mathbb{R})\quad S_n(t)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{k=1}^{n}(a_n(f)\cos nt+b_n(f)\sin nt)\,,$$

et :

$$\Phi_x(t)=\frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))-\mu \quad \text{pour} \quad t\in\mathbb{R}_+^*\,,\quad \Phi_x(0)=0\,.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, introduisons le **noyau de Dirichlet** $D_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos\nu t$; D_n est *paire*, 2π-périodique ; c'est la fonction obtenue

[1] Peter Gustav *Lejeune-Dirichlet* (1805-1859), mathématicien allemand.

en prolongeant par continuité à $\mathbb{R}$ la fonction $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\sin (n+1/2)\, t}{2 \sin t/2}\, \mathrm{d}t$, comme on le voit par sommation des $\cos \nu t$.

Par intégration terme à terme, on voit que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, \mathrm{d}t = \pi \left(= 2 \int_0^{\pi} D_n(t)\, \mathrm{d}t \right).$$

En remplaçant les $a_n(f)$ et $b_n(f)$ par leurs valeurs, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{aligned} S_n(x) - \mu &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right] \mathrm{d}t - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu D_n(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right] \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu D_n(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, \mathrm{d}t - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mu D_n(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Mais (par $t \rightsquigarrow x - t$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

et (par $t \rightsquigarrow -t$) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(x+t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t$, d'où :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

soit :

$$(11) \qquad S_n(x) - \mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2\mu]\, D_n(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

On en déduit : $S_n(x) - \mu = \dfrac{1}{\pi}(A_n + B_n)$, avec

$$A_n = \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)]\, D_n(t)\, \mathrm{d}t$$

et

$$B_n = \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-0)]\, D_n(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Montrons que $A_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En fait,

$$A_n = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{2\sin(t/2)} \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, \mathrm{d}t\,.$$

La fonction $\varphi : 0 \mapsto 0,\ t \mapsto \dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \cdot \dfrac{t}{2\sin(t/2)}$ est localement bornée intégrable sur $]0, \pi]$, car il en est ainsi de $t \mapsto \dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t}$ par hypothèse et car $t \mapsto \dfrac{t}{2\sin(t/2)}$ se prolonge en 0 par continuité. De plus, à cause des hypothèses, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi|$ converge. Donc le théorème IV.3.3 s'applique (avec $\lambda = n + 1/2$) et montre que $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, \mathrm{d}t \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On voit de même que $B_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $S_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu$. ■

Remarque 2 : Cette démonstration s'étend sans difficulté au cas (fréquent en pratique) où la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement intégrable sur $[-\pi, \pi] \setminus E$ avec E *fini* à condition que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ converge. Donc *pour une telle f, en chaque point x pour lequel $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et pour lequel les intégrales* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x+0)|}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x-0)|}{t}\, \mathrm{d}t$ *convergent, la série de Fourier de f converge au point x vers* $\mu = \dfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ et $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent. Dans chacun des cas suivants, les hypothèses du théorème de Dirichlet sont satisfaites :

- La fonction $t \mapsto f(t)$ si $t > x$ et $x \mapsto f(x+0)$ est dérivable à droite en x et la fonction $t \mapsto f(t)$ si $t < x$ et $x \mapsto f(x-0)$ est dérivable à gauche en x.
- Il existe α réel > -1 tel que $\dfrac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \underset{t \overset{>}{\to} 0}{\in} O(t^{\alpha})$ et $\dfrac{f(x-t) - f(x-0)}{t} \underset{t \overset{>}{\to} 0}{\in} O(t^{\alpha})$.

Il est utile, pour les besoins usuels, d'en dégager le corol

COROLLAIRE 1 (Règle pratique de Dirichlet)

Soit $f \in \mathscr{CM}^1(\mathbb{U})$ (i.e. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est 2π-périodique et $f|_{[-\pi, \pi]}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux). Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\,(f(x+0) + f(x-0))\,.$$

Ce corollaire 1 couvre déjà une large gamme de cas et on peut en tirer beaucoup d'applications concrètes :

Exemple 6 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *impaire,* 2π-périodique, telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ pour $x \in \,]0, \pi]$ et $f(0) = 0$. Alors $f \in \mathscr{CM}^1(\mathbb{U})$ et $f = \tilde{f}$. Les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont : $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$, et $(\forall n \geqslant 1)$ $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin nt \,\mathrm{d}t$, ce qui, par intégration par parties, donne $b_n(f) = \dfrac{1}{n}$. Donc $(\forall t \in \mathbb{R})$ $f(t) = \tilde{f}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt$ (relation déjà rencontrée dans le Chap. III). Notons qu'ici la convergence de la série de Fourier $\sum \dfrac{1}{n} \sin nt$ est *uniforme* sur tout ensemble $[\alpha, 2\pi - \alpha\,]$ avec $0 < \alpha < \pi$ (cf. proposition IV.1.2). Mais cette convergence n'est pas uniforme sur $[0, 2\pi]$ puisque f présente une discontinuité en 0. La *formule de Parseval* donne ici :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\pi - t)^2}{4}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}\,, \quad \text{soit :} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Exemple 7 : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\,\mathbb{Z}$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *impaire,* telle que $f(t) = 0$ si $t \in \pi\mathbb{Z}$ et $f(t) = \sin 2zt$ si $t \in \,]-\pi, \pi[$ appartient à $\mathscr{CM}^1(\mathbb{U})$. Les coefficients trigonométriques $b_n(f)$ sont pour $n \geqslant 1$:

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2zt \sin nt \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n \sin 2\pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z - n} - \frac{1}{2z + n}\right).$$

D'après la règle pratique de Dirichlet, appliquée à $\tilde{f} = f$, on a :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2\pi z}{\pi} \cdot \frac{2n}{4z^2 - n^2} \cdot \sin nt\,.$$

En particulier pour $t = \frac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\sin \pi z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2\pi z}{\pi} \frac{2n}{4z^2 - n^2} \sin n \frac{\pi}{2} =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \sin 2\pi z \, . \, 2(2p+1)}{4z^2 - (2p+1)^2}$$

d'où, du fait que $\sin 2\pi z \neq 0$:

(12) $$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}(2p+1)}{z^2 - \left(p + \frac{1}{2}\right)^2}$$

formule déjà rencontrée au tome 2 (formule (7) du § XII.5).

Voici un exemple plus délicat, où nous utilisons le résultat de la remarque 2 :

Exemple 8 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = -\operatorname{Log}\left|2 \sin \frac{x}{2}\right|$ si $0 < x \leqslant \pi$. Il est clair que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ et que l'intégrale $\int_0^{\pi} |f|$ converge. Comme f est *paire*, il en résulte :

$$(\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}) \quad f(t) = \frac{1}{2} a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nt \, .$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, une intégration par parties donne :

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -\cos kt \operatorname{Log}\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{-2}{k\pi} \left[\sin kt \operatorname{Log}\left(2 \sin \frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin kt \cos t/2}{\sin t/2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin kt \cos t/2}{\sin t/2} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2k\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} \mathrm{d}t =$$ (en désignant par D_n le noyau de Dirichlet comme dans la preuve du théorème IV.3.4)

$$= \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} (D_k(t) + D_{k-1}(t)) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{k\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{k} \, .$$

Quant à $a_0(f)$, on voit facilement qu'il est nul (cf. par exemple tome 2, § VIII.3, exercice 6 ou 29). On peut donc écrire :

$$(\forall t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}) \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\operatorname{Log}\left|2 \sin \frac{t}{2}\right|} \, .$$

On avait déjà prouvé cette relation d'une autre manière au § III.5. La fonction f de cet exemple est telle que l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$ converge. Donc la *relation de Parseval* peut lui être appliquée (cf. remarque 1 du § IV.2). Compte tenu de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, elle donne : $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{Log}^2 \left(2 \sin \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \mathrm{Log}^2 \left(2 \sin \frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{12}} .$$

Un cas élémentaire de convergence uniforme

Nous allons préciser la règle pratique de Dirichlet (Cor. 1 du Th. IV.3.4), en définissant des ensembles simples de convergence uniforme :

Théorème IV.3.5

Soit $f \in \mathscr{CM}^1(\mathbb{U})$ (i.e. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est 2π-périodique, et $f|_{[-\pi,\pi]}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux). Soit $J = [a, b]$ $(a < b)$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ formé de points de continuité de f. Alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur J.

Démonstration :

Reprenons les calculs et notations de la preuve du théorème IV.3.4. (Notamment, la notation D_n pour le noyau de Dirichlet). Pour $x \in J$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : (cf. formule (11))

$$S_n(x) - f(x) = I_{-1,n}(x) + I_{1,n}(x) , \quad \text{avec, pour } \varepsilon \in \{-1, 1\} :$$

$$I_{\varepsilon,n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x + \varepsilon t) - f(x)] \, D_n(t) \, \mathrm{d}t .$$

Nous allons prouver que chaque $I_{\varepsilon,n}(x)$ converge uniformément vers 0 sur J pour $n \longrightarrow \infty$. Nous le ferons pour $\varepsilon = +1$, la preuve pour $\varepsilon = -1$ étant identique.

a) Soit des réels a', b', tels que $a' < a$, $b < b'$, et que f soit continue en tout point de $J' = [a', b']$. Notons A le réel positif $\mathrm{Max}_{t \in \mathbb{R}} |f'_d(t)|$, qui est bien défini parce que $f \in \mathscr{CM}^1(\mathbb{U})$. Par le théorème des accroissements finis, on a :

$$(\forall (u, v) \in J'^2) \quad |f(u) - f(v)| \leqslant A |u - v| .$$

Des variations de $t \mapsto \dfrac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ sur $]0, \pi]$, on déduit qu'avec $B = \dfrac{\pi A}{2}$, pour $x \in J$ et $t \in [0, \pi]$ tels que $x + t \in J'$:

$$|f(x + t) - f(x)| \leqslant B \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| .$$

On fixe un tel B pour la suite, et on note $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ ($M \in$

b) Fixons $x \in J$, et soit un réel $\eta \in \,]0, \pi[$ tel que $\eta \leqslant \alpha = \operatorname{Min}\,(a - a', b' - b)$. Posons :

$$U_\eta(x) = \int_0^\eta [f(x+t) - f(x)]\, D_n(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

$$V_\eta(x) = \int_\eta^\pi [f(x+t) - f(x)]\, D_n(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

de sorte que $I_{1,n}(x) = U_\eta(x) + V_\eta(x)$. Nous allons majorer $|U_\eta(x)|$ et $|V_\eta(x)|$. On a d'abord :

$$\begin{aligned} |U_\eta(x)| &\leqslant \int_0^\eta |f(x+t) - f(x)| \,.\, |D_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^\eta B \times \left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right| \mathrm{d}t \leqslant B\eta\ . \end{aligned}$$

Puis pour majorer $|V_\eta(x)|$, choisissons une subdivision $(a_0, \ldots, a_N)$ de $[\eta, \pi]$ $(\eta = a_0 < \ldots < a_N = \pi, N \geqslant 1)$ telle que chaque fonction $]a_i, a_{i+1}[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(x+t)$ soit prolongeable à $[a_i, a_{i+1}]$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$. (Noter que cette subdivision *dépend de x*).

Pour $t \in [\eta, \pi]$, posons : $\theta(x,t) = \dfrac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin t/2}$, et $\Delta(x,t) =$

(dérivée à droite en t de $u \mapsto \theta\,(x, u)$) $= \dfrac{2 \sin \frac{t}{2}\, f_d'(x+t) - [f(x+t) - f(x)] \cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}$.

Pour chaque $i \in [\![0, N-1]\!]$, on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(x+t) - f(x)]\, D_n(t)\,\mathrm{d}t = &- \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left[\theta(x,t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]_{a_i+0}^{a_{i+1}-0} \\ &+ \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \Delta(x,t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t\ , \end{aligned}$$

d'où :

$$\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} [f(x+t) - f(x)]\, D_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2M}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\eta}{2}} + \frac{(2A + 2M)(a_{i+1} - a_i)}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \times 4 \sin^2 \frac{\eta}{2}}\ .$$

Par addition, on en déduit :

$$|V_\eta(x)| \leqslant \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \times C_\eta\ , \quad \text{avec} \quad C_\eta = \frac{2NM}{\sin \frac{\eta}{2}} + \frac{(\pi - \eta)(2A + 2M)}{4 \sin^2 \frac{\eta}{2}}\ .$$

Remarquons que l'entier N peut être pris *indépendant de x* (car $u \mapsto f(x+u)$ est une translatée de f).

c) Soit maintenant un réel $\varepsilon > 0$. Choisissons $\eta \in \,]0, \pi[$ tel que $B\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $\eta \leqslant \alpha$. Choisissons ensuite $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{C_\eta}{n + \frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour $n \geqslant n_0$, d'après les majorations qui précèdent, on a :

$$(\forall x \in J) \qquad |U_\eta(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |V_\eta(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où :

$$(\forall x \in J) \qquad |I_{1,n}(x)| \leqslant \varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme attendue. ■

Exercice 1 : Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$. En déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique *paire* telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/\sqrt{x}$ pour $x \in \,]0, \pi]$. Etudier la série de Fourier de f et expliquer pourquoi la relation de Parseval ne s'applique pas à f.

Exercice 3 : Développer en série de Fourier les fonctions suivantes, 2π-périodiques et définies sur $[-\pi, \pi]$ par les formules indiquées :

a) $f(x) = 0$ si $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = x$ si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = 0$ si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

b) $f(x) = 0$ si $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = x(\pi - x)$ si $x \in [0, \pi]$.

c) $f(x) = 1 - x/\alpha$ si $x \in [0, \alpha]$ avec $0 < \alpha < \pi$, $f(x) = 0$ sur $[\alpha, \pi]$ et f *paire*.

d) $f(x) = x$ si $|x| < \alpha$ avec $0 < \alpha < \pi$, $f(x) = 0$ si $\alpha < |x| \leqslant \pi$.

e) $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$; en *b*), déduire : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$.

Dans chaque cas on écrira la relation de Parseval.

Exercice 4 : Mêmes questions qu'à l'exercice 3 avec :

a) $f(x) = 1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, $f(x) = -1$ sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$ et f paire.

b) $f(x) = 1$ sur $]0, 2\alpha[$, $f(x) = 0$ sur $]2\alpha, \pi]$ et f impaire $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

c) $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin x - \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et f paire.

d) $f(x) = \frac{\pi}{4} \times (1)^{\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{\pi}\right)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) = \frac{\pi}{3}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$, $f(x) = 0$ sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, $f(x) = \frac{-\pi}{3}$ sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, $f(0) = 0$ et f paire (resp. impaire).

f) $f(x) = e^x$ sur $]0, \pi]$ et f paire (resp. impaire).

g) $f(x) = \sin^3 x$ sur $[0, \pi]$ et f paire.

h) $f(x) = \dfrac{4 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = \dfrac{1}{z + \cos x}$ $(z \in \mathbb{C}, |z| > 1)$.

i) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$ et f impaire.

Exercice 5 : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ égale à $t \mapsto t \sin zt$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

b) En faisant $t = \pi$ dans le développement précédent et en utilisant la formule (3) de l'exemple 3, retrouver le développement de $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ qui est donc valable $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

Exercice 6 : On donne $h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Développer en série de Fourier $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ 2π-périodique, continue, paire et égale à 1 en 0, à 0 sur $[2h, \pi]$ et affine sur $[0, 2h]$.

b) En déduire $\frac{\pi}{h} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}$.

Exercice 7 : Démontrer les relations suivantes :

a) $(\forall x \in]0, 2\pi[)\ \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh}(z(\pi - x))}{\operatorname{sh} z\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{z^2 + k^2}$ $(z \in \mathbb{C}\backslash \mathrm{i}\mathbb{Z})$.

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ |\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}$.

c) $(\forall x \in [0, \pi])\ \frac{\pi}{2} - x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

Exercice 8 : On donne un réel $C > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Cx} \cos x \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \mathrm{d}x$.

Montrer que $\lim_{n \to \infty} J_n$ existe, et calculer cette limite.

Indication : Si $f(x) = \mathrm{e}^{-Cx} \cos x$, on pourra écrire J_n sous la forme $\int_0^{\pi} \frac{\sin (2n+1)x}{\sin x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$, avec $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x + k\pi)$, puis utiliser le Théorème de Riemann Lebesgue.

N.B. Cette méthode est un cas particulier de la *méthode sommatoire de Poisson* (cf. par exemple le sujet posé au Concours des Mines 1987, option M', 1re épreuve).

Exercice 9 : Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ considérée sur $]-R, R[$. Pour $r \in]0, R[$, soit $g_r(\theta) = f(r \cos \theta)$. Développer g_r en série de Fourier. En déduire, pour $x \in [-1, 1]$, et avec des $b_n(r)$ à exprimer sous forme de sommes de séries convergentes :

$$f(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r)\, T_n(x) \tag{1}$$

où, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $T_n(x) = \cos (n \operatorname{Arc\,cos} x)$ est le n-ième polynôme de Tchebycheff de 1re espèce. Expliquer pourquoi la convergence de la série (1) est meilleure que celle de la série entière de départ.

Retrouver la formule (1) par interversion de sommations, sans passer par les séries de Fourier.

Exercice 10 : Soit N un entier $\geqslant 3$. Trouver une série trigonométrique $\sum_{n \geqslant 0} A_n \cos nN\theta$ dont la somme $\varphi(\theta)$ soit telle que $r = \varphi(\theta)$ soit une équation polaire, dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, du polygone régulier à N côtés de centre O et dont (1, 0) est un sommet.

Exercice 11 : On donne $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique égale à $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}$ sur $[0, 2\pi[$.

a) Développer f en série de Fourier. En déduire : $(\forall x \in]0, 2\pi[)$

$$\pi = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin (\alpha + n)x}{\alpha + n} + \frac{\sin (\alpha - n)x}{\alpha - n} \right), \tag{1}$$

et

$$(2) \qquad \pi \operatorname{cotg} \alpha\pi = \frac{\cos \alpha x}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(\alpha+n)x}{\alpha+n} + \frac{\cos(\alpha-n)x}{\alpha-n} \right).$$

b) Prouver que (2) reste vraie si $x = 0$.

Exercice 12 : Soit n un entier impair $\geqslant 3$. Démontrer :

a) Si $x \in \mathbb{R}$ est de la forme $2\pi q/n$, avec $q \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$, alors :

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} \cos kx = 0.$$

b) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{2\pi}{n} \mathbb{Z}^*$, alors, pour $0 \leqslant x < 2\pi$:

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} \cos kx = (-1)^{\operatorname{Ent}\left(\frac{nx}{2\pi}\right)}.$$

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+a^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{a^2+(t-2n\pi)^2} + \frac{1}{a^2+(t+2n\pi)^2} \right]$ est continue et 2π-périodique.

b) Développer f en série de Fourier.

c) En déduire l'expression de f au moyen de fonctions usuelles.

Exercice 14 : Construire les courbes dont une équation polaire $r = f(\theta)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique est la suivante :

a) $r = \dfrac{4a}{\pi} \left[6 - 3\sqrt{3} + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{3} + 6(-1)^{n-1}}{36n^2 - 1} \cos 6n\theta \right] \quad (a > 0)$.

b) $r = \dfrac{6a\sqrt{3}}{\pi} \left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos 3k\theta}{9k^2 - 1} \right] \quad (a > 0)$.

c) $r = a \left[1 + \dfrac{2m}{\pi} \sin \dfrac{\pi}{m} \left(\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nm\theta}{1 - (nm)^2} \right) \right] \quad (a > 0, m \in \mathbb{N}^*$ donnés).

Exercice 15 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique et telle que $(\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2)\ |f(u) - f(v)| \leqslant C |u - v|^{\alpha}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\rho_n = (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2)^{1/2}$. Justifier l'application à f de la relation de Parseval. En déduire :

$$(\forall h \in \mathbb{R}) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 \, \mathrm{d}x = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 \sin^2 nh.$$

b) Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, en déduire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2^{\nu+1}} \leqslant \frac{1}{4} C^2 \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha\nu}}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1+2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} \rho_n^2 \leqslant \frac{C^2}{2} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha\nu}}$$

et enfin : $\displaystyle\sum_{n=1+2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} \rho_n \leqslant \frac{C}{\sqrt{2}} \frac{\pi^{\alpha}}{2^{\nu(\alpha-1/2)}}$.

c) En déduire : si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = c_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [c_n(f)\, e^{inx} + C_n(f)\, e^{-inx}]$ *sans passer par le théorème de Dirichlet,* la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$. Que dire pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$?

Exercice 16 : *(Convergence au sens de Cesaro) :* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ et $K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k(x)$.

a) Calculer $(n+1)K_{n+1} - nK_n$ et en déduire l'expression de K_n :

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2 n(x/2)}{\sin^2(x/2)} \quad \text{(prolongée par continuité en les } x \in 2\pi\mathbb{Z}) .$$

b) Prouver que $\left(\frac{1}{2\pi} K_n\right)$ est une *unité approchée* (cf. définition au début du § IV.2).

c) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique et *continue*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} (S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)) , \quad \text{où}$$

$$S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) .$$

Prouver que $\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_{n+1}(t)\, dt$ et en déduire que la suite de fonctions (σ_n) *converge uniformément vers f sur* $\mathbb{R}$. Montrer qu'on retrouve ainsi le théorème de Weierstrass trigonométrique.

Exercice 17 : *a*) Soit une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}$. On pose : $(\forall k \in \mathbb{N})$ $L_k = \frac{1}{k+1} (\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$ où $\Lambda_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j$. On suppose trouvé $A > 0$ tel que $(\forall k \in \mathbb{N})$ $|\lambda_k| \leq \frac{A}{k+1}$, et en outre que *la suite* (L_k) *converge* vers une limite $L \in \mathbb{C}$. Démontrer que la série $\sum \lambda_k$ converge et que $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = L$ (Cesaro).

b) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, continue et telle que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit de la forme $f = g - h$ avec g et h croissantes sur $[0, 2\pi]$. Prouver qu'il existe $A > 0$ tel que $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $|a_k(f)| \leq A/k$ et $|b_k(f)| \leq A/k$ (cf. exercice 1 du § IV.1). En déduire que la série de Fourier de f converge vers f en tout point $x \in \mathbb{R}$, et prouver que cette convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Soit $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Développer en série de Fourier la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, égale à $x \mapsto e^{zx}$ si $x \in [0, 2\pi[$. En déduire : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z \cos nx}{z^2 + n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{z^2 + n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 : Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$.

a) Utiliser l'exercice 3 du § IV.1 et les résultats de l'exemple 6 du § IV.3 pour montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}$ converge et a pour somme $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t)\, dt$.

b) Etendre ce résultat à $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, localement intégrable sur $[0, 2\pi] \setminus E$ avec E *fini* et telle que l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f|$ converge.

Exercice 20 : Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$.

a) Si $n\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, montrer que la série trigonométrique $\sum \lambda_n \sin n\theta$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, continue, et dont la série de Fourier est $\sum \lambda_n \sin n\theta$.

Indication : Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $k = \operatorname{Ent}\left(\dfrac{\pi}{\theta}\right)$. Pour ε réel > 0 donné, choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\lambda_n \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, puis prendre p et q tels que $N < p < q$. Majorer $\left|\sum\limits_{n=p}^{q} \lambda_n \sin n\theta\right|$ et conclure.

b) On revient à l'hypothèse du départ : $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Soit $f(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\theta$. Justifier l'existence de f pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et le fait que f est continue sur $]0, 2\pi[$.

*b*1) Démontrer que si f est *continue sur* $\mathbb{R}$, alors $n\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication : Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, soit $F(\theta) = \displaystyle\int_0^{\theta} f(t)\,dt$. Vérifier que $F(\theta) \underset{\theta \to 0}{\in} o(\theta)$. Prouver (en utilisant l'exercice 19) que $F(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n}{n}(1 - \cos n\theta)$. Enfin minorer convenablement $F(\pi/k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et conclure.

*b*2) Que dire si la série de fonctions $\sum \lambda_n \sin n\theta$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 21 : Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_+$ telle que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. On considère les deux séries trigonométriques : $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2}\lambda_0 + \sum\limits_{n \geqslant 1} \lambda_n \cos n\theta$ et $\mathscr{T} = \sum\limits_{n \geqslant 1} \lambda_n \sin n\theta$ dont on sait qu'elles convergent respectivement pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$ vers des fonctions f et g, 2π-périodiques. Rappeler pourquoi f et g sont continues en tout point de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ (cf. proposition IV.1.2).

a) On suppose l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g|$ convergente. Montrer à l'aide de l'exercice 19 *b*) que la série $\sum \dfrac{\lambda_n}{n}$ converge, et montrer que $\mathscr{T}$ est la série de Fourier de g.

b) On suppose que les intégrales $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g|$ convergent. Montrer que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ sont les séries de Fourier de f et g respectivement.

c) Réciproquement, on suppose que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{\lambda_n}{n}$ converge. Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f|$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g|$ convergent.

Indication : Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\Lambda_k = \dfrac{1}{2}\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$. Vérifier que la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{\Lambda_k}{k(k+1)}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{2}\lambda_0 + \Lambda$ où $\Lambda = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_n}{n}$. Poser $h = f + ig$. Montrer, à l'aide d'une transformation d'Abel, que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $(\forall \theta \in]0, 2\pi[)$ $|h(\theta)| \leqslant \Lambda_k + \dfrac{\lambda_k}{|\sin \theta/2|}$, et si $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{k+1}, \dfrac{\pi}{k}\right]$, $|h(\theta)| \leqslant \Lambda_k + (k+1)\lambda_k$. En déduire $(\forall N \in \mathbb{N}^*)$ $\sum\limits_{k=1}^{N} \displaystyle\int_{\pi/(k+1)}^{\pi/k} |h| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{\pi}{k(k+1)}(\Lambda_k + (k+1)\lambda_k)$ et conclure.

Exercice 22 : Soit $f \in \mathscr{L}_B^1(\mathbb{U})$ telle que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit *réglée*. On note $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ les sommes partielles de la série de Fourier de f : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $S_0(x) = \dfrac{a_0(f)}{2}$ et si $n \in \mathbb{N}^* : S_n(x) = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$. Montrer : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $S_n(x) \underset{n \to \infty}{\in}$

Exercice 23 *(Phénomène de Gibbs)* ([1]) : On suppose acquis les résultats de l'exemple 6 du § IV.3. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \sin jx$; $f(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} \sin qx$ et $R_k(x) = f(x) - S_k(x)$.

a) Montrer que $(\forall x \in\,]0, 2\pi[)\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ on a :

$$S_n(x) = \frac{-x}{2} + \int_0^x \frac{\sin (n + 1/2)t}{2 \sin (t/2)} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad R_n(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin (n + 1/2)t}{2 \sin (t/2)} \mathrm{d}t .$$

b) On pose : $J_n(x) = \int_0^x \frac{\sin (n + 1/2)t}{2 \sin (t/2)} \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\sin (n + 1/2)t}{t} \mathrm{d}t$. Prouver :

$$\exists c > 0 , \quad \exists h \in\,]0, \pi[\ |\ (\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in\,]0, h]) \quad |J_n(x)| \leqslant c/n .$$

c) Montrer que les extrema de la fonction R_n sont atteints en les points $x_{k,n} = \frac{2k\pi}{2n+1}$ (k à préciser).

d) On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $R_n(x_{k,n}) \underset{n \to \infty, n > k}{\longrightarrow} \rho_k = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et prouver que $\rho_k \neq 0$.

Retrouver la non-convergence uniforme sur $]0, 2\pi[$ de la suite (S_n) vers f, et expliquer la situation sur un graphique (« multibosse glissante »).

e) Imaginer un programme sur ordinateur (en Turbo-Basic ou Turbo-Pascal) pour visualiser ce phénomène.

f) Montrer que la suite $(S_n - f)$ est uniformément bornée.

Exercice 24 : Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à θ sur $\pi\mathbb{Z}$, à -1 sur $]-\pi, 0[$ et à 1 sur $]0, \pi[$.

a) Vérifier $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1)x}{2n+1}$ et indiquer des ensembles de convergence uniforme de la série.

b) Soit $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin (2k+1)x}{2k+1}$ $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$. Calculer $\frac{\mathrm{d}S_n(x)}{\mathrm{d}x}$. Prouver que S_n atteint ses extrema en les $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n+1}$ (k à préciser). Pour k fixé, trouver $\lim_{n \to \infty, n > k} S_n(x_{k,n})$ et montrer que cette limite λ_k est $\neq 0$. Constater un phénomène de Gibbs analogue à celui de l'exercice 23.

Exercice 25 : (Exemple de Fejér d'une fonction *continue* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, dont la série de Fourier *diverge en* 0).

a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *paire*, 2π-périodique, telle que $(\forall x \in [0, \pi])$ $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin \left[(2^{p^3} + 1) \frac{x}{2} \right]$. Vérifier que f est définie est *continue* sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \,\mathrm{d}t$ et pour $n \geqslant 1 : A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \,\mathrm{d}t$. Pour $\nu \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n,\nu} = \int_0^{\pi} \cos nt \sin (2\nu + 1) \frac{t}{2} \mathrm{d}t$; pour $q \in \mathbb{N}$, on note $s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu}$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Montrer que, si ν est fixé, $s_{n,\nu} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Calculer explicitement les $a_{n,\nu}$. En déduire que $(\forall q)\ (\forall \nu)$ $s_{q,\nu} > 0$, et prouver que $\underset{q \in N}{\mathrm{Max}} (s_{q,\nu}) = s_{\nu,\nu}$.

c) Montrer : $\exists B > 0 \mid (\forall \nu \geqslant 1)\ s_{\nu,\nu} \geqslant B \,\mathrm{Log}\, \nu$.

([1]) Josiah Willard *Gibbs* (1839-1903), mathématicien anglais.

d) Montrer : $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} a_{n,\, 2p^3-1}$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{n} A_k$. Vérifier : $T_n = \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{1}{p^2} s_{n,\, 2p^3-1}$. Montrer : $\exists D > 0 \mid (\forall p \in \mathbb{N}^*)\ T_{2p^3-1} \geqslant Dp$, et constater que la série de Fourier de f diverge au point 0.

Exercice 26 *(Polynômes de Bernoulli)*

PARTIE I : Pour $t \in \mathbb{C} \backslash 2\,i\pi\mathbb{Z}$, et $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(t, z) = \dfrac{t\, e^{tz}}{e^t - 1}$, en convenant que $f(0, z) = 1$ pour tout z.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(B_n(z))$ de polynômes en z tels que, pour $r > 0$ convenable, on ait :

$$(\forall t \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, |t| \leqslant r) \quad f(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} B_n(z)\,.$$

Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.

On pose $(\forall n)\quad b_n = B_n(0)$ (c'est le n-ième *nombre de Bernoulli*).

b) En étudiant $f(t, 0)$, montrer que $(\forall n \geqslant 1)\quad b_{2n+1} = 0$.

Pour $n \geqslant 2$, montrer que $B_n(0) = B_n(1)$.

Utiliser $f(t, z)$ pour prouver :

$$(\forall n \geqslant 0) \quad B_n(1 - z) = (-1)^n B_n(z)\,; \quad B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\, z^k\,;$$

$$(\forall n \geqslant 1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(z) = n z^{n-1}\,; \quad B_n'(z) = n B_{n-1}(z)\,.$$

Prouver également que $(\forall n \in \mathbb{N})\ B_{n+1}(z) - B_{n+1}(z - 1) = (n + 1)(z - 1)^n$ et en déduire $\sigma_n(N) = 1^n + 2^n + \cdots + N^n$ en fonction de $B_{n+1}(N + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Prouver : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad B_n(x + y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} B_k(x)\, y^{n-k}$, et

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall q \in \mathbb{N}^*) \quad B_n(qx) = q^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_n\left(x + \frac{k}{q}\right)\,.$$

PARTIE II : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\bar{B}_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique telle que $\bar{B}_n(x) = B_n(x)$ si $x \in\ ]0, 1[$ et $\bar{B}_n(0) = \dfrac{1}{2}\,(B_n(0) + B_n(1))$. On se propose de développer $\bar{B}_n$ en série de Fourier.

a) Commencer par développer $\bar{B}_1$ et $\bar{B}_2$.

b) En utilisant I*b*), en déduire par récurrence : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall p \in \mathbb{N})$

(1) $\quad (-1)^{p-1}\, 2^{2p} \dfrac{\pi^{2p+1}}{(2p + 1)!} \overline{B_{2p+1}}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin\,(2\,k\,\pi x)}{k^{2p+1}}$, et $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$

(2) $\quad (-1)^{p-1}\, 2^{2p-1} \dfrac{\pi^{2p}}{(2p)!} \overline{B_{2p}}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2\,k\,\pi x}{k^{2p}}$; faire $x = \dfrac{1}{4}$ dans (1).

c) En déduire $\zeta(2p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$ en fonction de b_{2p} pour $p \in \mathbb{N}^*$.

d) Prouver : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \geqslant 2)\quad |\overline{B_n}(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{3} \dfrac{n!}{(2\,\pi)^n}$.

e) Donner un équivalent simple de b_{2p} quand $p \longrightarrow \infty$.

Exercice 27 : *a*) Si $r \in\ ]-1, 1[$, vérifier $(\forall \theta \in \mathbb{R})\quad \dfrac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos\theta + r^2} = 1 + 2 \sum^{\infty} r^n \cos n\theta$.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. Prouver : $(\forall r \in\,]-1,1[)(\forall \theta \in \mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)\cos n\theta + b_n(f)\sin n\theta)\, r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t) + r^2} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent, et soit $\mu = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. Montrer : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{r \overset{<}{\to} 1}{\longrightarrow} \mu$. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, montrer que la limite a lieu uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

§ IV.4 *OPÉRATIONS SUR CERTAINES SÉRIES DE FOURIER*

Si l'on excepte les combinaisons linéaires, les opérations de base de l'Algèbre et de l'Analyse (produit, quotient, dérivation, intégration) s'étendent moins facilement aux séries de Fourier qu'aux séries entières. Nous nous en tiendrons à trois opérations simples présentant un intérêt particulier.

Dérivation

THÉORÈME IV.4.1

> *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et* de classe $\mathscr{C}^2$ *(en abrégé $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{U})$, ce qui entraîne que les séries de Fourier de f et f' convergent normalement sur $\mathbb{R}$ vers f et f' respectivement). Alors la série de Fourier de f' s'obtient* **en dérivant terme à terme** *celle de f.*

Démonstration :

Notant comme précédemment $e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et utilisant le théorème IV.3.2, on a, uniformément sur $\mathbb{R}$:

$$f = c_0(f)\, e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k(f)\, e_k + c_{-k}(f)\, e_{-k})\,;$$

$$f' = c_0(f')\, e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k(f')\, e_k + c_{-k}(f')\, e_{-k})\,.$$

Or, par intégration par parties : $(\forall k \in \mathbb{Z})$:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-ikt} f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{-ikt} f(t)\right]_0^{2\pi} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ik\,\mathrm{e}^{-ikt} f(t)\,\mathrm{d}t = ikc_k(f)\,.$$

D'où l'on déduit : $c_k(f')\, e_k = (c_k(f)\, e_k)'$, ce qui prouve bien que la série de Fourier de f' est la dérivée terme à terme de celle de f. ■

COROLLAIRE 1

Si $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{U})$ avec $k \geqslant 1$, la série de Fourier de $f^{(k)}$ (qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $f^{(k)}$) s'obtient en dérivant k fois terme à terme celle de f.

Remarque 1 : Si $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{U})$ avec $k \geqslant 1$, en appliquant la relation de Parseval à $f^{(k)}$, on voit que la série $\sum_{|n| \geqslant 1} |c_n(f^{(k)})|^2$ est convergente, et compte tenu de : $c_n(f') = inc_n(f)$, il en résulte que la série $\sum_{|n| \geqslant 1} |n^k c_n(f)|^2$ converge. On voit donc que plus la fonction f est dérivable, plus les $c_n(f)$ tendent rapidement vers 0, car **pour $f \in \mathscr{C}^{k+1}(\mathbb{U})$ avec $k \geqslant 1$,** on a :

$$\boxed{c_n(f) \underset{|n| \longrightarrow \infty}{\in} o\left(\frac{1}{n^k}\right)}\,.$$

Intégration

Il est aussi remarquable qu'intéressant que l'*intégration* d'une série de Fourier soit une « bonne » opération dans *tous* les cas. Pour le voir nous établirons d'abord 3 lemmes, et d'abord le suivant, qui généralise au mieux la formule d'intégration par parties :

LEMME 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et soit u et v : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bornées intégrables. On pose $U(x) = \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t$ et $V(x) = \int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [a, b]$. Alors :

$$(1) \qquad \int_a^b U(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t = [U(t)\,V(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,V(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration :

Soit (u_n), (v_n) $(n \in \mathbb{N})$ deux suites de fonctions continues : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, telles que $\int_a^b |u - u_n| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_a^b |v - v_n| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Leur existence résulte du théorème VII.8.3 du tome 2, et même il est clair, en reprenant la preuve de ce théorème, qu'on peut supposer ces suites *uniformément bornées* sur $[a, b]$. Il est alors immédiat qu'en posant

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V_n(x) = \int_a^x v_n(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$, d'abord les suites (U_n) et (V_n) convergent uniformément sur $[a, b]$ vers U et V, puis $\int_a^b U_n(t)\,u_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_a^b U(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$,

et $\int_a^b u_n(t)\,V_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_a^b u(t)\,V(t)\,\mathrm{d}t$.

Mais la relation (1) est vraie avec u_n, v_n, U_n et V_n à la place de u, v, U et V puisque U_n et V_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $U'_n = u_n$, $V'_n = v_n$; d'où (1) par passage à la limite. ■

Lemme 2

Il existe $M > 0$ tel que $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant M$.

Démonstration :

Posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$; on a :

$$S_n(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt \right) dt = -\frac{x}{2} + \int_0^x D_n(t)\, dt ,$$

où D_n est le *noyau de Dirichlet* du § IV.3. Il suffit de prouver le lemme avec $x \in \,]0, \pi[$; c'est alors une conséquence évidente du Lemme 1 qui sera vu au § IV.5 ci-dessous. ■

Lemme 3

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n(f)}{n}$ converge, et on a : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \times (\pi - t)\, dt$.

Démonstration :

On a $\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n(f)}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, S_N(t)\, dt$, avec $S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin kt}{t}$.

Mais d'après l'exemple 6 du § IV.3 et le lemme 2 ci-dessus, la suite (S_N) est *u-bornée* sur $[0, 2\pi]$, et converge simplement sur $[0, 2\pi]$ vers la fonction $0 \mapsto 0$, $2\pi \mapsto 0$, $x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$ si $0 < x < 2\pi$.

D'où $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, S_N(t)\, dt \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \times (\pi - t)\, dt$. (Un raisonnement élémentaire est aussi possible, en utilisant la convergence uniforme de la suite S_N sur tout $[\delta, 2\pi - \delta]$ avec $0 < \delta < \pi$). ■

Théorème IV.4.2

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Alors la série trigonométrique

$$(\mathscr{F}_0) \qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{-1}{n} \left(b_n(f) \cos nx - a_n(f) \sin nx \right) ,$$

obtenue en intégrant terme à terme la partie **non constante** *de la série de Fourier de f, converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $G : x \mapsto F(x) - \frac{1}{2} a_0(f)\, x - s$, où $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}$.*

Démonstration :

On peut supposer $a_0(f) = 0$ (remplacer f par $f - a_0$). Si $x \in \mathbb{R}$, soit ${}_xf$ la fonction $t \mapsto f(x+t)$. D'où : ${}_xf \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$, et par un calcul facile : $(\forall n \geqslant 1)\quad b_n({}_xf) = \frac{1}{n}\,(b_n(f)\cos nx - a_n(f)\sin nx)$. Le lemme 3 montre que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\, b_n({}_xf)$ converge, et a pour somme $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t) \times (\pi - t)\,\mathrm{d}t$, ce qui vaut, d'après le lemme 1 :

$$\frac{1}{2\pi}\left[-2\pi F(x) + \int_0^{2\pi} F(x+t)\,\mathrm{d}t\right] = -F(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x+t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

mais F est 2π-périodique car $a_0(f) = 0$; d'où $\int_0^{2\pi} F(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(t)\,\mathrm{d}t =$ (en appliquant le lemme 1 à nouveau, mais en sens inverse) $= \int_0^{2\pi} f(t) \times (\pi - t)\,\mathrm{d}t =$ (cf. lemme 3) $= 2\pi s$. D'où déjà :

$$F(x) = s - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,(b_n(f)\cos nx - a_n(f)\sin nx) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Montrons enfin que cette convergence est uniforme sur $[0, 2\pi]$ (donc sur $\mathbb{R}$). Pour $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a \leqslant \beta$, et $x \in \mathbb{R}$, posons $S_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{n}\, b_n({}_xf)$ $(S_{\alpha,\alpha}(x) = 0)$, et $s_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=\alpha+1}^{\beta} \frac{\sin nx}{n}$. Alors $|S_{\alpha,\beta}(x)| = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(x, t)\, s_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t)|\,|s_{\alpha,\beta}(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit ϵ réel > 0 ; choisissons $M > 0$ comme au lemme 2.
On choisit $\delta \in\ ]0, \pi[$ tel que $\frac{M}{\pi}\,\delta \times \sup_{z \in \mathbb{R}} |f(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (f est bornée) ; On sait d'autre part que $(s_{1,\beta}(t))$ converge uniformément (vers $\frac{\pi - t}{2}$) sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ (exemple 6 du § IV.3), d'où pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand : $\forall (\alpha, \beta)\ (N \leqslant \alpha \leqslant \beta) \Rightarrow |s_{\alpha,\beta}(t)| \times \left(\sup_{z \in \mathbb{R}} |f(z)|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Alors pour $x \in [0, 2\pi]$ et $N \leqslant \alpha \leqslant \beta$, on aura : $|S_{\alpha,\beta}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$; on a donc vérifié le critère de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}$ pour la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}\, b_n({}_xf)$. ■

Produit de convolution

Afin d'étendre le *produit* à certaines séries de Fourier, rappelons d'abord quelques conséquences simples de la théorie des familles sommables, vue au chap. IX du tome 2.

Une famille $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est sommable ssi cha

$\sum_{k \geqslant 0} |a_k|$ et $\sum_{k \leqslant 0} |a_k|$ converge. Si c'est le cas on note $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ la *somme* de cette famille sommable qui vaut $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}$.

Notons $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'ensemble des $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (les a_k complexes) telles que la famille (a_k) soit sommable ; c'est un sous-$\mathbb{C}$-ev de $\mathscr{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Sur ce $\mathbb{C}$-ev, l'application $\Psi : a = (a_k) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Le sous-ensemble de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ formé des (a_k) telles que $a_k = 0 \ \forall k < 0$ est un sous-$\mathbb{C}$-ev de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ qui s'identifie évidemment au $\mathbb{C}$-ev $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_{k \geqslant 0} |a_k|$ converge. Nous continuerons à noter $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ce sous-ensemble.

Si $a = (a_p) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $b = (b_q) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, le théorème sur le produit de deux séries absolument convergentes (cf. tome 2, théorème IX.5.1) montre que $c = (c_n) \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Posant $c = a * b$, on vérifie que $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, muni de sa structure de $\mathbb{C}$-ev et du produit $*$, devient une $\mathbb{C}$-algèbre unifère, commutative (l'unité est $u = (\delta_{0n})$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). (En fait, identifiant $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ à la série formelle $S = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$, on voit que $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de l'algèbre $\mathbb{C}\{X\}$ des séries formelles de rayon > 0).

Nous allons voir que cette *structure d'algèbre* s'étend tout naturellement à $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

PROPOSITION IV.4.1

Soit $a = (a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ deux éléments de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. La famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable, et sa somme est $\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p \times \sum_{q \in \mathbb{Z}} b_q$.

Démonstration :

Posons $A = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|$ et $B = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{(|p|, |q|) \in [\![0, N]\!]^2} |a_p b_q| = \left(\sum_{p=-N}^{N} |a_p| \right) \left(\sum_{q=-N}^{N} |b_q| \right) \leqslant AB$, d'où le résultat avec le théorème IX.7.2 du tome 2 et le théorème IX.7.4 qui autorise la sommation par paquets. ■

COROLLAIRE

Avec les notations de la proposition IV.4.1, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p+q=n}$ est sommable ; si s_n désigne sa somme, la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et $\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} a_p b_q = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s_n = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} b_q \right)$.

Définition IV.4.1

Soit $a = (a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ deux éléments de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. On appelle ***produit de convolution*** *de a et b, et on note $a * b$, l'élément* $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad c_n = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2, p+q=n} a_p\, b_q \left(= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k}\, b_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k\, b_{n-k} \right).$$

On constate que le produit de convolution est commutatif. Il admet comme élément neutre l'élément u défini plus haut. On voit que $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$ $(\forall a \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$ $(\forall b \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$ on a :

$$(\lambda a) * b = a * (\lambda b) = \lambda (a * b)\,.$$

Enfin, en utilisant la propriété (FS4) et le théorème IX.7.4 du tome 2, chapitre IX, on montre *l'associativité* de ce produit $*$, d'où :

Proposition IV.4.2

Le $\mathbb{C}$-ev $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni du ***produit de convolution*** *$*$ est une* ***$\mathbb{C}$-algèbre.***

Cette $\mathbb{C}$-algèbre est appelée **algèbre de convolution** $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Il est maintenant clair que $l^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (moyennant les identifications indiquées plus haut) est une *sous*-$\mathbb{C}$-*algèbre* de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Une conséquence remarquable de la proposition IV.4.1 est que la forme linéaire $\Psi : a = (a_k) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ sur $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ est *multiplicative*, i.e. vérifie $\Psi(a * b) = \Psi(a) \times \Psi(b)$ pour tous a et b de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, et $\Psi(u) = 1$.

A chaque élément $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ associons maintenant la *série trigonométrique* $\mathscr{T}_a = a_0\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, e_n + a_{-n}\, e_{-n})$: elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que nous noterons $\mathscr{S}_a$, évidemment 2π-périodique et continue, et dont les coefficients de Fourier exponentiels sont précisément les $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (cf. exemple 1 du § IV.3).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathscr{S}_a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, e_n(x) + a_{-n}\, e_{-n}(x))$, mais aussi : $\mathscr{S}_a(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\, e_n(x)$ (la famille $(a_n\, e_n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ étant trivialement sommable).

Une autre conséquence de la proposition IV.4.1 est que, pour $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ éléments de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, si on pose $c = a * b (= (c_n)_{n \in \mathbb{Z}})$, on a :

$$(1) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n\, e_n(x) = \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p\, e_p(x) \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} b_q\, e_q(x) \right).$$

En effet, notant, pour $x \in \mathbb{R}$, A_x, B_x et C_x les familles $(a_p\, e_p(x))_{p \in \mathbb{Z}}$, $(b_q\, e_q(x))_{q \in \mathbb{Z}}$, $(c_r\, e_r(x))_{r \in \mathbb{Z}}$, il est clair que $C_x = A_x * B_x$, d'où la formule (1) par application de la proposition IV.4.1. Autrement dit :

$$(2) \qquad (\forall a \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \forall b \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})) \quad \boxed{\mathscr{S}_{a*b} = \mathscr{S}_a \times \mathscr{S}_b}$$

Remarquons maintenant que $\mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (rappelons qu'il s'agit des fonctions *continues* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et dont la restriction à $[0, 2\pi]$ est *de classe* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux*). A chaque $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$, associons sa série de Fourier $\mathscr{F}_f$, et la famille $c_{\langle f\rangle} = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$. Le théorème IV.3.2 a montré que $c_{\langle f\rangle} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et que f est somme de $\mathscr{F}_f$, dont la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME IV.4.3

Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$ et $g \in \mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$. Alors, avec les notations ci-dessus, $c_{\langle fg\rangle} = c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}$.

Démonstration :

f étant la somme de sa série de Fourier, on a : $f = \mathscr{S}_{c_{\langle f\rangle}}$ et de même $g = \mathscr{S}_{c_{\langle g\rangle}}$ et $fg = \mathscr{S}_{c_{\langle fg\rangle}}$. Mais, d'après la relation (2) $\mathscr{S}_{c_{\langle f\rangle}} \times \mathscr{S}_{c_{\langle g\rangle}} = \mathscr{S}_{c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}}$. Donc $\mathscr{S}_{c_{\langle fg\rangle}} = \mathscr{S}_{c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}}$. Notant $F = \mathscr{S}_{c_{\langle fg\rangle}} = \mathscr{S}_{c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}}$, par l'exemple 1 du § IV.3, on a aussi bien $c_{\langle F\rangle} = c_{\langle fg\rangle}$ que $c_{\langle F\rangle} = c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}$, d'où $c_{\langle fg\rangle} = c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}$. ■

Ceux qui trouveraient cette démonstration trop abstraite peuvent retrouver le résultat par une intégration terme à terme directe (cf. exercice 1).

L'application $\mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U}) \longrightarrow l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, $f \mapsto c_{\langle f\rangle}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, envoie l'unité de $\mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$ (c.-à-d. la fonction constante sur $\mathbb{R}$ et de valeur 1) sur celle de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, et d'après le théorème IV.4.2, c'est donc un **homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres.** De plus elle est **injective** (cf. corollaire 1 du théorème IV.2.1). En revanche elle n'est *pas surjective* (cf. exemple 2 du § IV.3).

Exercice 1 : Soit f et g éléments de $\mathscr{C}\mathscr{M}_c^1(\mathbb{U})$. Montrer directement que $c_{\langle fg\rangle} = c_{\langle f\rangle} * c_{\langle g\rangle}$ de la manière suivante : pour $n \in \mathbb{Z}$ écrire $c_n(fg) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\, g(t)\, dt$, y remplacer $f(t)\, g(t)$ par $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} c_p(f)\, c_q(g)\, e^{i(p+q)t}$ et justifier $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{p,q} = \sum_{p,q}\int_0^{2\pi}$.

Exercice 2 : Trouver les solutions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (a + b\, e^{2it})\, y = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ est donné. (On discutera suivant la valeur de a).

Exercice 3 : On rappelle (cf. exemple 8 du § IV.3) que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\operatorname{Log}\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, 2π-périodique, telle que $f|_{[-\pi,\pi]}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\operatorname{Log}\frac{1}{\left|2\sin\frac{t}{2}\right|}\, dt\,.$$

Exercice 4 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ est continue, que sa série de Fourier a des coefficients exponentiels qui vérifient : $\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |mc_m|^2$ converge, et cependant f n'est pas dérivable au point $x = 0$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π périodique, de classe $\mathscr{C}^2$. On pose :

$$u_n(x) = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}).$$

a) Prouver l'existence d'un réel $A > 0$ tel que l'on ait :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |u_n(x)| \leqslant A/n^2.$$

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et *continue*. On pose $t_n = u_n g$. Montrer que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on ait : $\left| f(x)g(x) - \sum_{k=0}^{n} t_n(x) \right| < \varepsilon$.

Montrer que la série de terme général $a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)$ et de premier terme $\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g)$ converge et a pour somme $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Qu'obtient-on si l'on prend pour f la fonction, *paire* telle que, pour $t \in [0, \pi]$ on ait : $f(t) = -2t^3 + 3\pi t^2$ et pour g la fonction telle que, pour $t \in [-\pi, \pi]$ on ait : $g(t) = |t|$.

§ IV.5 *UN THÉORÈME DE JORDAN*

Fonctions à variation bornée

Pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ $(a \leqslant b)$, nous noterons Sub $([a, b])$ l'ensemble des *subdivisions* de $[a, b]$, *i.e.* des parties finies de $[a, b]$ contenant a et b. Lorsque $a < b$, une subdivision σ s'identifie à la suite $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ (où card $(\sigma) = n + 1$) telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ et $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. A chaque subdivision $\sigma \in$ Sub $([a, b])$ on associe son *pas*, égal à $\operatorname{Max}_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)$ (par convention le pas de l'unique subdivision de $[a, a]$ est 0). On ordonne Sub $([a, b])$ *par inclusion.*

Soit $I = [a, b]$ un segment donné de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in$ Sub $([a, b])$, on pose :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Ce nombre réel $\operatorname{Var}_\sigma(f)$ est appelé *variation de f sur* σ.

DÉFINITION IV.5.1

Avec les notations ci-dessus, une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***à variation bornée*** *ssi la famille de réels positifs* $(\operatorname{Var}_\sigma(f))_{\sigma \in \text{Sub}([a,b])}$ *est* ***majorée*** *dans* $\mathbb{R}$. *Lorsque c'est le cas,* **la borne supérieure** *de cette famille s'appelle* ***variation totale*** *de f sur* $[a, b]$.

La variation totale de f à variation bornée sur I sera notée Var (f, I). Il est facile de vérifier que l'ensemble des fonctions à variation bornée : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On voit immédiatement que toute *fonction en escalier :* $I \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi que toute fonction *lipschitzienne :* $I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions à variation bornée. Par ailleurs il est évident que si f est *monotone,* elle est à variation bornée, avec exactement Var $(f, I) = |f(b) - f(a)|$. Toute restriction d'une fonction à variation bornée à un sous-intervalle de I l'est encore. Inve se donne $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $a < b < c$, et $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $f_{[a,b]}$ et $f|_{[b,c]}$ *soient à variation bornée, f l'est aussi.*

Il existe des fonctions qui ne sont pas à variation bornée, bien qu'étant bornées : par exemple f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \in \,]0, 1]$. Mieux, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ peut être *continue sans être à variation bornée :*

Exemple 1 : Sur $I = [0, 1]$, soit $f(0) = 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. La fonction f est bien continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, choisissons la subdivision

$$\sigma_n = \left(0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \frac{2}{2n\pi}, \frac{2}{(2n-1)\pi}, \ldots, \frac{2}{2\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right)$$

de I. Alors

$$\mathrm{Var}_{\sigma_n}(f) = \frac{2}{\pi} + \left|\sin 1 - \frac{2}{\pi}\right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

Donc f n'est pas à variation bornée.

Il est clair que l'application $\mathrm{Sub}([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $\sigma \mapsto \mathrm{Var}_\sigma(f)$ est *croissante, i.e.* $\sigma \subset \tau \Rightarrow \mathrm{Var}_\sigma(f) \leqslant \mathrm{Var}_\tau(f)$. On en déduit la propriété suivante : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$ et $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée. Alors :

(2) $$\mathrm{Var}(f, [a, c]) = \mathrm{Var}(f, [a, b]) + \mathrm{Var}(f, [b, c]) .$$

Génération des fonctions à variation bornée

• Fixons à nouveau $I = [a, b]$ $(a < b)$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée *à variation bornée.* Pour $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Sub}(I)$, Posons :

$$W_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Max}\,(0, f(a_{i+1}) - f(a_i))$$

et

$$w_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Max}\,(0, -(f(a_{i+1}) - f(a_i))) .$$

On a : $\mathrm{Var}_\sigma(f) = W_\sigma(f) + w_\sigma(f)$; $W_\sigma(f) - w_\sigma(f) = f(b) - f(a)$. En conséquence, les familles de réels positifs $(W_\sigma(f))_{\sigma \in \mathrm{Sub}(I)}$ et $(w_\sigma(f))_{\sigma \in \mathrm{Sub}(I)}$ sont majorées par $\mathrm{Var}(f, I)$ et admettent donc des bornes supérieures, que nous noterons $W(f, I)$ et $w(f, I)$. A partir des relations : $(\forall \sigma \in \mathrm{Sub}(I))$ $W_\sigma(f) = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}_\sigma(f) + f(b) - f(a))$ et $w_\sigma(f) = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}_\sigma(f) - (f(b) - f(a)))$, un passage à la borne supérieure sur σ donne :

(3) $$W(f, I) = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(f, I) + f(b) - f(a)) ;$$

$$w(f, I) = \frac{1}{2}(\mathrm{Var}(f, I) - (f(b) - f(a)))$$

(4) $\mathrm{Var}(f, I) = W(f, I) + w(f, I)$; $f(b) - f(a) = W(f, I) -$

• Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : [\alpha, \gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$. On vérifie que :

$$\operatorname{Max}(0, \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha)) \leqslant \operatorname{Max}(0, \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) + \operatorname{Max}(0, \varphi(\gamma) - \varphi(\beta)),$$

et

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}(0, -(\varphi(\gamma) - \varphi(\alpha))) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \operatorname{Max}(0, -(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))) + \operatorname{Max}(0, -(\varphi(\gamma) - \varphi(\beta))),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que les applications : $\operatorname{Sub}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma \mapsto w_\sigma(f)$ et $\operatorname{Sub}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sigma \mapsto W_\sigma(f)$ *sont croissantes,* et, comme pour la variation totale, on a les formules suivantes : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a < b < c$, et $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée. Alors :

$$(5) \qquad \begin{cases} W(f, [a, c]) = W(f, [a, b]) + W(f, [b, c]) \\ w(f, [a, c]) = w(f, [a, b]) + w(f, [b, c]). \end{cases}$$

THÉORÈME IV.5.1

> *Soit $I = [a, b]$ (a, b réels ; $a < b$). Pour que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit* ***à variation bornée,*** *il faut et il suffit qu'elle puisse s'écrire sous la forme : $f = g - h$, avec* ***g et h croissantes.***

Démonstration :

Il est évident que si f est la différence de deux fonctions croissantes, donc à variation bornée, f est aussi à variation bornée.

Réciproquement, supposons f à variation bornée. Avec les notations W et w introduites plus haut, posons, pour $x \in [a, b]$:

$$g(x) = W(f, [a, x]) \quad \text{et} \quad h(x) = w(f, [a, x]) - f(a).$$

D'après la deuxième formule (4), on a $f(x) = g(x) - h(x)$. D'autre part, en vertu de (5), g et h sont croissantes. ■

COROLLAIRE 1

> *Toute* ***fonction à variation bornée :*** $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***réglée,*** *i.e. admet une limite à droite finie en a, à gauche en b, et une à droite et une à gauche en tout $c \in\,]a, b[$.*

Bien sûr, la réciproque de ce corollaire 1 est fausse, cf. exemple 1.

COROLLAIRE 2

> *Toute* ***fonction à variation bornée*** $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***bornée intégrable.*** *(Et en fait, Riemann-intégrable.)*

THÉORÈME IV.5.2

> *Soit a, b réels ($a < b$) et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$* ***à variation bornée.*** *Notons g et h les fonctions croissantes construites dans la preuve du théorème IV.5.1. Pour que f soit continue en un point $x_0 \in I$, il faut et il suffit que g et h soient continues en x_0.*
> *En particulier, si f est continue, elle est la différence de deux fonctions croissantes continues.*

Démonstration :

Tout revient à voir que si f est continue en x_0, alors g et h le sont. Supposons donc f continue en x_0. Montrons d'abord que la fonction $\Phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Var}\,(f, [a, x])$ est continue en x_0. Pour cela, dans le cas où $x_0 < b$, montrons la continuité à droite de Φ (la continuité à gauche en $x_0 > a$ se prouvant de la même façon). Soit ε réel > 0 ; choisissons $\sigma = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathrm{Sub}\,([x_0, b])$ telle que : $\mathrm{Var}_\sigma\,(f) \geqslant \mathrm{Var}\,(f, [x_0, b]) - \varepsilon$ et $|f(c_1) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(f, [x_0, b]) = \mathrm{Var}\,(f, [x_0, a]) + \mathrm{Var}\,(f, [c_1, b]) \leqslant \mathrm{Var}_\sigma\,(f) + \varepsilon = \\ = |f(c_1) - f(x_0)| + \mathrm{Var}_{\sigma_1}\,(f, [c_1, b]) + \varepsilon\end{aligned}$$

(avec $\sigma_1 = (c_1, \ldots, c_n)$), d'où :

$$\mathrm{Var}\,(f, [c_1, b]) \geqslant \mathrm{Var}_{\sigma_1}\,(f, [c_1, b]) \geqslant \mathrm{Var}\,(f, [x_0, b]) - 2\,\varepsilon\,,$$

ce qui entraîne $\mathrm{Var}\,(f, [x_0, c_1]) \leqslant 2\,\varepsilon$ puisque $\mathrm{Var}\,(f, [x_0, a] + \mathrm{Var}\,(f, [a, b])) = \mathrm{Var}\,(f, [x_0, b])$. Comme $y \mapsto \mathrm{Var}\,(f, (x_0, y))$ est croissante sur $[x_0, b]$, ou on a bien prouvé la continuité à droite de Φ en x_0.

Cela dit, d'après (4), on a : $(\forall x \in I)\ \Phi(x) = g(x) + h(x) + f(a)$. Comme g et h sont *croissantes,* la continuité à droite de Φ en x_0 force la continuité à droite de g et h en x_0. D'où $f = g - h$ est continue à droite en x_0. On prouve de même que f est continue à gauche en x_0 lorsque $x_0 > a$. ■

Série de Fourier d'une fonction à variation bornée

LEMME 1

Il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tous réels u, v, λ, avec $0 \leqslant u < v \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\lambda > 0$, on ait : $\left| \displaystyle\int_u^v \frac{\sin \lambda t}{\sin t}\, \mathrm{d}t \right| \leqslant M$.

Démonstration :

Pour $\lambda > 0$ et $0 \leqslant u < v \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, notons $J(u, v, \lambda) = \displaystyle\int_u^v \frac{\sin \lambda t}{\sin t}\, \mathrm{d}t$. Dans le cas $0 < \lambda \leqslant 1$, il est facile de majorer $\sin \lambda t$ pour λt pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et de minorer $\sin t$ par $\dfrac{2}{\pi} t$, d'où $|J(u, v, \lambda)| \leqslant \displaystyle\int_u^v \frac{\pi}{2} \lambda\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi^2}{4}$.

Supposons maintenant $\lambda > 1$, cas où la fonction à intégrer peut changer de signe. La fonction $G_1 : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction G qui est DSE_0, donc en définitive de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour $0 \leqslant u < v \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\lambda > 1$, écrivons : $J(u, v, \lambda) = \displaystyle\int_u^v G(t) \sin \lambda t\, \mathrm{d}t + \int_u^v \frac{\sin \lambda t}{t}\, \mathrm{d}t$. Or $\displaystyle\int_u^v \frac{\sin \lambda t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{\lambda u}^{\lambda v} \frac{\sin \tau}{\tau}\, \mathrm{d}\tau$ (changement de variable $\tau = \lambda t$). Comme l'intégrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, la fonction : $\displaystyle(U, V) \mapsto \int_U^V \frac{\sin \tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau$ est bornée pour $0 \leqslant U < V$. Désignons par α un réel > 0 tel que $\displaystyle\left|\int_U^V \frac{\sin \tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant \alpha$ pour tous U et V $(0 \leqslant U < V)$.

De plus, notant $m_0 = \displaystyle\operatorname*{Max}_{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} (|G(t)|)$ on a :

$$\left|\int_u^v G(t) \sin \lambda t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v |G(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant m_0 \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où :} \quad |J(u, v, \lambda)| \leqslant \alpha + m_0 \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, le nombre $M = \operatorname{Max}\left(\dfrac{\pi^2}{4}, \alpha + m_0 \dfrac{\pi}{2}\right)$ convient dans tous les cas. ∎

Dans ce qui suit, M gardera la signification ci-dessus.

Théorème IV.5.3 (Jordan)

Soit $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$. Supposons trouvé $x_0 \in \mathbb{R}$ et η réel > 0 tels que $f|_{[x_0 - \eta, x_0 + \eta]}$ soit à variation bornée, avec $0 < \eta \leqslant \pi$. Alors la série de Fourier de f converge au point x_0. Sa somme en ce point est égale à : $\mu = \dfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Démonstration :

Notons $a_n = a_n(f)$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n = b_n(f)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et posons $S_n(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$.

Notons $\psi(u) = f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2\mu$ $(u \in \mathbb{R})$.
Le calcul mené dans la preuve du théorème IV.3.4 a prouvé, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n(x_0) - \mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \psi(t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

où $D_n(t) =$ noyau de Dirichlet $= \dfrac{\sin (n + 1/2)\,t}{2 \sin (t/2)}$ prolongée par continuité aux $t \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction ψ est à variation bornée sur $[0, \eta]$, et $\psi(u) \underset{u \overset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc deux fonctions *croissantes* ψ_1 et $\psi_2 : [0, \eta] \longrightarrow \mathbb{R}$, *de même limite* L quand $t \overset{<}{\to} 0$, telles que $\psi|_{[0, \eta]} = \psi_1 - \psi_2$. On peut même s'arranger p (remplacer ψ_k par $\psi_k - L$). Soit à présent ε réel > 0. Choisisson $\delta \in \,]0, \eta\,]$ tel que $\psi_1(\delta) \leqslant \varepsilon/3\,M$ et $\psi_2(\delta) \leqslant \varepsilon/3\,M$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ écrivons :

$$S_n(x_0) - \mu = A_1(n) - A_2(n) + B(n)\,, \tag{7}$$

avec
$$A_k(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \psi_k(t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad k \in \{1, 2\}$$

et
$$B(n) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \psi(t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Le *second théorème de la moyenne* (cf. tome 2, théorème VII.7.2 étendu aux fonctions croissantes) montre que :

$$A_k(n) = (\psi_k(\delta) - 0)\int_{\xi_k}^\delta D_n(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $\xi_k \in [0, \delta\,]$ dépend de n et de $k \in \{1, 2\}$. D'où :

$$|A_k(n)| \leqslant \psi_k(\delta)\left|\int_{\xi_k}^\delta D_n(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{(grâce au lemme 1)} \leqslant \psi_k(\delta) \times M \leqslant \frac{\varepsilon}{3\,M} \times M \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

D'autre part, le théorème IV.3.3 (de Riemann-Lebesgue) montre que

$$B(n) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \psi(t)\,D_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|B(n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$|S_n(x_0) - \mu\,| \leqslant |A_1(n)| + |A_2(n)| + |B(n)| \leqslant 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

On a donc bien prouvé que $S_n(x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mu$. ■

On peut même trouver mieux en renforçant les hypothèses sur f: supposons qu'il existe un réel $\alpha \in \,]0, \pi[$ et un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ tels que $f|_{[a-\alpha,\, b+\alpha]}$ soit *à variation bornée et que f soit continue en tout point $x_0 \in I$.*

Alors on peut prouver que *la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur I.* Le lecteur pourra l'établir à titre d'exercice.

Exercice 1 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$ et $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que $(\forall x \in I)$, $\exists\,\eta$ réel > 0 tel que $f|_{I \cap [x-\eta,\, x+\eta]}$ soit à variation bornée. Montrer que f est à variation bornée.

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f|_{]a, b]}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ (a, b réels et $a < b$). Montrer que f est à variation bornée ssi l'intégrale $\int_a^b |f'|$ converge. Lorsque c'est le cas, comparer $\int_a^b |f'|$ et $\mathrm{Var}\,(f, [a, b])$.

Exercice 3 : Soit $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \mapsto 0,\ x \mapsto \frac{x}{\operatorname{Log} x} \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable mais n'est pas à variation bornée.

Exercice 4 : Montrer que le produit de deux fonctions à variation bornée $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'est encore.

Exercice 5 : On donne $f \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ dont on note comme d'habitude $(a_n(f))$, $(b_n(f))$ les coefficients de Fourier trigonométriques.

On suppose $a_0(f) = 0$ et ou définit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que $F \in \mathscr{L}^1_B(\mathbb{U})$ et que $(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2)\ (u < v)$, $F|_{[U, V]}$ est à variation bornée. On note $a_n(F)$, $b_n(F)$ les coefficients de Fourier trigonométriques de F.

b) Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n(f) \sin nx + b_n(f)(1 - \cos nx)\right].$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique telle que $f|_{[0, 2\pi]}$ soit à variation bornée. On reprend les notations de l'exercice 16 du § IV.3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sigma_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x)$.

b) Montrer que $|a_k(f)| + |b_k(f)| \underset{k \to \infty}{\in} O\left(\frac{1}{k}\right)$, et en déduire, en raisonnant comme à l'exercice 17 du § IV.3, que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$.

Exercice 7 : On donne a, b réels $(a < b)$, et une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, ainsi qu'une fonction $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ à variation bornée.

Pour tout $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \operatorname{Sub}([a, b])$ et toute suite $\xi = (\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ *surbordonnée* à σ (*i.e.* telle que $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ pour tout i), on note $\mathscr{S}_g(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(a_{i+1}) - g(a_i))$ (« *sommes de Stieltjes* » de f relativement à g).

a) Prouver que les sommes $\mathscr{S}_g(f, \sigma, \xi)$ convergent vers $I \in \mathbb{R}$ lorsque le pas de σ tend vers 0, *i.e.* que pour $I \in \mathbb{R}$ convenable : $(\forall \varepsilon > 0)\ \exists \eta > 0 \mid (\forall \sigma \in \operatorname{Sub}([a, b]))$, $(\forall \xi$ suite subordonnée à $\sigma)$ $|\mathscr{S}_g(f, \sigma, \xi) - I| \leqslant \varepsilon$, I étant unique. On note $I = \int_a^b f\,\mathrm{d}g$ (intégrale de Stieltjes de f par rapport à g).

b) Prouver : L'application $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}g$ est $\mathbb{R}$-linéaire ; et que :

$$(\forall f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})) \left| \int_a^b f\,\mathrm{d}g \right| \leqslant \operatorname{Var}(g, [a, b]) \times \|f\|_\infty .$$

c) Si g est de classe $\mathscr{C}^1$, vérifier :

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \ ; \quad \operatorname{Var}(g, [a, b]) = \int_a^b |g'(t)|\,\mathrm{d}t .$$

Exercice 8 : PARTIE I. On rappelle que $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}$-evn des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexes telles que la série $\sum |x_n|^2$ converge, la norme étant $x \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|$.

Soit u la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geqslant 1$. On donne $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ élément de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ tel que $\|\alpha\| = 1$. Démontrer qu'il existe $f : [0, 1] \longrightarrow l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $t \mapsto f(t) = (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ possédant les propriétés suivantes : (I) $\forall t \in [0, 1] \|f(t)\| = 1$; (II) $f(0) = \alpha$ et $f(1) = u$; (III) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, 1] |f_n(t)| \leqslant |\alpha_n|$.

PARTIE II : On donne une fonction $\varphi : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ (c.-à-d. que $g : t \mapsto \varphi(e^{it})$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$).

a) Montrer que $p = \dfrac{1}{2\,i\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{g'(t)}{g(t)}\, dt \in \mathbb{Z}$.

b) Comme d'habitude, $(c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$ est la famille des coefficients de Fourier exponentiels de g. Démontrer que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(|c_n(g)|^2 - |c_{-n}(g)|^2) = p$.

c) Utiliser la partie *I* pour montrer qu'il existe une famille $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ possédant les propriétés suivantes : (IV) L'application $[0, 1] \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$, $(t, z) \mapsto \varphi_t(z)$ est continue ; (V) $\varphi_0(z) = \varphi(z)$ et $\varphi_1(z) = z^p$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.

(On exprime ces propriétés en disant que φ et $z \mapsto z^p$ sont *homotopes* dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{U}, \mathbb{U})$ convenablement topologisé).

Exercice 9 :

La partie IV est indépendante des parties I, II et III.

PARTIE I. *Un lemme de Cantor*

• On admet ici la propriété (CD) qui sera prouvée dans la partie IV :

(CD) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et (f_n) $(n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions continues : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que : $(\forall x \in [a, b])$ $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et que pour M réel > 0 convenable, on ait $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b])$ $|f_n(t)| \leqslant M$; alors $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

• On donne deux suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(\alpha < \beta)$ tels que

$$(\forall x \in [\alpha, \beta])\quad a_n \cos nx + b_n \sin nx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

1) Calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta |a_n \cos nx + b_n \sin nx|^2\, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2) En utilisant (CD), en déduire, *en raisonnement par l'absurde,* que $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

PARTIE II : *Pseudo-dérivées secondes de Riemann*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on pose : $\Delta_2 f(x, h) = f(x + h) + f(x - h) - 2\,f(x)$.

1) *a*) Montrer que si $f''(x_0)$ existe, alors $\dfrac{\Delta_2 f(x_0, h)}{h^2} \underset{h \xrightarrow{\neq} 0}{\longrightarrow} f''(x_0)$.

b) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, l'existence de $f'(x_0)$ et de $\displaystyle\lim_{h \xrightarrow{\neq} 0} \frac{1}{h^2}(\Delta_2 f(x_0, h))$ implique-t-elle celle de $f''(x_0)$?

2) On suppose trouvés a b réels $(a < b)$ tels que : f est continue en tout $x_0 \in [a, b]$; et : $(\forall x_0 \in [a, b])$ $\dfrac{\Delta_2 f(x_0, h)}{h^2} \underset{h \xrightarrow{\neq} 0}{\longrightarrow} 0$. Pour ε réel > 0 et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{t - a}{b - a}(f(b) - f(a)) ; \quad \psi_\varepsilon(t) = \varphi(t) - \frac{\varepsilon}{2}(t - a)(b - t) .$$

a) On suppose trouvé $c \in \,]a, b[$ tel que $\varphi(c) > 0$; justifier le choix de $\varepsilon > 0$ tel que $\psi_\varepsilon(c) > 0$, ayant ainsi choisi ε, justifier l'existence de $\xi \in \,]a, b[$ tel que $\psi_\varepsilon(\xi) = \underset{t \in [a, b]}{\operatorname{Max}} \psi_\varepsilon(t)$.

b) Montrer que $\dfrac{\Delta_2 \psi_\varepsilon(\xi, h)}{h^2} \underset{h \xrightarrow{\neq} 0}{\longrightarrow} \varepsilon$, en déduire une contradiction.

c) Montrer que f est affine sur $[a, b]$.

3) On suppose trouvés a, b réels $(a < b)$ tels que : f est construire en tout $x_0 \in [a, b]$, et que : pour tout $x_0 \in [a, b]$, $\lambda(x_0) = \lim\limits_{h \xrightarrow{\neq} 0} \dfrac{\Delta_2 f(x_0, h)}{h^2}$ existe et $\lambda(x_0) \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que $f|_{[a, b]}$ est *convexe*, en affinant la technique de la question 2) ci-dessus.

4) On suppose trouvés a, b réels $(a < b)$ tels que : f est continue en tout $x \in [a, b]$, et $\forall x \in [a, b]$, $\lambda(x) = \lim\limits_{h \xrightarrow{\neq} 0} \dfrac{\Delta_2 f(x, h)}{h^2}$ existe dans $\mathbb{R}$, et la fonction $\lambda : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *bornée*.

Montrer que la fonction $\Delta_2 f(x, h)/h^2$ est bornée sur l'ensemble $\{(x, h) \mid a \leqslant x - h < x + h \leqslant b\}$. (On pourra d'abord prouver que si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors $\Delta_2 g(x, h) \geqslant 0$ pour $a \leqslant x - h \leqslant x + h \leqslant b$.)

PARTIE III : *Théorèmes de Riemann*

On donne une série trigonométrique

$$(\mathscr{T}) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n \geqslant 1} U_n(x),$$

où $U_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ pour tout n, et une partie *finie* E de $[0, 2\pi]$; on note $\mathscr{E} = E + 2\pi\mathbb{Z}$, et on suppose $\mathscr{T}$ *simplement convergente* sur $\mathbb{R} \backslash \mathscr{E}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \backslash \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1) Montrer qu'on peut définir $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \dfrac{1}{4} a_0 x^2 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} U_n(x)$, et que F est continue. (Utiliser I) 2).)

2) Pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer :

$$\frac{\Delta_2 F(x, 2h)}{4h^2} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \times \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2}.$$

3) **On fixe $x \in \mathbb{R} \backslash \mathscr{E}$.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} U_k(x)$; $\rho_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} U_k(x) \frac{\sin^2 kh}{k^2 h^2}$.

a) Pour $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$\rho_N = r_N \frac{\sin^2 Nh}{N^2 h^2} - \sum_{n=N}^{\infty} r_{n+1} \left[\frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} - \frac{\sin^2 (n+1) h}{(n+1)^2 h^2} \right].$$

b) On écrit $\rho_n = \rho_n(h)$. Etablir que la suite de fonctions *de* h, $(\rho_n(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$. (On pourra écrire $\left| \dfrac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} - \dfrac{\sin^2 (n+1) h}{(n+1)^2 h^2} \right| \leqslant \displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h} \left| \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t$, où $G(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ et $G(0) = 1$, puis remarquer ou admettre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t$ converge.)

c) Montrer : $\dfrac{\Delta_2 F(x, 2h)}{4h^2} \underset{h \xrightarrow{\neq} 0}{\longrightarrow} f(x)$.

4) On fixe $x \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\dfrac{\Delta_2 F(x, 2h)}{2h} \underset{h \xrightarrow{\neq} 0}{\longrightarrow} 0$. Dans ce but, soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\forall n \geqslant N)$ $|U_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Soit $A > 0$ tel que $|a_n| \leqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|b_n| \leqslant A$ pour tenir $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $h \in \left]0, \frac{1}{N}\right[$, séparer la somme infinie qui définit $\frac{\Delta_2 F(x, 2h)}{2h}$ sous la forme : $a_0 h + 2 \sum_{n=1}^{N} + 2 \sum_{N < n \leq 1/h} + 2 \sum_{n > 1/h}$, en déduire la majoration :

$$\left| \frac{\Delta_2 F(x, 2h)}{2h} \right| \leq (4N+1)Ah + 2\varepsilon + 2 \sum_{n > 1/h} \frac{\varepsilon}{n^2 h},$$

et achever le raisonnement.

Dans les questions 5), 6), 7) ci-après, on suppose $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{E}$.

5) Prouver que $F|_{[0, 2\pi]}$ est affine par morceaux et continue. (Penser à II) 2) et III) 3).)

6) *a*) Montrer : si $c \in \mathscr{E}$, F est dérivable en x. (Utiliser III) 4).)

b) En déduire que F est constante, et que $a_0 = 0$.

7) Calculer les coefficients de Fourier de F et en déduire : $(\forall n \geq 1)\ a_n = b_n = 0$.

Dans toute la suite de cette partie, on supose $\mathscr{E} = \varnothing$ et f continue sur $\mathbb{R}$. On pose $M = \operatorname{Max}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

8) *a*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$, montrer :

$$a_n \times \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_2 F(\theta, 2h)}{4h^2} \cos n\theta \, d\theta,$$

et :

$$b_n \frac{\sin^2 nh}{n^2 h^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_2 F(\theta, 2h)}{4h^2} \sin n\theta \, d\theta.$$

b) En utilisant la propriété (CD) du (I), en déduire :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \quad \text{et :} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta.$$

Conclure : f admet pour série de Fourier la série $\mathscr{T}$. Etait-ce évident *a priori* ?

PARTIE IV : *Preuve de la propriété* (CD) *du* I

Il suffit évidemment de prouver (CD) avec $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, ce qu'on suppose. Si $u_1, \ldots, u_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont donnés, on posera : $\sup(u_1, \ldots, u_n) =$ fonction $t \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{n} u_i(t)$, $\inf(u_1, \ldots, u_n) =$ fonction $t \mapsto \operatorname{Min}_{i=1}^{n} u_i(t)$; $u_i^+ = \sup(u_i, 0)$.

Si $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée continue, on posera : $I(u) = \int_a^b u(t)\, dt$.

Enfin on supposera que le réel M de l'énoncé (CD) vaut 1, ce qui ne diminue pas la généralité.

1) Soit φ_n une suite de fonctions : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continues* telle que $(\forall x \in [a, b])$ $\varphi_n(x) \underset{n \to \infty}{\downarrow} 0$. Montrer que la convergence de (φ_n) vers 0 est *uniforme* sur $[a, b]$, en raisonnant par l'absurde.

2) On suppose trouvé $\alpha > 0$ tel que $(\forall n)\ I(f_n) \geq \alpha$, et que de plus $(\forall n)\ f_n \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\beta_n = \sup_{p \geq n} \left(I \left(\sup_{n \leq i \leq p} (f_i) \right) \right)$ et on choisit un entier $p(n) \geq n$ tel que, si $g_n = \sup_{n \leq i \leq p(n)} (f_i)$, alors $I(g_n) \geq \beta_n - \alpha / 2^{n+2}$.

a) Prouver : $(\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2) \quad m \geq n \Rightarrow I((g_m - g_n)^+) \leq \frac{\alpha}{2^{n+2}}$,

et :

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad I(g_m) \geq \alpha.$$

b) On pose $h_m = \inf_{0 \leqslant n \leqslant m} g_n$ pour $m \in \mathbb{N}$. Déduire de *a*) que la suite $(I(h_m))_{m \in \mathbb{N}}$ est minorée par un réel > 0 à préciser.

c) Montrer que la suite (h_m) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[a, b]$.

d) Montrer que la suite (f_n) ne peut pas converger simplement vers 0 sur $[a, b]$.

3) Démontrer l'énoncé (CD).

Remarque : la propriété (CD) résulte aussi directement du théorème VII.3.2 du tome 2.

Chapitre V

DÉRIVÉES PARTIELLES, DIFFÉRENTIELLES

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés sont tous des $\mathbb{R}$-ev *de dimension finie* $\geqslant 1$. (Leur topologie a été étudiée au tome 2, chap. XI.) *Une fonction à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *sera considérée comme à valeurs dans le* $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}_{(\mathbb{R})}$.

§ V.1 *DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE*

Dérivée suivant un vecteur

DÉFINITION V.1.1

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev, *U un ouvert non vide de E, une application $f : U \longrightarrow F$ et un vecteur $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$.*

I) *Si $a \in U$, on dit que* **f est dérivable en a suivant le vecteur** $\vec{\boldsymbol{v}}$ *ssi la fonction $t \mapsto f(a + t\vec{v})$ (qui est définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ puisque U est ouvert) est dérivable en 0. S'il en est ainsi, le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(a + t\vec{v})]_{t=0}$ s'appelle* **dérivée de f suivant** $\vec{\boldsymbol{v}}$ *en a et nous le noterons $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}(a)$.*

II) *On dit que f est* **dérivable** *(sur U)* **suivant** $\vec{\boldsymbol{v}}$ *ssi $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ existe pour tout $a \in U$.*

Pour $a \in U$ et $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$ fixés, f est dérivable en a suivant $\vec{v}$ ssi $(\forall \rho \in \mathbb{R}^*)$ f est dérivable en a suivant $\rho\vec{v}$. S'il en est ainsi, on a : $(\forall \rho \in \mathbb{R}^*)\ \dfrac{\partial f}{\partial(\rho\vec{v})}(a) = \rho\,\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$. L'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ ne dépend donc que de la droite vectorielle $\vec{\mathscr{D}} = \mathbb{R}\vec{v}$. On parle de *dérivabilité de f (en a, resp. sur U) suivant la direction $\vec{\mathscr{D}}$.*

• Pour $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$ fixé, l'ensemble des fonctions $f : U \longrightarrow F$ admettant en $a \in U$ une dérivée suivant $\vec{v}$ est un *sous*-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(U, F)$, sur lequel l'application $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ est linéaire.

• L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial \vec{v}}$ se comporte comme la dérivation des fonctions d'une variable réelle : si F_1, F_2 et G sont trois $\mathbb{R}$-ev et qu'on donne une application *bilinéaire* $F_1 \times F_2 \longrightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, pour toutes fonctions $f_1 : U \longrightarrow F_1$ et $f_2 : U \longrightarrow F_2$ admettant en $a \in U$ une dérivée suivant $\vec{v}$, la fonction $f_1 \cdot f_2 : U \longrightarrow G$, $x \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$ en admet aussi une, et on a :

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial(f_1 \cdot f_2)}{\partial \vec{v}}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}(a) \cdot f_2(a) + f_1(a) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}}(a).$$

Par récurrence, on étend (1) aux produits *multilinéaires* quelconques de fonctions.

• Si $f_1 : U \longrightarrow F_1$ et $f_2 : U \longrightarrow F_2$ sont données quelconques et qu'on pose $f = (f_1, f_2) : U \longrightarrow F_1 \times F_2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ existe ssi $\dfrac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}(a)$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial \vec{v}}(a)$ existent, et alors on a :

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}}(a), \frac{\partial f_2}{\partial \vec{v}}(a) \right).$$

• Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}$ est considérée comme $\mathbb{R}$-ev) admet en a une dérivée suivant $\vec{v}$, alors $\dfrac{1}{f}$ aussi et on a : $\dfrac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\dfrac{1}{f}\right)(a) = -\dfrac{1}{f^2(a)} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$.

Lorsque $\dim(E) = 1$, on retrouve la dérivation des fonctions « vectorielles » de variable réelle.

Dérivées relatives à une base

Reprenons les notations E, F, U et f de la définition V.1.1, et donnons-nous une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. Nous dirons que f admet au point a (resp. sur U) une **dérivée par rapport à la i-ième coordonnée** dans $\mathscr{B}$ ssi $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a)$ existe (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}$ existe sur U). On dit que f est **dérivable en a (resp. sur U) dans la base $\mathscr{B}$** ssi tous les vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ existent (resp. ssi toutes les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, existent sur U).

Remarque 1 : Il est important de noter que, lorsque $n = \dim(E) \geqslant 2$, la dérivabilité de f sur U dans une base $\mathscr{B}$ n'implique nullement la continuité de f. Il se peut même (cf. exemple 2) que f soit dérivable sur U dans toutes les directions sans qu'elle soit continue !

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$

En guise de $\mathbb{R}$-ev E, choisissons en particulier $E = \mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique $\mathscr{B}$. Fixons $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$. La définition V.1.1 montre que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a)$ existe ssi la fonction

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(qui est définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$) admet en 0 une dérivée : cette dérivée est alors $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a)$. Il revient au même de dire que la *fonction partielle*

$$f_{[a_i]} : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

(qui est définie au voisinage de a_i dans $\mathbb{R}$) *admet au point a_i une dérivée ;* lorsque c'est le cas, on a : $f'_{[a_i]}(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a)$. Si on a convenu d'un symbole, par exemple $x = (x_1, \ldots, x_n)$ pour désigner la variable « générique » de $\mathbb{R}^n$, il est d'usage courant de noter cette dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$ (ou même $f'_i(a)$) ; on dit que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est **la dérivée partielle de f par rapport à la variable x_i** (et prise au point a).

Dérivées partielles et repères affines

Revenons au cas général. Soit $\mathscr{R} = (\Omega\,; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ un *repère affine* de E

et $$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E\,, \quad t = (t_1, \ldots, t_n) \mapsto x = \Phi(t) = \Omega + \sum_{i=1}^{n} t_i\, \vec{e}_i$$

la bijection associée. Pour $t \in \Phi^{-1}(U)$ il est immédiat que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(x)$ existe ssi $\left[\dfrac{\partial}{\partial t_i}(f \circ \Phi)\right](t)$ existe, et qu'en ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(x) = \dfrac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial t_i}(t)$. Pour cette raison $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(x)$ est aussi appelée **dérivée partielle de f par rapport à la i-ième coordonnée t_i** (sous-entendu : dans $\mathscr{R}$) et se note $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}(x)$ par abus de langage. Mais lorsque le symbole $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}$ est employé dans ce sens, il ne faut pas oublier qu'il est *relatif au choix de* $\mathcal{R}$. Si, comme il arrive souvent, plusieurs repères interviennent, il faut affecter des symboles distincts aux coordonnées « génériques » dans ces divers repères pour éviter des ambiguïtés.

Fonctions de classes $\mathscr{C}^1$ dans $\mathcal{R}$

DÉFINITION V.1.2

Soit E et F des $\mathbb{R}$-ev, *U un ouvert non vide de E, et* $f : U \longrightarrow F$. *On se donne un repère affine* $\mathcal{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *de E et on note*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E\,, \quad (t_1, \ldots, t_n) = t \mapsto \Omega + \sum_{i=1}^{n} t_i\,\vec{e}_i$$

la bijection associée. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathcal{R}$** *ssi :* $g = f \circ \Phi$ *est dérivable sur l'ouvert* $\Phi^{-1}(U)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *et si de plus f et les dérivées partielles* $\dfrac{\partial g}{\partial t_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *sont toutes* **continues** *sur* $\Phi^{-1}(U)$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et que $\mathcal{R}$ est le repère canonique $(0_{\mathbb{R}^n}\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (d'où $\Phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$), on dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$** (tout court). Dans le cas général, dire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ *dans* $\mathcal{R}$ équivaut à dire que $g = f \circ \Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Nous verrons au § V.2 qu'en réalité cette notion est *indépendante du choix de* $\mathcal{R}$, et c'est là l'un de ses attraits principaux.

Exemple 1 : *Fonctions rationnelles*

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ rationnelles, c'est-à-dire de la forme P/Q, avec P et Q *polynomiales* sur E (cf. tome 1, § X.1) et $(\forall x \in U)\ Q(x) \neq 0$. On sait (cf. ibidem) que P et Q sont polynomiales en les coordonnées dans n'importe quel repère affine $\mathcal{R}$ de E. Les règles de calcul des dérivées montrent immédiatement que f est dérivable dans $\mathcal{R}$ et que toutes ses dérivées partielles sont encore rationnelles sur U. Comme toute fonction rationnelle sur U y est continue (cf. tome 2, § X.5, exemple 7), on voit en fin de compte que *f est de classe* $\mathscr{C}^1$ *par rapport à n'importe quel repère affine* $\mathcal{R}$.

Si maintenant on considère une fonction $f : U \longrightarrow F$, elle est dite **polynomiale** (resp. **rationnelle**) ssi les coordonnées de f dans les divers repères affines de F sont polynomiales (resp. rationnelles). Pour cela, il faut et il suffit que ce soit réalisé dans *au moins un* repère affine de F (à cause des formules de changement de coordonnées). De ce qui précède résulte que *si f est rationnelle* (en particulier polynomiale), *f est de classe* $\mathscr{C}^1$ *dans n'importe quel repère affine de E.*

Exemple 2 : Soit k entier $\geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie : $f(0,0) = 0$, et si $(x, y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = \dfrac{xy^k}{x^2 + y^{2k}}$. La restriction de f à l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ est rationnelle, donc de classe $\mathscr{C}^1$. Au point $(0,0)$, f est dérivable dans toutes les directions, avec $(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ (c'est évident dans les directions Ox et Oy, et immédiat dans la direction de coefficient angulaire λ). Cependant *f n'est pas continue en* $(0,0)$, car $f(a^k, a) = 1/2$ pour $a \neq 0$ (d'où $f(a^k, a) \underset{a \longrightarrow 0,\, a \neq 0}{\longrightarrow} 0$). Donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et cependant on a vu qu'elle était *dérivable partout dans toute direction* (en $(0,0)$ à l'instant, et sur U en qualité de fonction rationnelle).

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(0,0) \mapsto 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $(x,y) \mapsto \sin\left(\dfrac{|x|^\alpha + |y|^\beta}{x^2 + y^2}\right)$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont donnés. Pour quels couples (α, β) la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ dans la base canonique ?

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(0,0) \mapsto 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^6}{x^6 + (x^2 - y)^2}$. Etudier la dérivabilité de f suivant une direction donnée. Trouver le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ soit continue.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ toutes deux de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $h(x,y) = f(x,y)$ si $g(x,y) > 0$ et $h(x,y) = f(x,y) + g^2(x,y)$ si $g(x,y) \leqslant 0$. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$.

§ V.2 *DIFFÉRENTIABILITÉ*

DÉFINITION V.2.1

> *Soit E et F des $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert non vide de E, et $f : U \longrightarrow F$. On dit que f est* **différentiable** *en $a \in U$ ssi il existe $L : E \longrightarrow F$* **linéaire** *telle que $f(a+u) - f(a) - L(u) \underset{u \longrightarrow 0}{\in} o(u)$. On dit que f est différentiable sur U ssi elle est différentiable en tout point de U.*

Si on munit E et F de normes arbitraires notées $\|.\|$ (rappelons qu'en dimension finie les normes sont équivalentes entre elles), la différentiabilité de f en a signifie qu'on a trouvé $L \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ telle que :

(1) $\dfrac{1}{\|u\|}(f(a+u) - f(a) - L(u)) \underset{u \overset{\neq}{\longrightarrow} 0_E}{\longrightarrow} 0_F$, c'est-à-dire telle que :

(2) $\begin{cases} \forall \varepsilon \text{ réel} > 0, \quad \exists \eta \text{ réel} > 0 \mid \forall u \in E, \\ (a + u \in U \quad \text{et} \quad \|u\| < \eta) \Rightarrow \|f(a+u) - f(a) - L(u \end{cases}$

Remarquons tout de suite que *si f est différentiable en a, alors f est continue en a.* En effet, les dimensions étant finies, toute $L : E \longrightarrow F$ linéaire est continue et vérifie $L(0_E) = 0_F$. Si donc (1) est satisfaite, il est manifeste qu'*a fortiori* $f(a+u) - f(a) \underset{u \overset{\neq}{\to} 0_E}{\longrightarrow} 0_F$, d'où la continuité de f en a.

THÉORÈME V.2.1

> *Si la fonction f de la définition* V.2.1 *est différentiable en a, alors il y a une et une seule* $L : E \longrightarrow F$ *linéaire telle que* (1) *soit vérifiée.*

Démonstration :

Soit L_1 et $L_2 : E \longrightarrow F$ linéaires vérifiant (1). Posons $L = L_1 - L_2$ et choisissons des normes sur E et F. Par différence, on a : $\dfrac{1}{\|u\|} L(u) \underset{u \overset{\neq}{\to} 0_E}{\longrightarrow} 0_F$. Soit ε réel > 0, et $\eta > 0$ tel que ($u \in E$ et $\|u\| < \eta$) implique $\|L(u)\| \leqslant \varepsilon \|u\|$. Si $v \in E \backslash \{0\}$, on en déduit (puisque $\left\| \dfrac{\eta}{\|v\|} v \right\| = \eta$) : $\left\| L\left(\dfrac{\eta}{\|v\|} v \right) \right\| \leqslant \varepsilon \eta$, soit $\|L(v)\| \leqslant \varepsilon \|v\|$. Fixant v, cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $L(v) = 0_F$, et comme $L(0_E) = 0_F$, on a bien $L = 0$. ■

DÉFINITION V.2.2

> *Si la fonction f de la définition* V.2.1 *est différentiable en a on appelle* **différentielle de f en a** *l'unique* $L : E \longrightarrow F$ *linéaire telle que* $f(a+u) - f(a) - L(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u)$. *On dit aussi que L est l'***application linéaire tangente à f en a.**

Parmi les nombreuses notations proposées pour la différentielle de f en a nous adopterons : $\mathrm{d}_a f$. Si en outre f est partout différentiable sur U, l'application $U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, $a \mapsto \mathrm{d}_a f$ sera notée $\mathrm{d}f$ et appelée simplement **différentielle de *f*.**

Exemple 1 : Prenons pour $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Il est clair que $f(a+u) - f(a) - f(u) = 0$. Donc f est différentiable sur E, avec $L = f$. Donc $(\forall a \in E)\ \mathrm{d}_a f = f$.

Exemple 2 : Prenons $E = \mathbb{R}$ et $f : U \longrightarrow F$. Pour que f soit différentiable en $a \in U$ il faut et il suffit que $f'(a)$ existe, et si c'est le cas, la différentielle $\mathrm{d}_a f$ est l'application $\mathbb{R} \longrightarrow F$, $h \mapsto hf'(a)$.

Propriétés élémentaires de la différentiabilité

(DIF1) *L'ensemble des* $f : U \longrightarrow F$ *différentiables en a* (*resp. sur U*) *est un sous-*$\mathbb{R}$-ev *de* $\mathscr{F}(U, F)$ *et, sur ce sous* $\mathbb{R}$-ev, *la fonction* $f \mapsto$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ (*resp.* $f \mapsto \mathrm{d}f$, *à valeurs dans* $\mathscr{F}(U, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F))$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire. Autrement dit, quand* f *et* $g : U \longrightarrow F$ *sont différentiables en* $a \in U$, *pour tous* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ *est différentiable en* a, *et :*

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\mathrm{d}_a(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{d}_a f + \mu\, \mathrm{d}_a g}\,.$$

(DIF2) *Si* $F = F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p$ *et si* $f_1, \ldots, f_p$ *sont les composantes sur les* F_i *de* $f : U \longrightarrow F$, f *est différentiable en* $a \in U$ *ssi chaque* f_i *l'est, et s'il en est ainsi, on a :*

$$\text{(4)} \qquad (\forall u \in E) \quad (\mathrm{d}_a f)(u) = ((\mathrm{d}_a f_1)(u), \ldots, (\mathrm{d}_a f_p)(u))\,.$$

On sait que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F_p) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)\,,$$

$(L_1, \ldots, L_p) \mapsto L$ telle que $L(u) = (L_1(u), \ldots, L_p(u))$ pour $u \in E$, est un *isomorphisme de* $\mathbb{R}$-ev. Identifiant $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ et $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F_i)$ à l'aide de cet isomorphisme, (4) s'écrit sous forme condensée :

$$\text{(5)} \qquad \boxed{\mathrm{d}_a f = (\mathrm{d}_a f_1, \ldots, \mathrm{d}_a f_p)}\,.$$

Les vérifications immédiates de (DIF1) et (DIF2) sont laissées au lecteur.

(DIF3) *Soit* $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ *une base de F, et soit* $f_1, \ldots, f_p$ *les coordonnées de* f *dans cette base, de sorte que* $(\forall x \in U)\ f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\, \vec{\varepsilon}_i$. *Alors, pour que* $\mathrm{d}_a f$ *existe, il faut et il suffit que chaque* $\mathrm{d}_a f_i$ *existe, et si c'est le cas, on a :*

$$\text{(6)} \qquad (\forall u \in E) \quad \boxed{(\mathrm{d}_a f)(u) = \sum_{i=1}^{p} [(\mathrm{d}_a f_i)(u)]\, \vec{\varepsilon}_i}\,.$$

Démonstration :

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ la *base duale* de $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$. Chaque forme linéaire φ_i est continue, et $f_i = \varphi_i \circ f$ pour tout i. Pour $u \in E$ tel que $a + u \in U$, on a :

$$f(a+u) - f(a) = \sum_{i=1}^{p} [f_i(a+u) - f_i(a)]\, \vec{\varepsilon}_i\,.$$

Soit $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ et $L_i = \varphi_i \circ L$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Chaque L_i

linéaire, et si $u \in E \setminus \{0\}$ et $a + u \in U$:

$$(7) \quad \frac{1}{\|u\|}(f(a+u) - f(a) - L(u)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\|u\|}[f_i(a+u) - f_i(a) - L_i(u)]\, \vec{\varepsilon}_i \,,$$

l'espace E étant muni d'une norme arbitraire $\|.\|$.
Comme, pour $1 \leqslant i \leqslant p$,

$$\frac{1}{\|u\|}[f_i(a+u) - f_i(a) - L_i(u)] = \frac{1}{\|u\|}\varphi_i(f(a+u) - f(a) - L(u))$$

(7) et la continuité des φ_i montrent que

$$\frac{1}{\|u\|}[f(a+u) - f(a) - L(u)] \underset{u \xrightarrow{\neq} 0_E}{\longrightarrow} 0_F \quad \text{ssi} \quad (\forall i \in [\![1, p]\!])$$

$\frac{1}{\|u\|}[f_i(a+u) - f_i(a) - L_i(u)] \underset{u \xrightarrow{\neq} 0_E}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}}$, d'où le résultat. ■

(DIF4) *Soit* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ (*où* $\mathbb{C}$ *est considéré comme* $\mathbb{R}$-ev) *différentiable en* $a \in U$. *Alors* $g = 1/f$ *est différentiable en* a, *et :*

$$(8) \qquad \boxed{\mathrm{d}_a g = -\frac{1}{f^2(a)}(\mathrm{d}_a f)} \,.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et du fait que pour $u \in E$ tel que $a + u \in U$,

$$g(a+u) - g(a) = -\frac{1}{f(a)\, f(a+u)}(f(a+u) - f(a))\,.$$

(DIF5) *Soit* F_1, F_2 *et* G *trois* $\mathbb{R}$-ev *et donnons une application bilinéaire* $F_1 \times F_2 \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto x \,.\, y$. *Pour toutes fonctions* $f_1 : U \longrightarrow F_1$ et $f_2 : U \longrightarrow F_2$ *admettant en* $a \in U$ *une différentielle, la fonction* $f = f_1 \,.\, f_2 : U \longrightarrow G$, $x \mapsto f_1(x) \,.\, f_2(x)$ *est différentiable en* a, *et on a :*

$$(9) \qquad (\forall u \in E) \quad (\mathrm{d}_a f) \,.\, u = [\mathrm{d}_a f_1 \,.\, u] \,.\, f_2(a) + f_1(a) \,.\, [\mathrm{d}_a f_2 \,.\, u]\,.$$

C'est une conséquence facile des définitions et du fait que, pour $u \in E$ tel que $a + u \in E$,

$$f(a+u) - f(a) =$$
$$= (f_1(a+u) - f_1(a)) \,.\, f_2(a+u) + f_1(a) \,.\, (f_2(a +$$

Différentielle et dérivée suivant un vecteur

THÉORÈME V.2.2

> *Soit E, F des $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert non vide de E, et $f : U \longrightarrow F$ différentiable en a. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \longrightarrow U$ une fonction et $\alpha \in I$ tel que $\varphi(\alpha) = a$. On suppose φ dérivable en α. Alors $g = f \circ \varphi$ est dérivable en α, et :*
>
> (10) $$g'(\alpha) = (\mathrm{d}_a f) \cdot \varphi'(\alpha) .$$

Démonstration :

Soit $R(u) = f(a+u) - f(a) - (\mathrm{d}_a f) \cdot u$ (définie pour $u \in E$ assez voisin de 0_E), et $\rho(\tau) = \varphi(\alpha + \tau) - \varphi(\alpha) - \tau\varphi'(\alpha)$ (définie pour τ réel assez petit et tel que $\alpha + \tau \in I$). On sait que $R(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u)$, et que $\rho(\tau) \underset{\left\{\substack{\tau \longrightarrow 0 \\ \alpha + \tau \in I}\right.}{\in} o(\tau)$. Dans ces conditions on a :

$$g(\alpha + \tau) - g(\alpha) - \tau[(\mathrm{d}_a f) \cdot \varphi'(\alpha)] = (\mathrm{d}_a f) \cdot \rho(\tau) + R(\tau\varphi'(\alpha) + \rho(\tau)) .$$

La continuité de $\mathrm{d}_a f$ entraîne que, pour tout choix de normes sur E et F, $\|(\mathrm{d}_a f) \cdot \rho(\tau)\| \leq A\|\rho(\tau)\|$, où A est une constante convenable. Tout ce qui précède montre alors que

$$g(\alpha + \tau) - g(\alpha) - \tau[(\mathrm{d}_a f) \cdot \varphi'(\alpha)] \underset{\tau \longrightarrow 0}{\in} o(\tau) ,$$

ce qui signifie exactement : $g'(\alpha)$ existe et est donnée par (10). ■

COROLLAIRE 1

> *Avec les notations de la définition* V.2.2, *si f est différentiable en $a \in U$, elle est dérivable en a suivant toute direction, et :*
>
> (11) $$(\forall \vec{v} \in E \setminus \{0\}) \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = (\mathrm{d}_a f) \cdot \vec{v}} .$$

En particulier :

COROLLAIRE 2

> *Avec les notations de la définition* V.2.2, *si $\mathrm{d}_a f$ existe, f est dérivable en a par rapport à n'importe quel repère affine de E. Si $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est un tel repère où (x_i) désignen*

nées génériques, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\mathrm{d}_a f) \cdot \vec{e}_i$ *pour tout i, d'où* $\left(\forall x = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \in E\right) \left(\forall u = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \in E\right)$:

(12) $$\boxed{(\mathrm{d}_a f) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}\,.$$

On retrouve ainsi l'unicité de l'application linéaire tangente et son expression analytique.

Fonctions continûment différentiables

DÉFINITION V.2.3

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev, *U un ouvert non vide de E, et* $f : U \longrightarrow F$. *On dit que f est* **continûment différentiable** *sur U ssi f est* **différentiable** *sur U, et la différentielle* $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, $a \mapsto \mathrm{d}_a f$ *est* **continue** *sur U.*

PROPOSITION V.2.1

Avec les notations précédentes, si f est continûment différentiable sur U, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ *par rapport à tout repère affine* $\mathscr{R}$ *de E.*

Démonstration :

Il suffit de le prouver avec $E = \mathbb{R}^n$, et $\mathscr{R} = (0_{\mathbb{R}^n} ; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ repère canonique de $\mathbb{R}^n$. On sait déjà (corollaire 2 du théorème V.2.2) que f est dérivable sur U dans tout repère affine de E. On sait aussi que f est continue car elle est différentiable. Il reste à voir que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont continues sur U, compte tenu de (10). Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. Notons $\|\cdot\|$ des normes quelconques de E et F et munissons $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ de la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ associée. D'après (9), pour $a \in U$ et $u \in E$ tel que $a + u \in U$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t_i}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial t_i}(a) = (\mathrm{d}_{a+u} f) \cdot \vec{e}_i - (\mathrm{d}_a f) \cdot \vec{e}_i = (\mathrm{d}_{a+u} f - \mathrm{d}_a f) \cdot \vec{e}_i\,,$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial t_i}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial t_i}(a) \right\| \leqslant |\!|\!| \mathrm{d}_{a+u} f - \mathrm{d}_a f |\!|\!| \times \|\vec{e}_i\| \underset{u \longrightarrow 0_E}{\longrightarrow} 0\,,$$

car l'hypothèse de continuité de df entraîne que $\|\!| \mathrm{d}_{a+u}f - \mathrm{d}_a f \|\!| \underset{u \longrightarrow 0_E}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial t_i}$ est bien continue en a. ∎

Proposition V.2.2

> *Avec les notations de la définition* V.2.3, *si f est dérivable par rapport à un repère affine $\mathscr{R} = (\Omega\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et si ses* ***dérivées partielles*** *dans $\mathscr{R}$ sont* ***continues*** *sur U, alors f est continûment différentiable sur U (en particulier f est alors continue sur U).*

Démonstration :

Il suffit de le prouver lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathscr{R} = (0_{\mathbb{R}^n}\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \doteq$ le repère canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour éviter des notations trop encombrantes, exposons la preuve pour $n = 2$, ce qui n'en change pas la nature.

Choisissons donc sur $E = \mathbb{R}^2$ la norme

$$x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\| = \text{Max}\,(|x_1|, |x_2|)\,,$$

et sur F une norme quelconque ; à ces normes nous associons la norme $\|\!| \cdot \|\!|$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E, F)$.

a) Fixons $a = (a_1, a_2) \in U$ et notons $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow F$ l'application linéaire $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$, et montrons que $\mathrm{d}_a f$ existe et que $\mathrm{d}_a f = L$. Pour cela choisissons η_1 réel > 0 tel que la boule $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta_1)$ de $\mathbb{R}^2$ soit incluse dans U. Pour $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et $|u_i| < \eta_1$ ($i = 1$ ou 2), écrivons $f(a+u) - f(a) - L(u) = \Delta_1(u) + \Delta_2(u)$, avec :

$$\Delta_1(u) = f(a_1 + u_1, a_2 + u_2) - f(a_1\,, a_2 + u_2) - u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,,$$

et : $$\Delta_2(u) = f(a_1, a_2 + u_2) - f(a_1, a_2) - u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,.$$

Le théorème des accroissements finis pour les fonctions de variable réelle (cf. tome 2, théorème XI.5.5) appliqué à la fonction auxiliaire

$$\varphi_1 : J_1 \longrightarrow F,\ \tau \mapsto f(a_1 + \tau, a_2 + u_2) - f(a_1, a_2 + u_2) - \tau \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

sur $J_1 = [\widetilde{0, u_1}]$ donne (1) :

$$\|\Delta_1(u)\| \leqslant |u_1| \sup_{\tau \in J_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \tau, a_2 + u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\|.$$

---

(1) $[\widetilde{0, u_1}]$ désigne l'intervalle $[\text{Min}\,(0, u_1)\ \text{Max}\,(0, u_1)]$.

D'autre part, la définition même de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)$ montre que $\Delta_2(u) \underset{u \to 0}{\in} o(u)$.

Enfin la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ en a montre que :

$$\sup_{\tau \in J_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \tau, a_2 + u_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Au total, $\|\Delta_1(u)\| + \|\Delta_2(u)\| \underset{u \to 0}{\in} o(u)$ et *a fortiori* :

$$f(a+u) - f(a) - L(u) \underset{u \to 0}{\in} o(u) .$$

b) Montrons maintenant que $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, $a \mapsto \mathrm{d}_a f$ est continue. Si $a \in U$ et $u \in E$ avec $a + u \in E$, on vient de voir :

$$(\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2) \quad (\mathrm{d}_{a+u} f - \mathrm{d}_a f) \cdot v =$$
$$= v_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right) + v_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) ,$$

d'où :

$$\| (\mathrm{d}_{a+u} f - \mathrm{d}_a f) \cdot v \| \leqslant$$
$$\leqslant \|v\| \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\| \right) ,$$

d'où :

$$\| \! | \mathrm{d}_{a+u} f - \mathrm{d}_a f \| \! | \leqslant \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right\| + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+u) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right\| .$$

A cause de l'hypothèse de continuité des dérivées partielles, le second membre tend vers 0 quand $u \longrightarrow 0$, d'où $\mathrm{d}_x f$ est continue en $x = a$. Et cela est vrai $\forall a \in U$. ■

La synthèse des propositions V.2.1 et V.2.2 conduit au théorème suivant :

THÉORÈME V.2.3

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(I) *f est continûment différentiable sur U.*
(II) *Il existe un repère affine $\mathcal{R}$ de E dans lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.*
(III) *f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à tout repère af*

En raison de ce théorème fondamental, **les fonctions continûment différentiables sur U sont aussi appelées fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U,** sans qu'il soit nécessaire de préciser un repère affine dans E.

Il existe des fonctions dérivables dans un repère affine particulier sans être de classe $\mathscr{C}^1$ mais elles ne présentent qu'un faible intérêt car elles risquent de ne pas être dérivables dans tous les repères affines de E. Même dérivables dans toute direction, elles risquent de ne pas être continues (cf. exemple 2 du § V.1). C'est une raison suffisante pour introduire la notion de *fonction différentiable* qui a l'avantage d'être *intrinsèque* et de combler en partie le fossé qui sépare les fonctions dérivables (dans une certaine base) des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

PROPOSITION V.2.3

Soit U un ouvert non vide d'un $\mathbb{R}$-ev *E, et F un* $\mathbb{R}$-ev.
(I) *Les fonctions $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^1$ forment un sous-*$\mathbb{R}$-ev *de $\mathscr{F}(U, F)$ (que nous noterons $\mathscr{C}^1(U, F)$).*
(II) *Si $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ et si $f_1, \ldots, f_p$ sont les composantes de f dans les F_i, alors $f \in \mathscr{C}^1(U, F)$ ssi $(\forall i \in [\![1, p]\!])\ f_i \in \mathscr{C}^1(U, F_i)$.*
(III) *Soit $F_1, F_2, \ldots, F_p$ et G des* $\mathbb{R}$-ev, *$\mu : F_1 \times \cdots \times F_p \longrightarrow G$ une application multilinéaire, et pour $i \in [\![1, p]\!]$ $f_i \in \mathscr{C}^1(U, F_i)$, alors $f : U \longrightarrow G$, $x \mapsto \mu(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U (on note $f = \mu(f_1, \ldots, f_p)$).*
(IV) *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}$ est considéré comme* $\mathbb{R}$-ev) *est de classe $\mathscr{C}^1$, alors $1/f$ l'est aussi.*
(V) *Soit $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ un repère affine de F et $f_1, \ldots, f_p$ les coordonnées de f dans $\mathscr{R}$. Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^1$, il faut et il suffit que chaque f_i le soit.*

Démonstration :

Compte tenu du théorème V.2.3, les assertions (I à IV) résultent immédiatement des propriétés des dérivées partielles vues au § V.1 dès qu'on a fait choix d'un repère affine de E.

Pour (V) la seule petite difficulté est de s'assurer que si f est de classe $\mathscr{C}^1$, chaque f_i l'est aussi. On ne restreint pas la généralité en supposant que $\Omega = 0_F$. On sait alors par (6) que chaque f_i est différentiable sur U et que

$$(\forall u \in E) \quad (\forall a \in U) \quad \sum_{i=1}^{p} [(\mathrm{d}_a f_i) \cdot u] \cdot \vec{\varepsilon}_i = (\mathrm{d}_a f) \cdot u \, .$$

Donc si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est la base duale de $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ dans F, on a :

$$(\forall u \in E), \quad (\forall i \in [\![1, p]\!]) \quad (\mathrm{d}_a f_i) \cdot u = \varphi_i((\mathrm{d}_a f)$$

Normant E et F de façon quelconque, on en déduit pour $(a, x) \in U^2$ et

$u \in E$: $\qquad \|(\mathrm{d}_{a+x}f_i - \mathrm{d}_a f_i) \cdot u\| \leqslant M_i \times ||| \mathrm{d}_{a+x}f - \mathrm{d}_a f ||| \times \|u\|$,

où $M_i = ||| \varphi_i |||$ ($\varphi_i : E \longrightarrow E$ est linéaire et continue). D'où :

$$||| \mathrm{d}_{a+x}f_i - \mathrm{d}_a f_i ||| \leqslant M_i ||| \mathrm{d}_{a+x}f - \mathrm{d}_a f ||| .$$

Or f étant continûment différentiable, cela prouve que $\mathrm{d}_{a+x}f_i - \mathrm{d}_a f_i \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}f_i$ est continue en a ; et c'est vrai $\forall a \in U$. ■

Exemple 3 : Si $f : U \longrightarrow F$ est *rationnelle* (cf. exemple 1 du § V.1), alors f est continûment différentiable puisqu'on a vu que f est de classe $\mathscr{C}^1$ dans tous les repères affines de E.

Inégalités d'accroissements finis

PROPOSITION V.2.4

Soit E et F des $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$. On donne $(a, b) \in U^2$ et on suppose f différentiable en tout point x du segment $[a, b]$. Ayant choisi des normes $\|.\|$ sur E et F auxquelles on associe la norme $|||.|||$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$, *on a :*

(13) $$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b - a\| \times \sup_{x \in [a, b]} ||| \mathrm{d}_x f ||| .$$

Démonstration :

Pour t réel, $t \in [0, 1]$, soit $\varphi(t) = a + t(b - a)$ et $g(t) = f(\varphi(t))$. on sait (cf. théorème V.2.2) que g est dérivable sur $[0, 1]$ et a pour dérivée : $g'(t) = (\mathrm{d}_{\varphi(t)}f) \cdot \varphi'(t) = (\mathrm{d}_{\varphi(t)}f) \cdot (b - a)$. D'où $\|g'(t)\| \leqslant ||| \mathrm{d}_{\varphi(t)}f ||| \times \|b - a\|$. Le théorème des accroissements finis (cf. tome 2, théorème XI.5.5) appliqué à g sur $[0, 1]$ permet alors de conclure. ■

En pratique, on choisit un repère affine $\mathscr{R} = (\Omega ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E dans lequel les coordonnées génériques sont notées $(x_1, \ldots, x_n)$, et on prend pour norme de E la fonction $x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|x\| = \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{Max}}} (|x_i|)$. Si les coordonnées de $x \in U$ sont $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{R}$, et si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $(\mathrm{d}_x f) \cdot \left(\sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, d'où $\left\|\mathrm{d}_x f \cdot \left(\sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i\right)\right\| \leqslant \|u\| \sum_{i=1}^n \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\|$, d'où aisément, $||| \mathrm{d}_x f ||| \leqslant \sum_{i=1}^n \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\|$. La relation (13) donne alors :

(14) $$\|f(b)-f(a)\| \leq \|b-a\| \times \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\| \right).$$

COROLLAIRE 1

> *Avec les notations de la proposition* V.2.4, *si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, elle est* **localement lipschitzienne** *sur U.*

Démonstration :

Soit $a \in U$. Choisissons η réel > 0 tel que la boule $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta)$ soit contenue dans U. Cette boule est *compacte,* donc la fonction $x \mapsto |\!|\!| \mathrm{d}_x f |\!|\!|$, qui est continue sur U, admet sur cette boule un *maximum* $M (M \in \mathbb{R}_+)$. De plus la boule $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta)$ est *convexe :* si x et y sont dans cette boule, le segment $[x, y]$ est inclus dans la boule et on peut appliquer (13), d'où $\|f(x)-f(y)\| \leq M\|x-y\|$. Comme $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta)$ est un voisinage de a, cela prouve que f est localement lipschitzienne. ■

COROLLAIRE 2

> *Avec les notations de la proposition* V.2.4, *supposons U* **connexe.** *Pour que f soit* **constante,** *il faut et il suffit que* **sa différentielle soit nulle sur U.**

Démonstration :

La condition est évidemment nécessaire. Et si elle est remplie, (13) prouve aisément que f est *localement constante* sur U, et comme U est connexe, cela entraîne que f est *constante* sur U. ■

Gradient

Prenons maintenant pour E un espace **euclidien,** de dimension $n \geq 1$. Comme d'habitude nous notons $(.\,|\,.)$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme de E. Si U est un ouvert de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, pour chaque $a \in U$, $\mathrm{d}_a f$ est une **forme linéaire** sur E. On verra au tome 4 que cela entraîne l'existence d'un, et un seul, vecteur $\vec{V}(a) \in E$ tel que :

(12) $$(\forall x \in E) \quad (\mathrm{d}_a f).x = (\vec{V}(a) \,|\, x).$$

Par définition, ce vecteur $\vec{V}(a)$ est appelé **gradient de f au point a.** Nous le noterons $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(a)$.

La définition et l'unicité de la différentielle nous prouvent que $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(a)$ est *caractérisé* par la propriété suivante (où $u \in E$ est tel que $a + u \in U$) :

(13) $$\boxed{f(a+u) - f(a) - (\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(a) \,|\, u) \underset{u \longrightarrow 0}{\in} o(u)}$$

Si on se place au voisinage d'un point $a \in U$ où $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \neq 0_E$, la relation (13) montre que pour un accroissement u orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$, l'accroissement correspondant de la fonction f est infiniment petit devant $\|u\|$; sinon pour u variant sur une droite vectorielle, $u \neq 0$:

$$f(a+u) - f(a) \underset{u \longrightarrow 0}{\sim} (\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \mid u)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne : $|(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \mid u)| \leqslant \|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)\| \times \|u\|$, l'égalité ayant lieu ssi u est colinéaire à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$. C'est donc dans la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ qu'il faut prendre u si l'on veut maximaliser l'accroissement $f(a+u) - f(a)$ en valeur absolue.

THÉORÈME V.2.4

Avec les notations qui précèdent, soit $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ un **repère orthonormé** *de E, dans lequel nous notons (x_i) les coordonnées génériques. Si f est différentiable sur U, on a :*

$$(\forall a \in U) \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \vec{e}_i\,.$$

Démonstration :

Soit $a \in U$. On sait que

$$\left(\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i \in E\right) \quad (\mathrm{d}_a f) \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,.$$

(cf. formule (10)). D'après (12), on a donc :

$$(\forall x \in E) \quad (\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) \mid x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,.$$

Comme $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une *base orthonormée* de E, cela prouve que les composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ dans cette base sont les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. ■

***Exemple* 4 :** Soit ν la norme de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On prend $U = E \setminus \{0\}$ et on considère la fonction $g = \varphi \circ \nu : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculons son gradient.

Prenons d'abord $f = \nu^2$ qui est polynomiale dans E tout entier, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur E. Pour tous x et u dans E on peut écrire : $f(x+u) - f(x) = (x+u \mid x+u) - (x \mid x) = 2(x \mid u) + f(u)$, avec $f(u) = (u \mid u) = \|u\|^2 = o(\|u\|)$, d'où l'on déduit $(\mathrm{d}_x f) \cdot u = 2(x \mid u)$, autrement dit $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x) = 2\,x$.

Si l'on prend maintenant la fonction $g = \varphi \circ \nu = \varphi \circ \sqrt{f}$, il est clair qu'elle a des dérivées partielles continues sur U faciles à calculer dans un repère orthonormé quelconque : $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = \varphi'(\nu) \times \dfrac{x_i}{\nu}$, et cela donne, pour tout $x \in U$,

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x) = \frac{1}{\nu(x)}\, \varphi'(\nu(x)) \times x}\ .$$

Si par exemple $g = \nu^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x) = \alpha\, \nu^{\alpha - 2} \times x$.

Exercice 1 : Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow F$ admettant dans la base canonique des dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *toutes nulles*. Montrer que f est constante.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien, U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $\varphi : [0, 1] \longrightarrow U$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note Γ l'image de φ. On rappelle que Γ est rectifiable et a pour longueur : $L(\Gamma) = \displaystyle\int_0^1 \|\varphi'(t)\|\, \mathrm{d}t$. Soit $A = \varphi(0)$ et $B = \varphi(1)$. Montrer que :

$$|f(B) - f(A)| \leqslant L(\Gamma) \times \sup_{x \in \Gamma} \|\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x)\|\ .$$

Exercice 3 : Soit E un espace euclidien, U un ouvert non vide de E, f et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Montrer que leur produit fg est différentiable et calculer $\overrightarrow{\text{grad}\ (fg)}$; pour $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ différentiable, $\overrightarrow{\text{grad}}\, \dfrac{1}{f}$?

Exercice 4 : Soit n un entier $\geqslant 2$. On donne un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n muni d'un repère $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de coordonnées $x_1, \dots, x_n$; un $\mathbb{R}$-ev F, et une application $f : U \longrightarrow F$ dérivable dans $\mathscr{R}$ et telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ soient continues en $a \in U$. Montrer que $\mathrm{d}_a f$ existe.

Exercice 5 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(0,0) \mapsto 0$, $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ est dérivable dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, mais qu'elle n'est pas dérivable dans une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \notin \mathbb{R}\, \vec{e}_1 \cup \mathbb{R}\, \vec{e}_2$.

Exercice 6 : Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la différentiabilité et préciser les ouverts maximaux où elle est de classe $\mathscr{C}^1$:

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$, $(x, 0) \mapsto 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x + y^2 \sin^2 x}$ si $y \neq 0$ ou $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto 0$ si $x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $y = 0$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^{\alpha} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $(0, 0) \mapsto 0$. Discuter selon les valeurs du réel α.

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $(0, 0) \mapsto 0$ $(\alpha > 0)$.

e) $f :]-1, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{(1 + x)^y - 1}{\mathrm{Log}\,(1 + x)}$ si $x \neq 0$, $(0, y) \mapsto y(\forall$

f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \operatorname{Arctg} \dfrac{1 - xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2}}$.

g) E étant un espace euclidien de dimension $x \geqslant 2$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t + \|x\|)}$.

h) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \sin \dfrac{y}{x}$ si $x \neq 0$, $(0, y) \mapsto 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $(\alpha > 0)$.

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin x^2 + \sin y^2}{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $(0, 0) \mapsto 0$.

j) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ si $x \neq y$ et $(x, x) \mapsto \cos^3 x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev *normés*. On note $U = \mathbf{B}(0_E, 1) \setminus \{0_E\}$. Soit $f : U \longrightarrow F$ différentiable.

a) Si $\mathrm{d}f$ est bornée sur U, montrer que f se prolonge par continuité à $\mathbf{B}(0_E, 1)$.

b) Si $\mathrm{d}f$ admet une limite l en 0_E, alors f se prolonge par continuité en $\tilde{f}$ à $\mathbf{B}(0_E, 1)$ et $\mathrm{d}_{0_E} f$ existe et vaut l.

Exercice 8 : On donne a et b réels $(a < b)$ et un $\mathbb{R}$-ev F. Soit $f :]a, b[^n \longrightarrow F$ $(n \geqslant 2)$ admettant dans la base canonique des dérivées partielles bornées sur $]a, b[^n$. Montrer que f est continue.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Vérifier que $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$ est un ouvert de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. Montrer *sans utiliser de séries* que $f : \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable et que, pour tous u et $v \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E)$, on a : $(\mathrm{d}_u f) \,.\, v = -u^{-1} v u^{-1}$.

Exercice 10 : Soit $\Delta : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \mapsto \det(A)$. Montrer que Δ est différentiable et que $(\forall (A, X) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2)$, si $\tilde{A}$ désigne la matrice complémentaire de A, on a : $(\mathrm{d}_A \Delta) \,.\, X = \operatorname{tr}(\tilde{A} X)$.

Exercice 11 : Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev normés, U un ouvert non vide de E, et $f : U \longrightarrow F$ différentiable.

a) Montrer l'équivalence de (I) ($\mathrm{d}f$ est continue au point $a \in U$) et

$$\text{(II)} \quad (\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \mathbf{B}(a, \delta) \subset U \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbf{B}(a, \delta)^2)$$
$$\|f(x) - f(y) - \mathrm{d}_a f(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\| .$$

b) On suppose $\mathrm{d}f$ uniformément continue sur U. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid \forall (x, y) \in U^2 ,$$
$$[x, y] \subset U \quad \text{et} \quad \|y - x\| \leqslant \delta \Rightarrow \|f(y) - f(x) - \mathrm{d}_a f(y - x)\| \leqslant \varepsilon \|y - x\| .$$

Exercice 12 : Soit $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto {}^t X X$. Vérifier que f est différentiable. Si $X_0 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, quel est le rang de $\mathrm{d}_{X_0} f$?

Exercice 13 : Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev. On donne un ouvert U de E contenant 0_E et $f : U \longrightarrow F$. On suppose qu'il existe $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ tel que, pour toute $g : [0, 1] \longrightarrow U$ dérivable en 0 et vérifiant $g(0) = 0$, la fonction $f \circ g$ est dérivable en 0 et vérifie $(f \circ g)'(0) = u(g'(0))$. Montrer que $\mathrm{d}_{0_E} f$ existe et vaut u.

Exercice 14 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et U un voisinage ouvert de 0_E dans E. Soit $f : U \longrightarrow E$ telle que $f(0_E) = 0_E$ et $(\forall x \in U \setminus \{0_E\})$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x \times x$. Montrer que l'existence de $\mathrm{d}_{0_E} f$ équivaut à l'existence de $\displaystyle\lim_{x \xrightarrow{\neq} 0_E} \lambda_x$. Si c'est le cas, préciser $\mathrm{d}_{0_E} f$.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et soit $\mathscr{S}$ un sous-$\mathbb{R}$-ev *de codimension* $\geqslant 2$ de E. On donne une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ par rapport à laquelle on prend les dérivées partielles, les coordonnées génériques étant notées $(x_1, \dots, x_n)$.

Soit $f : E \backslash \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ admettent des prolongements continus $g_1, \dots, g_n$ à E.. Montrer : f se prolonge par continuité à E en une fonction F qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E.

Exercice 16 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et E^* son dual.

a) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose trouvée $h : E \longrightarrow E^*$ *continue* telle que (1) $\forall a \in E$, $\forall x \in E$, $f(a+x) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 H(a+tx) \,.\, x \,\mathrm{d}t$. Montrer que f est différentiable sur E et que $\mathrm{d}_a f = H(a)$ pour tout $a \in E$. Réciproque ?

b) Soit P une fonction polynomiale $\neq 0$ sur E et $\mathscr{S} = P^{-1}(0)$. On note $U = E \backslash \mathscr{S}$ et on donne une repère $\mathscr{R} = (\Omega\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E auquel sont associées les coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E et de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ se prolongent par continuité à E en $g_1, \dots, g_n$. Soit $H : E \longrightarrow E^*$ telle que $\forall u = \Omega + \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \in E$, $\forall x \in E$, $H(x) \,.\, u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i\, g_i(x)$.

*b*1) Montrer que si $a \in E$ et si $[a, a+x] \cap \mathscr{S}$ est fini, alors l'égalité (1) du *a*) est vraie.

*b*2) Soit $(a, x) \in E^2$. Montrer qu'il existe des suites $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de E telles que $a_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} a$, $x_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} x$, et $(\forall p)$ $[a_p, a_p + x_p] \cap \mathscr{S}$ est fini. En déduire que (1) est vraie et finalement prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E.

§ V.3 *DÉRIVÉES PARTIELLES ET FONCTIONS COMPOSÉES*

Composition de fonctions différentiables

THÉORÈME V.3.1

> *Soit E, F, G trois $\mathbb{R}$-ev ; U un ouvert de E, V un ouvert de F, et des applications $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow G$; si $\mathrm{d}_a f$ existe en $a \in U$, et si $\mathrm{d}_b g$ existe en $b = f(a)$, alors $\mathrm{d}_a(g \circ f)$ existe, et : $\mathrm{d}_a(g \circ f) = (\mathrm{d}_b g) \circ (\mathrm{d}_a f)$.*

Démonstration :

Normons E, F, G de façon quelconque (normes notées $\|.\|$). Sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, G)$ considérons les normes $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ associées. Posons : $L = \mathrm{d}_a f$; $M = \mathrm{d}_b g$; $A = |\!|\!| L |\!|\!|$; $B = |\!|\!| M |\!|\!|$.

Soit ε réel, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Choisissons $\eta_1 > 0$ tel que : $\tilde{\mathbf{B}}(b, \eta_1) \subset V$, et $(\forall v \in F)$, $(\|v\| \leqslant \eta_1) \Rightarrow (\|g(b+v) - g(b) - M \,.\, v\| \leqslant \varepsilon \|v\|)$.

Soit $\eta_2 > 0$ tel que : $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta_2) \subset U$, et $(\forall u \in E)$ $(\|u\| \leqslant \eta_2) \Rightarrow$ $(\|f(a+u) - f(a)| - L \,.\, u\|) \leqslant \varepsilon \|u\|$.

Si $u \in E$ et $\|u\| \leqslant \eta_2$, on en déduit :

$$\|f(a+u)-f(a)\| \leqslant \varepsilon\|u\| + \|L\,.\,u\| \leqslant (\varepsilon + A)\|u\| \leqslant (1+A)\|u\|\,.$$

Posons $\eta = \mathrm{Min}\left(\eta_2, \dfrac{\eta_1}{1+A}\right)$. Si $u \in E$ et $\|u\| \leqslant \eta$, et si on note $v = f(a+u) - f(a)$, on a : $\|v\| = \|f(a+u)-f(a)\| \leqslant \eta_1$, d'où :

(1) $\quad \|(g \circ f)(a+u) - (g\circ f)(a) - Mv\| \leqslant \varepsilon\|v\| \leqslant \varepsilon(1+A)\|u\|\,.$

Mais

$$\|M\,.\,v - (M \circ L)\,.\,u\| = \|M(v - L\,.\,u)\| \leqslant B\|v - L\,.\,u\| \leqslant B\varepsilon\|u\|\,.$$

Donc en tenant compte de (1) :

$$\|(g\circ f)(a+u) - (g \circ f)(a) - (M \circ L)\,.\,u\| \leqslant \varepsilon(A+B+1)\|u\|\,.$$

On a bien prouvé que $\mathrm{d}_a(g \circ f)$ existe et que c'est $M \circ L$. ■

La règle de la chaîne

THÉORÈME V.3.2

Avec les notations précédentes, soit $\mathscr{R} = (\Omega_{\mathscr{R}}\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *un repère affine de E* (resp. $\mathscr{S} = (\Omega_{\mathscr{S}}\,; \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p)$ *un repère affine de F*) *dans lequel nous désignons par* $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $(y_1, \dots, y_p)$) *les coordonnées génériques. Posons* $h = g \circ f$, *et soit* $f_1, \dots, f_p$ *les coordonnées de f dans* $\mathscr{S}$ (*i.e.* $f = \Omega_{\mathscr{S}} + \sum_{j=1}^{p} f_j\,\vec{\varepsilon}_j$). *Supposons que* $\mathrm{d}_a f$ *et* $\mathrm{d}_b g$ *existent (d'où l'existence de* $\mathrm{d}_a h$). *Alors chaque* f_j *est différentiable en a, et l'on a :*

(2) $\qquad (\forall i \in [\![1, n]\!]) \qquad \boxed{\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\,\dfrac{\partial g}{\partial y_j}(b)}\,.$

C'est la formule (2) qui est souvent appelée *règle de la chaîne.*

Démonstration :

On a : $\mathrm{d}_a h = (\mathrm{d}_b g) \circ (\mathrm{d}_a f)$. Fixons $i \in [\![1, n]\!]$. On sait que $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a) = (\mathrm{d}_a h)\,.\,\vec{e}_i$. De plus (cf. (DIF3), § V.2) :

$$(\mathrm{d}_a f)\,.\,\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{p}\,[(\mathrm{d}_a f_j)\,.\,\vec{e}_i]\,\vec{\varepsilon}_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\,\vec{\varepsilon}_j\,;$$

d'où :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = (\mathrm{d}_b g) \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\, \vec{\varepsilon}_j \right) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)[(\mathrm{d}_b g) \cdot \vec{\varepsilon}_j] \, ,$$

d'où (2). ■

Remarque 1 : L'écriture (2) est une notation très condensée. En fait $\frac{\partial g}{\partial y_j}(b)$ recèle une composition de fonctions. Il faudrait écrire plus explicitement (mais moins commodément) :

$$(2') \qquad \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \times \left[\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f \right)(a) \right] .$$

Exemple 1 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté, muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Considérons l'application $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathscr{E}$ qui définit les *coordonnées sphériques* relatives à $\mathscr{R}$, c'est-à-dire :
$(\forall (r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3)\ \overrightarrow{OS}(r, \theta, \varphi) = r\vec{I}$, avec :

$$\vec{I} = \vec{u} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi \ , \quad \vec{u} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta \quad \text{(cf. fig. 1)} .$$

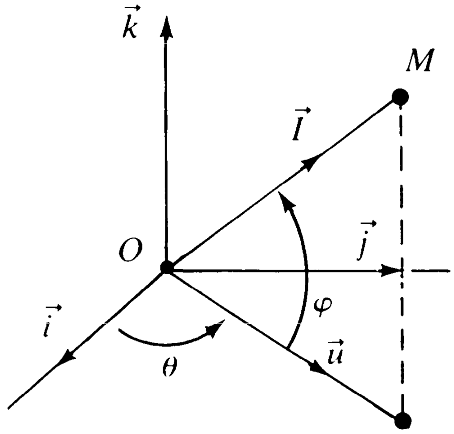


Fig. 1.

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$.

Posons $\vec{J} = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta$ et $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J} = -\vec{u} \sin \varphi + \vec{k} \cos \varphi$ pour obtenir une nouvelle *base orthonormée directe* $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Le calcul des dérivées partielles de S est immédiat et montre que :

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \vec{I} \ , \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = r\vec{J} \cos \varphi \ , \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = r\vec{K} \, .$$

Supposons maintenant que r, θ et φ sont trois fonctions numériques définies sur un intervalle non trivial Λ de $\mathbb{R}$ et dérivables sur Λ. Pour $t \in \Lambda$, posons $M(t) = S(r(t), \theta(t), \varphi(t))$. La règle de la chaîne s'applique, montre que $t \mapsto M(t)$ est dérivable sur Λ, et que $(\forall t \in \Lambda)$

$$M'(t) = r'(t)\frac{\partial S}{\partial r} + \theta'(t)\frac{\partial S}{\partial \theta} + \varphi'(t)\frac{\partial S}{\partial \varphi} = r'\vec{I} + r(\theta' \cos\varphi \vec{J} + \varphi' \vec{K})$$

(les dérivées écrites étant celles par rapport à t). C'est ainsi qu'en cinématique où t désigne la variable temps on obtient les composantes du vecteur vitesse à la date t du point mobile dont le mouvement est défini par les fonctions r, θ, φ dans le repère mobile $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

D'ailleurs on peut poursuivre les dérivations, car $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On obtient facilement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{I}}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial \vec{I}}{\partial \theta} = \vec{J}\,, \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial \varphi} = -\vec{u}\sin\varphi + \vec{k}\cos\varphi = \vec{K}\,;\\
&\frac{\partial \vec{J}}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial \theta} = -\vec{I}\,, \quad \frac{\partial \vec{J}}{\partial \varphi} = 0\,;\\
&\frac{\partial \vec{K}}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial \vec{K}}{\partial \theta} = -\vec{J}\sin\varphi\,, \quad \frac{\partial \vec{K}}{\partial \varphi} = -\vec{I}\,.
\end{aligned}$$

Donc, si r, θ et φ sont des fonctions *deux fois dérivables* de t, une nouvelle application de la règle de la chaîne à l'expression de $M'(t)$ donne : $M''(t)$ existe sur Λ et $M''(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
M''(t) = {} & (r'' - r\theta'^2\cos\varphi - r\varphi'^2)\vec{I} + \\
& + (2r'\theta'\cos\varphi - 2r\theta'\varphi'\sin\varphi + r\theta''\cos\varphi)\vec{J} + (2r'\varphi' + r\varphi'')\vec{K}\,.
\end{aligned}$$

Matrice de $\mathrm{d}_a f$ dans des bases

Conservons toutes les notations du théorème V.3.1 et fixons des repères affines : $\mathscr{R} = (\Omega_{\mathscr{R}}\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E, avec coordonnées génériques $x_1, \dots, x_n$; $\mathscr{S} = (\Omega_{\mathscr{S}}\,; \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p)$ de F, avec coordonnées génériques $y_1, \dots, y_p$, et $\mathscr{T} = (\Omega_{\mathscr{T}}\,; \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_q)$ de G. Désignons par h la composée $g \circ f$. Notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathscr{S}$, et $g_1, \dots, g_q$ celles de g dans $\mathscr{T}$. Posons enfin $h_k = g_k \circ f$ $(1 \leqslant k \leqslant q)$, d'où : $h = \Omega_{\mathscr{T}} + \sum\limits_{k=1}^{q} h_k \vec{\xi}_k$.

PROPOSITION V.3.1

Avec les notations qui précèdent, si f est différentiable en $a \in U$, on a :

$$(3) \qquad \boxed{\operatorname{Mat}_{(\vec{e}_i),\,(\vec{\varepsilon}_j)}(\mathrm{d}_a f) = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]_{(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]}}\,.$$

Démonstration :

Par définition, $\operatorname{Mat}_{(\vec{e}_i),\,(\vec{\varepsilon}_j)}(\mathrm{d}_a f) = [A_{j,i}]$, où $A_{j,i}$ est la j-ième coordonnée de $(\mathrm{d}_a f)\cdot\vec{e}_i$ dans la base $(\vec{\varepsilon}_j)$.

Or, d'après (DIF3) du § V.2, on a :

$$(\mathrm{d}_a f)\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{p}[(\mathrm{d}_a f_j)\cdot\vec{e}_i]\,\vec{\varepsilon}_j = \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\,\vec{\varepsilon}_j\,,$$

ce qui prouve que $A_{j,i} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ pour tout $(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$. ■

Appliquant la proposition V.3.1 à g et h, on obtient :

$$\operatorname{Mat}_{(\vec{\varepsilon}_j),\,(\vec{\xi}_k)}(\mathrm{d}_b g) = \left[\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\right]_{(k,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]}\,;$$

$$\operatorname{Mat}_{(\vec{e}_i),\,(\vec{\xi}_k)}(\mathrm{d}_a h) = \left[\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a)\right]_{(k,i) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,n]\!]}\,.$$

Comme $\mathrm{d}_a h = (\mathrm{d}_b g)\circ(\mathrm{d}_a f)$, le théorème XI.3.2 du tome 1 donne :

$$\operatorname{Mat}_{(\vec{e}_i),\,(\vec{\xi}_k)}(\mathrm{d}_a h) = \operatorname{Mat}_{(\vec{\varepsilon}_j),\,(\vec{\xi}_k)}(\mathrm{d}_b g) \times \operatorname{Mat}_{(\vec{e}_j),\,(\vec{\xi}_j)}(\mathrm{d}_a f)\,,$$

soit :

$$(4) \qquad \boxed{\left[\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a)\right] = \left[\frac{\partial g_k}{\partial y_j}(b)\right] \times \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]}\,.$$

En explicitant (4), on retrouve la règle de la chaîne (2) pour les fonctions h_k au lieu de h, mais comme $h = \Omega_{\mathscr{T}} + \sum_{k=1}^{q} h_k\,\vec{\xi}_k$, on a bien $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{q}\dfrac{\partial h_k}{\partial x_i}(a)\,\vec{\xi}_k$, d'où (2). Inversement, en utilisant (DIF3) du § V.2, qui donne :

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = (\mathrm{d}_a h)\cdot\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{q}[(\mathrm{d}_a h_k)\cdot\vec{e}_i]\,\vec{\xi}_k = \sum_{k=1}^{q}\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a)\,\vec{\xi}_k\,,$$

on passe de (2) à (4).

Ces formules (2), (3) et (4) constituent *l'outil de base de tout le calcul différentiel* et doivent donc être parfaitement connues.

La matrice définie dans (3) s'appelle **matrice jacobienne** de f dans les bases $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{\varepsilon}_j)$, et lorsque $n = p$, son déterminant $\det\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]$ s'appelle le **jacobien** de f dans les bases $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{\varepsilon}_j)$.

PROPOSITION V.3.2

Les notations étant celles du théorème V.3.2, *si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ respectivement sur U et V, alors $h = g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.*

Démonstration :

D'abord h est continue, comme composée d'applications continues. Utilisant (2'), on obtient :

$$(5) \qquad (\forall x \in U) \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \times \left[\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f\right)(x)\right].$$

Or les $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ et les $\frac{\partial g}{\partial y_j}$ sont continues à cause de l'hypothèse. Par composition de fonctions continues, il en va de même des $\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$. Toute somme finie ainsi que tout produit d'un nombre fini de fonctions numériques continues étant continus, (5) montre bien que les $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ sont continues sur U. ■

Notation différentielle

Revenons à la formule (12) du § V.2 dans laquelle nous supposons f différentiable en tout point $a \in U$. Convenons de noter $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées génériques du repère $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, considérées ici comme des *fonctions sur E :* la fonction x_i envoie $x = \Omega + \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$ sur x_i, ce qui revient à désigner par le même symbole x_i la *fonction* et la *valeur* qu'elle prend sur la variable « générale ». La fonction x_i est affine sur E, et il est clair que $(\forall x \in E)$ $(\mathrm{d}_x x_1, \ldots, \mathrm{d}_x x_n)$ est la *base duale* de $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Les $\mathrm{d}_x x_i$, pour i fixé, sont indépendants de x : $\mathrm{d}x_i$ est l'application *constante* associant à tout $x \in E$ la i-ième forme coordonnée dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Cela dit, (12) s'écrit :

$$(\forall x \in U)(\forall u \in E) \quad (\mathrm{d}_x f) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} [(\mathrm{d}_x x_i) \cdot u] \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

ce qui peut s'abréger en :

$$(\forall x \in U) \quad \mathrm{d}_x f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_x x_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,,$$

ou encore en $\mathrm{d}f = \sum\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{d}x_i)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, que l'on préfère écrire ainsi :

$$(6) \qquad \boxed{\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i}$$

Composons maintenant f avec $\varphi : \omega \longrightarrow U$, où ω est un ouvert d'un $\mathbb{R}$-ev H, la fonction φ étant différentiable sur ω. Notons $t_1, \ldots, t_n$ les coordonnées génériques dans un certain repère ρ de H, et soit $g = f \circ \varphi$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les coordonnées de φ dans $(\Omega\,; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. On a : $g = f \circ \varphi = f\left(\Omega + \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k \vec{e}_k\right)$. Autrement dit, passer de f à $f \circ \varphi$ revient à remplacer $x_1, \ldots, x_n$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Appliquons (6) à φ_k : $\mathrm{d}\varphi_k = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial t_j}\mathrm{d}t_j$. Dans (6) remplaçons, au second membre noté S les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi$ et les $\mathrm{d}x_i$ par les $\mathrm{d}\varphi_i$. Alors S devient :

$$(7) \quad S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\mathrm{d}t_j\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right) = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right)\right]\mathrm{d}t_j\,.$$

Mais si l'on applique (6) à g, on trouve :

$$\mathrm{d}g = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial t_j}\mathrm{d}t_j = \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right)\right]\mathrm{d}t_j$$

c'est-à-dire qu'on retrouve (7). On voit donc que **si on remplace, dans (6), les $\mathrm{d}x_i$ par les $\mathrm{d}\varphi_i$ et qu'on ordonne le résultat suivant les $\mathrm{d}t_j$, les coefficients des $\mathrm{d}t_j$ seront exactement les $\dfrac{\partial g}{\partial t_j}$, tels qu'ils sont donnés par la règle de la chaîne.**

En d'autres termes :

$$(8) \quad \boxed{\text{si } \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\,, \quad \text{alors} \quad \mathrm{d}(f \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \circ \varphi\right)\mathrm{d}\varphi_i}\,.$$

Cette propriété « d'invariance » (8) est la raison majeure du succès de la notation (6), dite *notation différentielle*.

Exercice 1 : Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $n < p$. On donne la matrice $[c_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Chercher les $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $(\forall i \in [\![1,n]\!])\ \sum_{j=1}^{p} c_{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0$.

Exercice 2 : Soit E et F deux espaces *euclidiens,* U un ouvert convexe de E et $f : U \longrightarrow F$ différentiable. On suppose trouvé C réel > 0 tel que $(\forall x \in U)$ $|\!|\!| \mathrm{d}_x f |\!|\!| \leqslant C \| f(x) \|$.

a) Soit $a \in U$. Montrer, en utilisant $F(t) = f(a + t(x - a))$, que : $(\forall x \in U)$ $\| f(x) \| \leqslant \| f(a) \| \exp(C \| x - a \|)$.

Indication : Si $g : I \longrightarrow F$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto \| g(t) \|$ est dérivable à droite.

b) Soit $a \in U$, $b \in F$ et V un voisinage ouvert de b dans F. On donne $\varphi : U \times V \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ tel que, pour un réel $C > 0$, $(\forall (x, y, z) \in U^3)$ $\| \varphi(x, y) - \varphi(x, z) \| \leqslant C \| y - z \|$.

Montrer qu'il y a au plus une application $f : U \longrightarrow V$ différentiable telle que $f(a) = b$ et $(\forall x \in U)\ \mathrm{d}_x f = \varphi(x, f(x))$.

Exercice 3 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et $s_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application polynomiale $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (où $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k \leqslant n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$). Montrer que le jacobien de s_n dans la base canonique est $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$.

Exercice 4 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On donne $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $(x_i) \mapsto (y_i)$ différentiable (en tant que fonction de $(\mathbb{C}^n)_{(\mathbb{R})}$ dans lui-même), et $\mathbb{C}$-dérivable en chaque variable $x_i \in \mathbb{C}$.

Montrer que le jacobien de f en x est : $\left| \det \left(\dfrac{\partial y_k}{\partial x_l} \right)_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} \right|^2$, où $\dfrac{\partial y_k}{\partial x_l}$ est la $\mathbb{C}$-*dérivée* de y_k par rapport à x_l.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 - x)$. Etudier le rang de la matrice jacobienne aux points de $f^{-1}(0, 0)$. Interprétation géométrique.

§ V.4 *DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE*

DÉFINITION V.4.1

Soit E et F des $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert de E, $f : U \longrightarrow F$ une application, $\mathscr{R} = (\Omega\ ; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère affine de E (où l'on note (x_i) les coordonnées génériques), p un entier $\geqslant 1$ et $(i_1, \dots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p$ (resp. une suite $(i_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers $\geqslant 1$). On dit que f est ***partiellement dérivable dans $\mathscr{R}$ à l'ordre p selon $(i_1, \dots, i_p)$*** *(resp. selon $(i_k)_{k \geqslant 1}$) sur U ssi il existe une suite $(g_0, g_1, \dots, g_p)$ (resp. $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$) de fonctions : $U \longrightarrow F$ telle que : $g_0 = f$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_{i_{k+1}}}$ existe sur U et $g_{k+1} = \dfrac{\partial g_k}{\partial x_{i_{k+1}}}$ (resp. $g_0 = f$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial g_k}{\partial x_{i_{k+1}}}$ existe sur U et $g_{k+1} = \dfrac{\partial g_\cdot}{\partial x_i}$*

Si une telle suite existe, elle est évidemment unique. Dans ces conditions, g_p s'appelle la **dérivée partielle d'ordre p de f selon $(i_1, \ldots, i_p)$ dans $\mathscr{R}$,** et se note $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}$ (éventuellement f peut être dérivable dans $\mathscr{R}$ selon $(i_k)_{k \geqslant 1}$). Il est clair qu'alors

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{p-q}}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_{q+1}}} \left(\frac{\partial^q f}{\partial x_{i_q} \ldots \partial x_{i_1}} \right)$$

pour tout $q \in [\![1, p-1]\!]$.

DÉFINITION V.4.2

Avec les mêmes notations on dit que f est ***dérivable à l'ordre p*** *dans $\mathscr{R}$ (ou : **p fois dérivable** dans $\mathscr{R}$) ssi $\forall (i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p$, $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}$ existe sur U. De même on dit que f est **indéfiniment dérivable** dans $\mathscr{R}$ ssi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f est dérivable à l'ordre p dans $\mathscr{R}$.*

Dire que f est p fois dérivable dans $\mathscr{R}$ signifie que $\forall q \in [\![1, p]\!]$, *toutes* les dérivées partielles $\dfrac{\partial^q f}{\partial x_{i_q} \ldots \partial x_{i_1}}$ existent sur U lorsque $(i_1, \ldots, i_q)$ décrit $[\![1, n]\!]^q$, mais si $n \geqslant 2$, cela reste une hypothèse très pauvre : f peut être p fois dérivable dans tel repère et pas dans tel autre, ou encore f peut être indéfiniment dérivable dans $\mathscr{R}$ *sans même être continue* (en supposant $\dim(E) = n \geqslant 2$). C'est pourquoi il est préférable d'introduire la notion provisoire de **fonction de classe $\mathscr{C}^p$** (resp. **de classe $\mathscr{C}^\infty$**) **dans $\mathscr{R}$,** c'est-à-dire de *fonction p fois dérivable dans $\mathscr{R}$* (resp. indéfiniment dérivable dans $\mathscr{R}$) *dont toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant p$* (resp. de tout ordre) *dans $\mathscr{R}$ sont* **continues sur U** (les fonctions continues : $U \longrightarrow F$ seront alors dites **de classe $\mathscr{C}^0$** dans $\mathscr{R}$).

Propriétés des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$

(DP1) *L'ensemble des fonctions : $U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$* $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ *est un sous-*$\mathbb{R}$-ev *de $\mathscr{F}(U, F)$* ; sur ce sous-$\mathbb{R}$-ev, chaque application $f \mapsto \dfrac{\partial^q f}{\partial x_{i_q} \ldots \partial x_{i_1}}$ $(q \in \mathbb{N}^*, q \leqslant p, (i_1, \ldots, i_q) \in [\![1, n]\!]^q)$ est $\mathbb{R}$-*linéaire.*

(DP2) Si $F = F_1 \times \cdots \times F_N$ (produit des $\mathbb{R}$-ev F_i), et si $f_1, \ldots, f_N$ sont les composantes de f dans les f_i, alors *f est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$ ssi* $(\forall i)$ *f_i est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$.*

(DP3) Si $\rho = (\Omega\ ; \vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_d)$ est un repère de F, da coordonnées de f sont $f_1, \dots, f_d$, alors *f est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$ ssi chaque $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$.*

(DP4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Pour que f soit de classe $\mathscr{C}^{p+q}$ dans $\mathscr{R}$, il faut et il suffit que f soit de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$ et que toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ $((i_1, \dots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p)$ soient de classe $\mathscr{C}^q$ dans $\mathscr{R}$.

Toutes ces propriétés sont de vérification facile, laissée au lecteur. Nous nommerons *transitivité* la propriété (DP4).

En voici d'autres, moins évidentes :

PROPOSITION V.4.1

> *Soit E, $F_1, \dots, F_N$ et G des $\mathbb{R}$-ev ; U un ouvert de E ; $\mu : F_1 \times \cdots \times F_N \longrightarrow G$ une application multilinéaire et, pour chaque $i \in [\![1, N]\!]$, $f_i : U \longrightarrow F_i$ une application de classe $\mathscr{C}^p$ $(0 \leqslant p \leqslant +\infty)$ dans le repère $\mathscr{R} = (\Omega\,;\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. Alors l'application $f : U \longrightarrow G$, $x \mapsto \mu(f_1(x), \dots, f_N(x))$ est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$.*

Démonstration :

Pour éviter de lourdes notations, plaçons-nous dans le cas $N = 2$. Il suffit de traiter le cas $p \in \mathbb{N}$, ce qui se fait par récurrence. La propriété est vraie pour $p = 0$, car la composée de deux fonctions continues est continue. Supposons $p \geqslant 1$ et la propriété vraie à l'ordre $p - 1$. Alors f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$; pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur U et est donnée par :

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mu\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, f_2\right) + \mu\left(f_1, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)$$

(dérivation d'un produit bilinéaire de fonctions de variable réelle, cf. (1) du § V.1). Comme f_1 et f_2 sont de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$, les fonctions f_1, f_2, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$ et $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{R}$. Par l'hypothèse de récurrence, $\mu\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}, f_2\right)$ et $\mu\left(f_1, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)$ sont donc de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{R}$ ainsi, d'après (1), que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. En particulier les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{R}$ et les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{R}$. Par transtivité (DP4), f est donc de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$. ■

PROPOSITION V.4.2

> *Les notations étant celles de la définition* V.4.1, *soit* $p \in \mathbb{N}$. *Pour que* f *soit* **de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$**, *il faut et il suffit que* f *soit* **p fois dérivable dans $\mathscr{R}$** *et que* **toutes les dérivées partielles** $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}}$ $((i_1, \dots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p)$ *soient* **continues** *sur* U.

Démonstration :

La condition est nécessaire par définition. Montrons qu'elle est suffisante par récurrence sur p. Si $p = 1$, le résultat découle de la proposition V.2.2. Supposons donc $p \geqslant 2$ et la propriété vraie à l'ordre $p-1$. Appliquant la proposition V.2.2 aux $\dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}}$ $((i_1, \dots, i_{p-1}) \in [\![1, n]\!]^{p-1})$, on voit que les dérivées d'ordre $p-1$ de f dans $\mathscr{R}$ sont toutes continûment différentiables. Par l'hypothèse de récurrence, f est donc de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{R}$. Donc par transitivité f est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$. ■

Fonctions de classe $\mathscr{C}^p$

PROPOSITION V.4.3

> *Soit* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$-ev, U *un ouvert de* E *et* $f : U \longrightarrow F$, *enfin* $p \in \mathbb{N}^*$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
> (I) *Il existe un repère affine* $\mathscr{R}$ *de* E *tel que* f *soit de classe* $\mathscr{C}^p$ *dans* $\mathscr{R}$.
> (II) *Pour tout repère affine* $\mathscr{R}$ *de* E, *la fonction* f *est de classe* $\mathscr{C}^p$ *dans* $\mathscr{R}$.

Démonstration :

Il s'agit de voir que (I) entraîne (II). Procédons par récurrence sur p. Pour $p = 1$; cela résulte du théorème V.2.3. Supposons $p \geqslant 2$ et la propriété vraie à l'ordre $p-1$. Considérons deux repères affines $\mathscr{R} = (\Omega_{\mathscr{R}}\,; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{S} = (\Omega_{\mathscr{S}}\,; \vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ de E dans lesquels les coordonnées génériques seront notées respectivement $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. Soit f de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{R}$: elle y est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \in i \leqslant n)$ sont de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{R}$, donc aussi dans $\mathscr{S}$ par l'hypothèse de récurrence ; de plus f est de classe $\mathscr{C}^1$ dans $\mathscr{S}$ par le théorème V.2.3. Les $\dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ s'expriment aisément en fonction des

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: si $x \in U$ et $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \vec{\varepsilon}_j \in E$, on a :

$$(\mathrm{d}_x f) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial y_j}(x) .$$

Mais, notant $[a_{ij}]$ la matrice des $(\vec{\varepsilon}_k)$ sur les $(\vec{e}_l)$, on a : $u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) .$$

Par identification, il s'ensuit :

$$(2) \qquad (\forall j \in [\![1, n]\!]) \quad \frac{\partial f}{\partial y_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) .$$

La relation (2) montre que les $\dfrac{\partial f}{\partial y_j}$ sont, comme les $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ dans $\mathscr{S}$. Et, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, on conclut, à nouveau par transitivité, que f est de classe $\mathscr{C}^p$ dans $\mathscr{S}$. ■

Il est clair que la proposition V.4.3 est encore vraie avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On peut à présent poser :

DÉFINITION V.4.3

Avec les notations de la proposition V.4.3, *on appelle* **fonction de classe $\mathscr{C}^p$** *de U dans F tout $f : U \longrightarrow F$ vérifiant les conditions équivalentes* (I) *et* (II) *de la proposition* V.4.3 $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.

Par convention, toute fonction **continue** est dite de classe $\mathscr{C}^0$. A partir des propriétés (DP1) à (DP4) et de la proposition V.4.1, on obtient sans nouvelle démonstration :

• *L'ensemble des fonctions : $U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^p$* (où $0 \leqslant p \leqslant +\infty$) *est un sous-*$\mathbb{R}$-ev *de* $\mathscr{F}(U, F)$. Sur ce $\mathbb{R}$-ev, chaque application $f \mapsto \dfrac{\partial^q f}{\partial x_{i_q} \cdots \partial x_{i_1}}$ (où $q \in \mathbb{N}^*$, $(i_1, \ldots, i_q) \in [\![1, n]\!]^q$ et $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées génériques dans un repère de E) est $\mathbb{R}$-*linéaire.* Ce sous-$\mathbb{R}$-ev sera noté dans toute la suite $\mathscr{C}^p(U, F)$.

• *Si F est le produit $F_1 \times \cdots \times F_N$ des* $\mathbb{R}$-ev *F_i, et si $f = (f_1, \ldots, f_N)$ (où $f_i : U \longrightarrow F_i$), pour que f soit de classe $\mathscr{C}^p$, il faut et il suffit que chaque f_i le soit.*

• *Soit* $f_1, \ldots, f_d$ *les coordonnées de* f *dans un repère de* F, alors f *est de classe* $\mathscr{C}^p$ *ssi chaque* f_i *l'est.*

• (Transitivité). Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. *Pour que* $f : U \longrightarrow F$ *soit de classe* $\mathscr{C}^{p+q}$, *il faut et il suffit qu'elle soit de classe* $\mathscr{C}^p$, *et que ses dérivées partielles d'ordre* p *dans un repère donné soient de classe* $\mathscr{C}^q$.

• *Soit* $F_1, \ldots, F_N$ *et* G *des* $\mathbb{R}$-ev *et pour tout* $i \in [\![1, N]\!]$ *une application* $f_i : U \longrightarrow F_i$ *de classe* $\mathscr{C}^p$ $(0 \leqslant p \leqslant +\infty)$. *Pour toute application multilinéaire* $\mu : F_1 \times \cdots \times F_N \longrightarrow G$, *la fonction* $f : U \longrightarrow G$, $x \mapsto \mu(f_1(x), \ldots, f_N(x))$ *est de classe* $\mathscr{C}^p$.

En particulier, $\mathscr{C}^p(U, \mathbb{R})$ est une *sous-*$\mathbb{R}$*-algèbre* de $\mathscr{F}(U, \mathbb{R})$.

• *Si* f *est* p *fois dérivable dans un repère donné* $\mathscr{R}$ *et si toutes ses dérivées partielles d'ordre* p *dans* $\mathscr{R}$ *sont continues sur* U, *alors* f *est de classe* $\mathscr{C}^p$.

Enfin, nous avons :

THÉORÈME V.4.1

> *Soit* E, F, G *trois* $\mathbb{R}$-ev, U (*resp.* V) *un ouvert de* E (*resp. de* F), $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow G$ *des fonctions de classe* $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$. *Alors* $h = g \circ f : U \longrightarrow G$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$.

Démonstration :

Choisissons des bases $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E et $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ de F dans lesquelles nous notons respectivement $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ les coordonnées génériques. Soit aussi $(f_1, \ldots, f_p)$ les coordonnées de f dans $\mathscr{C}$. Raisonnons par récurrence sur k. La propriété est évidente si $k = 0$. Supposons-la vraie à l'ordre $k - 1$ avec $k \geqslant 1$. Alors f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc $h = g \circ f$ l'est aussi (cf. proposition V.3.2). La règle de la chaîne donne : $(\forall i \in [\![1, n]\!])$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \times \left[\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f \right].$$

Or f et les $\dfrac{\partial g}{\partial y_j}$ sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, donc les $\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$ le sont aussi par l'hypothèse de récurrence. Les produits $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \times \left[\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f \right]$ sont donc encore de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, car les $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ le sont (cf. proposition V.4.1). Finalement les $\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Mais h est de classe $\mathscr{C}^1$. *Par transitivité,* on en conclut que h est de classe $\mathscr{C}^k$. ■

Exemple 1 : Toute application *rationnelle* $f : U \longrightarrow F$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. En effet, relativement à une base fixée de E, f est dérivable et toutes ses dérivées partielles sont encore rationnelles, donc continues, d'où le résultat.

Exemple 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $I : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$ est rationnelle, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. (Observons que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est bien un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, puisque c'est l'ensemble $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$ et que $\det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est polynomiale, donc continue).

On en déduit que l'application $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $u \mapsto u^{-1}$ est rationnelle, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 3 : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathscr{C}^k$; alors $\dfrac{1}{f}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$. En effet $1/f = J \circ f$, où $J : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto 1/t$. Or J est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc de classe $\mathscr{C}^k$, et *par composition* $1/f$ l'est aussi. (J est $\mathscr{C}^\infty$ car *rationnelle* sur $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-ev).

Exemple 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto 0$ si $t \leqslant 0$, $t \mapsto e^{-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Donc pour toute fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant +\infty)$ la fonction $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{\varphi(x)}}$ si $\varphi(x) > 0$ et $x \mapsto 0$ si $\varphi(x) \leqslant 0$, est de classe $\mathscr{C}^k$, ce qui n'est pas si évident.

Exemple 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\exp : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X = [x_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mapsto \exp(X)$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour cela notons, pour $X = [x_{ij}] \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\|X\| = \operatorname*{Max}_{i,j}(|x_{ij}|)$; et si k est un entier $\geqslant 2$,

$$X^k = [f_{i,j,k}(X)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}\,.$$

On a : $f_{i,j,k}(X) = \displaystyle\sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in [\![1,n]\!]^{k-1}} x_{i,i_1} x_{i_1,i_2} \dots x_{i_{k-1},j}$. Chaque $f_{i,j,k}$ est polynomiale en X, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, on voit facilement que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, toute dérivée partielle g d'ordre q de $f_{i,j,k}$ en les variables $x_{i,j}$ vérifie :

$$(\forall x) \quad |g(X)| \leqslant k(k-1)\dots(k-q+1)\, n^{k-1}\, \|X\|^{k-q} \quad \text{si} \quad q \leqslant k\,,$$

et $g(X) = 0$ si $q > k$. Fixons $q \in \mathbb{N}^*$ et soit $D = \dfrac{\partial^q}{\partial x_{i_q,j_q} \dots \partial x_{i_1,j_1}}$ un opérateur de dérivation partielle d'ordre q en les variables $(x_{\alpha,\beta})$. Fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et soit la série de fonctions de X : $\displaystyle\sum_k \frac{1}{k!}(Df_{i,j,k})(X)$. On a :

$$(\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})),\ (\forall k \in \mathbb{N}) \quad \left|\frac{1}{k!}(Df_{i,j,k})(X)\right| \leqslant \alpha_k(X)$$

avec $\alpha_k(X) = 0$ si $k < q$, $\alpha_k(X) = \dfrac{1}{(k-q)!} n^{k-1}\, \|X\|^{k-q}$ si $k \geqslant q$

La série de fonctions de X, $\sum_k \alpha_k(X)$ converge normalement sur tout compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ puisque, sur un tel compact, on a une constante $A > 0$ telle que $\|X\| \leq A$ et que la série numérique $\sum_k \frac{1}{(k-q)!} n^{k-1} A^{k-q}$ converge. *A fortiori* la série de fonctions de X, $\sum_k \frac{1}{k!} (Df_{i,j,k})(X)$ converge normalement sur tout compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et cela est vrai pour tout opérateur de type D, à tout ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

Une utilisation convenable du théorème de dérivation des suites de fonctions *d'une variable réelle* (cf. tome 2, théorème XII.3.4) montre alors que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_{i,j,k}(X) = S_{i,j}(X)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en les variables $(x_{\alpha,\beta})$, et que pour tout opérateur de dérivation D, on a : $(DS_{i,j})(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (Df_{i,j,k})(X)$.

De plus, comme chaque $Df_{i,j,k}$ est polynomiale, donc continue, sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, la convergence normale sur tout compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de la série $\sum_k \frac{1}{k!} (Df_{i,j,k})(X)$ entraîne que $DS_{i,j}$ est continue sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Finalement, $S_{i,j}$ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc il en est de même de $\exp : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto [S_{i,j}(X)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

Exercice 1 : *a*) Soit $S = \sum a_k X^k$ une série formelle à coefficients réels, de rayon $R > 0$. En s'inspirant de l'exemple 5, démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $(\forall X \in U)$ la série $\sum a_k X^k$ converge, et que la fonction $f : U \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$.

b) Appliquer à $S = (1+X)^{1/p} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/p}{k} X^k$, où $p \in \mathbb{N}^*$ est donné. Vérifier qu'alors $(\forall X \in U)$ $(f(X))^p = X + I_n$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 0$ si $xy = 0$, et si $xy \neq 0$,

$$(x,y) \mapsto \frac{\exp(-1/x^2y^2)}{\exp(-1/x^4) + \exp(-1/y^4)}.$$

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, qu'elle est *indéfiniment dérivable sur* $\mathbb{R}^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, mais que f n'est *pas continue* en $(0,0)$.

b) La fonction f est-elle indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ dans toutes les bases de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(0,0) \mapsto 0$, $(x,y) \mapsto xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est deux fois dérivable dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(0,0)$. (Peano).

Exercice 4 : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(0,0) \mapsto 1$, et si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$(x,y) \mapsto \frac{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 (x+y)}{x \sin x + y \sin y + (x+y) \sin (x+y)} .$$

Etudier la dérivabilité de φ à l'ordre 1 et à l'ordre 2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$; φ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 0$ si $x = 0$, et si $x \neq 0$, $(x,y) \mapsto \dfrac{|y|}{x} \exp\left(\dfrac{-|y|}{x^2}\right)$.
Etudier la continuité de f, sa dérivabilité (à un ordre quelconque) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, le plus grand ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathscr{C}^p$.

Exercice 6 : Etudier si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp(-k(x^2+y^2))$ est indéfiniment dérivable dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

Exercice 7 : Montrer que $f : (t,u) \mapsto [1 + \lambda t(1+u)]^{1/t}$ définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, avec $f(0,u) = 1$, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 8 : *a*) Existe-t-il $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable dans la base canonique et telle que les dérivées partielles $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \partial x_{i_{p-1}} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}(0)$ $((i_1, \ldots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p)$ soient, pour chaque entier p, toutes distinctes ?
b) Si l'on donne des nombres réels $(A_{i_1, i_2, \ldots, i_p})_{p \in \mathbb{N}^*,\, (i_1, \ldots, i_p) \in [\![1,n]\!]^p}$, existe-t-il $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable dans la base canonique et telle que $(\forall p)$ $(\forall (i_1, \ldots, i_p)) \dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}(0) = A_{i_1, \ldots, i_p}$?

§ V.5 *INTERVERSION DE DÉRIVATIONS*

THÉORÈME V.5.1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, muni d'un repère affine $\mathscr{R} = (\Omega\,; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, de coordonnées génériques x_1, x_2. On donne un ouvert U de E, un $\mathbb{R}$-ev F, et une application $f : U \longrightarrow F$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) *les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}$ *existent sur U ;*

b) *les dérivées partielles* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}$ *sont* **continues** *au point $a \in U$. Alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}(a)} .$$

Démonstration :

Normons F de façon quelconque, et sur E prenons la norme $u = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 \mapsto \|u\| = \mathrm{Max}\,(|u_1|, |u_2|)$.

Posons $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(a)$ et $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(a)$. Si nous prouvons que $(\forall \varepsilon \text{ réel} > 0)\ \|A - B\| \leqslant 2\,\varepsilon$, cela entraînera le résultat cherché. Soit donc $\varepsilon > 0$. Choisissons r réel > 0 tel que $\tilde{\mathbf{B}}(a, r) \subset U$ et que

$$(\forall x \in \tilde{\mathbf{B}}(a, r)) \qquad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(x) - A \right\| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(x) - B \right\| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soit $u = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$ tel que $\|u\| \leqslant r$. Notons J_i l'intervalle d'extrémités 0 et u_i dans $\mathbb{R}\,(i = 1 \text{ ou } 2)$.

Soit $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow F, \quad t \mapsto f(a + t\vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) - f(a + t\vec{e}_1) - t u_2 A$: φ_1 est dérivable et

$$(\forall t \in J_1) \quad \varphi_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t\vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t\vec{e}_1) - u_2 A\,.$$

Pour $t \in J_1$, on a : $\varphi_1'(t) = \theta_t(u_2) - \theta_t(0)$, où $\theta_t : J_2 \longrightarrow F$ envoie τ sur $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a + t\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_2) - \tau A$. La fonction θ_t est dérivable sur J_2, et

$$(\forall \tau \in J_2) \quad \|\theta_t'(\tau)\| = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(a + t\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_2) - A \right\| \leqslant \varepsilon\,.$$

Le théorème des accroissements finis (cf. tome 2, théorème XI.5.5) donne :

$$\|\theta_t(u_2) - \theta_t(0)\| = \|\varphi_1'(t)\| \leqslant \varepsilon |u_2|, \qquad \text{et c'est vrai } \forall t \in J_1\,.$$

Une nouvelle application du théorème des accroissements finis, cette fois à φ_1, donne :

$$(1) \qquad \|\varphi_1(u_1) - \varphi_1(0)\| \leqslant \varepsilon |u_1|\,|u_2|\,.$$

Mais $\varphi_1(u_1) - \varphi_1(0) = \Delta_2(u) - u_1 u_2 A$, si l'on a posé :

$$\Delta_2(u) = f(a + u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) - f(a + u_1 \vec{e}_1) - f(a + u_2 \vec{e}_2) + f(a)\,.$$

En considérant $\varphi_2 : J_2 \longrightarrow F,\ t \mapsto f(a + u_1 \vec{e}_1 + t\vec{e}_2) - f(a + t\vec{e}_2) - t u_1 B$ on obtient exactement par le même procédé :

$$(2) \qquad \|\Delta_2(u) - u_1 u_2 B\| \leqslant \varepsilon |u_1|\,|u_2|\,.$$

Par différence, en utilisant (1) et (2), on obtient :

$$\|u_1 u_2 (A - B)\| \leqslant 2\,\varepsilon |u_1|\,|u_2|\,.$$

En particulier, avec $u_1 = u_2 = r$, on a : $r^2\|A - B\| \leqslant 2\,\varepsilon r^2$, d'où $\|A - B\| \leqslant 2\,\varepsilon$. ■

Voici la conséquence pratique essentielle de ce théorème V.5.1.

THÉORÈME V.5.2 (de Schwarz)

*Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$, muni d'un repère affine $\mathscr{R} = (\Omega\,; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ où nous notons $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées génériques. Soit U un ouvert de E, F un $\mathbb{R}$-ev et $f : U \longrightarrow F$ une fonction **de classe** $\mathscr{C}^p (p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2)$. Alors, pour toute suite $(i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on a :*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_{\sigma(p)}} \ldots \partial x_{i_{\sigma(1)}}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}}\,. \tag{3}$$

Démonstration (abrégée) :

Si $p = 2$, la propriété se déduit du théorème V.5.1 : il suffit, pour $i_1 \neq i_2$ de bloquer toutes les variables x_i autres que x_{i_1} et x_{i_2} (et pour $i_1 = i_2$ il n'y a rien à démontrer).

Supposons la propriété vraie à l'ordre $p - 1$ avec $p \geqslant 3$. Il est d'abord évident que si $\sigma(p) = p$, (3) est vraie à cause de l'hypothèse de récurrence et de la définition $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right)$. Or les permutations telles que $\sigma(p) = p$ et la transposition $\langle p, p - 1 \rangle$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_p$, et si la propriété (3) est vraie avec $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}_p$, elle l'est aussi avec $\sigma \circ \sigma'$. Il suffit donc de prouver (3) lorsque $\sigma = \langle p, p - 1 \rangle$. D'abord si $i_p = i_{p-1}$, (3) est évidente. Ensuite si $i_p \neq i_{p-1}$, (3) se déduit du théorème V.5.1 en bloquant toutes les variables d'indice $i \notin \{i_p, i_{p-1}\}$. ■

Le théorème de Schwarz permet, pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^p$, de simplifier la notation des dérivées partielles. En effet, soit $S_{n,p}$ l'ensemble $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = p\}$. A chaque $\xi = (i_1, \ldots, i_p) \in [\![1, n]\!]^p$ associons $s(\xi) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_{n,p}$ défini par $\alpha_k = \operatorname{card}\,\{r \in [\![1, p]\!] \mid i_r = k\} = \operatorname{card}\,(\xi^{-1}(k))$. L'application $s : [\![1, n]\!]^p \longrightarrow S_{n,p}$ est surjective, et si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_{n,p}$, l'image réciproque de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ par s est de cardinal $\dfrac{p!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}$ (cf. tome 1, § III.5).

Pour $\xi = (i_1, \ldots, i_p)$ donné et $s(\xi) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, on a :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^p f}{\underbrace{\partial x_1 \ldots \partial x_1}_{\alpha_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\partial x_n \ldots \partial x_n}_{\alpha_n \text{ fois}}} \tag{4}$$

en vertu du théorème V.5.2.

On convient alors de noter le second membre de (4) sous forme condensée :

(5) $$\frac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On obtient donc toutes les dérivées partielles d'ordre p de f dans $\mathscr{R}$ en considérant les opérateurs de dérivation $\left(\dfrac{\partial^p}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{n,p}}$ dont le nombre est $\binom{n+p-1}{n-1}$ (cf. tome 1, théorème III.4.5). Ces opérateurs sont *tous distincts,* car si nous notons, pour $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, $\Phi_{\beta_1, \dots, \beta_n}$ la fonction polynomiale $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \mapsto x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$, on voit que $\dfrac{\partial^p \Phi_{\beta_1, \dots, \beta_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = 0$ si $(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $\alpha_1! \dots \alpha_n!$ si $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Exercice 1 (formule de Leibniz) : On donne quatre $\mathbb{R}$-ev : X, E, F, G ; on fixe un repère $(\Omega\,;\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de X par rapport auquel $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées génériques. Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Pour $\alpha = (\alpha_i)$ et $\beta = (\beta_i) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \preccurlyeq \beta$ signifie $(\forall i)\ \alpha_i \leqslant \beta_i$; lorsque $\alpha \preccurlyeq \beta$, $\beta - \alpha$ désigne $(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$. On donne un ouvert U de X, une application *bilinéaire* $\mu : E \times F \longrightarrow G$ et des applications $f : U \longrightarrow E$, $g : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^p (p \geqslant 1)$. Pour $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$, on abrège $\dfrac{\partial^{\|\nu\|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}}$ en D_ν. Démontrer que, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\|\alpha\| = p$, on a :

$$D_\alpha(\mu(f, g)) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \frac{\alpha_1! \dots \alpha_n!}{\beta_1! \dots \beta_n!\, \gamma_1! \dots \gamma_n!}\, \mu(D_\beta f, D_\gamma g).$$

Etendre ce résultat à une application *multilinéaire.*

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, où l'on fixe une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, de coordonnées $x_1, \dots, x_n$. On donne un ouvert U non vide de E et on pose $\mathscr{S} = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $D_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathscr{S})$ défini par $f \mapsto D_i(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

a) Soit $L = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que

$$(\forall f \in \mathscr{S}),\quad (\forall u \in O(E)) \qquad (L(D_1, \dots, D_n)) \,.\, (f \circ u) = [(L(D_1, \dots, D_n)) \,.\, f] \circ u\,.$$

b) Soit $\Phi \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré 2. On suppose que

$$(\forall f \in \mathscr{S}, \forall u \in O(E)) \quad (\Phi(D_1, \dots, D_n)) \,.\, (f \circ u) = [(\Phi(D_1, \dots, D_n)) \,.\, f] \circ u\,.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi = \lambda L$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ des bases de E où l'on note respectivement $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées. On donne un ouvert U de E, on désigne par P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ et on pose $\mathscr{E} = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$

a) Soit Φ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \Psi\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$, où Ψ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$; préciser la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ en fonction de A et P.

b) Pour $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$, montrer que

$$\det\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_j}\right]_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}\right) = (\det(P))^2 \det\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right]_{(i,j)\in [\![1,n]\!]^2}\right).$$

Exercice 4 : Soit $\Phi : \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. Soit $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(X, Y) \mapsto V(X, Y)$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose $W = V \circ \Phi$. Prouver que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\circ\Phi + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\circ\Phi\right].$$

Applications : a) $P = e^x \cos y$, $Q = e^x \sin y$; *b*) $P = \operatorname{ch} x \cos y$, $Q = \operatorname{sh} x \sin y$.

Exercice 5 : On note $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

a) On donne $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto V(x, y, z)$ de classe $\mathscr{C}^2$, telle que $\Delta V = 0$, et $k \in \mathbb{R}^*$. Soit $W : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{r} V\left(k^2\frac{x}{r^2}, k^2\frac{y}{r^2}, k^2\frac{z}{r^2}\right)$ où $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Prouver que $\Delta W = 0$ (Cayley).

b) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On donne V et $W : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $\Delta V = 0$ et $\Delta W = 0$, V et W étant de classe $\mathscr{C}^4$. Soit $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto V + r^2 W$. Prouver que $\Delta(\Delta S) = 0$.

Exercice 6 : Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (1 + xy)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

en utilisant des opérateurs du type $\varphi \mapsto a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + bx\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $\varphi \mapsto cy\frac{\partial \varphi}{\partial x} + d\frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Exercice 7 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, F un $\mathbb{R}$-ev et $g : U \longrightarrow F$ une fonction dérivable dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$ existe et est continue sur U. Montrer que $\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x}$ existe sur U, et est égale à $\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}$.

Exercice 8 : Trouver les fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, lorsque $b^2 - ac \geqslant 0$.

(*Indication :* Poser $x = AX + BY$, $y = CX + DY$ avec $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ convenable et $AD - BC \neq 0$.)

§ V.6 *FORMULES DE TAYLOR*

Fonctions polynomiales entre $\mathbb{R}$-ev

Considérons deux $\mathbb{R}$-ev E et F, et une fonction polynomiale $P : E \longrightarrow F$ (cf. exemple 1 du § V.1). Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une

$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right)$ s'exprime de façon unique sous la forme $\sum x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} A_\alpha$, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $(\forall \alpha)\ A_\alpha \in F$ et les A_α étant presque tous nuls.

$\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ étant une base de F, il peut arriver en particulier que $P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{j=1}^{p} Q_j(x_1, \ldots, x_n)\, \vec{\varepsilon}_j$ avec des polynômes Q_j *tous homogènes de degré donné* d en les (x_i). Si cela arrive avec un couple de bases $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$, alors il en sera de même avec *tout* couple de bases. On dit dans ce cas que *P est homogène de degré d.*

Pour que la fonction polynomiale $P : E \longrightarrow F$ soit homogène de degré d $(d \in \mathbb{N})$, il faut et il suffit que $(\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E)\ P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$. Pour $d \in \mathbb{N}$ donné, les fonctions $P : E \longrightarrow F$ polynomiales et homogènes de degré d forment un sous-$\mathbb{R}$-ev de $\mathscr{F}(E, F)$, que nous noterons $\mathscr{H}_d(E, F)$.

Proposition V.6.1

La somme vectorielle $\sum_{d \in \mathbb{N}} \mathscr{H}_d(E, F)$ est directe.

Démonstration :

Supposons trouvé $N \in \mathbb{N}$ et $H_0 \in \mathscr{H}_0(E, F), \ldots, H_N \in \mathscr{H}_N(E, F)$ tels que $H_0 + \cdots + H_N = 0$. Fixons $x \in E$. Alors pour tout réel λ, on a :

$$0 = H_0(\lambda x) + \cdots + H_N(\lambda x) = H_0(x) + \lambda H_1(x) + \cdots + \lambda^N H_N(x)\,.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est infini, chaque $H_k(x)$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$ est donc nul. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc H_k est la fonction polynomiale nulle. ■

Le $\mathbb{R}$-ev $\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \mathscr{H}_d(E, F)$ est celui de toutes les fonctions polynomiales de E dans F ; donc chaque $P : E \longrightarrow F$ polynomiale s'écrit de façon unique sous la forme $P = \sum_{d \in \mathbb{N}} H_d$, avec $(\forall d)\ H_d \in \mathscr{H}_d(E, F)$ et $H_d = 0$ pour d assez grand. On dit que H_d est la **partie homogène de degré *d* de *P*.** Lorsque $P \neq 0$, les entiers Min $\{d \mid H_d \neq 0\}$ et Max $\{d \mid H_d \neq 0\}$ s'appellent respectivement **valuation** et **degré** de P et se notent val (P) et deg (P). On convient que val $(0) = +\infty$ et deg $(0) = -\infty$. Pour tout d, $\mathscr{H}_d(E, F)$ est le $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynomiales telles que $P = 0$ ou deg $(P) =$ val $(P) = d$; $\mathscr{H}_0(E, F)$ est le $\mathbb{R}$-ev des fonctions *constantes :* $E \longrightarrow F$.

Il est immédiat que : si $F_1, \ldots, F_N$ et G sont des $\mathbb{R}$-ev, et si $P_i \in \mathscr{H}_{d_i}(E, F_i)$, alors la fonction $P : E \longrightarrow G$, $x \mapsto \mu(P_1(x), \ldots, P_N(x))$, où $\mu = F_1 \times \cdots \times F_N \longrightarrow G$ est multilinéaire quelconque, est élément de $\mathscr{H}_{d_1 + \cdots + d_N}(E, G)$. D'autre part si $P \in \mathscr{H}_d(E, F)$ et $Q \in \mathscr{H}$

$Q \circ P \in \mathscr{H}_{de}(E, G)$. En conséquence, tout produit multilinéaire de fonctions polynomiales est polynomial, et toute composée de fonctions polynomiales est polynomiale (la première assertion peut d'ailleurs se déduire de la seconde car une application multilinéaire est polynomiale).

Fonctions infiniment petites d'ordre $> N$

Normons les $\mathbb{R}$-ev E et F. Soit φ une fonction $V \longrightarrow F$, où V est un *voisinage de* 0_E *dans* E*;* soit $N \in \mathbb{N}$: si $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(\|u\|^N)$ (resp. $O(\|u\|^N)$), alors *cette relation subsistera si l'on change les normes* de E et F de façon quelconque (à cause de l'équivalence des normes en dimension finie).

Convenons de noter $o(u^{[N]})$, resp. $O(u^{[N]})$, l'ensemble des fonctions φ définies au voisinage de 0_E et à valeurs dans F qui vérifient cette propriété. Les éléments de $o(u^{[N]})$ seront appelés **infiniment petits d'ordre $> N$** (l'espace d'arrivée F étant sous-entendu sans nuire à la clarté).

Les propriétés usuelles des relations de comparaison entre fonctions vues au § I.3 montrent que : si φ_1 et φ_2, à valeurs dans F, sont définies au voisinage de 0_E et si $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]})$ (resp. $O(u^{[N]})$) alors $(\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2)$ $\lambda_1 \varphi_1(u) + \lambda_1 \varphi_2(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]})$ (resp. $O(u^{[N]})$). De même si φ_i, à valeurs dans le $\mathbb{R}$-ev F_i, est définie au voisinage de 0_E et vérifie $\varphi_i(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N_i]})$ pour $1 \leqslant i \leqslant \nu$, alors pour toute application $\mu : F_1 \times \cdots \times F_\nu \longrightarrow G$ multilinéaire à valeurs dans un $\mathbb{R}$-ev G, la fonction $\varphi : u \mapsto \mu(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_\nu(u))$ (qui est définie au voisinage de 0_E) vérifie : $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N_1 + \cdots + N_\nu]})$; et si de plus $\varphi_i \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N_i]})$ pour au moins un $i \in [\![1, \nu]\!]$, alors $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N_1 + \cdots + N_\nu]})$.

Enfin, si E, F, G sont trois $\mathbb{R}$-ev, si V est un voisinage de 0_E dans E, et W un voisinage de 0_F dans F, soit $\varphi : V \longrightarrow W$ et $\psi : W \longrightarrow G$.

Si $$\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N]}) \quad \text{et} \quad \psi(v) \underset{v \longrightarrow 0_F}{\in} O(v^{[\nu]}),$$

alors $$\psi \circ \varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N\nu]}) \,;$$

si $$\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]}) \quad \text{et} \quad \psi(v) \underset{v \longrightarrow 0_F}{\in} O(v^{[\nu]}),$$

alors $$\psi \circ \varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N\nu]})\,;$$

si $$\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N]}) \quad \text{et} \quad \psi(v) \underset{v \longrightarrow 0_F}{\in} o(v^{[\nu]})\,,$$

alors $$\psi \circ \varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N\nu]})\,.$$

Il est évident que si $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N]})$, alors pour tout entier $\nu < N$, $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[\nu]})$, et que si $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]})$, alors $\varphi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N]})$.

PROPOSITION V.6.2

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev *et* $P : E \longrightarrow F$ *polynomiale homogène de degré N. Alors* $P(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[N]})$.

Démonstration :

Normons F de façon quelconque. Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E ; choisissons sur E la norme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{n} (|x_i|) = \|x\|$. On a, avec des vecteurs convenables $A_\alpha \in F$:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e}_i\right) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\,;\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N} u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} A_\alpha\,,$$

d'où en notant $u = \sum_{i=1}^{n} u_i\,\vec{e}_i$ et $M = \underset{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N}{\operatorname{Max}} \|A_\alpha\|$:

$$\begin{aligned}\|P(u)\| &\leq M \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N} |u_1|^{\alpha_1} \dots |u_n|^{\alpha_n} \leq M \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = N} \|u\|^N \\ &\leq M \binom{n + N - 1}{n - 1} \|u\|^N\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Développements limités usuels

DÉFINITION V.6.1

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev, *U un ouvert de E, a un point de U et* $f : U \longrightarrow F$ *une fonction. On dit que f admet en a un* ɑ

> **limité usuel à l'ordre N** (*en abrégé : un* $\mathrm{DL}_N(a)$) *ssi il existe une fonction polynomiale* $P_N : E \longrightarrow F$ *de degré* $\leqslant N$ *telle que*
>
> (1) $$f(a+u) - P_N(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]}) .$$

Si (1) est vérifié, on a $P_N(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\longrightarrow} P_N(0_E)$ car P_N est continue. Donc $\lim\limits_{u \longrightarrow 0_E} f(a+u)$ existe, d'où, puisque $a \in U$, $f(a+u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\longrightarrow} f(a)$. En résumé, **$f$ est nécessairement continue en a et $f(a) = P_N(0_E)$.**

THÉORÈME V.6.1

> *Avec les notations de la définition* V.6.1, *si f admet un* $\mathrm{DL}_N(a)$, *la fonction polynomiale* P_N *vérifiant* (1) ***est unique.***

Démonstration :

Supposons que P_N et $Q_N : E \longrightarrow F$ polynomiales de degré $\leqslant N$ vérifient (1). Posons $\Phi = P_N - Q_N$. Par différence, $\Phi(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]})$. Soit $\Phi_0, \ldots, \Phi_N$ les parties homogènes de degré $0, \ldots, N$ de Φ. Supposant $\Phi \neq 0$, notons $p = \mathrm{Min}\{i \in [\![0, N]\!] \mid \Phi_i \neq 0\}$. Alors $\Phi_k(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} O(u^{[k]})$ pour $k > p$ (cf. proposition V.6.2), d'où, puisque $\Phi_p(u) + \cdots + \Phi_N(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[N]})$: $\Phi_p(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[p]})$.

Soit $x \in E$ quelconque. Ce qui précède entraîne : $\Phi_p(\lambda x) \underset{\lambda \longrightarrow 0, \lambda \in \mathbb{R}^*}{\in} o(\lambda^p)$. Mais $\Phi_p(\lambda x) = \lambda^p \Phi_p(x)$. On en déduit donc : $\Phi_p(x) \underset{\lambda \longrightarrow 0, \lambda \in \mathbb{R}^*}{\in} o(1)$, c'est-à-dire $\Phi_p(x) = 0$. C'est vrai $\forall x \in E$, d'où $\Phi_p = 0$, ce qui est absurde. Donc $\Phi = 0$. ■

DÉFINITION V.6.2

> *Dans les conditions de la définition* V.6.1, **la** *fonction polynomiale* P_N *qui vérifie* (1) *s'appelle* **partie régulière** *du* $\mathrm{DL}_N(a)$ *de f.*

Les règles de calcul sur les symboles $o(u^{[N]})$ et $O(u^{[N]})$ énumérées plus haut permettent d'établir des règles de calcul correspondantes pour les DL usuels que nous venons de définir, compte tenu des opérations sur les fonctions polynomiales. Ainsi, si f et $g : U \longrightarrow F$ admettent des $\mathrm{DL}_N(a)$, de parties régulières P et Q, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_N(a)$ dont la partie régulière est $\lambda P + \mu Q$. De même si $f_i : U \longrightarrow F$

$i = 1$ ou 2, un $\mathrm{DL}_N(a)$ de partie régulière P_i, si on donne un $\mathbb{R}$-ev G et une application bilinéaire $\mu : F_1 \times F_2 \longrightarrow G$, la fonction $f : U \longrightarrow G$, $u \mapsto \mu(f_1(x), f_2(x))$ admet un $\mathrm{DL}_N(a)$ dont la partie régulière s'obtient en ne retenant dans le polynôme $\mu(P_1, P_2)$ que les termes de degré $\leqslant N$. Enfin, si $f : U \longrightarrow F$ admet un $\mathrm{DL}_N(a)$, si G est un $\mathbb{R}$-ev et V un ouvert de F contenant $f(U)$, si $g : V \longrightarrow G$ admet un $\mathrm{DL}_N(b)$ où $b = f(a)$, alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_N(a)$, dont la partie régulière s'obtient à l'aide des parties régulières P et Q du $\mathrm{DL}_N(a)$ de f et du $\mathrm{DL}_N(b)$ de g de la façon suivante : dans le polynôme $g(b) + Q(P(u) - f(a))$, on ne retient que les termes de degré $\leqslant N$. En particulier si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ admet un $\mathrm{DL}_N(a)$, $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1/f(a)}{1 + \dfrac{f - f(a)}{f(a)}}$ aussi.

Formules de Taylor

Théorème V.6.2

> *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev, U un ouvert de E et $m \in \mathbb{N}$. Si $f : U \longrightarrow F$ est une fonction* **de classe $\mathscr{C}^m$**, *pour tout $a \in U$, f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$.*

Démonstration : Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E où l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées génériques. Raisonnons par récurrence sur m. La propriété est claire si $m = 0$. Supposons-la vraie à l'ordre $m - 1$ avec $m \geqslant 1$. Choisissons sur E la norme $x = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \mapsto \|x\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} (|x_i|)$, puis un réel $r > 0$ tel que $\tilde{\mathbf{B}}(a, r) \subset U$. Pour $\|u\| \leqslant r$ $\left(u = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i\right)$, la fonction $[0, 1] \longrightarrow F$, $t \mapsto f(a + tu)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et on a donc :

$$f(a + u) - f(a) = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f(a + tu)) \right) \mathrm{d}t \,.$$

Mais

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f(a + tu)) = (\mathrm{d}_{a+tu} f) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (a + tu) \,.$$

Chaque $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est de classe $\mathscr{C}^{m-1}$ sur U. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc des fonctions ρ_i, définies sur $U \setminus \{a\}$, et des fonctions $P_{k, \frac{\partial f}{\partial x_i}} : E \longrightarrow F$ polynomiales homogènes de degré k, avec $P_{0, \frac{\partial f}{\partial x_i}} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, telles que

$\rho_i(v) \underset{v \longrightarrow 0_E}{\in} o(v^{[m-1]})$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+v) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} P_{k,\frac{\partial f}{\partial x_i}}(v)\right) + \rho_i(v)$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. D'où, avec $\|u\| \leqslant r$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} P_{k,\frac{\partial f}{\partial x_i}}(u)\right) + \rho_i(tu)\,,$$

et par suite :

$$f(a+u) - f(a) = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\, P_{k,\frac{\partial f}{\partial x_i}}(u)\right)\right] \mathrm{d}t + R(u)\,,$$

avec $R(u) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\, \rho_i(tu)\right) \mathrm{d}t$; soit, en posant pour $q \in [\![1, m]\!]$

$P_{q,f}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i\, P_{q-1,\frac{\partial f}{\partial x_i}}(u)$:

$$f(a+u) - f(a) = \left(\sum_{q=1}^{m} \frac{1}{q!} P_{q,f}(u)\right) + R(u)\,.$$

Il est clair que chaque $P_{q,f}(u)$ est polynomiale homogène de degré q en u. Il reste à vérifier que $R(u) \underset{u \longrightarrow 0_E}{\in} o(u^{[m]})$. Soit ε réel > 0, puis η réel tel que $0 < \eta \leqslant r$ et que $\|\rho_i(v)\| \leqslant \varepsilon \|v\|^{m-1}$ pour $\|v\| \leqslant \eta$ (F étant normé de façon quelconque). Si $\|u\| \leqslant \eta$, on a :

$$\|R(u)\| \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |u_i|\, \varepsilon t^{m-1} \|u\|^{m-1}\, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon n \|u\|^m \int_0^1 t^{m-1}\, \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{m} n \|u\|^m\,,$$

d'où l'assertion. En fin de compte, f admet un $\mathrm{DL}_m(a)$, de partie régulière $u \mapsto f(a) + \displaystyle\sum_{q=1}^{m} \frac{1}{q!} P_{q,f}(u)$. ■

La démonstration précédente entraîne que, *pour toute base $\mathscr{B}$ de E*, si on note $\dfrac{1}{q!} P_{q,f,a}(u)$ la partie homogène de degré q $(0 \leqslant q \leqslant m)$ du $\mathrm{DL}_m(a)$ de f, on a la relation fondamentale :

$$(2) \qquad (\forall q \in [\![1, m]\!]) \quad \boxed{P_{q,f,a}(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, P_{q-1,\frac{\partial f}{\partial x_i},a}(u)}\,.$$

DÉFINITION V.6.3

Dans les conditions du théorème V.6.2 *les fonctions polynomiales homogènes de degré k : $P_{k,f,a}$ telles que*

$$f(a+u) - \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u)\right) \underset{u \to 0_E}{\in} o(u^{[m]})$$

s'appellent les **polynômes de Taylor** *de f en a, ou aussi polynômes* **polaires** *de f en a ($P_{k,f,a}$ étant le k-ième polynôme polaire).*

D'après cette définition $P_{0,f,a} = f(a)$. Quant aux autres polynômes polaires, ils peuvent se calculer par récurrence en utilisant la relation (2).

THÉORÈME V.6.3

Dans les conditions du théorème V.6.2, *soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, où l'on note (x_i) les coordonnées. Supposons $m \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, on a :* $\left(\forall u = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \in E\right)$

$$(3) \qquad P_{k,f,a}(u) = \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} u_{i_1} \dots u_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a),$$

et

$$(4) \quad P_{k,f,a}(u) = \sum_{\begin{cases} (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \end{cases}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a).$$

Démonstration :

Si $k = 1$, on reconnaît en (3) la formule $(\mathrm{d}_a f) \cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $k-1$ avec $k \geqslant 2$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par l'hypothèse de récurrence :

$$P_{k-1, \frac{\partial f}{\partial x_i}, a}(u) = \sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in [\![1,n]\!]^{k-1}} u_{i_1} \dots u_{i_{k-1}} \frac{\partial^{k-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}}(a)$$

d'où (3) à l'aide de (2) par le principe de Fubini des sommes finies.

Pour obtenir (4) à partir de (3) il suffit d'appliquer le principe des bergers et le théorème de Schwarz V.5.2 pour avoir :

$$P_{k,f,a}(u) = \sum_{\begin{cases}\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k\end{cases}} C_\alpha\, u_1^{\alpha_1} \dots u_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a)\,,$$

avec, en posant $[\![1, n]\!] = I$, $(\forall \alpha)$

$$C_\alpha = \operatorname{card}\,\{(i_1, \dots, i_k) \in I^k \mid \operatorname{card}\,\{r \mid i_r = \nu\} = \alpha_\nu \text{ pour tout } \nu \in I\}\,.$$

On a vu au § V.5 que $C_\alpha = \dfrac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$, d'où (4). ■

Remarque 1 : Si f est à valeurs réelles, le polynôme de Taylor $P_{2,f,a}(u)$ est une *forme quadratique* en u sur E. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est, d'après (4) : $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

THÉORÈME V.6.4

Avec les notations et hypothèses du théorème V.6.2, *soit* $u \in E$ *tel que le segment* $[a, a+u]$ *soit contenu dans* U. *Soit* $g : [0,1] \longrightarrow F$, $t \mapsto f(a+tu)$. *Alors* g *est de classe* $\mathcal{C}^m$, *et* $(\forall k \in [\![0, m]\!], \forall t \in [\![0, 1]\!])\ g^{(k)}(t) = P_{k,f,a+tu}(u)$, $P_{k,f,b}$ *désignant le k-ième polynôme de Taylor de f en b.*

Démonstration :

Par translation sur t, on se ramène à prouver le théorème pour $t = 0$. D'abord il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^m$ (par application du théorème V.4.1, en remarquant que, pour $\eta > 0$ convenable, $t \mapsto f(a+tu)$ est définie sur l'intervalle ouvert $]-\eta, 1+\eta[$).

Ensuite, soit $\rho(v) = f(a+v) - \sum_{k=0}^{m} \dfrac{1}{k!} P_{k,f,a}(v)$: ρ est définie au voisinage de 0_E dans E et $\rho(v) \underset{v \to 0_E}{\in} o(v^{[m]})$. Donc $\rho(tu) \underset{t \to 0,\, t \in [0,1]}{\in} o(t^m)$, ce qui signifie que $g(t)$ admet un $\mathrm{DL}_m(0)$, de partie régulière $\sum_{k=0}^{m} \dfrac{1}{k!} t^k P_{k,f,a}(u)$. Mais puisque g est de classe $\mathcal{C}^m$, ce $\mathrm{DL}_m(0)$ est aussi $\sum_{k=0}^{m} \dfrac{1}{k!} t^k g^{(k)}(0)$. Par unicité de ce $\mathrm{DL}_m(0)$, on a donc $(\forall k \in [\![0, m]\!])\ g^{(k)}(0) = P_{k,f,a}(u)$. ■

Il suffit d'appliquer à la fonction g du théorème V.6.4 (avec $m+1$ à la place de m) les théorèmes de Taylor connus pour les fonctio réelle pour obtenir les **formules de Taylor des fonctions de plusieurs variables,** valables pour f de classe $\mathscr{C}^{m+1}$, sur U et $[a, a+u] \subset U$.

• A partir de la formule de Taylor-reste intégrale

$$g(1) - g(0) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \right) + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m g^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

on obtient la **formule de Taylor-reste intégrale** pour f:

$$(5) \qquad f(a+u) - f(a) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u) \right) + \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-t)^m P_{m+1,f,a+tu}(u)\,\mathrm{d}t\ .$$

• F étant normé de façon quelconque, à partir de la formule de Taylor-Lagrange :

$$\left\| g(1) - g(0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) \right\| \leqslant \frac{1}{(m+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \| g^{(m+1)}(t) \|\ ,$$

on obtient la **formule de Taylor-Lagrange** pour f:

$$(6) \qquad \left\| f(a+u) - f(a) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u) \right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{(m+1)!} \sup_{x \in [a, a+u]} \| P_{m+1,f,x}(u) \|\ .$$

• Dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ on obtient de même la **formule de Taylor-Lagrange des fonctions numériques :**

$$(7) \quad f(a+u) - f(a) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u) \right) + \frac{1}{(m+1)!} P_{m+1,f,a+\theta u}(u)$$

(il existe au moins sur $\theta \in]0, 1[$ pour lequel l'égalité est vraie).

• Rappelons enfin que si f est de classe $\mathscr{C}^m$ $(m \geqslant 1)$, on a :

$$(8) \qquad f(a+u) - f(a) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u) \right) + o(u^{[m]})\ .$$

Cette formule (8), version définitive du théorème V.6.2, peut être appelée **formule de Taylor-Young** pour f. Lorsque f est de classe $\mathscr{C}^{m+1}$, compte tenu de la proposition V.6.2 on a la formule plus précise :

$$(9) \qquad f(a+u) - f(a) = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(u) \right) + O(u^{[m+1]})$$

que l'on peut d'ailleurs déduire directement de (5) ou de ((

Il importe de savoir retrouver rapidement au moins les premiers polynômes $P_{1, f, a}(u)$ et $P_{2, f, a}(u)$. Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, on a, pour $u = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$:

$$P_{1, f, a}(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) ,$$

et :

$$P_{2, f, a}(u) = \sum_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) .$$

Par exemple la formule (5) s'écrit explicitement pour $m = 2$, dans $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned} f(a+u) - f(a) = & \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(a+tu) + 3 \sum_{(i,j) \in [\![1, n]\!]^2} u_i^2 u_j \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a+tu) \right. \\ & \left. + 6 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} u_i u_j u_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a+tu) \right\} \mathrm{d}t . \end{aligned}$$

Application aux fonctions polynomiales

Avec les notations précédentes, supposons f de classe $\mathscr{C}^{m+1}$ sur U et toutes les dérivées d'ordre $m+1$ de f, relatives à une base donnée $\mathscr{B}$, *nulles*. Alors, de (5) ou de (6) on déduit, pour $a \in U$ fixé et u proche de 0_E, que $f(a+u)$ est *polynomiale en u,* car réduite à la partie régulière de (5) ou de (6). Donc f est *localement polynomiale* sur U. Lorsque U est *connexe,* on en déduit que *f est polynomiale de degré $\leq m$ ssi ses dérivées d'ordre $m+1$ dans U sont nulles.* On retrouve en particulier la *formule de Taylor des polynômes à coefficients réels* qui avait été vue autrement au tome 1 (cf. théorème X.2.1).

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev, où l'on fixe une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. On donne un ouvert convexe non vide U de E.

a) Soit $f \in \mathscr{C}^{\infty}(u, \mathbb{R})$ et $a = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \in U$. Utiliser (5) pour montrer : $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x - a_i) g_i(x)$ avec des $g_i \in \mathscr{C}^{\infty}(U, \mathbb{R})$, et $(\forall i)$ $g_i(a$ ∂f

généralement, $(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, on a des fonctions $(g_\alpha)\begin{cases}\alpha \in \mathbb{N}^n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = p\end{cases}$ dans $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ telles que $(\forall x \in U)$

$$f(x) = f(a) + \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} P_{k,f,a}(x-a)\right) + \frac{1}{p!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p} \frac{p!}{\alpha_1! \dots \alpha_n} \times$$
$$\times (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - a_n)^{\alpha_n} g_\alpha(x)$$

et $(\forall \alpha)\, g_\alpha(a) = \dfrac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a)$.

b) On norme E par $x = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \mapsto \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Pour $\varepsilon > 0$, construire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ valant 1 pour $\|x\| \leqslant 1$ et valant 0 pour $\|x\| \geqslant 1 + \varepsilon$. L'utiliser pour étendre les résultats du *a)* au cas général où U n'est pas nécessairement convexe.

Exercice 2 : On conserve les notations de l'exercice 1. Sur la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathscr{A} = \mathscr{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ on appelle *dérivation* toute application $\mathbb{R}$-linéaire $\Delta : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ telle que $(\forall (f,g) \in \mathscr{A}^2)$ $\Delta(fg) = (\Delta f)g + f(\Delta g)$, et que $\Delta f = 0$ lorsque f est constante.

a) Soit $V : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $\Delta_V : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$, $f \mapsto g$ telle que $(\forall x \in U)$ $g(x) = (d_x f) \cdot V(x)$ est une dérivation sur $\mathscr{A}$.

b) Soit Δ une dérivation sur $\mathscr{A}$. On note φ_i la fonction $U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \mapsto x_i$. Montrer, si $a \in U$, en utilisant l'exercice 1, que $(\Delta f)(a) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)[(\Delta \varphi_i)(a)]$. En déduire qu'il existe $V : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tel que $\Delta = \Delta_V$.

Exercice 3 : On donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$, et

$$(\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n) \frac{\partial^{\|\alpha\|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(0) = 0\,.$$

On note $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ et h la fonction $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $x \neq 0$. On se propose de prouver que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et que toutes les dérivées partielles de h sont nulles en 0.

a) Montrer : sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n) \exists G_\alpha$ polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ telle que $D_\alpha\left(\dfrac{1}{g}\right) = \dfrac{G_\alpha}{g^{1+\|\alpha\|}}$ (notations de l'exercice 1 du § V.5).

b) Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists C_{p,\alpha}$ réel > 0 tel que $(\forall x)\, g(x) \leqslant 1 \Rightarrow |D_\alpha f(x)| \leqslant C_{p,\alpha}(g(x))^{p/2}$ (utiliser (5)).

c) En appliquant la formule de Leibniz (exercice 1 du § V.5), démontrer : $(\forall \alpha \in \mathbb{N}^n)$ $D_\alpha\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \underset{x \neq 0_E}{\longrightarrow} 0$. En déduire le résultat voulu.

Exercice 4 : Soit U un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-ev E. Une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* (resp. *strictement convexe*) ssi $(\forall (a,b) \in U^2, a \neq b)$ $(\forall \lambda \in]0,1[)$ $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ (resp. $<$). On donne $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

a) Montrer : f est convexe $\Leftrightarrow (\forall a \in U)$ la forme quadratique $P_{2,f,a}$ est *positive*.

b) On suppose : $(\forall a \in U)$ la forme $P_{2,f,a}$ est *définie positive*.

Montrer que f est strictement convexe.

Montrer à l'aide d'un exemple que la réciproque est fausse.

Exercice 5 : *a)* Soit U un ouvert *convexe* d'un $\mathbb{R}$-ev E (de dimensio

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ supposée *différentiable* sur U. Montrer que f est convexe (cf. exercice 4) ssi $(\forall x \in U, \forall y \in U)\ f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}_x f(y - x)$. Interprétation géométrique ?

b) On suppose maintenant que $U = E$, que $f(0_E) = 0$, que f (toujours supposée différentiable sur E) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, que f est convexe sur E et strictement convexe sur un voisinage de 0_E. On munit E d'une norme, notée $\|\,.\,\|$.

Démontrer qu'il existe des réels α et β, avec $\alpha > 0$, tels que $(\forall x \in E)\ f(x) \geqslant \alpha \|x\| + \beta$.

Indication : $\alpha = \underset{\|x\| = 1}{\operatorname{Min}}\ (\mathrm{d}_x f)\,.\,x$ et $\beta = \underset{\|x\| = 1}{\operatorname{Min}}\ (f(x) - (\mathrm{d}_x f)\,.\,x)$ conviennent (considérer la restriction de f aux demi-droites vectorielles de E).

§ V.7 *EXTREMA LOCAUX*

Dans ce §, E désigne un $\mathbb{R}$-ev et U un ouvert de E. Nous allons appliquer les résultats du § V.6 à l'étude des extrema locaux de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ $(p \geqslant 1)$ sur U, **à valeurs réelles.** Quitte à remplacer f par $-f$ on peut pour la théorie se limiter aux *minima* locaux.

PROPOSITION V.7.1

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$ en lequel f admet un ***extremum local*** *(i.e. que pour un certain voisinage $V \subset U$ de a, $f(a) = \underset{x \in V}{\operatorname{Max}}\ (f(x))$ ou $f(a) = \underset{x \in V}{\operatorname{Min}}\ (f(x))$). Si f est dérivable en a suivant $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = 0$.*

En particulier, si $\mathrm{d}_a f$ existe, alors $\mathrm{d}_a f = 0$.

La première assertion est une conséquence évidente du théorème V.1.1 du tome 2 ; la dernière vient du fait que si $\mathrm{d}_a f$ existe, alors $\forall \vec{v} \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)$ existe et vaut $(\mathrm{d}_a f)\,.\,\vec{v}$.

Il est naturel de s'intéresser aux points où $\mathrm{d}_a f$ existe et vaut 0.

DÉFINITION V.7.1

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. *On appelle* ***point critique*** *de f tout $a \in U$ tel que $\mathrm{d}_a f = 0$, et* ***valeur critique*** *de f toute valeur $f(a)$, où $a \in U$ est point critique de f.*

Il est clair qu'un point critique ne donne pas nécessairement un extremum local de f ; soit par exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$: au point $a = (0, 0)$, $\mathrm{d}_a f = 0$ et cependant dans tout voisinage de a, il y a des points (x, y) où $f(x, y) > 0$ et d'autres où $f(x, y) < 0$, ce qui prouve que la valeur critique 0 n'est ni un maximum local ni un minimum loc d'ailleurs pas étonnant puisque ce phénomène se présentait déjà pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par exemple $g : x \mapsto x^3$.

Polynômes positifs

Afin de pouvoir exploiter les diverses formules de Taylor, introduisons la notion suivante :

DÉFINITION V.7.2

Une fonction polynomiale homogène, de degré $\geqslant 1$, $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **positive** *si $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$,* **définie positive** *ssi $P(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.*

PROPOSITION V.7.2

E étant normé de façon quelconque, soit $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale homogène de degré $d \geqslant 1$ et non nulle.

(I) *Si P est positive, d est pair.*

(II) *Pour que P soit définie positive de degré $2r$ ($r \in \mathbb{N}^*$), il faut et il suffit qu'il existe α réel > 0 tel que $(\forall x \in E)\ P(x) \geqslant \alpha \|x\|^{2r}$.*

Démonstration :

(I) Soit $x \in E$ tel que $P(x) \neq 0$. Alors $(\forall \lambda \in \mathbb{R}^*)$ $P(\lambda x) = \lambda^d P(x) > 0$, ce qui implique évidemment : d pair.

(II) Si $(\forall x \in E)\ P(x) \geqslant \alpha \|x\|^{2r}$, il est clair que $P(x) \geqslant 0$, le seul cas où $P(x) = 0$ étant réalisé pour $\|x\| = 0$, c.-à-d. $x = 0_E$. Réciproquement, supposons P définie positive. Notons S la *sphère unité* de $(E, \|\cdot\|)$, *i.e.* $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. C'est une partie compacte de E non vide, ne contenant pas 0_E. La fonction $P|_S$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc admet un minimum $\alpha > 0$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{1}{\|x\|} x \in S$, d'où $P\left(\dfrac{1}{\|x\|} x\right) = \dfrac{1}{\|x\|^{2r}} P(x) \geqslant \alpha$, d'où $P(x) \geqslant \alpha \|x\|^{2r}$, relation qui reste vraie avec $x = 0_E$. ■

Remarque 1 : Si P est polynomiale homogène *de degré 2*, c.-à-d. si P est une *forme quadratique* sur E (cf. tome 4), on dispose d'un outil commode pour savoir si P est positive (resp. définie positive) : la *signature* de P. En effet P est positive (resp. définie positive) ssi cette signature est $(\rho, 0)$ avec $0 \leqslant \rho \leqslant n = \dim(E)$ (resp. $(n, 0)$ avec $n = \dim(E)$). Lorsque P est définie positive, l'équivalence des normes et la réduction de P en carrés rendent d'ailleurs évidente dans ce cas particulier la proposition V.7.2.(II).

Application à l'étude des points critiques

Dans ce qui suit, nous considérons $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^p$, avec $p \geqslant 2$, et un *point critique* $a \in U$ de f. Nous supposerons que les polynômes de Taylor $P_{k,f,a}$ de f en a ne sont pas tous nuls pour $2 \leqslant k \leqslant p$, et nous noterons $m = \text{Min}\ \{k \in [\![2,p]\!] \mid P_{k,f,a} \neq 0\}$.

THÉORÈME V.7.1

> (I) *Si f présente en a un* **minimum local** *(au sens large), alors $P_{m,f,a}$ est* **positif,** *et en particulier m est pair.*
> (II) *Supposons m pair $(m = 2r, r \geqslant 1)$ et $P_{m,f,a}$* **défini positif.** *Alors f présente en a un* **minimum strict local.**

Démonstration :

Normons E de façon quelconque. Par la formule de Taylor-Young, on a :

$$(1) \qquad f(a+u) - f(a) = \frac{1}{m!} P_{m,f,a}(u) + o(\|u\|^m).$$

(I) Fixons $x \in E$. La fonction $t \mapsto f(a+tx) - f(a)$ est alors définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, et d'après (1), on a :

$$(2) \qquad f(a+tx) - f(a) = \frac{t^m}{m!} P_{m,f,a}(x) + o(t^m).$$

De plus, puisque f possède un minimum large en a, on a : $f(a+tx) - f(a) \geqslant 0$ pour $|t|$ assez petit. De (2) on déduit donc que m est pair, et que $P_{m,f,a}(x) \geqslant 0$, et c'est vrai $\forall x \in E$.

(II) Soit α réel > 0 tel que $P_{m,f,a}(x) \geqslant \alpha \|x\|^{2r}$ pour $x \in E$. Soit ε réel > 0 tel que $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{2[(2r)!]}$. D'après (1) on a, pourvu que $\|u\|$ soit assez petit :

$$f(a+u) - f(a) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{(2r)!}\|u\|^{2r} - \varepsilon\|u\|^{2r} = \left(\frac{\alpha}{(2r)!} - \varepsilon\right)\|u\|^{2r} \geqslant \frac{\alpha/2}{(2r)!}\|u\|^{2r},$$

d'où en particulier $f(a+u) - f(a) > 0$ pour $\|u\|$ assez petit et $\neq 0$. ■

Remarque 2 : Attention ! Il se peut que f présente en a un minimum local strict sans que $P_{m,f,a}$ soit défini positif.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + x^4 + y^4$. Au point critique $(0,0)$, f présente un minimum strict (d'ailleurs global) et cependant $P_{2,f,0} = 2x^2$ est un polynôme positif qui n'est pas défini p

Remarque 3 : De même, si $m = 2r$ $(r \geqslant 1)$ et si $P_{m,f,a}$ est positif sans être défini positif, il se peut que f ne présente en a ni minimum local, ni maximum local. C'est le cas par exemple pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + x^4 - y^4$ en le point critique $(0, 0)$. En effet pour tout λ réel > 0, on a : $f(\lambda, 0) = \lambda^2 + \lambda^4 > 0$ $(0 = f(0, 0))$ tandis que $f(0, \lambda) = -\lambda^4 < 0$, ce qui prouve bien que f n'a pas d'extremum local.

Achevons par un exemple simple d'utilisation du théorème V.7.1.

Exemple 2 : Soit λ un paramètre réel et $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3\lambda xy$.

Etudier les extrema de f_λ.

On remarque d'abord que $f_{-\lambda}(-x, -y) = -f_\lambda(x, y)$, ce qui permet de limiter l'étude au cas $\lambda \geqslant 0$.

Pour $\lambda = 0$ le seul point critique est $(0, 0)$ et la partie (I) du théorème V.7.1 montre que, puisque $m = 3$, ce point ne peut donner ni maximum ni minimum local.

Pour $\lambda > 0$ les points critiques sont fournis par la résolution du système (S) $3x^2 - 3\lambda y = 0$, $3y^2 - 3\lambda x = 0$.

Le point $(0, 0)$ est critique, mais $P_{2, f_\lambda, 0} = -6\lambda xy$ n'est pas positif et il n'y a donc pas d'extremum local en ce point.

La résolution de (S) donne un second point critique $a = (\lambda, \lambda)$, avec $P_{2, f_\lambda, a} = 6\lambda(X^2 - XY + Y^2)$. Cette fois-ci $P_{2,f,a}$ est défini positif, et la partie (II) du théorème montre qu'en ce point la fonction f_λ présente un minimum strict local, dont la valeur est $f(\lambda, \lambda) = -\lambda^3$. Il est clair que f_λ ne saurait avoir d'extremum global puisque par exemple $f(x, 0) = x^3$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Exercice 1 : Soit U un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-ev E, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et différentiable (cf. exercices 4 et 5 du § V.6). Montrer qu'en tout point critique $a \in U$ de f, f présente un minimum absolu. Ce minimum est unique si f est strictement convexe.

Exercice 2 : Soit U un ouvert *convexe* d'un $\mathbb{R}$-ev E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $(\forall x \in U)$ $P_{2,f,x}$ est positive. Soit $a \in U$ un point critique pour f. Montrer qu'alors f présente en a un minimum large.

(*Indication :* Utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec valeur moyenne.)

En déduire que si $a \in U$ est tel que $d_a f = 0$ et possède un voisinage sur lequel $P_{2,f,x}$ reste positive, alors f présente en a un *minimum local* large.

Exercice 3 : Soit U un ouvert d'un $\mathbb{R}$-ev E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Un point critique $a \in U$ de f est dit *non dégénéré* ssi la forme quadratique $P_{2,f,a}$ est non dégénérée. Utiliser l'exercice 1 du § V.6 pour montrer que tout point critique non dégénéré de f est isolé dans l'ensemble $\mathscr{C}$ des points critiques de f.

Donner un exemple de point critique dégénéré (*i.e.* $P_{2,f,a}$ dégénérée) non isolé dans $\mathscr{C}$.

Exercice 4 : Soit n un entier $\geqslant 2$ et U l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$ de $\mathbb{R}^n$. On donne la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \dfrac{1}{2}x_1^2 \ldots x_n^2 - \lambda x_1 \ldots x_n + \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$, où λ est un paramètre > 0.

a) Discuter suivant les valeurs de λ l'existence et le nombre de points critiques de f.

b) Etudier le comportement de f au voisinage de chaque point critique en utilisant le théorème V.7.1. Y a-t-il un cas particulier qui n'entre pas dans le cadre de ce théorème ?

Exercice 5 : Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\| f(x) \| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On suppose trouvés a et b dans E tels que : $f(b) \leqslant f(a)$, $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = 0$, la forme quadratique $P_{2,f,a}$ est définie positive. Montrer qu'il existe $c \in E \setminus \{a, b\}$ tel que $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(c) = 0$.

Exercice 6 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, soit un triangle d'intérieur U, de côtés $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$. Pour $M \in U$ on pose $f(M) = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_1) \times \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_2) \times \mathrm{d}(M, \mathscr{D}_3) =$ produit des distances de M aux trois côtés.

a) Montrer que f est polynomiale et admet sur U un maximum.

b) Prouver que ce maximum est unique, et indiquer en quel point remarquable il est atteint.

Exercice 7 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, soit un triangle non aplati de sommets A, B, C, d'intérieur U. Pour $M \in \mathscr{P}$ on pose $f(M) = MA + MB + MC =$ somme des distances de M aux trois sommets.

a) Montrer que f admet un minimum, mais qu'il ne peut être atteint en un point extérieur au triangle.

b) Montrer que si les trois angles du triangle ABC sont $< 2\pi/3$, il existe dans U un point unique où le minimum est atteint (point de Fermat du triangle).

c) Si l'un des angles du triangle est $\geqslant 2\pi/3$, vérifier que c'est au sommet de cet angle que le minimum est atteint.

Exercice 8 : Soit p entier $\geqslant 2$ et U l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^p$ de $\mathbb{R}^p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$, soit $f_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_1, \dots, x_p)^{1/n}$. Vérifier que f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U. Montrer que la forme quadratique $P_{2, f_n, x}$ est négative pour $n = p$, définie négative pour $n > p$.

Retrouver en particulier l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 9 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on donne un triangle $\mathscr{T}$ dont les côtés ont pour longueur a, b, c et dont on note S l'aire.

a) Prouver que $S \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$, l'égalité ayant lieu ssi $\mathscr{T}$ est équilatéral.

b) Prouver que $S \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}$, l'égalité ayant lieu ssi $\mathscr{T}$ est équilatéral.

Exercice 10 : Soit A, B, C trois points non alignés de $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale de degré $\leqslant 3$. On suppose A, B, C critiques pour f, et que les formes quadratiques $P_{2,f,A}$, $P_{2,f,B}$ et $P_{2,f,C}$ sont de signature $(1, 1)$. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}^2$ intérieur au triangle (A, B, C) tel que f présente en M un extremum local.

Indication. Par un choix convenable d'un repère de $\mathbb{R}^2$ (où on notera (x, y) les coordonnées), se ramener au cas où

$$f(x, y) = 2ax^3 + 2bx^2y + 2bxy^2 + 2dy^3 - 3ax^2 - 2bxy - 3dy^2,$$

$$b^2 - 9ad > 0, \quad 4b^2 - 6a(4b - 6d) > 0, \quad 4b^2 - 6d(4b - 6a) > 0,$$

puis $d \geqslant a$ et (en changeant s'il le faut f en $-f$) $b > 0$. Etudier alors le système $(S) : xy \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 11 (généralisation de l'exercice 7) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et p un entier $\geqslant 3$. On donne des points distincts $A_1, \dots, A_p$ *non alignés*

$U = E \setminus \{A_1, \dots, A_p\}$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on considère $\overrightarrow{W_i} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{\|\overrightarrow{A_iA_j}\|} \overrightarrow{A_iA_j}$. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \|\overrightarrow{MA_i}\|$.

a) Pour $\Omega \in E$ on pose $U_\Omega = E \setminus \{\Omega\}$. Vérifier que $g : U_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \|\overrightarrow{\Omega M}\|$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, que $(\forall M \in U_\Omega)$ $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, g(M) = \frac{1}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|} \overrightarrow{\Omega M}$, et que $(\forall X \in E)$ $P_{2,g,M}(X) = \frac{1}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^3} [\|X\|^2 \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - (\overrightarrow{\Omega M} \mid X)^2]$.

b) Pour $M \in U$, calculer $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f(M)$ et $P_{2,f,M}$. Montrer que, sur U, f a *au plus un* point critique, et qu'un tel point est dans la sous-variété linéaire *affine* engendrée par $A_1, \dots, A_p$. Vérifier que, $\forall M \in U$, la forme quadratique $P_{2,f,M}$ est définie positive.

c) Montrer que f admet sur E un minimum global.

d) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto \sum_{j \neq i} \|\overrightarrow{MA_j}\|$. Calculer $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f_i(A_i)$ et P_{2,f,A_i}. Montrer que si $\|\overrightarrow{W_i}\| \leqslant 1$, f présente en A_i un minimum strict local.

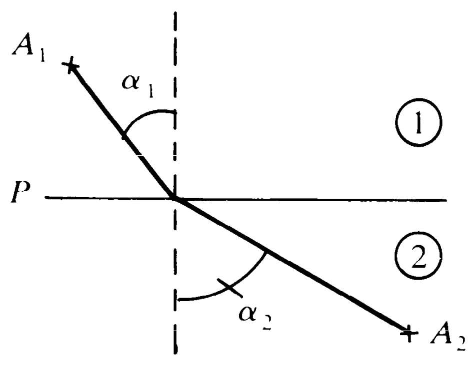
e) Montrer que si $(\forall i)$ $\|\overrightarrow{W_i}\| > 1$, f a forcément un point critique dans U, qui est unique, et en lequel f présente un minimum global, ce minimum étant unique.

f) Etudier les cas $p = 3$ et $p = 4$.

Exercice 12 (principe de Fermat) : Dans l'espace physique assimilé à un espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère un plan P séparant deux milieux où la vitesse de la lumière est respectivement v_1 et v_2. La trajectoire d'un photon parti de A_1 dans le premier milieu et aboutissant à A_2 dans le deuxième est telle que le temps mis pour aller de A_1 à A_2 est minimum.

a) Montrer que cette trajectoire est située dans le plan perpendiculaire à P passant par A_1 et A_2.

b) L'expérience montre que le rayon lumineux se réfracte à la traversée du plan P et on peut mesurer l'angle d'incidence α_1 et l'angle de réfraction α_2. Montrer qu'on peut en déduire le rapport des vitesses dans les deux milieux.



Chapitre VI

APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

On ne considère dans ce chapitre que des $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $\geqslant 1$.

§ VI.1 *FONCTIONS IMPLICITES*

Isomorphismes entre $\mathbb{R}$-ev

Pour tout couple (E_1, E_2) de $\mathbb{R}$-ev, nous noterons Isom (E_1, E_2) l'ensemble des isomorphismes de E_1 sur E_2 : il est non vide ssi $\dim_{\mathbb{R}} (E_1) = \dim_{\mathbb{R}} (E_2)$; soit alors E et F deux $\mathbb{R}$-ev de même dimension n : Isom (E, F) est un *ouvert* de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}} (E, F)$, car en prenant des bases de E et F, on se ramène à vérifier que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui a déjà été vu, notamment au chapitre V. De plus, l'application Isom $(E, F) \longrightarrow$ Isom (F, E), $u \mapsto u^{-1}$, est *rationnelle* (car il en est ainsi de l'application $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$), donc *de classe* $\mathscr{C}^\infty$.

Le théorème fondamental

Etant donné une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, à valeurs vectorielles, des deux variables vectorielles x et y, le problème qui se pose de manière générale consiste à étudier les fonctions $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ telles que f soit définie sur le graphe de φ et que

$$\boxed{(\forall x) \quad f(x, \varphi(x)) = 0}\,.$$

De telles fonctions φ sont dites **définies implicitement** par la relation $f(x, y) = 0$. Voici le théorème de base qui permet d'en co

THÉORÈME VI.1.1

> *Soit E, F et G trois* $\mathbb{R}$-ev *avec* $\dim_{\mathbb{R}}(F) = \dim_{\mathbb{R}}(G)$. *Dans* $E \times F$, *on identifie* $E \times \{0_F\}$ *à* E *et* $\{0_E\} \times F$ *à* F, *de sorte que* $E \times F = E \oplus F$. *Soit* Ω *un ouvert de* $E \times F$, *une application* $f : \Omega \longrightarrow G$ *et un point* $c = (a, b) \in \Omega$ $(a \in E, b \in F)$. *On suppose que* f *est* **différentiable,** *que* $\mathbf{f(c) = 0}$, *que* **d*f* est continue en c,** *et que la restriction* $\beta = (\mathrm{d}_c f)|_F$ **appartient à Isom (*F*, *G*).**
>
> (I) *Alors il existe un voisinage ouvert U de a dans E, un voisinage ouvert V de b dans F et une fonction* $\varphi : U \longrightarrow V$ **continue en a** *vérifiant les conditions suivantes :* $\varphi(a) = b$; $U \times V \subset \Omega$; *le graphe* Γ_φ *de* φ *est égal à* $(U \times V) \cap f^{-1}(0_G)$; φ *est différentiable en a, et :*
>
> (1) $$\mathrm{d}_a\varphi = -\beta^{\langle -1\rangle} \circ \alpha\,, \quad avec \quad \alpha = (\mathrm{d}_c f)|_E\,.$$
>
> (II) *Si* $\tilde{\varphi}$ *est une fonction définie au voisinage de a dansE, à valeurs dans F, telle que* $\tilde{\varphi}(a) = b$, **continue en a** *et définie implicitement par* $f(x, y) = 0$, *alors* $\tilde{\varphi}$ *coïncide avec* φ *au voisinage de* a.

Démonstration :

Par translation, on se ramène au cas où $(a, b) = (0_E, 0_F) = 0_{E \times F} = 0$. Normons $E \times F$ de façon que $(\forall (u, v) \in E \times F)$ $\|(u, v)\| = \mathrm{Max}\,(\|u\|, \|v\|)$. Normons G de façon quelconque ; tous les espaces d'applications linéaires $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, G)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, G)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(G, F)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F)$, etc... seront munis des normes $|||\,.\,|||$ associées.

Soit $g : \Omega \longrightarrow F$, $(x, y) \mapsto y - (\beta^{\langle -1\rangle} \circ f)(x, y)$. C'est une fonction différentiable et $(\forall (x, y) \in \Omega)$ $(\mathrm{d}_{(x,y)}g)|_F = \mathrm{Id}_F - \beta^{\langle -1\rangle} \circ ((\mathrm{d}_{(x,y)}f)|_F)$. D'où $(\mathrm{d}_0 g)|_F = 0$. L'application $(x, y) \mapsto (\mathrm{d}_{(x,y)}g)|_F$ est continue en 0, puisque df l'est. Utilisant cette continuité, et la continuité de df en 0, on obtient des réels convenables $r_1 > 0$, $s > 0$, $C > 0$ tels que, posant $U_1 = \{x \in E \mid \|x\| < r_1\}$, $V = \{y \in F \mid \|y\| < s\}$, on ait : $U_1 \times V \subset \Omega$; $(\forall (x, y) \in U_1 \times V)$ $|||\mathrm{d}_{(x,y)}f||| \leqslant C$ et $|||(\mathrm{d}_{(x,y)}g)|_F||| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Notons $B = |||\beta^{\langle -1\rangle}|||$; soit $r > 0$ tel que $r < \mathrm{Min}\left(\dfrac{s}{2\,BC}, r_1\right)$, et soit $U = \{x \in E \mid \|x\| < r\}$.

a) *Montrons d'abord l'existence de* φ *vérifiant les conditions de* (I).

Soit $x \in U$; posons $\rho = \|x\|$, d'où $\rho < r$.

• Vérifions qu'il est possible de définir par récurrence une suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de V par : $y_0 = 0_F$ et $(\forall k)$ $y_{k+1} = g(x, y_k)$. En effet, supposons défini y_k avec $\|y_k\| \leqslant 2\,BC\rho$. On voit déjà que y_{k+1} e inégalités d'accroissements finis, on a : $\|g(x, 0_F) - g(0_E, 0_F)\| \leqslant \|x\| \sup_{z \in U \times V} \||\beta^{\langle -1 \rangle} \circ (\mathrm{d}_z f)\|| \leqslant \rho B \sup_{z \in U \times V} \||\mathrm{d}_z f\|| \leqslant \rho BC$, et :

$$\|g(x, y_k) - g(x, 0_F)\| \leqslant \|y_k\| \sup_{y \in V} \||(\mathrm{d}_{(x,y)} g)|_F\|| \leqslant 2\, BC\rho \times \frac{1}{2} = BC\rho\ ,$$

d'où par addition :

$$\|y_{k+1}\| = \|g(x, y_k) - g(0_E, 0_F)\| \leqslant BC\rho + BC\rho = 2\, BC\rho\ ,$$

ce qui poursuit la récurrence.

• Montrons ensuite que (y_k) est une suite convergente dans F. En effet, toujours par inégalité d'accroissements finis, $(\forall k \geqslant 1)$ $\|y_{k+1} - y_k\| = \|g(x, y_k) - g(x, y_{k-1})\| \leqslant \|y_k - y_{k-1}\| \sup_{y \in V} \||(\mathrm{d}_{(x,y)} g)|_F\|| \leqslant \frac{1}{2} \|y_{k-1} - y_k\|$, d'où $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \frac{1}{2^k} \|y_1 - y_0\|$. Donc la série $\sum (y_{k+1} - y_k)$ est absolument convergente, donc convergente dans F, d'où : la suite (y_k) converge vers y dans F. Puisque $(\forall k)$ $\|y_k\| \leqslant 2\, BC\rho$, on a : $\|y\| \leqslant 2\, BC\rho$, d'où en particulier : $y \in V$. Nous poserons $y = \varphi(x)$. On a ainsi défini $\varphi : U \longrightarrow V$.

• Si $x = 0_E$, par construction $(\forall k)$ $y_k = 0_F$, d'où $\varphi(0_E) = 0_F$. On a vu que $\|\varphi(x)\| \leqslant 2\, BC \|x\|$ pour $x \in U$, d'où la continuité de φ en 0_E. Par continuité de g sur Ω, de $(\forall k)$ $y_{k+1} = g(x, y_k)$, on déduit, si $x \in U : \varphi(x) = g(x, \varphi(x))$, d'où $f(x, \varphi(x)) = 0_G$. Fixant $x \in U$, soit $z \in V$ tel que $f(x, z) = 0$, *i.e.* $z = g(x, z)$. Par accroissements finis, il s'ensuit :

$$\|\varphi(x) - z\| = \|g(x, \varphi(x)) - g(x, z)\| \leqslant \frac{1}{2} \|\varphi(x) - z\|\ ,$$

d'où $\|\varphi(x) - z\| = 0$, *i.e.* $z = \varphi(x)$.

Finalement, $\Gamma_\varphi = (U \times V) \cap f^{-1}(0_G)$.

• Montrons enfin que $\mathrm{d}_{0_E}\varphi$ existe et vaut $-\beta^{\langle -1 \rangle} \circ \alpha$. Pour cela, soit ε réel > 0. Choisissons η réel > 0 tel que $\eta < \mathrm{Min}\,(r, s)$ et que $(x, y) \in E \times F$ et $\|(x, y)\| \leqslant \eta$ entraîne

$$\|f(x, y) - f(0) - (\mathrm{d}_0 f) \cdot x - (\mathrm{d}_0 f) \cdot y\| \leqslant \varepsilon(\|x\| + \|y\|)\,.$$

Alors si $x \in U$ et si $\|x\| \leqslant \mathrm{Min}\left(\eta, \frac{\eta}{2\, BC}\right)$, on en déduit :

$$\|f(x, \varphi(x)) - (\mathrm{d}_0 f) \cdot x - (\mathrm{d}_0 f) \cdot \varphi(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(\|x\| + \|\varphi(x)\|) \leqslant \varepsilon(1 +$$

D'où en appliquant $\beta^{\langle -1\rangle}$ et en tenant compte de $f(x, \varphi(x)) = 0_G$:

$$\|\varphi(x) + \beta^{\langle -1\rangle} \circ ((\mathrm{d}_0 f) \cdot x)\| \leqslant B(1 + 2BC)\, \varepsilon \|x\| \;,$$

ce qui prouve que $\mathrm{d}_0 f$ existe et vaut $-\beta^{\langle -1\rangle} \circ ((\mathrm{d}_0 f)|_E)$.

b) *Montrons maintenant l'unicité locale de* φ.

Soit $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$ une fonction définie sur le voisinage ouvert $\tilde{U}$ de 0_E, à valeurs dans le voisinage ouvert $\tilde{V}$ de 0_F, **continue en 0_E**, vérifiant $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \Omega$, $\tilde{\varphi}(0_E) = 0_F$ et $\Gamma_{\tilde{\varphi}} \subset (\tilde{U} \times \tilde{V}) \cap f^{-1}(0_G)$. Posons $T = \tilde{V} \cap V$: c'est un voisinage de 0_F. Par continuité de $\tilde{\varphi}$ en 0_E, on a donc un voisinage ouvert S de 0_E, contenu dans $\tilde{U} \cap U$, tel que $\tilde{\varphi}(S) \subset T$; soit $\psi = \tilde{\varphi}|_S$. On a : $\Gamma_\psi = \Gamma_{\tilde{\varphi}} \cap (S \times T) \subset (S \times T) \cap f^{-1}(0_G)$, et $\Gamma_\varphi = (U \times V) \cap f^{-1}(0_G)$, d'où : $\Gamma_\psi = \Gamma_\varphi \cap (S \times T)$, autrement dit : $\psi = \varphi|_S$. ■

PROPOSITION VI.1.1

> *Conservons les notations et hypothèses du théorème* VI.1.1, *et supposons de plus que f soit* **de classe $\mathscr{C}^1$** *sur Ω. Il existe alors un voisinage ouvert W de a, inclus dans U, sur lequel φ est différentiable, et $(\mathrm{d}_{(x,y)} f)|_F$ reste inversible, et tel que :*
>
> (2) $\quad (\forall x \in W) \quad \mathrm{d}_x \varphi = -\, [(\mathrm{d}_{(x,y)} f)|_F]^{\langle -1\rangle} \circ [(\mathrm{d}_{(x,y)} f)|_E]$.

Démonstration :

On se ramène encore au cas où $(a, b) = (0_E, 0_F)$. Puisque $\beta \in \mathrm{Isom}\,(F, G)$, par continuité de $(x, y) \mapsto (\mathrm{d}_{(x,y)} f)|_F$, pour

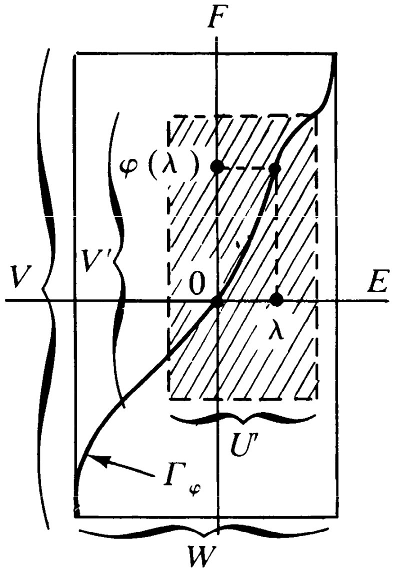


Fig. 1.

(x, y) assez voisin de 0, $(\mathrm{d}_{(x,y)}f)|_F$ reste inversible. Comme φ est continue et $\varphi(0_E) = 0_F$, en choisissant un voisinage ouvert W convenable, inclus dans U, de 0_E, $(\mathrm{d}_{(x,\varphi(x))}f)|_F$ reste inversible pour tout $x \in W$.

Fixons $\lambda \in W$. Le théorème VI.1.1 s'applique au point $(\lambda, \varphi(\lambda))$ (cf. fig. 1). On en déduit un voisinage ouvert U' de λ et un voisinage ouvert V' de $\varphi(\lambda)$, et une fonction $\psi : U' \longrightarrow V'$ continue en λ tels que $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)$, que $U' \times V' \subset \Omega$ et $\Gamma_\psi = (U' \times V') \cap f^{-1}(0_G)$. On peut supposer $U' \subset U$ et $V' \subset V$ (car ψ est continue au point λ). Alors :

$$(U' \times V') \cap f^{-1}(0_G) = [(U \times V) \cap f^{-1}(0_G)] \cap (U' \times V') = \\ = \Gamma_\varphi \cap (U' \times V'),$$

donc $\psi = \varphi|_{U'}$. Comme ψ est différentiable au point λ, cela prouve que $\mathrm{d}_\lambda \varphi$ existe, et (2) résulte de (1) appliquée à ψ. ■

Expression de (1) dans des bases

Avec les notations du théorème VI.1.1, soit en plus $m = \dim(E)$, $n = \dim(F) = \dim(G)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ des bases de E, F, G. Désignons par $(x_1, \ldots, x_m)$ les coordonnées génériques dans $\mathscr{B}$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ celles dans F. Soit $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées de f dans $\mathscr{D}$. Alors, les matrices respectives de $(\mathrm{d}_c f)|_F$, $\mathrm{d}_a \varphi$ et $(\mathrm{d}_c f)|_E$ dans les couples de bases $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$ et $(\mathscr{B}, \mathscr{D})$ sont $\left[\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}(a, b)\right]_{(k,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, $\left[\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)\right]_{(j,i) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$, et $\left[\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}(a, b)\right]_{(k,i) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]}$. L'hypothèse : β *inversible* se traduit par

(3)
$$\boxed{\det\left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(a, b)\right]_{(k,j) \in [\![1,n]\!]^2} \neq 0}\,.$$

Et la relation (1) équivaut à :

(4)
$$\boxed{\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)\right] = -\left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(a, b)\right]^{-1} \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a, b)\right]}\,.$$

La relation (2) de la proposition VI.1.1 donne : $(\forall x \in W)$

(5)
$$\boxed{\left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right] = -\left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, \varphi(x))\right]^{-1} \times \left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x, \varphi(x))\right]}$$

qui s'écrit plus simplement :

$$(6) \qquad \boxed{\left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, \varphi(x))\right] \times \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right] = -\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x, \varphi(x))\right]}$$

ou, sous forme encore plus explicite : $(\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i \in [\![1, m]\!])$

$$(7) \qquad \boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, \varphi(x)) \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}\ .$$

Si l'on fixe i, les relations (7) écrites pour $k \in [\![1, n]\!]$ constituent un *système de Cramer en les quantités* $\left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, dont le déterminant principal est précisément $\det\left[\dfrac{\partial f_k}{\partial y_j}(x, \varphi(x))\right]$ qui est, d'après le choix de W, partout $\neq 0$.

La résolution de ces systèmes de Cramer pour $i = 1, 2, \ldots, m$ équivaut exactement à la relation matricielle (5).

Remarque 1 : En appliquant la *règle de la chaîne* au calcul du premier membre de la relation $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f_k(x, \varphi(x))) = 0$, on retrouve systématiquement les systèmes de Cramer ci-dessus, qui n'ont donc pas à être retenus par cœur.

Remarque 2 : Les relations (5) constituent un *système d'équations aux dérivées partielles* vérifiées par φ.

THÉORÈME VI.1.2

Avec les notations et hypothèses du théorème VI.1.1, *si on suppose de plus f* **de classe $\mathscr{C}^p$** $(p \geqslant 1)$, *W étant choisi comme dans la proposition* VI.1.1, *alors la fonction φ définie implicitement sur W par $f(x, y) = 0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur W. Donc si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, φ l'est aussi.*

Démonstration :

Après avoir choisi des bases $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ sur E, F, G, reprenons les notations des relations (3) à (7). Montrons par récurrence sur q que φ est de classe $\mathscr{C}^q$ sur W pour $q \leqslant p$. C'est vrai pour $q = 0$ car φ est différentiable, donc continue, sur W. Supposons $q \leqslant p - 1$ et φ de classe $\mathscr{C}^q$. Les théorèmes du § V.4 montrent alors que le secor

(5) est fonction de classe $\mathscr{C}^q$ de x sur W, donc les $\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^q$ sur W. Par *transitivité*, φ est de classe $\mathscr{C}^{q+1}$ sur W. ■

Calcul sur les fonctions implicites

Exemple 1 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe $\mathscr{C}^2$. Ecrire la condition suffisante pour que localement, autour de $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, la relation $f(x, y, z) = 0$ définisse $z = \varphi(x, y)$ comme fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et calculer alors les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.*

Solution : D'après le théorème VI.1.1 et la proposition VI.1.1, la condition suffisante demandée s'écrit ici :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0}\,.$$

Choisissons alors W voisinage ouvert de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, et l'intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ centré en z_0, tels que $W \times I \subset \Omega$ et que $f^{-1}(0) \cap (W \times I)$ soit le graphe Γ_φ d'une fonction $\varphi : W \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ [en pratique, on abrège en disant simplement que φ *est définie implicitement* par $f(x, y, z) = 0$ « autour de (x_0, y_0, z_0) »]. La règle de la chaîne donne :

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

notations *abrégées* pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))$, etc., ce qu'il ne faut pas perdre de vue lorsqu'on réitère les dérivations !

De (8) on tire $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\,; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

En appliquant de nouveau la règle de la chaîne, on en déduit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\right] + \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

soit en tenant compte de $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, et de (9) :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} \times \frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\times\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial z},$$

d'où :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right],$$

étant entendu que *toutes les fonctions sont calculées en le triplet* $(x, y, \varphi(x, y))$. On trouve de même :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\left[-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\,\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right],$$

et

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^3}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right].$$

Exemple 2 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^4$ et f et $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y,u,v)\mapsto f(x,y,u,v)$, $(x,y,u,v)\mapsto g(x,y,u,v)$ de classe $\mathscr{C}^2$. Ecrire la condition suffisante pour qu'autour de (x_0,y_0,u_0,v_0) tel que $f(x_0,y_0,u_0,v_0)=g(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ les relations $f=g=0$ définissent implicitement $(u,v)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ de classe $\mathscr{C}^2$. Entamer alors le calcul de $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ en fonction de f, g, φ et ψ.*

Solution : En vertu des théorème VI.1.1, VI.1.2 et de la proposition VI.1.1, la condition suffisante demandée est ici :

$$\boxed{J(x_0,y_0,u_0,v_0)\neq 0}\;,\quad \text{où}\quad J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

La supposant remplie, les dérivées premières de φ et ψ s'obtiennent en résolvant les systèmes (7) :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-\dfrac{\partial g}{\partial y}\end{cases}$$

qui donnent :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{A_\varphi}{J}\,;\quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{A_\psi}{J}\,;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{B_\varphi}{J}\,;\quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{B_\psi}{J}\,,\quad \text{où :}$$

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \end{vmatrix}\,;\quad A_\psi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \end{vmatrix}\,;\quad B_\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}\,;\quad B_\psi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \end{vmatrix}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{A_\psi}{J}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{A_\psi}{J}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial u} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{A_\psi}{J}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\frac{A_\psi}{J}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial u}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v}\frac{A_\psi}{J}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial u}\frac{A_\varphi}{J} + \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v}\frac{A_\psi}{J}\,,
\end{aligned}$$

d'où aisément :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(J) = {}& \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial u} +\\
&+ \frac{1}{J}\left[A_\varphi\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(A_\psi\frac{\partial g}{\partial v} - A_\varphi\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} - A_\psi\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right.\\
&\left. - A_\varphi\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \left(A_\varphi\frac{\partial f}{\partial u} - A_\psi\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v} + A_\psi\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right],
\end{aligned}$$

étant entendu que *toutes les fonctions sont calculées au point* $(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y))$. On obtient de même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(A_\varphi) = {}& \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} +\\
&+ \frac{1}{J}\left[\frac{\partial g}{\partial x}A_\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial g}{\partial x}A_\psi\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial v}A_\varphi\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial u}\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v} A_\psi \frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial v} - \frac{\partial f}{\partial x} A_\varphi \frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial f}{\partial x} A_\psi \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$- \frac{\partial g}{\partial v} A_\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} A_\psi \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial v} \Big].$$

Il suffit de reporter dans $\dfrac{-\dfrac{\partial J}{\partial x}}{J^2} A_\varphi + \dfrac{\dfrac{\partial}{\partial x}(A_\varphi)}{J}$ pour obtenir $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$.

Exemple 3 : (Laplacien en coordonnées polaires) : *Soit* $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ *l'application qui définit le passage en coordonnées polaires planes. On donne un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, *et une fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^2$. *On pose* $g = f \circ P$ *et* $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. *Exprimer* $(\Delta f) \circ P$ *en fonction de* g *et des dérivées d'ordre* $\leqslant 2$ *de* g.

Solution : Comme P est de classe $\mathscr{C}^\infty$, g est bien de classe $\mathscr{C}^2$: elle est définie sur l'ouvert $U = P^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$, qui est d'ailleurs contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. La règle de la chaîne donne :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \,; \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = r\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}, \end{cases}$$

d'où en multipliant la première équation par r :

$$(10) \qquad r\frac{\partial g}{\partial r} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les relations (10) sont *abrégées ;* leur lecture correcte est la suivante : si on note Φ et $\Psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions $(x, y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $(x, y) \mapsto -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$, alors :

$$(11) \qquad r\frac{\partial g}{\partial r} = \Phi \circ P \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \Psi \circ P.$$

Cela dit, on peut *réappliquer* (9) avec Φ, puis Ψ, à la place de f, ce qui donne *sans nouveau calcul,* en tenant compte de (11) :

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = \left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\circ P\,; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)\circ P.$$

Or,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y\,\frac{\partial^2 f}{}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} - y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\ ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\,\frac{\partial f}{\partial x} - y\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + x\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,$$

d'où :

$$x\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,$$

$$-\,y\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\,y\,\frac{\partial f}{\partial y} - x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\,xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,,$$

d'où par addition :

$$x\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y\,\frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\,\frac{\partial \Psi}{\partial y} = (x^2 + y^2)\,\Delta f\,,$$

et finalement :

$$(\Delta f)\circ P = \frac{1}{r^2}\left[r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right] = \boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}}\,.$$

Exercice 1 : Soit $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On considère deux ouverts non vides U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que $P\,|_U$ soit un $\mathscr{C}^\infty$- difféomorphisme de U et V, c'est-à-dire (cf. § VI.2) que $P\,|_U$ soit bijective de U sur V et que la bijection réciproque $Q : V \longrightarrow U$ soit de classe $\mathscr{C}^\infty$.

a) Montrer, en explicitant Q, qu'il suffit que $P\,|_U$ soit bijective de U sur V et que $U \subset \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

b) S'il en est ainsi, on donne $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et on pose $g = f \circ (P\,|_U)$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \circ P$ en fonction des dérivées partielles d'ordre $\leqslant 2$ de g en (r, θ). Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ en fonction de (x, y) et des dérivées partielles d'ordre $\leqslant 2$ de f par rapport à (x, y) composées avec P.

c) Pour $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $g = f \circ (P\,|_U)$ retrouver la formule du laplacien $(\Delta f) \circ (P\,|_U)$ encadrée ci-dessus.

Exercice 2 : Utiliser le résultat de l'exemple 3 pour trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tels que $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 3 : Soit f et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$. On définit $z = \Phi(x, y)$ implicitement par les relations : $z = tx + yf(t) + g(t)$; $x + yf'(t) + g'(t) = 0$.

a) Expliquer dans quelles conditions la définition de Φ comme fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est possible.

b) Supposant les conditions du *a*) satisfaites, prouver que $\left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$.

Explication géométrique ?

Exercice 4 : Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ telle que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $F(t)$ admet n valeurs propres réelles distinctes. Montrer qu'il existe des fonctions continues $V_1, \ldots, V_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $(V_1(t), \ldots, V_n(t))$ est une base de vecteurs propres de $F(t)$. Peut-on trouver de telles fonctions (V_i) de classe $\mathscr{C}^k$?

Exercice 5 (Réversion de Lagrange, preuve différentielle) :

a) Soit Φ et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que la relation $y=t+x\Phi(y)$ définit implicitement une fonction $\xi:(x,t)\mapsto y=\xi(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Posant alors $u=f\circ\xi$, montrer :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[(\Phi\circ\xi)^n\frac{\partial u}{\partial t}\right].$$

b) En déduire

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t)=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left[(\Phi(t))^n f'(t)\right]. \tag{1}$$

c) Soit $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $g(0)=0$ et $g'(0)\neq 0$. Expliquer pourquoi la fonction $\Psi:0\mapsto\dfrac{1}{g'(0)}$, $z\mapsto\dfrac{z}{g(z)}$ si $z\neq 0$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Soit $g^{\langle -1\rangle}$ une réciproque locale de classe $\mathscr{C}^\infty$ de g autour de 0. En prenant $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $\Phi=\Psi$ dans (1), montrer :

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}g^{\langle -1\rangle}\right]_{x=0}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left[(\Psi(t))^n\right]_{t=0}.$$

Plus généralement, prouver avec f quelconque

$$\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f\circ g^{\langle -1\rangle})\right]_{x=0}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left[(\Psi(t))^n f'(t)\right]_{t=0}.$$

Exercice 6 : Soit a, b, c des réels >0 tels que $a+b+c\neq 1$.

a) Montrer que pour $p\in\mathbb{N}$, $p>2$, le polynôme $f_p(x)=x^p-ax^2-bx-c$ possède une unique racine, notée x_p, dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que x_p possède des $\mathrm{DL}_k(0)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ par rapport à $\dfrac{1}{p}$, et expliciter ce $\mathrm{DL}_k(0)$ pour $k=3$.

Exercice 7 : Soit les relations $u=x+y^2$, $v=y+z^2$, $w=z+x^2$ (x, y, z, u, v, w réels).

a) Donner une condition suffisante pour que ces relations définissent localement x, y, z comme fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de u, v, w.

b) Cette condition étant supposée remplie, exprimer $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$.

Exercice 8 : Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x^2}{x+1}$. Pour chaque $b\in\mathbb{N}^*$ vérifier que l'équation $f(x)=\operatorname{tg}x$ possède une unique racine, noté x_n, dans $\left]n\pi-\dfrac{\pi}{n},n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer qu'il y a une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle que $x_n=\varphi\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour n assez grand. Calculer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de x_n par rapport à $\dfrac{1}{n}$.

Exercice 9 : Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto f(x,y)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, telle que

$$f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0\,,\qquad\text{mais}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)\neq 0\,.$$

Démontrer qu'il existe α réel >0 et $\varphi:\,]-\alpha,\alpha[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ tels que $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$ et $(\forall x\in\,]-\alpha,\alpha[)\ f(x,\varphi(x))=0$.

§ VI.2 *DIFFÉOMORPHISMES. INVERSION LOCALE*

DÉFINITION VI.2.1

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev, *U un ouvert de E, et V un ouvert de F. Pour* $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, *On appelle* **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** *de U sur V toute* **bijection** $f : U \longrightarrow V$ *telle que f et* $f^{\langle -1 \rangle}$ *soient* **toutes deux de classe $\mathscr{C}^k$.** *Les ouverts U et V sont dits* **$\mathscr{C}^k$-difféomorphes** *ssi il existe un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme de U sur V.*

Toute *restriction* d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme à un sous-ouvert U_1 de U est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U_1 sur $f(U_1)$.

Si $f : U \longrightarrow V$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, $f^{\langle -1 \rangle} : V \longrightarrow U$ en est aussi un. Un exemple évident de $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme est l'application $\mathrm{Id}_U : U \longrightarrow U$ pour tout ouvert U de E.

Si G est un troisième $\mathbb{R}$-ev et W un ouvert de G, la composée $g \circ f$ des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow W$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur W. En conséquence, la relation (entre ouverts de $\mathbb{R}$-ev) « les ouverts U et V sont $\mathscr{C}^k$-difféomorphes » est *réflexive, symétrique* et *transitive.* En particulier sur l'ensemble des ouverts d'un $\mathbb{R}$-ev fixé E, c'est une **relation d'équivalence.**

Un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $f : U \longrightarrow V$ est *a fortiori* un homéomorphisme, mais la réciproque est fausse (cf. remarque 2 ci-après).

PROPOSITION VI.2.1

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev, *U et V deux ouverts non vides respectivement de E et F. S'il existe k* $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *tel que U et V soient* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphes, alors* $\dim(E) = \dim(F)$. *Plus précisément, pour tout difféomorphisme* $f : U \longrightarrow V$, $(\forall a \in U)$ $\mathrm{d}_a f$ *est un* **isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev** *entre E et F.*

Démonstration :

Soit $f : U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et $a \in U$. Posons $b = f(a)$ et $g = f^{\langle -1 \rangle}$. Alors, des relations $g \circ f = \mathrm{Id}_U$; $f \circ g = \mathrm{Id}_V$, et du théorème des fonctions composées, on déduit : $(\mathrm{d}_b g) \circ (\mathrm{d}_a f) = \mathrm{d}_a \mathrm{Id}_U = \mathrm{Id}_E$, et de même $(\mathrm{d}_a f) \circ (\mathrm{d}_b g) = \mathrm{d}_b \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_F$. Donc $\mathrm{d}_a f$ et $\mathrm{d}_b g$ sont des applications linéaires réciproques l'une de l'autre et bijectives entre E et F, d'où $\dim(E) = \dim(F)$. ■

PROPOSITION VI.2.2

> *Soit E, F, U, V comme dans la proposition* VI.2.1. *Si* $f : U \longrightarrow V$ *de classe* $\mathscr{C}^k$, *bijective est telle que* $\boldsymbol{g = f^{\langle -1 \rangle}}$ **soit différentiable,** *alors f est un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme.*

Démonstration :

Le raisonnement précédent montre déjà que $\dim(E) = \dim(F)$ et que $(\forall y \in V)\ \mathrm{d}_y g = [\mathrm{d}_{g(y)} f]^{\langle -1 \rangle}$. Il reste à établir que g est de classe $\mathscr{C}^k$. Or g est de classe $\mathscr{C}^0$, car différentiable par hypothèse. Supposons que g soit de classe $\mathscr{C}^p$ avec $0 \leqslant p < k$. En notant I l'application : $\mathrm{Isom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Isom}(E, F)$, $u \mapsto u^{\langle -1 \rangle}$, ce qui précède peut s'écrire : $\mathrm{d}g = I \circ (\mathrm{d}f) \circ g$. On a vu au § VI.1 que I est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car rationnelle). Comme $p < k$, l'application $\mathrm{d}f$ est de classe $\mathscr{C}^p$ (car en prenant une base $\mathscr{B}$ de E, cela revient à dire que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ sont de classe $\mathscr{C}^p$ sur U). Par le théorème V.4.1 sur la composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$, on en déduit que $\mathrm{d}g$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur V (ce qui signifie en prenant une base de F que $\dfrac{\partial g}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial g}{\partial y_n}$ sont de classe $\mathscr{C}^p$ sur V). Mais alors il en résulte que g est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur V (par transitivité). En conclusion g est de classe $\mathscr{C}^k$. ∎

Remarque 1 : Dans le cas où $f : U \longrightarrow V$ est bijective, et où f et $g = f^{\langle -1 \rangle}$ sont *différentiables,* on dit que f est un **difféomorphisme** de U sur V, et on définit aisément deux ouverts difféomorphes, mais cette notion n'offre qu'un médiocre intérêt, les seuls difféomorphismes conduisant à des résultats substantiels devant être au minimum des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes.

Remarque 2 : Attention ! Le fait pour $f : U \longrightarrow V$ d'être de classe $\mathscr{C}^k$ et bijective ne suffit pas à en faire un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Il suffit de penser à la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^3$ qui est bijective et de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors que la fonction réciproque n'est pas dérivable en 0, pour éviter cette illusion. On notera au passage que, dans cet exemple, f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas un difféomorphisme.

THÉORÈME VI.2.1 (« d'inversion locale »)

> *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-ev* **de même dimension** $n \geqslant 1$, *Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. On suppose qu'au point $a \in \Omega$, la différentielle $\mathrm{d}_a f$ est un* **isomorphisme** *de E sur F. Alors il existe un voisinage ouvert U de a $(U \subset \Omega)$, et un voisinage ouvert V de $b = f(a)$ tels que $f|_U : U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.*

Démonstration :

Soit $\Phi : \Omega \times F \longrightarrow F$, $(x, y) \mapsto f(x) - y$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'ouvert $\Omega \times F$ qui vérifie $\Phi(a, b) = 0_F$, et : $(\mathrm{d}_{(a,b)} \Phi)|_E = \mathrm{d}_a f \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Appliquons les théorèmes VI.1.1, VI.1.2 et la proposition VI.1.1 (en prenant garde au changement de notations !). On en déduit un voisinage ouvert U_0 de a dans E, un voisinage ouvert V de b dans F, avec $U_0 \subset \Omega$, et une fonction

$y \mapsto \varphi_0(y)$ *de classe* $\mathscr{C}^k$, telle que $\varphi_0(b) = a$ et dont le graphe est $\{(y, x) \in V \times U_0 | f(x) = y\}$. En particulier, $f \circ \varphi_0 = \mathrm{Id}_V$. L'ensemble $U = U_0 \cap f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de a. Soit $f_U = f|_U$. La fonction f_U est de classe $\mathscr{C}^k$. Si $x \in U$, alors $f_U(x) \in V$ et $\varphi_0(f_U(x)) = x$; si $y \in V$, $x = \varphi_0(y) \in U_0$ et $f(x) = y$, d'où en fait $x \in U$, et $f_U(\varphi_0(y)) = y$. Ainsi, $f_U \circ \varphi_0 = \mathrm{Id}_V$ et $\varphi_0 \circ f_U = \mathrm{Id}_U$, ce qui prouve que f_U et φ_0 sont deux $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes réciproques l'un de l'autre. ■

Remarque 3 : Dans ce qui précède, on notera que **($\forall x \in U$)**, $\mathrm{d}_x f$ est un **isomorphisme** de $\mathbb{R}$-ev entre E et F (cf. proposition VI.2.1), et pas seulement $\mathrm{d}_a f$.

COROLLAIRE 1

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev ***de même dimension,*** *U un ouvert de E, et* $f : U \longrightarrow F$ *une application de classe* $\mathscr{C}^1$ *telle que* $(\forall x \in U)$ $\mathrm{d}_x f \in \mathrm{Isom}\,(E, F)$. *Alors* $f(U)$ *est un ouvert de F. En conséquence, f est une* **application ouverte.** *(i.e. transforme tout ouvert de U en un ouvert de F).*

Démonstration :

Soit $y \in f(U)$. Choisissons $x \in U$ tel que $y = f(x)$. Appliquant le théorème VI.2.1 au point x, on voit que $f(U)$ contient un voisinage de y. Finalement, $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert dans F. Soit alors ω un ouvert de E inclus dans U : d'après ce qui précède (avec ω à la place de U), $f(\omega)$ est ouvert dans F. ■

COROLLAIRE 2

> *Soit E et F deux* $\mathbb{R}$-ev ***de même dimension,*** *U un ouvert de E, et* $f : U \longrightarrow F$ *une application* ***injective,*** *de classe* $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ *et telle que* $(\forall x \in U)$ $\mathrm{d}_x f \in \mathrm{Isom}\,(E, F)$. *Alors* $V = f(U)$ *est ouvert dans F, et* $f|^V : U \longrightarrow V$ *est un* $\mathscr{C}^k$*-difféomorphisme.*

Démonstration :

On vient de voir que V est un ouvert de F. Soit g la bijection réciproque de $f|^V$. Soit $y \in V$; posons $x = g(y)$: appliquant le théorème VI.2.1 au point x, on a des voisinages ouverts S de x, et T de y, tels que $S \subset U$, $T \subset V$, et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : T \longrightarrow S$ tel que $\varphi(y) = x$ dont le graphe est $\{(t, s) \in T \times S | t = f(s)\}$. D'après l'injectivité de f, ce graphe est nécessairement celui de $g|_T$, d'où $\varphi = g|_T$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^k$ sur T. Finalement, g est de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de chaque point de V, donc est de classe $\mathscr{C}^k$ sur V, et cela entraîne que $f|^V$ est bien un $\mathscr{C}^k$-difféomorphism

Immersions, submersions

Ci-après, nous considérons deux $\mathbb{R}$-ev E et F, de dimensions respectives $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, un ouvert U de E, et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, avec $U \neq \varnothing$.

DÉFINITION VI.2.2

On dit que f est **régulière au point $a \in U$** *ssi le rang de $\mathrm{d}_a f$ est égal à* Min (n, p), *c'est-à-dire est maximum. Sinon, on dit que a est* **point critique** *de f et que $f(a)$ est* **valeur critique** *de f.*

Cette terminologie s'accorde bien avec celle introduite au § V.7 pour les fonctions numériques.

Le théorème VI.2.1 et ses corollaires permettent de préciser la structure de f au voisinage d'un point *régulier* a dans le cas où $n = p$. Proposons-nous de reprendre cette question quand $n \neq p$.

PROPOSITION VI.2.3

L'ensemble des $a \in U$ **réguliers** *pour f est* **ouvert.**

Démonstration :

Choisissons des bases $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ dans E et $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_p)$ dans F et notons $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_p)$ les coordonnées. Si $a \in U$ est régulier pour f, c'est que la matrice $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]_{(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]}$ est de rang $r = \mathrm{Min}\,(n, p)$. Soit $J \subset [\![1, p]\!]$ et $I \subset [\![1, n]\!]$ des parties de cardinal r telles que le (J, I)-mineur de $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right]$ soit $\neq 0$. Pour $x \in U$, soit $\Delta(x) = \det\,(M_{J,I}(x))$, où $M_{J,I}(x)$ est la sous-matrice de $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right]$ telle que $j \in J$ et $i \in I$. La fonction Δ est continue sur U, et $\Delta(a) \neq 0$. Il existe donc un voisinage ouvert ω de a, inclus dans U, tel que $\Delta(x) \neq 0$ pour $x \in \omega$. Alors $(\forall x \in \omega)$, $M(x)$ est de rang r, donc $\mathrm{rg}\,(\mathrm{d}_x f) = r$, ce qui prouve que x est régulier pour f. ■

Soit $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) un $\mathbb{R}$-ev de dimension n (resp. p), $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{V}$ un ouvert de $\mathscr{F}$) qui soit $\mathscr{C}^k$-difféomorphe à U (resp. à V), et $\varphi : \mathscr{U} \longrightarrow U$, $\psi : V \longrightarrow \mathscr{V}$ des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Posons $\alpha = \varphi^{\langle -1 \rangle}(a)$ et $\beta = \psi(b)$. Comme $\mathrm{d}_\alpha \varphi$ et $\mathrm{d}_b \psi$ sont des isomorphismes de $\mathbb{R}$-ev, respectivement entre $\mathscr{E}$ et E, et entre F et $\mathscr{F}$, les relations $\mathrm{d}_\alpha(f \circ \varphi) = (\mathrm{d}_a f) \circ (\mathrm{d}_\alpha \varphi)$ et $\mathrm{d}_a(\psi \circ f) = (\mathrm{d}_b \psi) \circ (\mathrm{d}_a f)$ montrent que : *α est régulier pour $f \circ \varphi$ ssi a est régulier pour f,* et : *a est régulier pour f ssi a est régulier pour $\psi \circ f$.*

DÉFINITION VI.2.3

Supposons $p > n$. On dit que f est une **$\mathscr{C}^k$-immersion** *ssi f est* **injective** *et si tout point de U est* **régulier pour f.**

Avec les notations et hypothèses qui précèdent cette définition, on voit que, pour que f soit une immersion, il faut et il suffit que $f \circ \varphi$ (resp. $\psi \circ$

Exemple 1 : Soit U' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui soit $\mathscr{C}^k$-difféomorphe à U ; pour tout $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $g : U \longrightarrow U'$, l'application $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x \longrightarrow (g(x), 0)$ est une $\mathscr{C}^k$-immersion.

Théorème VI.2.2

Supposons $p > n$ et f régulière en $a \in U$. Alors il existe un voisinage ouvert $A \subset U$ de a dans E, un voisinage ouvert B de $b = f(a)$ dans F, et des voisinages ouverts S et T de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{p-n}$ pour lesquels on a un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\psi : \Omega \longrightarrow S \times T$ qui envoie $f(A)$ sur $S \times \{0\}$. En particulier, $f|_A$ est une immersion.

La figure 1 ci-dessous illustre ce théorème.

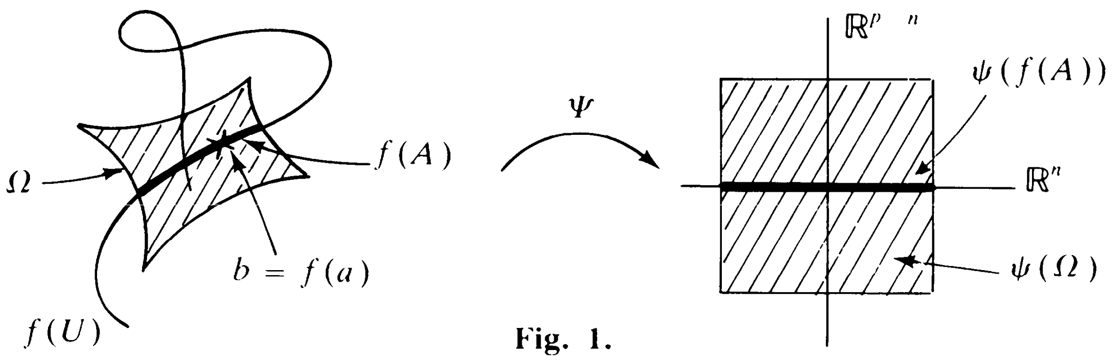


Fig. 1.

Démonstration :

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a = 0_E$ et $b = 0_F$. Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E (resp. $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_p)$ une base de F) où l'on note $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (resp. $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$) les coordonnées. Soit enfin $f_1, \ldots, f_p$ les coordonnées de f dans $\mathscr{C}$. Par hypothèse, la matrice $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right]$ est de rang n. Quitte à renuméroter les $\vec{\varepsilon}_j$, on peut supposer que son $(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, n \rrbracket)$-mineur est $\neq 0$. Utilisant le théorème VI.2.1, choisissons un voisinage ouvert $A \subset U$ de 0_E dans E et un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que l'application $g : A \longrightarrow S$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Notons $h = g^{\langle -1 \rangle}$. Pour $t = (t_1, \ldots, t_p) \in S \times \mathbb{R}^{p-n}$, posons :

$$\Phi(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\, \vec{\varepsilon}_i\right) + (f_{n+1} \circ g(t_1, \ldots, t_n) + t_{n+1})\, \vec{\varepsilon}_{n+1} + \cdots + \\ + (f_p \circ g(t_1, \ldots, t_n) + t_p)\, \vec{\varepsilon}_p \in F\,.$$

L'application Φ est de classe $\mathscr{C}^k$ et injective sur l'ouvert $S \times \mathbb{R}^{p-n}$ de $\mathbb{R}^p$; soit $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$ ses coordonnées dans $\mathscr{C}$. On a : $(\forall t \in S \times \mathbb{R}^{p-n})$

$$\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t)\right] = \begin{array}{c} n\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \\ 0\end{array}}\right. \\ p-n\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \\ 0\end{array}}\right. \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \times & \cdots & \times \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \times & \cdots & \times \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

les croix désignant des termes inutiles à expliciter. Donc Φ est partout régulière sur $S \times \mathbb{R}^{p-n}$. D'après le corollaire 2 du théorème VI.2.1, Φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $S \times \mathbb{R}^{p-n}$ sur un ouvert B de F, et B est évidemment un voisinage de 0_F. Comme Φ envoie $S \times \{0\}$ sur $f(A)$, le difféomorphisme réciproque ψ de Φ envoie $f(A)$ sur $S \times \{0\}$.

Enfin, $\psi \circ (f|_A)$ est une immersion (cf. exemple 1), donc $f|_A$ aussi. ■

DÉFINITION VI.2.4

*Supposons $p < n$. On dit que f est une **$\mathscr{C}^k$-submersion** (ou une submersion de classe $\mathscr{C}^k$) ssi f est **partout régulière** sur U.*

THÉORÈME VI.2.3

Supposons $p < n$ et f régulière en $a \in U$. Alors il existe un voisinage ouvert Ω de a dans U, un voisinage ouvert B de $b = f(a)$ dans F, inclus dans $f(U)$ et des voisinages ouverts S et T de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivement ; pour lesquels on a des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes $\psi : B \longrightarrow S$ et $\Psi : \Omega \longrightarrow S \times T$ tels que $(\forall y \in B)\ \Psi(f^{-1}(y) \cap \Omega) = \{\psi(y)\} \times T$, et tels que $f|_\Omega$ soit une submersion.

Ce théorème, illustré par la figure 2 ci-dessous, signifie qu'à $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme près, f se comporte, au voisinage de a, comme la projection naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

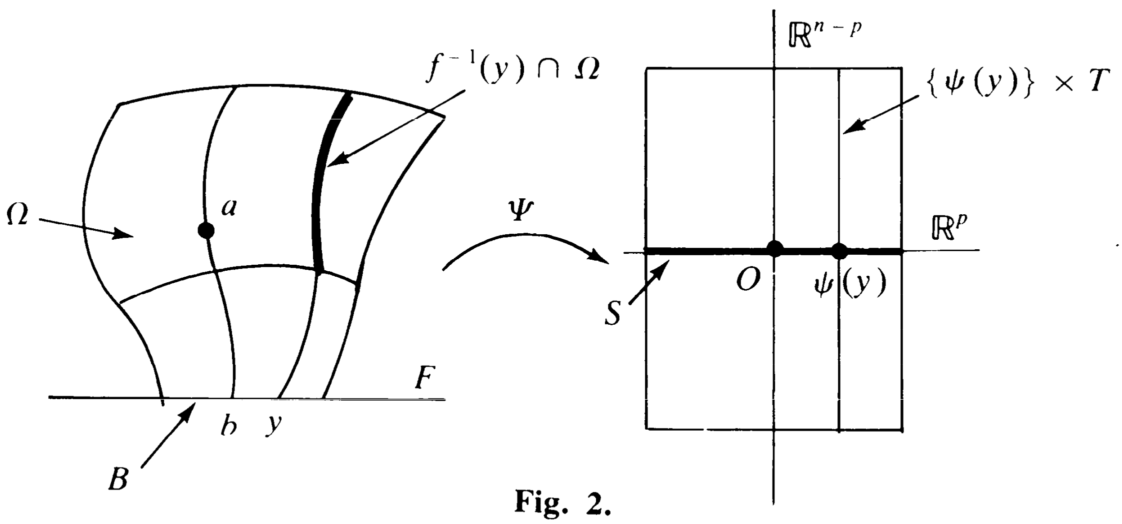


Fig. 2.

Démonstration :

Sans nuire à la généralité on peut supposer $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, $a = 0_{\mathbb{R}^n} = 0$, $b = 0_{\mathbb{R}^p} = 0$. Le point générique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) sera noté $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (resp. $y = (y_1, \ldots, y_p)$) et les coordonnées canoniques de f : $f_1, \ldots, f_p$. Par hypothèse, la matrice $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right]_{(j,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]}$ est de rang p. Quitte à renuméroter les (x_k), on peut supposer que son $([\![1,p]\!], [\![1,p]\!])$-mineur est $\neq 0$. En utilisant la continuité des $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, et quitte au bes

U, on peut supposer que $(\forall x \in U)$, $\Delta(x) = \det\left(\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right]_{(j,i)\in [\![1,p]\!]^2}\right) \neq 0$.
Soit $g : \mathbb{R}^p \times U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $(y_1, \dots, y_p ; x) \mapsto (g_i(y_1, \dots, y_p ; x))_{1 \leq i \leq p}$, où $(\forall j)$ $g_j(y_1, \dots, y_p ; x) = f_j(x) - y_j$. On a $g(0) = 0$; g est de classe $\mathscr{C}^k$, et $\det\left(\left[\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}(0, \dots, 0 ; 0)\right]_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq p}\right) \neq 0$. On peut donc appliquer à g la théorie des fonctions implicites du § VI.1. On obtient de la sorte un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{R}^p$, un voisinage ouvert T de 0 dans $\mathbb{R}^{n-p}$, un voisinage ouvert A de 0 dans $\mathbb{R}^p$, puis une application $h = (h_1, \dots, h_p) : S \times T \longrightarrow A$ de classe $\mathscr{C}^k$, tels que $h(0) = 0$, que $A \times T \subset U$, et que le graphe de h soit l'ensemble

$$\{(y_1, \dots, y_p ; x_{p+1}, \dots, x_n ; x_1, \dots, x_p) \in S \times T \times A \mid (\forall j \in [\![1,p]\!])\, y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)\} .$$

En particulier, si $(y_1, \dots, y_p) = y \in S$, l'ensemble $f^{-1}(y) \cap (A \times T)$ est égal à $\{h_1(y, x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, h_p(y, x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n\}_{(x_{p+1}, \dots, x_n) \in T}$. Cet ensemble est non vide, et par suite $S \subset f(U)$.

Définissons maintenant $\Phi : S \times T \longrightarrow A \times T$,

$$(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \mapsto (h_1(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, h_p(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n) :$$

c'est une application de classe $\mathscr{C}^k$; elle est injective car

(1) $$(\forall j \in [\![1,p]\!])\quad f_j(h_1, h_2, \dots, h_p, x_{p+1}, \dots, x_n) = y_j .$$

Notons $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$. La règle de la chaîne appliquée à (1) montre que (en désignant par $\delta_{j,l}$ le symbole de Kronecker) :

$$(\forall (j,l) \in [\![1,p]\!]^2)\quad \delta_{j,l} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \frac{\partial h_l}{\partial y_j},$$

étant entendu que les $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_l}$ sont prises en le point $(h_1, \dots, h_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$, et les $\dfrac{\partial h_l}{\partial y_j}$ en $(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$.

Cela prouve que $(\forall (y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n) \in S \times T)$, la matrice

$$\left[\frac{\partial h_l}{\partial y_j}(y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_n)\right]_{1 \leq l \leq p, 1 \leq j \leq p}$$

est inversible. Or, posant $t_1 = y_1, \dots, t_p = y_p$, $t_{p+1} = x_{p+1}, \dots, t_n = x_n$:

$$\left[\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t_\beta}(t)\right]_{(\alpha,\beta)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{array}{r} p\left\{\vphantom{\dfrac{\partial h_l}{\partial y_j}}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \left[\dfrac{\partial h_l}{\partial y_j}(y_1,\dots,y_p,x_{p+1},\dots,x_n)\right] & 0 \\ \hline \begin{matrix}\times & \cdots & \times\\ \vdots & & \vdots \\ \times & \cdots & \times\end{matrix} & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\end{array}\right]$$

les croix représentant des termes qu'il est inutile d'expliciter.

Donc $\left[\dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t_\beta}(t)\right]$ est partout inversible sur $S \times T$, autrement dit Φ est réguliere sur $S \times T$. Le corollaire 2 du théorème VI.2.1 montre alors que Φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $S \times T$ sur un ouvert $\Omega \subset A \times T$, Ω étant un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\Psi = \Phi^{\langle -1 \rangle}$: c'est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de Ω sur $S \times T$. Or, on a vu plus haut que si $y \in S$, $f^{-1}(y) \cap (A \times T) = \Phi(\{y\} \times T)$, d'où en fait $f^{-1}(y) \cap (A \times T) = f^{-1}(y) \cap \Omega = \Phi(\{y\} \times T)$. Il suffit de prendre $\psi = \mathrm{Id}_S$ pour que toutes les conditions de l'énoncé soient satisfaites, et on a d'ailleurs $f^{-1}(S) \cap (A \times T) = \Omega$.

Quant au fait que $f|_\Omega$ est une submersion, il provient de ce que $\Delta(x) \neq 0$ partout sur Ω. ■

COROLLAIRE

Supposons $p < n$. Si f est une $\mathscr{C}^k$-submersion, $f(U)$ est une ***partie ouverte*** *de F ; en conséquence f est une application ouverte.*

Démonstration :

En effet le théorème VI.2.3 montre que $f(U)$ est voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. La dernière assertion s'obtient en appliquant cette propriété à un sous-ouvert arbitraire ω de U. ■

Exercice 1 : *a*) Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2y} + e^{2x}, x - y)$. Montrer directement que $f(\mathbb{R}^3) = V$ est ouvert dans $\mathbb{R}^3$, et que $f|^V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

b) Même question avec $g_\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$(x, y, z) \mapsto (e^{x-y+2z} + e^{-x+y-2z}, e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-\lambda}, e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x})$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \left(x, xy - \dfrac{y^3}{3}\right)$.

a) Quels sont les points critiques de f?

b) Quelle est l'image par f de l'ensemble des points critiques de f?

c) En un point critique $\mu \in \mathbb{R}^2$ de f, déterminer Ker $(d_\mu f)$.

d) Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y^2\}$. Prouver que $f|_U$ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-ev des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients réels. Soit $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *dissociés en facteurs simples et normalisés* dans $\mathbb{R}[X]$. On pose $U_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n\}$. Vérifier que U_n est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et que $\mathscr{E}_n$ est ouvert dans $\{X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

Puis montrer que $\varphi : U_n \longrightarrow \mathscr{E}_n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

Exercice 4 (lemme de Morse). Soit n un entier $\geqslant 2$ et soit $\mathscr{S}$ le $\mathbb{R}$-ev des matrices *symétriques* $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On identifiera les $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On donne $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$ telle que $f(0) = 0$, $\mathrm{d}_0 f = 0$ et la forme quadratique $P_{2,f,0}$ est non dégénérée (autrement dit, 0 est *point critique non dégénéré* de f).

a) En utilisant la formule de Taylor-reste intégrale, montrer qu'il existe $\alpha : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathscr{S}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $(\forall X \in \mathbb{R}^n)\ f(X) = {}^tX.\ \alpha(X)\,X$, et $\alpha(0) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(0)\right]$. Dans toute la suite, on fait choix d'une telle α, et on pose $\alpha(0) = A$.

b) Soit $\mathscr{E}$ le sous $\mathbb{R}$-ev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ égal à $\{A^{-1}S\}_{S \in \mathscr{S}}$. On définit $g : \mathbb{R}^n \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{S}$, $(X, M) \longrightarrow {}^tMAM - \alpha(X)$.

*b*1) Prouver que g est de classe $\mathscr{C}^1$, et que la restriction $L = (\mathrm{d}_{(0, I_n)} g)\big|_{\mathscr{E}}$ appartient à $\mathrm{Isom}\,(\mathscr{E}, \mathscr{S})$.

*b*2) En déduire l'existence d'un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et d'une fonction $\varphi : U \longrightarrow \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi(0) = I_n$ et $(\forall X \in U)\ \alpha(X) = {}^t\varphi(X)\,A\,\varphi(X)$.

*b*3) On fixe φ comme en *b*2). Soit $\xi(X) = \varphi(X)\,X$ pour $X \in U$. Vérifier que ξ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et montrer que ξ définit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0, et qu'on a, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$: $f(X) = {}^t\xi(X)\,A\,\xi(X)$.

Exercice 5 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 1$. Montrer que l'application $f : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E)$, $u \mapsto \exp(u)$, définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme d'un voisinage de 0_E sur un voisinage de Id_E dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\,(E)$. Généraliser cette propriété.

Exercice 6 : Soit E un espace *euclidien* de dimension $n \geqslant 1$ et $f : E \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $(\forall x \in E)\ \mathrm{d}_x f \in O(E)$, groupe orthogonal de E.

a) Montrer que f est localement isométrique.

b) En déduire que f est une bijection affine isométrique de E sur E.

Indication : Toute isométrie d'une partie de E sur une autre se prolonge en au-moins une bijection affine isométrique de E sur E.

Exercice 7 : Soit E un espace *euclidien* de dimension $n \geqslant 1$ et $f : E \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $((\forall x, u) \in E^2)\ ((\mathrm{d}_x f)\,.\,u \mid u) \geqslant \alpha\,\|u\|^2$.

a) Montrer que $(\forall (a, b) \in E^2)\ (f(b) - f(a) \mid b - a) \geqslant \alpha\,\|b - a\|^2$.

b) Montrer que $f(E) = E$ et que f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev_n de dimension $n \geqslant 1$ et $f : E \longrightarrow E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et C-lipschitzienne avec $0 < C < 1$. Soit $g : E \longrightarrow E$, $x \mapsto x + f(x)$. Montrer que g est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 9 : Soit $P_a : X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant admettant n racines simples $z_1, \ldots, z_n$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$,
$$\left(\operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |b_i - a_i| \leqslant \eta\right) \Rightarrow P_b = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b^n \text{ admet } n \text{ racines simples } t_1, \ldots, t_n$$
avec $\operatorname*{Max}_{i \leqslant i \leqslant n} |t_i - z_i| \leqslant \varepsilon$.

Indication : Utiliser les exercices 3 et 4 du § V.3, et le théorème d'inversion locale.

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on note A_n le sous-ensemble du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_n[X]$ formé des polynômes normalisés de degré n, et $\mathscr{R}_{n,p}$ l'ensemble des $P \in A_n$ dont toutes les racines réelles sont simples et qui possèdent exactement p racines réelles (par exemple $\mathscr{R}_{n,0}$ est l'ensemble des $P \in A_n$ sans racine réelle). On munit A_n de sa structure d'espace affine réel de dimension n, définie par la bijection affine $\mathbb{R}^n \longrightarrow A_n$, $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, chaque $\mathcal{R}_{n,p}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ est *ouvert* dans A_n (commencer par $\mathcal{R}_{n,n}$ et $\mathcal{R}_{n,0}$).

Indication : Si $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $q = n - p$, trouver les points (P, Q) réguliers de l'application (polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$) $A_p \times A_q \longrightarrow A_n$, $(P, Q) \mapsto PQ$. Utiliser ensuite le théorème d'inversion locale.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $n - p$ soit pair, montrer que l'application $\varphi_{n,p} : \mathcal{R}_{p,p} \times \mathcal{R}_{n-p,0} \longrightarrow \mathcal{R}_{n,p}$, $(P, Q) \mapsto PQ$, est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

§ VI.3 *SOUS-VARIÉTÉS. HYPERSURFACES*

DÉFINITION VI.3.1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Si $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ on appelle **sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p** *de E toute partie non vide $\mathscr{V}$ de E vérifiant la condition suivante : Pour tout $a \in \mathscr{V}$, il existe un voisinage ouvert Ω de a dans E et un réel $r > 0$, ainsi qu'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\Psi : \Omega \longrightarrow]-r, r[^n$ tels que $\Psi(a) = 0$ et $\Psi(\Omega \cap \mathscr{V}) =]-r, r[^p \times \{0\}$.*

On complète cette définition en convenant que n'importe quel ouvert non vide de E est une **sous-variété** de classe $\mathscr{C}^k$ et **de dimension *n*** de E et que les parties discrètes de E en sont des sous-variétés de dimension 0. Voici quelques conséquences immédiates de cette définition :

Toute sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E est aussi de classe $\mathscr{C}^l$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$.

Si $\mathscr{V}$ est une partie non vide de E telle que, pour tout $a \in \mathscr{V}$, il existe un ouvert ω de E voisinage de a qui rencontre $\mathscr{V}$ suivant une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p, alors $\mathscr{V}$ est elle-même une telle sous-variété (d'où le caractère *local* de la définition VI.3.1). En conséquence, soit $\mathscr{W}$ une partie non vide ouverte *relativement* à une sous-variété $\mathscr{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p (*i.e.* $\mathscr{W} = \mathscr{V} \cap \omega$, où ω est un ouvert de E) ; alors $\mathscr{W}$ est une telle sous-variété.

Si $\mathscr{V}$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E, et si E est un sous-$\mathbb{R}$-ev d'un $\mathbb{R}$-ev F, alors $\mathscr{V}$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de F (car si f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme d'un ouvert ω de E sur un ouvert S de $\mathbb{R}^n$, $(\forall q \in \mathbb{N})$ $f \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^q}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\omega \times \mathbb{R}^q$ sur $S \times \mathbb{R}^q$).

Invariance de la dimension d'une sous-variété

THÉORÈME VI.3.1

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{V}$ une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p $(1 \leqslant k \leqslant +\infty, 1 \leqslant p \leqslant n)$. Alors, pour aucun entier $q \neq p$ $(0 \leqslant q \leqslant n)$, $\mathscr{V}$ n'est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension q.

Démonstration :

Il est d'abord évident que $\mathscr{V}$ n'est pas discrète puisque $p \geqslant 1$. Supposons que ce soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension q, avec $1 \leqslant q \leqslant n$. Fixons $a \in \mathscr{V}$. Soit deux réels $r > 0$, $s > 0$, des voisinages ouverts U et V de a dans E, et des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes $\Phi :]-r, r[^n \longrightarrow U$ et $\Psi :]-s, s[^n \longrightarrow V$ tels que $\Phi(0) = a$, $\Psi(0) = a$, $\Phi(]-r, r[^p \times \{0\}) = U \cap \mathscr{V}$ et $\Psi(]-s, s[^q \times \{0\}) = V \cap \mathscr{V}$. Considérons $W = U \cap V$: c'est un voisinage ouvert de a dans E. Notons $S = \Phi^{\langle -1 \rangle}(W)$, $T = \Psi^{\langle -1 \rangle}(W)$, puis $A = \{x \in]-r, r[^p \mid (x, 0) \in S\}$, $B = \{y \in]-s, s[^q \mid (y, 0) \in T\}$; A et B sont non vides et ouverts respectivement dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$. Les applications $\alpha : A \longrightarrow B$, $x \mapsto \Psi^{\langle -1 \rangle}(\Phi(x, 0))$ et $\beta : B \longrightarrow A$, $y \mapsto \Phi^{\langle -1 \rangle}(\Psi(y, 0))$ sont de classe $\mathscr{C}^k$, et $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_A$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_B$: ce sont donc des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes, d'où $p = q$. ∎

En particulier, pour $p \leqslant n - 1$, on déduit facilement du théorème VI.3.1 que $\mathscr{V}$ n'a *aucun point intérieur.*

Si $p = 1$, on dit que $\mathscr{V}$ est une **sous-variété courbe** (de classe $\mathscr{C}^k$) de E. Si $p = 2$, on dit que $\mathscr{V}$ est une **sous-variété surface** (de classe $\mathscr{C}^k$) de E.

Exemple 1 : Soit F un sous-$\mathbb{R}$-ev de dimension p de E. Tout ouvert non vide *du* $\mathbb{R}$-ev F est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E.

Exemple 2 *(représentations paramétriques cartésiennes) :* Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n - 1)$ et $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Etant donné un repère affine $\mathscr{R} = (A\ ; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E, on dit que f est une **représentation paramétrique cartésienne dans $\mathscr{R}$** ssi f est de la forme $t = (t_1, \ldots, t_p) \mapsto A + t_1 \vec{e}_1 + \cdots + t_p \vec{e}_p + \varphi_1(t)\vec{e}_{p+1} + \cdots + \varphi_{n-p}(t)\vec{e}_n$, où les φ_i sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur U. S'il en est ainsi, *l'image de f est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E* (le lecteur n'aura qu'à s'assurer que l'application $\Phi : U \times \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow E$,

$$(t_1, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_{n-p}) \mapsto A + t_1 \vec{e}_1 + \cdots + t_p \vec{e}_p + (\varphi_1(t) + u_1)\vec{e}_{p+1} + \\ + \cdots + (\varphi_{n-p}(t) + u_{n-p})\vec{e}_n ,$$

est bien un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $U \times \mathbb{R}^{n-p}$ sur un ouvert Ω de E, et que $\Phi(U \times \{0\}) = f(U)$; cf. preuve du théorème VI.2.2).

La composée de deux $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes en étant un autre, on voit que *si $\mathscr{V}$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E contenue dans un ouvert U de E, si $f : U \longrightarrow V$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur un ouvert V d'un $\mathbb{R}$-ev F de dimension n, alors $f(\mathscr{V})$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de F.*

PROPOSITION VI.3.1

> *Soit E un* $\mathbb{R}$-ev *de dimension $n \geqslant 2$, F un* $\mathbb{R}$-ev *de dimension p $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$, U un ouvert non vide de E et $f : U \longrightarrow F$ de classe $\mathscr{C}^k$. Soit $b \in f(U)$ tel que $(\forall x \in f^{-1}(b))$ $\mathrm{d}_x f$ soit de rang p. Alors $f^{-1}(b)$ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E.*

Démonstration :

(Plutôt que d'utiliser le théorème VI.2.3, trop délicat, donnons une preuve directe). Soit $a \in f^{-1}(b)$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $b = 0_{\mathbb{R}^p}$. Notons $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la variable générique de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \ldots, f_p$ les composantes canoniques de f. Par hypothèse, la matrice $\left[\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right]_{1 \leqslant j \leqslant p,\, 1 \leqslant i \leqslant n}$ est de rang p : on peut supposer que son $([\![1,p]\!], [\![1,p]\!])$-mineur Δ_0 est $\neq 0$. Par la théorie des fonctions implicites, on obtient un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{R}^{n-p}$, un voisinage ouvert T de 0 dans $\mathbb{R}^p$, et $\varphi : S \longrightarrow T$, $(x_{p+1}, \ldots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_{p+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_p(x_{p+1}, \ldots, x_n))$ de classe $\mathscr{C}^k$ tels que $\varphi(0) = 0$, que $S \times T \subset U$ et que le graphe Γ_φ de φ soit $(S \times T) \cap f^{-1}(0)$. Mais (cf. exemple 2), Γ_φ est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E. Donc $(\forall x \in f^{-1}(b))$ il existe ω voisinage ouvert de x dans E tel que $\omega \cap f^{-1}(b)$ soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E ; ce qui entraîne que $f^{-1}(b)$ est une telle sous-variété. ■

Le théorème VI.2.2 admet la formulation géométrique suivante :

PROPOSITION VI.3.2

> *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$, E un* $\mathbb{R}$-ev *de dimension $n \geqslant 2$ et $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$* **régulière** *en un point $a \in U$. Il existe alors un voisinage ouvert $A \subset U$ de a tel que $f|_A$ soit une immersion dont l'image admette une représentation* **cartésienne** *dans un repère convenable de E, et en particulier tel que $f(A)$ soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E.*

Attention ! Nonobstant la proposition VI.3.2, *une immersion $f : U \longrightarrow E$ n'a pas en général pour image une sous-variété de E.*

Exemple 3 : Soit a réel > 0. Notons U l'intervalle $]1, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(f_1(t) = \dfrac{3\,at}{1+t^3}, f_2(t) = \dfrac{3\,at^2}{1+t^3}\right)$; f est une *immersion* de classe $\mathscr{C}^\infty$. Cependant $\Gamma = f(U)$ n'est pas une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 1, car une telle sous-variété courbe devrait admettre en chaque point une tangente unique. Or il est clair (cf. fig. 1) que Γ admet en 0 deux tangentes distinctes (la notion de *tangente à un ensemble* sera précisée au tome 4).

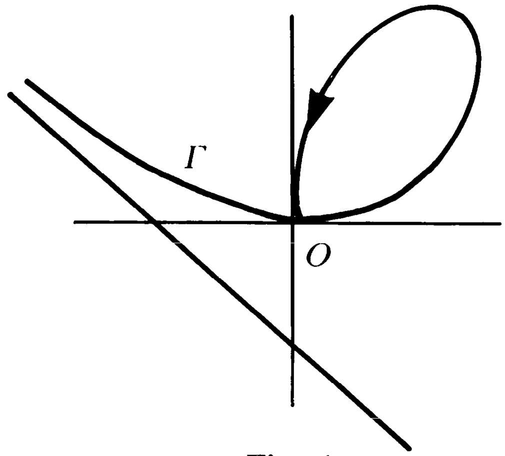


Fig. 1.

Plongements

DÉFINITION VI.3.2

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, U_1 et U_2 deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ et $f_1 : U_1 \longrightarrow E$, $f_2 : U_2 \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$. On dit que f_1 et f_2 sont des représentations paramétriques **$\mathscr{C}^k$-équivalentes** *ssi il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\theta : U_1 \longrightarrow U_2$ tel que $f_1 = f_2 \circ \theta$.*

Il est clair que deux représentations $\mathscr{C}^k$-équivalentes ont *même image*. Les propriétés élémentaires des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (composée, réciproque, Id_U, ...) montrent que la relation « f_1 et f_2 sont $\mathscr{C}^k$-équivalentes » est une *relation d'équivalence* entre applications de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans E et définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^p$.

THÉORÈME VI.3.2

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$, E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n > p$ et $f : U \longrightarrow E$ une **immersion** *de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Pour que $\mathscr{V} = f(U)$ soit une* **sous-variété** *de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E, il faut et il suffit que $\hat{f} = f|^{\mathscr{V}} : U \longrightarrow \mathscr{V}$ soit un* **homéomorphisme.** *S'il en est ainsi, toute immersion de classe $\mathscr{C}^k$, $g : V \longrightarrow E$, (où V est un ouvert de $\mathbb{R}^p$), d'image $\mathscr{V}$ est* **$\mathscr{C}^k$-équivalente** *à f.*

Démonstration :

a) Supposons que $\widehat{f}$ soit un homéomorphisme. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$. Choisissons un voisinage ouvert A de a $(A \subset U)$ tel que $f(A)$ soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E (c'est possible : cf. proposition VI.3.2). Soit Ω_1 un voisinage ouvert de b tel que, pour un réel $r_1 > 0$ convenable, on ait un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi_1 : \Omega_1 \longrightarrow\ ]-r_1, r_1[^n$ qui envoie $\Omega_1 \cap f(A)$ sur $]-r_1, r_1[^p \times \{0\}$ et b sur 0. Comme $\widehat{f}$ est un homéomorphisme voisinage de b relativement à $\mathscr{V}$. Il existe donc $r > 0$ $(r < r_1)$ et un voisinage ouvert Ω de b dans E tels que $\varphi_1(\Omega) =]-r, r[^n$ et que $\Omega \cap \mathscr{V} = \Omega \cap f(A)$. On a donc vérifié la définition VI.3.1 au point b de $\mathscr{V}$, et $\mathscr{V}$ est donc une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E.

b) Réciproquement, supposons que $\mathscr{V}$ soit une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E. Soit $a \in U$ et $b = f(a)$. Il s'agit de montrer que $f^{\langle -1 \rangle}$ est continue au point b. Pour cela considérons un voisinage ouvert Ω de b dans E et un réel $> 0 : r$ tels qu'il y ait un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\Psi : \Omega \longrightarrow]-r, r[^n$ envoyant b sur 0 et $\Omega \cap \mathscr{V}$ sur $]-r, r]^p \times \{0\}$. L'ensemble $S = f^{-1}(\Omega)$ est un voisinage ouvert de a dans U. Posons $h = f|_S$ et $\widehat{\Psi} = (\widehat{\Psi}|_{\Omega \cap \mathscr{V}})|^{]-r,r[^p}$. La fonction $\xi = \Psi \circ h : S \longrightarrow]-r, r[^n$ est de classe $\mathscr{C}^k$, et prend ses valeurs dans $W =]-r, r[^p \times \{0\}$. L'application $\widehat{\xi} : S \longrightarrow]-r, r[^p$ telle que $\xi(x) = (\widehat{\xi}(x), 0)$ pour $x \in S$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, $(\forall x \in S)\, \mathrm{d}_x\xi = (\mathrm{d}_{f(x)}\Psi) \circ (\mathrm{d}_x f)$ est de rang p, d'où l'on déduit que $\mathrm{d}_x\widehat{\xi}$ est de rang p. Donc $\widehat{\xi}$ est partout régulière sur S et (cf. corollaire 2 du théorème VI.2.1) c'est un $\mathscr{C}^k$-*difféomorphisme* de S sur $]-r, r[^p$. Alors $\widehat{\xi}^{\langle -1 \rangle} \circ \Psi = \widehat{f}^{\langle -1 \rangle}|_{\Omega \cap \mathscr{V}}$ est *continue*, et en particulier $\widehat{f}^{\langle -1 \rangle}$ est continue au point b. C'est vrai $(\forall b \in \mathscr{V})$, donc f est un homéomorphisme de U sur $\mathscr{V}$ (la continuité de f est évidente).

c) Supposons pour terminer que $\mathscr{V}$ soit une sous-variété, *i.e.* que $\widehat{f}$ soit un homéomorphisme, et soit $g : V \longrightarrow E$ une autre $\mathscr{C}^k$-immersion (V étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$), d'image $\mathscr{V}$. Alors $\widehat{g} = g|^{\mathscr{V}}$ est un homéomorphisme. L'application $\varphi = \widehat{g}^{\langle -1 \rangle} \circ f : U \longrightarrow V$ est un homéomorphisme, de réciproque $\psi = \widehat{f}^{\langle -1 \rangle} \circ g$. Il s'agit de prouver que φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^k$ (ce qui entraînera que φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et que $f = g \circ \varphi$). Il suffit de le prouver pour ψ, la preuve pour φ étant la même. Il suffit de le prouver *localement*. Soit donc $a \in U$ et $b = f(a)$. Reprenons Ψ, Ω, S, ξ et $\widehat{\xi}$ introduits au *b*) ci-dessus. Soit $T = \psi^{-1}(S)$: c'est un voisinage ouvert de $\widehat{g}^{\langle -1 \rangle}(b)$.

On a : $\psi|_T = (\widehat{f}^{\langle -1 \rangle} \circ g)|_T = (\widehat{\xi}^{\langle -1 \rangle} \circ \widehat{\psi} \circ (g|_T))$. Mais $\Psi \circ (g|_T)$ est de classe $\mathscr{C}^k$, et $\widehat{\xi}^{\langle -1 \rangle} :]-r, r[^p \longrightarrow S$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$ car $\widehat{\xi} : S \longrightarrow]-r, r[^p$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Par composition, $\psi|_T$ est donc de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de $\widehat{g}^{\langle -1 \rangle}(b)$. ■

DÉFINITION VI.3.3

Soit E un $\mathbb{R}$-ev *de dimension $n \geqslant 2$, et U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$. On appelle* **plongement de classe $\mathscr{C}^k$** *de U dans E toute* **immersion** *$f : U \longrightarrow E$ dont l'image est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E. Une sous-variété $\mathscr{V}$ de E (de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p) est appelée une* **sous-variété-plongement** *de E ssi c'est l'image d'un plongement (de classe $\mathscr{C}^k$, défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$).*

Attention ! une sous-variété de E, de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p, n'est pas toujours une sous-variété-plongement :

Exemple 4 : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathscr{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1$

sous-variété de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de dimension 1. Cependant ce n'est l'image d'aucun $\mathscr{C}^1$-plongement défini sur un intervalle *ouvert* I de $\mathbb{R}$: en effet $\mathscr{V}$ est compact dans $\mathbb{R}^2$ alors que I n'est jamais compact ! (En fait on verra en exercice que $\mathscr{V}$ n'est même homéomorphe à *aucun* intervalle de $\mathbb{R}$).

Exemple 5 : Avec les notations de la définition VI.3.3, si $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ est une *représentation cartésienne* relativement à un repère convenable de E, alors c'est un **$\mathscr{C}^k$-plongement** de U dans E, à cause de l'exemple 2. On remarquera que dans ce cas, la continuité de $f^{\langle -1 \rangle}$ qui envoie le point de coordonnées $x_1, \dots, x_p, \quad \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-p}(x)$ sur $(x_1, \dots, x_p)$ est évidente car on sait que la projection naturelle $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue.

Représentations locales d'une sous-variété. Espace tangent

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E ($\dim(E) = n \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$). Pour $b \in \mathscr{V}$, nous appellerons *représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b* tout **plongement** $f : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$) dont l'image $\mathscr{W}$ vérifie : $b \in \mathscr{W} \subset \mathscr{V}$. S'il en est ainsi, $\mathscr{W}$ est une sous-variété-plongement de E qui est voisinage de b relativement à $\mathscr{V}$.

Considérons deux représentations locales de $\mathscr{V}$ au voisinage de b : $f_1 : U_1 \longrightarrow E$ et $f_2 : U_2 \longrightarrow E$, d'images respectives $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$. Soit $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \cap \mathscr{W}_2$, $V_1 = f_1^{-1}(\mathscr{W})$ et $V_2 = f_2^{-1}(\mathscr{W})$. Posons $g_1 = f_1|_{V_1}$ et $g_2 = f_2|_{V_2}$: ce sont des représentations locales de $\mathscr{V}$ au voisinage de b, toutes deux de même image $\mathscr{W}$. D'après le théorème VI.3.2, elles sont *$\mathscr{C}^k$-équivalentes.* Nous dirons que les représentations f_1 et f_2 sont *$\mathscr{C}^k$-équivalentes au voisinage de b.*

PROPOSITION VI.3.3

Avec les notations qui précèdent, pour tout $b \in \mathscr{V}$, il existe au moins une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b.

Démonstration :

Soit Ω un voisinage ouvert de b dans E et r un réel > 0 tels qu'il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\Psi : \Omega \longrightarrow \,]-r, r[^n$ pour lequel $\Psi(b) = 0$ et $\Psi(\Omega \cap \mathscr{V}) = \,]-r, r[^p \times \{0\}$. Notons $\Phi = \Psi^{\langle -1 \rangle}$. L'application $]-r, r[^p \longrightarrow E$, $t \mapsto \Phi(t, 0)$ est une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b, dont l'image est $\Omega \cap \mathscr{V}$. ■

PROPOSITION VI.3.4

Avec les notations précédentes, soit $f : U \longrightarrow E$ une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b, et $a \in U$ le

$f(a) = b$ (U étant un ouvert de $\mathbb{R}^p$). Le sous-$\mathbb{R}$-ev $T_{f,a}$ image de $\mathbb{R}^p$ par $\mathrm{d}_a f$ ne dépend que de b, et non du choix de f ; il est de dimension p.

Démonstration :

Comme f est un plongement, $\mathrm{d}_a f$ est injective, et $T_{f,a}$ est bien de dimension p.

Soit $f_1 : U_1 \longrightarrow E$ une autre représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b, et soit $a_1 \in U_1$ le point tel que $f_1(a_1) = b$. On a vu que f_1 et f sont $\mathscr{C}^k$-équivalentes au voisinage de b, c'est-à-dire qu'il existe des voisinages ouverts V_1 de a_1 et V de a dans $\mathbb{R}^p$ ($V \subset U$, $V_1 \subset U_1$) et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\theta : V \longrightarrow V_1$ tels que $f_1 \circ \theta = f|_V$, d'où nécessairement $\theta(a) = a_1$. On en déduit : $\mathrm{d}_a f = (\mathrm{d}_{a_1} f_1) \circ (\mathrm{d}_a \theta)$. Comme $\mathrm{d}_a \theta$ est un *isomorphisme* du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^p$ sur lui-même, cela montre que $\mathrm{d}_a f$ et $\mathrm{d}_{a_1} f_1$ ont bien même image. ■

Nous pouvons maintenant poser :

DÉFINITION VI.3.4

Avec les notations et hypothèses de la proposition VI.3.4, *on appelle* ***espace vectoriel tangent en b à*** $\mathscr{V}$ *le sous-espace $T_b(\mathscr{V})$ égal à $T_{f,a}$ pour toute représentation locale $f : U \longrightarrow E$ de $\mathscr{V}$ au voisinage de b (U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in E$, $f(a) = b$). On appelle* ***espace affine tangent en b à*** $\mathscr{V}$ *le sous-espace affine $\mathscr{T}_b(\mathscr{V})$ passant par b et dirigé par $T_b(\mathscr{V})$. Les éléments de $T_b(\mathscr{V})$ sont appelés les* ***vecteurs tangents*** *en b à $\mathscr{V}$.*

Si $f : U \longrightarrow E$, $t = (t_1, \ldots, t_p) \mapsto f(t_1, \ldots, t_p)$ est une représentation locale de $\mathscr{V}$ au voisinage de b, avec $f(a) = b$ ($a = (a_1, \ldots, a_p)$), les définitions qui précèdent montrent que :

$$\text{(1)} \qquad \boxed{T_b(\mathscr{V}) = \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_p}(a)\right)},$$

et par suite, une représentation paramétrique de $\mathscr{T}_b(\mathscr{V})$ est :

$$\text{(2)} \qquad \boxed{\mathbb{R}^p \longrightarrow E,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto b + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial f}{\partial t_i}(a)}.$$

L'espace affine tangent $\mathscr{T}_b(\mathscr{V})$ sera étudié de façon plus approfondie au tome 4.

Hypersurfaces

Définition VI.3.5

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$. On appelle **hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$** *de E ($1 \leqslant k \leqslant \mathscr{C}^\infty$) toute sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension $n-1$ de E.*

(Une hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$ est donc en particulier une *sous-variété-courbe* si $n = 2$, une *sous-variété-surface* si $n = 3$).

L'espace affine *tangent* en un point d'une hypersurface de E de classe $\mathscr{C}^k$ est un *hyperplan affine* de E.

Théorème VI.3.3

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, D un ouvert non vide de E, et $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Pour $\lambda \in \varphi(D)$, soit $\mathscr{S}_\lambda = \varphi^{-1}(\lambda)$. L'ensemble $\mathscr{V}_\lambda$ formé des $a \in \mathscr{S}_\lambda$ non critiques pour φ est une hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$ dans E. Si $a \in \mathscr{V}_\lambda$, l'hyperplan affine tangent $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}_\lambda)$ est l'ensemble $\{x \in E \mid (\mathrm{d}_a\varphi)\,.\,(x-a) = 0\}$.

Démonstration :

On pourrait en faire une conséquence de la proposition VI.3.1, mais en raison de son importance, donnons-en une preuve directe. Soit $a \in \mathscr{V}_\lambda$. Considérons une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E, où nous notons $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées génériques, et $a_1, \ldots, a_n$ les coordonnées de a. Par hypothèse $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)\right) \neq (0, \ldots, 0)$. Quitte à renuméroter les $\vec{e}_i$, nous pouvons supposer que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a) \neq 0$. La théorie des fonctions implicites (cf. § VI.1) montre alors qu'il existe un voisinage ouvert U de $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$, un intervalle ouvert V centré en a_n dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\xi : U \longrightarrow V$ de classe $\mathscr{C}^k$ tels que $\xi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = a_n$. L'image Ω de $U \times V$ par l'application $\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i$ est contenue dans D ; et le graphe Γ de ξ est $\gamma^{-1}(\Omega \cap \mathscr{V}_\lambda)$. Mais Γ est une sous-variété de dimension $n-1$ et de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbb{R}^n$ (cf. exemple 2). Comme γ est une bijection linéaire, $\Omega \cap \mathscr{V}_\lambda$ est aussi une hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$ de E. Mais Ω est un voisinage ouvert de a dans E. On a donc prouvé que tout point de $\mathscr{V}_\lambda$ possède un voisinage relativement à $\mathscr{V}_\lambda$ qui est une hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$, et la définition VI.3.1 étant évidemment *locale*, cela entraîne que $\mathscr{V}_\lambda$ est une hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$ de E. Reprenons alors $a \in \mathscr{V}_\lambda$. L'application $f : U \longrightarrow E$, $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto t_1\,\vec{e}_1 + \cdots + t_{n-1}\,\vec{e}_{n-1} + \xi(t_1, \ldots, t_n)\,\vec{e}_n$ est u tion locale de $\mathscr{V}_\lambda$ au voisinage de a, telle que $f(a_1, \dots, a_{n-1}) = a$. L'hyperplan tangent $T_a(\mathscr{V}_\lambda)$ est donc Vect $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_1}(\alpha), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(\alpha)\right)$, où $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-1})$, *i.e.* Vect $\left(\vec{e}_1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial t_1}(\alpha)\,\vec{e}_n, \dots, \vec{e}_{n-1} + \dfrac{\partial \xi}{\partial t_{n-1}}(\alpha)\,\vec{e}_n\right)$.

Mais $(\forall i \in [\![1, n-1]\!])\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t_i}(\alpha) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a)\Big/\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)$ (dérivée d'une fonction implicite). Donc :

$$\begin{aligned} T_a(\mathscr{V}_\lambda) &= \mathrm{Vect}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)\,\vec{e}_1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a)\,\vec{e}_n, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(a)\,\vec{e}_{n-1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(a)\,\vec{e}_n\right) \\ &= \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}_a\varphi)\,, \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{d}_a\varphi \cdot \left(\sum_{i=1}^n u_i\,\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i}(a)$ pour tout $u = \sum_{i=1}^n u_i\,\vec{e}_i \in E$, et que $\mathrm{d}_a\varphi$ est une forme linéaire non nulle sur E. Cela signifie que $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}_\lambda) = \{x \in E \mid \mathrm{d}_a\varphi\,.\,(x-a) = 0\}$. ■

Retenons en particulier que, dans la base $\mathscr{B}$, **une équation cartésienne de l'hyperplan affine tangent $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}_\lambda)$ est :**

$$\boxed{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = 0}\,. \tag{3}$$

Si de plus E est muni d'une structure euclidienne, on sait que $(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(a) \mid u) = \mathrm{d}_a\varphi\,.\,u$ pour tout $u \in E$. Donc dans ce cas :

$$\boxed{\mathscr{T}_a(\mathscr{V}_\lambda) = \{x \in E \mid (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(a) \mid x - a) = 0\}}\,. \tag{4}$$

Dans le cas particulier usuel où $n = 3$, $\mathscr{S}_\lambda$ est la surface d'équation $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \lambda$; $\mathscr{V}_\lambda$, ce qui reste de $\mathscr{S}_\lambda$ quand on a enlevé les points critiques de φ, et $(\mathrm{d}_a\varphi)\,.\,(x-a) = 0$ est une équation du *plan tangent* en a à $\mathscr{V}_\lambda$. Si l'on considère alors deux sous-variétés $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ obtenues de la sorte, passant par un même point a et admettant en a des plans tangents *distincts* $\mathscr{T}_a(\mathscr{V})$ et $\mathscr{T}_a(\mathscr{W})$, l'ensemble $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$ est, au voisinage de a, une *sous-variété-courbe* de classe $\mathscr{C}^k$, dont la tangente en a n'est autre que $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}) \cap \mathscr{T}_a(\mathscr{W})$, comme on le déduirait facilement du théorème des fonctions implicites.

(En revanche, si $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}) = \mathscr{T}_a(\mathscr{W})$, *i.e.* si $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ sont *tangentes en a,* les tangentes en a à $\mathscr{V} \cap \mathscr{W}$, s'il en existe, sont plus délicates à déterminer). Cela suggère un résultat général :

THÉORÈME VI.3.4

> *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, D un ouvert de E, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions $D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \varphi_1(D) \times \cdots \times \varphi_1(D)$. L'ensemble $\mathscr{V}_\lambda = \{ a \in D \mid (\forall i)\ \varphi_i(a) = \lambda_i$, et les formes linéaires $\mathrm{d}_a\varphi_1, \ldots, \mathrm{d}_a\varphi_p$ sont* indépendantes $\}$ *est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension $n-p$ de E. Si $a \in \mathscr{V}_\lambda$, soit, pour $i \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{S}_{i,\lambda}$ l'hypersurface de classe $\mathscr{C}^k$ $\{x \in D \mid \varphi_i(x) = \lambda_i$ et $\mathrm{d}_x\varphi_i \neq 0\}$. Alors $(\forall i)$ $a \in \mathscr{S}_{i,\lambda}$ et l'espace vectoriel tangent $T_a(\mathscr{V}_\lambda)$ est $\bigcap_{i=1}^{p} T_a(\mathscr{S}_{i,\lambda})$. En conséquence, $\mathscr{T}_a(\mathscr{V}_\lambda) = \bigcap_{i=1}^{p} \mathscr{T}_a(\mathscr{S}_{i,\lambda})$.*

Démonstration :

Soit $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$: c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Si $x \in D$, le rang de $\mathrm{d}_x\varphi$ est p ssi $\mathrm{d}_x\varphi_1, \ldots, \mathrm{d}_x\varphi_p$ sont linéairement indépendantes (cf. tome 1, théorème XII.2.3). L'ensemble $S = \{x \in D \mid \text{rang } (\mathrm{d}_x\varphi) < p\}$ est fermé dans D, donc $D \backslash S$ est ouvert ; sur cet ouvert, φ est une *submersion*, et la proposition VI.3.1 montre que chaque $\mathscr{V}_\lambda$ est une *sous-variété* de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension $n-p$ de E.

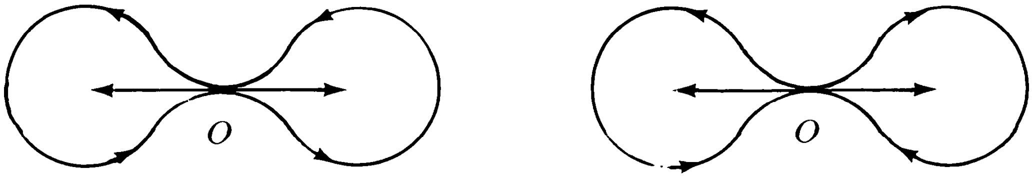
Si $a \in \mathscr{V}_\lambda$, il est immédiat que $a \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathscr{S}_{i,\lambda}$. Soit $f : U \longrightarrow E$, $(t_1, \ldots, t_{n-p}) \mapsto f(t_1, \ldots, t_{n-p})$ une représentation locale de $\mathscr{V}_\lambda$ au voisinage de a, avec $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}) = a$, U étant un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\varphi_i(f(t_1, \ldots, t_{n-p})) = 0$ sur U, d'où en posant $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p})$: $(\mathrm{d}_a\varphi_i) \circ (\mathrm{d}_\alpha f) = 0$. Donc l'image de $\mathrm{d}_\alpha f$, qui n'est autre que $T_a(\mathscr{V}_\lambda)$, est incluse dans $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(\mathrm{d}_a\varphi_i) = \bigcap_{i=1}^{p} T_a(\mathscr{S}_{i,\lambda})$. Mais les $\mathbb{R}$-ev $T_a(\mathscr{V}_\lambda)$ et $\bigcap_{i=1}^{p} T_a(\mathscr{S}_{i,\lambda})$ sont tous deux de dimension $n-p$: ils sont donc égaux. ■

Dans le cas particulier où $p = n-1$, l'intersection des $\mathscr{S}_{i,\lambda}$ est une sous-variété courbe, et l'intersection de $\mathscr{T}_a(\mathscr{S}_{i,\lambda})$ donne la tangente en a à cette courbe.

Par analogie avec le cas $n = 2$ (courbes sécantes) et $n = 3$ (surfaces non tangentes au point commun a), on dit que les hypersurfaces $\mathscr{S}_{i,\lambda}$ telles que les différentielles $\mathrm{d}_a\varphi_1, \ldots, \mathrm{d}_a\varphi_p$ soient indépendantes se coupent *transversalement*.

Exercice 1 : Donner un exemple de deux immersions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ayant même image, mais qui ne sont pas $\mathscr{C}^k$-équivalentes.

Indication : On pourra s'inspirer de la figure suivante :



Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, et on donne un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble $I \times \{0\}$ est-il une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. L'image Γ de f est-elle une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$? Quelles sont les sous-variétés de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 1 contenues dans Γ et *maximales* pour l'inclusion ?

Exercice 4 : Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathscr{S}$ l'ensemble $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$. Montrer que $\mathscr{S}$ n'est pas une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les sous-variétés de classe $\mathscr{C}^1$ et de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ contenues dans $\mathscr{S}$ et *maximales* pour l'inclusion ?

Exercice 5 : *a*) On donne un ouvert U d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k \geqslant 1$, sans point critique ainsi qu'une fonction $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ et sans point critique.

On suppose qu'il existe $\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $(\forall x)\ \mathrm{d}_x g = \lambda(x)\, \mathrm{d}_x f$. On fait de plus l'hypothèse que $(\forall b \in \mathbb{R})\ f^{-1}(b)$ est connexe.

Montrer qu'il existe une fonction h de classe $\mathscr{C}^k$ définie sur l'image de f et telle que $g = h \circ f$.

b) Montrer que ce résultat n'est plus vrai si f a des points critiques, ou si les $f^{-1}(b)$ ne sont pas tous connexes, en donnant des exemples.

Exercice 6 : Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f_i(0) = 0$ pour tout i et que les quatre nombres $f_i'(0)$ soient distincts. On note Γ_i le graphe de f_i dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{T}_i$ la tangente en $(0, 0)$ à Γ_i. Montrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme φ de U sur V tels que $\varphi(0) = 0$ et $(\forall i \in [\![1, 4]\!])$ $\varphi(\Gamma_i \cap U) = \mathscr{T}_i \cap V$.

Indication : On pourra se ramener au cas où $f_i''(0) = 0$ pour tout i, en utilisant un difféomorphisme local en $(0, 0)$ convenable du type

$$(x, y) \mapsto (x + Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2, y + Dx^2 + 2\,Exy + Fy^2).$$

Si $m_i = f_i'(0)$, considérer $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, y + R(x, y))$, avec

$$R(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x^3}\,(f_i(x) - m_i\, x) \prod_{j \neq i} \frac{y - m_i\, x}{m_j - m_i}.$$

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant n - 1$, U non vide) et $f : U \longrightarrow E$ une $\mathscr{C}^k$-immersion $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. On suppose que pour tout compact L de E, $f^{-1}(L)$ est une partie compacte de U. Montrer que f est un *plongement* de classe $\mathscr{C}^k$.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathscr{V}$ une surface de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$ plongée dans E. On appelle *bitangente* à $\mathscr{V}$ toute droite affine $\mathscr{D}$ de E rencontrant $\mathscr{V}$ en deux points A et B distincts de façon que $\mathscr{D} \subset \mathscr{T}_A(\mathscr{V}) \cap \mathscr{T}_B(\mathscr{V})$. Supposons qu'il existe une bitangente $\mathscr{D}$ à $\mathscr{V}$. Montrer qu'il existe en général un ouvert non vide ω de E tel que, par tout point $M \in \omega$, il passe une et une seule bitangente à $\mathscr{V}$, qui soit « assez voisine » de $\mathscr{D}$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathscr{V}$ une surface plongée de classe $\mathscr{C}^k$ de E. On appelle *plan bitangent* à $\mathscr{V}$ tout plan affine $\mathscr{P}$ de E tel qu'il existe A et B distincts, $A \in \mathscr{V}$, $B \in \mathscr{V}$, avec $\mathscr{P} = \mathscr{T}_A(\mathscr{V}) = \mathscr{T}_B(\mathscr{V})$. On suppose qu'il existe un p

$\mathscr{V}$, et que $\mathscr{V}$ n'est contenue dans aucun plan. Montrer qu'il existe en général un ouvert non vide $\omega \in E$ tel que, pour tout point $M \in \omega$, il passe un et un seul plan bitangent à $\mathscr{V}$ et « assez voisin » de $\mathscr{P}$.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3. On donne une sous-variété courbe Γ de classe $\mathscr{C}^k$ de E qui ne soit contenue dans aucun plan affine. On appelle *sécante double* à Γ toute droite affine $\mathscr{D}$ rencontrant Γ en au moins deux points distincts. Montrer qu'en général il existe un ouvert non vide $\omega \in E$ tel que, par tout point $M \in \omega$, il passe exactement une sécante double à Γ « assez voisine » d'une sécante double donnée.

Exercice 11 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{V}$ une sous-variété plongée de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ de E. On considère un point $M_0 \in \mathscr{V}$ et une *normale* en M_0 à $\mathscr{V}$ (*i.e.* une droite affine $\mathscr{N}_0$ passant par M_0 et orthogonale à l'espace tangent $\mathscr{T}_{M_0}(\mathscr{V})$). Montrer qu'il existe un ouvert non vide $\omega \in E$ tel que, par chaque point $A \in \omega$, il passe une et une seule normale $\mathscr{N}$ à $\mathscr{V}$ « assez voisine » de $\mathscr{N}_0$.

N.B. Pour les exercices 8 à 11, on utilisera judicieusement le théorème d'inversion locale.

Exercice 12 : Montrer que $\mathbb{U}$ n'est homéomorphe à aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty, p \in [\![1, n-1]\!])$. On donne un ouvert non vide ω de $\mathbb{R}^p$ et une $\mathscr{C}^k$-immersion $\Phi : w \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'image obtenue dans $\mathscr{V}$. Montrer que Φ est un $\mathscr{C}^k$-plongement.

Exercice 14 : Soit Q_1 le quadrant $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$. On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-ev des fonctions : $Q_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ lorsque $\mathbb{C}$ est considéré comme $\mathbb{R}$-ev. Si $f \in \mathscr{E}$, on note Af la fonction : $Q_1 \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Pour $(x, y) \in Q_1$, on pose $r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ et $q(x, y) = \dfrac{y}{x}$.

a) Prouver que $(x, y) \mapsto (r(x, y), q(x, y))$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme Φ de Q_1 sur Q_1 ; expliciter $\Phi^{\langle -1 \rangle}$. On utilisera Φ pour résoudre *b*) ci-dessous :

b) Prouver que $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathscr{E})$, que l'ensemble des valeurs propres de A est $\mathbb{C}$, et donner pour $\alpha \in \mathbb{C}$, le sous-espace propre $V_\alpha = \mathrm{Ker}\,(A - \alpha\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})$.

c) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ et $g \in V_\beta$. On demande les solutions $f \in \mathscr{E}$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_1) \qquad (A - \alpha\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}) \,.\, f = g \,.$$

(*Indication :* Si $\alpha \neq \beta$, chercher une solution du type λg, $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\alpha = \beta$, chercher une solution de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(r)\, g \quad (r = r(x, y))$.

d) Soit $\psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. Résoudre l'équation suivante dans $\mathscr{E}$:

$$(\mathrm{E}_2) \qquad (A - \alpha\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}) \,.\, f = \psi(r)\, g \,,$$

où $g \in V_\beta$ est donnée, en cherchant une solution $(x, y) \mapsto \varphi(r)\, g$.

En déduire $\mathrm{Ker}\,(A^n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Calculer $(A - \alpha\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}) \circ (A - \beta\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, en déduire, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ donné, les solutions de l'équation suivante dans $\mathscr{E}$:

$$(\mathrm{E}_3) \qquad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\, xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \lambda f = 0 \,.$$

f) Entamer l'étude de $\mathrm{Ker}\,((A - \alpha_1\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}) \circ \ldots \circ (A - \alpha_n\, \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}))$ pour $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^n$ donné.

§ VI.4 *EXTREMA LIÉS*

Soit n un entier $\geqslant 2$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le problème général des extrema liés consiste, étant données des fonctions $f, g_1, \ldots, g_l$

classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, et en supposant l'ensemble $\mathscr{V} = \bigcap_{i=1}^{p} g_i^{-1}(0)$ non vide, à étudier les extrema locaux de $f|_{\mathscr{V}}$.

Il n'existe pas de condition connue qui soit à la fois nécessaire et suffisante pour que $f|_{\mathscr{V}}$ présente en un point $a \in \mathscr{V}$ un extremum local ; aussi devrons-nous nous contenter de la classique *condition nécessaire* due à Lagrange [1], en supposant qu'outre les hypothèses ci-dessus se trouve satisfaite la suivante :

$$(\mathscr{H}) \qquad \left\{ \boxed{\begin{array}{ll} (\forall a \in \mathscr{V}) & \text{les formes linéaires } (\mathrm{d}_a g_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \\ & \text{sont linéairement indépendantes} \end{array}} \right. .$$

En notant $g = (g_1, \ldots, g_p) : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, cette hypothèse entraîne (cf. théorème VI.2.3) qu'il existe un ouvert V tel que $\mathscr{V} \subset V \subset U$ et que $g|_V$ soit une *submersion*. En particulier (cf. proposition VI.3.1) $\mathscr{V}$ est alors une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension p de E.

THÉORÈME VI.4.1

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, soit $a \in \mathscr{V}$ tel que $f|_{\mathscr{V}}$ présente en a un extremum local. Alors il existe une, et une seule, suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\boxed{\mathrm{d}_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (\mathrm{d}_a g_i)}$$

Démonstration :

Soit $m = n - p$. Identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et notons-y $(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p)$ la variable générique et $a = (\alpha, \beta)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^m, \beta \in \mathbb{R}^p)$. Par hypothèse, la matrice $\left[\dfrac{\partial g_j}{\partial t_l}(a)\right]_{1 \leqslant j \leqslant p,\, 1 \leqslant l \leqslant n}$, où $t_l = y_l$ si $l \in [\![1, p]\!]$, et $t_l = x_{l-p}$ si $l \in [\![p+1, n]\!]$, est de rang p. Quitte à changer le nom des variables s'il le faut, on peut supposer que $\det\left(\left[\dfrac{\partial g_j}{\partial t_l}(a)\right]_{(j,l) \in [\![1,p]\!]^2}\right) \neq 0$. La théorie des fonctions implicites fournit alors un voisinage ouvert $\mathscr{S}$ de α dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage ouvert T de β dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) : \mathscr{S} \longrightarrow T$ de classe $\mathscr{C}^k$, tels que $\varphi(\alpha) = \beta$, que $\mathscr{S} \times T \subset U$ et que le graphe Γ_φ de φ soit $(\mathscr{S} \times T) \cap \mathscr{V}$. (Autrement dit, on construit comme d'habitude une *représentation locale* de $\mathscr{V}$ au voisinage de a).

[1] Comte Joseph Louis de *Lagrange*, mathématicien français (1736-1813

Soit $h : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto h(x) = f(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x))$: c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, et vu l'hypothèse faite sur f, elle présente en α un extremum local. Il en résulte immédiatement que toutes ses dérivées partielles prises en α sont nulles : $(\forall i \in [\![1, m]\!])\ \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = 0$. Or, d'après la règle de la chaîne :

$$(1) \qquad (\forall i) \quad \frac{\partial h}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) .$$

D'après la théorie des fonctions implicites, pour $i \in [\![1, m]\!]$ fixé, les $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ s'obtiennent en résolvant le système de Cramer :

$$(2) \qquad (\forall q \in [\![1, p]\!]) \qquad \frac{\partial g_q}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_q}{\partial y_j}(a) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0 ,$$

ce qui donne $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = \frac{A_{i,j}}{\Delta}$, où $\Delta = \det\left(\left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(a)\right]\right)_{(\lambda, \mu) \in [\![1, p]\!]^2}$ et où $A_{i,j}$ est le déterminant de la matrice dont la colonne d'indice r est $\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_r}(a), \ldots, \frac{\partial g_p}{\partial y_r}(a)\right)$ si $r \neq j$, et dont la j-ième colonne est $\left(-\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(a), \ldots, -\frac{\partial g_p}{\partial x_i}(a)\right)$. En développant $A_{i,j}$ suivant sa j-ième colonne, on en déduit :

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = -\sum_{r=1}^{p} \frac{\Delta_{r,j}}{\Delta} \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(\alpha) ,$$

où $\Delta_{r,j}$ est le *cofacteur* d'indice (r, j) dans la matrice $M = \left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial y_\mu}(a)\right]_{(\lambda, \mu) \in [\![1, p]\!]^2}$.
En reportant les valeurs (3) dans (1), on obtient :

$$(4) \qquad (\forall i \in [\![1, m]\!]) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial x_i}(a) ,$$

avec : $(\forall r \in [\![1, p]\!])$, $\lambda_r = \sum_{j=1}^{p} \frac{\Delta_{r,j}}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)$.

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, calculons maintenant $Q_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) - \sum_{r=1}^{p} \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial y_j}(a)$. On a :

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) - \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial g_r}{\partial y_j}(a) \sum_{s=1}^{p} \frac{\Delta_{r,s}}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial y_s}(a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) - \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_s}(a) \left(\sum_{r=1}^{p} \Delta_{r,s} \frac{\partial g_r}{\partial y_j}(a)\right) . \end{aligned}$$

Mais $H_{s,j} = \sum_{r=1}^{p} \Delta_{r,s} \frac{\partial g_r}{\partial y_j}(a)$ est le développement, par rapport à sa s-ième colonne du déterminant de la matrice dont la colonne d'indice ρ est $C_\rho(M)$ pour $\rho \neq s$, et dont la s-ième colonne est $C_j(M)$. Donc $H_{s,j} = 0$ si $j \neq s$ et $H_{j,j} = \Delta$. Il reste donc $Q_j = 0$. Les relations (4), jointes à $(\forall j \in [\![1, p]\!])$ $Q_j = 0$, signifient exactement que $\mathrm{d}_a f = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r (\mathrm{d}_a g_r)$. Quant à l'unicité de la suite (λ_i), elle provient du fait que les $(\mathrm{d}_a g_r)$ sont linéairement indépendantes. ■

DÉFINITION VI.4.1

> *Les notations étant celles du théorème* VI.4.1, *on appelle* ***point critique*** *du problème (dit d'****extremum lié****) des extrema locaux de $f|_{\mathscr{V}}$, tout $a \in \mathscr{V}$ tel que les formes linéaires $\mathrm{d}_a g_1, \ldots, \mathrm{d}_a g_p$ soient linéairement indépendantes et que* $\mathrm{d}_a f \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{d}_a g_1, \ldots, \mathrm{d}_a g_p)$.

En pratique, pour traiter un problème d'extremum lié, on commence par déterminer les points critiques de ce problème. Ensuite, *si c'est possible,* on détermine ceux de ces points qui réalisent *effectivement* des extrema locaux de f, car on s'aperçoit vite à l'expérience que certains points critiques donnent de tels extrema, et d'autres pas.

Exemple 1 : *Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ et s réel > 0. Etudier les extrema locaux de $f|_T$, où $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1, \ldots, x_n$ et où*

$$T = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = s \right\}.$$

Solution : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, et l'ensemble T est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$, ce qui ne laisse aucun doute sur l'existence d'un minimum global qui est évidemment 0, et d'un maximum de f sur T. Ici la fonction g est : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n - s$, et il est clair que $\mathrm{d}_a g \neq 0$ $(\forall a \in \mathbb{R}^n)$. Cherchons les *points critiques* du problème *sur* $\Omega = T \cap (\mathbb{R}_+^*)^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ il faudrait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}_x f = \lambda \, \mathrm{d}_x g$, c'est-à-dire $\quad (\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad \dfrac{f(x)}{x_i} = \lambda$.

Comme, sur Ω, $f(x) \neq 0$, cela impose $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Le seul point critique sur Ω est donc le point $a = \left(\dfrac{s}{n}, \dfrac{s}{n}, \ldots, \dfrac{s}{n} \right)$. Maintenant, concluons : sur $T \backslash \Omega$, la fonction f s'annule et atteint donc le minimum absolu de $f|_T$; sur T elle a un maximum > 0, atteint en un point $b \in \Omega$, et d'après le théorème VI.4.1, *b doit être critique,* donc nécessairement $b = a$. La valeur du maximum est $\left(\dfrac{s}{n} \right)^n$. Remarquons au passage qu'on retrouve ainsi l'*inégalité arithmético-géométrique* (cf. tome 2, § V.5, exemple 4) : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $\geqslant 0$ arbitraires $x_1, \ldots, x_n$, on a toujours $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Remarquons également que s'il s'agissait de trouver le maximum du produit $x_1 \dots x_n$ de n réels > 0 *liés* par la relation $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{a_n^2} = 1$, on se ramènerait au problème précédent en posant $\dfrac{x_i^2}{a_i^2} = X_i$.

Exercice 1 : On donne trois réels a, b, c, avec $0 < a < b < c$. On note S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$. Trouver les extrema sur S de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. On note S la sphère unité de E. Pour $(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) \in S^{n+1}$, soit $V(A_1, \dots, A_{n+1})$ le volume n-dimensionnel du polyèdre de sommets $A_1, \dots, A_{n+1}$. Trouver les systèmes $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in S^{n+1}$ tels que $V(A_1, \dots, A_{n+1})$ soit maximum, et donner la méthode de calcul de ce volume maximum.

Exercice 3 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, on donne un triangle (A, B, C) dont tous les angles sont aigus. Trouver les triplets de points (α, β, γ) tels que $\alpha \in (B, C)$, $\beta \in (C, A)$, $\gamma \in (A, B)$ et que le périmètre du triangle (α, β, γ) soit minimum. Justification géométrique.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b, c, d) \mapsto a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. On identifie $\mathbb{R}^4$ et $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ par la bijection : $(a, b, c, d) \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Trouver les extrema de f sur le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Montrer que ces extrema sont atteints en les points $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ et seulement en ces points.

Exercice 5 : *a*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels > 0. Montrer que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} = \mathrm{Min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i\, x_i \mid (\forall i)\, u_i > 0 \text{ et } \prod_{i=1}^{n} u_i = 1 \right\}.$$

b) En déduire, si $y_1, \dots, y_n$ sont des réels > 0 :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i \right)^{1/n} \leqslant \left[\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \right]^{1/n}.$$

Exercice 6 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$, dont on note $[\cdot]$ le produit mixte. On donne $l_1 > 0, \dots, l_n > 0$. Trouver les extrema de $f : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$ sur l'ensemble défini par $(\forall i)\ \|x_i\| = l_i$, en appliquant la méthode des extrema liés (on retrouve ainsi l'*inégalité de Hadamard* (cf. tome 1, page 555)).

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les extrema de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \dots x_n$ sur l'ensemble $\mathscr{V} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} x_j \right) = 1 \right\}$.

Exercice 8 : Soit U un ouvert non vide d'un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, sans point critique, telle que $0 \in f(U)$. On donne p points de $E : A_1, \dots, A_p$ $(p \geqslant 1)$ dont l'isobarycentre est G. Soit $\mathscr{V} = f^{-1}(0)$. On définit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{p} \|x - A_i\|^2$. Prouver que les points critiques de $f|_{\mathscr{V}}$ sont les pieds des normales à $\mathscr{V}$ issues de G.

Exercice 9 : Un entrepreneur emprunte les capitaux $C_1, C_2, \dots, C_n$ $(\forall i, C_i > 0)$ aux taux d'intérêt $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ $(\forall i, 0 < \tau_1 < 1)$ pour investir $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. Sa possibilité de remboursement par unité de temps est R pour les premiers remboursemen des durées d'emprunt $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ($\forall i, T_i > 0$). On suppose que l'érosion monétaire est nulle et que l'intérêt se compose à chaque instant.

a) Vérifier que dans ces conditions, l'amortissement R_i par unité de temps correspondant au capital C_i est $R_i = \dfrac{\tau_i\, C_i\, e^{\tau_i T_i}}{e^{\tau_i T_i} - 1}$. Que se passe-t-il si $R \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tau_i\, C_i$?

b) Soit $\rho = \sum_{i=1}^{n} R_i\, T_i$ le remboursement total (en supposant $R > \sum_{i=1}^{n} \tau_i\, C_i$). Chercher les extrema locaux de ρ sur l'ensemble $\left\{(T_1, \ldots, T_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} R_i = R\right\}$.

c) Réaliser un programme sur ordinateur qui fournisse le point critique unique $(T_1, \ldots, T_n)$ et la valeur correspondante de ρ, à partir des données C_i, τ_i et R.

Exercice 10 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ on donne un triangle (A, B, C). Montrer que l'ellipse d'aire maximum inscrite dans ce triangle est tangente aux côtés du triangle en leurs milieux.

Exercice 11 : Les a_i sont des réels > 0 tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Démontrer que $\prod_{i=1}^{n} a_i(1 - a_i) \leqslant \dfrac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.

Exercice 12 : Dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ on donne un cercle $(0, R)$ et deux points A et B intérieurs à ce cercle. Déterminer les points M sur le cercle donné tels que la somme des longueurs $AM + MB$ soit extrémale (problème du miroir d'Alhazen ou du billard circulaire). Généraliser.

Exercice 13 : Dans un plan affine euclidien on donne deux cercles Γ et Γ' tangents extérieurement au point O. Déterminer les points $M \in \Gamma$ et $M' \in \Gamma'$ tels que l'aire du triangle OMM' soit maximum.

§ VI.5 *CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ANALYSE VECTORIELLE*

Dans ce §, nous considérons un espace *euclidien E*, de dimension $n \geqslant 2$. Les physiciens utilisent couramment le *gradient* d'une fonction scalaire et la *divergence* d'un champ de vecteurs, qu'ils transforment par passage en certains systèmes de coordonnées curvilignes à l'aide des *opérateurs nabla*. Proposons-nous ici de justifier l'usage de ces opérateurs.

Gradient

Soit V un ouvert non vide de E, et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}^k$-difféomorphe à V, et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $S : U \longrightarrow V$, $u \mapsto x$. La variable générique de $\mathbb{R}^n$ sera notée $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Composer une fonction quelconque φ définie sur V et à valeurs réelles ou vectorielles avec S, c'est, par définition, *exprimer φ à l'aide des coordonnées curvilignes* $(u_1, \ldots, u_n)$. Pour tout u

$\left(\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_1}(u), \ldots, \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_n}(u) \right)$ est une *base* de E, puisque $\mathrm{d}_u S \in \mathrm{Isom}\ (\mathbb{R}^n, E)$. On a donc ce qu'on appelle une **base mobile** (cf. tome 4) $u \mapsto \left(\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_1}(u), \ldots, \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_n}(u) \right)$ de E associée à S, de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Problème 1 : *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, pour $u \in U$, posant $x = S(u)$, exprimer les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(x)$ dans la base mobile* $\left(\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_i}(u) \right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

Solution : Utilisons la notation différentielle (cf. § V.3) et posons $g = f \circ S$. On a :

$$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u)\, \mathrm{d}u_i\ ,$$

mais également :

$$\mathrm{d}g = (\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(x) \mid \mathrm{d}x)\ , \quad \text{où} \quad \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_j}(u)\, \mathrm{d}u_j\ .$$

D'où :

$$\mathrm{d}g = \sum_{j=1}^{n} \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(x) \mid \frac{\partial S}{\partial u_j}(u) \right) \mathrm{d}u_j\ .$$

Par identification, il vient :

$$(1) \qquad (\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(x) \middle| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_i}(u) \right)}\ .$$

Connaissant les produits scalaires de $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f}(x)$ avec les $\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_i}(u)$ grâce à (1), il n'est pas difficile d'en déduire les composantes χ_j de ce gradient dans la base mobile $\left(\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_j}(u) \right)$. En effet, (1) s'écrit :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \quad \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \sum_{j=1}^{n} \chi_j \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial u_j}(u) \middle| \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_i}(u) \right)\ ,$$

d'où, puisque la matrice $G(u) = \left[\left(\dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_k}(u) \middle| \dfrac{\partial \vec{S}}{\partial u_l}(u) \right) \right]_{(k,}$ est inversible, les χ_j qui sont solutions d'un système de Cramer, ce qu'on peut écrire :

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_n \end{bmatrix} = [G(u)]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u_1}(u) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g}{\partial u_n}(u) \end{bmatrix}.$$

On voit tout de suite l'intérêt d'avoir $(\forall u \in U)$ une base de E $\left(\dfrac{\overrightarrow{\partial S}}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\overrightarrow{\partial S}}{\partial u_n}\right)$ *orthogonale*. On a alors des fonctions $\vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_n : U \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et des fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : U \longrightarrow \mathbb{R}^*$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ telles que $(\forall u \in U)$ $(\vec{I}_1(u), \ldots, \vec{I}_n(u))$ est une base orthonormée de E, et $\dfrac{\overrightarrow{\partial S}}{\partial u_i}(u) = \lambda_i(u)\,\vec{I}_i(u)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Dans ce cas particulier important, la relation (1) se simplifie et devient :

$$(\forall i \in [\![1, n]\!]) \qquad \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) = \lambda_i(u)(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x) \,|\, \vec{I}_i(u)).$$

Mais ici, les quantités $(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x) \,|\, \vec{I}_i(u))$ sont les composantes de $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x)$ dans la base orthonormée $(\vec{I}_1(u), \ldots, \vec{I}_n(u))$, d'où finalement :

$$(3) \qquad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i(u)} \frac{\partial g}{\partial u_i}(u)\,\vec{I}_i(u)}.$$

Divergence

Soit maintenant un *champ de vecteurs* $\vec{F}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur V, c'est-à-dire une application $\vec{F} : V \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$. Pour $x \in V$, l'application linéaire $\mathrm{d}_x\vec{F}$ appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$, et par définition le scalaire $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}_x\vec{F})$ s'appelle **divergence de $\vec{F}$ en x,** et se note $(\operatorname{div} \vec{F})(x)$. La fonction $\operatorname{div} \vec{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

On a vu au § V.3 que, si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées génériques dans une base arbitraire $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E, et si $F_1, \ldots, F_n$ sont les composantes de $\vec{F}$ dans $\mathscr{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{d}_x\vec{F}) = \left[\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)\right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, d'où l'expression de la divergence de $\vec{F}$ en x dans la base $\mathscr{B}$

$$(4) \qquad \boxed{(\operatorname{div} \vec{F})(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)}.$$

Problème 2 : *Avec les notations précédentes, supposons de plus que le système des coordonnées curvilignes* $(u_1, \ldots, u_n)$ *soit* **orthogonal,** *c'est-à-dire que* $(\forall u \in U)$, *la base* $\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \vec{S}}{\partial u_n}(u)\right)$ *soit orthogonale, et posons* $\frac{\partial \vec{S}}{\partial u_i}(u) = \lambda_i(u)\,\vec{I}_i(u)$, *où* $(\forall u \in U)$ $\lambda_i(u) \in \mathbb{R}^*$ *et où* $(\vec{I}_1(u), \ldots, \vec{I}_n(u))$ *est une base orthonormée de E de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$ *en u. Exprimer* $(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S$ *à l'aide des dérivées partielles de* $\vec{F} \circ S$ *par rapport aux* u_i.

Solution : Fixons une base *orthonormée* $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de E, dans laquelle nous notons $F_1, \ldots, F_n$ les composantes de $\vec{F}$. Alors $(\forall i)$ $F_i = (\vec{F}\,|\,\vec{e}_i)$. De plus, $\overrightarrow{\operatorname{grad} F_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\vec{e}_j$, d'où $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = (\overrightarrow{\operatorname{grad} F_i}\,|\,\vec{e}_i) = (\overrightarrow{\operatorname{grad}\,(\vec{F}\,|\,\vec{e}_i)}\,|\,\vec{e}_i)$.
Donc, d'après (4), $(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{\operatorname{grad}\,(\vec{F}\,|\,\vec{e}_i) \circ S}\,|\,\vec{e}_i)$. Mais en utilisant (3) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\operatorname{grad}\,(\vec{F}\,|\,\vec{e}_i)} \circ S &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}\left[\frac{\partial}{\partial u_j}((\vec{F}\,|\,\vec{e}_i) \circ S)\right]\vec{I}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}\left\{\frac{\partial}{\partial u_j}[(\vec{F} \circ S\,|\,\vec{e}_i)]\right\}\vec{I}_j ,\end{aligned}$$

d'où par addition :

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S &= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(\vec{F} \circ S)\,|\,\vec{e}_i\right)(\vec{I}_j\,|\,\vec{e}_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}\left(\vec{I}_j \,\middle|\, \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}(\vec{F} \circ S)\,|\,\vec{e}_i\right)\vec{e}_i\right]\right) ,\end{aligned}$$

et comme la base $(\vec{e}_i)$ est *orthonormée,* on arrive finalement à :

$$(5) \qquad \boxed{(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}\left(\vec{I}_j \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial u_j}(\vec{F} \circ S)\right)} \; .$$

A présent, introduisons les composantes de $\vec{F} \circ S$ dans $\vec{I}_1, \ldots, \vec{I}_n$, *i.e.* les fonctions (de classe $\mathscr{C}^k$) $G_1(u), \ldots, G_n(u)$ définies sur U telles que

$$(\forall u \in U) \quad \vec{F} \circ S = \sum_{j=1}^{n} G_j(u)\,\vec{I}_j(u)\,.$$

La relation (5) peut s'écrire symboliquement sous la forme :

$$(6) \qquad \boxed{(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \vec{I}_j \frac{\partial}{\partial u_j} \,\middle|\, \sum_{l=1}^{n} G_l \vec{I}_l \right)} \,.$$

(Cette écriture symbolique généralise l'opération « nabla » des physiciens). On peut même pousser plus loin la réduction *lorsque* $k \geqslant 2$. En effet les fonctions $\vec{I}_j$ sont alors au moins de classe $\mathscr{C}^1$. Introduisons les fonctions scalaires $\omega_{j,l,r}$ (de classe $\mathscr{C}^{k-2}$ sur U) telles que

$$(7) \quad (\forall u \in U)\ (\forall (r,j) \in [\![1,n]\!]^2) \qquad \frac{\partial \vec{I}_r}{\partial u_j}(u) = \sum_{l=1}^{n} \omega_{j,l,r}(u)\, \vec{I}_l(u)\,.$$

Ces fonctions ne dépendent que de S ; et du fait que $(\forall u)\ (\vec{I}_1(u), \ldots, \vec{I}_n(u))$ est une base orthonormée, pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$, la matrice $[\omega_{j,l,r}(u)]_{(l,r) \in [\![1,n]\!]^2}$ est antisymétrique (cette question sera reprise au tome 4, mais la vérification directe de cette assertion est immédiate, en dérivant partiellement par rapport aux u_j les relations $(\vec{I}_\alpha(u) | \vec{I}_\beta(u)) = \delta_{\alpha,\beta}$). On a alors :

$$(\forall j \in [\![1,n]\!]) \qquad \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{l=1}^{n} G_l \vec{I}_l \right) = \sum_l \left(\frac{\partial G_l}{\partial u_j} \vec{I}_l + G_l \sum_r \omega_{jrl} \vec{I}_r \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S &= \sum_{l,j} \frac{1}{\lambda_j} \left(\vec{I}_j \,\middle|\, \frac{\partial G_l}{\partial u_j} \vec{I}_l + G_l \sum_r \omega_{jrl} \vec{I}_r \right) \\ &= \left(\sum_j \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial G_j}{\partial u_j} \right) + \sum_{l \neq j} \frac{1}{\lambda_j} G_l\, \omega_{jjl}\,.\end{aligned}$$

On arrive donc à l'expression définitive

$$(8) \qquad \boxed{(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial G_j}{\partial u_j} \right) + \sum_{\left\{\substack{(j,l) \in [\![1,n]\!]^2 \\ j \neq l}\right.} \frac{G_l}{\lambda_j}\, \omega_{jjl}}$$

qui résout théoriquement le problème 2.

Exemple 1 : Soit E de dimension 3, orienté par le choix d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et supposons que S soit restriction à V de l'application des coordonnées sphériques : $u = (r, \theta, \varphi)$

avec $\vec{I} = \vec{u}\cos\varphi + \vec{k}\sin\varphi$ et $\vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$. Posons $\vec{K} = -\vec{u}\sin\varphi + \vec{k}\cos\varphi$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I}$ pour obtenir $(\forall (r, \theta, \varphi) \in U)$ une base orthonormée directe de E. On a :

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial r} = \vec{I}\ ;\quad \frac{\partial \vec{S}}{\partial \theta} = (r\cos\varphi)\vec{J}\ ;\quad \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = r\vec{K} \tag{9}$$

(notons que $r\cos\varphi$ reste $\neq 0$ sur U car $S : U \longrightarrow V$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme)

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{d}\vec{I} = \vec{J}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \vec{K}\,\mathrm{d}\varphi\ ;\quad \mathrm{d}\vec{J} = (-\vec{I}\cos\varphi + \vec{K}\sin\varphi)\,\mathrm{d}\theta\ ;\\ &\qquad\qquad \mathrm{d}\vec{K} = -\vec{I}\,\mathrm{d}\varphi - \vec{J}\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\ , \end{aligned}\right. \tag{10}$$

ce qui détermine immédiatement les quantités $\omega_{j,l,r}$ de (7).

Le champ de vecteurs $\vec{F} : V \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ étant donné, soit $\vec{G} = \vec{F} \circ S = A\vec{I} + B\vec{J} + C\vec{K}$.

Par utilisation de (6), en tenant compte de (9), on a d'abord :

$$(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \left(\vec{I}\,\middle|\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\vec{J}\,\middle|\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r}\left(\vec{K}\,\middle|\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial \varphi}\right), \tag{11}$$

puis, à l'aide de (10) :

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial r} = \frac{\partial A}{\partial r}\vec{I} + \frac{\partial B}{\partial r}\vec{J} + \frac{\partial C}{\partial r}\vec{K}$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}\vec{I} + \frac{\partial B}{\partial \theta}\vec{J} + \frac{\partial C}{\partial \theta}\vec{K} + A\cos\varphi\vec{J} + {} + B(\vec{K}\sin\varphi - \vec{I}\cos\varphi) - C\sin\varphi\vec{J}$$

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi}\vec{I} + \frac{\partial B}{\partial \varphi}\vec{J} + \frac{\partial C}{\partial \varphi}\vec{K} + A\vec{K} - C\vec{I}$$

d'où, en reportant dans (11) :

$$\boxed{(\operatorname{div} \vec{F}) \circ S = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial C}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}A - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r}C}\ . \tag{12}$$

Application au laplacien

Revenons au cas général du début où V est un ouvert non vide de l'espace euclidien E de dimension n $(n \geqslant 2)$, et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée de classe $\mathscr{C}^k$. Pour $k \geqslant 2$, on appelle **laplacien** de f la fonction, notée Δf, égale à $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} f}$. Dans une base **orthonormée** arbitraire

E, où l'on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées génériques, on a : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$, d'où par application de (4) :

$$\boxed{\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}} \, . \tag{13}$$

Reprenons les coordonnées curvilignes *orthogonales* $(u_1, \dots, u_n)$, et les notations $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; $\vec{I}_1, \dots, \vec{I}_n$ ci-dessus, ainsi que les quantités $\omega_{j,l,r}$ figurant dans (7) et posons : $g = f \circ S$.

Problème 3 : *Exprimer* $(\Delta f) \circ S$ *à l'aide des* $\frac{\partial g}{\partial u_j}$.

Solution : Soit $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$. D'après (3), $\vec{F} \circ S = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial g}{\partial u_j} \vec{I}_j$. Et d'après (5) :

$$\Delta f = (\text{div}\, \vec{F}) \circ S = \sum_{l} \frac{1}{\lambda_l} \left(\vec{I}_l \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial u_l} (\vec{F} \circ S) \right) .$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial u_l} (\vec{F} \circ S) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial u_l} \left(\frac{1}{\lambda_l} \frac{\partial g}{\partial u_j} \right) \right] \vec{I}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial g}{\partial u_j} \left(\sum_{r} \omega_{l,r,j} \vec{I}_r \right) ,$$

d'où, puisque la base $(\vec{I}_1, \dots, \vec{I}_n)$ reste orthonormée et que $\omega_{l,r,j} = 0$ si $r = j$:

$$(\text{div}\, \vec{F}) \circ S = \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\lambda_l} \frac{\partial}{\partial u_l} \left(\frac{1}{\lambda_l} \frac{\partial g}{\partial u_l} \right) \right] + \sum_{\begin{cases} (l,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ l \neq j \end{cases}} \frac{1}{\lambda_j \lambda_l} \frac{\partial g}{\partial u_j} \omega_{l,l,j} \, .$$

Le problème 3 est donc résolu avec la formule générale :

$$\boxed{(\Delta f) \circ S = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial g}{\partial u_j} \right) \right) + \sum_{\begin{cases} (l,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ l \neq j \end{cases}} \frac{1}{\lambda_j \lambda_l} \frac{\partial g}{\partial u_j} \omega_{l,l,j}} \, . \tag{14}$$

Exemple 2 : Plaçons-nous dans les conditions de l'exemple 1, S étant l'application des coordonnées sphériques ($u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \varphi$). Les calculs de l'exemple 1 ont donné $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = r \cos \varphi$, matrices antisymétriques $[\omega_{1,\alpha,\beta}]_{(\alpha,\beta)\in [\![1,3]\!]^2}$, $[\omega_{2,\alpha,\beta}]$ et $[\omega_{3,\alpha,\beta}]$:

$$[\omega_{1,\alpha,\beta}] = 0\ ; \quad [\omega_{2,\alpha,\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$[\omega_{3,\alpha,\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

En appliquant la formule (14) ci-dessus, on obtient :

$$(\Delta f)\circ S = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+ \frac{1}{r\cos\varphi}\,\omega_{221}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\,\omega_{223}\frac{\partial g}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\,\omega_{331}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\,\omega_{332}\frac{\partial g}{\partial\theta},$$

soit en réduisant :

$$(15) \qquad \boxed{(\Delta f)\circ S = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}} .$$

Exercice 1 : Soit V un ouvert de l'espace euclidien E, $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, $\vec{F} : V \longrightarrow E$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$. Montrer que $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div}\vec{F} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f \mid \vec{F})$.

Exercice 2 : Soit E un espace euclidien *orienté* de dimension 3. On donne un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^3$ et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $(k \geqslant 1)$ S de U sur un ouvert V de E. On suppose que S définit un système de coordonnées curvilignes *orthogonales* et on utilise les notations $\dfrac{\overrightarrow{\partial S}}{\partial u_i} = \lambda_i \vec{I}_i$ du texte, avec $i \in [\![1,3]\!]$. Soit $\vec{F}$ un champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ sur V. On rappelle que si $x \in V$, on appelle **rotationnel de *F* en *x*** le vecteur $\vec{R}(x)$ tel que $(\forall X \in E)$ $(d_x\vec{F} - (d_x\vec{F})^*).\ X = \vec{R}(x) \wedge X$ (où $(d_x\vec{F})^*$ est l'adjoint de l'endomorphisme $d_x\vec{F}$ de E). On note $\vec{R}(x) = (\operatorname{rot}\vec{F})(x)$.

Démontrer : $(\operatorname{rot}\vec{F})\circ S = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i}\vec{I}_i \wedge \left(\frac{\partial}{\partial u_i}(\vec{F}\circ S)\right)$. Expliciter quand S est l'application des coordonnées sphériques des exemples 1 et 2.

Exercice 3 *(calcul du laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales) :* Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, de coordonnées génériques $(x_1, \dots, x_n)$. Le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $\mathscr{C}$, avec les coordonnées génériques $(t_1, \dots, t_n)$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de E et $\Phi : U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de composantes $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ dans $\mathscr{B}$. Le difféomorphisme réciproque $\Phi^{<-1>}$ sera noté Ψ, et ses composantes dans $\mathscr{C}$: $\Psi_1, \dots, \Psi_n$. Si $t = (t_1, \dots, t_n) \in U$ et si $i \in [\![1,n]\!]$, on notera t_i le système $(t_k)_{k\neq i}$ et L_{t_i} l'arc défini par la paramétrisation

$$u \mapsto \Phi(t_1, \dots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \dots, t_n)$$

définie au voisinage de t_i dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

(I) $(\forall t \in U)$ les tangentes en $\Phi(t)$ aux arcs L_{t_i} sont 2 à 2 orthogonales.

(II) $(\forall t \in U)$ on a : $(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2)$, $i \neq j \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial t_j} = 0$.

(III) $(\forall x \in V)$ on a : $(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2)$, $i \neq j \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_k} = 0$.

On suppose ces conditions satisfaites dans toute la suite.

b) Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On pose $g = f \circ \Phi$ et $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Démontrer que :

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial t_i^2} \Delta_1(\Psi_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial t_i} \Delta_2(\Psi_i),$$

avec : $\Delta_1(\Psi_i) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_k} \right)^2$ et $\Delta_2(\Psi_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_k^2}$ pour tout i. (Il est entendu que $\frac{\partial^2 g}{\partial t_i^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial t_i}$ sont à prendre au point $\Psi(x)$).

c) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que $\Delta_1(\Psi_i) = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_i} \right)^2}$.

Indication : Appliquer la règle de la chaîne aux relations

$$x_j = \Phi_j(\Psi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Psi_n(x_1 - x_n)) ;$$

grâce à (II) prouver que $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial t_i} \Big/ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_i} \right)^2$ et conclure.

*d*1) Dans la relation $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{H_i} \frac{\partial^2 g}{\partial t_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial t_i} \Delta_2(\Psi_i)$ où l'on a posé : $(\forall i \in [\![1,n]\!])$ $H_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_i} \right)^2$, faire successivement $f(x) \equiv x_1, \ldots, f(x) \equiv x_n$ et en déduire :

$$(\forall i \in [\![1,n]\!]) \quad H_i \, \Delta_2(\Psi_i) = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial t_k^2} \frac{\partial \Phi_l}{\partial t_i} \right).$$

Montrer, en dérivant convenablement les relations (II), que si $k \neq i$, on a : $\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial t_k^2} \frac{\partial \Phi_l}{\partial t_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H_k}{\partial t_i}$. En déduire alors :

$$(\forall i \in [\![1,n]\!]) \quad \Delta_2(\Psi_i) = \frac{-1}{2 H_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\operatorname{Log} \frac{H_i}{\left(\prod_{j \neq i} H_j \right)} \right).$$

*d*2) Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose : $h_i = (H_i)^{-1/2}$. Démontrer :

$$(1) \qquad (\Delta f) \circ \Phi = h_1 h_2 \ldots h_n \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{h_i}{\prod_{j \neq i} h_j} \frac{\partial g}{\partial t_i} \right) \right]$$

$$(2) \qquad (\Delta f) \circ \Phi = \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial t_i^2} + \frac{\partial g}{\partial t_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\operatorname{Log} \frac{h_i}{\prod_{j \neq i} h_j} \right) \right].$$

e) On pose :

$$\Phi_1(t_1, \ldots, t_n) = t_1 \cos t_2$$
$$\Phi_2(t_1, \ldots, t_n) = t_1 \sin t_2 \cos t_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_{n-1}(t_1, \ldots, t_n) = t_1 \sin t_2 \ldots \sin t_{n-1} \cos t_n$$
$$\Phi_n(t_1, \ldots, t_n) \quad = t_1 \sin t_2 \ldots \sin t_{n-1} \sin t_n$$

qui définissent les coordonnées sphériques n-dimensionnelles.

Montrer que Φ ainsi défini est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme local au voisinage de tout $t = (t_1, \ldots, t_n)$ tel que $t_1 \sin t_2 \ldots \sin t_{n-1} \neq 0$. Montrer que ce difféomorphisme local satisfait toujours les conditions (II) du *a*). Expliciter les formules (1) et (2) pour ce difféomorphisme local. Appliquer à $n = 2$ et à $n = 3$.

f) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

*f*1) Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1 \neq 0, \ldots, x_n \neq 0$, montrer que l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1 \tag{3}$$

admet exactement n racines en λ dans $\mathbb{R}$, qu'on notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, qui sont telles que $\lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < a_2 < \cdots < \lambda_n < a_n$.

*f*2) On note V l'ouvert de E formé des $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$ tels que $x_i > 0$ pour tout i, et U l'ouvert $]-\infty, a_1[\times]a_1, a_2[\times \cdots \times]a_{n-1}, a_n[$ de $\mathbb{R}^n$. A chaque $x \in V$, on associe le point $\lambda = \Psi(x) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ formé des n racines de l'équation (3) rangées par ordre croissant. Montrer que Ψ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de V sur U, qui vérifie les conditions de *a*) (N.B. il y a très peu de calculs). Montrer que le difféomorphisme réciproque est donné par $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, avec : $\Phi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \left[(a_k - \lambda_k) \prod_{j \neq k} \left(\frac{\lambda_j - a_k}{a_j - a_k} \right) \right]^{1/2}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Expliciter les formules (1) pour Φ.

Chapitre VII

THÉORIE DES INTÉGRALES MULTIPLES

La construction de l'intégrale de Lebesgue exposée au tome 2 (cf. Chap. VII) étant supposée connue du lecteur, nous allons l'étendre aux espaces $\mathbb{R}^n$ de dimension finie.

§ VII.1 *PAVÉS, ENSEMBLES PAVABLES*

Dans ce §, $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

DÉFINITION VII.1.1

On appelle ***pavé*** *de* $\mathbb{R}^n$ *tout ensemble du type* $P = I_1 \times \cdots \times I_n$, *où chaque* I_k *est un intervalle* ***borné*** *de* $\mathbb{R}$. *Pour un tel pavé, on appelle* ***mesure n-dimensionnelle*** *de* P *le nombre, que nous noterons* Mes (P), *ou* $\mathrm{Mes}_{[n]}(P)$, *défini par :*

$$\mathrm{Mes}\,(P) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k, \quad \text{où} \quad \lambda_k = \text{longueur de } I_k \,.$$

On appelle ***ensemble pavable*** *toute union* ***finie*** *de pavés.*

Soit $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ un pavé non vide, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ soit a_k et b_k les extrémités de I_k $(a_k \leqslant b_k)$. Alors de toute évidence

$$\mathrm{Adh}\,(P) = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k], \quad \mathrm{Int}\,(P) = \prod_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\;;$$

tout pavé Q tel que Int $(P) \subset Q \subset$ Adh (P) a pour mesure $\prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$;

Adh (P) est *compact* ; P est *compact* ssi $P =$ Adh (P),

$\overset{\circ}{P} = \mathrm{Int}\,(P)$; on a : Mes $(P) = 0$ ssi Int $(P) = \varnothing$; la frontière de P est union finie de pavés de mesure nulle, et si P est lui-même de mesure nulle, cette frontière est un pavé compact égal à Adh (P) ; si Mes $(P) > 0$, tout pavé Q (et même tout *ensemble* Q) tel que Int $(P) \subset Q \subset$ Adh (P) a même intérieur et même adhérence que P.

Si P est non vide, nous appellerons *dimension* de p la dimension du sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ qu'il engendre : elle est $< n$ ssi Mes $(P) = 0$. Elle est nulle ssi P est réduit à un point.

Avec les notations ci-dessus, les λ_k $(= b_k - a_k)$ seront appelés les *longueurs des arêtes* du pavé non vide P, et $\left(\frac{1}{2}(a_k + b_k)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ le *centre* de P. Un pavé sera dit *cubique* ssi tous les λ_k sont égaux. La dimension de P est card $(\{k \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_k > 0\})$.

PROPOSITION VII.1.1

> (I) *L'intersection de deux ensembles pavables est pavable.*
> (II) *La différence $A \backslash B$ de deux ensembles pavables est pavable.*

Démonstration :

Par distributivité, l'assertion (I) résulte du fait quasi évident que l'intersection de deux pavés est un pavé.

Pour prouver (II) on se ramène également au cas où A et B sont des pavés : $A = I_1 \times \cdots \times I_n$, $B = J_1 \times \cdots \times J_n$ (où les I_k et les J_k sont des intervalles bornés de $\mathbb{R}$). Or la différence de deux intervalles $I_k \backslash J_k$ est soit vide, soit un intervalle, soit la réunion de deux intervalles bornés disjoints, donc toujours du type $M_k \cup M'_k$, avec M_k et M'_k intervalles. Soit alors, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $L_k = N_1 \times \cdots \times N_n$, où $N_k = M_k$ et $N_j = I_j$ si $j \neq k$, et $L'_k = N'_1 \times \cdots \times N'_n$, où $N'_k = M'_k$ et $N'_j = I_j$ si $j \neq k$. Les L_j et L'_j sont des pavés, et on a :

$$A \backslash B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} L'_i\right) . \quad \blacksquare$$

En conséquence, les ensembles pavables forment un *clan $\mathscr{A}$ de parties de* $\mathbb{R}^n$ (cf. tome 2, § VII.2). Et si Ω est un pavé fixé, les parties pavables de $\mathbb{R}^n$ contenues dans Ω forment un *clan unitaire* $\mathscr{A}_\Omega$ de parties de Ω. *Le clan $\mathscr{A}$ est engendré par les pavés de $\mathbb{R}^n$, et le clan $\mathscr{A}_\Omega$ est engendré par les pavés de $\mathbb{R}^n$ contenus dans Ω.*

L'étude des clans $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{A}_\Omega$ est facilitée par les lemmes suivants :

LEMME 1

> *Soit P et Q deux pavés ($P \neq \varnothing$) ; alors $P \backslash Q$ est union de pavés* **disjoints** *en nombre fini.*

Démonstration :

On peut supposer $Q \subset P$, car $P \cap Q$ est un pavé, et $P \backslash Q = P \backslash (P \cap Q)$. Il suffit d'envisager le cas $Q \neq \varnothing$. Raisonnons alors par récurrence sur la dimension d du pavé P. Si $d \leqslant 1$, la propriété est évidente. Supposons-la prouvée pour $d = k - 1$, avec $k \geqslant 2$, et plaçons-nous dans l'hypothèse $d = k$. Notons $P = \prod_{j=1}^{n} I_j$, I_j ayant pour extrémités a_j et b_j ($a_j < b_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et $a_j = b_j$ si $j > k$), et $Q = \prod_{j=1}^{n} J_j$, J_j ayant pour extrémités c_j et d_j, avec $a_j \leqslant c_j \leqslant d_j \leqslant b_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Achevons la preuve lorsque $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$, les autres cas se traitant de façon analogue ou plus simple.
Désignons par R_1 (resp. S_1 ; T_1) l'ensemble
$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in P \mid x_1 = c_1 \text{ (resp. } x_1 = d_1 \text{ ; } x_1 = \frac{1}{2}(c_1 + d_1))\}$: ce sont des pavés de dimension $k - 1$. Posons
$J_1' = I_1 \backslash [c_1, +\infty[$, $J_1'' = I_1 \backslash]-\infty, d_1]$. Alors $P \backslash Q$ est union *disjointe* de $P_1' = J_1' \times I_2 \times \cdots \times I_n$, de $P_1'' = J_1'' \times I_2 \times \cdots \times I_n$, de

$$U = (]c_1, d_1[\times I_2 \times \cdots \times I_n) \backslash (]c_1, d_1[\times J_2 \times \cdots \times J_n),$$

de $R_1 \backslash Q$ et $S_1 \backslash Q$. Or P_1' et P_1'' sont des pavés. Par l'hypothèse de récurrence, $R_1 \backslash Q$ et $S_1 \backslash Q$ sont unions finies de pavés disjoints ; toujours par l'hypothèse de récurrence, $U \cap T_1 = T_1 \backslash Q$ est union finie de pavés disjoints. Mais U *s'identifie* au produit cartésien de $]c_1, d_1[$ par $U \cap T_1$, donc U est également union finie de pavés disjoints, et il en est de même pour $P \backslash Q$. Donc, le lemme 1 se trouve démontré par récurrence. ■

LEMME 2

Soit Ω un pavé et $P_1, \ldots, P_N$ des pavés disjoints contenus dans Ω. Alors $\Omega \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{N} P_i \right)$ est union finie de pavés disjoints.

Démonstration :

La propriété est vraie si $N = 1$ d'après le lemme 1. Supposons-la vraie avec $N - 1$, où $N \geqslant 2$. Ecrivons donc $\Omega \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{N-1} P_i \right) = Q_1 \cup \ldots \cup Q_r$, où les Q_i sont des pavés disjoints. Par le lemme 1, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $Q_i \backslash P_N$ est union finie de pavés disjoints. Il en est donc de même de $\bigcup_{i=1}^{r} (Q_i \backslash P_N) = \Omega \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{N} P_i \right)$. ■

THÉORÈME VII.1.1

> *Soit $A_1, \ldots, A_N$ des pavés de $\mathbb{R}^n$ ($N \in \mathbb{N}^*$). Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des pavés* **disjoints** *$P_1, \ldots, P_p$ tels que tout A_k soit réunion de certains des P_i. (En particulier $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ est union finie de pavés disjoints).*

Démonstration :

Raisonnons par récurrence sur N. Il n'y a rien à démontrer si $N = 1$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $N - 1$, avec $N \geqslant 2$. Notons $B_1, \ldots, B_q$ ($q \in \mathbb{N}^*$) des pavés disjoints tels que, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, A_k soit réunion de certains des B_i.

Soit I l'ensemble des $i \in [\![1, q]\!]$ tels que $B_i \cap A_N \neq \varnothing$. Les $B_i \cap A_N$ ($i \in I$) sont des pavés disjoints. Notons $\mathscr{E}$ un ensemble fini de pavés disjoints tels que $A_N \setminus \bigcup\limits_{i \in I} (B_i \cap A_N)$ soit leur réunion (cf. lemme 2). Pour $i \in I$, soit $\mathscr{E}_i$ l'ensemble fini de pavés disjoints formé de $B_i \cap A_N$ et de pavés disjoints d'union $B_i \setminus (B_i \cap A_N)$ (cf. lemme 1). Rangeons en une suite $P_1, \ldots, P_p$ les pavés de $\mathscr{E} \cup \left(\bigcup\limits_{i \in I} \mathscr{E}_i\right) \cup \{B_i\}_{i \in [\![1,q]\!] \setminus I}$: cette suite convient. ■

Mesure *n*-dimensionnelle d'un ensemble pavable

Soit $\Omega = \prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$ un pavé compact d'intérieur non vide ($(\forall k)$ $a_k < b_k$). On appelle **subdivision** de Ω une suite $s = (\sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(n)})$ où chaque $\sigma_{(k)}$ est une subdivision de $[a_k, b_k]$, i.e. une partie finie de $[a_k, b_k]$ contenant a_k et b_k, qu'on identifie à l'unique suite strictement croissante $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,\nu_k})$ formée par ses termes ($\nu_k \geqslant 1$; $\alpha_{k,0} = a_k$; $\alpha_{k,\nu_k} = b_k$). Avec ces notations, pour chaque $(i) = (i_1, \ldots, i_n) \in I = \prod\limits_{k=1}^{n} [\![0, \nu_{k-1}]\!]$, soit $P_{(i)} = \prod\limits_{k=1}^{n} [\alpha_{k,i_k}, \alpha_{k,i_{k+1}}]$: les $P_{(i)}$ sont appelés **cellules** de la subdivision. Leur réunion est Ω ; leurs intérieurs sont disjoints.

Posons $\lambda_{k,r} = \alpha_{k,r+1} - \alpha_{k,r}$ ($0 \leqslant r \leqslant \nu_k - 1$, $k \in [\![1, n]\!]$). On a :

$$\operatorname{Mes}(P_{(i)}) = \lambda_{1,i_1} \times \lambda_{2,i_2} \times \cdots \times \lambda_{n,i_n},$$

et :

$$\operatorname{Mes}(\Omega) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{\nu_k - 1} \lambda_{k,r}\right) = \sum_{(i) = (i_1, \ldots, i_n) \in I} \lambda_{1,i_1} \times \cdots \times \lambda_{n,i_n}$$

$$= \sum_{(i) \in I} \operatorname{Mes}(P_{(i)})$$

(cf. tome 1, § III.2). On a donc établi :

Lemme 3

Si $(P_{(i)})_{(i)\in I}$ est la famille des cellules d'une subdivision d'un pavé compact Ω, alors

$$\mathrm{Mes}\,(\Omega) = \sum_{(i)\in I} \mathrm{Mes}\,(P_{(i)})\,.$$

On en déduit :

Proposition VII.1.2

Soit Ω un pavé, union de pavés disjoints $B_1, \ldots, B_q$. Alors

$$\mathrm{Mes}\,(\Omega) = \sum_{i=1}^{q} \mathrm{Mes}\,(B_i)\,.$$

Démonstration :

Si $\mathrm{Mes}\,(\Omega) = 0$, nécessairement les B_i sont d'intérieur vide, donc aussi de mesure nulle, et la formule est vraie. Supposons maintenant $\mathrm{Mes}\,(\Omega) > 0$. Soit $\bar{\Omega} = \mathrm{Adh}\,(\Omega)$: alors $\bar{\Omega}\backslash\Omega$ est union disjointe de pavés de mesure nulle, à cause du théorème VII.1.1 et de ce qui précède. On est ainsi ramené au cas où Ω est *compact et de mesure* > 0, c'est-à-dire

$$\Omega = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \quad ((\forall k) \quad a_k < b_k)\,.$$

Soit $P'_1, \ldots, P'_p$ ceux des pavés B_i dont la mesure est > 0 (il y en a forcément), et soit $P_i = \mathrm{Adh}\,(P'_i)$. Les intérieurs des P_i sont non vides et disjoints, et $\Omega = P_1 \cup \ldots \cup P_p$. Ecrivons

$$P_i = \prod_{k=1}^{n} [a_{k,i}, b_{k,i}] \quad (\forall (k, i) \quad a_{k,i} < b_{k,i})\,.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\sigma_{(k)} = \{a_k, b_k\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{p} \{a_{k,i}, b_{k,i}\}\right)$. Considérons la subdivision $s = (\sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(n)})$ de Ω.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, les cellules de s contenues dans P_i sont celles d'une certaine subdivision de P_i. Notons $\mathscr{E}_i$ l'ensemble des cellules de cette subdivision et $\mathscr{E}$ l'ensemble de celles de s. Alors $(\mathscr{E}_i)_{i \leqslant i \leqslant p}$ est une *partition* de $\mathscr{E}$, donc à l'aide du lemme 3, on obtient :

$$\mathrm{Mes}\,(\Omega) = \sum_{\Gamma\in\mathscr{E}} \mathrm{Mes}\,(\Gamma) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{\Gamma\in\mathscr{E}_i} \mathrm{Mes}\,(\Gamma)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Mes}\,(P_i) = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{Mes}\,(B_j)\,. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION VII.1.3

Soit A un ensemble pavable et $P_1, \dots, P_p$ des pavés disjoints de réunion A (cf. théorème VII.1.1). Le nombre $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Mes}\,(P_i)$ ne dépend que de A et non du choix des P_i.

Démonstration :

Soit $Q_1, \dots, Q_q$ une autre suite de pavés disjoints d'union A. A l'aide du théorème VII.1.1, on construit une suite $R_1, \dots, R_r$ de pavés disjoints telle que tout P_i et tout Q_j soit union de certains R_k. La proposition VII.1.2 donne alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Mes}\,(P_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k \mid R_k \subset P_i} \mathrm{Mes}\,(R_k) \right) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Mes}\,(R_k)\,.$$

On voit de même que $\sum_{j=1}^{q} \mathrm{Mes}\,(Q_j) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{Mes}\,(R_k)$, avec les mêmes R_k. ■

Il est maintenant possible de définir la mesure d'un ensemble pavable.

DÉFINITION VII.1.2

Soit A un ensemble pavable. On appelle **mesure n-dimensionnelle** *de A le nombre, que nous noterons* Mes (A) *ou* $\mathrm{Mes}_{[n]}\,(A)$, *égal à* $\sum_{i=1}^{p}$ Mes (P_i) *pour toute suite finie $P_1, \dots, P_p$ de pavés disjoints d'union A.*

Si A est un pavé, sa mesure ainsi définie coïncide bien avec celle de la définition VII.1.1.

Voici les propriétés les plus élémentaires de cette mesure des ensembles pavables.

THÉORÈME VII.1.2

Soit P, Q, R des ensembles pavables.

(I) $\mathrm{Mes}\,(P) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Int}\,(P) = \varnothing$.

(II) $\mathrm{Mes}\,(P) = \mathrm{Mes}\,(\mathrm{Adh}\,(P)) = \mathrm{Mes}\,(\mathrm{Int}\,(P))$.

(III) *Si* $Q \cap R = \varnothing$, *alors* $\mathrm{Mes}\,(Q \cup R) = \mathrm{Mes}\,(Q) + \mathrm{Mes}\,(R)$.

Démonstration :

Laissons au lecteur la facile vérification de (I). Pour (II), comme $\mathrm{Adh}\,(P) \setminus \mathrm{Int}\,(P)$ est union de pavés sans point intérieur, il suffit d'appliquer (III). Quant à (III), elle résulte immédiatement de la définition VII.1.2. ■

Si P et Q sont deux ensembles pavables quelconques, en écrivant $P \cup Q$ comme union disjointe de $P \setminus Q$, de $Q \setminus P$ et de $P \cap Q$, et en appliquant (III) à $P = (P \setminus Q) \cup (P \cap Q)$ et à $Q = (Q \setminus P) \cup (P \cap Q)$, on obtient :

$$(1) \qquad \boxed{\mathrm{Mes}\ (P \cup Q) = \mathrm{Mes}\ (P) + \mathrm{Mes}\ (Q) - \mathrm{Mes}\ (P \cap Q)}\ .$$

De (1), par récurrence, on tire, pour $P_1, \ldots, P_N$ pavables :

$$(2) \qquad \boxed{\mathrm{Mes}\left(\bigcup_{i=1}^{N} P_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Mes}\ (P_i)}\ .$$

Enfin, on a :

$$(3) \qquad \boxed{\text{si } P \subset Q\ , \quad \text{alors} \quad \mathrm{Mes}\ (P) \leqslant \mathrm{Mes}\ (Q)}$$

car $Q = (Q \setminus P) \cup P$, union disjointe.

Exemple 1 : Soit $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ un pavé non vide, de frontière F. Montrons que, *pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ouvert pavable ω contenant F et de mesure $\leqslant \varepsilon$.*

Bornons-nous au cas où P est d'intérieur non vide, l'autre cas étant encore plus simple. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons a_k et b_k les extrémités de I_k $(a_k < b_k)$. Soit η un réel tel que $0 < \eta < \frac{1}{2} \underset{k}{\mathrm{Min}}\ (b_k - a_k)$. Posons :

$$Q = \prod_{k=1}^{n}\ ]a_k - \eta, b_k + \eta[\ ; \quad R = \prod_{k=1}^{n}\ [a_k + \eta, b_k - \eta]\ .$$

On voit que $Q \setminus R = \omega$ est un ouvert pavable, et que $F \subset \omega$. Comme $R \subset Q$, on a (avec $(\forall k)\ \lambda_k = b_k - a_k$) :

$$\mathrm{Mes}_{[n]}\ (\omega) = \mathrm{Mes}_{[n]}\ (Q) - \mathrm{Mes}_{[n]}\ (R) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k + 2\eta) - \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - 2\eta)\ ,$$

qui tend bien vers 0 quand $\eta \xrightarrow{>} 0$, d'où l'assertion.

THÉORÈME VII.1.3

Soit $(\mathscr{M}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles pavables non vides, décroissante pour l'inclusion, telle que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{M}_k = \varnothing$.

Alors $\mathrm{Mes}_{[n]}\ (\mathscr{M}_k) \underset{k \to \infty}{\downarrow} 0.$

Démonstration :

Soit ε réel > 0. Chaque $\mathscr{M}_k$ est réunion d'une famille finie de pavés : $\mathscr{M}_k = \bigcup (P_{k,j})_{1 \leqslant j \leqslant N_k}$ $(N_k \geqslant 1)$. Pour chaque (k, j) $(1 \leqslant j \leqslant N_k)$, soit $\omega_{k,j}$ un ouvert pavable de mesure n-dimensionnelle $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{k+j+1}}$ contenant la frontière de $P_{k,j}$ (et en particulier contenant $P_{k,j}$ lorsque $\mathrm{Mes}_{[n]}(P_{k,j}) = 0$). Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\Gamma_k = \mathscr{M}_k \backslash \bigcup\limits_{l=0}^{k} \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N_l} \omega_{l,j} \right)$: c'est un compact, car chaque $P_{k,j} \backslash \omega_{l,j}$ est un pavé compact, donc $\mathscr{M}_k \backslash \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N_k} \omega_{k,j} \right)$ est déjà compact, et Γ_k s'obtient à partir de là en retranchant un ouvert. De plus $\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k \subset \mathscr{M}_k$, d'où $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k = \varnothing$. On en déduit que pour $N \in \mathbb{N}$ convenable, $\Gamma_N = \varnothing$, d'où $\Gamma_k = \varnothing$ dès que $k \geqslant N$. D'où, si $k \geqslant N$: $\mathscr{M}_k \subset \bigcup\limits_{l=0}^{k} \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N_l} \omega_{l,j} \right)$, et par suite

$$\mathrm{Mes}_{[n]}(\mathscr{M}_k) \leqslant \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{N_l} \mathrm{Mes}_{[n]}(\omega_{l,j}) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=1}^{N_l} \frac{\varepsilon}{2^{l+j+1}} \right) \leqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{l+1}} \leqslant \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Ensembles négligeables

DÉFINITION VII.1.3

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **négligeable** *ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(\omega_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de pavés ouverts telle que $A \subset \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} \omega_p$ et $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \mathrm{Mes}_{[n]}(\omega_p) \leqslant \varepsilon$.*

Il résulte de cette définition que *toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable,* et que *toute partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est négligeable.*

THÉORÈME VII.1.4

Un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$ est sans point intérieur.

Pour $n = 1$ la démonstration a déjà été donnée dans le tome 2 (cf. théorème VII.2.4). Son adaptation à n quelconque est imm

THÉORÈME VII.1.5

> *Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de parties négligeables de $\mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$ est négligeable.*

La démonstration peut être calquée sur celle du théorème VII.2.5 du tome 2, en remplaçant les intervalles ouverts $\omega_{p,k}$ par des *pavés ouverts* $\omega_{p,k}$.

Exemple 2 : En vertu de l'exemple 1, la *frontière de tout pavé est négligeable.* En particulier un pavé d'intérieur vide est négligeable. Comme tout hyperplan affine $\mathscr{H}$ d'équation $x_k = a_k$ (pour un $k \in [\![1, n]\!]$) est union dénombrable de pavés d'intérieur vide, $\mathscr{H}$ est négligeable.

Exemple 3 : Soit m un entier tel que $1 \leqslant m < n$. Donnons-nous un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, et une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *lipschitzienne.* Montrons que $f(U)$ *est négligeable.* Comme U est union dénombrable de pavés compacts de $\mathbb{R}^m$, il suffit de prouver que $f(P)$ est négligeable pour tout pavé compact (que l'on peut même supposer cubique) P de $\mathbb{R}^m$. Sans nuire à la généralité, supposons P centré en 0, *i.e.* $P = [-a, a]^m$ $(a > 0)$. Choisissons pour normes sur $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^n$) les fonctions $(t_1, \dots, t_m) \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{m} |t_i|$ (resp. $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$), notées $\| \cdot \|$. Par hypothèse il existe $C > 0$ tel que $\|f(t) - f(t')\| \leqslant C \|t - t'\|$ pour $(t, t') \in U^2$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, les pavés cubiques centrés en un point du type $y = f\left(\dfrac{k_1}{N} a, \dots, \dfrac{k_m}{N} a\right)$, $(k_1, \dots, k_m) \in [\![-N, N]\!]^m$, égaux à $\mathbf{B}\left(y, 2C\dfrac{a}{N}\right)$, recouvrent $f(P)$. Leur nombre est $(2N+1)^m$; la somme de leurs mesures n-dimensionnelles est $\mu_N = (2N+1)^m \left(\dfrac{Ca}{N}\right)^n$. Or, $\mu_N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve bien que $f(P)$ est négligeable.

On en déduit facilement que si f est *localement lipschitzienne :* $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (avec U ouvert de $\mathbb{R}^m$, $m < n$), c'est-à-dire si tout point de U possède un voisinage ouvert où f est lipschitzienne, alors $f(U)$ est négligeable [1].

Exemple 4 : Soit encore m un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Donnons-nous un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathscr{C}^1$. Alors f est localement lipschitzienne (cf. § V.2), donc $f(U)$ est négligeable. C'est ainsi que tout hyperplan affine (ou mieux toute variété linéaire affine) de $\mathbb{R}^n$ est négligeable. De même, si $n \geqslant 2$, toute courbe paramétrée de

---

[1] On verrait de même, pour $m = n$, que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne, alors pour tout partie N négligeable de U, l'ensemble $f(N)$ est négligeable.

$\mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ est négligeable ; si $n = 3$ toute surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ est négligeable.

Exercice 1 : Montrer que les composantes connexes d'un ensemble pavable sont pavables, et qu'elles sont en nombre fini.

Exercice 2 : Montrer que tout ensemble pavable *ouvert* est réunion dénombrable de pavés compacts *cubiques* deux à deux d'intersection négligeable.

Exercice 3 : Montrer que si, dans la définition VII.1.3, on suppose les pavés ouverts $(\omega_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tous *cubiques,* on obtient une définition équivalente.

Exercice 4 : Soit P un ensemble pavable connexe. Est-il connexe par arcs ?

Exercice 5 : Soit P un pavé compact d'intérieur non vide. Peut-il être réunion *dénombrable* de pavés compacts deux à deux disjoints ?

Exercice 6 : *a*) Montrer que *toute* intersection de pavés est un pavé.

b) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite, croissante pour l'inclusion, de pavés de $\mathbb{R}^n$ tous contenus dans un pavé fixe Ω. Montrer que $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ est un pavé. En supposant les P_k tous compacts, montrer à l'aide d'un exemple que P peut être à la fois non ouvert et non fermé.

Exercice 7 (Généralisation de l'exercice 5) : Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de pavés compacts d'intérieur non vide et deux à deux disjoints. Montrer que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$ n'est pas connexe. Cela reste-t-il vrai si les P_k sont seulement supposés tous compacts non vides et deux à deux disjoints ?

Exercice 8 : Soit p et n entiers, avec $1 \leqslant p < n$. Un ensemble pavable $P \subset \mathbb{R}^n$ est dit *au plus p-dimensionnel* ssi il est réunion de pavés de dimension $\leqslant p$.

a) S'il en est ainsi, vérifier qu'il ne contient aucun pavé de dimension $> p$.

b) On écrit P comme réunion disjointe de pavés $Q_1, \ldots, Q_N$ en nombre fini N. Montrer que la somme des mesures p-dimensionnelles des Q_i ne dépend que de P. Cette somme est appelée *mesure p-dimensionnelle* usuelle de P et notée $\mathrm{Mes}_{[p]}(P)$.

c) Soit Ω un ensemble pavable d'intérieur non vide. Montrer que sa frontière contient au moins $2n$ pavés $(n-1)$-dimensionnels.

d) Parmi les pavés U de $\mathbb{R}^n$ de mesure n-dimensionnelle 1, quels sont ceux pour lesquels $\mathrm{Mes}_{[n-1]}(\mathrm{Fr}(U))$ soit minimum ?

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$ et P un ensemble pavable compact et non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, soit F_p l'ensemble des points $x \in P$ tels qu'il n'existe pas de pavé $(p+1)$-dimensionnel Q de centre x inclus dans P. Vérifier les propriétés suivantes :

a) $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1}$.

b) F_0 est fini non vide.

c) Chaque F_p est pavable, compact non vide et au plus p-dimensionnel.

d) $F_{n-1} = \mathrm{Fr}(P)$.

Exercice 10 : Soit P une partie pavable et ouverte non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$. Montrer que les composantes connexes de P sont des ouverts pavables.

Exercice 11 : On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$ $(n \geqslant 1)$. Soit P un ensemble pavable non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour ε réel > 0, on note Q_ε l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) \leqslant \varepsilon\}$.

a) Montrer que tout Q_ε est pavable.

b) On suppose que P est au plus p-dimensionnel (cf. exercice 8 ci-dessus). Montrer :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+^* \mid (\forall \varepsilon > 0) \quad \mathrm{Mes}_{[n]}\,(Q_\varepsilon) \leqslant C\,\varepsilon^{n-p}.$$

En déduire qu'il existe toujours $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad \mathrm{Mes}_{[n]}\,(Q_\varepsilon \backslash P) \leqslant A\,\varepsilon\,.$$

Exercice 12 : On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{3} |x_i| = \|x\|$. Soit un réel $a > 0$ et un entier $N \geqslant 2$. On subdivise le cube $[0, a]^3$ en N^3 cubes égaux de longueur d'arête a/N. Soit $\mathscr{A}$ la réunion des *arêtes* de ces N^3 cubes.

Pour ε réel, $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{a}{2N}\right[$, soit $C_\varepsilon = \{x \subseteq \mathbb{R}^3 \mid d(x, \mathscr{A}) \leqslant \varepsilon\}$. Calculer la mesure de l'ensemble pavable C_ε.

§ VII.2 *FONCTIONS EN ESCALIER ET LEUR INTÉGRALE*

Dans ce §, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier $\geqslant 1$.

Soit Ω un *pavé compact* fixé de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide. Désignons par $\mathscr{A}_\Omega$ le clan des parties pavables de $\mathbb{R}^n$ contenues dans Ω. Si $A \subset \Omega$, la *fonction indicatrice* χ_A de A est, par définition, $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \notin A$ et $x \mapsto 1$ si $x \in A$.

DÉFINITION VII.2.1

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow K$ est dite **en escalier** *ssi c'est une combinaison K-linéaire des fonctions $(\chi_A)_{A \in \mathscr{A}_\Omega}$.*

Nous noterons Esc (Ω, K) l'ensemble de ces fonctions [1] : c'est le sous-K-ev de $\mathscr{F}(\Omega, K)$ engendré par les $(\chi_A)_{A \in \mathscr{A}_\Omega}$. Comme $\chi_{A \cap B} = \chi_A\,\chi_B$, on voit qu'en fait Esc (Ω, K) est une *sous-K-algèbre* de $\mathscr{F}(\Omega, K)$.

Il est évident que toute fonction $f \in$ Esc (Ω, K) est *bornée. Pour que $f : \Omega \longrightarrow K$ soit en escalier, il faut et il suffit que $f(\Omega)$ soit fini et que $(\forall y \in K)$ $f^{-1}(y) \in \mathscr{A}_\Omega$:* en effet cette condition est suffisante, car alors $f = \sum_{y \in f(\Omega)} y\chi_{f^{-1}(y)}$, et elle est nécessaire car, si f est en escalier, le théorème VII.1.1 permet d'écrire :

$$f = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k\,\chi_{P_k}\,, \quad \text{où} \quad (\forall k) \quad \lambda_k \in K \tag{1}$$

et où les P_k sont des pavés disjoints de réunion Ω, d'où le résultat. L'écriture (1) de f entraîne, pour $f \in$ Esc (Ω, K) :

$$|f| = \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|\,\chi_{P_k}\,,$$

---

[1] Pour $n = 1$ on retrouve bien les fonctions en escalier définies sur un segment $[a, b]$, cf. Tome 2, § VII.2.

ce qui prouve que $|f| \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, K)$. En particulier : **la $\mathbb{R}$-algèbre Esc $(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace de Riesz** (cf. tome 2, § VII.2) **de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$.**

THÉORÈME VII.2.1

> *Sur le K-ev* Esc (Ω, K) *il existe une et une seule forme linéaire μ telle que $\mu(\chi_A) =$* Mes (A) *pour tout ensemble $A \in \mathscr{A}_\Omega$.*

Démonstration :

L'unicité de μ provient du fait que les $(\chi_A)_{A \in \mathscr{A}_\Omega}$ engendrent le K-ev Esc (Ω, K). Il reste à prouver l'existence de μ.

a) Soit $f \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, K)$ écrite sous la forme (1) ci-dessus (avec les pavés P_k *disjoints,* de réunion Ω). Montrons que le nombre $L = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \,\mathrm{Mes}\ (P_k)$ ne dépend pas du choix de la suite $(P_1, \ldots, P_p)$, mais seulement de f.

En effet, soit une autre écriture : $f = \sum_{k=1}^{p'} \lambda'_k \chi_{P'_k}$, où les pavés P'_k sont disjoints, de réunion Ω, et posons : $L' = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k \,\mathrm{Mes}\ (P'_k)$. Soit $Q_1, \ldots, Q_q$ des pavés disjoints tels que tout P_k et tout P'_k sont réunion de certains des Q_j (théorème VII.1.1). Si $i \in [\![1, q]\!]$, soit $\varphi(i)$ l'unique entier k de $[\![1, p]\!]$ tel que $Q_i \subset P_k$; les $(\varphi^{-1}(i))_{1 \leqslant i \leqslant p}$ forment une *partition* de $[\![1, q]\!]$, et $\varphi : [\![1, q]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est surjective. Posons $\rho_i = \lambda_{\varphi(i)}$ si $1 \leqslant i \leqslant q$. Alors

$$f = \sum_{i=1}^{q} \rho_i \chi_{Q_i} . \tag{2}$$

Comme les $(\chi_{Q_i})_{1 \leqslant i \leqslant q}$ sont linéairement indépendants, puisque les Q_i sont disjoints, (2) *détermine* les ρ_i de façon unique.

Or, $L = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\sum_{i \mid \varphi(i) = k} \mathrm{Mes}\ (Q_i) \right)$ (cf. proposition VII.1.2), d'où :

$$L = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i \mid \varphi(i) = k} \rho_i \,\mathrm{Mes}\ (Q_i) \right) = \sum_{i=1}^{q} \rho_i \,\mathrm{Mes}\ (Q_i) .$$

On voit de la même façon que $L' = \sum_{i=1}^{q} \rho_i \,\mathrm{Mes}\ (Q_i)$.

b) En notant $\mu(f)$ le nombre égal à $\sum_{k=1}^{p} \lambda_p \,\mathrm{Mes}\ (P_k)$ pour toute représentation de f sous la forme (1), il reste à prouver que la fonction μ ainsi définie sur Esc (Ω, K) convient. Il est d'abord clair que $\mu(\chi_A) =$ Mes (A) pour tout $A \in \mathscr{A}_\Omega$ (cf. définition VII.1.2). M terminer que μ est linéaire. Or, $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$ pour $\alpha \in K$ et $f \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, K)$ est immédiat. D'autre part, soit f et $g : \Omega \longrightarrow K$ en escalier. Une application du théorème VII.1.1 permet de les écrire toutes deux sous forme (1) avec *la même* suite $P_1, \ldots, P_p$ de pavés disjoints d'union $\Omega : f = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \chi_{P_k}$ et $g = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \chi_{P_k}$, d'où alors :

$$f + g = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k + \beta_k) \chi_{P_k}$$

et $$\mu(f+g) = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k + \beta_k) \operatorname{Mes}(P_k) = \mu(f) + \mu(g)\,. \quad \blacksquare$$

DÉFINITION VII.2.2

La forme linéaire μ définie dans le théorème VII.2.1 s'appelle ***l'intégrale*** *(usuelle) des fonctions de* Esc (Ω, K).
Si $f \in$ Esc (Ω, K), *on écrira :*

$$\mu(f) = \int_\Omega f = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

où la lettre x est une variable muette (censée représenter un élément de $\mathbb{R}^n$).

Indiquons quelques propriétés de cette intégrale :

(Esc1) *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors* $\int_\Omega f \geqslant 0.$

(Ecrire f sous forme (1)). On dit que l'intégrale usuelle des fonctions en escalier est une **forme linéaire positive.**

(Esc2) *Si $f \in$* Esc (Ω, K), *alors :*

$$(3) \qquad \boxed{\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f|} \qquad \text{(inégalité de la norme)}\,.$$

C'est une conséquence de (1) et de :

$$\left|\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \operatorname{Mes}(P_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k| \operatorname{Mes}(P_k)\,.$$

(Esc3) Si $f \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, \mathbb{C})$ et si l'on écrit f sous la forme $u + \mathrm{i}v$, avec u et v à valeurs réelles, il est clair que u et $v \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, \mathbb{R})$ et réc

En écrivant f sous la forme (1), on a :

$$\text{(4)} \qquad \boxed{\int_\Omega f = \left(\int_\Omega u\right) + \mathrm{i}\left(\int_\Omega v\right)}\,.$$

(Esc4) *Supposons Ω réunion de pavés disjoints $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$, et soit $f : \Omega \longrightarrow K$. Pour que f soit en escalier, il faut et il suffit que chaque $f|_{\Omega_i}$ le soit ;* et si c'est le cas, on a : $\displaystyle\int_\Omega f = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (f|_{\Omega_i})$, ce que l'on écrit en abrégé $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} f$. C'est une conséquence facile du théorème VII.1.1.

Si par exemple $f \in \mathrm{Esc}\,(\Omega, K)$ et si Ω' est un pavé compact contenant Ω, désignons par $\bar{f}$ la fonction obtenue en prolongeant f à Ω' par $\bar{f} = 0$ sur $\Omega' \backslash \Omega$. Alors $\bar{f} \in \mathrm{Esc}\,(\Omega', K)$, et $\displaystyle\int_{\Omega'} \bar{f} = \int_\Omega f$.

Voici enfin la propriété fondamentale qui va permettre une construction facile de l'intégrale dans les §§ suivants :

Théorème VI.2.2

Soit (f_k) une suite de fonctions en escalier définies sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que

$$(\forall x \in \Omega) \quad f_k(x) \underset{k \longrightarrow \infty}{\downarrow} 0\,.$$

Alors

$$\int_\Omega f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\downarrow} 0\,.$$

Démonstration :

Calquons-la sur celle du théorème VII.2.2 du tome 2. Soit ε réel > 0. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $P_k = f_k^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$. Alors $P_k \in \mathscr{A}_\Omega$ (cf. les commentaires suivant la définition VII.2.1). L'hypothèse entraîne : $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} P_k = \varnothing$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Mes}\,(P_N) \leqslant \varepsilon$ (c'est possible d'après le théorème VII.1.3). Posons $M = \displaystyle\sup_{x \in \Omega} f_0(x)$, et soit k entier $\geqslant N$. On a :

$$\int_\Omega f_k = \int_\Omega f_k \chi_{P_K} + \int_\Omega f_k \chi_{\Omega \backslash P_k}\,.$$

Or : $\int_\Omega f_k \chi_{P_k} \leqslant M \operatorname{Mes}(P_k) \leqslant M\varepsilon$, et :

$$\int_\Omega f_k \chi_{\Omega \setminus P_k} \leqslant \varepsilon \operatorname{Mes}(\Omega \setminus P_k) \leqslant \varepsilon \operatorname{Mes}(\Omega),$$

d'où :

$$\int_\Omega f_k \leqslant \varepsilon(M + \operatorname{Mes}(\Omega)).$$

Donc $\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et la décroissance est évidente. ■

En résumé, l'intégrale des fonctions en escalier à valeurs réelles sur Ω est une **mesure de Daniell positive** sur $\operatorname{Esc}(\Omega, \mathbb{R})$ (cf. tome 2, définition VII.2.2).

Exercice 1 : On donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$ $(d \geqslant 2)$. Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on note $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(t)}{d^k}$ le développement propre de t en base d. On fixe $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto a_{k_1}(t_1) + a_{k_2}(t_2) + \cdots + a_{k_n}(t_n)$. Montrer que f est en escalier et calculer $\int_\Omega f$.

Exercice 2 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur le pavé compact Ω (d'intérieur non vide) de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est limite uniforme d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. (C'est moins évident que cela ne paraît pour $n > 1$).

Exercice 3 : Soit des réels $a_1 > 0, \dots a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Calculer l'intégrale de fonction en escalier I suivante :

$$I = \int_P \operatorname{Ent}(x_1) \times \cdots \times \operatorname{Ent}(x_n)\, d(x_1, \dots, x_n), \quad \text{où } P = \prod_{k=1}^{n} [0, a_k].$$

Exercice 4 : Soit $f : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 \mapsto 0$, $x = (x_1, x_2) \mapsto \sin \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ si $x \neq 0$. Montrer que f n'est limite uniforme sur $[0, 1]^2$ d'aucune suite de fonctions en escalier.

Exercice 5 : Soit f une fonction en escalier : $\Omega \longrightarrow K$, où Ω est un pavé de $\mathbb{R}^n$, compact dont $0_{\mathbb{R}^n} = 0$ est point intérieur.

On donne $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto tv$.

a) Vérifier que $\varphi^{-1}(\Omega) = I$ est un intervalle compact de longueur > 0 dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $g : t \mapsto f(tv)$, $I \longrightarrow K$ est en escalier sur I.

c) Soit J un intervalle compact non trivial de $\mathbb{R}$ et $\psi : J \longrightarrow \Omega$ affine par morceaux. Montrer que $f \circ \psi$ est en escalier sur J.

Exercice 6 : On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$.

Soit des réels $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$ et P le pavé $\prod_{k=1}^{n} [0, a_k]$.

a) $x \mapsto \|x\|$ est en escalier sur P.

b) Calculer $\int_P \|x\|^q \, dx$ pour $q \in \mathbb{N}^*$.

§ VII.3 *FONCTIONS BORNÉES INTÉGRABLES*

Pour définir les fonctions bornées intégrables sur un pavé compact, on peut reprendre pas à pas la construction vue au tome 2, § VII.3. Nous nous contenterons de renvoyer à ce texte pour toutes les démonstrations importantes qui sont strictement analogues à celles du tome 2. Supposons donc fixé une fois pour toutes un pavé compact Ω d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Si (f_k) est une suite de fonctions : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit comme au tome 2 la notion : « (f_k) est **u-majorée** » (resp. « (f_k) est **u-minorée** », « (f_k) est **u-bornée** ») et de même les expressions : « la suite (f_k) est **croissante** » (resp. **décroissante**). Si (f_k) est à la fois *croissante et u-majorée*, elle **converge simplement** vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ce que l'on écrira : $f_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\uparrow} f$, et de même si (f_k) est *décroissante et u-minorée.*

Construction de l'intégrale

• (I) On note $\mathscr{U}_B$ **l'ensemble des** $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ **telles qu'il existe au moins une suite** (f_k)**, croissante et** u**-majorée, de fonctions de Esc** $(\Omega, \mathbb{R})$**, telle que** $f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} f$**.**

Remarque : Il n'est pas très difficile de voir que $\mathscr{U}_B$ contient le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ des fonctions *continues* sur Ω, mais laissons cela en exercice.

L'ensemble $\mathscr{U}_B$ contient évidemment Esc $(\Omega, \mathbb{R})$ et toute $f \in \mathscr{U}_B$ est nécessairement bornée.

On voit comme au tome 2, § VII.3, que : $\mathscr{U}_B$ est stable pour les opérations $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$ et $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$. Si $f \in \mathscr{U}_B$ et $g \in \mathscr{U}_B$ sont $\geqslant 0$, alors $fg \in \mathscr{U}_B$. Si $f \in \mathscr{U}_B$ et $g \in \mathscr{U}_B$, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, on a : $\alpha f + \beta g \in \mathscr{U}_B$. Si (f_k) est une suite u-majorée dans Esc $(\Omega, \mathbb{R})$, et si $f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} f$, alors la suite $\left(\int_\Omega f_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, car elle est croissante et majorée, d'où :

LEMME 1

Soit $f \in \mathscr{U}_B$ *et* $g \in \mathscr{U}_B$, *puis* (f_k) *et* (g_k) *des suites dans* Esc $(\Omega, \mathbb{R})$ *telles que* $f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} f$ *et* $g_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} g$. *Si* $g \leqslant f$, *on a :*

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega g_k \leqslant \lim_{k \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_k .$$

> *En conséquence,* $\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k$ *ne dépend pas du choix des* $f_k \in \mathrm{Esc}\,(\Omega, \mathbb{R})$ *tels que* $f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$.

(même démonstration qu'au tome 2, page 327).

Pour $f \in \mathcal{U}_B$, on note $\int_\Omega f$ ou $\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ ($x =$ lettre *muette*), et on appelle **intégrale de *f* (au sens de Lebesgue)** le réel I tel que $\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} I$ pour toute suite (f_k) de fonctions en escalier vérifiant $f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$.

Ainsi, si on note $\mathscr{E}(f)$ l'ensemble des fonctions en escalier : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ majorées par f, le nombre $\int_\Omega f$ n'est autre que $\sup_{g \in \mathscr{E}(f)} \left(\int_\Omega g \right)$. L'intégrale ainsi définie sur $\mathcal{U}_B$ prolonge l'intégrale des fonctions de Esc $(\Omega, \mathbb{R})$. Elle vérifie : $(\forall (f, g) \in \mathcal{U}_B^2)$

$$(1) \qquad \begin{cases} f \leqslant g \Rightarrow \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g \\ (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2) \quad \int_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Omega f + \beta \int_\Omega g\,. \end{cases}$$

On prouve exactement comme au tome 2 (proposition VII.3.2) :

PROPOSITION VII.3.1

> *Soit* (f_k) *une suite d'éléments de* $\mathcal{U}_B$ *croissante et u-majorée. Alors* $f = \lim_{k \to \infty} f_k \in \mathcal{U}_B$, *et :* $\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega f$.

• (II) On note ensuite $\mathcal{V}_B$ l'ensemble $\{f \mid -f \in \mathcal{U}_B\}$. Pour $f \in \mathcal{V}_B$, on définit $\int_\Omega f$ comme étant $-\int_\Omega (-f)$, ce qui est licite, car si $f \in \mathcal{U}_B \cap \mathcal{V}_B$, la relation (1) entraîne $\int_\Omega f + \int_\Omega (-f) = 0$. Le nombre $\int_\Omega f = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ ainsi défini pour $f \in \mathcal{V}_B$ s'appelle **intégrale** (de **Lebesgue) de *f*.**

$\mathcal{V}_B$ contient Esc $(\Omega, \mathbb{R})$ et l'intégrale sur $\mathcal{V}_B$ prolonge celle sur Esc $(\Omega, \mathbb{R})$. Il est immédiat que :

- $\mathscr{V}_B$ est stable pour $(f,g) \mapsto \sup(f,g)$ et $(f,g) \mapsto \inf(f,g)$.
- $\mathscr{V}_B$ est stable par combinaisons linéaires à coefficients $\geqslant 0$.
- Si $f \in \mathscr{V}_B$, $g \in \mathscr{V}_B$ et $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, alors $fg \in \mathscr{V}_B$.
- Si $f \in \mathscr{V}_B$, $g \in \mathscr{V}_B$ et $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$.
- Si $f \in \mathscr{V}_B$, $g \in \mathscr{V}_B$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$, alors
$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\Omega f + \beta \int_\Omega g\,.$$
- Pour toute suite (f_k) décroissante et u-minorée dans $\mathscr{V}_B$, on a :
$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f_k = f \in \mathscr{V}_B\,, \quad \text{et} \quad \int_\Omega f_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\downarrow} \int_\Omega f\,.$$
- (III) Soit $u \in \mathscr{U}_B$ et $v \in \mathscr{V}_B$; alors
$$u - v \in \mathscr{U}_B \quad \text{et} \quad \int_\Omega (u - v) = \int_\Omega u - \int_\Omega v\,.$$

Si de plus $u \geqslant v$, il s'ensuit :
$$\int_\Omega (u - v) = \int_\Omega u - \int_\Omega v \geqslant 0\,.$$

On pose alors :

DÉFINITION VII.3.1

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction ***bornée.*** *On dit que f est* ***intégrable (au sens de Lebesgue)*** *ssi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $u \in \mathscr{U}_B$ et $v \in \mathscr{V}_B$ telles que $v \leqslant f \leqslant u$ et $\displaystyle\int_\Omega (u - v) \leqslant \varepsilon$.*
Si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir ***u et v en escalier*** *vérifiant ces conditions, on dit que f est* ***intégrable au sens de Riemann*** *(ou* ***Riemann-intégrable****).*
Enfin, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est ***bornée*** *on dit que f est* ***intégrable*** *(au sens de Lebesgue, resp. au sens de Riemann) ssi ses parties réelle et imaginaire le sont.*

Nous noterons $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$ (resp. $\mathfrak{R}(\Omega, K)$ l'ensemble des fonctions **bornées intégrables** (resp. Riemann-intégrables) : $\Omega \longrightarrow K$. Si $K = \mathbb{R}$, nous abrégerons $\mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathfrak{R}(\Omega, \mathbb{R})$ en $\mathscr{L}_B$ et $\mathfrak{R}$. Si $K = \mathbb{C}$, nous abrégerons $\mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{R}(\Omega, \mathbb{C})$ en $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ et $\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})}$. Il es

$\operatorname{Esc}(\Omega, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathscr{L}_B$ et $\operatorname{Esc}(\Omega, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{R}^{(\mathbb{C})} \subset \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ (nous verrons plus loin que ces inclusions sont strictes : cf. exercice 5).

PROPOSITION VII.3.2

> *Toute fonction* **continue** $f : \Omega \longrightarrow K$ *est* **Riemann-intégrable** *(donc* **bornée intégrable***).*

Démonstration :

Il suffit de le voir avec $K = \mathbb{R}$ (car Re (f) et Im (f) sont continues). Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$.

Puisque f est continue et Ω compact, on sait que f est bornée et uniformément continue. Désignons par M un réel > 0 majorant $|f(x)|$ pour $x \in \Omega$. Posons

$$\Omega = \prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \quad (\forall k, a_k < b_k).$$

Soit ε réel > 0, et $\eta > 0$ un module de continuité uniforme de f pour ε sur Ω (relativement à la norme $\|\cdot\|$). Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\sigma_{(k)}$ une subdivision de $[a_k, b_k]$ de pas $\leqslant \eta$. On considère la subdivision $s = (\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)})$ de Ω et on définit u et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi : sur *l'intérieur* d'une cellule quelconque Γ de s, on pose $v(x) = \operatorname{Min}_{t \in \Gamma} f(t)$, $u(x) = \operatorname{Max}_{t \in \Gamma} f(t)$ (ce qui a un sens car Γ est compacte) ; en tout autre point de Ω, on pose $v(x) = -M$, $u(x) = M$. Alors v et u sont en escalier, $v \leqslant f \leqslant u$, et en notant $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ les cellules de s :

$$\int_{\Omega} (u - v) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Mes}(\Gamma_k)(M_k - m_k),$$

où : $M_k = \operatorname{Max}_{t \in \Gamma_k} f(t)$, $m_k = \operatorname{Min}_{t \in \Gamma_k} f(t)$. D'où, par le choix de η :

$$(\forall k) \quad M_k - m_k \leqslant \varepsilon, \text{ et : } \int_{\Omega} (u - v) \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Mes}(\Gamma_k) = \varepsilon \operatorname{Mes}(\Omega). \blacksquare$$

On voit comme au tome 2 (théorème VII.3.1) :

THÉORÈME VII.3.1

> $\mathscr{L}_B$ *est un espace de Riesz de fonctions sur* Ω *et une sous -*$\mathbb{R}$*-algèbre de* $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$ *; de même* $\mathfrak{R}$ *est un sous-espace de Riesz et une sous-*$\mathbb{R}$*-algèbre de* $\mathscr{L}_B$*. En conséquence,* $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$ *est une sous-*$\mathbb{C}$*-algèbre de* $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$*, dont* $\mathfrak{R}^{(\mathbb{C})}$ *est une sous-*$\mathbb{C}$*-algèbre.*

Il nous reste à étendre l'intégrale à toutes les fonctions de $\mathscr{L}_B$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable. On considère les ensembles :

$$\mathscr{V}_-(f) = \{v \in \mathscr{V}_B \mid v \leqslant f\} \ ; \quad \mathscr{U}_+(f) = \{u \in \mathscr{U}_B \mid f \leqslant u\} \ ;$$

$$\Lambda_-(f) = \left\{\int_\Omega v\right\}_{v \in \mathscr{V}_-(f)} \ ; \quad \Lambda_+(f) = \left\{\int_\Omega u\right\}_{u \in \mathscr{U}_+(f)} \ ;$$

$$\mathscr{E}_-(f) = \{v \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, \mathbb{R}) \mid v \leqslant f\} \ ; \mathscr{E}_+(f) = \{u \in \mathrm{Esc}\ (\Omega, \mathbb{R}) \mid f \leqslant u\} \ ;$$

$$\mathscr{I}_-(f) = \left\{\int_\Omega v\right\}_{v \in \mathscr{E}_-(f)} \ ; \quad \mathscr{I}_+(f) = \left\{\int_\Omega u\right\}_{u \in \mathscr{E}_+(f)} .$$

D'où : $\mathscr{E}_-(f) \subset \mathscr{V}_-(f)$, $\mathscr{E}_+(f) \subset \mathscr{U}_+(f)$ et par suite $\mathscr{I}_-(f) \subset \Lambda_-(f)$; $\mathscr{I}_+(f) \subset \Lambda_+(f)$. La définition VII.3.1 entraîne que les ensembles de réels $\Lambda_-(f)$ et $\Lambda_+(f)$ sont *adjacents*. Par définition, l'unique réel I tel que $I = \sup\ (\Lambda_-(f)) = \inf\ (\Lambda_+(f))$ est appelé **intégrale** (de Lebesgue) de f, et noté $\displaystyle\int_\Omega f$ ou $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ (x muette), ou parfois $I(f)$. En reprenant pas à pas la preuve de la proposition VII.3.5 du tome 2, on établit :

THÉORÈME VII.3.2

> *L'intégrale* $f \mapsto \displaystyle\int_\Omega f$ *est une forme linéaire positive sur* $\mathscr{L}_B$, *et c'est la seule qui prolonge l'intégrale déjà définie sur* $\mathscr{U}_B \cup \mathscr{V}_B$.

Lorsque $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est *bornée* quelconque, rien n'empêche de définir comme ci-dessus $\mathscr{V}_-(f)$, $\mathscr{U}_+(f)$, $\Lambda_-(f)$, $\Lambda_+(f)$, $\mathscr{E}_-(f)$, $\mathscr{E}_+(f)$, $\mathscr{I}_-(f)$, $\mathscr{I}_+(f)$. Ils sont non vides, et vérifient : $\mathscr{E}_-(f) \subset \mathscr{U}_-(f)$, $\mathscr{E}_+(f) \subset \mathscr{U}_+(f)$, $\mathscr{I}_-(f) \subset \Lambda_-(f)$, $\mathscr{I}_+(f) \subset \Lambda_+(f)$. On reconnaît que $f \in \mathscr{L}_B$ au fait que $\Lambda_-(f)$ et $\Lambda_+(f)$ sont adjacents, et que $f \in \mathfrak{R}$ au fait que $\mathscr{I}_-(f)$ et $\mathscr{I}_+(f)$ sont adjacents.

Si $f \in \mathfrak{R}$, les inclusions ci-dessus montrent que

$$\int_\Omega f = \sup\ (\mathscr{I}_-(f)) = \inf\ (\mathscr{I}_+(f)) .$$

Si $f \in \mathscr{L}_B \backslash \mathfrak{R}$, en général $\sup\ (\mathscr{I}_-(f)) < \inf\ (\mathscr{I}_+(f))$ (cf. exercice 5).

Intégrale sur $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$

Si $f = \varphi + \mathrm{i}\psi \in \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$, avec φ et ψ à valeurs réelles, on définit **l'intégrale** (de Lebesgue) de f comme étant le nombre $\left(\displaystyle\int_\Omega \varphi\right) + \mathrm{i}\left(\displaystyle\int_\Omega \psi\right)$, que l'on note $\displaystyle\int_\Omega f$ ou $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$ (x muette). On vérifie sans difficulté que cette

intégrale est une forme linéaire sur $\mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$. En reprenant la preuve du théorème VII.3.4 du tome 2 (et du lemme 2 qui le suit), on prouve de même que **si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{L}_B$ avec $f \geqslant 0$, alors $f^\alpha \in \mathscr{L}_B$**, et :

THÉORÈME VII.3.3

> *Si $f \in \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$, alors $|f| \in \mathscr{L}_B$, et :* $\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f|$.

Propriétés de base de l'intégrale des fonctions bornées intégrables

THÉORÈME VII.3.4

> *Soit (f_k) une suite de $\mathscr{L}_B$ croissante et u-majorée, de limite f.*
>
> *Alors* $$f \in \mathscr{L}_B \quad \text{et} \quad \int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega f.$$

Même démonstration que celle du théorème VII.3.2 du tome 2.

COROLLAIRE

> *L'intégrale de Lebesgue est une mesure de Daniell positive sur $\mathscr{L}_B$ (et c'est la seule qui prolonge l'intégrale des fonctions en escalier).*

THÉORÈME VII.3.5

> *Soit (f_k) une suite* **u-bornée** *dans $\mathscr{L}_B$, qui* **converge simplement** *sur Ω vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors $f \in \mathscr{L}_B$, et $\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$. En conséquence, $\int_\Omega |f - f_k| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.*
> *La même propriété a lieu avec des $f_k \in \mathscr{L}_B^{(\mathbb{C})}$.*

Même démonstration que celle du théorème VII.3.3 du tome 2.

Le théorème VII.3.5 ci-dessus, cas particulier du théorème général dit *de convergence dominée* de Lebesgue, est souvent appelé *théorème de la convergence bornée.*

Il est intéressant de démontrer en détail le résultat ci-après :

THÉORÈME VII.3.6

> *Soit $f \in \mathscr{L}_B$ telle que $f \geqslant 0$. Si $\int_\Omega f = 0$, alors $f(a) = 0$ en tout point a où f est continue.*

Démonstration :

Supposons f continue en $a \in \Omega$ avec $f(a) > 0$. Par continuité de f en a, on aurait un pavé cubique P d'intérieur non vide, centré en a, et un réel $m > 0$, tels que $P \subset \Omega$ et $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in P$. D'où, puisque $f \geqslant 0$: $f \geqslant m\chi_P$, et par suite :

$$\int_\Omega f \geqslant \int_\Omega m\chi_P = m \,\mathrm{Mes}\,(P) > 0\,,$$

ce qui est absurde. ■

Cas particulier des fonctions continues

Soit (f_k) une suite de fonctions **continues** : $\Omega \longrightarrow K$ qui converge **uniformément** sur Ω vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow K$ (ce qui entraîne que f est continue). Alors les hypothèses du théorème VII.3.5 sont satisfaites et par conséquent $\displaystyle\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$, mais cette conclusion peut s'établir directement de façon très simple, à l'aide du théorème VII.3.3 (cf. tome 2, théorème VII.3.5).

Notons enfin que si $n = 1$, le pavé compact Ω de $\mathbb{R}^n$ devient le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et l'on retrouve bien évidemment la théorie de l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées $f : [a, b] \longrightarrow K$ telle qu'elle est exposée au § VII.3 du tome 2.

Exercice 1 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

a) Montrer que pour tout réel $k > 0$, Ω est réunion disjointe de pavés de diamètre $\leqslant k$.

b) En déduire la construction d'une suite (φ_k) de fonction en escalier : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, qui converge uniformément vers f sur Ω, et telle que $(\forall k)\ \varphi_k \leqslant f$.

c) En déduire qu'il existe une suite *croissante* (ψ_k) de fonction en escalier : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui converge uniformément vers f sur Ω.

Exercice 2 : Une fonction de Ω dans K est dite *réglée* ssi elle est limite uniforme sur Ω d'au moins une suite de fonctions en escalier.

a) L'ensemble $\mathscr{R}(\Omega, K)$ des fonctions réglées : $\Omega \longrightarrow K$ est un sous-K-ev de $\mathscr{F}(\Omega, K)$ qui contient Esc (Ω, K), $\mathscr{C}^0(\Omega, K)$ et qui est en fait une sous-K-algèbre.

b) Toute limite uniforme sur Ω de fonctions réglées est réglée.

c) On a : $\mathscr{R}(\Omega, K) \subset \mathfrak{R}(\Omega, K)$, et l'inclusion est stricte (penser à la fonction de l'exercice 4 du § VII.2).

d) Soit $f : \Omega \longrightarrow [a, b]$ réglée (a, b réels, $a < b$) et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $g \circ f$ est réglée.

Exercice 3 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que *toutes* les fonctions partielles $t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots x_N)$ (t réel) soient *croissantes*. La fonction f

Exercice 4 : Soit $k \mapsto r_k = (\rho_{1,k}, \rho_{2,k}, \ldots, \rho_{n,k})$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P = [0,1]^n$, on pose $\varphi(x) = \sum_{(\forall i)\, \rho_{i,k} \leqslant x_i} \frac{1}{2^k}$.

La fonction φ est-elle réglée ?

Donner une expression de $\int_{[0,1]^n} \varphi(x)\, dx$.

Exercice 5 : Soit $X = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ et $\Omega = [0,1]^n$. Montrer que la fonction indicatrice χ_X de X dans Ω est bornée intégrable, mais non Riemann-intégrable, et que $\int_\Omega \chi_X(x)\, dx = 0$.

Exercice 6 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour que f soit Riemann-intégrable, il faut et il suffit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe g et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *continues* telles que $g \leqslant f \leqslant h$ et $\int_\Omega (h - g) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 7 : Trouver les $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *continues* telles que $\left| \int_\Omega f(x)\, dx \right| = \int_\Omega |f(x)|\, dx$.

§ VII.4 *ENSEMBLES BORNÉS MESURABLES*

Une des principales applications de l'intégrale de Lebesgue est qu'elle permet d'étendre à une vaste classe de parties de $\mathbb{R}^n$, et de façon cohérente, la notion de volume n-dimensionnel. Quiconque a déjà cherché à comprendre ce qu'est le volume d'une boule euclidienne ordinaire par exemple, ou d'un tore plein ou d'autres objets analogues, saisira immédiatement la portée de cette application de l'intégrale.

Nous supposerons connues la notion de *tribu* exposée au § VII.4 du tome 2, ainsi que celle de *mesure sur une tribu*.

Dans ce qui suit, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, et un pavé compact Ω d'intérieur non vide. Si $\mathscr{A}_\Omega$ désigne le *clan* des parties pavables de Ω, la tribu engendrée par le clan $\mathscr{A}_\Omega$ s'appelle **tribu borélienne** de Ω : ses éléments s'appellent **ensembles boréliens** de Ω. Il est aisé de voir que tout ouvert relatif de Ω est union dénombrable de pavés ouverts relatifs de Ω et par conséquent **la tribu borélienne de Ω contient tous les ouverts relatifs de Ω,** donc aussi **tous ses fermés relatifs,** (c'est-à-dire **ses parties fermées dans $\mathbb{R}^n$).** En fait le clan $\mathscr{A}_\Omega$ est engendré par les pavés fermés inclus dans Ω, d'où en définitive : **la tribu borélienne de Ω est aussi la tribu engendrée par les fermés de Ω** (ou aussi **par les ouverts** de Ω).

DÉFINITION VII.4.1

On appelle **sous-ensemble mesurable de Ω** *(au sens de Lebesgue) toute partie A de Ω telle que $\chi_A \in \mathscr{L}_B(\Omega)$. Si $A \subset \Omega$ est mesurable, le réel $\geqslant 0$: $\int_\Omega \chi_A(x)\, dx$ s'appelle* **mesure (de Lebesgue) n-dimensionnelle de A,** *et sera noté* Mes (A), *ou* $\text{Mes}_{[n]}$ $(A$

Nous noterons $\mathscr{M}_\Omega$ l'ensemble des parties mesurables de Ω ; il contient déjà le clan $\mathscr{A}_\Omega$.

THÉORÈME VII.4.1

> *L'ensemble $\mathscr{M}_\Omega$ est une* **tribu** *de Ω, qui contient la tribu borélienne de Ω, et l'application $\mathscr{M}_\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{Mes}(A)$ est une* **mesure** *sur $\mathscr{M}_\Omega$. En particulier, tout compact de Ω et tout ouvert relatif de Ω sont mesurables.*

Même démonstration que celle du théorème VII.4.1 du tome 2.

Ensembles négligeables

Soit N une partie *bornée* de $\mathbb{R}^n$. Si N est négligeable, pour tout ε réel >0, on peut choisir une suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés ouverts telle que $N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \omega_k$, que $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Mes}(\omega_k) \leqslant \varepsilon$ et que $\omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \omega_k$ soit *borné*.

Alors ω est mesurable (dans un certain pavé compact Ω), et

$$\operatorname{Mes}(\omega) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Mes}(\omega_k) \leqslant \varepsilon .$$

Réciproquement, si ω est un ouvert borné contenant N tel que $\operatorname{Mes}(\omega) \leqslant \varepsilon$, soit P un pavé compact contenant ω. Raisonnons dans $\mathscr{L}_B(P)$. Comme ω est union dénombrable de pavés ouverts $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ω est union d'une *suite croissante d'ensembles pavables* $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On écrit A_0 comme union finie de pavés *disjoints*, puis $A_1 \backslash A_0$ comme union finie de pavés disjoints, etc. D'où *une suite $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés disjoints de réunion ω.*

Si Q_k est d'intérieur non vide, on le remplace par l'homothétique Q'_k dans le rapport 2 de cet intérieur par rapport au centre de Q_k. Sinon, on le remplace par Q''_k pavé ouvert contenant Q_k, contenu dans P et de mesure $\leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ (ce qui est possible). La réunion des Q'_k et des Q''_k contient N, car elle contient Ω et l'on a :

$$\sum \operatorname{Mes}(Q''_k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leqslant \varepsilon .$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Mes}(Q_k) = \operatorname{Mes}(\omega) \leqslant \varepsilon , \quad \textit{a fortiori} \quad \sum \operatorname{Mes}(Q'_k) \leqslant 2^n \varepsilon .$$

D'où au total $\sum \operatorname{Mes}(Q'_k) + \sum \operatorname{Mes}(Q''_k) \leqslant \varepsilon(2^n + 1)$. On a

Lemme 1

Pour qu'une partie bornée N de $\mathbb{R}^n$ soit négligeable, il faut et il suffit que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert borné de mesure $\leqslant \varepsilon$ contenant N.

Théorème VII.4.2

Soit $A \subset \Omega$; A est **négligeable** *ssi A est* **mesurable** *et* **de mesure nulle.**

Démonstration :

Pour démontrer que la condition est nécessaire on procède comme au tome 2 (preuve du théorème VII.4.2).

Réciproquement, supposons A mesurable et Mes $(A) = 0$. Soit ε réel > 0, et (f_k) une suite croissante et u-majorée de fonctions $\geqslant 0$ dans Esc $(\Omega, \mathbb{R})$, de limite $u \geqslant 2\,\chi_A$, telle que $(\forall k) \displaystyle\int_\Omega f_k \leqslant \varepsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $V_k = f^{-1}([1, +\infty[)$, d'où : $V_k \in \mathscr{A}_\Omega$, et la suite (V_k) croît.

Ecrivons V_0 comme union finie de pavés disjoints $(P_{0,j})_{1 \leqslant j \leqslant N_0}$, puis $V_1 \backslash V_0$ de la même manière, etc. Par récurrence, on écrit de la sorte V_k comme union finie de pavés disjoints $(P_{k,j})_{1 \leqslant j \leqslant N_k}$, avec

$$\{P_{k,j}\}_{1 \leqslant j \leqslant N_k} \subset \{P_{k+1,j}\}_{1 \leqslant j \leqslant N_{k+1}} \quad \text{pour tout } k\,.$$

Soit ω_k l'union des pavés obtenus en remplaçant l'intérieur de chaque $P_{k,j}$ dont la mesure est > 0 par son homothétique de rapport 2 par rapport à son centre ; soit ω'_k l'union des pavés obtenus en remplaçant chaque $P_{k,j}$ de mesure nulle par un pavé ouvert le contenant et restant dans un borné fixe, de façon que la somme des mesures de ces pavés soit $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

La suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante ; si $\omega = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \omega_k$ et $\omega' = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \omega'_k$, ω et ω' sont bornés, et on a : $A \subset \omega \cup \omega'$. De plus,

$$\text{Mes}\,(\omega') \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \text{Mes}\,(\omega'_k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon\,;$$

$$(\forall k) \quad \text{Mes}\,(\omega_k) \leqslant 2^n\,\text{Mes}\,(V_k) \leqslant 2^n \int_\Omega f_k \leqslant 2^n\,\varepsilon\,.$$

L'ouvert ω est donc de mesure $\lim\limits_{k \to \infty} \text{Mes}\,(\omega_k) \leqslant 2^n\,\varepsilon$. Finalement, $A \subset \omega \cup \omega'$ et Mes $(\omega \cup \omega') \leqslant \varepsilon\,(2^n + 1)$, et $\omega \cup \omega'$ est un ouvert borné. A l'aide du lemme 1, on en conclut que A est négligeable. ∎

THÉORÈME VII.4.3

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Il y a équivalence entre : $f \in \mathscr{L}_B$, et :
(I) $(\forall y \in \mathbb{R})$ $f^{-1}(]y, +\infty[) \in \mathscr{M}_\Omega$
(II) $(\forall y \in \mathbb{R})$ $f^{-1}([y, +\infty[) \in \mathscr{M}_\Omega$
(III) $(\forall y \in \mathbb{R})$ $f^{-1}(]-\infty, y[) \in \mathscr{M}_\Omega$
(IV) $(\forall y \in \mathbb{R})$ $f^{-1}(]-\infty, y]) \in \mathscr{M}_\Omega$.

Même démonstration que le théorème VII.4.3 du tome 2.

THÉORÈME VII.4.4

Soit $f \in \mathscr{L}_B$ avec $f \geqslant 0$; soit $S = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$. Alors $\int_\Omega f = 0$ ssi S est négligeable.

COROLLAIRE

*Soit $(f, g) \in \mathscr{L}_B \times \mathscr{L}_B$. Alors $\int_\Omega |f - g| = 0$ ssi $f(x) = g(x)$ pour presque tout x (*i.e.* hors d'un ensemble négligeable).*

THÉORÈME VII.4.5

Soit (f_k) une suite u-bornée de $\mathscr{L}_B$ qui converge simplement sur Ω vers f (d'où $f \in \mathscr{L}_B$). Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{M}_\Omega$ tel que (f_k) converge uniformément vers f sur $\Omega \backslash A$ et que Mes $(A) \leqslant \varepsilon$.

Les démonstrations sont les mêmes qu'au tome 2.

Remarquons qu'en raison du théorème VII.4.3, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathscr{L}_B$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(]-\infty, y[) \cap f^{-1}([y, +\infty[) \in \mathscr{M}_\Omega .$$

Plus généralement, comme la tribu borélienne de $J = [-\sup(f), \sup(f)]$ est engendrée par les intervalles de J, le théorème VII.4.3 entraîne que **pour tout borélien $\mathscr{B}$ de J, si $f \in \mathscr{L}_B$, $f^{-1}(\mathscr{B})$ est mesurable.**

Intégrale sur un ensemble mesurable

Soit $A \in \mathscr{M}_\Omega$. Une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **bornée intégrable sur A** ssi la fonction $\tilde{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}|_A = f$ et $\tilde{f}|_{\Omega \backslash A} = 0$, appartient à $\mathscr{L}_B$. Dans ce cas $\int_\Omega \tilde{f}$ sera appelé **intégrale de f,** et ce nombre sera noté $\int_A f$.

Les fonctions bornées intégrables sur A forment évidemment une $\mathbb{R}$-algèbre et un espace de Riesz. Si f est l'une d'elles, $\left|\int_A f\right| \leqslant \int_A |f|$.

Exemple 1 : Si $F \in \mathscr{L}_B$, $f = F|_A$ est bornée intégrable sur A, car $\tilde{f} = F\chi_A$ et car $\mathscr{L}_B$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Exemple 2 : Soit A un compact de Ω (donc $A \in \mathscr{M}_\Omega$), et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue.** Alors *f est bornée intégrable sur A.*

En effet, f est uniformément continue car A est compact. Soit ε réel > 0. Choisissons $\eta > 0$, module de continuité uniforme de f pour ε sur A (relatif à la norme $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x\| = \operatorname*{Max}_{i=1}^{n} |x_i|$ de $\mathbb{R}^n$). Recouvrons A par un nombre fini de pavés de diamètre $\leqslant \eta$, notés $Q_1, \dots, Q_q$, et contenus dans Ω, ce qui est possible car A est compact. Soit $P_1, \dots, P_p$ des pavés *disjoints* tels que tout Q_i soit union de certains P_i, d'où $(\forall i)$ diam $(P_i) \leqslant \eta$. Soit $R_1, \dots, R_r$ ceux des P_i qui rencontrent A (d'où $A \subset \bigcup_{i=1}^{r} R_i$). Choisissons $\xi_i \in A \cap R_i$ pour tout i, et construisons $F = \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\, \chi_{R_i}$. C'est une fonction en escalier, et si $g = F|_A$, on a

$$(\forall x \in A) \quad |g(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,,$$

et de plus g est bornée intégrable sur A (cf. exemple 1). Ainsi f est limite uniforme sur A de fonctions bornées intégrables sur A, donc l'est elle-même (en fait, si des φ_k $(k \in \mathbb{N})$ sont bornées intégrables sur $A \in \mathscr{M}_\Omega$ et sont *u-bornées* et convergent *simplement* sur A vers $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}$, alors les $\tilde{\varphi}_k$ sont u-bornées et convergent simplement sur Ω vers $\tilde{\varphi}$, d'où : φ est bornée intégrable sur A).

Exemple 3 : Soit U un ouvert *de* $\mathbb{R}^n$ inclus dans Ω, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et bornée.* Alors *f est bornée intégrable sur U.*

En effet, pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $A_k = \left\{x \in U \,|\, d(x, \Omega \setminus U) \geqslant \frac{1}{k}\right\}$, d'où $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} A_k = U$ (on prend la même norme de $\mathbb{R}^n$ que dans l'exemple 2). Chaque A_k est compact et est contenu dans U. Posons $g_k = \tilde{f}\chi_{A_k}$: la suite (g_k) est u-bornée et converge simplement vers $\tilde{f}$ sur Ω. Pour tout k, $g_k \in \mathscr{L}_B$ (cf. exemple 1), d'où la conclusion : $\tilde{f} \in \mathscr{L}_B$.

Exemple 4 : Soit P un pavé compact d'intérieur non vide, avec $P \subset \Omega$. Alors, si $f \in \mathscr{L}_B(P)$, on a aussi $\tilde{f} \in \mathscr{L}_B(\Omega)$, *et l'in* *tant qu'élément de $\mathscr{L}_B(P)$ est égale à l'intégrale de f considérée comme fonction bornée intégrable sur la partie mesurable P de Ω.*

En effet c'est évident si $f \in \operatorname{Esc}(P, \mathbb{R})$. On passe ensuite au cas où $f \in \mathscr{U}_B(P)$: si alors la suite (φ_k) de $\operatorname{Esc}(P, \mathbb{R})$ vérifie $\varphi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$, on a aussi $\tilde{\varphi}_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \tilde{f}$ et $\tilde{\varphi}_k \in \operatorname{Esc}(\Omega, \mathbb{R})$, d'où $\tilde{f} \in \mathscr{U}_B(\Omega)$ et par suite $f = \tilde{f}|_P$. Il est aisé de voir que $\int_\Omega \tilde{f}$ est égal à l'intégrale de f considérée dans $\mathscr{L}_B(P)$. On passe ensuite au cas où $f \in \mathscr{V}_B(P)$, et de là au cas général sans difficulté.

Application : Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ contenue dans un pavé compact Ω de mesure > 0, la propriété « A est bornée mesurable dans Ω » ne dépend pas du choix de Ω, et si elle est vérifiée, *le nombre* $\operatorname{Mes}(A)$ *ne dépend pas non plus de Ω.*

De plus, si A est bornée mesurable et si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée, la propriété « f est bornée intégrable » ne dépend pas de Ω, et quand elle a lieu, *le nombre* $\int_A f$ *ne dépend pas de Ω.*

On peut donc dans ce cas parler de *mesure de A* et d'*intégrale de f sur A* (notée $\int_A f$) sans préciser Ω.

Exemple 5 : Soit A et B parties mesurables de Ω avec $B \subset A$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée intégrable, il en est de même de $f|_B : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Donc (cf. exemple 3), si A est ouvert et si f est continue et bornée, alors $f|_B$ est bornée intégrable.

Additivité par rapport aux ensembles

• Soit A et B des parties mesurables de Ω telles que $A \cap B = \varnothing$, et soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables. Alors $h : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $h|_A = f$ et $h|_B = g$ est bornée intégrable, et l'on a :

$$(1) \qquad \boxed{\int_{A \cup B} h = \int_A f + \int_B g},$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\int_{A \cup B} h = \int_A h + \int_B h\,.$$

En effet $\tilde{f} \in \mathscr{L}_B(\Omega)$, $\tilde{g} \in \mathscr{L}_B(\Omega)$, donc $\tilde{f} + \tilde{g} \in \mathscr{L}_B(\Omega)$. Or, $h = (\tilde{f} + \tilde{g})|_{A \cup B}$. D'où $\int_{A \cup B} h = \int_\Omega \tilde{f} + \int_\Omega \tilde{g}$. Mais $\int_\Omega \tilde{f} = \int_A f$ et $\int_\Omega \tilde{g} = \int_B g$, d'où (1).

• Soit A et B parties mesurables de Ω, et $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors si $f|_A$ et $f|_B$ sont bornées intégrables, f l'est aussi.

En effet $f|_{B \setminus A}$ est bornée intégrable (cf. exemple 5), ainsi que $f|_A$ et on se retrouve donc sous les hypothèses de (1).

• Soit A et B parties mesurables de Ω, et $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée intégrable. Montrons que *si $N = A \cap B$ est négligeable, alors*

$$(2) \qquad \boxed{\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f}\,.$$

En effet, à l'aide de (1), on a :

$$\int_{A \cup B} f = \int_{A \setminus N} f + \int_N f + \int_{B \setminus N} f$$

et
$$\int_A f = \int_{A \setminus N} f + \int_N f\,; \quad \int_B f = \int_{B \setminus N} f + \int_N f\,.$$

Tout revient donc à voir que $\int_N f = 0$, ce qui est évident, puisque

$$\left| \int_N f \right| \leqslant \int_N |f| \leqslant \left(\sup_{x \in N} |f(x)| \right) \times \text{Mes}\,(N) = 0\,.$$

Fonctions bornées négligeables

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **bornée négligeable** ssi l'ensemble $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$ est **négligeable,** f étant de plus **bornée.** Ces fonctions admettent une caractérisation remarquable.

THÉORÈME VII.4.6

*Pour que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ soit bornée négligeable, il faut et il suffit qu'elle soit **bornée intégrable** et que de plus $\int_\Omega |f| = 0$.*

Démonstration :

a) Supposons d'abord f bornée intégrable e[illegible]

Soit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \left\{x \in \Omega \mid \left| f(x) \geqslant \frac{1}{k} \right|\right\}$: c'est une partie mesurable de Ω, et

$$\int_{A_k} |f| \geqslant \frac{1}{k} \text{Mes } (A_k), \quad \text{d'où} \quad \text{Mes } (A_k) = 0 .$$

Or $\bigcup_{k \geqslant 1} A_k = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$, donc ce dernier ensemble est bien négligeable, ce qui prouve que f est bornée négligeable.

b) Supposons f bornée négligeable. Soit $M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$, et ε réel > 0 donné. Considérons un ouvert borné ω de mesure $\leqslant \varepsilon$, contenant $N = \{x \mid f(x) \neq 0\}$. Posons $U = \omega \cap \Omega$. On voit que $\chi_U \in \mathcal{U}_B$ (en écrivant ω comme union dénombrable de pavés ouverts). D'où : $-M\chi_U \leqslant f \leqslant M\chi_U$, et

$$\int_\Omega M\chi_U \leqslant M\varepsilon , \quad u = M\chi_U \in \mathcal{U}_B ,$$

$$v = -M\chi_U \in \mathcal{V}_B , \quad \int_\Omega (u - v) \leqslant 2\, M \times \int_\Omega \chi_U \leqslant 2\, M\varepsilon .$$

Cela prouve que f est bornée intégrable et que $\int_\Omega |f| = 0$, (car

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \int_\Omega f \right| \leqslant \int_\Omega M\chi_U \leqslant M\varepsilon) . \quad \blacksquare$$

Signalons pour terminer que le corollaire du théorème VII.4.4, les théorèmes VII.4.5 et VII.4.6 ainsi que les formules (1) et (2) s'étendent sans difficulté aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 1 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ une ligne polygonale fermée de m côtés $(m \geqslant 3)$ sans point double.

a) Montrer que cette ligne partage le plan en une région bornée « intérieure » et une région non bornée extérieure.

b) Montrer que la région intérieure est mesurable.

Exercice 2 : Soit A une partie bornée mesurable de $\mathbb{R}^n$, contenue dans l'intérieur ω de Ω.

a) Montrer que pour ε réel > 0 donné, il existe un ouvert $U_\varepsilon \subset \omega$ tel que $A \subset U_\varepsilon$ et $\text{Mes}_{[n]}\ (U_\varepsilon \setminus A) \leqslant \varepsilon$.

Méthode : Pour α réel > 0, construire une suite croissante de fonctions $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ continues : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, u-majorée, telle que $\lim_{k \to \infty} \varphi_k = \varphi \geqslant \chi_A$ et $\int_\Omega |\varphi - \chi_A| \leqslant \alpha$. Pour cela, utiliser une fonction $g \in \mathcal{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$ à valeurs $\geqslant 0$ telle que $g \geqslant \chi_A$, $g(x) > 1$ si $x \in A$ et $\int_\Omega (g - \chi_A) \leqslant \frac{\alpha}{2}$.

b) En considérant $\Omega \backslash A$, en déduire aussi l'existence d'un compact $K_\varepsilon \subset A$ tel que $\text{Mes}_{[n]} (A \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3 : *a*) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ bornée telle que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert borné U_ε et un compact K_ε vérifiant $K_\varepsilon \subset A \subset U_\varepsilon$, et $\text{Mes}_{[n]} (U_\varepsilon \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Montrer que A est bornée mesurable.

b) En utilisant le lemme 1 et l'exercice 2, en déduire que toute partie bornée mesurable A de $\mathbb{R}^n$ est réunion d'un ensemble borélien et d'un ensemble négligeable.

Exercice 4 : Pour qu'une partie bornée N de $\mathbb{R}^n$ soit négligeable, il faut et il suffit que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie A bornée mesurable de $\mathbb{R}^n$ contenant N et telle que $\text{Mes}_{[n]} (A) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 5 : *a*) Soit A une partie *compacte* et *négligeable* de Ω. Montrer que $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.

b) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\| = \overset{n}{\underset{i=1}{\text{Max}}} |x_i|$. On ordonne $[0, 1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ en une suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon \in \,]0, 1[$, et soit

$$U_{\varepsilon, k} = \left\{ x \in [0, 1]^n \mid \|x - r_k\| < \frac{\varepsilon}{2^{(k+n+1)/n}} \right\} ;$$

enfin soit $U_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{\varepsilon, k}$, et $L_\varepsilon = [0, 1]^n \backslash U_\varepsilon$. Montrer que L_ε est un compact non négligeable de $\Omega = [0, 1]^n$, et que $\chi_{L_\varepsilon} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ n'est pas Riemann-intégrable.

§ VII.5 *SOMMES DE RIEMANN*

Dans ce §, on fixe un pavé compact Ω de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide ($n \in \mathbb{N}^*$). On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\| = \overset{n}{\underset{i=1}{\text{Max}}} |x_i|$.

Soit X une partie mesurable de Ω ; nous appellerons **partition de Riemann** de X tout couple (ρ, ξ), où $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ est une suite finie de parties mesurables de Ω de réunion X et d'*intersections deux à deux négligeables,* et où

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \rho_1 \times \rho_2 \times \cdots \times \rho_N .$$

Par définition, le **pas** d'une telle partition est $\overset{n}{\underset{i=1}{\text{Max}}} (\text{diam } (\rho_i))$.

Exemple 1 : Soit $s = (\sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(n)})$ une *subdivision* de Ω, de cellules $P_1, \ldots, P_N$. Pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in P_1 \times \cdots \times P_N$, le couple (ρ, ξ), où $\rho = (P_1, \ldots, P_N)$, est une partition de Riemann de Ω. Son pas est le maximum des pas des subdivisions $\sigma_{(1)}, \ldots, \sigma_{(n)}$.

Remarque 1 : En utilisant des subdivisions de Ω, il est clair que pour toute partition de Riemann (ρ, ξ) (où $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ et $\xi = (\xi$

X, il existe une partition de Riemann $((\rho_{N+1}, \ldots, \rho_{N'}), (\xi_{N+1}, \ldots, \xi_{N'}))$ de $\Omega \backslash X$ telle que $((\rho_1, \ldots, \rho_{N'}), (\xi_1, \ldots, \xi_{N'}))$ soit une partition de Riemann de Ω de pas au plus égal à celui de (ρ, ξ). Cela permet de n'étudier la théorie des sommes de Riemann que sur Ω.

THÉORÈME VII.5.1

> *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction* **Riemann-intégrable.** *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* η *réel* > 0 *tel que, pour toute partition de Riemann* $(\rho, \xi) = ((\rho_1, \ldots, \rho_N), (\xi_1, \ldots, \xi_N))$ *de* Ω *de pas* $\leqslant \eta$, *la* **somme** *(dite* **de Riemann***)* $S(f, \rho, \xi) = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Mes}(\rho_k) f(\xi_k)$ *associée à* (ρ, ξ) *vérifie :* $\left| S(f, \rho, \xi) - \int_\Omega f \right| \leqslant \varepsilon.$

Démonstration :

Notons $M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons des fonctions en escalier u et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $v \leqslant f \leqslant u \leqslant M$ et que $\int_\Omega (u - v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Associons leur (ce qui est possible) une suite finie $P_1, \ldots, P_p$ de pavés compacts d'intérieur non vide, de réunion Ω, sur l'intérieur de chacun desquels u et v soient constantes, et deux à deux d'intersection négligeable. Soit $\mathscr{H}$ l'union des frontières des P_i. Pour α réel > 0, l'ensemble $\mathscr{H}_\alpha$ des points de Ω distants de $\mathscr{H}$ d'au plus α est pavable, et de mesure majorée par $C\alpha$, où C est une constante > 0 ne dépendant que des P_i. Fixons $\alpha > 0$ tel que $4MC\alpha \leqslant \varepsilon$.

Considérons une partition de Riemann $((\rho_1, \ldots, \rho_N), (\xi_1, \ldots, \xi_N)) = (\rho, \xi)$, de pas η, sur Ω. On a : $\int_\Omega f = \sum_{k=1}^{N} \int_{\rho_k} f$ (cf. formule (2) du § VII.4), d'où :

$$S(f, \rho, \xi) - \int_\Omega f = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Mes}(\rho_k) f(\xi_k) - \sum_{k=1}^{N} \int_{\rho_k} f = \sum_{k=1}^{N} \int_{\rho_k} (f(\xi_k) - f).$$

Notons :

$$I = \{k \in [\![1, N]\!] \mid \rho_k \cap \mathscr{H}_{\alpha/2} \neq \varnothing\} \quad \text{et} \quad J = [\![1, N]\!] \backslash I,$$

et imposons : $\eta < \alpha$. Si deux points de $\Omega \backslash \mathscr{H}_{\alpha/2}$ appartiennent à des P_i distincts, on voit facilement que leur distance est $\geqslant \alpha$. Par suite, pour $k \in J$, du fait que diam $(\rho_k) \leqslant \eta$, on déduit que ρ_k est contenu dans un et un seul des $P_i \backslash \mathscr{H}_{\alpha/2}$, et en particulier, que u et v sont

ρ_k ; d'où pour $k \in J$:

$$\left| \int_{\rho_k} (f(\xi_k) - f) \right| \leqslant \int_{\rho_k} (u - v) ,$$

d'où :

$$\left| \sum_{k \in J} \int_{\rho_k} (f(\xi_k) - f) \right| \leqslant \sum_{k \in J} \int_{\rho_k} (u - v) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{\rho_k} (u - v) \leqslant \int_{\Omega} (u - v) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $k \in I$, on a $\rho_k \subset \mathscr{H}_\alpha$. Comme les ρ_k sont deux à deux d'intersection négligeable, $\sum_{k \in I} \operatorname{Mes}(\rho_k) \leqslant \operatorname{Mes}(\mathscr{H}_\alpha) \leqslant C\alpha$. D'où :

$$\left| \sum_{k \in I} \int_{\rho_k} (f(\xi_k) - f) \right| \leqslant \sum_{k \in I} |f(\xi_k) - f| \leqslant \sum_{k \in I} \int_{\rho_k} 2M \leqslant 2MC\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

Au total, on obtient :

$$\left| S(f, \rho, \xi) - \int_{\Omega} f \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \quad \blacksquare$$

Compte tenu de la remarque 1, on en déduit :

Corollaire

Soit X une partie mesurable de Ω et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}$ (prolongement de f à Ω par 0 sur $\Omega \setminus X$) soit ***Riemann-intégrable.*** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute partition de Riemann (ρ, ξ) de X, la somme de Riemann $S(f, \rho, \xi)$ associée à (ρ, ξ) vérifie :*

$$\left| S(f, \rho, \xi) - \int_X f \right| \leqslant \varepsilon .$$

Le théorème VII.5.1 et son corollaire permettent en principe d'obtenir des approximations aussi serrées que l'on désire de l'intégrale d'une fonction f. Encore faut-il être capable de détecter commodément si la fonction f est Riemann-intégrable. Voici un résultat suffisamment puissant en pratique :

Théorème VII.5.2

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Si l'ensemble $\mathscr{D}$ des points de discontinuité de f est négligeable, alors f est Rieman

Démonstration :

Supposons $\mathscr{D}$ négligeable. Soit ε réel > 0. Il s'agit de construire u et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $v \leqslant f \leqslant u$ et $\int_\Omega (u-v) \leqslant \varepsilon$. Or, commençons par choisir une suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pavés ouverts tels que $\mathscr{D} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \omega_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \text{Mes}\,(\omega_k) \leqslant \varepsilon$. L'ensemble $\omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \omega_k$ est ouvert, donc $L = \Omega \backslash \omega$ est compact, et f est continue en tout point de L. En modifiant légèrement la preuve du théorème III.5.2 du tome 2, on en déduit l'existence de η réel > 0 tel que

$$(\forall (x,y) \in L \times \Omega) \quad \|x-y\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Choisissons un tel η et construisons (par exemple à l'aide d'une subdivision convenable de Ω) une *partition* de Ω en pavés $P_1, \ldots, P_p$ en nombre fini p, et tous de diamètre $\leqslant \eta$. Soit

$$I = \{k \in [\![1,p]\!] \mid P_k \subset \omega\} \quad \text{et} \quad J = [\![1,p]\!] \backslash I\,.$$

Définissons les fonctions en escalier u et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi :

Si $x \in \bigcup_{k \in I} P_k$, $v(x) = -M$ et $u(x) = M$, en posant $M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Si $x \in P_k$ avec $k \in J$, $v(x) = \lambda_k = \inf_{t \in P_k} f(t)$, $u(x) = \Lambda_k = \sup_{t \in P_k} f(t)$.

Pour $k \in J$, $\Lambda_k - \lambda_k \leqslant 2\,\varepsilon$ à cause de $P_k \cap L \neq \varnothing$ et diam $(P_k) \leqslant \eta$.

On a : $v \leqslant f \leqslant u$; $\int_\Omega (u-v) = \sum_{k=1}^{p} \int_{P_k} (u-v) = S + T$, avec :

$$S = \sum_{k \in I} \int_{P_k} (u-v) \leqslant 2\,M \sum_{k \in I} \text{Mes}\,(P_k) \leqslant 2\,M\varepsilon$$

(les P_k sont disjoints), et :

$$T = \sum_{k \in J} \int_{P_k} (u-v) = \sum_{k \in J} (\Lambda_k - \lambda_k)\,\text{Mes}\,(P_k) \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\varepsilon \sum_{k \in J} \text{Mes}\,(P_k) \leqslant 2\,\varepsilon\,\text{Mes}\,(\Omega)\,.$$

En définitive : $\int_\Omega (u-v) \leqslant 2\,\varepsilon\,(M + \text{Mes}\,(\Omega))$, et on reconnaît la définition même de « f est Riemann-intégrable ». ■

Signalons que les théorèmes VII.5.1 et VII.5.2 qui vi prouvés pour des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ s'étendent sans difficulté aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Signalons également que la réciproque du théorème VII.5.2 est exacte : la propriété « $\mathscr{D}$ est négligeable » *caractérise* donc les fonctions Riemann-intégrables, mais la démonstration est laissée à la sagacité du lecteur (cf. exercice 1).

Exemple 2 : Soit A une partie mesurable de Ω *de frontière négligeable*, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $f|_{\mathrm{Int}\,(A)}$ soit continue sur l'ouvert Int (A). Alors f est Riemann-intégrable (car $\tilde{f}$ est alors continue en tout point de $\Omega \backslash \mathrm{Fr}\,(A)$ et le théorème VII.5.2 s'applique). Cet exemple couvre déjà à lui seul un grand nombre de cas concrets.

Exercice 1 : Démontrer la réciproque du théorème VII.5.2, soit : si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors l'ensemble $\mathscr{D}$ de ses points de discontinuité est négligeable.

Indication : Pour $x \in \Omega$, soit $E(f,x) = \limsup_{t \to x} f(t) - \liminf_{t \to x} f(t)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit $A_m = \left\{x \in \Omega \mid E(f,x) \geqslant \dfrac{1}{m}\right\}$. Vérifier d'abord que $\mathscr{D} = \bigcup_{m \geqslant 1} A_m$. Puis montrer que chaque A_m est négligeable, en utilisant le théorème VII.5.1.

Exercice 2 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. On suppose qu'il existe $I \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour toute partition de Riemann (ρ, ξ) associée à une *subdivision* de Ω, et de pas $\leqslant \eta$, on ait :

$$|S(f, \rho, \xi) - I| \leqslant \varepsilon .$$

Montrer qu'un tel I est unique, que f est Riemann-intégrable et que $I = \int_\Omega f$.

Exercice 3 *(Sommes de Darboux) :* Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et s une subdivision de Ω, de cellules $P_1, \ldots, P_N$. On note

$$\mathscr{D}_-(f,s) = \sum_{i=1}^{N} m_i \,\mathrm{Mes}\,(P_i)\,, \quad \mathscr{D}_+(f,s) = \sum_{i=1}^{N} M_i \,\mathrm{Mes}\,(P_i)\,,$$

où
$$(\forall i) \quad m_i = \inf_{t \in P_i} f(t)\,, \quad M_i = \sup_{t \in P_i} f(t)$$

(ce sont les *sommes de Darboux* inférieure et supérieure de f sur s). Notons $\mathscr{S}_\Omega$ l'ensemble des subdivisions de Ω. Montrer :

a) f est Riemann-intégrable ssi les ensembles $\{\mathscr{D}_-(f,s)\}_{s \in \mathscr{S}_\Omega}$ et $\{\mathscr{D}_+(f,s)\}_{s \in \mathscr{S}_\Omega}$ sont adjacents.

b) S'il en est ainsi, le réel défini par ces ensembles adjacents est $\int_\Omega f$.

Exercice 4 : Soit A une partie bornée de Ω et $\chi_A : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ sa fonction indicatrice. On dit que A est **quarrable** ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles *pavables* P et Q tels que $P \subset A \subset Q \subset \Omega$ et Mes $(Q \backslash P) \leqslant \varepsilon$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

(I) A est quarrable. (II) χ_A est Riemann-intégrable.

(III) La frontière de A est négligeable.

En outre, si ces conditions sont satisfaites, on a :

$$\mathrm{Mes}\,(A) = \sup_{P \subset A,\, P \text{ pavable}} (\mathrm{Mes}\,(P)) = \inf_{A \subset Q \subset \Omega,\, Q \text{ pavable}} (\mathrm{Mes}\,(Q$$

Exercice 5 : Démontrer avec soin l'existence de η au début de la preuve du théorème VII.5.2, en raisonnant par l'absurde.

§ VII.6 *INVARIANCE AFFINE DE L'INTÉGRALE*

On note K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n un entier $\geqslant 1$.

Préliminaires

Rappelons que si T est un espace topologique et $f : T \longrightarrow K$ une fonction, on appelle **support de *f*** l'ensemble adhérence de $\{x \in T \mid f(x) \neq 0\}$. Lorsque T est un K-evn de dimension finie, dire que $f : T \longrightarrow K$ est *à support borné* équivaut à dire qu'elle est *à support compact.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow K$ à support compact. D'après les résultats des § VII.2 à VII.4, s'il existe un pavé compact Ω d'intérieur non vide, contenant le support de f, et tel que $f|_\Omega \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$ (resp. Esc (Ω, K), $\mathfrak{R}(\Omega, K)$), il en est de même avec tout pavé compact Ω (d'intérieur non vide) contenant le support de f, et le nombre $\displaystyle\int_\Omega f|_\Omega$ est alors indépendant du choix d'un tel Ω. Ce nombre sera noté $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f$ et appelé **l'intégrale (de Lebesgue)** de f.

Les fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow K$ à support compact pour lesquelles existe un pavé compact Ω de mesure > 0, avec $f|_\Omega \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$ (resp. Esc (Ω, K), $\mathfrak{R}(\Omega, K)$) forment une *sous-K-algèbre* de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^n, K)$, que nous noterons $\mathscr{L}_B^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)$ (resp. Esc $(\mathbb{R}^n, K)$, $\mathfrak{R}^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)$). Ces K-algèbres vérifient :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Esc}\,(\mathbb{R}^n, K) \subset \mathfrak{R}^{(0)}(\mathbb{R}^n, K) \subset \mathscr{L}_B^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)\,.$$

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f$ définie sur $\mathscr{L}_B^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)$ est une forme linéaire, dont les propriétés se déduisent de façon évidente des propriétés de l'intégrale sur un pavé.

Intégration dans un $\mathbb{R}$-ev

Considérons ici un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n ; donnons-nous un *repère affine* $\mathscr{R} = (\mathbf{0}\,; e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Il définit une *bijection affine* $\Phi_\mathscr{R} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto 0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, qui est un *homéomorphisme* pour les topologies des normes de $\mathbb{R}^n$ et de E. A l'aide de $\Phi_\mathscr{R}$, on peut transporter sur E tout ce qui a été construit sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi un **$\mathscr{R}$-pavé** de E sera l'image par $\Phi_\mathscr{R}$ d'un pavé de $\mathbb{R}^n$; si P est un $\mathscr{R}$-pavé compact d'intérieur fonction $f : P \longrightarrow K$ sera dite **$\mathscr{R}$-en escalier** (resp. **$\mathscr{R}$-Riemann intégrable, $\mathscr{R}$-bornée intégrable**) ssi $f \circ \Phi_{\mathscr{R}}$ est en escalier (resp. Riemann-intégrable, bornée intégrable) sur $\Omega = \Phi_{\mathscr{R}}^{-1}(P)$; une partie A de E est dite $\mathscr{R}$-bornée ssi $\Phi_{\mathscr{R}}^{-1}(A)$ est bornée, etc...

Une conséquence capitale de l'équivalence des normes sur E vue au tome 2, chapitre XI, est que l'ensemble des parties $\mathscr{R}$-bornées de E est *indépendant du choix de $\mathscr{R}$:* on l'appelle ensemble des **parties bornées** de E. On a donc la notion de *fonction à support compact : $E \longrightarrow K$* indépendamment de $\mathscr{R}$.

Une fonction $f : E \longrightarrow K$ à support compact sera dite **$\mathscr{R}$-bornée intégrable** (resp. $\mathscr{R}$-en escalier, $\mathscr{R}$-Riemann-intégrable) ssi $f \circ \Phi_{\mathscr{R}} \in \mathscr{L}_B^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)$ (resp. Esc $(\mathbb{R}^n, K)$, $\mathfrak{R}^{(0)}(\mathbb{R}^n, K)$) : si c'est le cas, le nombre $\int_{\mathbb{R}^n} f \circ \Phi_{\mathscr{R}}$ sera appelé sa **$\mathscr{R}$-intégrale** et noté $\int_E^{(\mathscr{R})} f$ (ou $\int_E^{(\mathscr{R})} f(x)\,dx$, x muette).

Le transport des K-algèbres (1) par $\Phi_{\mathscr{R}}$ fournit des K-algèbres de fonctions : $E \longrightarrow K$ que nous noterons $\mathscr{L}_{B,\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$, $\mathfrak{R}_{\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$, $\mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}\,(E, K)$.

Pour un $\mathscr{R}$-pavé Ω d'intérieur non vide, on définit de même les K-algèbres $\mathscr{L}_{B,\mathscr{R}}(\Omega, K)$, $\mathfrak{R}_{\mathscr{R}}(\Omega, K)$, $\mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}\,(\Omega, K)$ et l'intégrale $\int_\Omega^{(\mathscr{R})} f$ pour $f \in \mathscr{L}_{B,\mathscr{R}}(\Omega, K)$.

Or un pavé de $\mathbb{R}^n$ est toujours l'intersection d'un pavé ouvert et d'un pavé fermé (c'est évident pour $n = 1$, et dans le cas général, si I_k et J_k sont des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (I_k \cap J_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} I_k\right) \cap \left(\prod_{k=1}^{n} J_k\right)).$$

Soit alors $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ deux repères affines de E. D'après ce qui précède, *tout $\mathscr{R}$-pavé,* étant intersection d'un ouvert et d'un fermé, *est $\mathscr{R}'$-mesurable borné.* D'autre part, *la frontière d'un $\mathscr{R}$-pavé est toujours $\mathscr{R}'$-négligeable* (cf. exemple 4 du § VII.1).

Par combinaisons linéaires, on en déduit que :

$$\mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}\,(E, K) \subset \mathscr{L}_{B,\mathscr{R}'}^{(0)}(E, K).$$

Invariance par translations

Fixons le repère affine $\mathscr{R} = (\mathbf{0}\,; e_1, \ldots, e_n)$ et considérons le groupe Γ des translations de E ; si φ est une telle translation, il est immédiat de vérifier que $f \mapsto f \circ \varphi$ induit une bijection de $\mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}\,(E, K)$, (resp. $\mathfrak{R}_{\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$, $\mathscr{L}_{B,\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$) sur lui-même, et que pour toute $f \in \mathscr{L}_{B,\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$, on a : $\int_E^{(\mathscr{R})} f \circ \varphi = \int_E^{(\mathscr{R})} f$. En effet, c'est élémentaire pour $f \in \mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}\,(E, K)$ à partir de $f_i = \chi_P$, où P est un $\mathscr{R}$-pavé, par combinaisons linéaires. De là, en reprenant pas à pas la construction des fonctions bornées intégrables et de leur intégrale, on passe facilement au cas général. Nous dirons que *le groupe Γ laisse invariants les espaces* $\mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}(E, K)$, $\mathfrak{R}^{(0)}_{\mathscr{R}}(E, K)$ et $\mathscr{L}^{(0)}_{B, \mathscr{R}}(E, K)$.

Volume des parallélotopes

Un **parallélotope** de E est un ensemble de E qui est un $\mathscr{R}$-pavé pour un repère affine $\mathscr{R}$ convenable.

Si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont deux repères affines de E, d'après ce qui précède, un $\mathscr{R}$-pavé P est toujours $\mathscr{R}'$-borné mesurable. Sa $\mathscr{R}'$-mesure est nulle ssi son intérieur est vide [1] ; sa frontière est $\mathscr{R}'$-négligeable, et tout ensemble compris entre son intérieur et son adhérence a même $\mathscr{R}'$-mesure que lui.

THÉORÈME VII.6.1

Soit $\mathscr{R} = (\mathbf{0} ; e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (\mathbf{0}', e'_1, \ldots, e'_n)$ deux repères affines de E. Si P est un $\mathscr{R}'$-pavé, alors :

(3) $$\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P) = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}'}(P) \times \left|\det{}_{(e_1, \ldots, e_n)}(e'_1, \ldots, e'_n)\right| .$$

Démonstration :

Il y a des cas où la formule (3) est évidente, par exemple : (I) si $n = 1$; (II) si pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels $\neq 0$ convenables, $(\forall i \in [\![1, n]\!])$, $e'_i = \lambda_i e_i$; (III) s'il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $(\forall i \in [\![1, n]\!])\ e'_i = e_{\sigma(i)}$. D'autre part, si $\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}'}(P) = 0$, c'est que P est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, donc est $\mathscr{R}$-négligeable (cf. exemple 4 du § VII.1) et par suite (3) est encore vraie.

Examinons maintenant le cas « général » : $n \geqslant 2$ et $\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}'}(P) > 0$. Comme $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation (cf. tome 1, § XI.5, théorème XI.5.1), le passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(e'_1, \ldots, e'_n)$ peut être décomposé en un nombre fini de changements de base du type (II) ou du type ci-après : pour un $i \in [\![1, n]\!]$ convenable, et $j \in [\![1, n]\!]$ convenable avec $i \neq j$, $(e_1, \ldots, e_n) \rightsquigarrow (e'_1, \ldots, e'_n)$ avec $e'_k = e_k$ si $k \neq i$ et $e'_i = e_i + \lambda e_j$.

Tenant compte que (3) est vraie dans les cas (II) et (III), on voit en définitive qu'il suffit de prouver (3) dans l'hypothèse suivante :

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} 0' = 0 \,;\, e'_1 = e_1 \,;\, \ldots \,;\, e'_{n-1} = e_{n-1} \,; \\ e'_n = e_n + \lambda e_1 \quad \text{avec} \quad \lambda > 0, \quad \text{et} \\ P \text{ est le } \mathscr{R}'\text{-pavé image de } [0, 1]^n \longrightarrow E, \\ (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} t_i e'_i \,. \end{cases}$$

---

[1] C'est une conséquence facile de l'équivalence des normes en dimens

On peut même supposer que $0 < \lambda \leqslant 1$, car si l'on itère k fois ($k \in \mathbb{N}$) la transformation (IV), on passe de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(e'_1, \dots, e'_n)$ tel que $e'_i = e_i$ pour $i \leqslant n-1$ et $e'_n = e_n + k\lambda e_1$; donc ayant prouvé (3) dans l'hypothèse (IV) avec $0 < \lambda \leqslant 1$, on l'aura prouvé sous l'hypothèse (IV) avec $\lambda > 0$ quelconque. C'est ce que nous faisons ici : (cf. Fig. 1).

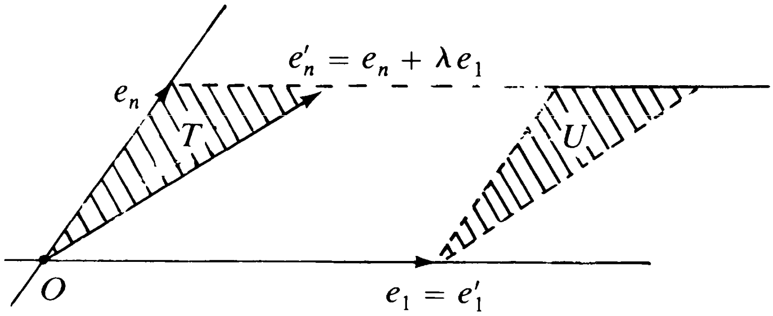


Fig. 1.

P_0 désigne le $\mathscr{R}$-pavé « unité », image de $[0,1]^n \longrightarrow E$, $(t_1, \dots, t_n) \mapsto 0 + \sum_{i=1}^{n} t_i\, e_i$. Notons T l'ensemble des points $0 + \sum_{i=1}^{n} t_i\, e_i$ avec : $(\forall i \in [\![1, n]\!])$, $t_i \in [0,1]$, et $t_1 \leqslant \lambda t_n$, et soit $U = e_1 + T$. Soit enfin $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{H}'$) l'hyperplan contenant 0 et dirigé par $(e_2, \dots, e_n)$ (resp. $e_2, \dots, e_{n-1}, e'_n$).

Un calcul élémentaire montre que : $P = (P_0 \backslash (T \backslash \mathscr{H}')) \cup U$. On a :

$$\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P) = 1 = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0)\,; \qquad \det{}_{(e_1, \dots, e_n)}(e'_1, \dots, e'_n) = 1\,; \qquad T \subset P_0\,;$$

$\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T \backslash \mathscr{H}') = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T)$ car $\mathscr{H}'$ est $\mathscr{R}$-négligeable ;
$\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T) = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(U)$ (invariance de la $\mathscr{R}$-mesure par translation). Et $U \cap P_0$ est $\mathscr{R}$-négligeable puisque c'est un $\mathscr{R}$-pavé d'intérieur vide. D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P) &= (\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0) - \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T \backslash \mathscr{H}')) + \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(U) \quad (\text{car } T \subset P_0)\\ &= \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0) - \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T) + \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(U) \quad (\text{car } \mathscr{H}' \text{ est } \mathscr{R}\text{-négligeable})\\ &= \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0) \quad (\text{car } \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(T) = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(U))\,.\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P) = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0) = \mathrm{Mes}_{\mathscr{R}}(P_0) \times \det{}_{(e_1, \dots, e_n)}(e'_1, \dots, e'_n)$$

(car le déterminant est égal à 1). ■

Par combinaisons linéaires on en déduit aussitôt :

COROLLAIRE

Soit $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ deux repères affines de E, de bases associées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Si $f \in \mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}(E, K)$ (ce qui entraîne, comme on l'a déjà vu, que $f \in \mathscr{L}^{(0)}_{B, \mathscr{R}'}(E, K)$), alors :

$$\text{(4)} \qquad \int_E^{(\mathscr{R})} f = \left(\int_E^{(\mathscr{R}')} f \right) \times \left| \det_{(e_1, \ldots, e_n)} (e'_1, \ldots, e'_n) \right| .$$

Il est maintenant loisible d'établir le résultat essentiel de ce § (et qui justifie son titre !) :

THÉORÈME VII.6.2

Les espaces $\mathscr{L}^{(0)}_{B, \mathscr{R}}(E, K)$ et $\mathfrak{R}^{(0)}_{\mathscr{R}}(E, K)$ sont indépendants du choix du repère affine $\mathscr{R}$ de E. De plus, si $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ sont deux repères affines de E, de bases associées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$, pour toute $f \in \mathscr{L}^{(0)}_{B, \mathscr{R}}(E, K)$, on a :

$$\text{(5)} \qquad \int_E^{(\mathscr{R})} f = \left(\int_E^{(\mathscr{R}')} f \right) \times \left| \det_{(e_1, \ldots, e_n)} (e'_1, \ldots, e'_n) \right| .$$

Démonstration :

Il suffit de prouver le théorème avec $K = \mathbb{R}$. Posons $\Delta = \left|\det_{(e_1, \ldots, e_n)} (e'_1, \ldots, e'_n)\right|$. Soit Ω un $\mathscr{R}$-pavé compact d'intérieur non vide contenant le support de f, puis Ω' un $\mathscr{R}'$-pavé compact contenant Ω. Nous noterons $\varphi = f|_{\Omega}$ et $\varphi^{(1)} = f|_{\Omega'}$. Lorsque $f \in \mathrm{Esc}_{\mathscr{R}}(E, \mathbb{R})$, on sait déjà que $\varphi^{(1)}$ est bornée intégrable, et que $\displaystyle\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi = \left(\int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi^{(1)} \right) \times \Delta$.

a) Supposons ensuite que φ est de la forme $\varphi = \lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k$, où $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et u-majorée de fonctions $\mathscr{R}$-en escalier sur Ω. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\varphi_k^{(1)}$ le prolongement de φ_k à Ω' par 0 sur $\Omega' \setminus \Omega$. Alors $\varphi_k^{(1)} \underset{k \to \infty}{\uparrow} \varphi^{(1)}$, la suite $(\varphi_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ est u-majorée dans $\mathscr{L}_{B, \mathscr{R}'}(\Omega', \mathbb{R})$, donc $\varphi^{(1)} \in \mathscr{L}_{B, \mathscr{R}'}(\Omega', \mathbb{R})$, et

$$\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi \ ; \quad \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi_k^{(1)} \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi^{(1)} ;$$

et de plus $(\forall k)$ $\displaystyle\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi_k = \Delta \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi_k^{(1)}$. D'où par passage à la limite : $\displaystyle\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi = \Delta \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi^{(1)}$. Autrement dit, lorsque $\varphi \circ \Phi_{\mathscr{R}} \in \mathscr{U}_B(P, \mathbb{R})$ (où P

est le pavé $\Phi_{\mathscr{R}}^{-1}(\Omega)$ de $\mathbb{R}^n$), on a prouvé que $\varphi^{(1)}$ est bornée intégrable sur Ω', et que (5) a lieu. On en déduit aussitôt qu'il en va de même lorsque $\varphi \circ \Phi_{\mathscr{R}} \in \mathscr{V}_B(P, \mathbb{R})$.

b) Passons maintenant au cas général. Soit ε réel > 0. On a deux fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $v \leqslant \varphi \leqslant u$, $u \circ \Phi_{\mathscr{R}} \in \mathscr{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$, $v \circ \Phi_{\mathscr{R}} \in \mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R})$, et $\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} (u - v) \leqslant \varepsilon$. Notant $u^{(1)}$ et $v^{(1)}$ les prolongements de u et v à Ω' par 0 sur $\Omega' \backslash \Omega$, on sait par ce qui précède que $u^{(1)} \in \mathscr{L}_{B, \mathscr{R}'}(\Omega', \mathbb{R})$, que $v^{(1)} \in \mathscr{L}_{B, \mathscr{R}'}(\Omega', \mathbb{R})$, et que

$$\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} (u - v) = \Delta \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} (u^{(1)} - v^{(1)}) .$$

De plus : $$v^{(1)} \leqslant \varphi^{(1)} \leqslant u^{(1)} .$$

Choisissons g et $h : \Omega' \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $h \leqslant v^{(1)}$; $u^{(1)} \leqslant g$; $g \circ \Phi_{\mathscr{R}'} \in \mathscr{U}_B(P', \mathbb{R})$ (où P' est le pavé $\Phi_{\mathscr{R}}^{-1}(\Omega')$ de $\mathbb{R}^n$) ; $h \circ \Phi_{\mathscr{R}'} \in \mathscr{V}_B(P', \mathbb{R})$; et $\int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} (g - u^{(1)}) \leqslant \varepsilon$; $\int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} (v^{(1)} - h) \leqslant \varepsilon$. Alors $h \leqslant \varphi^{(1)} \leqslant g$, et :

$$\int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} (g - h) \leqslant \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} (g - u^{(1)}) + (u^{(1)} - v^{(1)}) + (v^{(1)} - h) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\Delta} + \varepsilon = \varepsilon \left(2 + \frac{1}{\Delta}\right) .$$

On a donc vérifié que $\varphi^{(1)}$ est bornée intégrable sur Ω', et en même temps, que les nombres $\int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} u^{(1)} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} u$ approchent aussi près qu'on veut les nombres $\int_{\Omega'}^{\mathscr{R}'} \varphi^{(1)}$ et $\frac{1}{\Delta} \int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi$ respectivement, d'où $\int_{\Omega}^{(\mathscr{R})} \varphi = \Delta \int_{\Omega'}^{(\mathscr{R}')} \varphi^{(1)}$.

c) Il reste à voir que si φ est Riemann-intégrable sur Ω, alors $\varphi^{(1)}$ l'est sur Ω'. En raisonnant comme au *b*), on voit qu'il suffit de le prouver lorsque φ est $\mathscr{R}$-en escalier. Mais dans ce cas, cela résulte facilement, par combinaisons linéaires de fonctions indicatrices de $\mathscr{R}$-pavés, de l'exemple 2 du § VII.5, ce qui achève la démonstration. ■

En raison du théorème VII.6.2, les divers espaces $\mathfrak{R}_{\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$ (et $\mathscr{L}_{B, \mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$), pour $\mathscr{R}$ repère affine de E, sont tous égaux entre eux, ce qui permet de noter $\mathfrak{R}^{(0)}(E, K)$ (resp. $\mathscr{L}_B^{(0)}(E, K)$) sans mention de $\mathscr{R}$ l'espace égal à tous les $\mathfrak{R}_{\mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$ (resp. à tous les $\mathscr{L}_{B, \mathscr{R}}^{(0)}(E, K)$). Nous l'appellerons **espace des fonctions Riemann-intégrables à support compact** sur E (resp. espace des fonctions **bornées intégrables à support compact** sur E). De même, les parties bornées $\mathscr{R}$-mesurables de E sont *les mêmes p* *affine* $\mathscr{R}$. On les appellera simplement *parties mesurables bornées* de E. Pour « mesurer » une fonction $f \in \mathscr{L}_B^{(0)}(E, K)$, c'est-à-dire en calculer une intégrale de Lebesgue, il reste qu'*il faut choisir un repère affine* de E, puisque les intégrales $\int_E^{(\mathscr{R})} f$ ne sont pas toutes égales entre elles. Le choix d'un repère particulier $\mathscr{R}$ revient à convenir d'une **unité de volume n-dimensionnel géométrique,** à savoir *le $\mathscr{R}$-pavé unité, i.e.* l'image de

$$[0, 1]^n \longrightarrow E, \qquad (t_1, \dots, t_n) \mapsto 0 + \sum_{i=1}^{n} t_i\, e_i, \quad \text{où} \quad \mathscr{R} = (\mathbf{0}\,; e_1, \dots, e_n)\,.$$

Il est extrêmement remarquable, et loin d'être évident *a priori*, que deux repères $\mathscr{R} = (\mathbf{0}\,; e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{R}' = (\mathbf{0}\,; e_1', \dots, e_n')$ tels que $\left|\det_{(e_1, \dots, e_n)} (e_1', \dots, e_n')\right| = 1$ (qui définissent des unités de volumes géométriques *distinctes*) finissent par donner les mêmes volumes aux ensembles bornés mesurables de E (la clé de l'explication réside dans la preuve même du théorème VII.6.1).

COROLLAIRE

Soit N une partie de E. Si N est $\mathscr{R}$-négligeable pour un repère affine $\mathscr{R}$ de E, il est $\mathscr{R}'$-négligeable pour **tout** *repère affine $\mathscr{R}'$ de E.*

Démonstration :

Si N est borné, c'est une conséquence directe du théorème VII.6.2. Dans le cas général, il suffit de remarquer que N est toujours union dénombrable d'ensembles bornés, puisqu'il en est ainsi de E. ■

En raison de ce corollaire, quand on parle de **partie négligeable de E**, il est inutile de préciser un repère affine particulier.

Si on fixe un repère affine $\mathscr{R} = (\mathbf{0}\,; e_1, \dots, e_n)$ de E, on sait que $\varphi \mapsto (\varphi(0)\,; \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ définit une bijection du groupe affine de E sur l'ensemble des $(\mathbf{0}'\,; e_1', \dots, e_n') \in E^{n+1}$ tels que $\mathscr{R}' = (\mathbf{0}'\,; e_1', \dots, e_n')$ soit un repère affine de E. L'énoncé qui suit est donc exactement équivalent au théorème VII.6.2 :

THÉORÈME VII.6.3

Soit $\mathscr{R}$ un repère affine de E et $\alpha : E \longrightarrow E$ une bijection affine de E.
(I) *L'application $f \mapsto f \circ \alpha$ définit une bijection linéaire de chacun des espaces $\mathfrak{R}^{(0)}(E, K)$ et $\mathscr{L}_B^{(0)}(E, K)$ sur lui-même, dont la réciproque est $f \mapsto f \circ \alpha^{\langle -1 \rangle}$.*

(II) *Pour toute* $f \in \mathscr{L}_B^{(0)}(E, K)$, *on a :*

$$(6) \qquad \boxed{\int_E^{(\mathscr{R})} f \circ \alpha = |\det \alpha| \int_E^{(\mathscr{R})} f}\,.$$

(C'est la formule du changement de variable pour une bijection affine.)

Exercice 1 : Soit $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ deux repères affines de E. Montrer *directement* (*i.e.* sans utiliser les théorèmes VII.6.1 et VII.6.2) que pour N partie bornée de E : N est $\mathscr{R}$-négligeable $\Leftrightarrow N$ est $\mathscr{R}'$-négligeable.

Exercice 2 : Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note T_n l'ensemble des $t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$ pour $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$ et $t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leqslant 1$. Calculer le volume n-dimensionnel de T_n, en utilisant l'invariance affine de l'intégrale ; (T_n est appelé un *simplexe* n-dimensionnel).

Exercice 3 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $\mathscr{S}$ la sphère

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}\ .$$

Calculer le volume d'un des 5 polyèdres réguliers inscrits dans $\mathscr{S}$: tétraèdre régulier, octaèdre, cube, dodécaèdre, icosaèdre.

Exercice 4 : Soit n entier $\geqslant 4$, et $\mathscr{S}$ la sphère euclidienne $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ de $\mathbb{R}^n$.

a) Calculer le volume d'un pavé cubique inscrit dans $\mathscr{S}$, montrer qu'il est maximum parmi les volumes des pavés inscrits dans $\mathscr{S}$.

b) En déduire les parallélotopes de volume n-dimensionnel maximum inscrits dans un ellipsoïde donné $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{a_n^2} = 1$ de $\mathbb{R}^n$ $(a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0)$.

c) Montrer qu'il existe $n + 1$ points de $\mathscr{S}$ distincts et deux à deux équidistants (analogue du triangle équilatéral de $\mathbb{R}^2$, du tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$, etc...). Calculer le volume n-dimensionnel de leur enveloppe convexe.

Exercice 5 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on donne $\mathscr{H} =$ l'hyperboloïde à une nappe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geqslant b > 0\,;\, c > 0)\,.$$

Soit G_1, G_2, G_3 trois génératrices d'*un même système* de $\mathscr{H}$. Montrer que le volume de l'unique parallélépipède admettant G_1, G_2 et G_3 pour arêtes ne dépend pas du choix de G_1, G_2, G_3.

Exercice 6 (le théorème de Sard) : Soit p et q deux entiers $\geqslant 1$, S un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application différentiable. On appelle *point critique* de f tout $x \in S$ tel que $d_x f$ soit de rang $<$ Min (p, q), et *valeur critique* de f tout élément de $f(C)$, où C est l'ensemble des points critiques de f.

Le **théorème de Sard** s'énonce ainsi : « si $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$ ». Ce résultat est pratiquement évident si $q > p$. Il n'offre de difficulté que pour $q \leqslant p$, ce que nous supposerons dans la suite, où nous proposons d'établir le théorème par récurrence sur p.

a) Démontrer le théorème de Sard pour $p = 1$.

b) Soit $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On note, pour tout $k \geqslant 1$, C_k l'ensemble des $x \in S$ tels que toutes les dérivées partielles de f d'ordre $\leqslant k$ soient nulles

$N \geqslant 1$, on a donc $C = (C \setminus C_1) \cup \left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant N} C_k \setminus C_{k+1} \right) \cup C_{N+1}$. On munit $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ des normes standard $\mathcal{N}_\infty$ que l'on notera $\|.\|$.

Dans cette question, on se propose d'établir que, pour k assez grand, $f(C_k)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$. On fixe donc $k \geqslant 1$.

$b_1)$ Soit $a \in C_k$ et soit $l > 0$ tel que le cube compact P_l de centre $a = (a_1, \dots, a_p)$ et d'arête l soit inclus dans S. Montrer l'existence de $A > 0$ tel que :

(1) $$(\forall x \in P_l \cap C_k), \quad (\forall x' \in P_l) \quad \|f(x) - f(x')\| \leqslant A \, \|x - x'\|^{k+1}.$$

$b_2)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on subdivise chaque intervalle $\left[a_i - \dfrac{l}{2}, a_i + \dfrac{l}{2} \right]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{l}{n}$, ce qui induit une subdivision de P_l en n^p cellules cubiques $(Q_j)_{1 \leqslant j \leqslant n^p}$ d'arête $\dfrac{l}{n}$. Déduire de (1) que si l'un des Q_j, disons Q_{j_0}, rencontre C_k, alors $f(Q_{j_0})$ est contenu dans un cube de $\mathbb{R}^q$ d'arête $2A\left(\dfrac{l}{n}\right)^{k+1}$. En déduire que $f(C_k \cap P_l)$ est contenu dans une union de cubes (en nombre $\leqslant n^p$) de $\mathbb{R}^q$ d'arête $2A\left(\dfrac{l}{n}\right)^{k+1}$. Majorer la somme des volumes q-dimensionnels de ces cubes ; montrer que cette somme tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$ dès que $k > \dfrac{p}{q} - 1$, et en déduire que si $k > \dfrac{p}{q} - 1$, $f(C_k \cap P_l)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$b_3)$ Montrer que si $k > \dfrac{p}{q} - 1$, $f(C_k)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$c)$ Dans cette question, on se propose d'établir que $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$c_1)$ Soit $a \in C \setminus C_1$. Si $f = (f_1, \dots, f_q)$, on peut supposer que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0$. Soit alors $\Phi : S \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_p), x_2, \dots, x_p)$. Montrer que le théorème d'inversion locale s'applique à Φ au voisinage de a. De façon précise, soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ et $b = (b_1, \dots, b_p)$ où $b_1 = f_1(a)$, $b_2 = a_2$, $\dots$, $b_p = a_p$. Montrer qu'on peut trouver un cube ouvert Q de centre b et d'arête > 0, et une réciproque locale Ψ de Φ définie sur Q telle que sur $\Psi(Q)$, on ait $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_2, \dots, g_q$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Q telles que :
$$(\forall t = (t_1, \dots, t_p) \in Q) \quad f \circ \psi(t) = (t_1, g_2(t), \dots, g_q(t)).$$

$c_2)$ On choisit Q, Ψ, $g_2, \dots, g_q$ comme ci-dessus. On posera : $Q = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_p$ où les J_i sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On choisit un cube compact $R = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_p$, de centre b, d'arête > 0, inclus dans Q. Pour chaque $t_1 \in J_1$, on note φ_{t_1} l'application
$$(t_2, \dots, t_p) \mapsto (g_2(t_1, \dots, t_p), \dots, g_q(t_1, \dots, t_p))$$
de l'ouvert $U = J_2 \times \dots \times J_p$ de $\mathbb{R}^{p-1}$ dans $\mathbb{R}^{q-1}$. On note $g = f \circ \Psi$. Soit $\Gamma = \Phi(C \cap \Psi(Q))$, et soit Γ_{t_1} l'ensemble des points critiques de φ_{t_i}.

- Montrer que $\Gamma = \bigcup_{t_1 \in J_1} (\{t_1\} \times \Gamma_{t_1})$ et que $g(\Gamma) = \bigcup_{t_1 \in J_1} (\{t_1\} \times g(\Gamma_{t_1}))$.
- Pour $t_1 \in J_1$, prouver que Γ_{t_1} est fermé dans U, et que $\varphi_{t_1}(\Gamma_{t_1})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{q-1}$.
- Pour $t_1 \in J_1$, montrer que $g(\Gamma_{t_1} \cap (L_2 \times \dots \times L_p))$ est un compact de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{q-1}$. En utilisant la compacité de R, en déduire que $g(\Gamma \cap R)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$c_3)$ Démontrer que $f(C \setminus C_1)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$d)$ Dans cette question, on se propose d'établir que $f(C_k \setminus C_{k+1})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

$d_1)$ Soit $a \in C_k \setminus C_{k+1}$. Quitte à renuméroter les coordonnées, si $f = (f_1, \dots, f_q)$, on peut supposer que les dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f_1 en a ne sont pas tou l'on a trouvé $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = k$ et que $\dfrac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x_1^{\alpha_1 + 1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}(a) \neq 0$. On note $\mathscr{W}$ l'ensemble $\left\{ x \in S \;\middle|\; \dfrac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}(x) = 0 \right\}$ (d'où $C_k \subset \mathscr{W}$), $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ et $c = (a_2, \ldots, a_p)$.

Démontrer qu'on peut trouver un cube ouvert T de centre c et d'arête > 0 dans $\mathbb{R}^{p-1}$, un intervalle ouvert J de centre a_1 et de rayon > 0 dans $\mathbb{R}$, et une fonction $\varphi : T \longrightarrow J$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant la propriété suivante : les relations « $x_1 \in J_1$, $(x_2, \ldots, x_p) \in T$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{W}$ » sont équivalentes à : « $(x_2, \ldots, x_p) \in T$ et $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_p)$ », et de plus $(\mathscr{W} \cap (J \times T))$ ne rencontre pas C_{k+1}.

d_2) On choisit J, T, et φ comme ci-dessus. Soit $F : T \longrightarrow \mathbb{R}^q$ l'application :

$$(x_2, \ldots, x_p) \mapsto (f_1(\varphi(x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p)\,,\quad f_2(\varphi(x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p), \ldots,$$
$$f_q(\varphi(x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p))\,.$$

Soit V le voisinage de $a : J \times T$ dans $\mathbb{R}^p$.

Démontrer que $(C_k \backslash C_{k+1}) \cap V$ est inclus dans l'ensemble des points images des points critiques de F par l'application : $T \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\quad (x_2, \ldots, x_p) \mapsto (\varphi(x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p)$.

En déduire que $f((C_k \backslash C_{k+1}) \cap V)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

d_3) Prouver que $f(C_k \backslash C_{k+1})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^q$.

e) En faisant la synthèse des questions b) c) d), montrer que si l'on suppose le théorème de Sard universellement vrai à l'ordre $p - 1$, il est encore vrai à l'ordre p et conclure.

Chapitre VIII

CALCUL DES INTÉGRALES MULTIPLES

Dans tout ce chapitre K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

§ VIII.1 *APPROXIMATIONS EN MOYENNE*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons un pavé compact Ω de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide. Pour toute $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$, et tout réel $\alpha > 0$, on prouve comme à la fin du § VII.3 du tome 2 que $|f|^\alpha \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$. A partir de là, il suffit de reprendre presque mot pour mot les démonstrations du § VII.8 du tome 2 pour obtenir :

THÉORÈME VIII.1.1

Soit f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ***bornées intégrables.***

(I) *On a :*

$$\left| \int_\Omega \bar{f} g \right| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2} \times \left(\int_\Omega |g|^2 \right)^{1/2}$$

(***inégalités de Cauchy-Schwarz***). *Lorsque f et g sont* **continues,** *il y a égalité ssi f et g sont $\mathbb{C}$-proportionnelles.*

(II) *On a :*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |g|^2 \right)^{1/2}$$

Lorsque f et g sont **continues,** *il y a égalité ssi f et g sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles.*

Plus généralement :

THÉORÈME VIII.1.2

Soit p un réel > 1, et soit $q = \dfrac{p}{p-1}$ (i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, d'où $q > 1$).

(I) *Pour f et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$* ***bornées intégrables,*** *on a :*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q\right)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)},$$

et si f et g sont **continues,** *l'égalité a lieu ssi $|f|^p$ et $|g|^q$ sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles.*

(II) *Pour f et g bornées intégrables, on a :*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\right)^{1/p}$$

(inégalité de Minkowski) ,

et si f et g sont **continues,** *l'égalité a lieu ssi f et g sont $\mathbb{R}_+$-proportionnelles.*

Soit p un réel $\geqslant 1$. Pour $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$ nous poserons $\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}$. La fonction $\nu_p : \mathscr{L}_B(\Omega, K) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est une **semi-norme** (sa restriction à $\mathscr{C}^0(\Omega, K)$ est une norme).

Pour $p = 2$, cette semi-norme provient de la *forme* (*quadratique* pour $K = \mathbb{R}$, *sesquilinéaire hermitienne* pour $K = \mathbb{C}$) définie sur $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$ par : $(f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_\Omega \bar{f} g$.

A la semi-norme ν_p, exactement comme au tome 2, § VII.8, on associe les concepts d'**approximation en moyenne d'ordre *p*,** de **convergence en moyenne d'ordre *p*,** et de **densité en moyenne d'ordre *p*** dans $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$. Rappelons seulement que, par définition, une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$ est dite *convergente en moyenne d'ordre p* vers $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$ ssi : $\int_\Omega |f_k - f|^p \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, c.-à-d. ssi : $\nu_p(f_k - f) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

THÉORÈME VIII.1.3

*Soit p réel $\geqslant 1$. Chacun des K-*ev Esc (Ω, K) *et* $\mathscr{C}^0(\Omega, K)$ *est* ***dense en moyenne d'ordre p*** *dans $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$.*

Démonstration :

Pour la densité de Esc (Ω, K) dans $\mathscr{L}_B(\Omega, K$

exactement comme au théorème VII.8.3 du tome 2. Et toujours comme dans cette preuve (cf. tome 2, page 375), on voit que tout se ramène à établir que, pour tout pavé non vide $P \subset \Omega$, la fonction indicatrice $\chi_P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est approchable aussi près qu'on veut en moyenne d'ordre p par des fonctions continues. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \operatorname{Max}_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|$, et notons d la distance associée.

Soit ε réel > 0. Pour α réel > 0 notons $U_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{d}(x, P) < \alpha\}$, et $F_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus U_\alpha$. Les U_α sont des pavés ; chaque F_α est fermé et non vide, et disjoint de Adh (P). La fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_n \longrightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \dfrac{d(x, F_\alpha)}{d(x, F_\alpha) + d(x, P)}$ est continue, vaut 1 sur Adh (P) et 0 sur F_α. Notons $Q_\alpha = U_\alpha \cap \Omega$, et : $f_\alpha = \varphi_\alpha|_\Omega$; la fonction f_α est *continue*, et puisque $f_\alpha - \chi_P$ s'annule sur $P \cup (F_\alpha \cap \Omega)$ et que $0 \leqslant f_\alpha - \chi_P \leqslant 1$, on a :

$$\int_\Omega |f_\alpha - \chi_P|^p = \int_{U_\alpha \setminus P} |f_\alpha - \chi_P|^p \leqslant \int_{U_\alpha \setminus P} 1 = \text{Mes } (U_\alpha \setminus P).$$

Mais il existe A réel > 0 tel que $(\forall \alpha > 0)$ Mes $(U_\alpha \setminus P) \leqslant A\alpha$. Pour $\alpha = \dfrac{\varepsilon p}{A}$, on aura donc : $\displaystyle\int_\Omega |f_a - \chi_P|^p \leqslant \varepsilon^p$, d'où : $\nu_p(f_\alpha - \chi_P) \leqslant \varepsilon$. ■

THÉORÈME VIII.1.4

> *Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite quelconque de $\mathscr{L}_B(\Omega, K)$ et $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$ telles que $\displaystyle\int_\Omega |f_k - f| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. On peut **extraire** de la suite (f_k) une suite $(g_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ qui **converge presque partout vers f** sur Ω.*

Démonstration :

On se ramène tout de suite à $f = 0$ en remplaçant (f_k) par $(f_k - f)$.

Extrayons de (f_k) une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $(\forall k) \displaystyle\int_\Omega |g_k| \leqslant \frac{1}{2^k}$. Pour $k \geqslant 1$, posons : $A_k = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, |g_k(x)| \geqslant \dfrac{1}{k}\right\}$. Comme $\dfrac{1}{k}\chi_{A_k} \leqslant |g_k|$ et que A_k est borné mesurable, on a : $\dfrac{1}{k}\text{Mes } (A_k) \leqslant \displaystyle\int_\Omega |g_k| \leqslant \frac{1}{2^k}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $B_p = \displaystyle\bigcup_{k \geqslant p} A_k$: c'est un ensemble borné mesurable, de mesure $\leqslant \displaystyle\sum_{k \geqslant p} \frac{k}{2^k} = \rho_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

La suite $(B_p)_{p \geqslant 1}$ décroît pour l'inclusion.

L'ensemble $N = \displaystyle\bigcap_{p \geqslant 1} B_p$ est borné mesurable, et en fait *négligeable* car Mes $(N) \leqslant$ Mes $(B_p) \leqslant \rho_p$ pour tout p. Si $x \in \Omega \setminus N$, fixons p_x

$x \notin B_{p_x}$, d'où $x \notin B_p$ pour $p \geqslant p_x$. Alors pour $k \geqslant p_x$, on a : $x \notin A_k$, c'est-à-dire : $|g_k(x)| < \dfrac{1}{k}$. D'où $g_k(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, et cela est vrai pour tout $x \in \Omega \setminus N$. ■

COROLLAIRE

> *Soit $f : \Omega \longrightarrow K$ une fonction* **bornée.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
> (I) *f est bornée intégrable.*
> (II) *Il existe une suite u-bornée (φ_k) de fonctions de* Esc (Ω, K) *qui converge presque partout vers f.*
> (III) *Il existe une suite u-bornée (φ_k) de fonctions continues : $\Omega \longrightarrow K$ qui converge presque partout vers f.*

Démonstration :

Il suffit de faire la démonstration avec $K = \mathbb{R}$. Notons $M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

a) Supposons d'abord f bornée intégrable. Puisque Esc $(\Omega, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$) est dense en moyenne d'ordre 1 dans $\mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$, il existe une suite $(\psi_k)_{k \geqslant 1}$ de fonctions en escalier (resp. continues) : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_\Omega |\psi_k - f| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons $\varphi_k = \sup(-M, \inf(\psi_k, M))$. Les φ_k sont en escalier (resp. continues), et $\displaystyle\int_\Omega |\varphi_k - f| \leqslant \int_\Omega |\psi_k - f| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. En extrayant (cf. théorème VIII.1.4) de la suite (φ_k) une suite qui converge presque partout vers f, on voit que (II) (resp. (III)) est satisfait.

b) Réciproquement, soit (φ_k) une suite vérifiant (II) (resp. (III)). Notons N une partie négligeable de Ω telle que $\varphi_k(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$. Posons $\psi_k(x) = \varphi_k(x)$ si $x \in \Omega \setminus N$, et $\psi_k(x) = f(x)$ pour $x \in N$. Chaque ψ_k est bornée intégrable, la suite (ψ_k) est *u*-bornée, et elle converge simplement sur Ω vers f, d'où (cf. théorème VII.3.5) $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$. ■

Remarque 1 : La fin de cette démonstration conduit naturellement à se poser la question suivante : soit une suite (f_k) *u-bornée* de fonctions *bornées intégrables* qui converge simplement vers la fonction bornée f sur le pavé compact donné Ω, mais seulement *presque partout* dans Ω. Peut-on encore en déduire que f est bornée intégrable et que $\displaystyle\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$?

La réponse est affirmative. En effet si N est une partie négligeable de Ω telle que $f_k(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$, il suffit de poser $\psi_k(x) = f_k(x)$ pour $x \in \Omega \setminus N$ et $\psi_k(x) = f(x)$ pour $x \in N$ pour s'apercevoir que chaque ψ_k est bornée intégrable, que la suite (ψ_k) e:

qu'elle converge simplement sur Ω vers f, donc que $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ et que $\int_\Omega \psi_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$. Mais comme ψ_k et f_k sont égales presque partout, il en résulte que $\int_\Omega f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$.

Un théorème de la moyenne

Le théorème VII.7.1 du tome 2 se généralise aisément : soit d'abord A une partie bornée mesurable de $\mathbb{R}^n$ et f et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables avec $g \geqslant 0$. Alors, posant $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, on obtient immédiatement :

$$\boxed{m \int_A g \leqslant \int_A fg \leqslant M \int_A g} \tag{1}$$

Si on suppose A **compact connexe** et f **continue** (ce qui assure que f est bornée intégrable), alors $f(A) = [m, M]$. En supposant de plus $\int_A g > 0$, (1) montre que $\dfrac{\int_A fg}{\int_A g} \in [m, M]$. On a donc prouvé :

THÉORÈME VIII.1.5

Soit A une partie compacte et connexe de $\mathbb{R}^n$, et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue,** *$g : A \longrightarrow \mathbb{R}$* **bornée intégrable** *et telle que $\int_A g > 0$. Alors il existe $c \in A$ tel que*

$$\int_A fg = f(c) \int_A g \, .$$

Exercice 1 : Construire une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u-bornée dans $\mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\int_\Omega |f_k| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$, mais que $(\forall x \in \Omega)$ $f_k(x) \underset{k \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Exercice 2 : Trouver une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions bornées intégrables : $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que : $(\forall x \in [0, 1])$ $f_k(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$; $\int_0^1 f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$; et il n'existe aucune fonction $g :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ localement bornée intégrable telle que $(\forall k)$ $f_k \leqslant g$ et que l'intégrale $\int_0^1 g$ converge.

Exercice 3 : Soit p un réel >1. On donne une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$, et $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $\int_\Omega |f_k - f|^p \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer qu'on peut extraire de (f_k) une suite qui converge presque partout vers f sur Ω.

Exercice 4 : Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ bornée intégrable. Pour $m \in \mathbb{R}_+$, soit A_m l'ensemble (borné mesurable) $f^{-1}(]m, +\infty[)$. On note $M = \inf \{m \in \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{Mes}_{[n]}(A_m) = 0\}$. Vérifier que M est bien défini.

a) Démontrer que : $\left(\int_\Omega f^p\right)^{1/p} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} M.$

b) On suppose f minorée sur Ω par un réel $a > 0$. Montrer que $l = \lim\limits_{p \xrightarrow{>} 0} \left(\int_\Omega f^p\right)^{1/p}$ existe, et exprimer l à l'aide d'une intégrale.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow K$ à support borné, et bornée intégrable. Pour tout réel $p \geqslant 1$, montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\tau) - f(x)|^p \, dx \underset{\tau \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0.$

§ VIII.2 *SUPERPOSITION D'INTÉGRALES*

Fonctions définies presque partout

Soit Ω un pavé compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$). Considérons une partie A de Ω telle que $N = \Omega \setminus A$ soit *négligeable* (il s'ensuit que A est mesurable), et soit $f : A \longrightarrow K$ une fonction *bornée intégrable.* L'étude du § VII.4 montre immédiatement que si g est un prolongement quelconque de f à Ω en une fonction *bornée,* cette fonction g est *bornée intégrable ;* et de plus l'intégrale $\int_\Omega g$ est indépendante du prolongement g choisi (puisqu'elle est égale à $\int_A f$). **Par convention,** sous les hypothèses précédentes, *le nombre* $\int_A f$ *sera aussi désigné par* $\int_\Omega f$, *et la fonction* f *sera dite* **définie presque partout** *sur* Ω.

Le théorème de Fubini pour les fonctions bornées intégrables

Donnons-nous des entiers $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ et $n = p + q$ et soit P un pavé compact de $\mathbb{R}^p$ (d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^p$) et Q un pavé compact de $\mathbb{R}^q$ (d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^q$). Alors $\Omega = P \times Q$ est un pavé compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$. La variable générale de $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ sera notée par un couple tel que (x, y) ou (u, v). Grâce à l'utilisation de *lettres muettes* dans les intégrales il sera impossible de confondre une intégrale p-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^p$ avec une intégrale q-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^q$ ou une intégrale n-dimensionnelle da exemple x est une variable de $\mathbb{R}^r$, la notation $\int_A f(x)\,dx$ désigne nécessairement une intégrale *r-dimensionnelle.*

Soit alors f une fonction de $\Omega = P \times Q$ dans K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour chaque $x \in P$ (resp. pour chaque $y \in Q$), nous noterons $f_{[x]}$ (resp. $f^{[y]}$) la fonction : $Q \longrightarrow K,\ y \mapsto f(x, y)$ (resp. la fonction : $P \longrightarrow K,\ x \mapsto f(x, y)$).

Lemme 1

> *Soit* $f \in \operatorname{Esc}(\Omega, K)$. *Alors, pour tous* $x \in P$ *et* $y \in Q$, *les fonctions* $f_{[x]}$ *et* $f^{[y]}$ *appartiennent respectivement à* $\operatorname{Esc}(Q, K)$ *et* $\operatorname{Esc}(P, K)$. *Les fonctions* $F : P \longrightarrow K,\ x \mapsto \int_Q f_{[x]}$ *et* $G : Q \longrightarrow K,\ y \mapsto \int_P f^{[y]}$ *sont en escalier, et on a :*
>
> $$(1) \qquad \int_\Omega f(x, y)\,d(x, y) = \int_P F(x)\,dx = \int_Q G(y)\,dy\,.$$

Démonstration :

Par combinaisons linéaires, il suffit de prouver ce lemme lorsque $f = \chi_C$, où C est un pavé de $\mathbb{R}^n$ contenu dans Ω. Dans ce cas, on a : $C = A \times B$, A étant un pavé de $\mathbb{R}^p$ inclus dans P et B un pavé de $\mathbb{R}^q$ inclus dans Q. Notant χ_A la fonction indicatrice de A dans P et χ_B la fonction indicatrice de B dans Q, on a :

$$(\forall x \in P) \quad f_{[x]} = \chi_A(x)\,\chi_B\,; \qquad (\forall y \in Q) \quad f^{[y]} = \chi_B(y)\,\chi_A\,,$$

ce qui montre déjà que $f_{[x]}$ et $f^{[y]}$ sont des fonctions en escalier. De plus, si $x \in P$,

$$F(x) = \chi_A(x) \int_Q \chi_B(y)\,dy = \operatorname{Mes}_{[q]}(B)\,\chi_A(x)\,,$$

et de même, si $y \in Q$, $G(y) = \operatorname{Mes}_{[p]}(A)\,\chi_B(y)$, ce qui montre que $F \in \operatorname{Esc}(P, K)$ et $G \in \operatorname{Esc}(Q, K)$.

Enfin :

$$\int_P F(x)\,dx = \operatorname{Mes}_{[q]}(B) \int_P \chi_A(x)\,dx = \operatorname{Mes}_{[q]}(B) \times \operatorname{Mes}_{[p]}(A)\,.$$

Or

$$\operatorname{Mes}_{[p]}(A) \times \operatorname{Mes}_{[q]}(B) = \operatorname{Mes}_{[n]}(C) = \int_\Omega \chi_c(x, y)\,d(x, y)\,.$$

ce qui, avec le résultat analogue pour $\int_Q G(y)\,\mathrm{d}y$, achève de prouver (1). ■

THÉORÈME VIII.2.1 (Fubini)

> *Soit $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$. Il existe alors une partie N de P,* ***négligeable dans $\mathbb{R}^p$****, telle que, pour tout $x \in P\backslash N$, on ait : $f_{[x]} \in \mathscr{L}_B(Q, K)$. De plus, pour toute partie N de ce type, la fonction $F : P\backslash N \longrightarrow K$, $x \mapsto \int_Q f_{[x]}(y)\,\mathrm{d}y$ est* ***bornée intégrable,*** *et vérifie :*
>
> (2) $$\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_P F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration :

Il suffit de la faire avec $K = \mathbb{R}$.

a) Supposons d'abord que $f \in \mathscr{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$. Il existe une suite croissante de fonctions en escalier $\varphi_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$, u-majorée, telle que $\varphi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$, d'où :

(3) $$\int_\Omega \varphi_k(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)\,.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in P$, $(\varphi_k)_{[x]}$ est en escalier sur Q. Comme $(\varphi_k)_{[x]} \underset{k \to \infty}{\uparrow} f_{[x]}$ et que la suite des $(\varphi_k)_{[x]}$ est u-bornée, on voit que : $f_{[x]} \in \mathscr{U}_B(Q, \mathbb{R})$ et *a fortiori* $f_{[x]} \in \mathscr{L}_B(Q, \mathbb{R})$. Par le lemme 1, chaque fonction $F_k : P \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_Q \varphi_k(x, y)\,\mathrm{d}y$ est *en escalier,* et $\int_\Omega \varphi_k(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_P F_k(x)\,\mathrm{d}x$. La suite (F_k) est u-majorée (car si $M \in \mathbb{R}_+$ majore toutes les φ_k sur Ω, on a : $F_k(x) \leqslant M\,\mathrm{Mes}_{[q]}\,(Q)$). De $\varphi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} f$, on déduit que la suite (F_k) est croissante et que, pour tout $x \in P$, $F_k(x) \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_Q f(x, y)\,\mathrm{d}y = F(x)$. Donc $F \in \mathscr{U}_B(P, \mathbb{R})$, et à nouveau par la définition même de l'intégrale d'une fonction de $\mathscr{U}_B$, on a :

(4) $$\int_P F_k(x)\,\mathrm{d}x \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_P F(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{d'où (2)}\,.$$

b) En prenant maintenant $f \in \mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R})$, toutes les assertions du théorème sont encore vraies (avec, dans les deux cas, $N = \varnothing$).

c) Passons au cas général où $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$. Il existe alors une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions éléments de $\mathscr{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $(\forall k)\ f \leqslant \varphi_k$ et $\int_\Omega \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f$. On peut même supposer (φ_k) *décroissante* (il suffit de remplacer φ_k par inf $(\varphi$

De même, on a une suite *croissante* de fonctions $\psi_k \in \mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $(\forall k)\ \psi_k \leqslant f$ et $\int_\Omega \psi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega f$.

La suite (φ_k) décroissante et u-minorée admet sur Ω une limite simple $\varphi \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\varphi \geqslant f$ et $\int_\Omega \varphi_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} \int_\Omega \varphi$, d'où $\int_\Omega \varphi = \int_\Omega f$. De même la suite (ψ_k) admet une limite simple $\psi \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\psi \leqslant f$ et $\int_\Omega \psi_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega \psi = \int_\Omega f$. On peut alors appliquer aux φ_k et à leur limite φ (resp. aux ψ_k et à leur limite ψ) un raisonnement analogue à celui du *a*), et l'on obtient : $\int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_P \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_P \Psi(x)\,\mathrm{d}x$, chaque $\varphi_{[x]}$ et $\psi_{[x]}$ étant bornée intégrable, et chacune des deux fonctions $\Phi : P \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \int_Q \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y$ et $\Psi : P \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \int_Q \psi(x, y)\,\mathrm{d}y$ étant bornée intégrable.

En particulier $\int_P (\Phi(x) - \Psi(x))\,\mathrm{d}x = 0$. Mais, comme $\Phi - \Psi \geqslant 0$, cela entraîne que l'ensemble $N = \{x \in P \mid \Phi(x) > \Psi(x)\}$ est une partie de P **négligeable dans** $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in P \backslash N$, on a donc : $\int_Q (\varphi_{[x]} - \psi_{[x]}) = 0$, et comme $\varphi_{[x]} \geqslant \psi_{[x]}$, la fonction $\varphi_{[x]} - \psi_{[x]}$ est négligeable. Mais puisque $\psi_{[x]} \leqslant f_{[x]} \leqslant \varphi_{[x]}$, il en résulte que la fonction $\varphi_{[x]} - f_{[x]}$ est négligeable, et $f_{[x]}$ étant bornée, cela prouve que $f_{[x]} \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$, avec de plus : $\int_Q f_{[x]} = \int_Q \varphi_{[x]} = \int_Q \psi_{[x]}$. En particulier, Φ prolonge la fonction $F : P \backslash N,\ x \mapsto \int_Q f_{[x]}$, donc F est bien *bornée intégrable,* et de plus : $\int_P \Phi = \int_{P \backslash N} F$, ce qui, moyennant la convention faite au début de ce §, peut s'écrire $\int_P F$. Ainsi, toutes les assertions du théorème VIII.2.1 sont bien établies. ∎

Remarque 1 : Dans l'énoncé de ce théorème, on peut échanger les rôles de x et y, ce qui donne : il existe une partie N' de Q **négligeable dans** $\mathbb{R}^q$ telle que, pour tout $y \in Q \backslash N'$, on ait : $f^{[y]} \in \mathscr{L}_B(P, K)$; pour toute partie N' de ce type, la fonction $G : Q \backslash N' \longrightarrow K,\ y \mapsto \int_P f^{[y]}(x)\,\mathrm{d}x$ est bornée intégrable et vérifie

$$(5) \qquad \int_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_Q G(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Remarque 2 : Lorsque $f_{[x]} \in \mathscr{L}_B(Q, K)$, Il est traditi

$\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}y$ au lieu de $\int_Q f_{[x]}(y)\, \mathrm{d}y$, et de même $\int_P f(x, y)\, \mathrm{d}x$ à la place de $\int_P f^{[y]}(x)\, \mathrm{d}x$, ce qui permet d'écrire (2) sous la forme plus parlante :

$$(2') \qquad \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_P \left(\int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

On allège encore l'écriture (et c'est la notation universellement employée) en supprimant les parenthèses, et en formulant ainsi (2) et (5) :

$$(6) \qquad \boxed{\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_P \mathrm{d}x \int_Q f(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_Q \mathrm{d}y \int_P f(x, y)\, \mathrm{d}x}\,.$$

C'est sous la forme (6) qu'on retient le mieux le théorème de Fubini pour les pavés.

En prenant $f = \chi_{\mathcal{N}}$, où $\mathcal{N}$ est une partie de Ω négligeable dans $\mathbb{R}^n$, on obtient :

COROLLAIRE 1

Soit $\mathcal{N}$ une partie négligeable de Ω. Il existe une partie N de P négligeable dans $\mathbb{R}^p$ *telle que, pour tout $x \in P \backslash N$, la* coupe $\mathcal{N}_{[x]} = \{y \in Q \mid (x, y) \in \mathcal{N}\}$ *soit négligeable dans $\mathbb{R}^q$.*

(En utilisant des réunions dénombrables, il est facile d'étendre ce corollaire aux parties négligeables $\mathcal{N}$ quelconque *de* $\mathbb{R}^n$).

En vue du corollaire 2, faisons la remarque suivante : *si N est une partie de P négligeable dans $\mathbb{R}^p$, alors $N \times Q$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$.* C'est quasi-évident car si N est inclus dans la réunion d'une suite dénombrable de pavés ouverts de $\mathbb{R}^p$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Mes}_{[p]}(A_k) \leqslant \varepsilon$, on a $N \times Q \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \times Q)$, réunion de pavés de $\mathbb{R}^n$ de mesure $\mathrm{Mes}_{[p]}(A_k) \times \mathrm{Mes}_{[q]}(Q)$, soit en tout $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Mes}\,(A_k \times Q) \leqslant \varepsilon\, \mathrm{Mes}_{[q]}(Q)$. En utilisant des réunions dénombrables, on arrive facilement au résultat plus général : *pour toute partie N de $\mathbb{R}^p$ négligeable dans $\mathbb{R}^p$, $N \times \mathbb{R}^q$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$.*

COROLLAIRE 2

Soit $u \in \mathscr{L}_B(P, K)$ et $v \in \mathscr{L}_B(Q, K)$. La fonction $f : \Omega \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto u(x)\, v(y)$ est **bornée intégrable,** *et on a :*

$$(7) \qquad \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \left(\int_P u(x)\, \mathrm{d}x\right) \times \left(\int_Q v(y)\, \mathrm{d}y\right).$$

Démonstration :

La seule difficulté consiste à prouver que $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$. Utilisons le corollaire du théorème VIII.1.4 : il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier : $P \longrightarrow K$, u-bornée, et qui converge simplement vers u sur $P \backslash N$ avec $N \subset P$ et N négligeable dans $\mathbb{R}^p$; et de même $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, suite de fonctions de Esc (Q, K), u-bornée, convergeant simplement vers v sur $Q \backslash N'$ avec $N' \subset Q$ et N' négligeable dans $\mathbb{R}^q$. Soit alors $f_k : \Omega \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto u_k(x)\, v_k(y)$. Chaque f_k est en escalier sur Ω, la suite (f_k) est u-bornée et (f_k) converge simplement vers f sur $\Omega \backslash (N \times Q \cup P \times N'\cdot)$. Comme f est bornée et que $(N \times Q) \cup (P \times N')$ est, on vient de le voir, négligeable dans $\mathbb{R}^n$, on a bien : $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$. ■

Application : En prenant, dans ce corollaire 2, $u = \chi_A$ et $v = \chi_B$, fonctions indicatrices dans P (resp. Q) d'une partie A de P (resp. B de Q), bornée mesurable dans P (resp. dans Q), on voit que : *$A \times B$ est bornée mesurable dans Ω,* et : $\mathrm{Mes}\,(A \times B) = \mathrm{Mes}_{[p]}\,(A) \times \mathrm{Mes}_{[q]}\,(B)$.

Généralisation

Lorsque $\Omega = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_\nu$, où chaque P_k est un pavé compact de $\mathbb{R}^{d_k}$, d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^{d_k}$ ($\forall k$, $d_k \geqslant 1$; $d_1 + d_2 + \cdots + d_\nu = n$), par une récurrence évidente, le théorème VIII.2.1 permet de ramener, pour $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, K)$, le calcul de $\displaystyle\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_\nu)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_\nu)$ au calcul d'intégrales « superposées » sur $P_1, \ldots, P_\nu$:

$$(8) \qquad \boxed{\int_\Omega f(x_1, \ldots, x_\nu)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_\nu) = \int_{P_1} \mathrm{d}x_1 \int_{P_2} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{P_\nu} f(x_1, \ldots, x_\nu)\, \mathrm{d}x_\nu}$$

où $(x_1, \ldots, x_\nu)$ désigne la variable générale de $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_\nu}$. En particulier si chaque d_k est égal à 1, on voit que **le calcul de $\displaystyle\int_\Omega f$ se ramène en fin de compte au calcul de n intégrales « superposées » de fonctions bornées intégrables d'une seule variable réelle.**

Si l'on se souvient qu'initialement, pour une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ était destinée à donner un sens précis à la notion intuitive mais vague *d'aire sous le graphe* Γ_f de f, en voici la généralisation toute naturelle :

THÉORÈME VIII.2.2

Soit $f \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ *à valeurs* ≥ 0. *Dans* $\mathbb{R}^{n+1}$, *notons* Γ_f *le graphe de* f *et* $S_f = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mid y \leq f(x)\}$. *Alors* Γ_f *est négligeable dans* $\mathbb{R}^{n+1}$; S_f *est borné mesurable dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et, en désignant par* $\mathrm{Mes}_{[n+1]}$ *les mesures dans* $\mathbb{R}^{n+1}$, *on a :*

$$\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_f) = \int_\Omega f . \tag{9}$$

Démonstration :

On ne restreint pas la généralité en supposant que

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \alpha > 0 .$$

a) Si f est en escalier, on écrit :

$$f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \chi_{P_k} ,$$

où les λ_k sont réels ≥ 0, et où les P_k sont des pavés *disjoints*, de réunion Ω dans $\mathbb{R}^n$, et le résultat est immédiat (en réalité S_f est même pavable dans $\mathbb{R}^{n+1}$).

b) Si $f \in \mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R})$, on a une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur Ω telle que $\varphi_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} f$. On voit que : $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_{\varphi_k} = S_f$, ce qui montre déjà que S_f est borné mesurable dans $\mathbb{R}^{n=1}$, comme intersection dénombrable de bornés mesurables, et que : $\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_{\varphi_k}) \underset{k \to \infty}{\downarrow} \mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_f)$. Mais comme

$$\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_{\varphi_k}) = \int_\Omega \varphi_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} \int_\Omega f ,$$

on a bien (9). Il reste à vérifier que Γ_f est négligeable : soit ε réel > 0 ($\varepsilon < \alpha$). Posons $g = f - \varepsilon$ $(\in \mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R}))$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_\Omega (\varphi_N - f) \leq \varepsilon$. Alors $\Gamma_f \subset S_{\varphi_N} \setminus S_g$; S_{φ_N} et S_g sont bornés mesurables dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'on a :

$$\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_{\varphi_N} \setminus S_g) = \mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_{\varphi_N}) - \mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_g) =$$
$$= \int_\Omega \varphi_N - \int_\Omega (f - \varepsilon) \leq \varepsilon(1 + \mathrm{Mes}(\Omega))$$

et par conséquent Γ_f est négligeable dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

c) Si $f \in \mathscr{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$, toutes les assertions restent vraies (en utilisant $M = \sup_{x \in \Omega} f(x)$ et en appliquant *b*) à $M - f$).

d) Enfin dans le cas général, on encadre f entre une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *décroissante* de fonctions de $\mathscr{U}_B(\Omega, \mathbb{R})$ et une suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *croissante* de fonctions de $\mathscr{V}_B(\Omega, \mathbb{R})$ à valeurs $\geqslant 0$, telles que $\int_\Omega u_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} \int_\Omega f$ et $\int_\Omega v_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_\Omega f$. On en déduit l'existence de $u \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ et $v \in \mathscr{L}_B(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $u_k \underset{k \to \infty}{\downarrow} u$, $v_k \underset{k \to \infty}{\uparrow} v$, $v \leqslant f \leqslant u$, et $\int_\Omega u = \int_\Omega v = \int_\Omega f$. On a : $S_u = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_{u_k}$, et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{v_k} = S'_v \subset S_v$, d'où la mesurabilité de S_u et de S'_v, avec

$$\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_u) = \lim_{k \to \infty} \mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_{u_k}) = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega u_k = \int_\Omega f\,,$$

et $\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S'_v) = \int_\Omega f$, d'où $\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_u \backslash S'_v) = 0$. Il en résulte *a fortiori* que $S_f \backslash S'_v$ et $S_v \backslash S'_v$ sont négligeables, donc S_f et S_v sont bornés mesurables dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_v) = \mathrm{Mes}_{[n+1]}(S_f) = \int_\Omega f$. Comme au *b*) on voit que l'ensemble $N = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid v(x) \leqslant y \leqslant u(x)\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et *a fortiori* il en est de même de Γ_f. ■

Ce théorème constitue le fondement de l'application du calcul intégral au **calcul des aires planes** et au **calcul des volumes** (en dimension 3 ou plus). Considérons plus particulièrement le cas des aires planes. Soit $f \in \mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ à valeurs $\geqslant 0$, Γ_f son graphe, et $S_f = \{(x, y) \in ([a, b] \times \mathbb{R}) \mid 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Alors l'aire de S_f est par définition sa mesure 2-dimensionnelle, c'est-à-dire $\int_a^b f$ (on remarque au passage que Γ_f a une aire nulle).

Si maintenant f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}_B([a, b], \mathbb{R})$ tels que $g \leqslant f$, on définit de même l'aire « comprise » entre les deux graphes, et elle vaut $\int_a^b (f - g)$. Mais dans la pratique on a le plus souvent affaire à des arcs d'une (ou plusieurs) courbe(s) paramétrée(s) qui sont généralement de *classe* $\mathscr{C}^1$, sans point double, et constituent la frontière d'une région bornée du plan dont on recherche l'aire.

Par exemple sur la figure 1, l'arc AB est le graphe d'une fonction $f_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, l'arc BC le graphe d'une fonction $f_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. L'aire hachurée est donc égale à $\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$. Mais comme AB et BC sont des arcs Γ_1 et Γ_2 d'une même courbe paramétrée

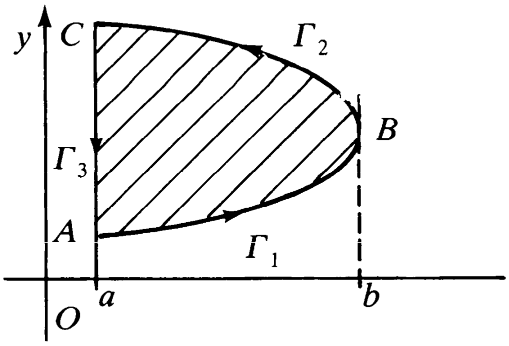


Fig. 1.

$S = \int_{t_A}^{t_B} - y\,dx + \int_{t_B}^{t_C} - y\,dx$, ce que l'on préfère écrire sous forme « d'intégrale curviligne » : $S = \int_{\Gamma_1} - y\,dx + \int_{\Gamma_2} - y\,dx = \int_{\Gamma} - y\,dx$, ce qui a l'avantage de laisser le choix du paramétrage (encore faut-il parcourir la courbe $ABCA$ dans le sens positif comme indiqué par les flèches et tenir compte du fait que $\int_{\Gamma_3} (-y\,dx) = 0$).

Le résultat précédent se généralise immédiatement à toute courbe paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux si elle est décomposable en un *nombre fini* d'arcs qui soient les *graphes de fonctions* $x \mapsto y(x)$ ou $y \mapsto x(y)$. On retiendra par cœur les formules :

$$(10) \qquad \boxed{S = \int_{\Gamma} (-y)\,dx = \int_{\Gamma} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} (x\,dy - y\,dx)}$$

qui permettent le calcul de toutes les aires planes usuelles. Dans le même esprit, on a le résultat suivant, d'un usage courant :

PPROPOSITION VIII.2.1

Soit n entier ≥ 2 et A une partie de $\mathbb{R}^{n-1}$ bornée mesurable dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On donne deux fonctions φ_1 et $\varphi_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables telles que $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et on note

$$B = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors B est une partie **bornée mesurable** *de $\mathbb{R}^n$, et pour toute fonction $f : B \longrightarrow K$ bornée intégrable dans $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\int_B f(x, y)\,d(x, y) = \int_A dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dv$$

(la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *étant définie sur* $A \backslash N$ *(où* N *est négligeable dans* $\mathbb{R}^{n-1}$*) et bornée intégrable dans* $\mathbb{R}^{n-1}$*).*

Démonstration :

Le fait que B est borné mesurable dans $\mathbb{R}^n$ est conséquence immédiate du théorème VIII.2.2. Pour les autres assertions, on considère des pavés compacts P de $\mathbb{R}^{n-1}$ et Q de $\mathbb{R}$ tels que $B \subset P \times Q = \Omega$, et que Ω soit d'intérieur non vide, puis on prolonge f à Ω en $\tilde{f}$ par 0 sur $\Omega \backslash B$ et on applique le théorème VIII.2.1 à $\tilde{f}$. ■

En particulier, cette proposition s'applique si A est un **compact de** $\mathbb{R}^{n-1}$ et si les fonctions φ_1 et φ_2 sont **continues sur** A**,** ce qui assure qu'elles sont bornées intégrables. C'est un outil puissant pour le calcul effectif d'intégrales multiples.

Exercice 1 : On donne a réel > 0. Calculer l'intégrale multiple

$$\int_{[0,a]^n} \mathrm{Ent}\,(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,\mathrm{d}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Exercice 2 (Nombre de formules de Fubini) : Soit F_n le nombre de façons d'écrire $\displaystyle\int f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$ (où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$) par superposition d'intégrales en nombre quelconque.

a) Montrer qu'à chaque écriture possible de I correspond biunivoquement une *partition* de $[\![1, n]\!]$ *munie d'un ordre total.* Si $\Pi(n, k)$ est le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ en k ensembles, on a donc : $F_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!\,\Pi(n, k)$.

b) On utilise les résultats suivants (cf. exercice 18 du § VIII.5 du tome 1) : $\Pi(n, k) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{i} (k-i)^n$; $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \frac{1}{n!}\,\Pi(n, k)\,X^n = \frac{1}{k!}\,(\exp(X) - 1)^k$. Montrer alors que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}\,F_n\,X^n = \frac{1}{2 - \exp(X)}$, et en déduire F_n.

Programmer le calcul des F_n sur ordinateur et donner explicitement F_n pour $n \in [\![1, 12]\!]$. Ecrire toutes les formules de Fubini pour $n \leqslant 4$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On donne le *coin* T_n de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$T_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1\right\}\,.$$

Soit $f_1, \ldots, f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées intégrables. On pose, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $S_{ij} = \displaystyle\int_0^1 f_i\,f_j$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $I_n = \displaystyle\int_{T_n} \Delta^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{[0,1]^n} \Delta^2(x)\,\mathrm{d}x$, avec $\Delta(x) = \det\,([f_i(x_j)]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2})$.

a) Comparer I_n et J_n en utilisant l'invariance affine de l'intégrale.

b) Montrer que : $I_n = \det\,([S_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2})$.

Exercice 4 : Soit des réels a, b $(a < b)$ et c, d $(c < d)$, puis une fonction $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow K$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *séparément continue* en x et en y. En considérant la fonction $G : [c, d] \longrightarrow K$, $Y \mapsto \displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^Y f(x, y)\,\mathrm{d}y$, montrer qu'on peut ob la formule d'interversion $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx$ sans avoir besoin de connaître la notion d'intégrale double.

Exercice 5 : On donne $a \in [0, 1]$ et on se propose de calculer l'intégrale simple $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Log}\,(1 + a\cos x)}{\cos x}\, dx$.

a) Montrer que $I(a) = J(a) = \int_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, a]} \frac{d(x, y)}{1 + y\cos x}$ et expliciter $I(a)$.

b) Retrouver directement ce résultat par développement en série entière.

Réponse : $I(a) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\text{Arc}\cos a)^2$.

Exercice 6 : *a*) Etudier la convergence de $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\lambda - \cos x}$ selon les valeurs de λ et calculer cette intégrale.

b) On donne a et b réels, avec $1 < a < b$. Calculer $I = \int_{[0, \pi] \times [a, b]} \frac{d(x, y)}{y - \cos x}$.

c) En déduire la valeur de $J = \int_0^{\pi} \text{Log}\, \frac{b - \cos x}{a - \cos x}\, dx$.

Exercice 7 : Calculer l'aire dans $\mathbb{R}^2$ de la boucle du folium de Descartes d'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

Exercice 8 : Calculer l'aire de la boucle de strophoïde de $\mathbb{R}^2$ d'équation polaire $r = a\,\frac{\cos(2\theta + \varphi)}{\cos\theta}$ $\left(a > 0, \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 9 : Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^4$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant le pavé $P = [0, 1]^2$.

On suppose $(\forall (x, y) \in P)$ $\left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}\right| \leqslant 1$, et de plus $f = 0$ sur la frontière de P. Montrer que $\left|\int_P f\right| \leqslant \frac{1}{144}$.

Indication : Prouver d'abord que si $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifie $g(0) = g(1) = 0$, alors $\int_0^1 g(t)\, dt = \int_0^1 \frac{t(1-t)}{2} g''(t)\, dt$.

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^2$, soit Δ l'ensemble borné compact ayant pour frontière la boucle de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x^3 - 3x^2 + y^2 = 0$. Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_{\Delta} (x^2 + y^2)\, d(x, y)$.

Indication : Utiliser la proposition VIII.2.1 pour ramener le calcul à celui de deux intégrales simples successives. On trouve $I = \frac{1\,152}{55}\sqrt{3}$.

Exercice 11 : Pour $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x^3 + y^3 \leqslant a^3\right\}$ $(a > 0)$, calculer

$$\int_D x^2 y^2 \sqrt{a^3 - x^3 - y^3}\, d(x, y).$$

§ VIII.3 *APPLICATIONS DU THÉORÈME DE FUBINI*

Exemple 1 : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n le compact de $\mathbb{R}^n$ égal à*

$$\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1 \textit{ et } x_i \geqslant 0 \textit{ pour tout } i\}.$$

On donne $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Calculer

$$I_n(k_1, \ldots, k_n) = \int_{\Delta_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n).$$

Solution : Appliquons le théorème de Fubini en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

$$I_n(k_1, \ldots, k_n) = \int_0^1 x_n^{k_n} \,\mathrm{d}x_n \int_{D(x_n)} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

où $(\forall x_n \in [0, 1])$, $D(x_n)$ désigne le compact

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (\forall i, x_i \geqslant 0) \text{ et } x_1 + \cdots + x_{n-1} \leqslant 1 - x_n\}$$

de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Remplaçons $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ par $((1 - x_n)\,t_1, \ldots, (1 - x_n)\,t_{n-1})$, où $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ parcourt Δ_{n-1}. L'invariance affine de l'intégrale (cf. § VII.6) montre que :

$$\int_{D(x_n)} x_1^{k_1} \ldots x_{n-1}^{k_{n-1}} \,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= (1 - x_n)^{k_1 + \cdots + k_{n-1} + n - 1} \int_{\Delta_{n-1}} t_1^{k_1} \ldots t_{n-1}^{k_{n-1}} \,\mathrm{d}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

On en déduit :

(1) $$I_n(k_1, \ldots, k_n) = I_{n-1}(k_1, \ldots, k_{n-1}) \times K_n,$$

avec $$K_n = \int_0^1 \tau^{k_n}(1 - \tau)^{k_1 + \cdots + k_{n-1} + n - 1} \,\mathrm{d}\tau.$$

Le calcul de l'intégrale simple K_n s'effectue facilement grâce à des intégrations par parties itérées et donne :

$$K_n = \frac{(k_n)!\;(k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + n - 1)!}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n)!}.$$

En utilisant (1) à partir de $I_1(k_1) = \dfrac{1}{k_1 + 1}$, on obtient alors par récurrence le résultat demandé : $I_n(k_1, \ldots, k_n) = \dfrac{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n)!}$.

Remarque 1 : Ce calcul peut être étendu au cas où les k_i sont des réels > 0 quelconques moyennant quelques notions sur l'intégrale eulérienne de première espèce $B(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1}\, \mathrm{d}x$ (cf. § VIII.5).

Exemple 2 (volume n-dimensionnel des boules euclidiennes) : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Désignons par* $\boldsymbol{B_n}$ *la boule unité de* $\mathbb{R}^n$ *égale à* $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{I+1}^{N} x_i^2 \leqslant 1\right\}$. *Calculer* Mes $(\boldsymbol{B_n})$.

Solution : Notons $\mathrm{Mes}_{[p]}\,(A)$ la mesure p-dimensionnelle d'une partie bornée mesurable de $\mathbb{R}^p$.

Appliquons le théorème de Fubini en identifiant $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. On obtient :

$$\mathrm{Mes}_{[n]}\,(\boldsymbol{B_n}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_n \int_{D(x_n)} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n-1})\,,$$

en désignant, pour tout $x_n \in [-1, 1]$, par $D(x_n)$ l'ensemble $\left\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant 1 - x_n^2\right\}$.

En remplaçant $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ par $(\sqrt{1 - x_n^2}\, t_1, \ldots, \sqrt{1 - x_n^2}\, t_{n-1})$, où $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ décrit $\boldsymbol{B_{n-1}}$, et en utilisant l'invariance affine de l'intégrale, on obtient : $(\forall x_n \in [-1, 1])$ $D(x_n) = (1 - x_n^2)^{(n-1)/2}\ \mathrm{Mes}_{[n-1]}\,(\boldsymbol{B_{n-1}})$. En posant $V_n = \mathrm{Mes}_{[n]}\,(\boldsymbol{B_n})$, on a donc :

$$(2)\quad (\forall n \geqslant 2)\quad V_n = K_n V_{n-1}\,,\quad \text{avec}\quad K_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{(n-1)/2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Comme $V_1 = 2$, on est ainsi ramené au calcul de K_n. Or, si l'on effectue le changement de variable $t = \sin\theta$, il est clair que : $K_n = 2\, W_n$, avec $W_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^p \theta\, \mathrm{d}\theta$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Les intégrales W_p sont bien connues (cf. tome 2, § VIII.2, intégrales de Wallis), et on trouve ainsi :

pour n pair $(n = 2p)$, $\qquad V_n = V_{2p} = \dfrac{\pi^p}{p!}$

pour n impair $(n = 2p + 1)$, $\quad V_n = V_{2p+1} = \dfrac{2^{p+1}\, \pi^p}{1\,.\,3\,.\,5 \ldots}$

On vérifie en particulier que $V_2 = \pi$ (aire du cercle) et $V_3 = \dfrac{4}{3}\pi$ (volume de la sphère).

Remarque 2 : L'utilisation de l'intégrale eulérienne $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ permet d'unifier les deux formules ci-dessus (en se souvenant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, valeur facile à obtenir avec la formule des compléments (cf. tome 2, pages 500) $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\mathrm{x}}{\sin \pi x}$, ou avec l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$) en une seule formule :

$$(3) \qquad \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}}\,.$$

Remarque 3 : A partir du résultat précédent, on obtient immédiatement le volume n-dimensionnel, dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, du compact $E_n = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1 \right\}$ de $\mathbb{R}^n$ qui est union de l'ellipsoïde d'équation $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{a_i^2} = 1$ et de son intérieur (les a_i désignant des nombres réels > 0).

En effet E_n est l'image de $\boldsymbol{B}_n$ par la bijection affine de $\mathbb{R}^n$: $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (a_1 t_1, \ldots, a_n t_n)$, d'où :

$$\mathrm{Mes}_{[n]}\,(E_n) = V_n\,a_1\,a_2 \ldots a_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\,a_1\,a_2 \ldots a_n\,.$$

Exemple 3 : *Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère l'hyperboloïde à une nappe $\mathscr{H}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c réels > 0). Calculer le volume V intérieur à $\mathscr{H}$ et compris entre les plans d'équation $z = \alpha$, $z = \beta$ $(\alpha < \beta)$.*

Solution : Soit D le compact défini par l'énoncé (cf. fig. 2). Les plans $z = \mathrm{Cte}$ coupent D suivant des ellipses pleines

$$\Delta_z = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 + \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

dont les demi-axes sont $a\sqrt{1 + z^2/c^2}$ et $b\sqrt{1 + z^2/c^2}$.

l'exemple 2, appliquons le théorème de Fubini en identifiant $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Il vient : $V = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}z \operatorname{Mes}_{[2]}(\Delta_z)$, d'où :

$$V = \pi ab \int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}z = \pi ab\,(\beta - \alpha)\left[1 + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3\,c^2}\right].$$

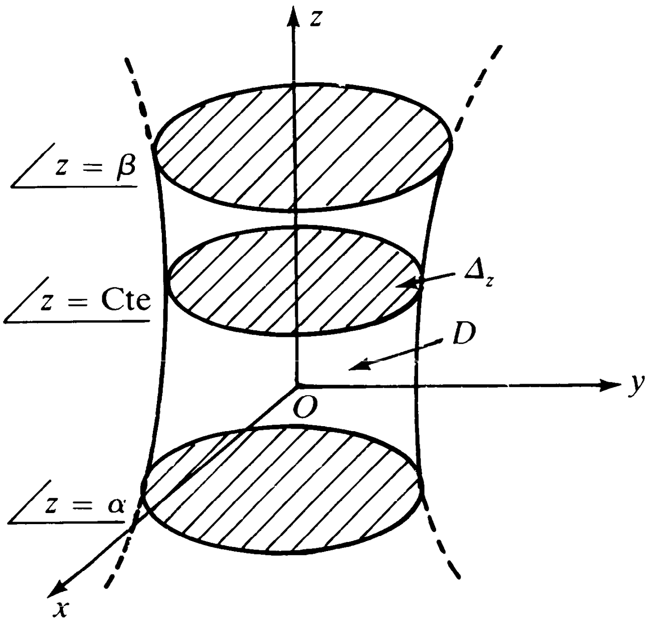


Fig. 2.

Remarque 4 : Il est clair que la méthode précédente permet le calcul du volume de tous les « solides à deux bases parallèles » par la formule $V = \int_\alpha^\beta S(z)\,\mathrm{d}z$, où $S(z)$ est l'aire de la section de ce solide par le plan de cote z. Un cas particulier remarquable est celui où $S(z)$ est une fonction polynôme de degré $\leqslant 3$ pour lequel le lecteur vérifiera sans peine la *formule* dite *« des trois niveaux »*

$$V = \frac{h}{6}\left(S(\alpha) + S(\beta) + 4\,S\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\right), \quad \text{avec} \quad h = \beta - \alpha\,.$$

C'est le cas par exemple pour un solide dont la paroi latérale est une quadrique (cf. exemple 3 ci-dessus) ou même une surface réglée quelconque.

Exemple 4 *(associativité de la convolution) :* Soit E le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Pour $(f, g) \in E^2$ et $x \in \mathbb{R}_+$, posons $(f * g)(x) = \int_0^x f(x - t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $f * g$ ainsi définie appartient-elle à E ?

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + k \in \mathbb{R}_+$. Il s'agit de prouver la continuité de $f * g$ en x_0. Pour cela, écrivons :

$$(f * g)(x_0 + k) - (f * g)(x_0) = \int_0^{x_0} (f(x_0 + k - t) - f(x_0 - t)) \times g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+k} f(x_0 + k - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En utilisant la continuité uniforme de f sur $[0, x_0 + 1]$, et en notant $A = \underset{0 \leq \tau \leq x_0 + 1}{\mathrm{Max}} |f(\tau)|$, $B = \underset{0 \leq \tau \leq x_0 + 1}{\mathrm{Max}} |g(\tau)|$, on voit que $\left|\int_{x_0}^{x_0+k} f(x_0 + k - t)\, g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq AB|k|$ pour $|k| \leq 1$, et que $\int_0^{x_0} (f(x_0 + k - t) - f(x_0 - t))\, g(t)\,\mathrm{d}t \underset{k \to 0,\ |k| \leq 1}{\longrightarrow} 0$, d'où la continuité désirée.

On a donc défini sur E une loi interne $(f, g) \mapsto f * g$, dont il est clair qu'elle est $\mathbb{C}$-*bilinéaire* et *commutative* (pour prouver la commutativité faire le changement de variable $x - t = u$).

Montrons que cette loi est *associative*. Soit $(f, g, h) \in E^3$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$[(g * f) * h](x) = [(f * g) * h](x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{x-t} f(x - t - u)\, g(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

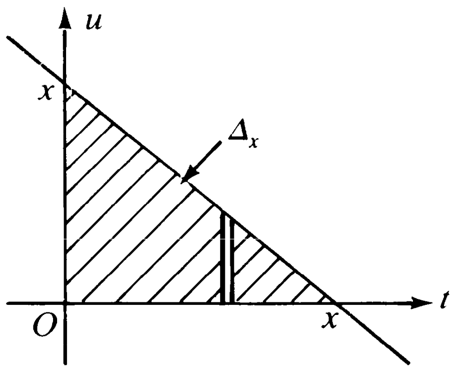


Fig. 3.

Notons Δ_x le compact $\{(t, u) \in [0, x] \times \mathbb{R} \mid 0 \leq u \leq x - t\}$ de $\mathbb{R}^2$.

La fonction $(t, u) \mapsto h(t)\, f(x - t - u)\, g(u)$ est continue sur Δ_x, et le théorème de Fubini montre que :

$$[(f * g) * h](x) = \int_{\Delta_x} h(t)\, f(x - t - u)\, g(u)\,\mathrm{d}(t, u)$$

Mais cette intégrale double peut être calculée en intégrant d'abord par rapport à t, ce qui donne :

$$[(f*g)*h](x) = \int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u \int_0^{x-u} h(t)\,f(x-t-u)\,\mathrm{d}t =$$
$$= [g*(h*f)](x) = [g*(f*h)](x).$$

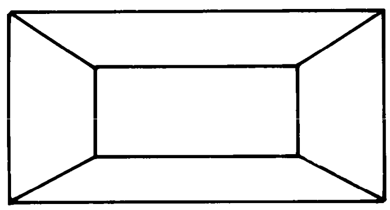
Au total, on a bien prouvé que $(g*f)*h = g*(f*h)$, ce qui est l'associativité annoncée.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on donne deux cylindres de révolution de même rayon R et dont les axes se rencontrent sous l'angle α $\left(0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Calculer le volume intérieur commun.

Exercice 2 : Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels > 0. Calculer le volume n-dimensionnel $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \displaystyle\int_{\sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leqslant 1,\, (\forall i)\, x_i \geqslant 0} \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exemple : $n = 3$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3 : La figure ci-dessus représente un tas de sable : les deux bases horizontales sont rectangulaires, les parois latérales sont des trapèzes isocèles. On donne la hauteur h et les dimensions des deux rectangles. Calculer le volume.



Exercice 4 : Soit $a > 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le compact Δ de $[-a, a]^3$ délimité par la surface d'équation $(x^2 - a^2)(z^2 - a^2) - a^2 y^2 = 0$. Trouver le volume de Δ de deux façons différentes en utilisant le théorème de Fubini.

Exercice 5 : On donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nombres complexes *distincts* et non nuls ; Δ_n désigne le compact $\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1\right\}$.

Etudier l'intégrale $\displaystyle\int_{\Delta_n} \exp(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.

On donne des réels $a_1, \ldots, a_n$ distincts. On note L le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $L(a_k) = f(a_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Démontrer, à l'aide du théorème VIII.7.2, que $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$f(x) - L(x) = \left(\prod_{k=1}^n (x - a_k)\right) \int_{\Delta_n} f^{(n)}\left[x t_1 + a_1(1 - t_n) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j+1}(t_{j+1} - t_j)\right] \mathrm{d}(t_1, \ldots, t_n)$$

où $\Delta_n = \left\{(t_1, \ldots, t_n) \in [0, 1]^n \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1\right\}$ (si $n = 1$, la somme $\sum$ est à remplacer par 0) (*Hermite*).

Exercice 7 : On donne a et b réels > 0 et on prend pour f et g les fonctions indicatrices des segments $[0, a]$ et $[0, b]$. Expliciter la convolée $f * g$.

Même question avec $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-\lambda t}$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-\mu t}$ où λ et μ sont des réels > 0 donnés.

§ VIII.4 *CHANGEMENT DE VARIABLE*

Etant donnés un ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ et une fonction $f : U \longrightarrow K$, il est commode de choisir une fois pour toutes un pavé compact P de $\mathbb{R}^n$ tel que $U \subset P$ et de prolonger f à P par 0 sur $P \backslash U$, ce prolongement étant noté $\tilde{f}$.

Soit alors U et V deux ouverts bornés non vides de $\mathbb{R}^n$, supposés *$\mathscr{C}^1$-difféomorphes* (cf. § VI.2) ; si $\Phi : U \longrightarrow V$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et $g : V \longrightarrow K$ une fonction bornée intégrable, étudions les liens entre g et $g \circ \Phi$.

PROPOSITION VIII.4.1

Si $g : V \longrightarrow K$ est bornée intégrable, alors $g \circ \Phi$ est bornée intégrable sur U.

Démonstration :

Désignons par $\tilde{g}$ le prolongement de g à un pavé compact Q de $\mathbb{R}^n$ par 0 sur $Q \backslash V$. D'après le corollaire du théorème VIII.1.4 il existe une suite u-bornée $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions *continues* : $Q \longrightarrow K$ et une partie négligeable N' de Q tels que $\varphi_k(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{g}(x)$ pour tout $x \in Q \backslash N'$. Comme N' est négligeable dans Q, l'ensemble $N = \Phi^{-1}(N' \cap V)$ est négligeable dans P (cf. § VII.1, exemple 3). Chaque fonction $\psi_k = \varphi_k \circ \Phi : U \longrightarrow K$ est continue et bornée, donc bornée intégrable, ainsi que son prolongement à P : $\tilde{\psi}_k$. Or $\tilde{\psi}_k(t) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} g \circ \Phi(t)$ presque partout sur P. Il en résulte (cf. remarque 1 du § VIII.1) que $g \circ \Phi$ est bien bornée intégrable sur P. ■

Il reste à évaluer $\displaystyle\int_V g$ sous forme d'une intégrale de fonction définie sur U (ce problème a été déjà résolu pour $n = 1$ dans le cas particulier où g était supposée *continue*). Pour résoudre ce problème dans le cas général d'une fonction $g : V \longrightarrow K$ seulement supposée bornée intégrable, nous aurons besoin de deux résultats préliminaires.

LEMME 1

Soit $f : U \longrightarrow K$ bornée intégrable. Il existe une suite u-bornée $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier : $P \longrightarrow K$ à support

U ([1]) et un ensemble négligeable $N \subset U$ tels que, pour tout $t \in U \backslash N : \xi_k(t) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(t)$.

Démonstration :

En vertu du corollaire du théorème VIII.1.4 il existe une suite $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ u-bornée de fonctions en escalier : $P \longrightarrow K$ et un sous-ensemble $\mathcal{N}$ négligeable de P tels que $\eta_k(t) \longrightarrow \tilde{f}(t)$ pour tout $t \in P \backslash \mathcal{N}$. Ecrivons U comme union dénombrable d'une suite $(R_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de pavés compacts. Posons $S_p = \bigcup_{q=0}^{p} R_q$ et $\xi_p = \eta_p \chi_{S_p}$ (où χ_{S_p} désigne la fonction indicatrice de S_p dans P). L'ensemble $N = \mathcal{N} \cap U$ et la suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi construite conviennent. ■

LEMME 2

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$, $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme noté $F = (F_1, \ldots, F_n)$ et $G = (G_1, \ldots, G_n)$ le difféomorphisme réciproque. On donne $a = (a_i) \in \mathscr{D}$, un réel $\varepsilon \in]0, 1[$, et des réels $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$ tels que

$$A = \prod_{i=1}^{n} [a_i - \alpha_i, a_i + \alpha_i] \subset \mathscr{D} .$$

On pose $b = (b_j) = F(a)$, et, si $x \in \mathscr{E}$:

$$\mu(x) = \max_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} \left| \frac{\partial G_k}{\partial x_l}(x) \right| .$$

La différentielle de F en a : $\mathrm{d}_a F$ est notée L.
Si on suppose :

$$(\forall t \in A) \qquad \mu(b) \sum_{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3} \frac{\xi_j}{\alpha_i} \left| \frac{\partial F_k}{\partial t_j}(t) - \frac{\partial F_k}{\partial t_j}(a) \right| \leqslant \varepsilon ,$$

alors :

$$(1) \quad L\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i - (1-\varepsilon)\alpha_i, a_i + (1-\varepsilon)\alpha_i] \right) \subset F(A) \subset$$
$$\subset L\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i - (1+\varepsilon)\alpha_i, a_i + (1+\varepsilon)\alpha_i] \right) .$$

([1]) Rappelons que le support d'une fonction $f : P \longrightarrow K$ est l'*adhérence* de l'ensemble $\{x \in P \mid f(x) \neq 0\}$.

Démonstration :

Par translations, on se ramène au cas où $a = b = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Sur $\mathbb{R}^n$, choisissons la norme $t = (t_1, \dots, t_n) \mapsto \|t\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} \left(\dfrac{|t_i|}{\alpha_i} \right)$.

Identifions $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ au $\mathbb{R}$-ev $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et munissons-le de la norme $|||\,.\,|||$ associée à $\|\,.\,\|$. Un calcul élémentaire montre que, pour $u = (u_{ij}) \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$|||u||| = \operatorname{Max}_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |u_{ij}| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) \leqslant \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} |u_{ij}| \,.$$

Soit $H(t) = L^{\langle -1 \rangle} \circ F(t) - t$ pour $t \in \mathscr{D}$: la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$, et sa différentielle au point t est

$$\mathrm{d}_t H = L^{\langle -1 \rangle} \circ \mathrm{d}_t F - L^{\langle -1 \rangle} \circ L \,, \quad \text{avec} \quad L^{\langle -1 \rangle} = \left[\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(0) \right].$$

D'où :

$$|||\mathrm{d}_t H||| \leqslant \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_k}(0) \left(\frac{\partial F_k}{\partial t_j}(t) - \frac{\partial F_k}{\partial t_j}(0) \right) \right|$$

$$\leqslant \mu(0) \sum_{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \left| \frac{\partial F_k}{\partial t_j}(t) - \frac{\partial F_k}{\partial t_j}(0) \right| \leqslant \varepsilon \,.$$

Lorsque t décrit A, le théorème des accroissements finis (cf. § V.2) s'applique, et donne :

$$(\forall (t, t') \in A^2) \quad \|H(t) - H(t')\| \leqslant \varepsilon \|t - t'\| \,.$$

En particulier, $(\forall t \in A)$ $\|H(t)\| \leqslant \varepsilon \|t\| \leqslant \varepsilon$ (car A est la boule unité pour la norme $\|\,.\,\|$). On en déduit déjà :

$$\|L^{\langle -1 \rangle} \circ F(t)\| = \|H(t) + t\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|t\| \quad (\forall t \in A)\,,$$

ce qui établit l'inclusion de droite dans (1).

Pour démontrer l'inclusion de gauche, prenons t' dans

$$\prod_{i=1}^{n} [-(1-\varepsilon)\alpha_i, (1-\varepsilon)\alpha_i] \,, \quad \text{c'est-à-dire dans } (1-\varepsilon)A$$

et considérons l'application $\Psi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto t' - H(t)$: elle est de classe $\mathscr{C}^1$, et $\mathrm{d}_t \Psi = -\mathrm{d}_t H$ pour $t \in \mathscr{D}$, d'où, si $t \in A$: $|||\mathrm{d}_t \Psi||| = |||\mathrm{d}_t H||| \leqslant \varepsilon$, ce qui entraîne comme ci-dessus, $(\forall t \in A)$ $\|\Psi(t) - \Psi(0)\| \leqslant \varepsilon \|t\|$, et en particulier : $\|\Psi(t)\| \leqslant \|t'\| + \varepsilon \leqslant (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 1$, d'où $\Psi(t) \in A$. Ainsi Ψ envoie A dans A. De plus Ψ est *contractante* de A dans A puisqu'on a supposé $\varepsilon < 1$ et que le théorème des accroissements finis prouve que $\forall (u, u') \in A^2$, $\|\Psi(u) - \Psi(u')\| \leqslant \varepsilon \|u - u'\|$. Donc le *théorème du point fixe* (cf. tome 2, page 59 l'espace métrique complet non vide A et prouve l'existence de $t \in A$ tel que $\Psi(t) = t$, c.-à-d. $t + H(t) = t'$, d'où $L^{\langle -1 \rangle} \circ F(t) = t'$, ce qui établit complètement (1). ■

THÉORÈME VIII.4.1

Soit $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) : U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, dont le ***jacobien***

$$(i.e.\quad \mathrm{Jac}\,(\Phi) : U \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto \det\left(\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial t_j}(t)\right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}\right))$$

est supposé **borné** *sur U. Pour toute fonction $g : V \longrightarrow K$ bornée intégrable, la fonction*

$$f : U \longrightarrow K\,, \qquad t \mapsto [g \circ \Phi(t)] \times |(\mathrm{Jac}\,(\Phi))(t)|$$

est bornée intégrable, et on a :

$$(2) \qquad \boxed{\int_V g(x)\,\mathrm{d}x = \int_U f(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Démonstration :

D'après les hypothèses, le jacobien est une fonction continue sur U (où il ne s'annule jamais), et comme on le suppose borné sur U, $|\mathrm{Jac}\,(\Phi)|$ est une fonction bornée intégrable sur U. Comme on a vu que $g \circ \Phi$ l'est aussi (cf. proposition VIII.4.1), f est bien bornée intégrable sur U. Notons $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ le difféomorphisme $\Phi^{\langle -1 \rangle}$ réciproque de Φ.

a) Supposons pour commencer que g est la *fonction indicatrice* d'une partie B de V, où B est l'image par Φ d'un *pavé A tel que* $\mathrm{Adh}\,(A) \subset U$. Comme convenu au début de ce §, on prolonge g par 0 à un pavé Q contenant V, d'où $\tilde{g} = \chi_B$, avec $B = \Phi(A)$. Si A est négligeable, B l'est aussi, et (2) est évidente. Sinon, comme $\mathrm{Adh}\,(A) \backslash A$ est négligeable, rien ne s'oppose à prendre pour A un *pavé compact*, de la forme $A = \prod_{i=1}^{n} [a_i - \alpha_i, a_i + \alpha_i]$, avec $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ et les $\alpha_i > 0$. Alors B est compact, et sa frontière est $\mathrm{Fr}\,(B) = \Phi(\mathrm{Fr}\,(A))$, donc est négligeable, ce qui prouve que de toute façon, $\tilde{g}$ est *Riemann-intégrable* sur Q. De même, $\tilde{f} = \chi_A |\mathrm{Jac}\,(\Phi)|$ est *Riemann-intégrable* sur tout pavé P contenant U.

Pour chaque entier $N \geqslant 1$, considérons la partition de Riemann ρ_N de A associée à la subdivision de A obtenue en partageant chaque intervalle $[a_i - \alpha_i, a_i + \alpha_i]$ en N intervalles de même longueur $2\,\alpha_i / N$.

Notons $\Gamma_1^{(N)}, \ldots, \Gamma_{\nu(N)}^{N}$ les cellules de ρ_N (en nombre N^n) et, pour tout $i \in [\![1, \nu(N)]\!]$: $\Delta_i^{(N)} = \Phi(\Gamma_i^{(N)})$; c_i le centre de $\Gamma_i^{(N)}$ et $d_i = \Phi(c_i)$. Les compacts $\Delta_i^{(N)}$ sont deux à deux d'intersection négligeable, et leur réunion est B, d'où :

$$(\forall N) \quad \int_V g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Mes}\,(B) = \sum_{i=1}^{\nu(N)} \mathrm{Mes}\,(\Delta_i^{(N)}) = \sum_{i=1}^{\nu(N)} g(d_i)\,\mathrm{Mes}\,(\Delta_i^{(N)})$$

Normons $\mathbb{R}^n$ une fois pour toutes : on voit que le *pas* π_N de ρ_N tend vers 0 quand $N \longrightarrow \infty$. Mais, puisque Φ est de classe $\mathscr{C}^1$, la restriction $\Phi|_A$ est lipschitzienne ; par conséquent la somme de Riemann $S_N = \sum_{i=1}^{\nu(N)} f(c_i) \text{ Mes } (\Gamma_i^{(N)})$, qui est égale à $\sum_{i=1}^{\nu(N)} |(\text{Jac } (\Phi))(c_i)| \text{Mes } (\Gamma_i^{(N)})$ puisque $g(d_i) = 1$, tend vers $\int_U f(t)\,\mathrm{d}t$ quand $N \longrightarrow \infty$. Or les cellules $\Gamma_i^{(N)}$ sont toutes *homothétiques* à A ; donc si on pose, pour tout pavé R de longueur des côtés $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$: $\tau_{ij}(R) = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}$, on a :

$$(\forall N \in \mathbb{N}^*), \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \forall k \in [\![1, \nu(N)]\!] \quad \tau_{ij}(\Gamma_i^{(N)}) = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}.$$

Par continuité des $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}$ sur $B \subset V$, et du fait que $(\forall x \in V) \det \left(\left[\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(x) \right] \right) \neq 0$, on a : $\mu = \operatorname*{Min}_{x \in B} \left(\operatorname*{Max}_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2} \left| \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_l}(x) \right| \right)$ existe et est > 0. Soit alors $\varepsilon \in]0, 1[$.

Du fait que $\pi_N \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$ et que les $\dfrac{\partial \Phi_k}{\partial t_l}(t)$ sont uniformément continues sur A, il résulte que, pour tout N assez grand, on a :

$$(\forall k \in [\![1, \nu(N)]\!]), (\forall t \in \Gamma_k^{(N)}) \ \mu \sum_{(i,j,l) \in [\![1,n]\!]^3} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \left| \frac{\partial \Phi_l}{\partial t_j}(t) - \frac{\partial \Phi_l}{\partial t_j}(c_k) \right| \leqslant \varepsilon .$$

D'après le lemme 2, pour ces entiers N, il s'ensuit que, si l'on pose $L_k = d_{c_k} \Phi$ $(1 \leqslant k \leqslant \nu(N))$, et si l'on désigne, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, par $\Gamma_{k,l}^{(N)}$ l'homothétique de $\Gamma_k^{(N)}$ dans le rapport λ par rapport au centre c_k, on a, pour tout $k \in [\![1, \nu(N)]\!]$:

$$L_k(\Gamma_{k,1-\varepsilon}^{(N)}) \subset \Delta_k^{(N)} \subset L_k(\Gamma_{k,1+\varepsilon}^{(N)}) .$$

En appliquant alors la formule donnant le volume des parallélotopes (cf. théorème VII.6.1), on en déduit :

$$|(\text{Jac } (\Phi))(c_k)| (1-\varepsilon)^n \text{ Mes } (\Gamma_k^{(N)}) \leqslant \text{Mes } (\Delta_k^{(N)}) \leqslant \leqslant |(\text{Jac } (\Phi))(c_k)| (1+\varepsilon)^n \text{ Mes } (\Gamma_k^{(N)})$$

d'où, par addition :

$$(1-\varepsilon)^n S_N \leqslant \text{Mes } (B) \leqslant (1+\varepsilon)^n S_N .$$

Comme la somme de Riemann S_N tend, quand $N \longrightarrow \infty$, vers $\int_U f(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient : $(1-\varepsilon)^n \int_U f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \text{Mes } (B) \leqslant (1+\varepsilon)^n \int_U f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien :

$$\int_U f(t)\,\mathrm{d}t = \text{Mes } (B) = \int_V g(x)\,\mathrm{d}x .$$

b) Ce cas particulier étant résolu, il n'y a aucune difficulté à passer maintenant au cas général. D'abord, par combinaisons linéaires et utilisation du théorème VII.1.1 qui permet de réduire tout ensemble pavable à une union de pavés *disjoints*, on déduit de *a*) que (2) est vraie avec toute fonction $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g \circ \Phi$ soit une *fonction en escalier sur P telle que l'adhérence de son support soit contenue dans U.*

Si enfin g est une fonction bornée intégrable quelconque, le lemme 1 montre qu'il existe une suite u-bornée $(\xi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier : $P \longrightarrow K$ dont le support est contenu dans U, et un ensemble négligeable $N \subset U$, tels que $\xi_p(t) \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} g \circ \Phi(t)$ pour tout $t \in U \backslash N$. Les fonctions $(\tilde{\eta}_p)_{p \in \mathbb{N}}$, où $(\forall p)\ \eta_p(x) = \xi_p(\Psi(x))$ pour $x \in V$, forment une suite u-bornée de fonctions bornées intégrables sur Q qui tend simplement vers g sur $V \backslash \Phi(N)$, avec $\Phi(N)$ négligeable. D'où : $\int_V \eta_p(x)\,\mathrm{d}x \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \int_V g(x)\,\mathrm{d}x$. Mais comme les ξ_p sont en escalier, on vient de voir

que $$(\forall p) \quad \int_V \eta_p(x)\,\mathrm{d}x = \int_U \xi_p(t)\,|(\mathrm{Jac}\ (\Phi))(t)|\ \mathrm{d}t\,,$$

d'où $$\int_V \eta_p(x)\,\mathrm{d}x \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \int_U (g \circ \Phi(t))\,|(\mathrm{Jac}\ (\Phi))(t)|\ \mathrm{d}t$$

car la suite $\xi_p|\mathrm{Jac}\ (\Phi)|$ est u-bornée et converge simplement vers $(g \circ \Phi) \times |\mathrm{Jac}\ (\Phi)|$ sur $U \backslash N$. L'égalité des deux limites de $\int_V \eta_p(x)\,\mathrm{d}x$ quand $p \longrightarrow \infty$ donne bien la relation (2). ■

Remarque 1 : Pour $n = 1$, lorsque U et V sont des intervalles et que g est *continue*, on retrouve le théorème connu du changement de variable dans les intégrales simples (cf. tome 2, théorème VII.6.4), à la nuance près qu'ici $f = g \circ \Phi \times |\Phi'|$ au lieu de $g \circ \Phi \times \Phi'$, d'où l'inversion des bornes si $\Phi' < 0$.

Passage en coordonnées polaires planes

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ l'application qui définit les coordonnées polaires. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et on a :

$$(\mathrm{Jac}\ (\Phi))(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r\,.$$

Elle définit donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme sur tout ouvert de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sur lequel elle est injective (ce qu'il est facile de vérifier en explicitant les réciproques locales de Φ). Pour obtenir un tel ouvert, considérons par exemple, pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in\ ]0, 2\pi]$ donnés, deux fonctions continues u_1 et u_2 $[\theta_0, \theta_0 + \varphi] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $0 \leqslant u_1(\theta) < u_2(\theta)$ pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \varphi]$. Notons U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ égal à :

$$\{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times\ ]\theta_0, \theta_0 + \varphi[\ |\ u_1(\theta) < r < u_2(\theta)\}$$

Alors Φ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \Phi(U)$ de $\mathbb{R}^2$ (cf. fig. 1) et Jac (Φ) reste borné sur U.

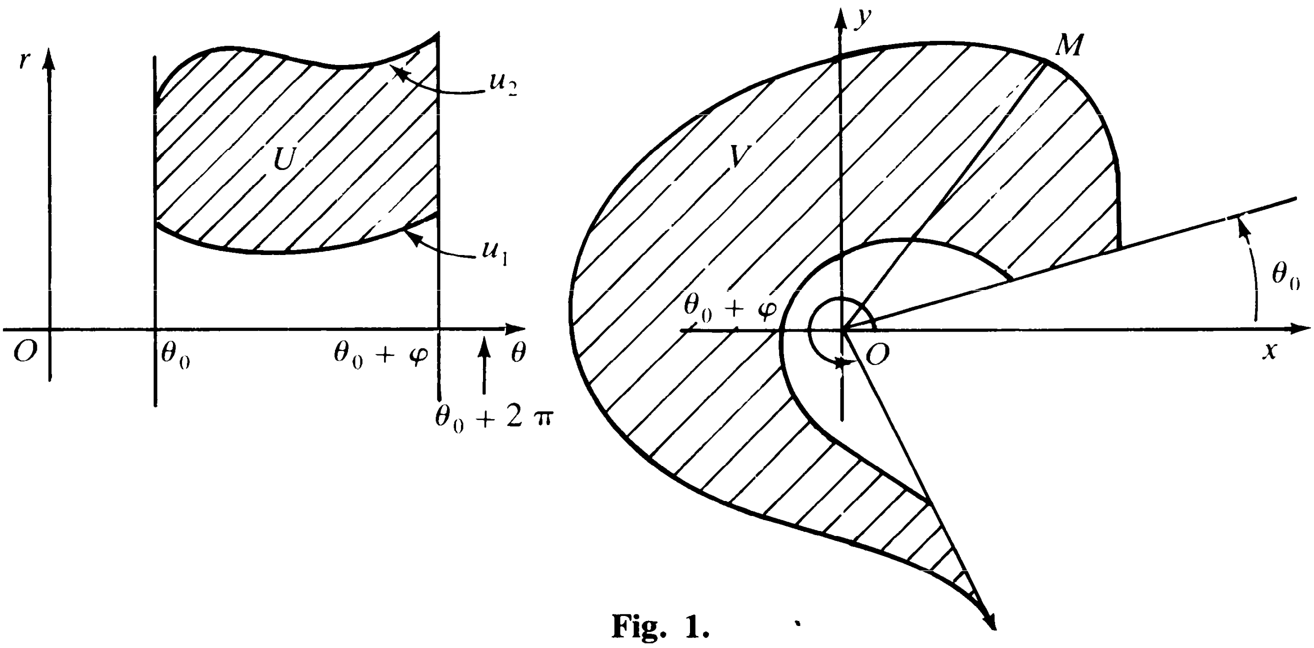


Fig. 1.

Pour toute fonction $g : V \longrightarrow K$ bornée intégrable, le théorème VIII.4.1 s'applique et donne :

$$\int_V g(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_U g(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, \mathrm{d}(r, \theta)\,.$$

La deuxième intégrale se calcule en utilisant la proposition VIII.2.1, d'où

$$(3) \qquad \boxed{\int_V g(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\varphi} \mathrm{d}\theta \int_{u_1(\theta)}^{u_2(\theta)} r g(r\cos\theta, r\sin\theta)\, \mathrm{d}r}\,.$$

Observons que la frontière de V est contenue dans $\Phi(\mathrm{Fr}\,(U))$ (et lui est même égale si $\varphi < 2\pi$), donc est négligeable. La formule (3) pourra s'appliquer par exemple si g est la restriction à V d'une fonction continue sur Adh (V), mais aussi si g est continue et bornée sur V sans être nécessairement prolongeable par continuité à Adh (V).

En particulier, avec $g = 1$, la relation (3) donne **l'aire** $\mathrm{Mes}_{[2]}(V)$ de V :

$$(4) \qquad \boxed{\mathrm{Mes}_{[2]}(V) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\varphi} (u_2^2 - u_1^2)(\theta)\, \mathrm{d}\theta}$$

formule que l'on retient aisément en disant que « l'élément d'aire balayé par le rayon vecteur OM » est $\mathrm{d}\mathscr{A} = \dfrac{1}{2} r^2\, \mathrm{d}\theta$.

Exemple 1 : *Soit* $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *euclidien canonique, soit à calculer l'aire* A *du compact* Δ *délimité par la boucle de la cubique* $\mathcal{S}$ *d'équation* $x(x^2+y^2) - a(x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2) = 0$, *où* a *est une constante* > 0 (cf. fig. 2).

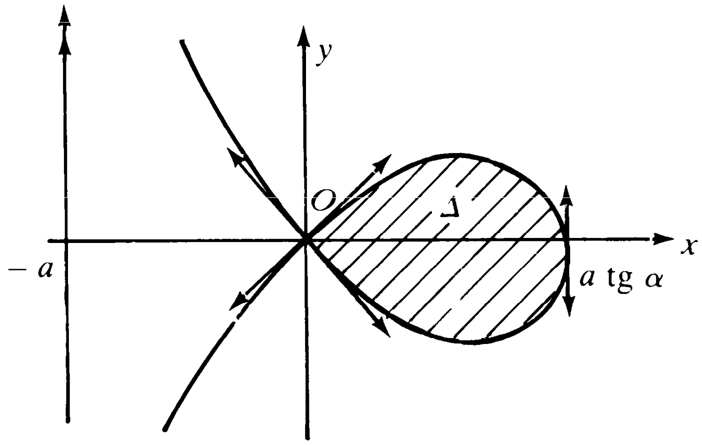


Fig. 2.

Plutôt que d'utiliser $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ comme au § VIII.2 à cause de la présence de radicaux, cherchons une équation polaire de $\mathcal{S}$:

$$r = f(\theta) = a\,\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{a \cos \theta}{\cos^2 \alpha} - \frac{a}{\cos \theta}$$

(qui au passage, permet de reconnaître une courbe cissoïdale). Le compact Δ est donc défini, avec les coordonnées polaires (r, θ) par : $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant r \leqslant f(\theta)$. D'après (4) :

$$A = \frac{a^2}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\cos^2 \theta}{\cos^4 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right)\mathrm{d}\theta\,,$$

ce qui s'intègre à vue et donne :

$$A = \frac{a^2}{2}\left[\left(\frac{1}{2\cos^4 \alpha} - \frac{2}{\cos^2 \alpha}\right)\theta + \frac{\sin 2\theta}{4\cos^4 \alpha} + \operatorname{tg} \theta\right]_{-\alpha}^{\alpha} =$$

$$= a^2\left[\frac{1 - 4\cos^2 \alpha}{2\cos^4 \alpha}\,\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4\cos^4 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right].$$

En particulier, pour $\alpha = \pi/4$, $\mathcal{S}$ est une strophoïde droite et l'aire de la boucle vaut $a^2(2 - \pi/2)$.

Passage en coordonnées sphériques

Soit $\Phi : \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi,\ r \sin \theta \cos \varphi,\ r \sin \varphi)$ l'application qui définit le passage en coordonnées sphériques. Elle

$\mathscr{C}^\infty$, et

$$\operatorname{Jac}(\Phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi .$$

Pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^3$ sur lequel Φ est injective et où $r^2\cos\varphi$ reste $\neq 0$, Φ définit donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \Phi(U)$ (ce qu'il est facile de vérifier en explicitant les réciproques locales de Φ). Pour obtenir un tel ouvert, considérons en particulier un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $]-\pi, \pi] \times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et deux fonctions continues u_1 et $u_2 : \operatorname{Adh}(\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $(\forall(\theta, \varphi) \in \operatorname{Adh}(\omega))\ 0 \leqslant u_1(\theta, \varphi) < u_2(\theta, \varphi)$, et notons U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par $U = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \omega \mid u_1(\theta, \varphi) < r < u_2(\theta, \varphi)\}$. Alors Φ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $V = \Phi(U)$ et $\operatorname{Jac}(\Phi)$ reste borné sur U. Donc, pour toute fonction $g : V \longrightarrow K$ bornée intégrable, le théorème VIII.4.1 s'applique, d'où :

$$\int_V g(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) =$$
$$= \int_U g(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}(r, \theta, \varphi)$$

et, en appliquant la proposition VIII.2. à la dernière intégrale, cela donne :

(5) $$\boxed{\begin{aligned}\int_V g(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_\omega \cos\varphi\,\mathrm{d}(\theta, \varphi) \times \\ &\times \int_{u_1(\theta,\varphi)}^{u_2(\theta,\varphi)} r^2 g(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\mathrm{d}r\end{aligned}} .$$

Observons que la frontière de V est contenue dans $\Phi(\operatorname{Fr}(U))$ (et lui est même égale lorsque $\operatorname{Adh}(\omega) \subset]-\pi, \pi[\times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) et est donc négligeable. La relation (5) pourra s'appliquer lorsque g est la restriction à V d'une fonction $\bar{g}$ continue sur $\operatorname{Adh}(V)$, et fournira donc alors $\int_{\operatorname{Adh}(V)} \bar{g}(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$, mais elle s'applique aussi si g est continue et bornée sur V sans être nécessairement prolongeable par continuité à $\operatorname{Adh}(V)$.

Exemple 2 : *Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère le compact D formé avec le tore $\mathscr{T}$ à collier nul, engendré par rotation auto* *cercle de rayon $R > 0$ tangent en 0 à Oz, et l'intérieur de $\mathcal{T}$.*

Calculer les intégrales : $A = \int_D x^2 \,\mathrm{d}(x, y, z)$, $B = \int_D y^2 \,\mathrm{d}(x, y, z)$ *et* $C = \int_D z^2 \,\mathrm{d}(x, y, z)$.

Solution : Par raison de symétrie, $A = B$.

Le passage en coordonnées sphériques transforme le compact D de $\mathbb{R}^3$ en $\Delta = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 \leqslant r \leqslant 2R\cos\varphi\right\}$ (cf. fig. 3).

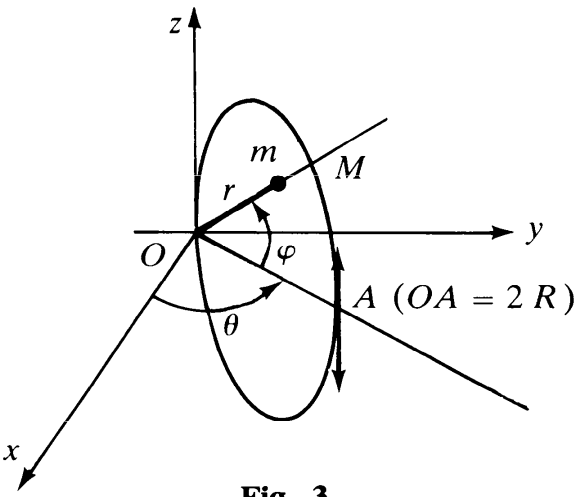


Fig. 3.

Soit U l'intérieur de Δ et $V = \Phi(U)$. On a : $U = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times \left]-\pi, \pi\right[\times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mid 0 < r < 2R\cos\varphi\right\}$. Adh $(V) = D$ (mais on remarque qu'ici $\Phi(U) = V$ est *strictement contenu* dans l'intérieur de D).

L'application Φ définit un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V, et $D \backslash V$ et $\Delta \backslash U$ sont *négligeables*, d'où :

$$A = \int_V x^2 \,\mathrm{d}(x, y, z), \quad B = \int_V y^2 \,\mathrm{d}(x, y, z), \quad C = \int_V z^2 \,\mathrm{d}(x, y, z).$$

La relation (5) donne alors :

$$A = \int_{\omega =]-\pi, \pi[\times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[} \cos\varphi \,\mathrm{d}(\theta, \varphi) \int_0^{2R\cos\varphi} r^2 \times$$

$$\times\, r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{32R^5}{5} \int_\omega \cos^2\theta \cos^8\varphi \,\mathrm{d}(\theta, \varphi)$$

d'où : $A = \dfrac{32R^5}{5} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^8\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \dfrac{256R^5}{5} W_2 W_8$ (où

W_k est l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \cos^k t \, \mathrm{d}t$), soit $A = \frac{7}{4}\pi^2 R^5$. On obtient de même :

$$C = \frac{32}{5} R^5 \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \varphi \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\pi^2 R^5.$$

Passage en coordonnées cylindriques

Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ l'application qui définit le passage en coordonnées cylindriques. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et

$$\mathrm{Jac}\,(\Phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,.$$

On pourrait reprendre à son sujet les considérations développées pour le passage en coordonnées polaires planes.

Encore un exemple de changement de variable

Les exemples qui précèdent sont loin d'épuiser toutes les possibilités de changement de variable, même en restant dans le domaine de la géométrie élémentaire.

Exemple 3 : *Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique soit T le compact délimité par le tore $\mathscr{T}$ engendré par la rotation d'un cercle Γ de rayon $R > 0$ autour d'une droite Oz de son plan, le centre de Γ étant distant de Oz de $a > R$. Soit D le compact engendré par la rotation d'un secteur de Γ* (cf. fig. 4). *Calculer le volume V de D.*

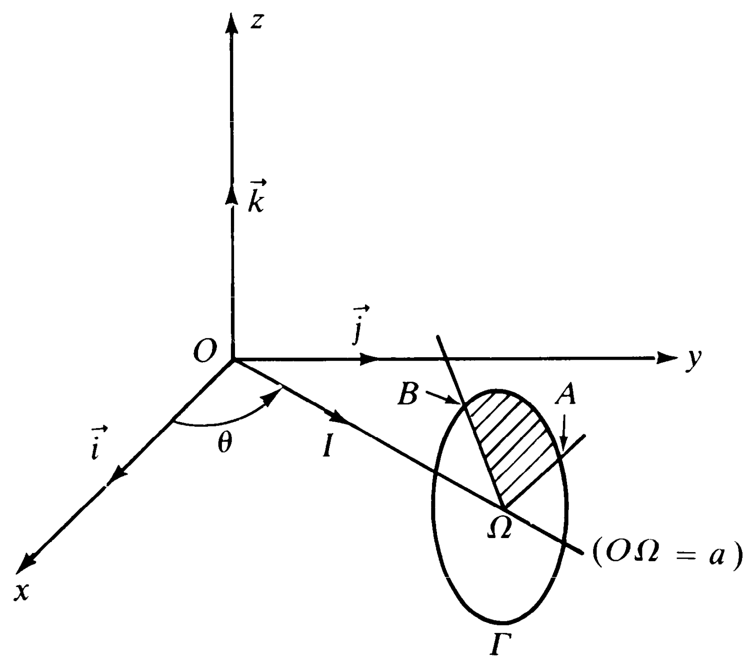


Fig. 4.

Notant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on voit que T est l'image de $[0, R] \times [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ par l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \theta, \varphi) \mapsto a\vec{I} + r(\vec{C} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi)$ avec $\vec{I} = \vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta$. On oriente $\mathbb{R}^3$ canoniquement.

On a :

$$(\text{Jac } (\Phi))(r, \theta, \varphi) = \text{produit mixte } \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] =$$

$$= [\vec{I} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi, \ (a + r \cos \varphi) \vec{J}, \ - r\vec{I} \sin \varphi + \vec{k} r \cos \varphi],$$

où $\vec{J} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{I}}{\mathrm{d}\theta}$ est tel que la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{k})$ est orthonormée et de même sens que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ce qui donne : Jac $(\Phi) = r(a + r \cos \varphi)$.

Ici encore on peut enlever des domaines d'intégration des ensembles négligeables de façon à pouvoir appliquer le théorème VIII.4.1. Pour fixer les idées, supposons le secteur défini par $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, avec $-\pi \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \pi$. On obtient alors :

$$V = \int_D \mathrm{d}(x, y, z) = \int_{[0, R] \times [-\pi, \pi] \times [\alpha, \beta]} r(a + r \cos \varphi) \, \mathrm{d}(r, \theta, \varphi) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r(a + r \cos \varphi) \, \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(a \frac{R^2}{2} + \cos \varphi \, \frac{R^3}{3} \right) \mathrm{d}\varphi = \pi R^2 \left[a(\beta - \alpha) + \frac{2R}{3} (\sin \beta - \sin \alpha) \right].$$

En particulier, si on prend $\alpha = -\pi$ et $\beta = \pi$, on obtient Mes $(T) = 2\pi^2 aR^2$.

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} \, \mathrm{d}(x, y)$, où D est le compact limité par la courbe plane d'équation $(x^2 + y^2)^2 - a^2(\lambda x^2 - y^2) = 0$ $(a > 0, \ \lambda > 0$ donnés).

b) $\displaystyle\int_{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, \, z \geqslant 0} z \cos (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x, y, z)$ $(a > 0)$.

c) $\displaystyle\int_E (MF + MF')^n \, \mathrm{d}(x, y)$ et $\displaystyle\int_E MF \times MF' \, \mathrm{d}(x, y)$, où E est l'intérieur d'une ellipse de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, et où $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

d) $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}(x, y)$, où D est la portion du plan $\mathbb{R}^2$ comprise à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = a^2$ et de l'ellipse $3x^2 + 4y^2 + 2ax - a^2 = 0$.

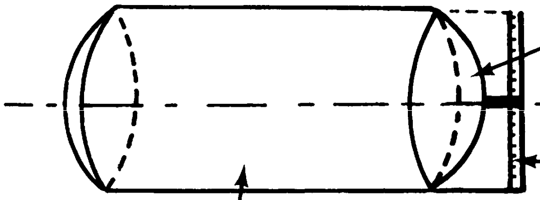
Exercice 2 : Calculer le volume du compact de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$(x^2 + y^2)^2 + z^4 - a^3(x - y) \leqslant 0 \quad (a > 0).$$

Exercice 3 : Volume du compact de $\mathbb{R}^3$ délimité sur l'une des nappes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ $(a>0, b>0, c>0)$ par un plan sécant.

Exercice 4 : La cuve à mazout figurée ci-dessous est posée horizontalement.

Le problème consiste en l'étalonnage d'une jauge verticale (soit extérieure à la cuve, soit flottante) qui, en fonction du niveau atteint par le mazout, indiquera le volume de mazout restant dans la cuve.



Exercice 5 *(intégrales de Fresnel) :* Pour $t \in \mathbb{R}_+$ on désigne par C_t le compact $[0,t]\times[0,t]$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Exprimer de deux manières différentes les intégrales $\int_{C_t} \sin\,(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$ et $\int_{C_t} \cos\,(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$.

b) Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$I(T)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_{C_t} \sin\,(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) \quad \text{et} \quad J(T)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t \int_{C_t} \cos\,(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Montrer que : $I(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ et $J(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire la valeur des intégrales de Fresnel

$$A=\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 6 *(coordonnées sphériques en dimension n) :* Soit n un entier $\geqslant 3$. On considère l'application

$\Phi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \mapsto$

$\mapsto (r\sin\theta_1, r\cos\theta_1\sin\theta_2, r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3, \ldots, r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1})$.

a) Utiliser le changement de variable défini par Φ_n pour retrouver le volume n-dimensionnelle V_n de la boule euclidienne unité B_n de $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $g : [R_1, R_2] \longrightarrow K$ bornée intégrable (avec R_1, R_2 réels ; $0 \leqslant R_1 < R_2$). Si $x \in \mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, on pose $\nu(x)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Utiliser Φ_n pour établir :

$$\int_{R_1\leqslant \nu(x)\leqslant R_2} g(\nu(x))\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)=nV_n\int_{R_1}^{R_2} g(r)\,r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,.$$

Exercice 7 : Soit a, b, c, α, β, γ des réels >0 tels que $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1$. Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les deux surfaces $\mathscr{S}_1$ d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ et $\mathscr{S}_2$ d'équation : $\frac{\alpha^2}{x^2}+\frac{\beta^2}{y^2}+\frac{\gamma^2}{z^2}=1$. Montrer que $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont tangentes en 8 points. Les plans tangents communs en ces 8 points délimitent un polyèdre dont on calculera le volume V.

Réponse : $V=\frac{4}{3}\,(abc)^{3/2}(\alpha\beta\gamma)^{-1/2}$.

Exercice 8 : On donne, en fonction du paramètre $t \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point $M(t) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $(2\cos^2 t,\ \sin 2t,\ 2\sin t\cos^2 t)$. Ce point se projette sur le plan xOy en $P(t)$ de coordonnées $(2\cos^2 t,\ \sin 2t,\ 0)$. Calculer le volume balayé par l'intérieur du triangle OMP quand t décrit $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 9 : On considère dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique l'ovale de Cassini $\mathscr{C}$ d'équation

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) + a^4 - b^4 = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

a) Montrer que l'aire du compact délimité par $\mathscr{C}$ peut s'écrire :

$$S = 2\int_0^{\pi/2} (b^4 - a^4\sin^2\varphi)^{1/2}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{lorsque} \quad b > a\,,$$

et

$$S = 2\int_0^{\pi/2} b^4(a^4 - b^4\sin^2\varphi)^{-1/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{lorsque} \quad a > b\,.$$

b) Dans chacun de ces deux cas, exprimer S sous forme de la somme d'une série.
c) Que peut-on dire si $a = b$?

Exercice 10 (potentiel newtonien) : On donne une boule B de centre O, de rayon $R > 0$, et $a > R$. Calculer $\displaystyle\int_B \frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}$. *Réponse :* $\dfrac{4}{3}\dfrac{\pi R^3}{a}$.

Exercice 11 : On donne a réel > 0 et le domaine D défini par $x^2+y^2+z^2 < R^2$. Calculer $\displaystyle\int_D \frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+a^2}}$.

Exercice 12 : On donne a et b réels > 0 et $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 1\right\}$. Calculer $\displaystyle\int_D (bx+ay)^2\,\mathrm{d}(x,y)$.

§ VIII.5 *INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES*

DÉFINITION VIII.5.1

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **mesurable** *ssi, pour tout pavé P de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $A \cap P$ est borné mesurable.*

Comme $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \geqslant 0} ([-k, k]^n)$, tout ensemble mesurable est union d'une suite croissante d'ensembles bornés mesurables. Les propriétés vues au § VII.4 montrent que **les ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ forment une tribu,** qui contient en particulier tout ensemble négligeable, tout ouvert et tout fermé de $\mathbb{R}^n$.

D'après les résultats du § VII.6, la tribu des ensembles mesurables est *globalement invariante par toute bijection affine* de $\mathbb{R}^n$. Il en va de même de l'ensemble des parties négligeables de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION VIII.5.2

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \longrightarrow K$. On dit que f est **intégrable au sens de Lebesgue** *ssi il existe une suite croissante (A_k) de parties bornées mesurables de $\mathbb{R}^n$ telles que : $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$; $(\forall k)$ $f|_{A_k}$ est bornée intégrable ; et : la suite $\left(\int_{A_k} |f|\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée.*

Nous noterons $\mathscr{L}^1(A, K)$ l'ensemble de ces fonctions. Soit $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ avec A mesurable dans $\mathbb{R}^n$, et soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties bornées mesurables vérifiant les conditions de la définition VIII.5.2. Notons $I = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\int_{A_k} |f|\right)$. Alors $\int_{A_k} |f| \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} I$, puisque (A_k) est croissante.

Considérons une partie B de A bornée mesurable *où f soit bornée.* Notons χ_X la fonction indicatrice dans A de toute partie X de A. La suite $((f\chi_{B \cap A_k})|_B)_{k \in \mathbb{N}}$ est u-bornée et converge simplement sur B vers $f|_B$. Donc, comme chaque $f\chi_{B \cap A_k}$ est bornée intégrable sur B, cela prouve :

(1) $\qquad f|_B$ *est bornée intégrable, et :* $\displaystyle\int_{B \cap A_k} f \underset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_B f$.

PROPOSITION VIII.5.1

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$. Pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de parties bornées mesurables de A où f est bornée, telle que $A_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} A$, la suite $(u_k) = \left(\int_{A_k} f\right)$ admet une limite. Cette limite ne dépend que de f.

Démonstration :

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de parties bornées mesurables de A vérifiant : $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout k et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$. Posons $I = \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} |f|$, et

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad I_k = \int_{A_k} |f| \,, \qquad u_k = \int_{A_k} f \,. \qquad \text{Alors} \quad I_k \underset{k \longrightarrow \infty}{\uparrow} I \,.$$

De plus,

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad |u_{k+1} - u_k| = \left| \int_{A_{k+1} \setminus A_k} f \right| \leqslant \int_{A_{k+1} \setminus A_k} |f| = I_{k+1} - I_k$$

donc la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ est absolument convergente, donc convergente, d'où : $L = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$ existe dans K.

Soit (B_k) une autre suite croissante de parties bornées mesurables de A, de réunion A, et sur chacune desquelles f est bornée. On a vu que f est bornée intégrable sur chaque B_k. Il reste à prouver que $\int_{B_k} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} L$. Soit ε réel > 0. Choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $I - I_p \leqslant \varepsilon$. Cela entraîne $|L - u_k| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant p$ d'après le calcul précédent. En raisonnant comme pour (1), il est facile de voir que $\int_{A_p \cap B_k} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_{A_p} f = u_p$, du fait que $A_p \subset \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left| u_p - \int_{A_p \cap B_k} f \right| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant N$. Alors, pour $k \geqslant N$, on a :

$$\left| \left(\int_{B_k} f \right) - u_p \right| \leqslant \left| \int_{B_k \setminus A_p} f \right| + \left| \left(\int_{A_p \cap B_k} f \right) - u_p \right| \leqslant \varepsilon + \int_{B_k \setminus A_p} |f| .$$

Mais par (1) : $$\int_{B_k \setminus A_p} |f| = \lim_{j \to \infty} \int_{A_j \cap (B_k \setminus A_p)} |f| .$$

Pour tout j, $$\int_{A_j \cap (B_k \setminus A_p)} |f| = \int_{(A_j \setminus A_p) \cap B_k} |f| \leqslant \int_{A_j \setminus A_p} |f| \leqslant \varepsilon ,$$

d'où finalement :
$\int_{B_k \setminus A_p} |f| \leqslant \varepsilon$. Au total $\left| u_p - \int_{B_k} f \right| \leqslant 2\,\varepsilon$ pour $k \geqslant N$, et enfin $\left| L - \int_{B_k} f \right| \leqslant 3\,\varepsilon$ pour $k \geqslant N$. ■

La limite $L = \lim\limits_{k \to \infty} \int_{A_k} f$ définie dans la proposition VIII.5.1 s'appelle **intégrale (de Lebesgue)** de f et sera notée comme d'habitude $\int_A f$ ou $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$ (x muette).

Si A est borné mesurable et f bornée intégrable, on retrouve bien entendu l'intégrale de f précédemment définie.

La preuve même de la proposition VIII.5.1 met en évidence la propriété :

$$(2) \quad \boxed{\text{si } f \in \mathscr{L}^1(A, K), \quad \text{alors } |f| \in \mathscr{L}^1(A, K) \quad \text{et} \quad \left| \int_A f \right| \leqslant \int_A |f|} .$$

Exemple 1 : Supposons A *négligeable* et soit $f : A \longrightarrow K$ une fonction quelconque. Ecrivons A comme union d'une suite croissante (A_k) de bornés négligeables (par exemple, $A_k = A \cap ([-k, k]^n)$).

Soit $B_k = \{x \in A_k \mid |f(x)| \leqslant k\}$: les B_k sont bornés négligeables, vont en croissant, ont A pour réunion, et $(\forall k)$ $f|_{B_k}$ est bornée négligeable. Donc $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ et $\displaystyle\int_A f = \int_A |f| = 0$. On ne s'étonnera pas dans ces conditions qu'une telle *fonction* f soit dite *négligeable.*

PROPOSITION VIII.5.2

> *Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$; l'ensemble $\mathscr{L}^1(A, K)$ est un sous-K-*ev *de $\mathscr{F}(A, K)$, sur lequel l'intégrale $f \mapsto \displaystyle\int_A f$ est une forme linéaire.*

Démonstration :

Soit $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ et $g \in \mathscr{L}^1(A, K)$. Choisissons des suites $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (resp. $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$) de parties bornées mesurables de A vérifiant avec f (resp. avec g) toutes les conditions de la définition VIII.5.2. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $C_k = \{x \in A_k \cup B_k \mid |f(x)| \leqslant k \text{ et } |g(x)| \leqslant k\}$. Les C_k sont bornés mesurables, vont en croissant, et sur chacun d'eux, f et g sont bornées intégrables. Il est clair par ailleurs que $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = A$. D'après la proposition VIII.5.1, $\displaystyle\int_{C_k} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_A f$; $\displaystyle\int_{C_k} g \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_A g$; $\displaystyle\int_{C_k} |f| \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_A |f|$; $\displaystyle\int_{C_k} |g| \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_A |g|$. En particulier $(\forall k)$ $\displaystyle\int_{C_k} |f+g| \leqslant \int_{C_k} |f| + |g| \leqslant \int_A |f| + \int_A |g|$, ce qui prouve déjà que $f + g \in \mathscr{L}^1(A, K)$ (cf. définition VIII.5.2). Comme $\lambda f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ pour tout $\lambda \in K$ on a bien un sous-K-ev de $\mathscr{F}(A, K)$.

En outre, d'après la proposition VIII.5.1,

$$\int_A (f+g) = \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} (f+g) = \lim_{k \to \infty} \left(\int_{C_k} f + \int_{C_k} g \right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} f + \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} g = \int_A f + \int_A g$$

et enfin $\displaystyle\int_A \lambda f = \lambda \int_A f$ est évident. ■

Additivité de l'intégrale

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ et B une partie mesurable quelconque de A. Alors :

$$(3) \quad \boxed{f|_B \in \mathscr{L}^1(B, K)\ ;\ f|_{A \setminus B} \in \mathscr{L}^1(A \setminus B, K)\ ,\ \text{et} \int_A f = \int_B f + \int_{A \setminus B} f}$$

En effet, soit (B_k) une suite croissante de parties bornées mesurables de A, de réunion A, sur chacune desquelles f est bornée. Pour $k \in \mathbb{N}$, $B_k \cap B$ est borné mesurable, f y est bornée et $\displaystyle\int_{B_k \cap B} |f| \leqslant \int_A |f|$.

Donc $f|_B \in \mathscr{L}^1(B, K)$. De même pour $f|_{A \setminus B}$.

Enfin, $(\forall k)$ $\displaystyle\int_{B_k} f = \int_{B_k \cap B} f + \int_{B_k \cap (A \setminus B)} f$, d'où par la proposition VIII.5.2, pour $k \longrightarrow \infty$, la relation finale (3).

PROPOSITION VIII.5.3

> *Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$, et (A_k) une suite croissante de parties mesurables de A, de réunion A. Alors $\displaystyle\int_{A_k} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_A f$.*

Démonstration :

Soit (B_k) une suite croissante de parties bornées mesurables de A, de réunion A, sur chacune desquelles f est bornée. On sait que $\displaystyle\int_{B_k} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_A f$ et que $\displaystyle\int_{B_k} |f| \underset{k \to \infty}{\uparrow} \int_A |f|$. Soit ε réel > 0. Pour N convenable, $\displaystyle\int_A |f| - \int_{B_N} |f| = \int_{A \setminus B_N} |f| \leqslant \varepsilon$. Par la proposition VIII.5.2, $\displaystyle\int_{A_k \cap B_N} f \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_{B_N} f$, et de plus, d'après (3) $\displaystyle\int_{A_k} f = \int_{A_k \cap B_N} f + \int_{A_k \setminus B_N} f$. Mais $\displaystyle\left|\int_{A_k \setminus B_N} f\right| \leqslant \int_{A_k \setminus B_N} |f| \leqslant \int_{A \setminus B_N} |f| \leqslant \varepsilon$, d'où finalement : $\displaystyle\left|\int_{A_k} f - \int_A f\right| \leqslant 3\,\varepsilon$ pour k assez grand. ■

Il n'est pas question de développer ici en détail les propriétés de $\mathscr{L}^1(A, K)$ (ensemble des fonctions intégrables au sens de Lebesgue les plus générales). Nous montrerons seulement comment le calcul

$\int_A f$ se ramène, par passage à la limite, à celui des intégrales de fonctions bornées intégrables, plus familières. Le plus utile est d'étendre aux $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ les théorèmes du *changement de variable* et *de Fubini* dont on se sert constamment.

Une propriété des ouverts de $\mathbb{R}^n$

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Ordonnons $\mathbb{Q}^n \cap U$ en une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour chaque k, soit P_k le pavé compact $a_k + [-\delta_k, \delta_k]^n$, où $2\,\delta_k = 1$ si $U = \mathbb{R}^n$, $2\,\delta_k = d(a_k, \mathbb{R}^n \setminus U)$ si $U \neq \mathbb{R}^n$ (la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ étant $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \operatorname{Max} |x_i|$). Alors $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}(P_k)$ et *a fortiori* $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$. Posant $Q_k = \bigcup_{j=0}^{k} P_j$, on en déduit que U *est union d'une suite croissante de compacts pavables dont les intérieurs ont encore U pour union.*

Changement de variable

Théorème VIII.5.1

Soit U et V des ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ qui sont $\mathscr{C}^1$-difféomorphes. Soit $\Phi : U \longrightarrow V$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme et $g \in \mathscr{L}^1(V, K)$. Alors $(g \circ \Phi) \times |\operatorname{Jac}(\Phi)| \in \mathscr{L}^1(U, K)$, et on a :

(4) $$\int_V g(x)\,\mathrm{d}x = \int_U (g \circ \Phi)(t) \times |(\operatorname{Jac} \Phi)(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration :

Nous poserons $f = g \circ \Phi$. Soit $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles bornés mesurables dans V, d'union V, vérifiant les conditions de la définition VIII.5.2, et (Q_k) une suite croissante de compacts pavables de V dont les intérieurs T_k ont pour union V. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $B_k = C_k \cap T_k$; $g_k =$ prolongement de $g|_{B_k}$ à T_k par 0 sur $T_k \setminus B_k$; $f_k = g_k \circ (\Phi|_{S_k})$ avec $S_k = \Phi^{-1}(T_k)$ et enfin $A_k = \Phi^{-1}(B_k)$. Les S_k sont ouverts, vont en croissant, ont U pour union, et $(\forall k)$ Adh (S_k) est un compact de U. Les A_k et les B_k sont bornés mesurables, vont en croissant, et $\bigcup_k B_k = V$, $\bigcup_k A_k = U$. Pour tout k, g_k est bornée intégrable, et le théorème VIII.4.1 s'applique, montrant que $f_k \times |\operatorname{Jac}(\Phi)|$ est bornée intégrable sur S_k et que $\int_{B_k} g = \int_{T_k} g_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_{S_k} f_k(t) |\operatorname{Jac}(\Phi)(t)|\,\mathrm{d}t$. Les mêmes assertions valent avec $|g_k|$ et $|f_k|$. Ainsi $f \times |\operatorname{Jac}(\Phi)|$ est bornée intégrable sur A_k, et $\int_{A_k} |f| \times |\operatorname{Jac}(\Phi)| = \int_{B_k} |g| \leqslant \int_U |g|$, ce qui prouve déjà que

$f \times |\mathrm{Jac}\,(\Phi)| \in \mathscr{L}^1(U, K)$. La proposition VIII.5.1 montre en outre que $\displaystyle\int_{B_k} g \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_V g$ et que

$$\int_{A_k} f \times |\mathrm{Jac}\,(\Phi)| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_U f \times |\mathrm{Jac}\,(\Phi)| \,,$$

ce qui donne (4) par passage à la limite . ■

Superposition d'intégrales

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et N une partie de A négligeable dans $\mathbb{R}^n$. Pour $f : A \longrightarrow K$, il est *équivalent* d'avoir « $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$ » ou « $f|_{A \setminus N} \in \mathscr{L}^1(A \setminus N, K)$ ». Par additivité, il est immédiat dans ce cas que $\displaystyle\int_A f = \int_{A \setminus N} f$. Donc, d'après l'exemple 1, si $g \in \mathscr{L}^1(A \setminus N, K)$, *tout* prolongement f de g à A est élément de $\mathscr{L}^1(A, K)$ et vérifie $\displaystyle\int_A f = \int_{A \setminus N} g$. Par abus de langage, on écrira $\displaystyle\int_A g$ au lieu de « la valeur commune des $\displaystyle\int_A f$ pour f prolongement de g à A », et on dira que $g \in \mathscr{L}^1(A, K)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p + q = n$ (d'où $n \geqslant 2$). Pour étendre le théorème VIII.2.1 à des fonctions $f \in \mathscr{L}^1(A, K)$, où A est mesurable dans $\mathbb{R}^n$, *on peut se limiter au cas* $A = \mathbb{R}^n$, quitte à prolonger f par 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus A$. Comme au § VIII.2, nous noterons (x, y) la variable générale de $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $(x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q)$.

THÉORÈME VIII.5.2 (Fubini, forme générale)

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, K)$. Il existe une partie négligeable N de $\mathbb{R}^p$ telle que $(\forall x \in \mathbb{R}^p \setminus N)$ la fonction $f_{[x]} : \mathbb{R}^q \longrightarrow K$, $y \longrightarrow f(x, y)$ appartienne à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^q, K)$. La fonction $F : \mathbb{R}^p \setminus N \longrightarrow K$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f_{[x]}$ appartient à $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, K)$, et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^p} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$$

qu'on écrit

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\,\mathrm{d}y} \,. \tag{5}$$

Démonstration :

Pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$ et tout $x \in \mathbb{R}^p$, nous noterons $E_{[x]}$ la coupe de E par x, c'est-à-dire $E_{[x]} = \{y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in E\}$, et $\chi_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de E dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de parties bornées mesurables de $\mathbb{R}^n$ sur chacune desquelles f est bornée intégrable. Par récurrence, on construit une suite $(P_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de pavés de $\mathbb{R}^p$ telle que $(\forall k)\ A_k \subset P_k \times \mathbb{R}^q$ (d'où $\bigcup_k P_k = \mathbb{R}^p$). Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k = f\chi_{A_k}$. Le théorème VIII.2.1 s'applique à f_k et à $|f|_k$: soit N_k une partie négligeable dans $\mathbb{R}^p$ telle qu'on ait *à la fois,* pour tout $x \in \mathbb{R}^p \backslash N_k$: $(f_k)_{[x]}$ est bornée intégrable et $(A_k)_{[x]}$ est borné mesurable. Notons, pour $x \in \mathbb{R}^p \backslash N_k : F_k(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_k(x, y)\, dy$, $G_k(x) = \int_{\mathbb{R}^q} |f_k(x, y)| dy$. Soit $N = \bigcup_k N_k$: c'est une partie négligeable dans $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in \mathbb{R}^p \backslash N$, la suite $(G_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est croissante dans $\mathbb{R}_+$, donc admet une limite $G(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. De plus :

$$(6) \quad (\forall k) \quad \int_{\mathbb{R}^p} G_k(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x, y)|\, d(x, y) \leqslant I = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| d(x, y)\,.$$

Posons $E_k = \{x \in P_k \backslash N \mid G(x) \leqslant k\}$ $\left(E_k = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \{G_j^{-1}([0, k]) \cap (P_k \backslash N)\}\right)$.
Comme chaque G_j est bornée intégrable sur P_k, on voit que E_k est borné mesurable ; à cause de (6), si $S_k = P_k \backslash E_k$, il est sûr que $\mathrm{Mes}_{[p]}(S_k) \leqslant \dfrac{I}{k}$; Donc si $R_k = \bigcap_{j \geqslant k} (S_j \cap P_k)$, on voit que R_k est borné négligeable, d'où $R = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} R_k$ est négligeable dans $\mathbb{R}^p$. Enfin, posons $\mathcal{N} = R \cup N$: il est négligeable dans $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p \backslash \mathcal{N} \Rightarrow G(x) < +\infty$. Si $x \in \mathbb{R}^p \backslash \mathcal{N}$,

$$|F_{k+1}(x) - F_k(x)| = \left| \int_{(A_{k+1})_{[x]} \backslash (A_k)_{[x]}} f(x, y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{(A_{k+1})_{[x]} \backslash (A_k)_{[x]}} |f(x, y)|\, dy = G_{k+1}(x) - G_k(x)\,,$$

et comme $G_k(x) \underset{k \to \infty}{\uparrow} G(x)$, on en déduit que la suite $(F_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers une limite notée $F(x)$, qui vérifie $|F(x)| \leqslant G(x)$. Par le théorème VII.3.5, G et F sont bornées intégrables sur chaque E_k, et par (6), $\int_{E_k} G(x)\, dx \leqslant I$.

Comme $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k = \mathbb{R}^p \backslash \mathcal{N}$, il s'ensuit que $F \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^p, K)$ et que :

$$\int_{E_k} F(x)\, dx \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^p} F(x)\, dx\,.$$

Par ailleurs,

$$\int_{E_k} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_{E_k} F_j(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{j\to\infty}\int_{E_k\times\mathbb{R}^q} f_j(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \int_{E_k\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,,$$

d'où en comparant :

$$(7) \qquad \int_{\mathbb{R}^p} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

Fixant $x \in \mathbb{R}^p\backslash\mathcal{N}$, les $(A_k)_{[x]}$ sont bornées mesurables, vont en croissant ; sur chacune d'eux $f_{[x]}$ est bornée intégrable, vérifie $\int_{(A_k)_{[x]}} |f_{[x]}| = G_k(x) \leqslant G(x)$; et $\bigcup_{k\geqslant 1}(A_k)_{[x]} = \mathbb{R}^q$. Donc $f_{[x]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q, K)$, et $F_k(x) = \int_{(A_k)_{[x]}} f_{[x]} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^q} f_{[x]}$, d'où $F(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Finalement (7) donne bien :

$$\int_{\mathbb{R}^p} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)\,. \quad \blacksquare$$

Les conséquences sont les mêmes que pour le théorème VIII.4.1.

Exemple 2 : Il est aisé de voir que si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, K)$ et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q, K)$, alors $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow K$, $(x,y) \mapsto f(x)\,g(y)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, K)$. L'application du théorème de Fubini à ce cas particulier donne :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}(x,y) = \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^q} g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Exemple 3 *(intégrale de Gauss) :* Posons $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ qui est une intégrale convergente. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, compte tenu de l'exemple 2, la fonction continue $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\right]\mathrm{d}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_i^2}\,\mathrm{d}x_i\right) = G^n.$$

Montrons que cela permet un calcul facile de G en prenant $n = 2$. D'après (5)

$$G^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Or l'intégrale double $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,d(x,y)$ se calcule facilement par passage en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et utilisation de (4). Cela donne

$$G^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi\,, \text{ d'où } \boxed{G = \sqrt{\pi}}\,.$$

***Exemple 4** (intégrale bêta d'Euler) :* Proposons-nous d'exprimer l'intégrale eulérienne de première espèce $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ (qui converge pour $p > 0$ et $q > 0$) à l'aide de l'intégrale Γ mieux connue : $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\,dx$ $(t > 0)$. Pour cela transformons le produit $\Gamma(p)\ \Gamma(q)$ en intégrale double à calculer dans le premier quadrant V : $x > 0$, $y > 0$ de $\mathbb{R}^2$

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_V x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}\, d(x,y) = I \quad \text{(cf. exemple 2)}$$

et calculons cette intégrale au moyen du changement de variable Φ: $x = \rho t$, $y = \rho(1-t)$. Le $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme Φ transforme la boule ouverte $U : \rho > 0$, $0 < t < 1$ en le quadrant ouvert V. Il a pour jacobien $\begin{vmatrix} t & \rho \\ 1-t & -\rho \end{vmatrix} = -\rho$, et la formule (4) donne :

$$\begin{aligned} I &= \int_U \rho^{p+q-2} t^{p-1}(1-t)^{q-1} e^{-\rho} \times |-\rho|\, d(\rho,t) \\ &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \int_0^{+\infty} \rho^{p+q-1} e^{-\rho}\, d\rho \\ &= B(p,q) \times \Gamma(p+q)\,, \end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\boxed{B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \qquad \text{pour} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad q > 0\,.$$

Exemple 5 : Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $r(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Etudions la nature des intégrales $\int_E \frac{d(x,y)}{r^\alpha}$ et $\int_D \frac{d(x,y)}{r^\alpha}$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r \leqslant 1\}$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 1\}$, le réel α étant donné > 0. Pour $\varepsilon \in\ ]0,1[$, soit D_ε le compact $\{(x,y) \in \mathbb{R}$

Un calcul en coordonnées polaires donne immédiatement :

$$\int_{D_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}(x, y)}{r^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_\varepsilon^1 r^{1-\alpha}\,\mathrm{d}r = \begin{cases} -2\pi \log \varepsilon \text{ si } \alpha = 2 \\ \dfrac{+2\pi}{2-\alpha}(1 - \varepsilon^{2-\alpha}) \text{ si } \alpha \neq 2\,. \end{cases}$$

En faisant $\varepsilon \underset{>}{\longrightarrow} 0$, on en déduit aussitôt que $\dfrac{1}{r^\alpha} \in \mathscr{L}^1(D, \mathbb{R})$ ssi $\alpha < 2$, et dans ce cas $\displaystyle\int_D \frac{\mathrm{d}(x, y)}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{2-\alpha}$.

De même, pour $A > 1$, soit E_A le compact $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant r \leqslant A\}$. On a :

$$\int_{E_A} \frac{\mathrm{d}(x, y)}{r^\alpha} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^A r^{1-\alpha}\,\mathrm{d}r = \begin{cases} 2\pi \operatorname{Log} A \text{ si } \alpha = 2 \\ \dfrac{2\pi}{2-\alpha}(A^{2-\alpha} - 1) \text{ si } \alpha \neq 2\,. \end{cases}$$

En faisant $A \longrightarrow +\infty$, on en déduit aussitôt que $\dfrac{1}{r^\alpha} \in \mathscr{L}^1(E, \mathbb{R})$ ssi $\alpha > 2$, et dans ce cas $\displaystyle\int_E \frac{\mathrm{d}(x, y)}{r^\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha - 2}$.

Exemple 6 : Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r(x, y, z)$ et donnons-nous un réel $\alpha > 0$. Soit B la boule ouverte $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r < 1\}$. Cherchons à quelle condition la fonction continue $f_\alpha : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(1 - r^2)^\alpha}$ appartient à $\mathscr{L}^1(B, \mathbb{R})$. Pour $\varepsilon \in \,]0, 1[$ soit $B_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant r < 1 - \varepsilon\}$. L'intégrale de f_α sur B_ε se calcule aisément par passage en coordonnées sphériques :

$$\int_{B_\varepsilon} f_\alpha = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{1-\varepsilon} \frac{r^2 \cos\varphi}{(1 - r^2)^\alpha}\,\mathrm{d}r = 4\pi \int_0^{1-\varepsilon} \frac{2^2\mathrm{d}r}{(1 - r^2)^\alpha}\,.$$

Il est clair que $\displaystyle\int_{B_\varepsilon} f_\alpha \underset{\varepsilon \underset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} +\infty$ si $\alpha \geqslant 1$, et que si $\alpha < 1$,

$$\int_{B_\varepsilon} f_\alpha \underset{\varepsilon \underset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(1 - r^2)^\alpha} = J_\alpha$$

qui est alors convergente. Par suite, on a : $f_\alpha \in \mathscr{L}^1(B, \mathbb{R})$ ssi $\alpha < 1$, et dans ce cas : $\displaystyle\int_B f_\alpha = J_\alpha$.

Exercice 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\int_{(\mathbb{R}_+)^2} \exp(-[x^2 + 2(\cos\alpha)xy + y$

Exercice 2 : On donne deux réels $p > 0$ et $a > 0$.

a) Calculer $I = \displaystyle\int_{y^2+z^2-2px \leqslant 0} \frac{\mathrm{d}(x,y,z)}{[(x+a)^2+y^2+z^2]^{3/2}}$.

b) Calculer $J = \displaystyle\int_{y^2-2px \leqslant 0} \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^2}$ et $K = \displaystyle\int_{y^2-2px \geqslant 0} \frac{\mathrm{d}(x,y)}{(a^2+x^2+y^2)^2}$.

Exercice 3 : Soit P un polygone convexe du plan $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique. Pour tout point $M = (x, y)$ du plan on pose $\delta(x, y) =$ la distance euclidienne du point M au polygone P. Calculer les intégrales

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\delta^2(x,y))\,\mathrm{d}(x,y), \quad \text{et} \quad B = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\delta(x,y))\,\mathrm{d}(x,y).$$

(on montrera que B s'écrit $a + bL + cS$, avec $L =$ périmètre de P, $S =$ aire intérieure à P et (a, b, c) indépendant de P).

Exercice 4 : Calculer :

$$I = \int_E \frac{z^3\,\mathrm{d}(x,y,z)}{(x+y)(x+y+z)}, \qquad \text{avec} \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x+y+z \leqslant 1\}.$$

Indication : Changement de variable conseillé : $u = x+y+z$, $v = \dfrac{x+y}{x+y+z}$, $w = \dfrac{z}{y+z}$.

Exercice 5 : Soit f et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

a) Prouver que $\displaystyle\int_{(\mathbb{R}_+)^2} \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}\,\mathrm{d}(x,y) \leqslant \pi \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2} \times \left(\int_0^{+\infty} g^2\right)^{1/2}$ en mettant le premier membre sous la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \int_0^{+\infty} f(x)\,g(xt)\,\mathrm{d}x$ et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui fait apparaître $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$.

b) Prouver que π est la meilleure constante possible en prenant pour fonctions f et $g : f(x) = g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \in [0, A]$ et 0 si $x > A$.

Exercice 6 : Soit $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique ($n \geqslant 1$). Si $P \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle inversion de pôle 0 et de puissance P l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \mapsto \dfrac{P}{\|x\|^2}x$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

a) Montrer que Φ est un difféomorphisme involutif de $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur U, et étudier la différentielle de Φ en un point.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1(U, K)$. Montrer que :

$$\int_U f(x)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) = |\rho|^n \int_U [f \circ \Phi(t)]\,\|t\|^{-2n}\,\mathrm{d}(t_1, \ldots, t_n).$$

Exercice 7 : Soit a un réel, $a \in\,]0, 1[$. On désigne par D le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{1}{a^2},\ x + 2y \geqslant a,\ 4x + 3y \leqslant 0\}$.

Calculer $I(a) = \displaystyle\int_D \frac{(2x-y)\,\mathrm{e}^{-x-2y}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$.

(Un changement de variable possible est $u = x^2 + y^2$, $v = x + 2y$. On trouvera $I(a) = \left(1 + a - \dfrac{1}{a}\right)\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-1/a}$.)

Exercice 8 : Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la partie Δ_n de $\mathbb{R}^2$: $[n\pi, (n+1)\pi] \times \mathbb{R}_+$.

On définit $I_n = \displaystyle\iint_{\Delta_n} \mathrm{e}^{-xy} \sin x\,\mathrm{d}(x,y)$. Calculer I_n de deux manières différentes et en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9 : On donne 6 réels $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ vérifiant $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ et $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère $\varphi(x, y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2$ et $\psi(x, y) = \alpha x^2 + 2\,\beta xy + \gamma y^2 = 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y)\,\mathrm{e}^{-\psi(x, y)}\,\mathrm{d}(x, y)$.

Exercice 10 : *a*) Montrer que, pour $\alpha > 0$, $p > 0$, $q > 0$ donnés, l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1 - x^{\alpha})^{q-1}\,\mathrm{d}x$ se ramène à une intégrale bêta d'Euler.

b) Retrouver $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ à partir de $\Gamma(1/2) \times \Gamma(1/2)$.

Exercice 11 (intégrale de Dirichlet) : On donne les réels > 0 : α, β, γ ; a, b, c ; m, n, p. Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_{\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^p \leq 1} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\,\mathrm{d}(x, y, z)$ au moyen d'intégrales Γ.

Exercice 12 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $x > 1$, $y > 0$. Etudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_D \sin(x^3 y^2)\,\mathrm{d}(x, y)$.

Exercice 13 : Calculer $\displaystyle\int_{x^2 + y^2 - 2x < 0} \frac{\mathrm{d}(x, y)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Exercice 14 : Calculer $\displaystyle\int_T \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} \right) \mathrm{d}(x, y)$ quand $M = (x, y)$ décrit l'intérieur T du triangle équilatéral ABC.

Calculer de même $\displaystyle\int_{\Delta} \left(\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} + \frac{1}{MD} \right) \mathrm{d}(x, y)$ étendue à l'intérieur Δ d'un carré $ABCD$.

Exercice 15 : Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

Calculer $\displaystyle\int_D \frac{xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{2\,x^2 + y^2}\,\mathrm{d}(x, y)$.

Exercice 16 : Calculer $\displaystyle\int_D \frac{\mathrm{d}(x, y)}{(x^2 + y^2 + 2\,y)^3}$, D étant le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

Exercice 17 : On donne 3 réels a, b, c non tous trois nuls et une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Montrer que le calcul de $I = \displaystyle\int_B f(ax + by + cz)\,\mathrm{d}(x, y, z)$, où $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$ $(a > 0)$, se ramène à celui d'une intégrale simple. Achever le calcul pour $a = 1$, f étant l'une des fonctions suivantes : $f_1(x, y, z) = \mathrm{Log}\left(1 + \dfrac{x + y + z}{\sqrt{3}}\right)$; $f_2(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - (x + y + z)^2}}$.

Exercice 18 : On donne n réels > 0 : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $(n > 1)$. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_P \frac{\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)}{x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \cdots + x_n^{\alpha_n}}$, où $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} [1, +\infty[$.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$; montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\alpha}}$ converge ssi la famille $\dfrac{1}{(k_1^2 + \cdots + k_n^2)^{\alpha}}$ $((k_i) \in \mathbb{N}^n \mid \{0\})$ est *sommable ;* en déduire les $\alpha > 0$ pour lesquels l'intégrale converge.

Exercice 20 : Soit n un naturel $\geqslant 2$ et $\mathscr{S}$ le $\mathbb{R}$-ev des matrices carrées réelles symétriques d'ordre n, enfin $\mathscr{D}$ l'ouvert des $M \in \mathscr{S}$ qui sont *définies positives*.

a) Vérifier que $\mathscr{D}$ est un ouvert *convexe* de $\mathscr{S}$.

b) Pour $A \in \mathscr{D}$, on pose : $\varphi(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-{}^tXAX)\,dX$. Prouver que $\varphi(A) = \pi^{n/2}[\det(A)]^{-1/2}$.

c) Prouver que la fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \operatorname{Log}(\varphi(A))$ est concave sur $\mathscr{D}$. (*Indication :* calculer un DL_2 de f au voisinage de A).

d) La fonction $\mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est-elle concave ?

§ VIII.6 *AIRES ET INTÉGRALES DE SURFACE*

Dans ce §, nous considérons un *espace affine euclidien* $\mathscr{E}$ de dimension $n \geqslant 2$, d'espace directeur E. La norme euclidienne de E sera notée $\|\,.\,\|$, son produit scalaire $(.\,|\,.)$. Par commodité, nous orienterons $\mathscr{E}$ et utiliserons le produit mixte et le produit vectoriel de E (cf. tome 4). On sait que l'intégrale définie à l'aide d'un repère orthonormé $\mathscr{R}$ de $\mathscr{E}$ est en réalité indépendante de $\mathscr{R}$ (cf. § VII.6) : c'est cette intégrale que nous utiliserons exclusivement sur $\mathscr{E}$.

La notion d'aire $(n-1)$-dimensionnelle que nous introduisons ci-dessous, à la différence du volume n-dimensionnel, *dépend essentiellement de la structure euclidienne de E*. Alors qu'une bijection affine de $\mathscr{E}$ transforme par exemple une sphère en un ellipsoïde dont le volume se déduit simplement de celui de la sphère, l'action sur l'aire est loin d'être évidente et il ne faudrait pas croire que l'aire de l'ellipsoïde se déduit simplement de l'aire de la sphère.

Elément d'aire $(n-1)$-dimensionnelle $(n \geqslant 2)$

Considérons un *plongement* $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$, où $\mathscr{D}$ est un domaine non vide de $\mathbb{R}^{n-1}$. Par définition, Φ est une application injective, de classe $\mathscr{C}^k$, sans point critique (cf. § VI.3), et définit un homéomorphisme de $\mathscr{D}$ sur l'image $\mathscr{S}$ de Φ. Au plongement Φ, on associe les fonctions suivantes :

- Fonction *vecteur normal* $\vec{N} : \mathscr{D} \longrightarrow E$, $t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \dfrac{\partial \Phi}{\delta t_{n-1}}$ (produit vectoriel des $\dfrac{\overrightarrow{\partial \Phi_i}}{\partial t_i}$ (1)). Pour $t \in \mathscr{D}$, $\vec{N}(t)$ dirige la normale en $\Phi(t)$ à $\mathscr{S}$. Le fait que $\vec{N}(t) \neq \vec{0}$ pour tout t traduit exactement que Φ est sans point critique.

- Fonction *vecteur unitaire normal* $\vec{\nu} : \mathscr{D} \longrightarrow E$, $t \mapsto \dfrac{1}{\|\vec{N}(t)\|}\vec{N}(t)$.

- Fonction $H : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \|\vec{N}(t)\|$.

(1) Pour $n = 2$, $\vec{N}$ est donc le produit vectoriel $\wedge \dfrac{\partial \Phi}{\delta t_1}$ de l'*unique vecteur* $\dfrac{\partial \Phi}{\cdot}$

Cela dit, nous introduisons l'expression symbolique $\mathrm{d}\mathscr{A} = \mathrm{d}\mathscr{A}(t) = H(t)\,\mathrm{d}t = H(t)\,\mathrm{d}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ destinée à entrer dans des intégrales de fonctions définies sur des parties de $\mathscr{D}$; nous conviendrons d'appeler **élément d'aire $(n-1)$-dimensionnelle** sur $\mathscr{S}$, associée à Φ, cette expression $\mathrm{d}\mathscr{A}(t)$.

DÉFINITION VIII.6.1

> *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, une fonction $f : \mathscr{S} \longrightarrow K$ sera dite* **d$\mathscr{A}$-intégrable** *ssi $(f \circ \Phi) \times H \in \mathscr{L}^1(D, K)$. Une partie B de $\mathscr{S}$ sera dite* **d$\mathscr{A}$-mesurable de mesure finie** *ssi $\chi_B : \mathscr{S} \longrightarrow K$, $x \mapsto 0$ si $x \notin B$, $x \mapsto 1$ si $x \in B$, est d$\mathscr{A}$-intégrable. Lorsqu'il en est ainsi, le nombre $\int_{\mathscr{D}} [f \circ \Phi(t)]\,H(t)\,\mathrm{d}t$ s'appelle la* **d$\mathscr{A}$-intégrale** *de f, et nous le noterons $\int_{\mathscr{S}} f\,\mathrm{d}\mathscr{A}$. Le nombre $\int_{\mathscr{S}} \chi_B\,\mathrm{d}\mathscr{A}$ s'appelle* ***aire $(n-1)$-dimensionnelle*** *de B (relative à d$\mathscr{A}$), ou mieux :* ***d$\mathscr{A}$-mesure*** *de B.*

Pour $n = 2$, on parle de *longueur* au lieu d'aire 1-dimensionnelle. Pour $n = 3$, on dit : *aire* (tout court) au lieu d'aire 2-dimensionnelle.

Exemple 1 : Pour $n = 3$, soit $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (0\,; e_1, e_2, e_3)$. Considérons la demi-sphère ouverte $\mathscr{S}$ de rayon 1 dans $\mathscr{E}$, limitée par le plan « horizontal » $(0\,; e_1, e_2)$. Supposons $\mathscr{S}$ définie par sa représentation *cartésienne :* c'est l'image de $\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ par le plongement $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{E}$, $(x_1, x_2) \in \mathscr{D} \mapsto 0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + f(x_1, x_2)\, e_3$, avec $f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Le vecteur normal est particulièrement simple dans ce cas et on voit que $\vec{\nu}(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\, e_3$, et que $\vec{N}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}\, \vec{\nu}(x_1, x_2)$, d'où $H : (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}$. D'après l'exemple 6 du § VIII.5, on sait que $H \in \mathscr{L}^1(\mathscr{D}, \mathbb{R})$, ce qui prouve que $\mathscr{S}$ est d$\mathscr{A}$-mesurable de mesure finie, et son aire (relative à $\mathrm{d}\mathscr{A} = H(t)\,\mathrm{d}t$) est

$$\int_{\mathscr{D}} H(x_1, x_2)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^2}} = 2\pi\big[-\sqrt{1 - r^2}\big]_0^1 = 2\pi\,.$$

Le plus remarquable dans cet exemple très simple, c'est qu'on soit obligé d'intégrer dans $\mathscr{D}$ une fonction H *non bornée* dans $\mathscr{D}$, pour conclure finalement que $\mathscr{S}$ est d$\mathscr{A}$-mesurable de mesure finie.

Exemple 2 : Plus généralement, pour $n \geqslant 3$, soit $\mathscr{E}$ rapport orthonormé direct $\mathscr{R} = (0 ; e_1, \ldots, e_n)$ et Φ définie par la représentation *cartésienne*

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto 0 + x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1} + f(x_1, \ldots, x_{n-1}) e_n ,$$

où $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

Alors $$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x_i} = e_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} e_n \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$

d'où $\vec{N}(x) = e_n + (-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$ et $\vec{\nu}(x) = \frac{1}{H(x)} \left(e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right)$,

avec $H(x) = \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$. On remarque que, si A_n désigne la n-ième coordonnée de $\vec{\nu}(x)$, alors

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{A_n(x)} = \frac{1}{(\vec{\nu}(x) \mid e_n)}} .$$

Exemple 3 : Pour $n = 3$, soit $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(0 ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et supposons Φ de la forme $(s, \theta) \mapsto r(s) \vec{I}(\theta) + f(s) \vec{k}$, avec $\mathscr{D} =]s_1, s_2[\times]\theta_1, \theta_2[$ $(s_1 < s_2 ; 0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi)$ et $\vec{I}(\theta) = \vec{i} \cos\theta + \vec{j} \sin\theta$, r et s étant des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]s_1, s_2[$ vérifiant $r(s) > 0$ et $r'(s)^2 + f'(s)^2 = 1$. Cela signifie concrètement que l'image $\mathscr{S} = \Phi(\mathscr{D})$ est une *surface de révolution autour de Oz, dont la méridienne* $s \mapsto (r(s), f(s))$ *est paramétrée par son abscisse curviligne* (on suppose évidemment que $s \mapsto (r(s), f(s))$ est un *plongement*, de sorte que Φ en est un). Le calcul donne :

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\mathrm{d}s} = r'(s) \vec{I}(\theta) + f'(s) \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\mathrm{d}\theta} = r(s) \vec{J}(\theta) \text{ (avec } \vec{J}(\theta) = -\vec{i} \sin\theta + \vec{j} \cos\theta)$$

d'où $$\vec{N} = -r(s) f'(s) \vec{I}(\theta) + r(s) r'(s) \vec{k}$$

et $$H^2(s, \theta) = r^2(s)(f'^2(s) + r'^2(s)) = r^2(s) ,$$

soit $$\boxed{H(s, \theta) = r(s)} .$$

En particulier, $\mathscr{S}$ est d$\mathscr{A}$-mesurable de mesure finie ssi : $H \in \mathscr{L}^1(\mathscr{D}, \mathbb{R})$, c.-à-d. en appliquant le théorème de Fubini, ssi l'intégrale $\int^{s_2} r(s)\, \mathrm{d}s$

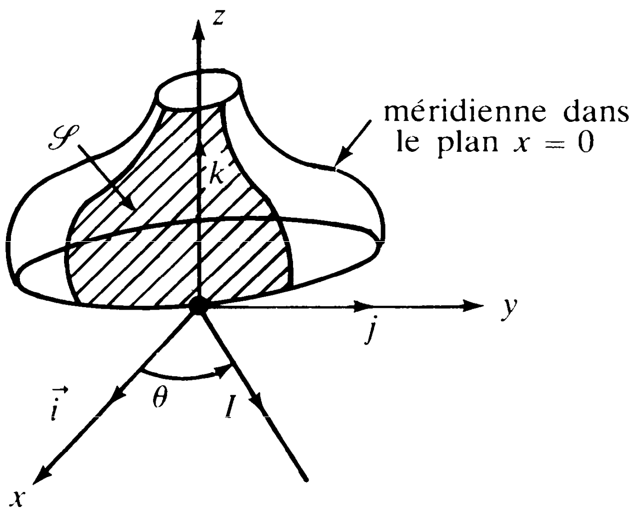


Fig. 1.

converge. Lorsque c'est le cas, on a :

$$\boxed{\text{aire de } \mathscr{S} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta \int_{s_1}^{s_2} r(s)\,\mathrm{d}s = (\theta_2 - \theta_1) \int_{s_1}^{s_2} r(s)\,\mathrm{d}s}\,.$$

Invariance par changement de paramètres

Si $\mathscr{S} = \Phi(\mathscr{D})$, il est évident que d'autres *plongements* de classe $\mathscr{C}^k$ peuvent représenter *le même ensemble* $\mathscr{S}$ *;* par exemple soit $\Phi_1 : \mathscr{D}_1 \longrightarrow \mathscr{E}$ un tel plongement ; on sait que Φ_1 est nécessairement $\mathscr{C}^k$-équivalent à Φ, c.-à-d. que $\Phi_1 = \Phi \circ \Theta$, où $\Theta : \mathscr{D}_1 \longrightarrow \mathscr{D}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Pour $u = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathscr{D}_1$, posons $t = \Theta(u) = (t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\Theta_p(u), \ldots, \Theta_{n-1}(u))$. Le théorème de dérivation des fonctions composées et la propriété du produit vectoriel d'être $(n-1)$-linéaire alterné donnent alors, avec des notations évidentes :

$$\vec{N}_1(u) = \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \frac{\partial \Theta_1}{\partial u_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial \Theta_{n-1}}{\partial u_{\sigma(n-1)}} \right) \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t_{n-1}}$$

d'où $\vec{N}_1(u) = \mathrm{Jac}\,(\Theta(u)) \times \vec{N}(t)$. L'élément d'aire $(n-1)$-dimensionnelle relative à Φ_1 est donc $\mathrm{d}\mathscr{A}_1(u) = H(t)|\mathrm{Jac}\,(\Theta(u))|$ si $\mathrm{d}\mathscr{A}(t) = H(t)\,\mathrm{d}t$. Par conséquent, en convenant d'écrire

$$\boxed{\mathrm{d}t = |\mathrm{Jac}\,(\Theta(u))|\,\mathrm{d}u}, \quad \text{on voit que} \quad \boxed{\mathrm{d}\mathscr{A}_1 = \mathrm{d}\mathscr{A}}\,.$$

Soit alors $f : \mathscr{S} \longrightarrow K$. D'après le théorème VIII.5.1,

$H \times (f \circ \Phi) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{D}, K)$ ssi

$$(f \circ \Phi \circ \Theta)(H \circ \Theta) \times |\mathrm{Jac}\,(\Theta(u))| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{D}_1, K)\,,$$

et si c'est le cas :

$$\int_{\mathcal{D}} (f \circ \Phi)\, H\, \mathrm{d}t = \int_{\mathcal{D}_1} (f \circ \Phi \circ \Theta) \times H \circ \Theta \times |\mathrm{Jac}\,(\Theta)|\, \mathrm{d}u\,,$$

autrement dit : **f est $\mathrm{d}\mathcal{A}$-intégrable ssi f est $\mathrm{d}\mathcal{A}_1$-intégrable, et si c'est le cas, $\int_{\mathcal{S}} f\, \mathrm{d}\mathcal{A} = \int_{\mathcal{S}} f\, \mathrm{d}\mathcal{A}_1$.** On obtient de même : **une partie B de $\mathcal{S}$ est $\mathrm{d}\mathcal{A}$-mesurable finie ssi elle est $\mathrm{d}\mathcal{A}_1$-mesurable finie, et si c'est le cas, B a même mesure pour $\mathrm{d}\mathcal{A}$ et pour $\mathrm{d}\mathcal{A}_1$.**

L'ensemble des fonctions $\mathrm{d}\mathcal{A}$-intégrables sur $\mathcal{S}$ (resp. des parties de $\mathcal{S}$ $\mathrm{d}\mathcal{A}$-mesurables finies) **ne dépend donc que de la sous-variété $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$.**

De même pour l'intégrale d'une fonction $\mathrm{d}\mathcal{A}$-intégrable (resp. la $\mathrm{d}\mathcal{A}$-mesure d'une partie $\mathrm{d}\mathcal{A}$-mesurable finie). En conséquence on peut parler de **fonction $\mathcal{S}$-intégrable :** $\mathcal{S} \longrightarrow K$ (resp. de **partie $\mathcal{S}$-mesurable finie** de $\mathcal{S}$).

L'ensemble des fonctions $\mathcal{S}$-intégrables : $\mathcal{S} \longrightarrow K$ forme un sous-K-ev de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, K)$ que nous noterons $\mathcal{L}^1(\mathcal{S}, K)$. Quant aux parties $\mathcal{S}$-mesurables finies de $\mathcal{S}$-mesure nulle, nous dirons qu'elles sont **$\mathcal{S}$-négligeables.**

Justification géométrique de la notion d'aire $(n-1)$-dimensionnelle

Reprenons les notations du début de ce § avec $\mathcal{S} = \Phi(t)$ et $\mathrm{d}\mathcal{A} = H(t)\,\mathrm{d}t$ et considérons la fonction $f : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(t, \lambda) \mapsto \Phi(t) + \lambda\, \vec{v}(t)$. L'image de f n'est autre que la *réunion des normales* à $\mathcal{S}$ (cf. fig. 2).

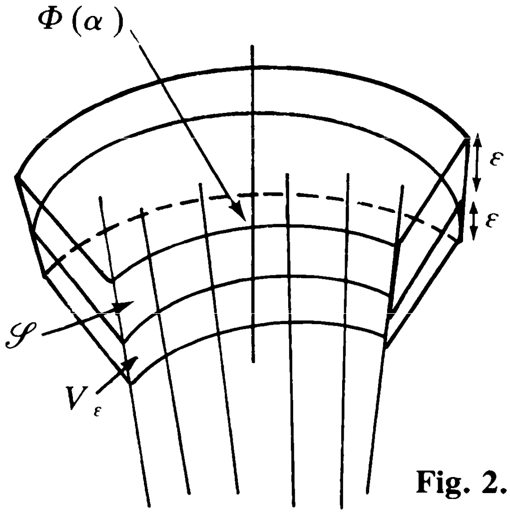


Fig. 2.

Supposons Φ de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geqslant 2$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et on a :

$$(\forall i \in [\![1, n-1]\!]) \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial t_i} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t_i} + \lambda\, \frac{\partial \vec{v}}{\partial t_i}\,, \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \lambda} = \vec{v}(t)$$

d'où

$$[\text{Jac}\,(f)](t,\lambda) = \left[\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t_{n-1}}, \vec{\nu}(t)\right] + A_1(t)\,\lambda + \cdots + A_{n-1}(t)\,\lambda^n,$$

les A_i étant fonctions continues de t sur $\mathscr{D}$ et $[., \dots, .]$ désignant le produit mixte. En particulier $[\text{Jac}\,(f)](t,0) = (\vec{N}(t) \mid \vec{\nu}(t)) = H(t) \neq 0$.

Si nous fixons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathscr{D}$, le *théorème d'inversion locale* (cf. § VI.2) montre l'existence d'un pavé ouvert $U = \left(\prod_{i=1}^{n-1}]\alpha_i - \xi, \alpha_i + \xi[\right) \times]-\eta, \eta[\quad (\xi > 0, \eta > 0)$ contenu dans $\mathscr{D} \times \mathbb{R}$ tel que $V = f(U)$ soit ouvert et que $\varphi = f|_U^V$ soit un $\mathscr{C}^{k-1}$-difféomorphisme de U sur V. On peut même, quitte à réduire U, supposer que $\text{Adh}\,(U) \subset \mathscr{D} \times \mathbb{R}$, de sorte que $[\text{Jac}\,(f)](t,\lambda)$ est borné sur U. Calculons alors, pour $\varepsilon \in]0, \eta]$ la mesure n-dimensionnelle de l'ouvert $V_\varepsilon = f(U_\varepsilon)$, avec $U_\varepsilon = \left(\prod_{i=1}^{n-1}]\alpha_i - \xi, \alpha_i + \xi[\right) \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ (contenu dans le compact $f(\text{Adh}\,(U_\varepsilon))$ de $\mathscr{E}$, V_ε a bien une mesure n-dimensionnelle finie).

Le théorème du changement de variable s'applique à $f|_{U_\varepsilon}$ et donne :

$$\text{(1)} \qquad \text{Mes}_{[n]}\,(V_\varepsilon) = \int_{U_\varepsilon} |[\text{Jac}\,(f)](t,\lambda)|\,\mathrm{d}(t,\lambda)\,.$$

Puis le *théorème de Fubini* donne, avec $P = \prod_{i=1}^{n-1}]\alpha_i - \xi, \alpha_1 + \xi[$:

$$\begin{aligned}\text{(2)} \quad \text{Mes}_{[n]}\,(V_\varepsilon) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}\lambda \int_P |[\text{Jac}\,(f)](t,\lambda)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathrm{d}\lambda \int_P (H(t) + A_1(t)\,\lambda + \cdots + A_{n-1}(t)\,\lambda^{n-1})\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,\varepsilon \int_P H(t)\,\mathrm{d}t + R(\varepsilon)\,,\end{aligned}$$

avec $R(\varepsilon) \underset{\varepsilon \geq 0}{\in} O(\varepsilon^2)$, ce qui s'écrit :

$$\text{(3)} \qquad \boxed{\text{Mes}_{[n]}\,(V_\varepsilon) = 2\,\varepsilon\left(\int_{\Phi(P)} \mathrm{d}\mathscr{A}\right) + R(\varepsilon)\,, \quad R(\varepsilon) \underset{\varepsilon \geq 0}{\in} O(\varepsilon^2)}\,.$$

En conséquence, $\text{Mes}_{[n]}\,(V_\varepsilon) \underset{\varepsilon \geq 0}{\sim} 2\,\varepsilon \int_{\Phi(P)} \mathrm{d}\mathscr{A}$, ce qui es[illegible] concordance avec l'intuition que chacun peut avoir de l'aire $(n-1)$-dimensionnelle de $\Phi(P)$ et met bien en évidence la dépendance de l'aire envers la structure euclidienne de $\mathscr{E}$.

Le paradoxe du lampion [1]

Il semblerait naturel d'appeler *aire* d'une portion de surface courbe de l'espace ordinaire la limite A vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires quand le diamètre de ces faces tend vers zéro. C'était d'ailleurs la définition adoptée dans les cours de Calcul différentiel et intégral il y a un peu plus d'un siècle. Mais sans conditions additionnelles, cette définition s'avère nettement insuffisante comme le prouve l'exemple très simple suivant (cf. fig. 3).

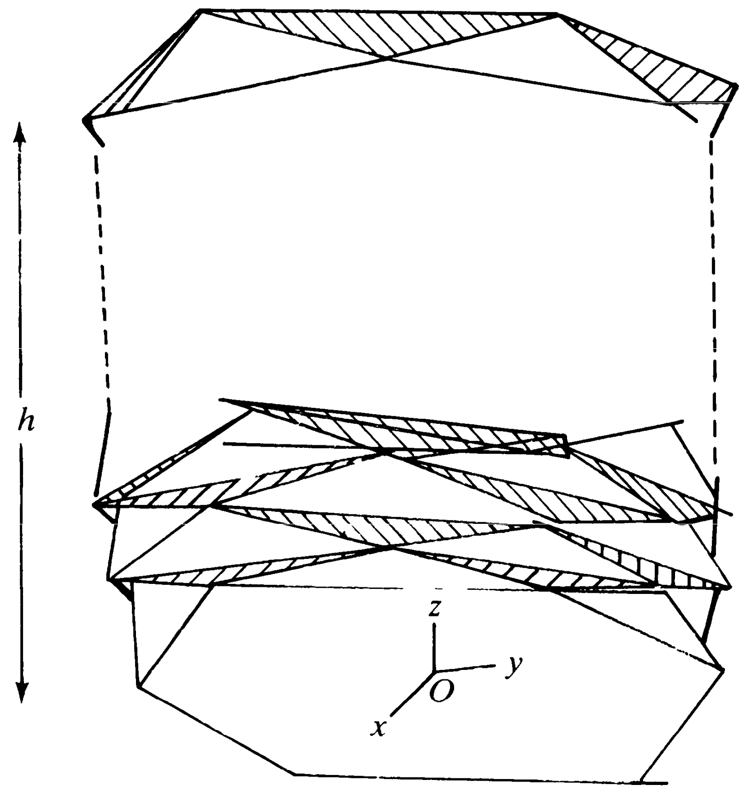


Fig. 3.

Considérons, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, la nappe plongée de cylindre $\mathscr{C}$ paramétrée par $\Phi : (u, v) \mapsto (R\cos u, R\sin u)$, $]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, avec $R > 0$.

Soit L la partie $\Phi(]-\pi, \pi[\times [0, h])$ (h réel > 0) de ce cylindre de hauteur h. Il est clair que L est d$\mathscr{A}$-mesurable finie, d'aire $2\pi\, Rh$, conformément au bon sens.

---

[1] Déjà signalé par Charles *Hermite* en 1882 dans son cours à la Faculté des Sciences de Paris, d'après une note que lui avait communiquée Karl Hermann Amandus *Schwarz*. de Göttingen.

Maintenant, divisons la hauteur h en $2\,N$ parties égales ($N \geqslant 1$) et sur le cercle Γ_k de $\mathscr{C}$ de cote $k\dfrac{h}{2\,N}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2\,N)$ considérons le polygone régulier à q côtés ($q \geqslant 3$) qui a pour sommet le point $\left(R, O, \dfrac{kh}{N}\right)$ si k est pair, et le point $\left(R\cos\dfrac{\pi}{q}, R\sin\dfrac{\pi}{q}, k\dfrac{h}{N}\right)$ si k est impair, de sorte que, en joignant convenablement les sommets de deux polygones successifs, on construit $4\,Nq$ triangles isocèles de même base et de même hauteur, facettes d'une surface polyédrale inscrite dans Adh (L) (Adh (L) a évidemment la même aire que L, cf. plus loin). Or la somme des aires des triangles de cette *triangulation* est $T(N, q) = 4\,NqR\sin\dfrac{\pi}{q}\sqrt{R^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{q}\right)^2 + \dfrac{h^2}{4\,N^2}}$.

En particulier

$$T(N, q) \geqslant 4\,NqR^2\sin\frac{\pi}{q}\left(1-\cos\frac{\pi}{q}\right) \geqslant 8\,NqR^2\sin\frac{\pi}{q}\sin^2\frac{\pi}{2\,q}\,.$$

On voit qu'il suffit de prendre par exemple $N = q^3$ pour que $T(N, q) \underset{q \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui montre bien qu'on ne peut pas définir l'aire de L comme limite des aires de surfaces polyédrales inscrites sans précision supplémentaire.

Cas particulier où $\mathscr{S}$ est contenue dans un hyperplan

Soit une surface paramétrée plongée de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (où $\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}^{n-1}$) dont l'image soit contenue dans $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, que l'on identifie à $\mathbb{R}^{n-1}$. Alors Φ s'identifie à un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme Ψ de $\mathscr{D}$ sur un ouvert $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$. Si on suppose Im (Φ) d$\mathscr{A}$-mesurable *finie*, on constate que l'aire $(n-1)$-dimensionnelle S de Im (Φ) dans $\mathbb{R}^n$, au sens de la définition VIII.6.1, donnée par $S = \displaystyle\int_{\mathscr{D}} |\mathrm{Jac}\,(\Psi)(t)|\,\mathrm{d}t$, *coïncide avec la mesure $(n-1)$-dimensionnelle* $\mathrm{Mes}_{[n-1]}(\mathscr{S})$ *de l'ouvert $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$*, ce qui est satisfaisant (application du théorème général du changement de variable).

De l'invariance de l'aire par changement de paramètres (en particulier si l'on change de repère orthonormé pour la calculer), il résulte qu'une rotation, une translation, une symétrie orthogonale de $\mathscr{E}$ ne modifient pas les aires. En revanche, *dans une homothétie de rapport λ, l'aire est multipliée par $|\lambda|^{n-1}$*.

Intégration sur une sous-variété de dimension $(n-1)$

Soit $\mathscr{V}$ une sous-variété de dimension $(n-1)$ de $\mathscr{E}$, connex

Elle est réunion finie ou dénombrable de sous variétés $(U_i)_{i \in I}$ images, chacune, de *plongements* $\Phi_i : \mathscr{D}_i \longrightarrow \mathscr{E}$, où $\mathscr{D}_i$ est un domaine de $\mathbb{R}^{n-1}$ (cf. § VI.3). On définit les sous-ensembles *$\mathscr{V}$-négligeables* de $\mathscr{V}$ comme étant ceux dont l'intersection avec chaque $\mathscr{V}_i$ est $\mathscr{V}_i$-négligeable. Les ensembles obtenus ne dépendent pas du choix des $\mathscr{V}_i$. On montre alors qu'on peut trouver une famille $(\mathscr{W}_i)_{i \in I}$, finie ou dénombrable, de sous-variétés-plongements de $\mathscr{V}$, telle que $\mathscr{V} = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Adh}(\mathscr{W}_i)$ et que les $\operatorname{Adh}(\mathscr{W}_i)$ soient d'intersections deux à deux $\mathscr{V}$-négligeables. Cela fait, on définit la notion de *fonction $\mathscr{V}$-intégrable* $f : \mathscr{V} \longrightarrow K$: c'est une fonction telle que $(\forall i)\ f|_{\mathscr{W}_i} \in \mathscr{L}^1(\mathscr{W}_i, K)$ et que la famille $\left(\int_{\mathscr{W}_i} \left|f|_{\mathscr{W}_i}\right| \mathrm{d}\mathscr{A}_i\right)_{i \in I}$ soit sommable. Dans ce cas le nombre $\sum_{i \in I} \int_{\mathscr{W}_i} f|_{\mathscr{W}_i} \mathrm{d}\mathscr{A}_i$ est bien défini, et on l'appelle naturellement *intégrale de* **f sur $\mathscr{V}$**, et on le note $\int_{\mathscr{V}} f\,\mathrm{d}\mathscr{A}$.

L'espace $\mathscr{L}^1(\mathscr{V}, K)$ ainsi défini et la forme linéaire $f \mapsto \int_{\mathscr{V}} f\,\mathrm{d}\mathscr{A}$ ne dépendent pas du choix des $\mathscr{W}_i$. Sans entrer dans le détail de justifications fastidieuses, donnons un exemple simple où ces notions s'avèrent utiles.

Exemple 4 : *Aire d'une sphère.* Nous avons vu dans l'exemple 1 comment évaluer l'aire d'un hémisphère ouvert de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Si $\mathscr{S}$ est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on peut la considérer comme la réunion de son hémisphère nord $\mathscr{S}_N = \{(x, y, z) \in \mathscr{S} \mid z > 0\}$, de son hémisphère sud $\mathscr{S}_S = \{(x, y, z) \in \mathscr{S} \mid z < 0\}$ et de l'équateur $\Gamma = \operatorname{Adh}(S_N) \cap \operatorname{Adh}(S_S)$ qui est $\mathscr{S}$-négligeable. Au total on en déduit que aire de $\mathscr{S} = 4\pi$. Cependant $\mathscr{S}$ est une sous-variété *compacte* de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ et n'est donc globalement l'image d'aucun plongement $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ avec $\mathscr{D}$ domaine de $\mathbb{R}^2$.

Instruits par la mauvaise surprise du lampion, on peut à juste titre se demander si, avec un autre découpage de $\mathscr{S}$ on trouvera toujours le même résultat. Considérons par exemple la partie de $\mathscr{S}$ image du plongement $\Psi :]-\pi, \pi[\times \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta \cos\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)\,.$$

Pour avoir $\mathscr{S}$ tout entière il suffit de rajouter le demi-cercle méridien

$$M = \{(x, y, z) \in \mathscr{S} \mid y = 0, x \leqslant 0, x^2 + z^2 = 1\}\ ,$$

qui est $\mathscr{S}$-négligeable. L'aire de $\mathscr{S}$ est maintenant

$$\int_{]-\pi,\pi[\times\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} |\operatorname{Jac}\varphi(\theta, \varphi)|\ \mathrm{d}(\theta, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-\pi}^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi$$

comme espéré. Mais cela **n'a rien d'évident a priori** car pour arriver à cette invariance, il faut l'effet conjoint du théorème général de *changement de variable* et l'indépendance de l'aire par rapport à la *décomposition en sous-variétés-plongement* d'adhérences ayant des intersections deux à deux $\mathscr{S}$-négligeables.

Exercice 1 : Calculer l'aire de la surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $x = a\cos^3 u \cos^3 v$, $y = a\cos^3 u \sin^3 v$, $z = a \sin^3 u$ $\left(a > 0, u \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], v \in]-\pi, \pi]\right)$.

Exercice 2 : Calculer l'aire dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique de la partie du cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ intérieure à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0$.

Exercice 3 : On donne α et β réels. Calculer l'aire dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique de la *zone* comprise entre les plans $z = \alpha$ et $z = \beta$ de l'hyperboloïde de révolution d'équation $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0, c > 0)$.

Exercice 4 : On considère dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique le paraboloïde $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $z = \frac{x^2+y^2}{2p}$ et le cylindre $\mathscr{C}$ d'équation $r = 2a\cos\theta$.

Calculer l'aire de la partie $\mathscr{S}$ de $\mathscr{P}$ intérieure à $\mathscr{C}$.

Exercice 5 : Soit la chaînette d'équations $y = \operatorname{ch} x$, $z = 0$ dans un repère orthonormé et les tangentes OA et OB issues de O. Vérifier qu'en tournant autour de Ox, l'arc AB de chaînette et le contour AOB engendrent des aires de même mesure.

Exercice 6 : On paramètre la sphère unité $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique par

$$(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \mapsto M(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) : x_1 = \sin\theta_1, x_2 = \cos\theta_1 \sin\theta_2, \dots, x_{n-1} = $$
$$= \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1}, x_n = \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$

où $$(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}) \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-2} \times [-\pi, \pi].$$

Démontrer que l'élément d'aire $\mathrm{d}\mathscr{A}$ de $\mathscr{S}$ est

$$\left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta_{n-1}}\right\| \mathrm{d}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = (\cos\theta_1)^{n-2} (\cos\theta_2)^{n-3} \dots \cos\theta_{n-2}\, \mathrm{d}(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$$

Exercice 7 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $\mathscr{V}$ une surface ne contenant pas 0 et soit $\mathscr{V}'$ sa transformée dans l'inversion de pôle 0 et de puissance $P \in \mathbb{R}^*$ (cf. exercice 6 du § VIII.5). Si $\mathrm{d}\mathscr{A}$ est l'élément d'aire de $\mathscr{V}$, montrer que l'élément d'aire $\mathrm{d}\mathscr{A}'$ de $\mathscr{V}'$ s'écrit $\frac{P^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}\mathscr{A}$, cette dernière expression étant calculée *sur* $\mathscr{V}$.

Application : Calculer l'aire de la surface d'équation $(x^2+y^2+z^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$.

Exercice 8 : Soit M_0 un point d'une sous-variété plongée $\mathscr{V}$ de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On note $\mathscr{T}_0$ l'hyperplan tangent en M_0 à $\mathscr{V}$, et f la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathscr{T}_0$. On considère une partie $\mathrm{d}\mathscr{A}$-mesurable L de $\mathscr{V}$, contenant M_0 et de $\mathrm{d}\mathscr{A}$-mesure > 0.

On désigne par $\delta(L)$ le diamètre de L.

a) Expliquer pourquoi, si $\delta(L)$ est assez petit, l'ensemble $f(L)$ est borné mesurable dans $\mathscr{T}_0$ (identifié à $\mathbb{R}^{n-1}$, ou considéré comme sous-variété plongée de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$).

b) Démontrer que $\frac{\mathrm{Mes}_{\mathscr{T}_0}(f(L))}{\mathrm{Mes}_{\mathscr{V}}(L)} \underset{\substack{\delta(L)\to 0 \\ \mathrm{Mes}_{\mathscr{V}}(L) > 0}}{\longrightarrow} 1.$

Exercice 9 : *Aire d'un triangle sphérique* (Albert Girard, 1629).

Soit dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique un triangle sphérique ABC formé par trois arcs de grands cercles de la sphère unité. On prend A comme pôle nord et on suppose B et C dans l'hémisphère nord. Le plan OBC coupe l'équateur suivant la droite Ox sous l'angle α.

a) Montrer que $\cos B = \sin \alpha \cos \theta_B$, B désignant l'angle de sommet B du triangle sphérique, et θ_B la longitude de B.

De même $\cos (\pi - C) = \sin \alpha \cos \theta_C$.

b) Calculer l'aire du triangle sphérique ABC à l'aide d'une intégrale double et montrer que le résultat, compte tenu du *a*), peut s'écrire sous la forme : aire de $ABC = A + B + C - \pi$.

c) Retrouver simplement ce résultat en combinant les aires des huit régions découpées sur la sphère par les trois grands cercles.

d) Les coordonnées de B étant $(1, 0, 0)$ et celles de C : $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ calculer $\displaystyle\int_{\text{triangle sphérique } ABC} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}\mathscr{A}$.

Exercice 10 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, calculer les aires des deux ellipsoïdes obtenus en faisant tourner l'ellipse $z = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de Ox et autour de Oy. Vérifier que, quand $b \longrightarrow a$, les limites obtenues sont bien celles qu'on attend.

Exercice 11 : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, calculer l'aire de la portion du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$ donné) intérieur au cylindre d'équation $x^2 + z^2 = a^2$.

Exercice 12 : Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Dans le plan $z = 0$ on considère un arc L de classe $\mathscr{C}^2$ paramétré par son abscisse curviligne : $x = \alpha(s)$, $y = \beta(s)$. Pour r réel > 0 fixé, on considère la nappe paramétrée image de $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\theta, s) \mapsto (\alpha(s) + r\beta'(s)\cos\theta,$ $\beta(s) - r\alpha'(s)\sin\theta,\ r\sin\theta)$ où $\theta \in [0, 2\pi]$ et $s \in [a, b]$ $(a < b)$. Calculer l'aire de cette nappe.

Chapitre IX

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans tout le chapitre, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

§ IX.1 *GÉNÉRALITÉS*

Equations linéaires scalaires d'ordre $n \geqslant 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et des fonctions $a_0, a_1, \ldots, a_n, b : I \longrightarrow K$, avec a_0 *non nulle.* L'écriture :

$$(\mathscr{E}) \qquad \boxed{a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n\, y = b}$$

sera appelée **équation différentielle scalaire d'ordre *n*, linéaire,** de coefficients $a_0, \ldots, a_n$, de second membre b, **définie sur *I*.** Cette équation est dite **homogène** ssi b est la fonction nulle. L'équation $(\mathscr{E}_0)$ obtenue en remplaçant dans $(\mathscr{E})$ b par 0 s'appelle **l'équation homogène associée** à $(\mathscr{E})$.

L'équation $(\mathscr{E})$ est dite **résolue en $y^{(n)}$** ssi a_0 est la fonction constante égale à 1 ; elle est dite **à coefficients constants** ssi les fonctions a_k sont constantes.

DÉFINITION IX.1.1

(I) *Soit J un sous-intervalle non trivial de I. On appelle* **J-solution** *de $(\mathscr{E})$ toute fonction $\varphi : J \longrightarrow K$, n fois dérivable et telle que*

$$(\forall t \in J) \quad a_0(t)\, \varphi^{(n)}(t) + \cdots + a_n(t)\, \varphi(t) = b(t)\,.$$

(II) *On appelle* **point singulier** *de $(\mathscr{E})$ tout réel $t_0 \in I$ tel que $a_0(t_0) = 0$.*

Résoudre (ou **intégrer**) l'équation $(\mathscr{E})$, c'est par définition obtenir **toutes** les solutions de $(\mathscr{E})$, sur **tous** les sous-intervalles possibles de I.

Il est clair que si, dans $(\mathscr{E})$, on remplace la liste de fonctions $(a_0, a_1, \ldots, a_n, b)$ par $(ha_0, ha_1, \ldots, ha_n, hb)$, où $h : I \longrightarrow K^*$ est quelconque, cela ne modifie pas l'ensemble des solutions : on peut en profiter, dans le cas où $(\mathscr{E})$ est **sans point singulier,** pour la ramener à une équation *résolue en* $y^{(n)}$, en prenant $h = 1/a_0$.

Dans ce qui suit, si J est un sous-intervalle de I, nous noterons $\mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ l'ensemble des J-solutions de $(\mathscr{E})$.

Voici quelques conséquences immédiates de la linéarité de l'équation $(\mathscr{E})$:

- Soit $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$. Alors $\boldsymbol{\mathscr{S}_J(\mathscr{E})}$ **est l'ensemble des** $\boldsymbol{\varphi + \varphi_0}$**, où** $\boldsymbol{\varphi_0}$ **décrit** $\boldsymbol{\mathscr{S}_J(\mathscr{E}_0)}$**.** Autrement dit, ou bien $\mathscr{S}_J(\mathscr{E}) = \varnothing$, ou bien c'est un sous-espace affine d'espace directeur $\mathscr{S}_J(\mathscr{E}_0)$ dans $\mathscr{F}(J, K)$. En effet :
- $\boldsymbol{\mathscr{S}_J(\mathscr{E}_0)}$ **est un sous-*K*-ev de** $\boldsymbol{\mathscr{F}(J, K)}$**.**
- Ecrivons maintenant b sous la forme $\sum_{j=1}^{k} b_j$, où les b_j sont des fonctions : $I \longrightarrow K$, et notons $(\mathscr{E}_j)$ l'équation $(\mathscr{E})$ avec b_j à la place de b. On constate que, si $\varphi_j \in \mathscr{S}_J(b_j)$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, alors $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j$ est J-solution de $(\mathscr{E})$: c'est le **principe de superposition des seconds membres.**

D'une J-solution φ de $(\mathscr{E})$ il est facile de déduire une J_1-solution de $(\mathscr{E})$ quand $J_1 \subset J$: il suffit de prendre la restriction $\varphi|_{J_1}$. Il est tentant d'essayer de prolonger φ à un intervalle incluant strictement J :

DÉFINITION IX.1.2

Soit J un sous-intervalle non trivial de I. Une J-solution φ de $(\mathscr{E})$ est dite **maximale** *s'il n'existe pas de sous-intervalle J_1 de I tel que $J \subsetneq J_1$ et que φ se prolonge en une J_1-solution $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow K$ de $(\mathscr{E})$.*

Par exemple toute I-solution de $(\mathscr{E})$ est maximale. Signalons dès maintenant que *lorsque $(\mathscr{E})$ est résolue en $y^{(n)}$ et que les fonctions $a_1, \ldots, a_n, b$ sont continues, les seules solutions maximales sont les I-solutions.* (Ce sera prouvé au § IX.5).

PROPOSITION IX.1.1

Supposons l'équation $(\mathscr{E})$ résolue en $y^{(n)}$ et les fonctions $a_1, \ldots, a_n, b$ de classe $\mathscr{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$). Alors toute solution φ de $(\mathscr{E})$ est de classe $\mathscr{C}^{p+n}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$).

Démonstration :

Toute solution φ étant n fois dérivable est au moins de classe $\mathscr{C}^{n-1}$. Si φ est de classe $\mathscr{C}^q$ avec $n-1 \leqslant q \leqslant n-1+p$, alors $\varphi^{(n)} = -(a_1 \varphi^{(n-1)} + \cdots + a_n \varphi) + b$ est de classe $\mathscr{C}^{q-n+1}$ puisque $a_1, \ldots, a_n$, b et $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}$ le sont. Donc φ est de classe $\mathscr{C}^{q+1}$, ce qui démontre la proposition par récurrence. ∎

Equations linéaires du 1er ordre à inconnue vectorielle

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et E un K-ev de dimension finie $N \geqslant 1$. Etant données deux fonctions $A : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ et $B : I \longrightarrow E$, l'écriture :

$$(\mathscr{L}) \qquad \boxed{Y' = A \,.\, Y + B}$$

est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre, résolue** en Y', de coefficient A et de second membre B, **définie sur *I*,** l'inconnue étant à valeurs dans E. Cette équation $(\mathscr{L})$ est dite **homogène** ssi B est la fonction nulle. L'équation $(\mathscr{L}_0)$ obtenue en remplaçant, dans $(\mathscr{L})$, B par la fonction nulle s'appelle **équation homogène associée** à $(\mathscr{L})$. On dit que $(\mathscr{L})$ est **à coefficient constant** ssi la fonction A est constante.

DÉFINITION IX.1.3

Soit J un sous-intervalle non trivial de I. On appelle ***J-solution*** *de $(\mathscr{L})$ toute fonction $\varphi : J \longrightarrow E$ dérivable telle que*

$$(\forall t \in J) \quad \varphi'(t) = A(t) \,.\, \varphi(t) + B(t)\,.$$

Si $\mathscr{S}_J(\mathscr{L})$ désigne l'ensemble des J-solutions de $(\mathscr{L})$, il est clair que :

- Soit $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{L})$. Alors $\mathscr{S}_J(\mathscr{L}) = \{\varphi + \varphi_0\}_{\varphi_0 \in \mathscr{S}_J(\mathscr{L}_0)}$; autrement dit, *$\mathscr{S}_J(\mathscr{L})$ est soit $\varnothing$, soit un sous-espace affine de $\mathscr{F}(J, E)$ d'espace directeur $\mathscr{S}_J(\mathscr{L}_0)$*. Ce qui a un sens (cf. ci-dessous) car :
- *$\mathscr{S}_J(\mathscr{L}_0)$ est un sous-K-*ev *de $\mathscr{F}(J, E)$.*
- *Le principe de superposition des seconds membres* est encore valable.

De même, *si A et B sont de classe $\mathscr{C}^p$*, $p \in \mathbb{N}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$), *alors toute solution de $(\mathscr{L})$ est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$* (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$).

D'une J-solution φ de $(\mathscr{L})$ on déduit une J_1-solution de $(\mathscr{E})$, avec $J_1 \subset J$ en prenant la restriction $\varphi|_{J_1}$, ce qui conduit à la notion de **solution maximale** (cf. définition IX.1.2). Nous verrons plus loin que *lorsque A et B sont continues,* les seules solutions maximales sont les I-solutions (voir § IX.5).

Pour $N = 1$, $(\mathscr{L})$ est une équation linéaire *scalaire du 1^er ordre,* résolue en y'.

Systèmes différentiels linéaires carrés

Reprenons l'équation $(\mathscr{L})$ et considérons une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N)$ de E dans laquelle les composantes d'une fonction dérivable $\varphi : J \longrightarrow E$ (où J est un sous-intervalle non trivial de I) seront notées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$. Notons $M(t) = [a_{ij}(t)]_{(i,j) \in [\![1,N]\!]^2}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\ (A(t))$ et $b_1(t), \ldots, b_N(t)$ les composantes de $B(t)$ $(t \in I)$.

Alors φ est une J-solution de $(\mathscr{L})$ ssi les fonctions dérivables $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ satisfont le système d'équations suivant :

$$(\forall i \in [\![1,N]\!])\ (\forall t \in J) \quad \varphi_i'(t) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)\, \varphi_j(t)\right) + b_i(t)\,.$$

L'écriture :

$$(\mathscr{S}_{\mathscr{B}}(\mathscr{L})) \qquad \boxed{(\forall i \in [\![1,N]\!]) \quad y_i' = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, y_j\right) + b_i}$$

s'appelle un **système différentiel linéaire scalaire du premier ordre,** carré, résolu en $y_1', \ldots, y_N'$, de coefficients a_{ij} et de second membre $(b_1, \ldots, b_N)$, **défini sur *I*.**

L'adjectif « carré » rappelle que $\mathscr{S}_{\mathscr{B}}(\mathscr{L})$ comporte *autant d'équations que de fonctions inconnues* $y_1, \ldots, y_N$; l'adjectif « scalaire » rappelle que les fonctions inconnues sont à valeurs dans K. Ce système sera dit **associé à** $(\mathscr{L})$ **dans** $\mathscr{B}$**.**

Les notions de *J-solution,* de *solution maximale,* se transposent naturellement à un système scalaire carré de ce type, ainsi que celles de *système homogène,* et de *système homogène associé.* Intégrer $(\mathscr{L})$ ou $(\mathscr{S}_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}))$ sont des problèmes équivalents.

Pour résoudre $(\mathscr{L})$ on conçoit qu'il y a intérêt à choisir la base $\mathscr{B}$ de sorte que le système associé $(\mathscr{S}_{\mathscr{B}}(\mathscr{L}))$ soit aussi simple que possible.

Réciproquement, considérons un système différentiel linéaire scalaire carré du premier ordre, résolu en $y_1', \ldots, y_N'$ $(N \geqslant 1)$:

$$(1) \qquad (\forall i \in [\![1,N]\!]) \quad y_i' = \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, y_j\right) + b_i\ ,$$

où les coefficients (a_{ij}) et les composantes (b_k) du second membre sont des fonctions données : $I \longrightarrow K$, et $y_1, \ldots, y_N$ des fonctions inconnues. Soit $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_N)$ la base canonique du K-ev K^N: pour

$B(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)\ \vec{\varepsilon}_i$, et soit $A(t)$ l'élément de $\mathrm{Hom}_K\ (K^N)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\ (A(t)) = [a_{ij}(t)]$. Alors le système différentiel (1) ne fait que traduire, dans la base $\mathscr{C}$, l'équation linéaire du premier ordre à inconnue vectorielle :

$$(2) \qquad Y' = A \cdot Y + B$$

que nous dirons *canoniquement associée* à (1).

Courbes intégrales. Trajectoires

Dans l'équation $(\mathscr{L})$, supposons A et B *de classe* $\mathscr{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$). Soit φ une J-solution, et Γ_φ le *graphe* de φ dans $\mathbb{R} \times E$: c'est l'image de la représentation paramétrique

$$\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R} \times E\ , \quad t \mapsto (t, \varphi(t))\ ,$$

qui est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) et *cartésienne* (cf. § VI.3, exemple 2) dans toutes les bases de $\mathbb{R} \times E$ de la forme

$$((1, 0_E), (0_{\mathbb{R}}, \vec{e}_1), \dots, (0_{\mathbb{R}}, \vec{e}_N))\ ,$$

où $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N)$ est une base de E. Donc (cf. *ibid*), **si J est ouvert,** Γ_φ est une *sous-variété de dimension 1 et de classe* $\mathscr{C}^{p+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de $\mathbb{R} \times E$. Cette sous-variété est appelée **courbe intégrale** (associée à φ) de $(\mathscr{L})$.

Intégrer $(\mathscr{L})$ revient pratiquement à trouver toutes ses courbes intégrales. L'avantage de cette notion réside dans le fait qu'une courbe intégrale admet une infinité de représentations paramétriques de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) qui sont $\mathscr{C}^{p+1}$-équivalentes (resp. $\mathscr{C}^\infty$-équivalentes) : soit donc $\theta : L \longrightarrow J$ un $\mathscr{C}^{p+1}$-difféomorphisme (resp. $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme) d'un intervalle ouvert L de $\mathbb{R}$ sur J ; posons $\psi = \varphi \circ \theta$. Pour que la représentation $u \mapsto (\theta(u), \psi(u))$, $L \longrightarrow \mathbb{R} \times E$ définisse une courbe intégrale de $(\mathscr{L})$, il faut et il suffit que

$$(\forall t \in J) \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) = A(t) \cdot \varphi(t) + B(t)\ ,$$

c'est-à-dire, que :

$$(3) \quad (\forall u \in L) \quad \psi'(u) = [\theta'(u) A(\theta(u))] \cdot \psi(u) + \theta'(u) \times (B(\theta(u)))$$

ce qui conduit à considérer l'équation linéaire à inconnue vectorielle

$$(4) \qquad Z' = [\theta' \times (A \circ \theta)] \cdot Z + \theta' \times (B \circ \theta)$$

dite *transformée de* $(\mathscr{L})$ *par le changement de variable* $t = \theta(u)$ et qui, si θ est judicieusement choisi, peut se révéler plus facile à résoudre que $(\mathscr{L})$. On est ainsi conduit, pour chercher à intégrer $(\mathscr{L})$, à la **méthode du changement de variable.**

Notons qu'aux solutions maximales de $(\mathscr{L})$ correspondent des *courbes intégrales maximales* (au sens de l'inclusion dans $\mathscr{P}(\mathbb{R} \times E)$).

A chaque J-solution φ de $(\mathscr{L})$ on peut également associer son image dans E qu'on appellera une **trajectoire** de $(\mathscr{L})$: c'est donc la projection sur E, parallèlement à $\mathbb{R} \times \{0_E\}$, de la courbe intégrale Γ_φ. Cette notion, à ne pas confondre avec celle de courbe intégrale (d'ailleurs les trajectoires ne sont pas forcément des sous-variétés), est surtout utilisée en Mécanique, où l'espace E prend le nom d'**espace des phases.**

Systèmes différentiels linéaires et équations scalaires d'ordre $\geqslant 2$

Soit l'équation linéaire scalaire d'ordre $n \geqslant 2$, résolue en $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b \tag{5}$$

à coefficients (a_k) et second membre b définis sur l'intervalle non trivial I. Si φ est une J-solution de (5), les fonctions $\varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = \varphi', \ldots, \varphi_n = \varphi^{(n-1)}$ sont dérivables sur J et y vérifient le système différentiel linéaire scalaire carré suivant :

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = y_3, \ldots, y_{n-1}' = y_n\,, \quad y_n' = -a_1 y_{n-1} - \cdots - a_n y_1 + b\,, \tag{6}$$

aux inconnues $y_1, \ldots, y_n$, et qui est résolu en $y_1', \ldots, y_n'$.

Réciproquement, si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une J-solution de (6), on voit bien que $\varphi = \varphi_1$ est n fois dérivable, et que c'est une J-solution de (5).

Pour chaque sous-intervalle non trivial J de I, on a donc des applications $\alpha : \ \mathscr{S}_J((5)) \longrightarrow \mathscr{S}_J((6))$ et $\beta : \ \mathscr{S}_J((6)) \longrightarrow \mathscr{S}_J((5))$, définies par

$$\alpha(\varphi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \text{où} \quad \varphi_1 = \varphi\,, \quad \varphi_2 = \varphi', \ldots, \varphi_n = \varphi^{(n-1)}$$

pour toute J-solution φ de (5) et $\beta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \varphi_1$ pour toute J-solution $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de (6), *réciproques l'une de l'autre :* α et β sont des bijections *affines* (dans le cas où (5) et (6) sont homogènes, α et β sont des *isomorphismes de* K-ev réciproques l'un de l'autre).

Nous dirons que (6) est le **système différentiel du 1er ordre associé à (5).** L'équation du 1er ordre à inconnue vectorielle associée à (6) sera dite, elle aussi, *associée à (5),* ce qui ramène l'intégration de (5) à celle d'une équation de type $(\mathscr{L})$.

Par définition, une *courbe intégrale* (resp. une *trajectoire*) de (5) est une courbe intégrale (resp. une trajectoire) de l'équation à inconnue vectorielle du 1er ordre qui lui est associée [1].

---

(1) Il est donc incorrect de nommer *courbe intégrale* de (5) le graphe c' solution de (5). Ce graphe n'est qu'une *projection* sur $\mathbb{R} \times K$ d'une courb

Exercice 1 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Sur le K-ev K^N ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on considère la norme

$$x = (x_1, \ldots, x_N) \mapsto \|x\| = \operatorname*{Max}_{k=1}^{N} (|x_k|) .$$

Soit l'équation différentielle linéaire à l'inconnue vectorielle Y (Y à valeurs dans $E = K^N$)

$$(\mathscr{L}) \qquad Y' = U \cdot Y + V$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dont 0 est point intérieur, et où l'on suppose que U et V sont *développables en série entière* à l'origine sur tout I (cela signifie que les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}}(U)$ et les coordonnées de V dans la base canonique Can de K^n sont des fonctions de t développables en série entière sur I). Il existe donc des $U_k \in \mathrm{Hom}\,(K^N)$ et des $V_k \in K^N$ convenables tels que

$$(\forall t \in I) \quad U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k U_k\,, \quad V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k V_k\,.$$

a) Montrer que pour chaque $A_0 \in K^N$, il existe une et une seule *série formelle à coefficients dans* K^N : $S = \sum_{m=0}^{\infty} X^m S_m$, telle que $S_0 = A_0$ et qui vérifie formellement $(\mathscr{L})$, les S_m étant donnés par :

$$(\forall m \geq 0) \quad S_{m+1} = \frac{1}{m+1}\left(V_m + \sum_{k=0}^{m} U_k \cdot S_{m-k}\right) .$$

b) Montrer qu'il existe des réels $C > 0$ et $r > 0$ tels que

$$(\forall k) \quad \|V_k\| \leq C r^k \quad \text{et} \quad |\!|\!| U_k |\!|\!| \leq C r^k$$

(où $|\!|\!| \,.\, |\!|\!|$ désigne la norme associée à $\| \,.\, \|$ sur $\mathrm{Hom}_K\,(K^N)$).

c) Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la seule série formelle $Z = \sum_{k \geq 0} \xi_k X^k \in \mathbb{C}[[X]]$ qui vérifie : $\xi_0 = \alpha_0$ et $(1 - rX)\, Z'(X) - C Z(X) = C$, est la série

$$Z_{\alpha_0}(X) = -1 + (\alpha_0 + 1)\,(1 - rX)^{-C/r} ,$$

et vérifier que le rayon de convergence de Z_{α_0} est > 0.

d) Soit $A_0 \in K^N$ et $\alpha_0 = \|A_0\|$. Soit $S = \sum_{k \geq 0} X^k S_k$ la série définie en *a*), et soit $Z(X) = \sum_{k \geq 0} \xi_k X^k$ la série définie en *c*) avec cet A_0 et cet α_0. Montrer :

$$(\forall k) \quad \|S_k\| \leq \xi_k\,.$$

En déduire l'existence d'un réel $\rho > 0$ tel que $[-\rho, \rho] \subset I$ et que, pour tout vecteur $A_0 \in K^N$, l'équation $(\mathscr{L})$ possède une et une seule $[-\rho, \rho]$-solution φ vérifiant $\varphi(0) = A_0$ et qui soit somme d'une série entière sur $[-\rho, \rho]$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n suivante, où y est à valeurs dans K :

$$(\mathscr{E}) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b$$

définie sur un intervalle I voisinage de 0, et où l'on suppose que $a_1, \ldots, a_n$ et b sont des *sommes de séries entières sur I.* Montrer, à l'aide de l'exercice 1, qu'il existe $\rho > 0$ tel que $[-\rho, \rho] \subset I$ et que, pour toute suite $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in K^n$, l'équation $(\mathscr{E})$ possède une et une seule $[-\rho, \rho]$-solution φ qui soit somme d'une série entière sur I et vérifie

$$\varphi(0) = u_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(0) = u_{n-1}\,.$$

§ IX.2 *ÉQUATIONS LINÉAIRES SCALAIRES DU 1er ORDRE*

THÉORÈME IX.2.1

> *Soit* ($\mathscr{E}$) $y' = Ay + B$ *une équation différentielle linéaire scalaire du 1er ordre, résolue en* y', *définie sur l'intervalle non trivial I de* $\mathbb{R}$. *On suppose les fonctions A et B* **continues.** *Alors l'espace affine* $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$ *des I-solutions est* de dimension 1. *De plus pour tout sous-intervalle non trivial J de I, l'application de restriction*
>
> $$\rho_{I,J} : \mathscr{S}_I(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{E}), \quad \varphi \mapsto \varphi|_J$$
>
> *est* **bijective.**

Démonstration :

a) Fixons $t_0 \in I$. Si $\varphi : I \longrightarrow K$ est dérivable quelconque, la fonction $\psi : I \longrightarrow K$, $t \mapsto \varphi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$ est dérivable, et vérifie :

$$(\forall t \in I) \quad \psi'(t) = [\varphi'(t) - A(t)\,\varphi(t)] \exp\left(-\int_{t_0}^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Donc, une exponentielle ne s'annulant jamais, $\varphi \in \mathscr{S}_I(\mathscr{E})$ ssi

$$(\forall t) \quad \psi'(t) = B(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = B_1(t).$$

Or B_1 est continue sur I ; donc

$$\psi' = B_1 \qquad \text{ssi} \qquad \psi(t) = C + \int_{t_0}^t B_1(u)\,\mathrm{d}u,$$

où $C \in K$ est une constante. Cela prouve déjà que $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$ n'est pas vide : c'est l'ensemble $\{f_C\}_{C \in K}$ des fonctions définies, pour $t \in I$, par $f_C(t) = U(t) + CV(t)$, avec

$$U(t) = \left(\int_{t_0}^t B_1(u)\,\mathrm{d}u\right) \exp \int_{t_0}^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

et

$$V(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

On reconnaît, puisque $V \neq 0$, que $\mathcal{S}_I(\mathcal{E})$ est bien une droite affine, dirigée par V.

b) Soit J un sous-intervalle non trivial de I. Le raisonnement précédent montre que $\mathcal{S}_J(\mathcal{E})$ est aussi une droite affine. L'application de restriction $\rho_{I,J}$ est elle-même affine ; sa partie linéaire $L_{I,J}$ envoie V sur $V|_J$, et comme V ne s'annule pas, on voit que $V|_J \neq 0$, donc $L_{I,J} \neq 0$. Cela entraîne que $\rho_{I,J}$ est bijective, en tant qu'application affine non constante entre deux droites affines. ■

Il découle de la dernière assertion du théorème IX.2.1 que **les solutions maximales de ($\mathcal{E}$) sont les *I*-solutions,** desquelles on pourra déduire par restriction *toutes* les solutions. Il suffit donc pratiquement de s'intéresser à ces I-solutions.

Remarque 1 : Explicitement, on a trouvé toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$(1) \quad f_C(t) = \left[C + \int_{t_0}^{t} B(u) \exp\left(- \int_{t_0}^{u} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}u \right] \times \\ \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right).$$

On voit que cela nécessite seulement **deux quadratures.** Dans la pratique, on procède ainsi :
dans une première étape on explicite les solutions de $(\mathcal{E}_0)$, c'est-à-dire les fonctions $t \mapsto C \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) = C V(t)$, où $C \in K$ est arbitraire ; cela revient à chercher une primitive de A (le calcul n'est pas toujours possible si on se limite aux fonctions « usuelles ») ; *dans une deuxième étape on recherche une solution particulière de* $(\mathcal{E})$ *sur* I : il peut y en avoir une qui apparaît directement, par exemple dans un problème d'origine physique ; sinon on l'obtient par **variation de la constante** C, c'est-à-dire en écrivant que la fonction : $I \longrightarrow K$, $t \mapsto C(t)\,V(t)$ est solution de $(\mathcal{E})$: on constate que la condition sur C se réduit à : $C'(t)\,V(t) = B(t)$, ce qui permet de prendre par exemple

$$U(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \frac{B(\tau)}{V(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \right) \times V(t)\ ;$$

dans une troisième étape, on conclut : $\mathcal{S}_I(\mathcal{E})$ est l'ensemble $\{U + CV\}_{C \in K}$.

THÉORÈME IX.2.2

Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times K$, il existe **une et une seule** *I-solution φ de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(t_0) = y_0$. En particulier, si I est ouvert,* **les courbes intégrales maximales** *de $(\mathscr{E})$ forment une* **partition** *de $I \times K$.*

Démonstration :

C'est une conséquence capitale du théorème IX.2.1. En effet, soit $(t_0, y_0) \in I \times K$. Utilisons la forme (1) des solutions sur I de $(\mathscr{E})$ (avec ce t_0). Pour $C \in K$, on a : $f_C(t_0) = C$. Donc il y a bien une unique I-solution φ de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(t_0) = y_0$, à savoir $\varphi = f_{y_0}$. ■

Exemple 1 : *Soit I l'un des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Intégrer sur I l'équation suivante (2), où la fonction inconnue est à valeurs réelles :*

$$y' = \frac{t}{1 - t^2} y + \frac{1}{1 - t^2}. \tag{2}$$

Solution : L'équation (2) est bien de la forme $(\mathscr{E})$, avec $A(t) = \dfrac{t}{1 - t^2}$, $B(t) = \dfrac{1}{1 - t^2}$, qui sont des fonctions *continues* sur I.

L'*équation homogène associée* à (2) admet pour solutions sur I les fonctions $t \mapsto CV(t)$ $(C \in \mathbb{R})$, où

$$V(t) = \exp\left(\frac{-1}{2} \operatorname{Log} |1 - t^2|\right) = \frac{1}{\sqrt{|1 - t^2|}}.$$

La *variation de la constante* conduit à la condition

$$C'(t) = \frac{\sqrt{|1 - t^2|}}{1 - t^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|1 - t^2|}},$$

où $\varepsilon = 1$ si $I =]-1, +1[$ et où $\varepsilon = -1$ sinon. On peut donc prendre $C(t) = \operatorname{Arc\,sin} t$ si $t \in]-1, 1[$ et $C(t) = -\operatorname{Log}\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right|$ dans les autres cas.

En conclusion, si $I =]-1, 1[$, les I-solutions de $(\mathscr{E})$ sont les fonctions

$$f_C : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{C + \operatorname{Arc\,sin} t}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (C \in \mathbb{R}),$$

et si $I =]-\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$, ce sont les fonctions

$$g_C : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{C - \operatorname{Log}\left|t + \sqrt{t^2 - 1}\right|}{\sqrt{t^2 - 1}} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Exemple 2 : *On emprunte un capital $S > 0$ sur une durée $T > 0$, au taux d'intérêt $\tau > 0$. Le remboursement est linéairement progressif (ou dégressif) et on rembourse $R > 0$ par unité de temps au début de la période d'amortissement. On suppose pour simplifier que l'intérêt se compose à chaque instant* ([1])*. Calculer les remboursements et le tableau d'amortissement, sachant que l'amortissement doit être fonction continue du temps.*

Solution : A la date $t \in [0, T]$, soit $\rho(t)$ le remboursement par unité de temps et $\sigma(t)$ le capital restant dû. Par hypothèse, on a un réel a tel que $\rho(t) = at + R$ pour $t \in [0, T]$. Fixons $t \in [0, T]$; soit $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $t + h \in [0, T]$ et $\delta(h) = \underset{u \in [t, t+h]}{\operatorname{Max}} |\sigma(u) - \sigma(t)|$.

Comme σ est supposée continue, on a $\delta(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. Une comptabilité évidente prouve que :

$$\begin{aligned} h\tau(\sigma(t) - \delta(h)) - (\rho(t) + |a|\, h)\, h \leqslant \sigma(t+h) - \sigma(t) \leqslant \\ \leqslant h\tau(\sigma(t) + \sigma(h)) - (\rho(t) - |a|\, h)\, h \end{aligned}$$

d'où $\dfrac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} \underset{h \overset{>}{\to} 0}{\longrightarrow} \tau\sigma(t) - \rho(t)$. Le même raisonnement avec $h < 0$ tel que $t + h > 0$ montre que

$$\frac{\sigma(t+h) - \sigma(t)}{h} \underset{h \overset{<}{\to} 0}{\longrightarrow} \tau\sigma(t) - \rho(t) .$$

Finalement, σ *est dérivable* et satisfait sur $[0, T]$ l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \tau\sigma(t) - (at + R)$$

qui est bien du type $(\mathscr{E})$ avec A et B continues.

Les $[0, T]$-solutions de (3) sont les fonctions f_C : $t \mapsto C\,\mathrm{e}^{\tau t} + \dfrac{a}{\tau} t + \dfrac{a}{\tau^2} + \dfrac{R}{\tau}$. La solution qui vaut S pour $t = 0$ s'obtient pour $C = S - \dfrac{a}{\tau^2} - \dfrac{R}{\tau}$.

La condition $\sigma(T) = 0$ s'écrit :

$$\left(S - \frac{a}{\tau^2} - \frac{R}{\tau}\right) \mathrm{e}^{\tau T} + \frac{aT}{\tau} + \frac{a}{\tau^2} + \frac{R}{\tau} = 0 ,$$

ou : $$\frac{a}{\tau^2} (\mathrm{e}^{\tau T} - 1 - \tau T) = \left(S - \frac{R}{\tau}\right) \mathrm{e}^{\tau T} + \frac{R}{\tau} ,$$

([1]) Hypothèse suffisamment réaliste pour un prêt à moyen terme.

ce qui, compte tenu de $e^{\tau T} - 1 - \tau T > 0$, donne pour a la valeur

$$a = \frac{\tau[\tau S\, e^{\tau T} - R(e^{\tau T} - 1)]}{e^{\tau T} - 1 - \tau T}.$$

On en déduit les fonctions cherchées $t \mapsto \sigma(t)$, puis $t \mapsto \rho(t)$:

$$\sigma(t) = \frac{T(R - \tau S) - S}{e^{\tau T} - 1 - \tau T} e^{\tau t} + \frac{\tau S\, e^{\tau T} - R(e^{\tau T} - 1)}{e^{\tau T} - 1 - \tau T} t + \frac{S\, e^{\tau T} - RT}{e^{\tau T} - 1 - \tau T}$$

$$\rho(t) = R + \frac{\tau[\tau S\, e^{\tau T} - R(e^{\tau T} - 1)]}{e^{\tau T} - 1 - \tau T} t.$$

Pour $R = \dfrac{\tau S\, e^{\tau T}}{e^{\tau T} - 1} = R_0$, les remboursements par unité de temps sont constants ; pour $R < R_0$ ils sont *progressifs*, pour $R > R_0$ *dégressifs*. Le lecteur notera qu'à la date t, $\rho(t)$ se répartit en $\tau\sigma(t)$ d'intérêts et $\rho(t) - \tau\sigma(t)$ de remboursement de capital.

Raccordement de solutions

Considérons maintenant une équation linéaire scalaire du 1[er] ordre, définie sur I, mais non résolue en y', c'est-à-dire du type

$$(\mathscr{F}) \qquad a_0\, y' + a_1\, y = b,$$

où les fonctions a_0, a_1 et $b : I \longrightarrow K$ sont supposées *continues*. Nous supposons de plus que l'ensemble $S = \{t \in I \mid a_0(t) = 0\}$ des points singuliers de $(\mathscr{F})$ est *sans point intérieur*. Alors $I \backslash S$ est dense dans I et ouvert relativement à I, et donc les composantes connexes de $I \backslash S$ sont des intervalles ouverts relativement à I. Sur chacune de ces composantes connexes, $(\mathscr{F})$ se ramène, après division par a_0, à une équation de la forme $(\mathscr{E})$. L'idée naturelle pour étudier $(\mathscr{F})$ consiste donc à *intégrer d'abord* $(\mathscr{F})$ *sur chaque composante connexe de* $I \backslash S$, puis, pour intégrer $(\mathscr{F})$ sur un intervalle quelconque $J \subset I$, *à examiner s'il est possible de raccorder les solutions* sur les intervalles $\omega \cap J$, où ω est une composante connexe de $I \backslash S$. Ce n'est que par l'étude de nombreux exemples que le lecteur se rendra compte de l'infinie variété des cas possibles et pourra constater que les théorèmes IX.2.1 et IX.2.2 sont souvent mis en défaut avec ce type d'équations.

Exemple 3 : Considérons l'équation (4), où l'inconnue est à valeurs réelles :

$$(4) \qquad (1 - t^2)\, y' - ty = 1$$

qui est bien du type $(\mathscr{F})$ avec a_0, a_1, b continues sur $\mathbb{R}$.

Elle possède deux points singuliers : -1 et 1. En notant $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$, nous connaissons déjà (cf. exemple 1) les droites affines $\mathscr{S}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ des I_k-solutions de (4), à savoir :

$$\mathscr{S}_1 = \{g_C\}_{C \in \mathbb{R}}, \quad \mathscr{S}_2 = \{f_C\}_{C \in \mathbb{R}}, \quad \mathscr{S}_3 = \{g_C\}_{C \in \mathbb{R}}.$$

Notons alors $J_1 =]-1, +\infty[$, $J_2 =]-\infty, 1[$ (ce sont les intervalles maximaux contenant un seul point singulier) et $J_3 = \mathbb{R}$.

a) *Etudions* (4) *sur* J_1 par analyse et synthèse :

a_1) Soit φ une J_1-solution de (4). Alors $h_2 = \varphi|_{I_2}$ et $h_3 = \varphi|_{I_3}$ sont telles que $h_2 \in \mathscr{S}_2$ et $h_3 \in \mathscr{S}_3$, d'où l'existence de constantes réelles C_2 et C_3 telles que $h_2 = f_{C_2}$ et $h_3 = g_{C_3}$. Ces fonctions doivent se prolonger continûment au point 1, ce qui implique $C_2 = \dfrac{-\pi}{2}$, $C_3 = 0$. Reportant $t = 1$ dans (4), on obtient de plus $\varphi(1) = -1$. Donc φ ne peut être que la fonction $\alpha : J_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ égale à -1 en 1, à $f_{\pi/2}$ sur I_2 et à g_0 sur I_3.

a_2) Il reste à prouver que la fonction α ainsi définie est bien une J_1-solution de (4). Vérifier que $\lim\limits_{t \underset{<}{\to} 1} f_{\pi/2}(t) = -1$, que $\lim\limits_{t \underset{>}{\to} 1} g_0(t) = -1$ et que $\alpha'(1-0) = \alpha'(1+0) \in \mathbb{R}$ n'est certes pas difficile mais fastidieux. Cherchons plutôt les solutions de (4) DSE_1. Posant $t = 1 + u$ et $y(t) = Y(u)$, cela revient à chercher les solutions DSE_0 de :

$$(5) \qquad (2u + u^2)\,Y' + (1 + u)\,Y = -1\,.$$

La méthode d'identification (cf. § II.3) montre que (5) possède une unique solution formelle, qui est $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, où

$$(\forall n) \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)}\,.$$

Comme $\quad \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{2n+3}{n+1} \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 2\,, \quad$ le rayon de S est 2.

Donc (5) possède une et une seule solution DSE_0 maximale parmi les solutions sommes de série entière, à savoir $s :]-2, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.

On en déduit que (4) possède une unique solution DSE_1 maximale parmi les solutions sommes de série entière en $t - 1$, à savoir $\sigma :]-1, 3[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t-1)$.

Nécessairement $\sigma|_{]1,2[} = g_C|_{]1,2[}$ pour un certain $C \in \mathbb{R}$ qui est $C = 0$ puisque σ est continue en 1, d'où $\sigma|_{]1,2[} = \alpha|_{]1,2[}$. On voit de même que $\sigma|_{I_2} = \alpha|_{I_2}$. On constate que $\sigma(1) = -1 = \alpha(1)$. Cela établit que α est DSE_1, et en particulier que α est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ce qui n'apparaissait pas évident (en fait les formules donnant α sur I_2 et I_3 montrent même, compte tenu de ce qui précède, que α est *analytique réelle sur* J_1).

a_3) Finalement il en résulte que l'ensemble des J_1-solutions de (4) se réduit au singleton $\{\alpha\}$.

b) *Etudions* (4) *sur* J_2. La méthode utilisée au *a*) montre que l'ensemble des J_2-solutions de (4) se réduit à $\{\beta\}$, où $\beta : J_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\beta(-1) = 1$, $\beta|_{I_2} = f_{\pi/2}$ et $\beta|_{I_1} = g_0$; que β est analytique réelle sur J_2, son DSE_{-1} étant donné par

$$]-3, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(t+1)^n .$$

c) *Etudions enfin* (4) *sur* $J_3 = \mathbb{R}$. Si (4) possédait une J_3-solution γ, on aurait à la fois

$$\gamma|_{I_2} = (\gamma|_{J_1})|_{I_2} = \alpha|_{I_2} = f_{-\pi/2} ,$$

et

$$\gamma|_{I_2} = (\gamma|_{J_2})|_{I_2} = \beta|_{I_2} = f_{\pi/2} ,$$

ce qui est incompatible. Donc l'ensemble des J_3-solutions de (4) est *vide*.

d) Pour obtenir *toutes* les solutions de (4) il suffit de prendre les restrictions à des intervalles J arbitraires de α, de β, et des fonctions f_C et g_C trouvées dans l'exemple 1.

Exercice 1 : Etudier sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles scalaires suivantes :

a) $t^2 y' + y = 1$ *b*) $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$

c) $(t^2 - 1)y' - 4ty = 1$ *d*) $y' \sin^3 t - 2y \cos t = 0$

e) $y' \sin^3 t(1 - H(t)) - 2y \cos t = 2H\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos t$, où $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $H(t) = -1$ si $t < 0$, $H(0) = 0$, $H(t) = 1$ si $t > 0$.

Exercice 2 : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et T un réel > 0. Montrer que l'équation différentielle linéaire scalaire $y' + \lambda y = \varphi$, où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction donnée continue et T-périodique, possède en général une et une seule solution T-périodique, qu'on explicitera. Que se passe-t-il dans les cas exceptionnels ?

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle scalaire suivante, définie sur $\mathbb{R}$:

$$t(t^2 + 1)y' - (2t^2 + 3)y = f ,$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée continue. Trouver l'ensemble des f telles que cette équation admette une $\mathbb{R}$-solution polynomiale. Etudier l'équation pour chacune de ces f.

Exercice 4 : Etudier sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $2ty' + y = 3t \cos(t^{3/2})$ $(t \geqslant 0)$ *b*) $(1 + t^2)y' + ty = 1$

c) $2t(1-t)y' + (1-2t)y = 1$ *d*) $ty' + 2y = \dfrac{t}{1+t^2}$.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$(\mathscr{E}) \qquad t^2 y' + y = t^2,$$

définie sur $\mathbb{R}$, dont on cherche les solutions à valeurs réelles.

a) Etudier d'abord les $\mathbb{R}_+^*$-solutions de $(\mathscr{E})$. L'unique solution tendant vers 0 en 0 sera notée f. Quel est le comportement en 0 des autres $\mathbb{R}_+^*$-solutions de $(\mathscr{E})$?

b) Prouver que f possède des $\mathrm{DL}_n(0)$ à tout ordre n. Expliciter le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

c) Montrer qu'il existe une unique série formelle $S \in \mathbb{C}[[X]]$ qui vérifie $(\mathscr{E})$ *formellement* et l'expliciter.

d) Soit $\tilde{f}$ le prolongement de f à $\mathbb{R}_+$ par $\tilde{f}(0) = 0$. Démontrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et que sa série de Taylor en 0 est précisément S. Prouver que $\tilde{f}$ est la seule $\mathbb{R}_+$-solution de $(\mathscr{E})$.

e) Etudier les $\mathbb{R}_-^*$-solutions de $(\mathscr{E})$. Montrer que chacune d'elles se prolonge continuement en 0, que sa fonction prolongée par continuité à $\mathbb{R}_-$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et admet S pour série de Taylor en 0. Quelles sont les $\mathbb{R}_-$-solutions de $(\mathscr{E})$?

f) Quelles sont les $\mathbb{R}$-solutions de $(\mathscr{E})$?

g) Indiquer quelles sont *toutes* les solutions de $(\mathscr{E})$.

§ IX.3 *ÉQUATIONS LINÉAIRES SCALAIRES D'ORDRE $n \geqslant 1$ À COEFFICIENTS CONSTANTS*

Dans ce §, le corps de base est $K = \mathbb{C}$.

Exponentielles-polynômes

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Rien ne s'oppose à son identification avec la fonction polynôme $\tilde{P} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qu'il définit, $\mathbb{R}$ étant infini (cf. tome 1, § VII.4). Rappelons que $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) désigne le K-ev des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$: $\mathbb{R} \longrightarrow K$. L'application $\mathscr{D}$: $f \mapsto f'$ est un endomorphisme du K-ev $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, K)$.

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$, nous noterons e_λ la fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \exp(\lambda t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$, et E_λ le $\mathbb{C}$-ev des fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e_\lambda(t)\, F(t)$, où $F \in \mathbb{C}[X]$ est quelconque. Enfin, on posera $E = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} E_\lambda$: c'est un $\mathbb{C}$-ev appelé $\mathbb{C}$-ev des **exponentielles-polynômes** définies sur $\mathbb{R}$. Ce $\mathbb{C}$-ev est évidemment $\mathscr{D}$-stable ; nous désignerons par D l'endomorphisme $\mathscr{D}\|_E$ de E. L'application : $\mathbb{C}[X] \longrightarrow E_\lambda$, $F \mapsto e_\lambda F$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev pour λ fixé ; en particulier E_0 peut être identifié à $\mathbb{C}[X]$.

Remarquons enfin que *toute primitive d'un élément f de E_λ* ($\lambda \in \mathbb{C}$) *appartient à $E_\lambda + E_0$.*

PROPOSITION IX.3.1

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a : $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$

(1) $$\boxed{P(\mathscr{D}) \cdot (e_\lambda f) = e_\lambda \times [P(\mathscr{D} + \lambda \operatorname{Id}) \cdot f] \quad .}$$

Démonstration :

Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'égalité (1) est évidente si P est un polynôme constant. Pour $P = X$, elle équivaut à $(e_\lambda f)' = e_\lambda(f' + \lambda f)$ qui résulte de la formule de dérivation du produit. L'égalité (1) est donc vraie pour deg $(P) = 1$. Si maintenant P est de degré $q \geqslant 1$, on peut le factoriser sous la forme

$$P = a(X - \rho_1) \cdots (X - \rho_q),$$

où $a, \rho_1, \ldots, \rho_q$ sont des nombres complexes. D'où :

$$\begin{aligned} &P(\mathscr{D}) \cdot (e_\lambda f) = \\ &\qquad = [a(\mathscr{D} - \rho_q \operatorname{Id}) \circ (\mathscr{D} - \rho_{q-1} \operatorname{Id}) \circ \cdots \circ (\mathscr{D} - \rho_1 \operatorname{Id})] \cdot (e_\lambda f), \end{aligned}$$

et par une récurrence évidente à partir du cas $q = 1$,

$$\begin{aligned} &P(\mathscr{D}) \cdot (e_\lambda f) = \\ &\qquad = e_\lambda \times ([a(\mathscr{D} + (\lambda - \rho_q) \operatorname{Id}) \circ \cdots \circ (\mathscr{D} + (\lambda - \rho_1) \operatorname{Id})] \cdot f) \\ &\qquad = e_\lambda \times [P(\mathscr{D} + \lambda \operatorname{Id}) \cdot f] . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $f \in \mathbb{C}[X]$, la relation (1) devient :

(2) $$\boxed{P(D) \cdot (e_\lambda f) = e_\lambda \times [P(D + \lambda \operatorname{Id}) \cdot f]}.$$

Chacun des $\mathbb{C}$-ev E_λ est évidemment D-stable. De plus :

PROPOSITION IX.3.2

Les $\mathbb{C}$-ev $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ *sont* ***indépendants****, autrement dit :*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} E_\lambda .$$

Démonstration :

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des nombres complexes distincts $(q \geqslant 1)$ et $F_1, \ldots, F_q$ des polynômes tels que $\sum_{k=1}^{q} e_{\lambda_k} F_k = 0$. Il s'agit de prouver que $(\forall k)\ F_k = 0$. Pour chaque $k \in [\![1, q]\!]$, soit d_k un entier

$F_k \in \mathbb{C}_{d_k - 1}[X]$. Notons $Q_k = \prod_{\substack{l \neq k \\ l \in [\![1, q]\!]}} (X - \lambda_l)^{d_l}$. Si $l \neq k$, on a : $Q_k(X + \lambda_l) = X^{d_l} R_{k,l}(X)$, où $R_{k,l} \in \mathbb{C}[X]$. D'autre part $Q_k(X + \lambda_k)$ est de valuation nulle car $\prod_{l \neq k} (\lambda_k - \lambda_l)^{d_l} \neq 0$, et s'écrit donc $a_k + XS_k(X)$, avec $a_k \in \mathbb{C}^*$ et $S_k \in \mathbb{C}[X]$. Fixons $k \in [\![1, q]\!]$ et appliquons (2) avec $P = Q_k$. On trouve,

si $k \neq l$: $Q_k(D) \cdot (e_{\lambda_l} F_l) = e_{\lambda_l} \times [Q_k(D + \lambda_l \operatorname{Id}) \cdot F_l]$

$$= e_{\lambda_l} \times [R_{k,l}(D) \cdot (D^{d_l} \cdot F_l)] = 0 \quad (\text{car } D^{d_l} \cdot F_l = 0),$$

et si $k = l$: $Q_k(D) \cdot (e_{\lambda_k} F_k) = e_{\lambda_k} \times [Q_k(D + \lambda_k \operatorname{Id}) \cdot F_k]$

$$= e_{\lambda_k} \times [a_k F_k + S_k(D) \cdot (D \cdot F_k)] = e_{\lambda_k} \times [a_k F_k + g_k],$$

avec $\deg(g_k) < \deg(a_k F_k)$ ou bien $F_k = 0$. Par suite,

$$0 = Q_k(D) \cdot \left(\sum_{l=1}^{q} e_{\lambda_l} F_l \right) = \sum_{l=1}^{q} e_{\lambda_l} \times [Q_k(D + \lambda_l \operatorname{Id}) \cdot F_l] =$$

$$= e_{\lambda_k} \times [a_k F_k + g_k] ,$$

ce qui implique $a_k F_k + g_k = 0$, et donc $F_k = 0$ par ce qui précède. Et c'est vrai pour tout $k \in [\![1, q]\!]$. ■

PROPOSITION IX.3.3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) \neq 0$. Notons u_λ l'endomorphisme induit par $P(D)$ sur E_λ. Alors u_λ est bijectif, et son inverse v_λ se définit ainsi : on développe la fraction $\dfrac{1}{P(\lambda + T)}$ en série formelle (cf. tome 1, § VIII.5) sous la forme $\dfrac{1}{P(\lambda + T)} = \sum_{k \geqslant 0} a_k T^k$, et $(\forall F \in \mathbb{C}[X])$: $v_\lambda \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda \times \left[\sum_{k \geqslant 0} a_k (D^k F) \right]$ (en remarquant que la somme écrite est en fait finie puisque $D^k F = 0$ pour k assez grand).

Démonstration :

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $F \in \mathbb{C}_{d-1}[X]$. On a : $v_\lambda \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda \times \left[\sum_{k=0}^{d-1} a_k (D^k F) \right]$, d'où :

$$(u_\lambda \circ v_\lambda) \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda \times \{[P(D + \lambda \operatorname{Id}) \circ R(D)] \cdot$$

avec $$R(T) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k T^k \in \mathbb{C}[T] ,$$

soit : $$(u_\lambda \circ v_\lambda) \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda \times [S(D) \cdot F] ,$$

où $$S(T) = P(\lambda + T) R(T) .$$

Mais $S(T) = 1 + W(T)$, où $W \in \mathbb{C}[T]$ et $\operatorname{val}(W) \geqslant d$ (cf. tome 1, § VIII.4), donc :

$$S(D) \cdot F = F + W(D) \cdot F = F, \qquad \text{d'où} \qquad (u_\lambda \circ v_\lambda) \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda F .$$

On démontre de la même façon que $(v_\lambda \circ u_\lambda) \cdot (e_\lambda F) = e_\lambda F$. Donc u_λ et v_λ sont des bijections réciproques l'une de l'autre dans E_λ. Puisque u_λ est $\mathbb{C}$-linéaire, v_λ l'est aussi. ■

Equation homogène à coefficients constants

Considérons l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n $(n \geqslant 1)$ homogène à coefficients constants, qu'on peut supposer résolue en $y^{(n)}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = 0$$

où $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, le corps de base étant $\mathbb{C}$, et cherchons ses I-solutions, I désignant un intervalle non trivial quelconque de $\mathbb{R}$.

Une technique très simple consiste à introduire le polynôme

$$(3) \qquad P(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n$$

appelé **polynôme caractéristique** de $(\mathscr{E})$, et à le factoriser sur $\mathbb{C}$:

$$(4) \qquad P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec des $\alpha_k \geqslant 1$, les λ_k étant distincts, et $p \geqslant 1$.

La relation (2) montre que

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad P(D) \cdot e_\lambda = e_\lambda \times P(\lambda) .$$

PROPOSITION IX.3.4

Toute I-solution de $(\mathscr{E})$ est la restriction à I d'une exponentielle-polynôme.

Démonstration :

Si $n = 1$, $(\mathscr{E})$ s'écrit $y' + ay = 0$ dont l s'écrivent $y = C\,e^{-at}$. Supposons $n \geqslant 2$ et que la propriété soit vraie à l'ordre $n-1$. Soit λ une racine de P. Posons

$$Q(X) = \frac{P(X)}{X-\lambda} = X^{n-1} + c_1 X^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\,.$$

Pour qu'une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{C}$ soit n fois dérivable et vérifie $(\mathscr{E})$, il faut et il suffit que $z = y' - \lambda y$ soit $n-1$ fois dérivable et vérifie l'équation

$$z^{(n-1)} + c_1 z^{(n-2)} + \cdots + c_n z = 0\,.$$

S'il en est ainsi, par l'hypothèse de récurrence, $z = g|_I$, où g est élément de l'ensemble E des exponentielles-polynômes. Pour déterminer y il reste à intégrer $y' - \lambda y = z$, ce qui a été fait au § IX.2, d'où l'on déduit que $y = f|_I$, avec $f \in E$, car toute primitive d'une fonction de E appartient à E, et la proposition IX.3.4 est démontrée par récurrence. ■

Pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, notons S_k le sous-$\mathbb{C}$-ev de E formé des fonctions $e_{\lambda_k} \times F$, où F parcourt $\mathbb{C}_{\alpha_k - 1}[X]$. On a : $\dim(S_k) = \alpha_k$, et d'après la proposition IX.3.2, les S_k sont indépendants. Par suite,

$$\dim\left(\bigoplus_{k=1}^{p} S_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = n\,.$$

THÉORÈME IX.3.1

> *Avec les notations ci-dessus, le* $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})$ *des* $\mathbb{R}$-*solutions de* $(\mathscr{E})$ *est* $\bigoplus_{k=1}^{p} S_k$ *et il est donc* **de dimension** n. *De plus, pour tout intervalle non trivial* I *de* $\mathbb{R}$, *l'application de restriction :* $f \mapsto f|_I$ *définit un isomorphisme de* $\mathbb{C}$-ev *de* $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})$ *sur* $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$ *(d'où en particulier* $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$ *est de dimension* n*).*

Démonstration :

D'après la proposition IX.3.4 les $\mathbb{R}$-solutions de $(\mathscr{E})$ sont à chercher dans E. Soit donc $f = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} f_\lambda$ un élément de E ($\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f_\lambda \in E_\lambda$, les (f_λ) étant à *support fini*). Dire que $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})$ équivaut à $P(D) \cdot f = 0$, c'est-à-dire (cf. proposition IX.3.2) $(\forall \lambda)\, P(D) \cdot f_\lambda = 0$. Or, si $P(\lambda) \neq 0$, $P(D)\|_{E_\lambda}$ est bijectif (cf. proposition IX.3.3) et donc $P(D) \cdot f_\lambda = 0 \Leftrightarrow f_\lambda = 0$. Il faut donc choisir λ parmi les racines de P. Pour $\lambda = \lambda_k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$, écrivons

$$P = (X - \lambda_k)^{\alpha_k} P_k \quad (P_k \in \mathbb{C}[X])$$

et $$f_{\lambda_k} = e_{\lambda_k} F \quad (F \in \mathbb{C}[X]).$$

Alors $P(D) \cdot f_{\lambda_k} = e_{\lambda_k} \times [P(D + \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot F] =$

$$= e_{\lambda_k} \times [P_k(D + \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot (D^{\alpha_k} \cdot F)].$$

Mais $P_k(D + \lambda_k \mathrm{Id})\|_{E_0}$ est bijectif car :

$$P_k(\lambda_k) \neq 0, \quad \text{donc} \quad P(D) \cdot f_{\lambda_k} = 0 \quad \text{ssi} \quad D^{\alpha_k} F = 0, \quad i.e. \quad f_{\lambda_k} \in S_k.$$

On a ainsi prouvé que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}) = \bigoplus_{k=1}^{p} S_k = \operatorname{Ker}(P(D))$.

Soit maintenant I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. L'application $E \longrightarrow \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$, $f \mapsto f|_I$ est *injective* (si $\sum_{k=1}^{q} e_{\lambda_k}(t) F_k(t) = 0$ $(\forall t \in I)$, du fait que I est infini, on déduit aisément comme dans la proposition IX.3.2 que les polynômes F_k sont nuls). D'autre part si l'on explicite la variation de la constante dans la preuve de la proposition IX.3.4 pour l'équation $y' - \lambda y = z$, on s'aperçoit que toute I-solution de $(\mathscr{E})$ est de la forme $f|_I$, avec non seulement $f \in E$, mais $f \in \bigoplus_{k=1}^{p} S_k$; d'où en définitive, l'application de restriction $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{S}_I(\mathscr{E})$, $f \mapsto f|_I$ est bien une bijection. ∎

Exemple 1 : Soit à résoudre l'équation $y''' - y = 0$. Son polynôme caractéristique est $X^3 - 1 = (X-1)(X-\mathrm{j})(X-\mathrm{j}^2)$, avec $\mathrm{j} = \exp\left(\frac{2\,\mathrm{i}\pi}{3}\right)$. Donc ses $\mathbb{R}$-solutions sont les fonctions $t \mapsto A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + C\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}^2 t}$, où $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$ est arbitraire.

Exemple 2 : Soit l'équation $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 0$. Son polynôme caractéristique est $(X-1)^3(X+1)$. Donc ses $\mathbb{R}$-solutions sont les fonctions

$$t \mapsto (At^2 + Bt + C)\,\mathrm{e}^t + D\,\mathrm{e}^{-t},$$

où $(A, B, C, D) \in \mathbb{C}^4$ est arbitraire.

COROLLAIRE 1

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application

$$\Phi_{t_0} : \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathbb{C}^n, \; f \mapsto (f(t_0), f'(t_0), \ldots, f^{(n-1)}(t_0))$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev. Autrement dit, pour toute suite $(A_{0,k})_{0 \leq k \leq n-1}$, il existe ***une et une seule*** *$f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})$ telle que $f^{(k)}(t_0) = A_{0,k}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.*

Démonstration :

Il est clair que Φ_{t_0} est $\mathbb{C}$-linéaire, et comme $\dim_{\mathbb{C}} (\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E})) = n$ et que $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}^n) = n$, il suffit de prouver que Φ_{t_0} est injective. Par translation sur t on peut se ramener au cas où $t_0 = 0$, ce que nous supposerons. Raisonnons par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'assertion découle du théorème IX.2.2. Supposons $n \geqslant 2$, et la propriété prouvée au rang $n - 1$. Soit $f \in \mathrm{Ker}\ (\Phi_0)$. Notons λ une racine du polynôme caractéristique P de $(\mathscr{E})$, et soit $Q(X) = \dfrac{P(X)}{X - \lambda}$. Posons $g = (D - \lambda\ \mathrm{Id})\, f \quad (= f' - \lambda f)$. Puisque $f \in \mathrm{Ker}\ (\Phi_0)$, on a : $g(0) = \cdots = g^{(n-2)}(0) = 0$. D'autre part, $P(D) \,.\, f = 0 = Q(D) \,.\, g$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $g = 0$, i.e. $f' - \lambda f = 0$. Compte tenu de : $f(0) = 0$, cette dernière relation implique : $f = 0$. ■

Cas d'une équation homogène à coefficients réels

Reprenons l'équation $(\mathscr{E})\ y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = 0$, en supposant $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, et en cherchant les I-solutions **à valeurs réelles.** Pour tout intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$, ces I-solutions à valeurs réelles forment un sous-$\mathbb{R}$-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ de $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$. Réciproquement si $f = u + \mathrm{i}v \in \mathscr{S}_I(\mathscr{E})$, avec u et v à valeurs réelles, la séparation des parties réelle et imaginaire dans $(\mathscr{E})$ montre que $u \in \mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ et $v \in \mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$. Donc **$\mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ est égal à l'ensemble des parties réelles des fonctions éléments de $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$.**

Le polynôme caractéristique P étant à coefficients réels peut se factoriser en :

$$P(X) = \left(\prod_{k=1}^{r} (X - \rho_k)^{\mu_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{s} (X - (\sigma_k + \mathrm{i}\omega_k))^{\nu_k} (X - (\sigma_k - \mathrm{i}\omega_k))^{\nu_k}\right),$$

en séparant les racines réelles ρ_k, chacune avec sa multiplicité μ_k, et les racines complexes conjuguées (si $r = 0$ ou $s = 0$, remplacer le produit correspondant par 1). On connaît toutes les fonctions du type $I \longrightarrow \mathbb{C}$ solutions de $(\mathscr{E})$, et en prenant leur partie réelle, on voit que le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ est engendré par les n fonctions : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} t \mapsto \mathrm{e}^{\rho_k t}\, t^m & (1 \leqslant k \leqslant r, 0 \leqslant m \leqslant \mu_k - 1) \\ t \mapsto \mathrm{e}^{\sigma_k t}\, t^m \cos \omega_k t & (1 \leqslant k \leqslant s, 0 \leqslant m \leqslant \nu_k - 1) \\ t \mapsto \mathrm{e}^{\sigma_k t}\, t^m \sin \omega_k t & (1 \leqslant k \leqslant s, 0 \leqslant m \leqslant \nu_k - 1). \end{cases}$$

A partir de l'indépendance des sous-$\mathbb{C}$-ev $(E_{\lambda,I})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ ($E_{\lambda,I} = \{f|_I, f \in E_\lambda\}$), il est facile de voir que les n fonct sont *linéairement indépendantes sur* $\mathbb{R}$; elles forment donc une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$, d'où :

Théorème IX.3.2

Les n fonctions données par (4) forment une base du $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$.

On peut compléter ce théorème en en déduisant que l'application de restriction $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathscr{S}_I(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev (cf. preuve du théorème IX.3.1) et en étendant le corollaire 1 du théorème IX.3.1 : pour toute suite réelle $(A_{0,k})_{0 \leq k \leq n-1}$, il existe *une et une seule* $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ telle que $f^{(k)}(t_0) = A_{0,k}$ pour $0 \leq k \leq n-1$ (cela étant dû pour l'essentiel au fait que $\dim_{\mathbb{R}} (\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{E}_{\mathbb{R}})) = n = \dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}^n)$).

Exemple 3 : Soit l'équation $y^{(4)} + y'' + y = 0$ dont on cherche les $\mathbb{R}$-solutions à valeurs réelles. Le polynôme caractéristique est $(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. Les $\mathbb{R}$-solutions sont donc les fonctions $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \mathrm{e}^{t/2}\left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \mathrm{e}^{-t/2}\left(C \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + D \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) ,$$

où $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ est arbitraire.

Résolution de l'équation avec second membre

Considérons maintenant l'équation différentielle suivante :

$$(\mathscr{F}) \qquad y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \cdots + b_n y = b ,$$

où $(b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ est donné ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \leq 2$), $b : I \longrightarrow K$ est donné **continue,** et où la fonction inconnue est une fonction $I \longrightarrow K$, I désignant un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Notons $(\mathscr{F}_0)$ l'équation homogène associée à $(\mathscr{F})$ qu'on a appris à résoudre précédemment sur $\mathbb{R}$, puis sur I. Soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une base du K-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{F}_0)$. Nous allons chercher une solution particulière de $(\mathscr{F})$ par la **méthode de variation des constantes,** c'est-à-dire sous la forme $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des fonctions $I \longrightarrow K$ dérivables auxquelles nous imposons (la suite le justifiera) les conditions suivantes :

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' g_k^{(\nu)} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \nu \leq n-2 .$$

Un calcul élémentaire montre que, si ces relations sont satisfaites, alors g est n fois dérivable, avec $g^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k^{(\nu)}$ pour $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$, et

$$g^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k^{(n)}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' g_k^{(n-1)} .$$

On aura donc $g \in \mathscr{S}_I(\mathscr{F})$ ssi on a à la fois (5) et :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' g_k^{(n-1)}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [g_k^{(n)} + b_1 g_k^{(n-1)} + \cdots + b_n g_k] = b .$$

Tenant compte du fait que $g_k \in \mathscr{S}_I(\mathscr{F}_0)$, on voit que $g \in \mathscr{S}_I(\mathscr{F})$ ssi :

$$(6) \qquad \boxed{\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' g_k^{(\nu)} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-2 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k' g_k^{(n-1)} = b \end{array}\right.} .$$

Or, pour chaque $t \in I$, la matrice $G(t) = [g_k^{(\nu)}(t)]_{0 \leqslant \nu \leqslant n-1, 1 \leqslant k \leqslant n}$ est *inversible* à cause du corollaire 1 du théorème IX.3.1 (ou de son analogue pour $K = \mathbb{R}$) du fait que $(g_1, \dots, g_n)$ est *une base* du K-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{F})$. Son déterminant $W(t)$ (qu'on appellera plus loin le **wronskien** de $g_1, \dots, g_n$) reste donc $\neq 0$ pour tout $t \in I$, et (6) équivaut à :

$$(7) \qquad (\forall t \in I) \quad \begin{bmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_n'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{W(t)} \widetilde{G(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix} ,$$

où $\widetilde{G(t)}$ désigne la matrice complémentaire de $G(t)$. Il est clair que le second membre de (7) donne une fonction *continue* de t sur I, ce qui prouve que $(\mathscr{F})$ **admet au moins une *I*-solution,** par exemple la fonction :

$$t \mapsto g(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} B_k(t)\,\mathrm{d}t\right) g_k(t) ,$$

où $t_0 \in I$ est fixé, et où $\begin{bmatrix} B_1(t) \\ \vdots \\ B_n(t) \end{bmatrix}$ est le second membre de (7). Compte tenu des généralités vues au § IX.1, et de l'étude déjà faite de l'équation homogène $(\mathscr{F}_0)$, on aboutit au :

THÉORÈME IX.3.3

> *Pour tout sous-intervalle J non trivial de I, l'espace affine $\mathscr{S}_J(\mathscr{F})$ des J-solutions de $(\mathscr{F})$ est* **de dimension** *n. Si J_1 et J_2 sont des sous-intervalles non triviaux de I tels que $J_2 \subset J_1 \subset I$, l'application affine $\mathscr{S}_{J_1}(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{S}_{J_2}(\mathscr{F})$, $f \mapsto f|_{J_2}$ est bijective. En conséquence, les* **solutions maximales** *de $(\mathscr{F})$ sont les* **I-solutions.**

En conséquence, il suffit d'intégrer $(\mathscr{F})$ sur I pour en déduire toutes les solutions. Avec les mêmes notations, si on fixe $t_0 \in I$, l'application $\Psi_{t_0} : \mathscr{S}_I(\mathscr{F}) \longrightarrow K^n$, $f \mapsto (f(t_0), f'(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0))$ est affine, et sa partie linéaire est

$$\Phi_{t_0} : \mathscr{S}_I(\mathscr{F}_0) \longrightarrow K^n, \quad f \mapsto (f(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0)),$$

dont on sait qu'elle est bijective. Donc Ψ_{t_0} est bijective, d'où :

THÉORÈME IX.3.4

> *Pour tout $t_0 \in I$ et toute suite $(A_{0,k})_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in K^n$, il existe* **une et une seule** *I-solution f de $(\mathscr{F})$ telle que*
>
> $$f^{(k)}(t_0) = A_{0,k} \quad pour \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 .$$

Exemple 4 : *Chercher les solutions à valeurs réelles de l'équation*

$$(8) \qquad y'' + y = \frac{1}{\cos 2t}, \quad \text{définie sur} \quad I = \left] \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[.$$

Solution : Cette équation est bien du type $(\mathscr{F})$, avec $n = 2$ et b continue. L'équation homogène associée a pour solutions de base $\cos|_I$ et $\sin|_I$. La méthode de variation des constantes conduit à rechercher deux fonctions dérivables A et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$(\forall t \in I) \quad A'(t)\cos t + B'(t)\sin t = 0$$

et

$$-A'(t)\sin t + B'(t)\cos t = \frac{1}{\cos 2t},$$

d'où

$$A'(t) = \frac{-\sin t}{\cos 2t}, \quad B'(t) = \frac{\cos t}{\cos 2t}.$$

On peut prendre

$$A(t) = \int_0^t \frac{-\sin\tau \,\mathrm{d}\tau}{\cos 2\tau} = \int_0^t \frac{-\sin\tau}{2\cos^2\tau - 1}\,\mathrm{d}\tau = \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\cos t + \sqrt{2}/2}{\cos t - \sqrt{2}/2}\,,$$

et

$$B(t) = \int_0^t \frac{\cos\tau \,\mathrm{d}\tau}{\cos 2\tau} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}/2 + \sin t}{\sqrt{2}/2 - \sin t}\,.$$

Donc les I-solutions de (8) sont les fonctions

$$t \mapsto A\cos t + B\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\,\mathrm{Log}\,\frac{\cos t + \sqrt{2}/2}{\cos t - \sqrt{2}/2} + \\ + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}/2 + \sin t}{\sqrt{2}/2 - \sin t}$$

avec A et B réels arbitraires.

Remarque 1 : Dans un cas aussi simple, le changement de fonction inconnue $y = z\cos t$ aurait conduit à l'équation

$$z''\cos t - 2\,z'\sin t = \frac{1}{\cos 2t}\,,$$

qui est du 1^er^ ordre en $z' = Z$ et aurait donc pu se résoudre par les méthodes du § IX.2, en remontant pour terminer de Z à z, puis à y.

Cas où le second membre est une exponentielle-polynôme

Reprenons l'équation $(\mathscr{F})$, avec $I = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ et $b \in E_\lambda$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire $b(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,Q(t)$, où $Q \in \mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$). Il est alors possible d'obtenir facilement une solution particulière sans variation des constantes. En effet soit P le polynôme caractéristique de $(\mathscr{F}_0)$ factorisé sous la forme

$$P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \quad (p \geqslant 1, \text{ les } \alpha_k \geqslant 1, \text{ les } \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ distincts})$$

et notons ν la valuation de $P(\lambda + T) \in \mathbb{C}[T]$, de sorte que $(X - \lambda)^{\nu} \mid P$, mais $(X - \lambda)^{\nu+1} \mid P$. Cherchons une $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{F})$ de la forme $f = e_\lambda F$, avec $F \in \mathbb{C}[X]$. La condition : $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{F})$ s'écrit : $P(D)\cdot f = e_\lambda\,Q$, ou encore : $e_\lambda \times P(D + \lambda\,\mathrm{Id})\cdot F = e_\lambda \times Q$, c'est-à-dire

$$P(D + \lambda\,\mathrm{Id})\cdot F = Q\,. \tag{9}$$

Si $P(\lambda + T)$ se développe en $T^{\nu}R(T)$, où $R \in \mathbb{C}[T]$, (9) équivaut à : $R(D)\cdot(D^{\nu}F) = Q$. Or val $(R) = 0$, donc $u = R(D)\|_{E_0}$ est inversible (cf. proposition IX.3.3), et si $v = u^{\langle -1\rangle}$, (9) équivaut à : D^{ν} I obtient ainsi comme solutions de la forme $f = e_\lambda F$ toutes les fonctions obtenues en prenant pour F *une primitive* ν*-ième quelconque du polynôme* $v \cdot Q$ (elles forment un espace affine de dimension ν et pour ces fonctions $\deg(F) = \deg(Q) + \nu$). Comme nous avons besoin d'une seule solution particulière de $(\mathscr{F})$, notons $\mathscr{I}$ l'opérateur qui associe à tout polynôme *sa primitive nulle en* 0 : nous obtenons la fonction :

$$(10) \qquad \boxed{t \mapsto e^{\lambda t}\left[\mathscr{I}^{\nu}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k \cdot Q\right)(t)\right]},$$

où $\sum_{k \geqslant 0} a_k T^k$ est le développement en série formelle de $\dfrac{1}{R(T)} = \dfrac{T^\nu}{P(\lambda + T)}$.
Malgré la généralité (et la commodité dès que $\deg(Q) + \nu$ est un peu élevé) de la formule (10), on préfère parfois utiliser la *méthode des coefficients indéterminés,* c'est-à-dire chercher une solution particulière de $(\mathscr{F})$ sous la forme $f = e_\lambda F$ *par identification* en n'oubliant pas que $\deg(F) = \deg(Q) = \nu$. Pour éviter de surcharger sa mémoire, on peut même procéder en deux étapes : poser d'abord $y = e^{\lambda t} z$, ce qui conduit à l'équation

$$z^{(n)} + c_1 z^{(n-1)} + \cdots + c_n z = Q ,$$

et chercher ensuite F, ou plutôt $F^{(\nu)}$ par identification (cela évite de faire une erreur sur le degré de F).

Exemple 5 : *Soit à chercher une* $\mathbb{R}$*-solution particulière de l'équation*

$$(11) \qquad y'' + y' + y = t\, e^t .$$

Comme 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on peut chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto f(t) = (At + B)\, e^t$. Par identification, on trouve les conditions $3A = 1$, $3A + 3B = 0$, d'où la solution particulière : $t \mapsto \dfrac{1}{3}(t-1)\, e^t$.

Exemple 6 : *On donne* $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$. *Intégrer complètement l'équation :*

$$(12) \quad y^{(n)} - 2ny^{(n-1)} + \cdots + (-1)^j 2^j \binom{n}{j} y^{(n-j)} + \\ + \cdots + (-1)^n 2^n y = t^k e^t ,$$

où l'inconnue est une fonction : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Solution : Le polynôme caractéristique de l'équation hom est ici $P(X) = (X-2)^n$, d'où $P(1+T) = (T-1)^n$ et

$$\frac{1}{P(T+1)} = (-1)^n (1-T)^{-n} = (-1)^n \sum_{q \geq 0} \binom{-n}{q} (-T)^q =$$

$$= (-1)^n \sum_{q \geq 0} \binom{n-1+q}{n-1} T^q .$$

On en déduit :

$$(-1)^n (1-D)^{-n} \cdot t^k = (-1)^n \sum_{q=0}^{k} \binom{n-1+q}{n-1} \frac{k!}{(k-q)!} t^{k-q} .$$

Donc une solution particulière de (12) est la fonction :

$$t \mapsto (-1)^n \mathrm{e}^t \sum_{q=0}^{k} \binom{n-1+q}{n-1} \frac{k!}{(k-q)!} t^{k-q} .$$

Quant à l'équation homogène associée, elle admet pour ensemble de solutions les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{2t} F(t)$, où $F \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ est arbitraire ; d'où finalement toutes les solutions de (12), qui dépendent linéairement de n constantes arbitraires.

Exercice 1 : Intégrer les équations différentielles suivantes, définies sur $\mathbb{R}$ et où l'on cherche des solutions à valeurs réelles :

a) $y'' + y = \left| t - \frac{\pi}{2} \right| + \left| t + \frac{\pi}{2} \right|$ *b*) $y^{(n)} - y = t^4 \mathrm{e}^t$

c) $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{t^2+1}}$ *d*) $y'' + 4y' - 5y = t^k \mathrm{e}^{2t} \cos t \ (k \in \mathbb{N}^*)$

e) $y'' + y' + y = t^2 \mathrm{e}^{\lambda t} \cos at \ ((\lambda, a) \in \mathbb{R}^2)$ *f*) $y'' - 2y' + 5y = t \ \mathrm{e}^t \cos^2 t$

Exercice 2 : On donne $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}^*$. Trouver les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que : $\quad (\forall t \in \mathbb{R}) \ \ y''(t) + a^2 y(-t) = f(t)$.

Exercice 3 : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\ (z) > 0$, et $x \in \mathbb{R}^*$.

a) Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}}{y - \mathrm{i}z} \mathrm{d}y$ a un sens. Soit $F(x)$ sa valeur.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et trouver une équation différentielle du 1[er] ordre vérifiée par F. En déduire $F(x) = 2\,\mathrm{i}\pi\,\mathrm{e}^{-zx}$ si $x > 0$, $F(x) = 0$ si $x < 0$.

Exercice 4 : Soit N la fonction : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s,t) \mapsto (1-s)t$ si $t \leq s$ et $(s,t) \mapsto (1-t)s$ si $t > s$. On note E le $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on définit $g = T \cdot f$ par

$$(\forall s \in [0,1]) , \quad g(s) = \int_0^1 N(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t .$$

a) Vérifier que $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. Déterminer Im (T) et Ker (T).

b) Valeurs propres et vecteurs propres de T ?

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ non valeur propre de T. Montrer que $T - \lambda\,\mathrm{Id} : E \longrightarrow E$ est *bijectif.*

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation différentielle à coefficients constants :

$$(L) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g ,$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée *continue* et telle que $g(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que, p solution $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de (L) vérifie la condition $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il faut et il suffit que les parties réelles de toutes les racines de $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ soient < 0.

Exercice 6 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que : $\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists f_1, \ldots, f_p$; $g_1, \ldots, g_p$ fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ avec des g_k *continues* et telles que

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad \varphi(x + y) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\, g_k(y) .$$

Montrer que φ est élément du $\mathbb{C}$-ev E des exponentielles-polynômes. *Indication :* se ramener au cas où les g_k sont *indépendantes* (alors leurs primitives le sont aussi) et prouver que φ vérifie une équation différentielle linéaire scalaire homogène à coefficients constants.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose que les intégrales $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} f''^2$ convergent. En déduire que $\int_0^{+\infty} f'^2$ converge aussi (cf. tome 2, exercice 25 du chapitre VIII.3). Intégrer $\int_0^{+\infty} [f^2 - f'^2 + f''^2 - (f + f' + f'')^2]$; en déduire $\int_0^{+\infty} (f^2 + f''^2) \geqslant \int_0^{+\infty} f'^2$. Que peut-on dire en cas d'égalité ?

Exercice 8 : Utiliser l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{t}$ définie sur $I =]0, +\infty[$ pour prouver l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{t + x} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1 + t^2} \mathrm{d}t \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t(1 + t^{2n})} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est $2n$ fois dérivable et vérifie, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle $y^{(2n)} + (-1)^n y = (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\text{on rappelle que } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Etudier, lorsque $x \longrightarrow 0 + 0$, le comportement de $f^{(k)}(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant 2n - 1)$ et en déduire l'expression exacte de $f(x)$.

Indication : Pour le calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2k} \mathrm{d}t}{1 + t^{2n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, on pourra se reporter à l'exercice 17 du § VIII.3 du tome 2.

N.B. On trouvera dans ce même chapitre d'autres exercices faisant appel à la résolution d'équations différentielles, par exemple les exercices 13, 16, 18, 19 du § VIII.5 du tome 2.

§ IX.4 *SYSTÈMES LINÉAIRES CARRÉS À COEFFICIENTS CONSTANTS*

Dans ce §, E désigne un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On se propose d'étudier l'équation linéaire du 1er ordre, résolue en Y :

$$(\mathscr{L}) \qquad Y' = A \,.\, Y + B ,$$

où la fonction inconnue Y est à valeurs dans E, où $A \in \mathrm{Hom}_K(E)$ *est donné fixe,* et où $B : I \longrightarrow E$ est une fonction **continue** sur l'intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$. Nous pouvons disposer comme outil des exponentielles d'endomorphismes de E étudiées au tome 2 (cf. § XI.4).

THÉORÈME IX.4.1

> *L'espace affine $\mathcal{S}_I(\mathcal{L})$ des I-solutions de $(\mathcal{L})$ est* **de dimension finie, égale à n.** *De plus, pour tout sous-intervalle non trivial J de I, l'application de restriction $\rho_{I,J}: \mathcal{S}_I(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{S}_J(\mathcal{L})$, $f \mapsto f|_J$ est* **bijective.**

Démonstration :

Fixons $t_0 \in I$. Si $\varphi : I \longrightarrow E$ est dérivable quelconque, la fonction $\psi : I \longrightarrow E$, $t \mapsto [\exp(-tA)] \,.\, \varphi(t)$ est dérivable, et

$$(\forall t \in I) \quad \psi'(t) = [\exp(-tA)] \cdot (\varphi'(t) - A \cdot \varphi(t)) \,.$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}_I(\mathcal{L})$ ssi $\psi' = B_1$, où $(\forall t)$ $B_1(t) = [\exp(-tA)] \,.\, B(t)$. Comme B_1 est continue sur I, $\psi' = B_1$ ssi $\psi(t) = C + \int_{t_0}^{t} B_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau$, où $C \in E$ est une constante. Donc $\mathcal{S}_I(\mathcal{L})$ est l'ensemble des fonctions $\{\varphi_C\}_{C \in E}$, où $(\forall C \in E,\ \forall t \in I)$

$$(1) \quad \boxed{\varphi_C(t) = [\exp(tA)] \cdot C + [\exp(tA)] \cdot \left[\int_{t_0}^{t} [\exp(-\tau A)] \cdot B(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right]} \,.$$

Cette formule montre que $\mathcal{S}_I(\mathcal{L})$ est un espace affine dirigé par le K-ev $\mathcal{S}_I(\mathcal{L}_0)$ des fonctions $f_C : I \longrightarrow E$, $t \mapsto [\exp(tA)] \,.\, C$ $(C \in E)$. Or l'application $E \longrightarrow \mathcal{S}_I(\mathcal{L}_0)$, $C \mapsto f_C$ est K-linéaire, surjective par définition de $\mathcal{S}_I(\mathcal{L}_0)$. Elle est injective car

$$f_C = 0 \Rightarrow [\exp(tA)] \,.\, C = 0 \Rightarrow [\exp(-tA)] \circ [\exp(tA)] \,.\, C = 0 =$$
$$= \exp(0_{\mathrm{Hom}_K(E)}) \,.\, C = C \,.$$

Donc $\dim_K (\mathcal{S}_I(\mathcal{L}_0)) = n$, ce qui prouve la première assertion du théorème. Le même procédé, avec J à la place de I, prouve que $\mathcal{S}_J(\mathcal{L})$ est aussi de dimension n et que l'application $E \longrightarrow \mathcal{S}_J(\mathcal{L}_0)$, $C \mapsto f_C|_J$ est elle aussi injective (prendre $t_0 \in J$). La seconde assertion du théorème en résulte. ■

On déduit de ce qui précède que les **solutions maximales** de $(\mathcal{L})$ en sont les ***I*-solutions.** Il suffit donc de les connaître pour que $(\mathcal{L})$ soit complètement intégré.

THÉORÈME IX.4.2

> *Pour tout $(t_0, Y_0) \in I \times E$, il existe* **une et une seule** *I-solution φ de $(\mathcal{L})$ telle que $\varphi(t_0) = Y_0$. Si I est ouvert, les* **courbes intégrales maximales** *de $(\mathcal{L})$ forment une* **partition** *de $I \times E$.*

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de la formule (1). L'unique I-solution cherchée est la fonction φ_C, avec $C = [\exp(-tA)] \cdot Y_0$. ■

Théoriquement la résolution de $(\mathscr{L})$ se ramène donc au calcul de $\exp(tA)$ $(t \in \mathbb{R})$ et à une quadrature. Voyons ce que cela donne en pratique.

Explicitation des solutions dans le cas homogène

L'équation homogène

$$(\mathscr{L}_0) \qquad Y' = A \cdot Y ,$$

où $A \in \mathrm{Hom}_K\ (E)$, admet pour $\mathbb{R}$-solutions les fonctions $g_C : \mathbb{R} \longrightarrow E$, $t \mapsto [\exp(tA)] \cdot C$, où $C \in E$ est arbitraire. De plus l'application : $E \longrightarrow \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$, $C \mapsto g_C$ est un isomorphisme de K-ev. Il reste à expliciter $\exp(tA)$, ce que nous avons fait au tome 1 (cf. §§ XV.3 et 5) et revu au tome 2 (cf. § XI.4).

- *Premier cas : A est diagonalisable*

Soit alors $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres (V_k étant associé à la valeur propre λ_k). Alors $[\exp(tA)] \cdot V_k = \mathrm{e}^{\lambda_k t}\ V_k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![1, n]\!]$. On en déduit, $(\forall t \in \mathbb{R})$ $(\forall (C_1, \ldots, C_n) \in K^n)$, les $\mathbb{R}$-solutions :

$$(2) \qquad \boxed{[\exp(tA)] \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} C_k V_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k t}\, C_k V_k} \,.$$

Exemple 1 : *Intégrer le système différentiel linéaire carré suivant* $(K = \mathbb{C})$

$$(3) \quad \begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + (1+\rho^2)y_3 \\ y_2' = -y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases} \qquad (\rho \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1, 1\})$$

Solution : L'équation à inconnue vectorielle canoniquement associée à (3) est :

$$(4) \qquad Y' = AY ,$$

où Y prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^3$, et où $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\ (\mathbb{C}^3)$ est défini par sa matrice M dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(A) = M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1+\rho^2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$\chi_A(X) = \chi_M(X) = (1-X)(X^2-\rho^2).$$

Ayant exclu les valeurs de ρ pour lesquelles A n'est pas diagonalisable, on obtient trois valeurs propres distinctes 1, ρ et $-\rho$ et la base de vecteurs propres correspondante (V_1, V_2, V_3) :

$$\begin{aligned} V_1 &= -(3+\rho^2)\,e_1 + (1+\rho^2)\,e_2 - 2\,e_3\,; \\ V_2 &= (1+\rho)\,e_1 - e_2 + e_3\,; \\ V_3 &= (1-\rho)\,e_1 - e_2 + e_3\,. \end{aligned}$$

D'après (2) les $\mathbb{R}$-solutions de (4) sont données par :

$$t \mapsto C_1\,\mathrm{e}^t\,V_1 + C_2\,\mathrm{e}^{\rho t}\,V_2 + C_3\,\mathrm{e}^{-\rho t}\,V_3\,,$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3$ est arbitraire. Revenant à (3), cela donne les solutions :

$$\begin{cases} y_1 = -(3+\rho^2)C_1\,\mathrm{e}^t + (1+\rho)C_2\,\mathrm{e}^{\rho t} + (1-\rho)C_3\,\mathrm{e}^{-\rho t} \\ y_2 = (1+\rho^2)C_1\,\mathrm{e}^t - C_2\,\mathrm{e}^{\rho t} - C_3\,\mathrm{e}^{-\rho t} \\ y_3 = -2\,C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{\rho t} + C_3\,\mathrm{e}^{-\rho t} \end{cases}$$

• *Deuxième cas simple : $\chi_A(X) = (\rho - X)^n$, avec $\rho \in K$*

Alors $(\forall t \in \mathbb{R})$ $\chi_{tA}(X) = (\rho t - X)^n$. Dans ces conditions $\exp(tA)$ se calcule immédiatement par :

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{\rho t}\exp(tA - \rho t\,\mathrm{Id}) = \mathrm{e}^{\rho t}\sum_{k=0}^{\beta-1}\frac{t^k}{k!}(A-\rho\,\mathrm{Id})^k\,,$$

où β est la période du nilpotent $A - \rho\,\mathrm{Id}$. On en déduit $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$: c'est l'ensemble des fonctions $\{f_V\}_{V \in E}$, où :

(5) $(\forall V \in E)\,(\forall t \in \mathbb{R})$ $\qquad f_V(t) = \mathrm{e}^{\rho t}\displaystyle\sum_{k=0}^{\beta-1}\frac{t^k}{k!}(A-\rho\,\mathrm{Id})^k \cdot V\,.$

Exemple 2 : *Intégrer le système différentiel linéaire carré suivant, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, le corps de base étant $\mathbb{C}$ $(n \geqslant 2)$:*

(6) $y_1' = \lambda y_1 + y_2\,,\quad y_2' = \lambda y_2 + y_3, \ldots, y_{n-1}' = \lambda y_{n-1} + y_n\,,$

Solution : L'équation à inconnue vectorielle canoniquement associée à (6) est :

$$(7) \qquad Y' = AY ,$$

où $A \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ est défini par sa matrice dans la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$:

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(A) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \lambda & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = J_n(\lambda) .$$

On a :

$$\chi_A(X) = (\lambda - X)^n .$$

Les puissances de la matrice $J_n(\lambda) - \lambda I_n = J_n(0) = J = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(A - \lambda \operatorname{Id})$ sont connues (cf. tome 1, § XV.4) ; la période de J est n. On a :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\exp(tA)) = \mathrm{e}^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \ldots & \dfrac{t^{n-1}}{n-1!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda t} \exp(tJ) ,$$

d'où les $\mathbb{R}$-solutions de (7) : $t \mapsto f_V(t) = \mathrm{e}^{tA} \cdot V$, ce qui donne, en posant $V = \sum_{k=1}^{n} C_k e_k$ ($(C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{C}^n$ arbitraire), toutes les solutions de (6) :

$$\begin{cases} y_1 = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(C_1 + C_2 t + C_3 \dfrac{t^2}{2!} + \cdots + C_n \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\ y_2 = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(C_2 + C_3 t + \cdots + C_n \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right) \\ \vdots \\ y_{n-1} = \mathrm{e}^{\lambda t}(C_{n-1} + C_n t) \\ y_n = \mathrm{e}^{\lambda t} C_n . \end{cases}$$

• *Troisième cas : On suppose $\chi_A(X)$ dissocié sur le corps K*

Ce cas englobe les deux précédents. Nous supposerons maintenant que A n'est pas diagonalisable et a au moins deux valeurs propres. Factorisons χ_A :

$$(8) \quad \chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{\alpha_k} \quad (p > 1, \text{les } \lambda_k \text{ distincts, les } \alpha_k \geq 1)$$

Nous savons alors (cf. tome 1, Chapitre XV et tome 2, § XI.4) que, si N_k désigne *le sous-K-*ev *caractéristique* de A pour λ_k, on a :

$$A = \bigoplus_{k=1}^{p} (\lambda_k \,\mathrm{Id}_{N_k} + \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}),$$

où $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}} \in \mathrm{Hom}_K(N_k)$ est nilpotent, d'où

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad tA = \bigoplus_{k=1}^{p} (\lambda_k t \,\mathrm{Id}_{N_k} + t\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}),$$

et par suite :

$$\exp(tA) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_k t} \exp(t\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_k t}\left(\sum_{r=0}^{\beta_k - 1} \frac{t^r}{r!} (\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}})^r\right),$$

β_k est la période de $\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}}$. On en déduit les $\mathbb{R}$-solutions de $(\mathscr{L}_0)$ sous la forme suivante : décomposons un vecteur arbitraire $V \in E$ suivant les N_k :

$$V = \sum_{k=1}^{p} V_k \quad ((\forall k) \quad V_k \in N_k).$$

La $\mathbb{R}$-solution φ_V de $(\mathscr{L}_0)$ est :

$$\boxed{(\forall t \in \mathbb{R}) \qquad \varphi_V(t) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_k t}\left(\sum_{r=0}^{\beta_k - 1} \frac{t^r}{r!} (\boldsymbol{\nu}_{\mathbf{k}})^r \cdot V_k\right)}. \tag{9}$$

Résumons les cas 1, 2 et 3 sous forme de théorème :

THÉORÈME IX.4.3

Supposons le polynôme caractéristique de l'équation

$$(\mathscr{L}_0) \qquad Y' = A \cdot Y$$

dissocié sous la forme (8) $(p \geqslant 1)$. *Alors le K-*ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ *des* $\mathbb{R}$-*solutions de* $(\mathscr{L}_0)$ *s'écrit :*

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0) = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0),$$

où pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ *est le sous-K-*ev *de* $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ *formé des solutions de la forme*

$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t}(A_0 + tA_1 + \cdots + t^{q-1} A_{q-1}) \quad ((A_0, \ldots, A_{q-}$

De plus, chaque $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ *est de dimension* α_k *(d'où* $\dim_K (\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)) = n$*), et dans l'écriture ci-dessus, qui est unique, d'une fonction élément de* $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$*, on a :* $q \leqslant \alpha_k$*.*

Démonstration :

Il est facile de vérifier que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ est un sous-K-ev de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ et que toute $\varphi \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ s'écrit de façon unique sous la forme indiquée. A chaque $V_k \in N_k$, associons $\varphi_{V_k} \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ donnée par (9) avec $V = V_k$: $\quad t \mapsto \varphi_{V_k}(t) = e^{\lambda_k t} \sum_{r=0}^{\beta_k - 1} \frac{t^r}{r!} (\boldsymbol{\nu}_k)^r \cdot V_k$; alors $\varphi_{V_k} \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, et l'application $V_k \mapsto \varphi_{V_k}$ est K-linéaire, et aussi injective car $\varphi_{V_k}(0) = V_k$. Soit S_k l'image de cette application, d'où :

$$\dim_K (S_k) = \dim_K (N_k) = \alpha_k ;$$

d'après l'étude conduisant à (9), $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0) = \bigoplus_{k=1}^{p} S_k$; comme $S_k \subset \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, *il reste à voir que* $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0) \subset S_k$. Pour cela, prenons $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ de la forme $t \mapsto f(t) = e^{\lambda_k t} P(t)$, où P est polynomial en t, de degré $\leqslant q - 1$ $(q \geqslant 1)$, et à coefficients dans E. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(t) = A \cdot f(t) = e^{\lambda_k t} A \cdot P(t) = e^{\lambda_k t}(\lambda_k P(t) + P'(t)),$$

d'où : $(A - \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot P(t) = P'(t)$, et par récurrence :

$$(A - \lambda_k \mathrm{Id})^j \cdot P(t) = P^{(j)}(t) \quad \text{pour} \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

et en particulier, $(A - \lambda_k \mathrm{Id})^q \cdot P(t) = 0$, donc $P(t) \in N_k$. En décomposant f sous la forme (9), on conclut que $q \leqslant \beta_k$ et que $f \in S_k$. Finalement,

$$(\forall k) \quad \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0) = S_k . \quad \blacksquare$$

Remarque 1 : Le fait que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ est de dimension n (que le polynôme $\chi_A(X)$ soit ou non dissocié dans $K[X]$) est aussi une conséquence immédiate du théorème IX.4.2. En effet en vertu de ce théorème, l'application K-linéaire $E \longrightarrow \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$, $V \mapsto \varphi_V$, la fonction φ_V étant définie par $t \mapsto \exp(tA) \cdot V$, est bijective.

Cette question sera reprise au § IX.5 dans un contexte plus général.

• Pratiquement, si l'on connaît les sous-espaces caractéristiques N_k, il est loisible d'appliquer directement la formule (9) car *dans chaque espace caractéristique, on est ramené au 2e cas ci-dessus.* C'est le cas e

l'on dispose d'une base $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ trigonalisante pour A. (Puisque $\chi_A(X)$ est dissocié sur K, il est sûr que de telles bases existent, mais cela ne signifie pas qu'il soit toujours facile d'en expliciter une). Une telle base $\mathscr{B}$ étant obtenue, soit

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A) = [a_{ij}]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$$

supposée *trigonale inférieure.* Le système linéaire scalaire carré associé à $(\mathscr{L}_0)$ dans $\mathscr{B}$ est :

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1 \\ y_2' = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 \\ y_n' = a_{n1}\, y_1 + \cdots + a_{nn}\, y_n \end{cases}$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} (\mathscr{T}_1) \quad y_1' - a_{11}\, y_1 = 0 \\ (\mathscr{T}_2) \quad y_2' - a_{22}\, y_2 = a_{21}\, y_1 \\ (\mathscr{T}_n) \quad y_n' - a_{nn}\, y_n = a_{n,1}\, y_1 + \cdots + a_{n,n-1}\, y_{n-1} \end{cases}$$

dont la résolution est immédiate : on intègre d'abord $(\mathscr{T}_1)$, puis on reporte la solution générale trouvée au second membre de $(\mathscr{T}_2)$, ce qui permet d'intégrer l'équation obtenue $(\mathscr{T}_2)$ par les méthodes du § IX.2 (en remarquant de plus que le second membre est une exponentielle-polynôme), et ainsi de suite jusqu'à $(\mathscr{T}_n)$.

• S'il n'est pas facile de déterminer les N_k, pourvu que l'on ait pu déterminer les λ_k, on utilise le théorème IX.4.3 en recherchant directement les sous-espaces $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ par la **méthode des coefficients indéterminés** : pour $k \in [\![1,p]\!]$ fixé, on pose $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} P(t)$, avec $\deg(P) \leqslant \alpha_k - 1$. Pour que $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, il faut et il suffit que

$$\mathrm{e}^{\lambda_k t} A \cdot P(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t}(P'(t) + \lambda_k P(t)) ,$$

ce qui donne, **en identifiant** les coefficients des puissances égales de t, les conditions nécessaires et suffisantes déterminant les coefficients (dans E) de $P(t) = A_0 + tA_1 + \cdots + t^{\alpha_k - 1} A_{\alpha_k - 1}$:

$$(10) \qquad \boxed{\begin{aligned} &(A - \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot A_{\alpha_k - 1} = 0 \,;\, \ldots \,; \\ &\qquad (A - \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot A_1 = 2\, A_2 \,;\, (A - \lambda_k \mathrm{Id}) \cdot A_0 = A_1 \end{aligned}} \,.$$

La résolution de (10) peut être *échelonnée* (en procédant de gauche à droite

([1])). Observons que le plus grand indice $r \in [\![0, \alpha_k - 1]\!]$ tel que $A_r \neq 0$ dans la solution générale de (10) est précisément l'entier $\beta_k - 1$ de la formule (9), et (10) montre que *ce vecteur* $A_{\beta_k - 1}$ *est dans le sous-espace propre* Ker $(A - \lambda_k \,\mathrm{Id})$. Parmi les solutions $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, il y en a donc une de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} P(t)$, où

$$P(t) = W_0 + tW_1 + \cdots + t^{\beta_k - 1} W_{\beta_k - 1}$$

avec $W_{\beta_k - 1}$ *vecteur propre de* A *pour* λ_k. On peut remarquer également que $t \mapsto f(t) = \mathrm{e}^{\lambda_k t} P(t)$ est élément de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$ ssi $(A - \lambda_k \,\mathrm{Id}) \cdot P(t) = P'(t)$, d'où par dérivation

$$(A - \lambda_k \,\mathrm{Id}) \cdot P'(t) = P''(t) \,;$$

si $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, il en est donc de même de

$$f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} P'(t) \,,$$

donc de
$$f_j : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} P^{(j)}(t) \,,$$

par exemple ici $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} W_{\beta_k - 1}$ est élément de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$, ce qui n'a d'ailleurs pas lieu d'étonner car il est facile de vérifier que, pour *tout* vecteur propre W de A associé à λ_k, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k t} W$ appartient à $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[k]}(\mathscr{L}_0)$.

Exemple 3 : *Reprenons le système différentiel linéaire carré* (3) *dans les deux cas où la matrice A n'est pas diagonalisable.* **Pour $\rho = 0$,** à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ correspond le sous-espace propre Ker $(A - \mathrm{Id}) = \mathbb{C}V_1$, avec $V_1 = -3\,e_1 + e_2 - 2\,e_3$ déjà trouvé. A la valeur propre double $\lambda_2 = 0$ est associé le sous-espace propre de dimension 1 : Ker $(A) = \mathbb{C}V_2$, avec $V_2 = e_1 - e_2 + e_3$. Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[1]}(\mathscr{L}_0)$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t V_1$. Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[2]}(\mathscr{L}_0)$ est de dimension 2. Il est formé des fonctions

$$t \mapsto A_0 + tA_1 \quad (A_0 \in \mathbb{C}^3, A_1 \in \mathbb{C}^3)$$

qui vérifient (4) $Y' = AY$. (On vérifie que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{0\,t} V_2$ appartient à $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[2]}(\mathscr{L}_0)$). L'identification donne : $A_1 = A \cdot A_0$ et $0 = A \cdot A_1$. La seconde condition montre que nécessairement $A_1 \in \mathbb{C}V_2$, d'où $A_1 = kV_2$ $(k \in \mathbb{C})$.

([1]) Après détermination du degré réel $\beta_k - 1$ de P. Sinon on détermine A_0 solution de $(A - \lambda_k \,\mathrm{Id})^{\alpha_k} \cdot A_0 = 0$ qui dépend de α_k constantes arbitraires et on procède de droite à gauche.

Portant dans la première : $A \cdot A_0 = kV_2$, compte tenu de $A \cdot e_1 = e_1 - e_2 + e_3 = V_2$, il vient :

$$A \cdot A_0 = kV_2 \quad \text{ssi} \quad A_0 = ke_1 + \lambda V_2 \,,$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque. Finalement le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[2]}(\mathscr{L}_0)$ est engendré par $\varphi_2 : t \mapsto V_2$ et $\varphi_3 : t \mapsto e_1 + tV_2$, d'où les solutions de (3) :

$$\begin{cases} y_1 = -3\, C_1\, \mathrm{e}^t + C_2 + C_3(1+t) \\ y_2 = C_1\, \mathrm{e}^t - C_2 - C_3\, t \\ y_3 = -2\, C_1\, \mathrm{e}^t + C_2 + C_3\, t, \quad \text{où } (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ est arbitraire .} \end{cases}$$

Pour $\rho = 1$ (ou -1), à la valeur propre $\lambda_1' = -1$ correspond le sous-espace propre $\mathbb{C}W_1$, avec ici $W_1 = -e_2 + e_3$. A la valeur propre double $\lambda_2' = 1$ correspond le sous-espace propre de dimension 1 dirigé par $W_2 = 2\,e_1 - e_2 + e_3$. Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[1]}(\mathscr{L}_0)$ est la droite vectorielle engendrée par $\varphi_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\, W_1$. Le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[2]}(\mathscr{L}_0)$ est de dimension 2. Il est constitué des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t(A_0 + A_1 t)$ $(A_0 \in \mathbb{C}^3, A_1 \in \mathbb{C}^3)$ qui vérifient (4) $Y' = AY$. *L'identification* donne (en simplifiant par e^t) : $A \cdot A_1 = A_1$ et $A \cdot A_0 = A_0 + A_1$, d'où nécessairement $A_1 = kW_2$, puis $(A - \mathrm{Id}) \cdot A_0 = kW_2$, et en remarquant que $(A - \mathrm{Id}) \cdot e_2 = W_2$, il vient $A_0 = ke_2 + \lambda W_2$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque. Finalement le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}^{[2]}(\mathscr{L}_0)$ est engendré par $\varphi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t\, W_2$ et $\varphi_3 : t \mapsto \mathrm{e}^t(e_2 + tW_2)$, d'où les solutions de (3) :

$$\begin{cases} y_1 = \phantom{-C_1\,\mathrm{e}^{-t}} \; 2\, C_2\, \mathrm{e}^t + 2\, C_3\, t\, \mathrm{e}^t \\ y_2 = -C_1\, \mathrm{e}^{-t} - C_2\, \mathrm{e}^t + C_3(1-t)\, \mathrm{e}^t \\ y_3 = C_1\, \mathrm{e}^{-t} + C_2\, \mathrm{e}^t + C_3\, t\, \mathrm{e}^t, \\ \qquad\qquad \text{où } (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ est arbitraire .} \end{cases}$$

Observons que les cas étudiés jusqu'ici épuisent la question de déterminer $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathscr{L}_0)$ lorsque $K = \mathbb{C}$, puisqu'alors $\chi_A(X)$ est toujours dissocié dans $\mathbb{C}[X]$, les seules difficultés qu'on peut rencontrer étant d'ordre pratique (recherche des racines de $\chi_A(X)$ et des sous-espaces caractéristiques).

• *Dernier cas : $K = \mathbb{R}$ et $\chi_A(X)$ n'est pas dissocié dans $\mathbb{R}[X]$.*
Factorisons $\chi_A(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :

$$(11) \quad \chi_A(X) = (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{r} (X - \rho_k)^{\mu_k} \right) \times \\ \times \left(\prod_{k=1}^{s} (X - (\sigma_k + \mathrm{i}\omega_k))^{\nu_k} (X - (\sigma_k - \mathrm{i}\omega_k))^{\nu_k} \right),$$

avec les ρ_k réels distincts, les σ_k réels, les ω_k réels > 0, distincts, les μ_k et $\nu_k \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ et $s \geqslant 1$ (si $r = 0$ il ne reste que le dernier produit). Choisissons une base quelconque dans E et associons à $(\mathscr{L}_0)$ $Y' = AY$ un système différentiel linéaire scalaire carré homogène :

$$(\mathscr{S}\mathscr{L}_0) \qquad (\forall k \in [\![1, n]\!]) \qquad y_k' = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, y_l \,.$$

Si M désigne la matrice $[a_{kl}]$, $\chi_M(X)$ est donné par (11). Notons $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$ le système qui s'écrit comme $(\mathscr{S}\mathscr{L}_0)$, mais où les fonctions inconnues y_k *sont à valeurs dans* $\mathbb{C}$. Comme les a_{kl} sont réels, il est immédiat que **les solutions de $(\mathscr{S}\mathscr{L}_0)$ sont les parties réelles des solutions de $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$.** Comme on sait (théoriquement) intégrer $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$, cela résout en principe le problème de trouver les $\mathbb{R}$-solutions de $(\mathscr{E}_0)$. On peut remarquer qu'à la valeur propre réelle ρ_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ correspond un $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_k$ de solutions de $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$ de dimension μ_k qui admet une base $(\varphi_{k,1}, \dots, \varphi_{k,\mu_k})$ formée de fonctions *à valeurs réelles* car le système (10) pour l'équation vectorielle $(\widehat{\mathscr{L}_0})$ canoniquement associée à $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$ exprimé dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{C}^n$ conduit à un *système linéaire à coefficients réels.* Les parties réelles des éléments de $\mathscr{S}_k$ sont donc les fonctions

$$C_1\, \varphi_{k,1} + \cdots + C_{\mu_k}\, \varphi_{k,\mu_k}$$

où $(C_1, \dots, C_{\mu_k}) \in \mathbb{R}^{\mu_k}$ est arbitraire.

Pour $k \in [\![1, s]\!]$, les systèmes (10) correspondant aux valeurs propres $\sigma_k + \mathrm{i}\omega_k$ et $\sigma_k - \mathrm{i}\omega_k$, exprimés dans $\mathscr{C}$, conduisent à deux systèmes linéaires *à coefficients conjugués*. Donc, si $(\psi_{k,1}, \dots, \psi_{k,\nu_k})$ est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{T}_k$ de solutions de $(\widehat{\mathscr{S}\mathscr{L}_0})$ correspondant à $\sigma_k + \mathrm{i}\omega_k$, la famille $(\overline{\psi}_{k,1}, \dots, \overline{\psi}_{k,\nu_k})$ des fonctions conjuguées est une base du $\mathbb{C}$-ev $\overline{\mathscr{T}_k}$ correspondant à $\sigma_k - \mathrm{i}\omega_k$. Pour les fonctions parties réelles des $f \in \mathscr{T}_k \oplus \overline{\mathscr{T}_k}$, il est donc facile de trouver une base formée des $2\,\nu_k$ fonctions à valeurs réelles :

$$(\psi_{k,1} + \overline{\psi}_{k,1}, \mathrm{i}(\psi_{k,1} - \overline{\psi}_{k,1}), \dots, \psi_{k,\nu_k} + \overline{\psi}_{k,\nu_k}, \mathrm{i}(\psi_{k,\nu_k} - \overline{\psi}_{k,\nu_k}))\,.$$

En définitive on a construit une base du $\mathbb{R}$-ev des solutions de $(\mathscr{S}\mathscr{L}_0)$.

Exemple 4 : *Le corps de base étant* $\mathbb{R}$, *intégrer le système différentiel linéaire scalaire carré suivant, où n est donné* $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$(S) \qquad y_1' = y_2, y_2' = y_3, \dots, y_{2n-1}' = y_{2n}, y_{2n}' = y_1\,.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de (S) est $\chi(X) = X^{2n} - 1$. Les solutions à valeurs complexes de (S) sont donc imméd

$2n$ valeurs propres distinctes). Posons $\zeta = e^{i\pi/n}$ et désignons par V_1, V_{-1}, W_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ les vecteurs-colonnes suivants, éléments de $\mathfrak{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \quad W_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{(2n-1)k} \end{pmatrix}$$

et notons $\overline{W_k}$ le *conjugué* de W_k.

Une base du $\mathbb{C}$-ev des solutions à valeurs complexes de (S) est donnée par les fonctions : $t \mapsto e^t V_1$, $t \mapsto e^{-t} V_{-1}$, $t \mapsto e^{\zeta^k t} W_k$ et $t \mapsto e^{\zeta^{-k} t} \overline{W_k}$. On en déduit une base du $\mathbb{R}$-ev des solutions à valeurs réelles de (S) en prenant : $t \mapsto e^t V_1$, $t \mapsto e^{-t} V_{-1}$, $t \mapsto \operatorname{Re}\,(e^{\zeta^k t} W_k)$ et $t \mapsto \operatorname{Im}\,(e^{\zeta^k t} W_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, ce qui donne explicitement toutes les $\mathbb{R}$-solutions de (S) sous la forme :

$$y_q = A_1 e^t + (-1)^{q-1} A_{-1} e^{-t} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{t \cos(k\pi/n)} \times$$
$$\times \left[a_k \cos\left(t \sin \frac{k\pi}{n} + (q-1)\frac{k\pi}{n} \right) + b_k \sin\left(t \sin \frac{k\pi}{n} + (q-1)\frac{k\pi}{n} \right) \right]$$

$(1 \leqslant q \leqslant 2n)$, A_1, A_{-1}, les a_k et les b_k étant des constantes *réelles* arbitraires.

Equation avec second membre

Revenons à l'équation proposée au début de ce § IX.4 :

$$(\mathscr{L}) \qquad Y' = A \cdot Y + B$$

définie sur l'intervalle I, où la fonction inconnue est à valeurs dans le K-ev E de dimension finie $n \geqslant 1$, où l'endomorphisme A de E est donné *fixe*, et où $B : I \longrightarrow E$ est une fonction **continue**. Maintenant que nous avons appris à expliciter les solutions de l'équation homogène associée $(\mathscr{L}_0)$ $Y' = A \cdot Y$, ce qui revient au fond à calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$, il n'y a aucune difficulté à aborder le cas de l'équation « complète », lorsque le « second membre » B est une fonction continue quelconque. D'après la formule (1) on obtient toutes les solutions de $(\mathscr{L})$ à l'aide d'une quadrature portant sur des fonctions continues connues.

Une autre façon d'appliquer (1) consiste, à partir d'une base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ du K-ev des solutions de $(\mathscr{L}_0)$, à appliquer la **méthode de variation des constantes,** déjà signalée, mais que nous verrons en toute généralité au § IX.5.

Cas où le second membre est une exponentielle-polynôme

Etudions le cas particulier où le second membre B est une somme finie de fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow E$ du type $e^{\lambda t} P(t)$, où $\lambda \in K$ et P est polynomiale. En vertu du principe de superposition des seconds membres, on peut se limiter au cas où B est de la forme

$$B : t \mapsto e^{\lambda t} P(t)\,, \qquad \text{avec} \qquad P(t) = A_0 + tA_1 + \cdots + t^d A_d\,,$$

où $\qquad A_0 \in E, \ldots, A_{d-1} \in E, \quad A_d \in E \setminus \{0\} \quad (d \in \mathbb{N})\,.$

Puisqu'on sait intégrer $(\mathscr{L}_0)$, il suffit d'expliciter *une solution particulière* de $(\mathscr{L})$ pour avoir l'ensemble des $\mathbb{R}$-solutions. Par le changement de fonction inconnue $Y = e^{\lambda t} Z$, $(\mathscr{L})$ se ramène à l'équation suivante :

$$(\mathscr{F}) \qquad Z' = B \cdot Z + P, \quad \text{avec} \quad B = A - \lambda\, \mathrm{Id}\,.$$

Si B n'est pas inversible, en choisissant arbitrairement une base de E, on obtient pour les coordonnées de Z un système carré à coefficients constants, qui ramène, en appliquant la méthode de variation des constantes, à trouver des primitives d'exponentielles-polynômes scalaires.

Dans le cas général où B est inversible (c'est-à-dire si λ n'est pas valeur propre de A), alors $(\mathscr{F})$ possède une et une seule solution Q de la forme :

$$t \mapsto Q(t) = B_0 + tB_1 + \cdots + t^d B_d\,,$$

avec $B_r \in E$ pour $0 \leqslant r \leqslant d$. En effet, $V_0, V_1, \ldots, V_d$ étant des éléments quelconques de E, posons, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = V_0 + tV_1 + \cdots + t^d V_d$ et écrivons que g vérifie $(\mathscr{F})$. On obtient, en identifiant les coefficients des diverses puissances de t, la condition nécessaire et suffisante vérifiée par les V_r :

$$(12) \quad B \cdot V_d = -A_d\,;\; B \cdot V_{d-1} = dV_d - A_{d-1}\,;\; \ldots\,; \\ B \cdot V_1 = 2V_2 - A_1\,;\; B \cdot V_0 = V_1 - A_0\,.$$

Comme B est inversible, il est clair que ce système (12) possède une unique solution en les inconnues $V_0, \ldots, V_d$: la première équation fournit $V_d = -B^{-1} \cdot A_d$, la seconde donne alors

$$V_{d-1} = dB^{-1} \cdot V_d - B^{-1} \cdot A_{d-1}\,,$$

et de proche en proche on a ainsi tous les V_r. En résumé :

PROPOSITION IX.4.1

> *Si $\lambda \in K$ n'est pas valeur propre de A, et si $P(t) = A_0 + tA_1 + \cdots + t^d A_d$ $(d \in \mathbb{N},\ A_0 \in E, \ldots,$*

l'équation $Y' - A \cdot Y = \mathrm{e}^{\lambda t} P(t)$ possède une solution et une seule de la forme

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}(B_0 + tB_1 + + + \cdots + t^d B_d) ,$$

où $B_r \in E$ pour tout r ; $(B_0, \ldots, B_d)$ est l'unique solution du système (12) aux inconnues V_r.

Exercice 1 : Intégrer les systèmes différentiels suivants, dans lesquels la variable est notée t (on demande les solutions à valeurs réelles) :

$a)$ $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + 2y + z + t \\ z' = x + z + t^2 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z + t \\ y' = 2x + y - 2z + \cos t \\ z' = 2x + 2y - 3z + t \sin t \end{cases}$ $d)$ $\begin{cases} x' = -4x + y + z + 1 \\ y' = x - y - 2z + t \\ z' = -2x + y - z + t^2 \end{cases}$

$e)$ $\begin{cases} x_1' = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2' = \dfrac{-1}{2}x_2 + x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 + 2\,\mathrm{e}^t \\ x_3' = \dfrac{1}{2}x_2 \\ x_4' = \dfrac{3}{2}x_2 - x_3 + \dfrac{3}{2}x_4 - 2\,\mathrm{e}^t \end{cases}$ $f)$ $\begin{cases} x'' = y + z - \rho x \\ y'' = z + x - \rho y \quad (\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \\ z'' = x + y - \rho z \end{cases}$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, puis $V \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ est identifié à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ à $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$). Soit λ une valeur propre de A, telle que $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ soit de dimension égale à la multiplicité de λ dans $\chi_A(X)$. On considère l'équation différentielle, où la fonction inconnue Y est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$:

$$Y'(t) = A \cdot Y'(t) + \mathrm{e}^{\lambda t} V .$$

Démontrer qu'elle admet une solution particulière de la forme $t \mapsto (tC + D)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec C et D éléments de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 1$. Trouver les $A \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tels que toutes les solutions de l'équation $(\mathscr{L}_0)$ $Y' = A \cdot Y$ (où Y est à valeurs dans E) soient 1-périodiques.

Exercice 4 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On donne $A \in \operatorname{Hom}_K(E)$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\mathrm{Id}_E - \exp(\omega A) \in \mathrm{GL}_K(E)$, et $B : \mathbb{R} \longrightarrow E$ continue et ω-périodique. Montrer que l'équation $Y' = A \cdot Y + B$ (où Y est à valeurs dans E) admet une et une seule solution ω-périodique.

Exercice 5 : Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et J la matrice de Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

enfin $A = I_n + aJ + a^2J^2 + \cdots + a^{n-1}J^{n-1}$. Intégrer l'équation $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, où la fonction inconnue Y est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 6 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 1$, $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle < 0, et $B : \mathbb{R} \longrightarrow E$ continue et telle que $B(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0_E$.

a) Montrer que toute solution f de l'équation $Y' = A \cdot Y + B$ (Y à valeurs dans E) vérifie $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Etudier une réciproque.

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 1$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$ un homomorphisme de groupes *continu* (de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E), \circ)$).

a) Montrer que pour $y \in \mathbb{R}^*$ assez petit, $\displaystyle\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est inversible.

b) En calculant $\displaystyle\int_0^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$, en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

c) En déduire que $f'(t) = A \circ f(t) = f(t) \circ A$, avec $A = f'(0)$, puis que $f(t) = \exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Conclure en explicitant tous les homomorphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E)$.

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une norme quelconque, et $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. On considère l'équation $(\mathscr{L})$ $Y' = A \cdot Y$ (Y à valeurs dans E).

a) On suppose que les parties réelles des valeurs propres de A sont toutes de même signe strict. Montrer que le graphe Γ_f de toute solution f non nulle de $(\mathscr{L})$ rencontre toute sphère

$$S(0_E, r) = \{x \in E \mid \|x\| = r\} \quad (r > 0).$$

b) Montrer que réciproquement, si le graphe Γ_f de toute solution non nulle f de $(\mathscr{L})$ rencontre toute sphère $S(0_E, r)$ $(r > 0)$, alors les valeurs propres de A ont des parties réelles toutes non nulles et de même signe.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que toute solution de $(\mathscr{L})$ soit bornée. Donner une C.N.S. pour que $(\mathscr{L})$ admette *au moins une* solution bornée non nulle.

d) On suppose que les parties réelles des valeurs propres de A sont toutes $\neq 0$ mais pas toutes de même signe. L'équation $(\mathscr{L})$ admet-elle des solutions bornées non nulles ? Quelles sont les solutions de $(\mathscr{L})$ dont le graphe rencontre toute sphère ? Montrer que pour toute autre solution non nulle f, on a $\|f(t)\| \underset{|t| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et en déduire que, pour une telle f, il existe $R > 0$ tel que $(\forall t)$ $\|f(t)\| \geqslant R$.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$.

a) Si $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$, pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $\Phi_{t,A} : E \longrightarrow E$, $X \mapsto \exp(tA) \cdot X$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de E sur E, et l'application $t \mapsto \Phi_{t,A}$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe des $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphismes de E.

b) Soit A et B éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$. Montrer l'équivalence entre (I), (II) et (III)

(I) $\exists u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E) \mid (\forall t \in \mathbb{R})$ $\Phi_{t,B} = u \circ \Phi_{t,A} \circ u^{-1}$

(II) $\exists u \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E) \mid B = u \cdot A \cdot u^{-1}$

(III) Il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $h : E \longrightarrow E$ tel que
$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Phi_{t,B} = h \circ \Phi_{t,A} \circ h^{\langle -1 \rangle} \quad [1]$$

Indication pour (III) $\Rightarrow$ (I). Montrer que si (III) est vrai, il existe un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $g : E \longrightarrow E$ tel que $g(0_E) = 0_E$ et $\Phi_{t,B} = g \circ \Phi_{t,A} \circ g^{\langle -1 \rangle}$. Puis penser à la différentielle $\mathrm{d}_{0_E} h$.

Exercice 10 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$; $A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ et
$$(\mathscr{L}) \qquad Y' = A \,.\, Y \quad (Y \text{ à valeurs dans } E)\,.$$

Prouver l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) Pour toute solution $t \mapsto f(t)$ de $(\mathscr{L})$, la fonction $t \mapsto \|f(t)\|$ est constante.

(II) A est antisymétrique.

Exercice 11 : Montrer par un exemple qu'une équation du type $Y' = A \,.\, Y + \mathrm{e}^{\lambda t} P(t)$ peut avoir une $\mathbb{R}$-solution du type $\mathrm{e}^{\lambda t} Q(t)$, avec Q polynôme à coefficients dans E *de même degré* que P, même si λ est valeur propre de A.

Exercice 12 : Soit $\rho \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel $(\mathscr{S}_\rho)$ suivant (x, y, z inconnues ; t, variable), de matrice $M_\rho \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:
$$(\mathscr{S}_\rho) \quad \begin{cases} x' = -(2\rho + 3)x + (3\rho + 5)y - (3\rho + 5)z \\ y' = (2\rho - 2)x - (3\rho - 2)y + (3\rho - 1)z \\ z' = 2\rho x - (3\rho + 1)y + (3\rho + 2)z\,. \end{cases}$$

a) Trouver les solutions à valeurs réelles (discuter suivant ρ).

b) En déduire $\exp(tM_\rho)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times]0, \pi[$, et $A(\rho, \theta)$ la 2-matrice carrée :
$$A(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho(1 + \cos\theta) & 1 + \rho\sin\theta \\ -1 + \rho\sin\theta & \rho(1 - \cos\theta) \end{bmatrix}.$$

Soit $M(\rho, \theta)$ la 4-matrice carrée $= \left[\begin{array}{c|c} 0 & A(\rho, \theta) \\ \hline A(\rho, \theta) & 0 \end{array}\right]$.

Calculer $\exp(tA(\rho, \theta))$ pour $t \in \mathbb{R}$; en déduire l'intégration du système différentiel homogène *à inconnues réelles* de matrice $M(\rho, \theta)$.

§ IX.5 *ÉQUATIONS LINÉAIRES DU 1^er^ ORDRE À INCONNUE VECTORIELLE*

Le théorème d'existence

Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

---

[1] La question de l'existence d'un *homéomorphisme* $h : E \longrightarrow E$ tel que
$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad \Phi_{t,B} = h \circ \Phi_{t,A} \circ h^{\langle -1 \rangle}$$
est beaucoup plus délicate. On peut montrer que lorsque les parties réelles des valeurs propres de A et B sont toutes $\neq 0$, si le nombre de ces parties réelles qui sont > 0 est le même pour A et B, alors un tel homéomorphisme h existe. (Voir [2] par exemple).

Dans un premier temps, le lecteur intéressé par cette question pourra se reporter à la 2^e^ épreuve de Mathématiques posée au Concours Commun des Mines (Option M) en avril 88, où un cas particulier de ce problème est traité de façon très abordable.

Considérons l'équation différentielle, déjà introduite au § IX.1 :

$$(\mathscr{L}) \qquad Y' = A \cdot Y + B ,$$

où B est une fonction donnée : $I \longrightarrow E$, mais où A est maintenant une fonction : $I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$, $t \mapsto A(t)$, et où la fonction inconnue Y prend ses valeurs dans E.

Théorème IX.5.1 (dit *de Cauchy-Lipschitz linéaire*)

Supposons les fonctions A et B de l'équation $(\mathscr{L})$ **continues.** *Fixons $t_0 \in I$. Alors, pour chaque $Y_0 \in E$:*
a) *Il existe* **une et une seule** *I-solution φ de $(\mathscr{L})$ telle que $\varphi(t_0) = Y_0$.*
b) *Si J est un sous-intervalle non trivial de I tel que $t_0 \in J$, la restriction $\varphi|_J$ est l'unique J-solution ψ de $(\mathscr{L})$ telle que $\psi(t_0) = Y_0$.*

Démonstration :

Soit donc Y_0 fixé dans E. On munit E d'une norme $\| \cdot \|$ et $\mathrm{Hom}_K(E)$ de la norme associée $|||\cdot|||$.

Montrons d'abord l'existence de φ.

Posons $\varphi_0 : I \longrightarrow E$, $t \mapsto 0_E$ et définissons la suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de fonctions : $I \longrightarrow E$ par la relation de récurrence :

$$(1) \qquad (\forall m \geqslant 0) \quad \varphi_{m+1} : I \longrightarrow E , \ t \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(\tau) \cdot \varphi_m(\tau) + B(\tau))\, \mathrm{d}\tau ,$$

ce qui a un sens car la fonction qu'on intègre est continue (en prenant comme hypothèse de récurrence que $\varphi_m : I \longrightarrow E$ est définie et continue) ; alors φ_{m-1} est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi_{m+1}(t) = A(t) \cdot \varphi_m(t) + B(t)$, donc est *a fortiori* continue. Nous allons voir que cette suite *converge uniformément* sur tout compact de I vers une fonction $\varphi : I \longrightarrow E$ solution de $(\mathscr{L})$ et vérifiant $\varphi(t_0) = Y_0$. Il suffit de vérifier sa convergence uniforme sur tout sous-intervalle compact L de I contenant t_0. Soit donc un tel L. La fonction $t \mapsto |||A(t)|||$ étant continue sur le compact L y admet un maximum que nous noterons C_L ($C_L \in \mathbb{R}_+$). Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, et $t \in L$, on a :

$$(2) \qquad \|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| = \int_{t_0}^{t} A(\tau) \cdot (\varphi_m(\tau) - \varphi_{m-1}(\tau))\, \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|A(\tau) \cdot (\varphi_m(\tau) - \varphi_{m-1}(\tau))\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |||A(\tau)||| \times \|\varphi_m(\tau) - \gamma_{m-1}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

$$\leqslant C_L \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi_m(\tau) - \varphi_{m-1}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \right|$$

Posons $H_L = \operatorname{Max}_{u \in L} (\| \varphi_1(u) - \varphi_0(u) \|)$ ($H_L \in \mathbb{R}_+$ par continuité de $\varphi_1 - \varphi_0$ sur L).

De $\| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \| \leqslant H_L$ ($\forall t \in L$), on déduit

$$\| \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \| \leqslant C_L \left| \int_{t_0}^{t} H_L \, d\tau \right| \leqslant C_L H_L |t - t_0| \ ,$$

puis par une récurrence facile, à tout rang $m \geqslant 1$

$$(3) \qquad (\forall t \in L) \quad \| \varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t) \| \leqslant H_L \frac{(C_L)^{m-1}}{(m-1)!} |t - t_0|^{m-1} .$$

En appelant l la longueur de L, on a donc :

$$(\forall t \in L) \quad (\forall m \in \mathbb{N}^*) \quad \| \varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t) \| \leqslant H_L \frac{(C_L l)^{m-1}}{(m-1)!} = \alpha_m .$$

La série numérique $\sum \alpha_m$ étant de toute évidence convergente, cela prouve que la série de fonctions de t, $\sum (\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t))$ converge *normalement,* donc uniformément sur L. En résumé, la suite (φ_m) converge, uniformément sur tout compact de I, vers une fonction $\varphi : I \longrightarrow E$. Comme $\varphi_m(t_0) = Y_0$ pour tout $m \geqslant 1$, on a déjà $\varphi(t_0) = Y_0$. Il reste à prouver que $\varphi \in \mathscr{S}_1(\mathscr{L})$. D'abord, chaque φ_m étant continue, la limite uniforme φ est continue. Soit $t \in I$ et L l'intervalle compact d'extrémités t_0 et t. On a :

$$(\forall \tau \in L) \quad \| [A(\tau) . \varphi(\tau) + B(\tau)] - [A(\tau) . \varphi_m(\tau) + B(\tau)] \| =$$
$$= \| A(\tau) . (\varphi(\tau) - \varphi_m(\tau)) \| \leqslant \| A(\tau) \| \times$$
$$\times \| \varphi(\tau) - \varphi_m(\tau) \| \leqslant C_L \times \| \varphi(\tau) - \varphi_m(\tau) \| \ ,$$

ce qui entraîne que la suite de fonctions $(A(\tau) . \varphi_m(\tau) + B(\tau))_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur L vers $A(\tau) . \varphi(\tau) + B(\tau)$, d'où en intégrant :

$$\int_{t_0}^{t} (A(\tau) . \varphi_m(\tau) + B(\tau)) \, d\tau \underset{m \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t} (A(\tau) . \varphi(\tau) + B(\tau)) \, d\tau \ ,$$

d'où

$$(4) \qquad \varphi(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(\tau) . \varphi(\tau) + B(\tau)) \, d\tau \ ,$$

relation vraie pour tout $t \in I$.

La fonction à intégrer étant continue, cela prouve que φ est dérivable, de dérivée $\varphi'(t) = A(t) . \varphi(t) + B(t)$ sur I. En résumé, $\varphi \in \mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ et $\varphi(t_0) = Y_0$.

Montrons ensuite l'assertion b).

On a construit ci-dessus une fonction $\varphi : I \longrightarrow E$. Soit J un sous-intervalle non trivial de I contenant t_0, et soit $\psi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{L})$ telle que $\psi(t_0) = Y_0$. A est de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour $t \in J$:

$$\psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi'(r)\,\mathrm{d}\tau = Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(\tau)\,.\,\psi(\tau) + B(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Par différence avec (4) il s'ensuit

$$(5) \qquad Z(t) = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\,.\,Z(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

où $Z(u) = \varphi(u) - \psi(u)$ pour $u \in J$. Fixons $t \in J$ et soit L l'intervalle compact d'extrémités t_0 et t. Notons $\alpha_t = \underset{u \in L}{\mathrm{Max}}\,(\|Z(u)\|)$ ($\alpha_t \in \mathbb{R}_+$). En raisonnant comme pour (2), on déduit de (5) :

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad (\forall u \in L) \quad \|Z(u)\| \leq \frac{(C_L)^m}{m!}\,\alpha_t\,|u - t_0|^m\,.$$

D'où :

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \|Z(t)\| \leq \frac{(C_L)^m}{m!}\,\alpha_t\,|t - t_0|^m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0\,, \quad \text{d'où} \quad Z(t) = 0\,.$$

Ainsi, $Z = 0$, ce qui prouve que $\psi = \varphi\,|_J$, d'où l'assertion *b*).
En prenant $J = I$, on obtient *a fortiori* l'*unicité* de φ dans l'assertion *a*). ■

Etude du cas homogène

THÉORÈME IX.5.2

> *Soit l'équation* $(\mathscr{L}) \quad Y' = A\,.\,Y\,,$ *avec A* **continue.** *Pour $t_0 \in I$, considérons*
>
> $$\Phi_{t_0} : \mathscr{S}_I(\mathscr{L}) \longrightarrow E\,, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)\,.$$
>
> *Alors Φ_{t_0} est une* **bijection K-linéaire,** *et en particulier, $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ est un* **sous-K-ev de dimension finie, égale à n = dim (E),** *de $\mathscr{F}(I, E)$.*

Démonstration :
Le fait que Φ_{t_0} est K-linéaire est évident. Elle est bijective d'après l'assertion *a*) du théorème IX.5.1. ■

COROLLAIRE 1

> *Soit l'équation* $(\mathscr{L}) \quad Y' = A\,.\,Y\,,$ *avec A* **continue.**
> *Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des I-solutions de $(\mathscr{L})$ $(1 \leq p \leq n)$.*
> *Pour que $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ soient* **linéairement indépendan**

suffit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_p(t_0))$ soient **linéairement indépendants dans E ;** *et si c'est le cas,* **pour tout** *$t \in I$, les vecteurs $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t))$ sont linéairement indépendants dans E.*
En particulier, si $p = n$, il y a équivalence entre (I), (II) *et* (III) :
(I) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *est une* **base** *du K-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$.*
(II) $\exists t_0 \in I$ *tel que* $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ *est une* **base** *de E.*
(III) $\forall t \in I$ $(\varphi_1(t), \ldots \varphi_n(t))$ *est une* **base** *de E.*

C'est une conséquence évidente du fait que les Φ_{t_0} du théorème IX.5.2 sont des isomorphismes.

Une base du K-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ (($\mathscr{L}$) homogène, A continue) est appelée un **système fondamental de solutions** de ($\mathscr{L}$).

Etude du cas général

COROLLAIRE 2

Soit l'équation $(\mathscr{L})\quad Y' = A \,.\, Y + B,$ *avec A et B* **continues.**
Alors l'espace affine $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ est de dimension finie égale à n ; de plus, pour tout sous-intervalle non trivial J de I, l'application de restriction $\rho_{I,J}$: $\mathscr{S}_I(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{L})$, $\varphi \mapsto \varphi\,|_J$ est une bijection.

Démonstration :

$\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ est *non vide* en vertu du théorème IX.5.1. Donc (cf. § IX.1) c'est un sous-espace affine de $\mathscr{F}(I, E)$ d'espace directeur $\mathscr{S}_I(\mathscr{L}_0)$, où $(\mathscr{L}_0)$ est l'équation homogène associée. Or (cf. théorème IX.5.2) $\mathscr{S}_I(\mathscr{L}_0)$ est de dimension n. Donc $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ aussi.

Soit J un sous-intervalle non-trivial de I et $t_0 \in J$. Le théorème IX.5.1 s'applique avec J à la place de I. Donc Ψ_{t_0} : $\mathscr{S}_J(\mathscr{L}) \longrightarrow E$, $\psi \mapsto \psi(t_0)$ est bijective comme Φ_{t_0}. Par suite

$$\Theta = \Psi_{t_0}^{\langle -1 \rangle} \circ \Phi_{t_0} : \mathscr{S}_I(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{L})$$

est bijective. Mais d'après l'assertion b) du théorème IX.5.1, Θ n'est autre que $\rho_{I,J}$. ■

Ce corollaire entraîne immédiatement le suivant :

COROLLAIRE 3

Soit l'équation $(\mathscr{L})\quad Y' = A \,.\, Y + B\,,$ *avec A et B* **continues.**
Les **solutions maximales** *de $(\mathscr{L})$ sont les* **I-solutions.** *En particulier, si I est* **ouvert,** *les* **courbes intégrales maximales** *de $(\mathscr{L})$ forment une* **partition** *de $I \times E$.*

La formule d'Abel

Nous avons besoin d'un lemme algébrique :

LEMME 1

Soit $\mathscr{V}$ un K-ev de dimension finie $N \geqslant 1$ et L une forme n-linéaire et alternée non nulle sur $\mathscr{V}$. Pour tout $u \in \mathrm{Hom}_K(\mathscr{V})$ et tous $X_1, \ldots, X_N$ éléments de $\mathscr{V}$, on a :

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{N} L(X_1, \ldots, X_{i-1}, u(X_i), X_{i+1}, \ldots, X_N) = \mathrm{Tr}\,(u) \times L(X_1, \ldots, X_N)\,.$$

Démonstration :

Soit $f : \mathscr{V}^N \longrightarrow K$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \mapsto \sum_{i=1}^{N} L(X_1, \ldots, X_{i-1}, u(X_i), X_{i+1}, \ldots, X_N)\,.$$

On vérifie facilement que f est une forme N linéaire et alternée sur $\mathscr{V}$. Comme $L \neq 0$, f est donc proportionnelle à L, d'où un scalaire $\tau \in K$ tel que $f = \tau L$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_N)$ une base de $\mathscr{V}$, et $[a_{ij}] = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(u)$. Pour $i \in [\![1, N]\!]$,

$$L(e_1, \ldots, e_{i-1}, u(e_i), e_{i+1}, \ldots, e_N) =$$

$$= L\left(e_1, \ldots, e_{i-1}, \sum_{j=1}^{N} a_{ji}\, e_{ji}, e_i, \ldots, e_N\right) = a_{ii}\, L(e_1, \ldots, e_N)\,,$$

d'où :

$$f(e_1, \ldots, e_N) = \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ii}\right) L(e_1, \ldots, e_N) = (\mathrm{Tr}\,(u))\, L(e_1, \ldots, e_N) = \tau L(e_1, \ldots, e_N)$$

d'où $\qquad \tau = \mathrm{Tr}\,(u) \quad$ car $\quad L(e_1, \ldots, e_N) \neq 0\,.$ ■

THÉORÈME IX.5.3 *(Formule d'Abel)*

Soit l'équation $(\mathscr{L})$ $Y' = A \cdot Y$, *avec* A ***continue.***
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *des I-solutions de* $(\mathscr{L})$. *Pour tout* $(t_0, t) \in I^2$, *on a :*

$$(7) \quad \det_{\mathscr{B}}\,(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) =$$

$$= [\det_{\mathscr{B}}\,(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))] \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\,(A(\tau))\, \mathrm{d}\tau\right).$$

Démonstration :

Posons $W(t) = \det_{\mathscr{B}}\,(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. La fonction W est dérivable sur I, et sa dérivée est

$$W'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}\,(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{i-1}(t), \varphi_i'(t), \varphi_{i+1}(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

= (en tenant compte que $\varphi_i'(t) = A(t) \cdot \varphi_i(t)$ et en utilisant le le

$= \mathrm{Tr}\ (A(t)) \times W(t)$. Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{Tr}\ (A(t))$ est continue sur I, (7) s'en déduit par intégration (cf. § IX.2). ■

La fonction $I \longrightarrow K$,

$$t \mapsto W_{\mathscr{B}, \varphi_1, \dots, \varphi_n}(t) = \det_{\mathscr{B}}\ (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

est appelée le **wronskien de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$** dans la base $\mathscr{B}$ (1).

La formule d'Abel (7), qui confirme le corollaire 1 du théorème IX.5.2, montre en quelque sorte que le calcul du wronskien en $t \in I$ est une question dont la difficulté ne dépend pas du choix de t.

Variation des constantes

Reprenons l'équation $(\mathscr{L})$ $\quad Y' = A \cdot Y + B,\quad$ avec A et B continues, définie sur I, et notons

$$(\mathscr{L}_0) \qquad Y' = A \cdot Y$$

l'équation homogène associée. Supposons obtenu un *système fondamental* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de solutions de $(\mathscr{L}_0)$. Nous allons voir que l'intégration de *$(\mathscr{L})$ se ramène alors à des quadratures* portant sur des fonctions continues connues.

Soit en effet $\varphi : I \longrightarrow E$ une fonction dérivable arbitraire. Notons, pour $t \in I$, par $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les coordonnées de $\varphi(t)$ dans la base $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ de E (cf. (III) du corollaire 1 du théorème IX.5.2). Les φ_k étant de classe $\mathscr{C}^1$, il en est de même des C_k. En dérivant $\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\ \varphi_k(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\forall t \in I) \quad \varphi'(t) &= \left(\sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\ \varphi_k(t)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\ \varphi_k'(t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\ \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k(t)[A(t) \cdot \varphi_k(t)] \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\ \varphi_k(t)\right) + A(t) \cdot \varphi(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi' = A \cdot \varphi + B$ ssi

$$(8) \qquad (\forall t \in I) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\ \varphi_k(t) = B(t)}\ .$$

---

(1) D'après le nom de Joseph, Mair, Höhne *Wronski* (1778-1853), mathématicien et philosophe polonais.

Or, pour chaque $t \in I$, soit $(\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t))$ les coordonnées de $B(t)$ dans la base $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ de E. Comme B est continue et que les φ_k sont de classe $\mathscr{C}^1$, on vérifie que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont continues. Donc (8) équivaut à

$$(9) \qquad (\forall t \in I) \quad \boxed{C_k'(t) = \beta_k(t)}.$$

Fixons $t_0 \in I$. Les β_k étant continues, on déduit de ce qui précède que l'ensemble $\mathscr{S}_I(\mathscr{L})$ est l'ensemble des fonctions donné par :

$$(10) \qquad t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k + \int_{t_0}^{t} \beta_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \varphi_k(t)\,,$$

où $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ parcourt K^n.

Cette méthode de résolution de $(\mathscr{L})$ s'appelle **méthode de variation des constantes.** Elle suppose qu'on sait d'abord intégrer $(\mathscr{L}_0)$, ce que nous avons appris à faire au § IX.4 *dans le cas où A est constant.*

Exemple 1 : *Intégrer le système différentiel suivant, où les fonctions inconnues sont à valeurs réelles :*

$$(11) \qquad \begin{cases} x' = 5x + 5y + 2z + \mathrm{e}^{-t} \\ y' = 4x + 5y + 4z + \mathrm{e}^{t} \sin t \\ z' = -12x - 14y - 9z + \mathrm{e}^{t} \cos t\,. \end{cases}$$

Solution : On reconnaît un système carré *à coefficients constants,* à second membre continu sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^3$, et soit $Y' = A \cdot Y + B$ l'équation vectorielle associée à (11) à l'aide de $\mathscr{B}$. On a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ -12 & -14 & -9 \end{bmatrix},$$

d'où $\chi_A(X) = \chi_M(X) = (3 - X)(X+1)^2$.

a) *Traitement de l'équation homogène associée $Y' = A \cdot Y$*

A la valeur propre 3 correspond le sous-espace propre S_3 engendré par $\vec{\mathscr{E}}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, d'où les solutions à valeurs dans S_3 : $t \mapsto C_3\,\mathrm{e}^{3t}\,\vec{\varepsilon}_3$ ($C_3 \in \mathbb{R}$ arbitraire). A la valeur propre double -1 correspond le sous-espace propre S_{-1} de dimension 1 engendré par $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ (donc A n'est *pas diagonalisable*) et l'espace caractéristique $N_1 = \mathrm{Ker}\ (A + \mathrm{Id})^2$. Une première solution à valeurs dans N_1 est $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,\vec{\varepsilon}_1$. On en cherch sous la forme $t \mapsto (t\vec{\varepsilon}_1 + A_0)\,\mathrm{e}^{-t}$, avec $A_0 \in \mathbb{R}^3$ et $(A + \mathrm{Id}) \,.\, A_0 = \vec{\varepsilon}_1$, ce qui pour un calcul facile donne $A_0 = k\vec{\varepsilon}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, d'où la solution particulière $t \mapsto (t\vec{\varepsilon}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2)\ \mathrm{e}^{-t}$, linéairement indépendante de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ \vec{\varepsilon}_1$.

Donc la solution générale de $Y' = A \,.\, Y$ est :

$$t \mapsto (C_1\, \vec{\varepsilon}_1 + C_2(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + C_2\, t\vec{\varepsilon}_1)\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\, \mathrm{e}^{3t}\ \vec{\varepsilon}_3 \quad ((C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3)\,.$$

b) *Recherche d'une solution particulière de* (11)

On utilise la méthode de *variation des constantes.* Notant $Y_1 :\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ \vec{\varepsilon}_1$, $Y_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}((\vec{e}_1 - \vec{e}_2) + t\vec{\varepsilon}_1)$ et $Y_3 : t \mapsto \mathrm{e}^{3t}\ \vec{\varepsilon}_3$;

puis
$$B(t) = \mathrm{e}^{-t}\ \vec{e}_1 + \mathrm{e}^{t} \sin t\vec{e}_2 + \mathrm{e}^{t} \cos t\vec{e}_3\ ,$$

la C.N.S. pour que $C_1\, Y_1 + C_2\, Y_2 + C_3\, Y_3$ (où les C_i sont des fonctions dérivables de t) soit solution de $Y' = A \,.\, Y + B$ est :

$$C_1'\, Y_1 + C_2'\, Y_2 + C_3'\, Y_3 = B\ ,$$

ce qui conduit aux trois équations scalaires (obtenues de préférence en projetant, sur la nouvelle base de $\mathbb{R}^3$, $(\vec{\varepsilon}_1,\ \vec{\varepsilon}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2,\ \vec{\varepsilon}_3)$) :

$$\begin{aligned}
&C_1' + C_2'\, t = 1 + \mathrm{e}^{2t}(\cos t + \sin t)\ ;\\
&C_2' = -\,2 + \mathrm{e}^{2t}(-\,2 \cos t - 3 \sin t)\ ;\\
&C_3' = 2\,\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{-2t}(\cos t + 2 \sin t)\ .
\end{aligned}$$

Un calcul élémentaire de primitives qui ne demande qu'un peu de soin et d'attention donne :

$$C_3 = \frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-4t} + \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{-4}{5}\cos t - \frac{3}{5}\sin t\right)\ ;$$

$$C_2 = -\,2\,t + \mathrm{e}^{2t}\left(\frac{-1}{5}\cos t - \frac{8}{5}\sin t\right)\ ;$$

$$C_1 = t + t^2 + \mathrm{e}^{+2t}\left(\frac{1}{5}\,t\cos t + \frac{8}{5}\,t\sin t + \frac{11}{25}\cos t + \frac{-2}{25}\sin t\right)$$

d'où la solution particulière $C_1\, Y_1 + C_2\, Y_2 + C_3\, Y_3$, exprimée dans la base $\mathscr{B}$:

$$\left\{\begin{aligned}
x &= \left(t^2 - t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} - \left(\frac{14}{25}\cos t + \frac{57}{25}\sin t\right)\mathrm{e}^{t}\\
y &= \phantom{\left(t^2 - t - \frac{1}{2}\right)} + 2\,t^2\,\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{-17}{25}\cos t + \frac{44}{25}\sin t\right)\mathrm{e}^{t}\\
z &= \left(-\,2\,t^2 + 2\,t + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{42}{25}\cos t + \frac{11}{25}\sin t\right)\mathrm{e}^{t}\ .
\end{aligned}\right.$$

c) *Intégrale générale du système différentiel* (11)

Il suffit d'ajouter à la solution particulière précédente l'ensemble des $\mathbb{R}$-solutions de l'équation homogène associée, qui, dans la base $\mathscr{B}$, s'écrivent :

$$\begin{cases} x = \quad C_1 \,\mathrm{e}^{-t} + C_2(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} + C_3\,\mathrm{e}^{3t} \\ y = -2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t} - C_2(1+2t)\,\mathrm{e}^{-t} \\ z = \quad 2\,C_1\,\mathrm{e}^{-t} + C_2(2t)\,\mathrm{e}^{-t} - C_3\,\mathrm{e}^{3t} \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ arbitraires .} \end{cases}$$

Application aux équations linéaires scalaires

Soit une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n \geqslant 2$, résolue en $y^{(n)}$, définie sur l'intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n\, y = b\ ,$$

où les fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b : I \longrightarrow K$ sont supposées **continues.**

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ du K-ev K^n. Nous avons vu au § IX.1 qu'on peut associer à $(\mathscr{E})$ l'équation linéaire à inconnue vectorielle

$$(\tilde{\mathscr{E}}) \qquad Y' = A \,.\, Y + B\ ,$$

où la fonction inconnue Y est à valeurs dans K^n,
où $(\forall t \in I)$, $A(t) \in \mathrm{Hom}_K\ (K^n)$ est défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(A(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

et où $B(t) = b(t)\,\mathrm{e}_n$.

Rappelons que pour tout sous-intervalle non-trivial J de I, en associant à chaque solution $f \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ la fonction

$$t \mapsto f(t)\, e_1 + f'(t)\, e_2 + \cdots + f^{(n-1)}(t)\, e_n\ ,$$

on obtient une bijection affine de $\mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ sur $\mathscr{S}_J(\tilde{\mathscr{E}})$, qui est un isomorphisme de K-ev dans le cas où $(\mathscr{E})$ (et donc $(\tilde{\mathscr{E}})$) est homogène, *i.e.* si b est la fonction nulle.

THÉORÈME IX.5.4 (*de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires scalaires*)

> *Les fonctions $a_1, \dots, a_n$ et b de $(\mathscr{E})$ étant supposées* **continues,** *soit $t_0 \in I$. Pour chaque suite $(y_{0,0}, y_{0,1}, \dots, y_{0,n-1}) \in K^n$, il existe* **une et une seule** *I-solution f de $(\mathscr{E})$ telle que $f^{(k)}(t_0) = y_{0,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. De plus, soit J un sous-intervalle non trivial de I contenant t_0 ; la fonction $f|_J$ est l'unique $g \in \mathscr{S}_J(\mathscr{L})$ telle que $g^{(k)}(t_0) = y_{0,k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.*

COROLLAIRE 1

> *Sous les hypothèses du théorème IX.5.4, pour chaque sous-intervalle non trivial J de I, $\mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ est un sous-espace affine* **de dimension** *n de $\mathscr{F}(I, K)$ (c'est un sous-K-ev dans le cas homogène), et l'application de restriction $\rho_{I,J}$: $\mathscr{S}_I(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$, $f \mapsto f|_J$ est* **bijective.**

Lorsque $(\mathscr{E})$ est *homogène*, on appelle **système fondamental de solutions** de $(\mathscr{E})$ toute base du K-ev $\mathscr{S}_I(\mathscr{E})$. On a alors :

COROLLAIRE 2

> *Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des I-solutions de $(\mathscr{E})$, avec les a_k* **continues** *et* $\mathbf{b = 0}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
> (I) *$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$.*
> (II) *Il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs*
>
> $$V_k(t_0) = (\varphi_k(t_0), \varphi_k'(t_0), \dots, \varphi_k^{(n-1)}(t_0)) \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$
>
> *soient linéairement indépendants dans K^n*
> (III) *$(\forall t \in I)$, les vecteurs $(V_k(t))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont linéairement indépendants dans K^n.*

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des I-solutions quelconques de $(\mathscr{E})$, la fonction $I \longrightarrow K$,

$$t \mapsto W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t) = \det_{\mathscr{C}}(V_1(t), \dots, V_n(t)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

s'appelle le **wronskien** de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. La formule d'Abel (théorème IX.5.3) entraîne alors, du fait que $\mathrm{Tr}\,(A(t)) = -a_1(t)$:

THÉORÈME IX.5.5

> *Sous les hypothèses du théorème IX.5.4 avec $b = 0$, soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des I-solutions de $(\mathscr{E})$. On a : $(\forall (t_0, t) \in I^2)$*
>
> (12) $$W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t) = W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}(t_0) \times \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

Remarque 1 : Pour $n = 2$, la formule (12) est facile à établir. En effet, soit W la fonction

$$t \mapsto W_{\varphi_1, \varphi_2}(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Elle est dérivable, et on a :

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) \end{vmatrix},$$

d'où en tenant compte de $\varphi'' = -a_1 \varphi' - a_2 \varphi$:

$$W'(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ -a_1^{(t)} \varphi_1'(t) & -a_1(t)\varphi_2'(t) \end{vmatrix} = -a_1(t) W(t),$$

d'où (12) par intégration.

Exemple 2 : *Intégrer l'équation différentielle suivante, le corps de base étant* $\mathbb{C}$:

$$(13) \qquad ty'' + y' - y = 0.$$

Solution : On peut commencer par rechercher les solutions de (13) DSE_0. On trouve facilement que les solutions DSE_0 maximales forment la droite vectorielle engendrée par $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, avec $(\forall n)$ $a_n = \dfrac{1}{(n!)^2}$ (le rayon de convergence de cette série est $+\infty$).

L'équation (13) est linéaire scalaire du second ordre et homogène, non résolue en y''. Elle a un point singulier : 0. Sur chacun des intervalles $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, elle est, après division par t, *à coefficients continus*.

Le théorème IX.5.4 et ses conséquences s'appliquent donc sur I, ce qui prouve que le $\mathbb{C}$-ev $\mathscr{S}_I = \mathscr{S}_I((13))$ *est de dimension 2*. Pour achever l'intégration de (13) sur I il suffit donc de trouver une I-solution linéairement indépendante de $S|_I$ déjà connue. Effectuons le changement de fonction inconnue défini par

$$y(t) = z(t) + S(t) \operatorname{Log} |t|$$

(et qui sera justifié au chapitre X). La C.N.S. pour que $y \in \mathscr{S}_I$ est : $(\forall t \in I)$

$$(14) \qquad tz''(t) + z'(t) - z(t) = -2 S'(t) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n.$$

Pour trouver une I-solution de (14) on peut chercher les s

$T \in \mathbb{C}[[X]]$, $T = \sum c_n X^n$ vérifiant (14). En posant $c_n = \lambda_n a_n$, on trouve la C.N.S. portant sur les λ_n :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad n^2 a_n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = -2\, n a_n \, ,$$

c'est-à-dire $$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \lambda_n - \lambda_{n-1} = -\frac{2}{n}\, .$$

En posant $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geqslant 1$, et en choisissant arbitrairement $\lambda_0 = \lambda \in \mathbb{C}$, on obtient les séries formelles suivantes :

$$T_\lambda(X) = \sum_{n \geqslant 0} (\lambda - 2\,\sigma_n)\, a_n X^n \, .$$

Elles forment donc la droite affine des séries formelles $(\lambda \Phi - 2\, \Psi)_{\lambda \in \mathbb{C}}$, avec $\Phi = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n$ et $\Psi = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\sigma_n}{(n!)^2} X^n$. Ces séries sont toutes de rayon $+\infty$. On en déduit en particulier que la fonction $U_I = \tilde{\Psi}|_I$ est une I-solution de (14) et donc que

$$\varphi_I : I \longrightarrow \mathbb{C}\, , \quad t \mapsto S(t) \operatorname{Log} |t| + U_I(t)$$

est I-solution de (13). Il est clair que $S|_I$ et φ_I sont linéairement indépendantes (par exemple $\varphi_I(t) \underset{t \longrightarrow 0,\, t \in I}{\longrightarrow} -\infty$): *elles forment donc une base de $\mathscr{S}_I$*, ce qui signifie que (13) est complètement intégrée sur I. Pour achever l'étude de (13) il reste à considérer des intervalles J de $\mathbb{R}$ contenant 0 comme point intérieur ; si $g \in \mathscr{S}_J((13))$, ses restrictions $g|_{J \cap \mathbb{R}_+^*}$ et $g|_{J \cap \mathbb{R}_-^*}$ doivent se prolonger continûment en 0, et l'on sait par ailleurs (corollaire 1 du théorème IX.5.4) que $g|_{J \cap \mathbb{R}_+^*}$ est combinaison linéaire de $S|_{J \cap \mathbb{R}_+^*}$ et de $\varphi|_{J \cap \mathbb{R}_+^*}$, ce qui implique (à cause de : $\varphi_{\mathbb{R}_+^*}(t) \underset{t \xrightarrow{>} 0}{\longrightarrow} -\infty$) que $g|_{J \cap \mathbb{R}_+^*} = A(S|_{J \cap \mathbb{R}_+^*})$, avec $A \in \mathbb{C}$. De même $g|_{J \cap \mathbb{R}_-^*} = B(S|_{J \cap \mathbb{R}_-^*})$, avec $B \in \mathbb{C}$. La continuité de g en 0 implique ensuite que $A = B$ (car $S(0) = 1$), d'où $g = A(S|_J)$. En définitive, $\mathscr{S}_J((13))$ est le $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 engendré par $S|_J$.

On connaît donc les solutions de (13) sur *tout* intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et des fonctions données : $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues. Montrer que l'intégration du système différentiel scalaire carré

$$\begin{cases} y_0' = a_0 \quad y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1} + b_0 \\ y_1' = a_{n-1} y_0 + a_0 y_1 + \cdots + a_{n-2} y_{n-1} + b_1 \\ \cdots \\ y_{n-1}' = a_1 \quad y_0 + a_2 y_1 + \cdots + a_0 \quad y_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

se ramène à des quadratures portant sur des fonctions continues connues.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $A : I \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On note $\mathscr{S}$ le $\mathbb{R}$-ev des I-solutions de l'équation $Y' = A \times Y$ (Y à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$). Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) $(\forall f \in \mathscr{S})$ la fonction $t \mapsto \| f(t) \|$ est constante.

(II) $(\forall t \in I)$ la matrice $A(t)$ est antisymétrique.

Exercice 3 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Soit $A : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ continue, et $t_0 \in I$. On considère la solution $t \mapsto f(t)$ de l'équation $(\mathscr{R})$ $Y'(t) = A(t) \circ Y(t)$, où la fonction inconnue Y est **à valeurs dans $\mathbf{Hom}_K(E)$**, qui vérifie $Y(t_0) = \mathrm{Id}_E$. Montrer que

$$(\forall t \in I) \quad f(t) \in \mathrm{GL}_K(E) .$$

Exercice 4 (*résolvante*) : On se place dans les conditions de l'exercice 3 avec $I = \mathbb{R}$. Soit $t \mapsto R(t)$ la $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{R})$ telle que $R(0) = \mathrm{Id}_E$. Soit $(\mathscr{E})$ l'équation $Y' = A \,.\, Y$ (où Y est à valeurs *dans* E).

a) Pour $V \in E$, montrer que $t \mapsto f(t) = R(t) \,.\, V$ est l'unique $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{E})$ telle que $f(0) = V$.

b) Préciser $R(t)$ lorsque A est constante.

c) Revenant au cas général (A continue), on donne $t_0 \in I$. Soit $t \longrightarrow R(t_0, t)$ la solution de $(\mathscr{R})$ telle que $R(t_0, t_0) = \mathrm{Id}_E$. Pour $V \in E$, montrer que $f(t) = R(t_0, t) \,.\, V$ est l'unique $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{E})$ telle que $f(t_0) = V$.

Prouver : $\qquad \forall (t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3 \quad R(t_1, t_2) \circ R(t_0, t_1) = R(t_0, t_2) .$

En particulier, $R(t_0, t_1) \in \mathrm{GL}_K(E)$ et $(R(t_0, t_1))^{<-1>} = R(t_1, t_0)$.

Exercice 5 : Soit E un K-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On donne $A : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ continue et on considère les deux équations différentielles suivantes, où la fonction inconnue Y est à valeurs **dans $\mathbf{Hom}_K(E)$** :

$$(\mathscr{A}) \quad Y'(t) = A(t) \circ Y(t) \qquad \text{et} \qquad (\mathscr{B}) \quad Y'(t) = A(t) \circ Y(t) - Y(t) \circ A(t) .$$

a) Montrer que si $f : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ est dérivable, pour que l'on ait $f \in \mathscr{S}_I(\mathscr{B})$, il faut et il suffit que $(\forall g \in \mathscr{S}_I(\mathscr{A}))(\forall t \in I) \quad f(t) \circ g(t) \in \mathscr{S}_I(\mathscr{A})$.

b) On munit $\mathscr{F}(I, \mathrm{Hom}_K(E))$ de la loi $(f, g) \mapsto f \circ g$ définie par :

$$(\forall t \in I) \quad (f \circ g)(t) = f(t) \circ g(t) .$$

Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des $f \in \mathscr{S}_I(\mathscr{B})$ inversibles pour cette loi. Prouver que $(\mathscr{G}, \circ)$ est un groupe (cf. exercice 3).

c) Soit l'équation $\qquad (\mathscr{E}) \qquad Y' = AY \qquad$ (Y à valeurs **dans E**).

Exprimer de façon simple les solutions de $(\mathscr{E})$ à l'aide de celles de $(\mathscr{A})$ (cf. exercice 4).

Exercice 6 (sur le *wronskien*) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des fonctions $n-1$ fois dérivables : $I \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose

$$(\forall t \in I) \quad W_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \ldots \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} .$$

a) Montrer que si les φ_k sont liées, $W_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}$ est la fonction nulle.

b) Montrer par un exemple que même si $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$ est la fonction nulle, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ peuvent être linéairement indépendants.

c) On suppose que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont *analytiques réelles*. Montrer que si $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_n}$ est la fonction nulle, alors $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont liées.

Exercice 7 (équations linéaires à coefficients périodiques) : On se place dans les conditions de l'exercice 4, avec $K = \mathbb{C}$ et A *ω-périodique* (ω réel > 0). On reprend les équations

$(\mathscr{R})$ $$Y'(t) = A(t) \circ Y(t) \quad (Y \text{ à valeurs dans } \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E))$$

et

$(\mathscr{E})$ $$Y' = A \,.\, Y \quad (Y \text{ à valeurs dans } E)$$

et on note $t \mapsto R(t)$ la $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{R})$ telle que $R(0) = \mathrm{Id}_E$.

a) En étudiant la fonction $t \mapsto R(t + \omega) \,.\, V$ pour $V \in E$, prouver que

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad R(t + \omega) = R(t) \circ R(\omega) \,.$$

b) Soit $B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que $\exp(\omega B) = R(\omega)$ (un tel B existe car $R(\omega)$ est inversible (cf. tome 1, exercice 16 du § XV.5)). Montrer que la fonction $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$, $t \mapsto R(t) \circ \exp(-tB)$ est ω-périodique.

c) Dans $(\mathscr{E})$, effectuer le changement d'inconnue $Y \rightsquigarrow Z$ tel que $Y(t) = S(t) \,.\, Z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathscr{E})$ équivaut à : $Z' = B \,.\, Z$. En déduire que la $\mathbb{R}$-solution $t \mapsto \varphi(V, t) = R(t) \,.\, V$ de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(V, 0) = V$ pour $V \in E$ est la fonction $t \mapsto (S(t) \circ \exp(tB)) \,.\, V$. Conclure en disant comment on peut trouver toutes les solutions ω-périodiques de $(\mathscr{E})$.

d) Démontrer, à l'aide de la formule d'Abel, que

$$\det(R(\omega)) = \exp\left(- \int_0^{\omega} \mathrm{Tr}\,(A(\tau))\, d\tau \right) \,.$$

Exercice 8 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. On considère l'équation différentielle scalaire

$(\mathscr{L})$ $$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + \cdots + a_p y = 0 \,.$$

Montrer $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ il existe α réel > 0 tel que toute $\mathbb{R}$-solution non nulle de $(\mathscr{E})$ admet au plus $p - 1$ zéros sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Exercice 9 : *a*) Soit un système différentiel linéaire scalaire carré :

$(\mathscr{S}\mathscr{L})$ $$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n + b_n \end{cases}$$

où les a_{kl} et les b_k sont des fonctions *analytiques réelles* : $I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I étant un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$). Déduire de l'exercice 1 du § IX.1 que toutes les I-solutions de $(\mathscr{S}\mathscr{L})$ sont analytiques réelles.

b Soit une équation linéaire scalaire d'ordre $n \geqslant 1$ résolue en $y^{(n)}$:

$(\mathscr{E})$ $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b$$

où $a_1, \dots, a_n$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions *analytiques réelles*. Déduire de l'exercice 2 du § IX.1 que toutes les I-solutions de $(\mathscr{E})$ sont analytiques réelles.

Exercice 10 : Le corps de base étant $\mathbb{R}$, on considère les équations différentielles scalaires

$$(\mathscr{E}_1) \quad y'' + y = q(t)\, y \quad \text{et} \quad (\mathscr{E}_2) \quad z'' + z = 0 \,,$$

où $q \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est donnée telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |q|$ converge. Si $t_0 \in \mathbb{R}_+$, soit

$$E(t_0) = \left\{ f\,|_{[t_0, +\infty[},\ f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{E}_1) \right\} \quad \text{et} \quad E_0(t_0) = \left\{ f\,|_{[t_0, +\infty[},\ f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{E}_2) \right\}$$

a) Montrer que toute $f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{E}_1)$ s'écrit

$$t \mapsto f(t) = a \cos t + b \sin t + \int_0^t \sin(t-s)\, q(s)\, f(s)\, ds\,,$$

avec a et b dépendant de f.

b) Soit $\mathscr{B}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et bornées, muni de la norme uniforme, et pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}_+$ soit $\mathscr{B}_{t_0} = \left\{ f|_{[t_0, +\infty[},\ f \in \mathscr{B} \right\}$, muni de la norme uniforme. On note $A : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f \mapsto A(f)$ définie par

$$t \mapsto f(t) - \int_t^{+\infty} \sin(s-t)\, q(s)\, f(s)\, ds\,.$$

Montrer : Im $(A) \subset \mathscr{B}$. On définit de la même façon A_{t_0} sur chaque $\mathscr{B}_{t_0}$ $(t_0 \geq 0)$. Montrer que, pour t_0 assez grand, $\| B_{t_0} \| < 1$. En déduire que, pour de tels t_0, A_{t_0} est bijectif et que $A_{t_0}^{<-1>}(E_0(t_0)) \subset E(t_0)$ et $A_{t_0}(E(t_0)) \subset E_0(t_0)$. En déduire que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+}(\mathscr{E}_1) \subset \mathscr{B}$.

Exercice 11 : Le corps de base étant $\mathbb{R}$, intégrer l'équation différentielle scalaire $(1-t^2)y'' - ty' - a^2 y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$ ($a > 0$ donné).

Indication : Le changement de variable indépendante $t = \sin\theta$ permet de trouver les $]-1, 1[$-solutions.

Exercice 12 (*Equation de Legendre*) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle scalaire définie sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}_n) \qquad (1-t^2)y'' - 2t\,y' + n(n+1)\,y = 0\,.$$

a) Montrer que $(\mathscr{E}_n)$ admet une unique solution polynomiale P_n de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$. Prouver que $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!} \dfrac{d^n}{dt^n} [(t^2-1)^n]$.

b) Si $n \geq 3$, prouver : $P'_n - P'_{n-2} = C_n P_{n-1}$, où C_n est une constante à déterminer.

c) On cherche des solutions de $(\mathscr{E}_n)$ de la forme $y = u\,P_n(t) - v$, où u et v sont des fonctions inconnues. Montrer qu'un choix approprié de u ramène alors $(\mathscr{E}_n)$ à

$$(\mathscr{L}_n) \qquad (1-t^2)v'' - 2t\,v' + n(n+1)\,v = 2P'_n(t)\,.$$

A l'aide de *b*), en déduire que $(\mathscr{L}_n)$ admet une solution polynomiale qu'on exprimera à l'aide des P_k $(0 \leq k \leq n)$. En déduire l'intégration de $(\mathscr{E}_n)$. Comparer le résultat obtenu avec celui donné par la recherche directe des solutions DSE_0 de $(\mathscr{E}_n)$.

Exercice 13 : Le corps de base étant $\mathbb{C}$, soit l'équation différentielle scalaire $(\mathscr{E})$ $ty'' + y' + ty = 0$, définie sur $\mathbb{R}$.

a) Quelles sont les solutions DSE_0 ?

b) Soit S la $\mathbb{R}$-solution DSE_0 telle que $S(0) = 1$. Chercher les fonctions $T : I \longrightarrow \mathbb{C}$ (où $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$) telles que $t \mapsto S(t)\,\mathrm{Log}\,|t| + T(t)$ soit une I-solution de $(\mathscr{E})$. Intégrer alors complètement $(\mathscr{E})$.

c) Mêmes questions avec l'équation $t(1-t)y'' + (1-2t)y' - \dfrac{1}{4}y = 0$.

Exercice 14 : Intégrer complètement les équations différentielles suivantes (définies sur $\mathbb{R}$ et où la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}$) en commençant par chercher les solutions DSE_0.

a) $4t^2 y'' + 2y' - y = 0$ *b*) $4ty'' - 4y' + t^3 y = 0$

c) $t^2 y'' - 2nty' + n(n+1)(t^2+1)y = 0$.

Exercice 15 : Soit l'équation différentielle scalaire définie sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathscr{E}) \qquad t^2 y'' + 4ty' + (2-t^2)y = 1\,.$$

a) Chercher les solutions DSE_0.

b) Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, chercher pour l'équation homogène associée $(\mathscr{E}_0)$ une solution de la forme $t \mapsto \dfrac{S(t)}{t}$, avec S fonction DSE_0.

c) Intégrer complètement l'équation $(\mathscr{E})$ et chercher ses $\mathbb{R}_+^*$-solutions bornées au voisinage de $+\infty$, et ses $\mathbb{R}_-^*$-solutions bornées au voisinage de $-\infty$.

Exercice 16 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, croissante, telle que $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On considère l'équation différentielle scalaire $(\mathscr{E})\ y'' + \varphi(t)\,y = 0$ définie sur $\mathbb{R}$, où la fonction inconnue y est à valeurs réelles. Montrer que toute $\mathbb{R}$-solution f de $(\mathscr{E})$ est bornée au voisinage de $+\infty$.

Indication : pour t assez grand, $g(t) = f^2(t) + \dfrac{f'^2(t)}{\varphi(t)}$ est définie.

Exercice 17 : On reprend l'équation $(\mathscr{E})$ de l'exercice 16, avec les nouvelles hypothèses $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ diverge. Montrer que toute $\mathbb{R}$-solution de $(\mathscr{E})$ présente une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 18 : On reprend l'équation $(\mathscr{E})$ de l'exercice 16, en faisant varier les hypothèses sur φ.

a) On suppose φ continue et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi|$ converge. Si f est une solution bornée sur $\mathbb{R}_+$, prouver que $f'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Et prouver que $(\mathscr{E})$ possède des solutions non bornées (utiliser le wronskien).

b) On suppose φ continue et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,|\varphi(t)|\,dt$ converge. Prouver que toute solution f de $(\mathscr{E})$ est dans $O(t)$ pour $t \longrightarrow +\infty$, et que $f'(t)$ a une limite quand $t \longrightarrow +\infty$. Prouver que le graphe Γ_f de f admet une asymptote quand $t \longrightarrow +\infty$.

Exercice 19 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle scalaire $(\mathscr{E})\ y'' - f(t)y = 0$ définie sur I, où l'inconnue y est à valeurs réelles, et où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée de classe $\mathscr{C}^2$.

a) Prouver qu'il existe des fonctions $b, c, d : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues ne dépendant que de f, f' et f'' telles que, pour toute $y \in \mathscr{S}_I(\mathscr{E})$, la fonction $Y = y^3$ soit I-solution de $(\mathscr{F})$ $Y^{(4)} + bY'' + cY' + dY = 0$.

b) Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de $(\mathscr{E})$. On pose

$$Y_1 = y_1^3,\quad Y_2 = y_1^2 y_2,\quad Y_3 = y_1 y_2^2,\quad Y_4 = y_2^3\,.$$

Montrer que (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{F})$. Si W désigne le wronskien, prouver :

$$W(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = 12\,[W(y_1, y_2)]^6\,.$$

Exercice 20 : Soit y_1 et y_2 deux I-solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire scalaire définie sur I :

$$y'' + ay' + by = 0, \quad \text{où} \quad a \text{ et } b : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ sont continues}\,.$$

a) Démontrer que les $n+1$ fonctions $y_1^p y_2^q = f_{p,q}$, $p + q = n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné, sont linéairement indépendantes.

b) Si deux fonctions *quelconques*, de classe $\mathscr{C}^2$, f_1 et $f_2 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ sont linéairement indépendantes, est-il vrai que les fonctions $(f_1^p f_2^q)_{p+q=n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donné) sont linéairement indépendantes ?

c) On donne maintenant sur I une équation du troisième ordre :

$$(\mathscr{F}) \qquad y''' + ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{où} \quad a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{C} \text{ sont continues}$$

Soit y_1, y_2, y_3 trois I-solutions linéairement indépendantes de $(\mathscr{F})$. On donne $n \in \mathbb{N}^*$. Est-il vrai que les fonctions $(y_1^p y_2^q y_3^r)_{p+q+r=n}$ sont linéairement indépendantes ?

Exercice 21 : On donne les fonctions f et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et on considère les équations différentielles $(\mathscr{E}_1)$ $y'' + f(t)y = 0$; $(\mathscr{E}_2)$ $y'' + g(t)y = 0$. On fait les hypothèses : • Pour toute solution φ de $(\mathscr{E}_1)$ sur $\mathbb{R}_+$, φ et φ' sont bornées • L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f - g|$ converge.

Montrer :

a) pour toute solution ψ de $(\mathscr{E}_2)$ sur $\mathbb{R}_+$, ψ et ψ' sont bornées ;

b) il existe une bijection $\Phi : \mathscr{S}_{\mathbf{R}_+}(\mathscr{E}_1) \longrightarrow \mathscr{S}_{\mathbf{R}_+}(\mathscr{E}_2)$, $\varphi \mapsto \psi$ telle que $(\forall \varphi \in \mathscr{S}_{\mathbf{R}_+}(\mathscr{E}_1))$ $\varphi - \psi$ et $\varphi' - \psi'$ tendent vers 0 quand $t \longrightarrow +\infty$.

Exercice 22 : Soit $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue et f_0 la $\mathbb{R}_+$-solution de l'équation différentielle scalaire $y'' = u(t)y$ telle que $f_0(0) = 0$ et $f_0'(0) = 1$.

a) Quel est le sens de variation de f_0 ?

b) On suppose $u \geqslant C$ sur $\mathbb{R}_+$ ($C > 0$ donné). Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $f_0(t) \leqslant \dfrac{f_0'(t)}{\sqrt{C}} \operatorname{th}(\sqrt{C}(t - A))$.

Exercice 23 : Soit n entier $\geqslant 2$ et $(a_{kl})_{(k,l) \in [\![1,n]\!]^2}$ des fonctions : $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continues. On pose

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \cdots & -a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

et on considère l'équation $(\mathscr{E})$ $Y' = A \circ Y$, définie sur $\mathbb{R}_+$, où la fonction inconnue Y est à valeurs dans $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Une solution f de $(\mathscr{E})$ sera dite $\geqslant 0$ ssi ses composantes sont toutes à valeurs réelles $\geqslant 0$.

a) Montrer que $f \geqslant 0$ ssi les composantes de $f(0)$ sont $\geqslant 0$.

b) Soit δ réel > 0 tel que $(\forall i \in [\![1,n]\!])$ $a_{ii}(t) - \sum_{j \neq i} a_{ij}(t) \geqslant \delta$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{S}_{\mathbf{R}_+}(\mathscr{E})$. Prouver :

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+) \quad \sum_{i=1}^{n} |f_i(t)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(0)| \right) e^{-\delta t}.$$

Exercice 24 : Soit $q : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue (I = intervalle non trivial de $\mathbb{R}$). Montrer que toute I-solution non nulle de l'équation scalaire à inconnue numérique $y : y'' - qy = 0$, s'annule au plus une fois.

Exercice 25 : 1) Soit a, b, c trois fonctions : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a ne s'annulant pas. On considère l'équation différentielle : (où x est la variable)

$$(\mathscr{E}) \qquad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0, \quad (y \text{ numérique})$$

a) Soit f une solution non nulle de $(\mathscr{E})$. Montrer que $f^{-1}(0)$ est sans point d'accumulation. Cela reste-t-il vrai si a peut s'annuler ?

b) Soit f_1, f_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathscr{E})$ sur un même intervalle. Prouver que $f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) = \varnothing$. Prouver que si x_0 et x_1 sont deux zéros *consécutifs* de f_1, $(x_1 < x_2)$ alors $f_2^{-1}(0)$ rencontre $]x_0, x_1[$, (Etudier f_2/f_1) et que card $(f_2^{-1}(0) \cap]x_0, x_1[) = 1$.

2) Soit P, Q_1, $Q_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, avec Q_1 et Q_2 continues, et P de clas

>0, telles que $(\forall x)\ Q_1(x) \leqslant Q_2(x)$ et que : Intérieur $[(Q_2 - Q_1)^{-1}(0)] = \varnothing$. Soit les équations :

$$(E_k) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P(x)\,y') + Q_k(x)\,y = 0 \quad (k \in \{1, 2\}).$$

a) Soit f_k solution de (E_k), (f_1 et f_2 sur le même intervalle). Prouver

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P(x)(f_2 f_1' - f_1 f_2')) = (Q_2 - Q_1)\, f_1\, f_2\,.$$

En déduire que si x_0 et x_1 sont deux zéros consécutifs de f_1, $(x_0 < x_1)$, alors $f_2^{-1}(0) \cap\ ]x_0, x_1[\ \neq \varnothing$.

3) Soit $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et ω, Ω réels $(0 < \omega < \Omega)$. On suppose : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $0 < \omega^2 \leqslant Q(x) \leqslant \Omega^2$. Montrer que toute $\mathbb{R}$-solution f de l'équation $(E_3)\ y'' + Q(x)\,y = 0$ possède une infinité de zéros, et que si $f \neq 0$, deux zéros consécutifs x_0, x_1 de f, $(x_0 < x_1)$ vérifient : $\dfrac{\pi}{\Omega} \leqslant x_1 - x_0 \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$.

4) Soit $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit f une solution non nulle de (E_3), dont on donne deux zéros consécutifs u et v $(u < v)$. On suppose trouvés ω, Ω réels >0 tels que $(\forall x \in [u, v])$ $0 < \omega^2 \leqslant Q(x) \leqslant \Omega^2$. Montrer : $\dfrac{\pi}{\Omega} \leqslant v - u \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$. Montrer de plus que si $\lambda \in [u, v]$ réalise un extremum de f, alors $\lambda - u \leqslant \dfrac{\pi}{2\,\omega}$, $v - \lambda \leqslant \dfrac{\pi}{2\,\omega}$.

5) Soit $Q(x) = \mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbb{R})$ et l'équation $(E_4)\ y'' + \mathrm{e}^x\,y = 0$. Montrer qu'une solution non nulle f de (E_4) admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$, que l'on peut ranger en une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ strictement croissante, et prouver : $x_n \underset{n \to \infty}{\sim} 2 \operatorname{Log} n$.

Chapitre X

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans tout ce chapitre, K désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés (y compris dans les exercices) sont supposés *de dimension finie* $\geqslant 1$.

§ X.1 *GÉNÉRALITÉS*

Equation à inconnue vectorielle et résolue en Y'

Soit E un K-ev, Ω un *ouvert* non vide de $\mathbb{R} \times E$, et $f : \Omega \longrightarrow E$, $(t, X) \mapsto f(t, X)$ une application. L'écriture

$$(\mathscr{E}) \qquad \boxed{Y' = f(t, Y)}$$

sera appelée une **équation différentielle du premier ordre en la fonction vectorielle Y, et résolue en Y'** [1].

DÉFINITION X.1.1

*Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On appelle **J-solution** de $(\mathscr{E})$ toute fonction $\varphi : J \longrightarrow E$ dérivable, dont le graphe Γ_φ est inclus dans Ω, et telle que $(\forall t \in J)\ \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.*

Par définition, **intégrer** l'équation $(\mathscr{E})$, c'est déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions. Pour un intervalle J donné, nous noterons $\mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ l'ensemble des J-solutions de $(\mathscr{E})$.

---

[1] On dit parfois que E est *l'espace des phases* de $(\mathscr{E})$.

DÉFINITION X.1.2

> *Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$. On dit que φ est une* **solution maximale** *de $(\mathscr{E})$ ssi il n'existe pas d'intervalle J_1 de $\mathbb{R}$ contenant* **strictement** *J, et de J_1-solution ψ de $(\mathscr{E})$, tels que $\psi|_J = \varphi$.*

PROPOSITION X.1.1

> *Dans l'équation $(\mathscr{E})$ supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$). Alors toute solution de $(\mathscr{E})$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$).*

Démonstration :

Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$. Puisque φ est dérivable, elle est de classe $\mathscr{C}^0$. Supposons prouvé que φ est de classe $\mathscr{C}^q$, avec $0 \leqslant q \leqslant k$. Alors la fonction $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ est aussi de classe $\mathscr{C}^q$ (cf. théorème V.4.1). Donc φ' est de classe $\mathscr{C}^q$, et φ de classe $\mathscr{C}^{q+1}$, d'où le résultat par récurrence. ■

Pour déterminer les J-solutions φ de $(\mathscr{E})$ vérifiant une *condition initiale donnée,* c'est-à-dire dont le graphe Γ_φ passe par un point donné $(t_0, Y_0) \in \Omega$, il peut être intéressant, si f est *continue*, de ramener $(\mathscr{E})$ à une *équation intégrale :*

PROPOSITION X.1.2

> *Dans $(\mathscr{E})$ supposons f* **continue.** *Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow E$ une fonction dont le graphe Γ_φ est inclus dans Ω. Soit $(t_0, Y_0) \in \Omega$ avec $t_0 \in J$. Les conditions* (I) *et* (II) *sont équivalentes :*
>
> (I) $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$ *et* $\varphi(t_0) = Y_0$.
>
> (II) *φ est continue, et* $(\forall t \in J)\ \varphi(t) = Y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, \mathrm{d}\tau.$

Démonstration :

Si (I) est satisfait, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ (cf. proposition X.1.1), donc par le *théorème de Leibniz,* pour $t \in J$, $\varphi(t) = Y_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau)\, \mathrm{d}\tau$, d'où (II).

Si (II) est satisfait, la fonction $F : \tau \mapsto f(\tau, \varphi(\tau))$ est continue, donc l'intégrale écrite a bien un sens, et $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(\tau)\, \mathrm{d}\tau$ est dérivable et a pour dérivée F, d'où (I). ■

Courbes intégrales

Dans $(\mathscr{E})$, supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$), et soit J un intervalle *ouvert non vide* de $\mathbb{R}$. Fixons une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N)$ de E, et soit β la base $((1, \vec{0}_E)\,;\,(0_{\mathbb{R}}, \vec{e}_1), \ldots, (0_{\mathbb{R}}, \vec{e}_n))$ de $\mathbb{R} \times E$. Si $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$, le graphe Γ_φ de φ est l'image de la représentation paramétrique : $J \longrightarrow \mathbb{R} \times E$, $t \mapsto (t, \varphi(t))$, qui est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) et *cartésienne dans* β. Donc ce graphe est une *sous-variété de dimension 1 et de classe* $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de $\mathbb{R} \times E$. Les sous-variétés ainsi obtenues sont appelées les **courbes intégrales** de $(\mathscr{E})$. A chaque courbe intégrale Γ_φ on associe sa **trajectoire,** qui est par définition l'image de φ *dans* E (*i.e.* l'image de Γ_φ par la deuxième projection naturelle $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$).

Si on considère une représentation de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) $\psi : J \longrightarrow \Omega$, $t \mapsto (t, \psi(t))$, où $\psi : J \longrightarrow E$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) et a son graphe inclus dans Ω, et un $\mathscr{C}^{k+1}$- (resp. $\mathscr{C}^\infty$-) difféomorphisme $\theta : L \longrightarrow J$ d'un intervalle ouvert L sur J, on obtient une représentation $L \longrightarrow \mathbb{R} \times E$, $u \mapsto (\theta(u), \psi(\theta(u)))$ $\mathscr{C}^{k+1}$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) équivalente à ψ. Pour que le graphe Γ_ψ soit une courbe intégrale de $(\mathscr{E})$, il faut et il suffit que l'on ait, en posant $\xi = \psi \circ \theta$:

$$(1) \qquad (\forall u \in L) \quad \boxed{\xi'(u) = \theta'(u) \times f(\theta(u), \xi(u))}$$

ce qui conduit à la *méthode du changement de variable* pour chercher les solutions de $(\mathscr{E})$ sur des sous-intervalles *ouverts* de J : on remplace $(\mathscr{E})$ par

$$(2) \qquad Z' = g(u, Z)$$

où g est définie, sur l'ouvert U de $\mathbb{R} \times E$ égal à :

$$\{(u, X) \in L \times E \mid (\theta(u), X) \in \Omega\},$$

par : $\quad (\forall (u, X) \in U) \qquad g(u, X) = \theta'(u)\, f(\theta(u), X)$.

Un bon choix de θ peut conduire à une équation (2) plus abordable que $(\mathscr{E})$, et à la courbe intégrale $u \mapsto (u, \xi(u))$ de (2) correspond une courbe intégrale $u \mapsto (\theta(u), \xi(u))$ de $(\mathscr{E})$ définie sur un sous-intervalle ouvert L de J.

Aux *solutions maximales* de $(\mathscr{E})$ correspondent des **courbes intégrales maximales** de $(\mathscr{E})$ (au sens de l'inclusion dans $\mathscr{P}(\mathbb{R} \times E)$).

Systèmes scalaires carrés du 1er ordre résolus en les dérivées

Revenons à l'équation $(\mathscr{E})$ $Y' = f(t, Y)$. Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_N)$ une base fixée de E et $f_1, \ldots, f_N$ les composantes de f dans $\mathscr{B}$. Considérons les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_N : J \longrightarrow$

$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(t)\,\vec{e}_k$ pour $t \in J$. Pour que $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E})$, il faut et il suffit que le graphe de φ soit contenu dans Ω, que chaque φ_k soit dérivable et que les φ_k vérifient le système :

$$(3) \qquad (\forall t \in J) \quad \varphi_k'(t) = f_k(t, \varphi(t)) \quad 1 \leqslant k \leqslant N\,.$$

Soit ω l'ouvert de $\mathbb{R} \times K^N$ image réciproque de Ω par la bijection

$$\mathbb{R} \times K^N \longrightarrow E\,, \qquad (t, (X_1, \ldots, X_N)) \mapsto \left(t, \sum_{k=1}^{N} X_k\,\vec{e}_k\right),$$

et pour $(t, X_1, \ldots, X_N) \in \omega$, posons

$$g_k(t, X_1, \ldots, X_N) = f_k\left(t, \sum_{k=1}^{N} X_k\,\vec{e}_k\right).$$

Le système (3) s'écrit :

$$(4) \qquad (\forall k \in [\![1, N]\!])\ (\forall t \in J) \quad \varphi_k'(t) = g(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t))\,.$$

Il est clair que *f est de classe $\mathscr{C}^q$* $(0 \leqslant q \leqslant +\infty)$ *ssi toutes les g_k* $(1 \leqslant k \leqslant N)$ *sont de classe $\mathscr{C}^q$.*

Les conditions (4) incitent à introduire l'écriture :

$$(\mathscr{E}\mathscr{S}) \qquad (\forall k \in [\![1, N]\!]) \quad \boxed{y_k' = g_k(t, y_1, \ldots, y_N)}$$

que l'on appelle un **système différentiel scalaire du premier ordre carré, en les fonctions inconnues $y_1, \ldots, y_N$, et résolu en $y_1', \ldots, y_N'$,** où les fonctions inconnues sont à valeurs dans K.

Pour un tel système, on définit de façon évidente la notion de *solution*, et de *solution maximale*. Quand on le construit comme indiqué ci-dessus, on dit que $(\mathscr{E}\mathscr{S})$ est le **système différentiel associé à $(\mathscr{E})$ dans la base $\mathscr{B}$,** et sa résolution est strictement équivalente à celle de $(\mathscr{E})$.

Inversement, à partir d'un système différentiel scalaire carré du 1^er^ ordre résolu en $y_1', \ldots, y_N'$: $(\forall k \in [\![1, N]\!])\ y_k' = g_k(t, y_1, \ldots, y_N)$, où $N \in \mathbb{N}^*$ est donné ainsi que les fonctions $g_k : \omega \longrightarrow K$ (où ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times K^N$), il n'y a aucune difficulté, en utilisant la base canonique $\mathscr{C}$ de K^N, à construire une équation $Y' = G(t, y)$ à inconnue vectorielle à valeurs dans K^N qui admette pour système différentiel associé dans la base $\mathscr{C}$ le système dont on est parti. Ce sont donc deux aspects d'un seul et même problème.

Equations différentielles scalaires d'ordre n résolus en $y^{(n)}$

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times K^n$, et $F : \Omega \longrightarrow K$ une fonction donnée. L'écriture

$$(\mathscr{F}) \qquad \boxed{y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}$$

sera appelée une **équation différentielle scalaire d'ordre n, en la fonction inconnue y** (où y est à valeurs dans K), **résolue en $y^{(n)}$**. Soit J un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$; on appelle **J-solution** de $(\mathscr{F})$ toute fonction $\varphi : J \longrightarrow K$, *$n$ fois dérivable,* et telle que $(\forall t \in J)$ $(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ et $\varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$. *Intégrer* $(\mathscr{F})$, c'est déterminer l'ensemble de *toutes* ses solutions. Nous noterons $\mathscr{S}_J(\mathscr{F})$ l'ensemble des J-solutions de $(\mathscr{F})$.

Soit φ_1, φ_2 des solutions de $(\mathscr{F})$ définies respectivement sur J_1 et J_2. On dira que **φ_1 prolonge φ_2** (ou que φ_2 est une **restriction** de φ_1) ssi $J_2 \subset J_1$ et $\varphi_2 = \varphi_1|_{J_2}$. Cette *relation d'ordre* sur l'ensemble des solutions de $(\mathscr{F})$ permet de définir les **solutions maximales** de $(\mathscr{F})$. Il revient au même de dire qu'une J-solution φ de $(\mathscr{F})$ est maximale si on ne peut pas trouver d'intervalle J_1 contenant strictement J et de J_1-solution ψ tels que ψ prolonge φ.

En raisonnant comme pour la proposition X.1.1, on établit sans peine :

PROPOSITION X.1.3

Dans $(\mathscr{F})$ supposons F de classe $\mathscr{C}^q$, $q \in \mathbb{N}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$). Alors toute solution de $(\mathscr{F})$ est de classe $\mathscr{C}^{q+n}$ (resp. de classe $\mathscr{C}^\infty$).

Revenons à l'équation $(\mathscr{F})$ et notons $\mathscr{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ la base canonique de K^n $(n \geqslant 2)$. Si φ est une J-solution de $(\mathscr{F})$, la fonction $\widehat{\varphi} : J \longrightarrow K^n$, $t \mapsto \varphi(t)\,\vec{\varepsilon}_1 + \varphi'(t)\,\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \varphi^{(n-1)}(t)\,\vec{\varepsilon}_n$ est dérivable et c'est une J-solution de $(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$ $\boxed{Y' = \Phi(t, Y)}$, où l'on a défini la fonction $\Phi : \Omega \longrightarrow K^n$ par $(t, X_1, \ldots, X_n) \mapsto (X_2, \ldots, X_n, F(t, X_1, \ldots, X_n))$ (de classe $\mathscr{C}^q$ ssi F l'est). Réciproquement, si $\psi : J \longrightarrow K^n$, $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t)\,\vec{\varepsilon}_k(t)$ est une J-solution de $(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$, en posant $\check{\psi} = \psi_1$ on voit facilement que $\check{\psi}$ est n fois dérivable et que c'est une J-solution de $(\mathscr{F})$. On vérifie ensuite en les composant dans les deux sens que les applications $\mathscr{S}_J(\mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ et $\mathscr{S}_J(\mathscr{E}_{\mathscr{F}}) \longrightarrow \mathscr{S}_J(\mathscr{F})$, $\check{\psi} \mapsto \psi$ sont des *bijections réciproques* l'une de l'autre, préservant la relation d'ordre « la solution φ_2 prolonge la solution φ_1 », ce qui entraîne que *l'intégration de $(\mathscr{F})$ et de $(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$ sont des problèmes rigoureusement équivalent* que $(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$ est l'**équation du 1^er ordre (à inconnue vectorielle) associée à** $(\mathscr{F})$. Lorsque F est de classe $\mathscr{C}^q$ $(0 \leqslant q \leqslant +\infty)$, les courbes intégrales de $(\mathscr{E}_{\mathscr{F}})$ sont par définition les **courbes intégrales de** $(\mathscr{F})$. Si J est ouvert, une courbe intégrale de $(\mathscr{F})$ est donc une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R} \times K^n$ représentée par $t \longrightarrow (t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$, où $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{F})$. Pour $n \geqslant 2$, le graphe dans $\mathbb{R} \times K$ d'une J-solution φ *n'est donc pas,* à proprement parler, une courbe intégrale de $(\mathscr{F})$: ce n'est que la projection naturelle sur $\mathbb{R} \times K$ de la vraie courbe intégrale définie par φ (1).

Equations non résolues

Il arrive que l'on ait à considérer des équations différentielles de types plus généraux. Si par exemple ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times E \times E$ et $g : \omega \longrightarrow E$ une fonction, l'écriture

$$(\varepsilon) \qquad g(t, Y, Y') = 0_E$$

définit une *équation différentielle du* 1^er *ordre, à inconnue vectorielle.* Par définition, si J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, on appelle ***J*-solution** de (ε) toute fonction $\varphi : J \longrightarrow E$ dérivable, dont le graphe Γ_φ est inclus dans ω, et telle que $(\forall t \in J)\ g(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0_E$. L'inclusion entre graphes de solutions permet encore de définir les **solutions maximales** de (ε).

La méthode du *changement de variable* peut être appliquée pour la recherche de certaines solutions de (ε) : si J et I sont deux intervalles *ouverts* de $\mathbb{R}$ et $\theta : J \longrightarrow I$, $u \mapsto \theta(u)$ un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, on obtient les représentations paramétriques $u \longrightarrow (\theta(u), \psi(u))$ des solutions de (ε) dont les graphes sont contenus dans $\omega \cap (I \times E)$ en posant $t = \theta(u)$ et en cherchant les solutions $u \mapsto \psi(u)$ de l'équation différentielle $(\varepsilon_1)\ g\left(\theta(u), \psi(u), \dfrac{1}{\theta'(u)}\psi'(u)\right) = 0$ définie sur un certain ouvert ω_1 de $\mathbb{R} \times E \times E$ à préciser.

Si l'on désigne par $g_1, \dots, g_N$ les coordonnées de g dans une base $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_N)$ de E, l'équation (ε) se traduit par le **système différentiel scalaire carré** (dit **associé à** (ε) **dans** $\mathscr{B}$)

$$(\sigma) \qquad \boxed{g_k(t, Y_1, \dots, Y_N, Y_1', \dots, Y_N') = 0_K} \qquad (1 \leqslant k \leqslant N)$$

où les fonctions inconnues $Y_1, \dots, Y_N$ à valeurs dans K sont les composantes de Y dans $\mathscr{B}$.

---

(1) L'abus de langage consistant à qualifier de *courbe intégrale de* $(\mathscr{F})$ le graphe dans $\mathbb{R} \times K$ d'une solution de $(\mathscr{F})$ se rencontre fréquemment. Mieux vaut l'éviter.

Pour un système différentiel de type (σ), on définit sans peine les notions de *solution* et de *solution maximale*.

Inversement, si un système de la forme (σ) est donné, il est associé dans la base canonique $\mathscr{C}$ de K^N à l'équation définie par $g = \sum_{k=1}^{N} g_k \vec{\varepsilon}_k$. Résoudre (ε) ou le système *associé* (σ) sont deux aspects d'un même problème.

Considérons de même une fonction $G : \omega \longrightarrow K$, où ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times K^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, donné). L'écriture

$$(\eta) \qquad \boxed{G(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0}$$

est appelée une **équation différentielle scalaire d'ordre *n* définie par *G*.** Si J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, une ***J*-solution** de (η) est par définition une fonction n fois dérivable $\varphi : J \longrightarrow J$ telle que $(\forall t \in J)$ $(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) \in \omega$ et $G(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$. On peut encore ordonner l'ensemble des solutions de (η) par « la solution φ_2 prolonge la solution φ_1 », ce qui permet de définir les **solutions maximales** de (η).

Nous verrons plus loin que, moyennant des hypothèses convenables, le théorème des fonctions implicites permet d'utiliser la théorie des équations *résolues* (en Y' ou en $y^{(n)}$) pour étudier des équations du type (ε) ou (η).

Exercice 1 : Soit E un K-ev de dimension finie et n un entier $\geqslant 2$. On considère l'écriture (e) $Y^{(n)} = h(t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})$, où h est une fonction donnée : $U \longrightarrow E$ (U ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$), et où la fonction inconnue Y est à valeurs dans E. On appelle ***J*-solution** de (e) toute fonction φ, n fois dérivable à valeurs dans E, définie sur l'intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$, telle que $(\forall t \in J)$ $(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$ et $\varphi^{(n)}(t) = h(t, \varphi(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$. Ramener l'équation (e) à une équation différentielle du 1er ordre de la forme $(\mathscr{E})$ $Z' = f(t, Z)$, où la fonction inconnue Z est à valeurs dans E^n.

Exercice 2 : Ramener une équation différentielle scalaire non résolue de la forme (η) à une équation à inconnue vectorielle, du premier ordre, non résolue, de la forme (ε), où la fonction inconnue sera à valeurs dans K^n.

Exercice 3 : On considère l'équation différentielle (ε) $g(t, Y, Y') = 0$. Vérifier que l'ensemble $\mathscr{S}$, ordonné par la relation « φ_2 prolonge φ_1 », des solutions de (ε) est *inductif* (c'est-à-dire la propriété $(\mathscr{Z})$ suivante : $(\mathscr{Z})$ Toute partie $\mathscr{H}$ de $\mathscr{S}$ totalement ordonnée et non vide admet dans $\mathscr{S}$ une borne supérieure).

N.B. Le théorème de Zorn assure que dans un ensemble ordonné inductif non vide, tout élément est majoré par au moins un élément maximal. Ici, cela signifie que *toute solution φ de (ε) se prolonge d'au moins une manière en une solution maximale.*

Exercice 4 : On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $(t, x) \mapsto 2t$ si $x \geqslant t^2$, $(t, x) \mapsto \dfrac{2x}{t}$ si $|x| < t^2$ et $(t, x) \mapsto -2t$ si $x \leqslant -t^2$. On considère l'équation différentielle scalaire $(\mathscr{E})$ $y' = f(t, y)$, où l'inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Combien $(\mathscr{E})$ admet-elle de solutions y telles que $y(0) = 0$?

b) Etudier la suite de fonctions : $t \mapsto u_n(t)$ telle que $u_0(t) = t^2$, et $(\forall n \geq 1)$ $u_n(t) = \int_0^t f(s, u_{n-1}(s))\, \mathrm{d}s$.

Exercice 5 : On donne deux réels a et b $(a < b)$. Soit $F : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante en la seconde variable, c'est-à-dire

$$(\forall (x, z_1, z_2) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2) \quad z_1 < z_2 \Rightarrow F(x, z_1) < F(x, z_2)\,.$$

On considère l'équation $(\mathscr{F})$ $y'' = F(t, y)$, où y est à valeurs dans $\mathbb{R}$. On donne $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(\mathscr{F})$ possède *au plus* une solution y telle que $y(a) = A$ et $y(b) = B$.

Exercice 6 : Soit a et b réels > 0, et $f : [-a, a] \times [-b, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(t, x) < 0$ si $tx > 0$, $f(t, x) > 0$ si $tx < 0$. Montrer que la fonction nulle est l'unique solution de l'équation $y' = f(t, y)$, où l'inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que $y(0) = 0$.

§ X.2 *THÉORÈMES D'EXISTENCE*

Conditions de Lipschitz

DÉFINITION X.2.1

Soit $E_1, \ldots, E_p$ et F des K-ev, Ω un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ et $f : \Omega \longrightarrow F$ une fonction. Fixons $i \in [\![1, p]\!]$. La fonction f est dite ***localement lipschitzienne en la i-ième variable*** *ssi tout point $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \Omega$ admet un voisinage $U \subset \Omega$ tel que, pour un réel $C \geq 0$ (dépendant de U), on ait :*

$$\Bigg(\forall (V_j) \in \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} E_k\Bigg), \quad (\forall W \in E_i)\,, \quad (\forall W' \in E_i)$$

$$(1) \quad [(V_1, \ldots, V_{i-1}, W, V_{i+1}, \ldots, V_p) \in U \quad \text{et} \quad (V_1, \ldots, V_{i-1}, W', V_{i+1}, \ldots, V_p) \in U] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| f(V_1, \ldots, V_{i-1}, W, V_{i+1}, \ldots, V_p) - f(V_1, \ldots, V_{i-1}, W', V_{i+1}, \ldots, V_p) \| \leq C \, \| W - W' \|\,.$$

En raison de l'équivalence des normes en dimension finie, la condition « f est localement lipschitzienne en la i-ième variable » est indépendante du choix des normes sur les E_i et F : seules les constantes de Lipschitz C dépendent du choix des normes. Si $p = 1$ on retrouve la notion de fonction localement lipschitzienne déjà rencontrée au chapitre V.

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω, elle est localement lipschitzienne sur Ω (cf. Corollaire 1 de la proposition V.2.4), donc *a fortiori* localement lipschitzienne en chacune des variables.

Nous dirons que f est **lipschitzienne en la *i*-ième variable sur les compacts de $\boldsymbol{\Omega}$** ssi, pour toute partie compacte L de Ω, il existe $C = C_L \in \mathbb{R}_+$ tel que la condition (1) soit satisfaite avec $U = L$. Comme tout voisinage d'un point $a \in \Omega$ admet un sous-voisinage compact, *si f est lipschitzienne en la* *sur les compacts de Ω, elle est localement lipschitzienne en cette variable sur Ω.* Réciproquement, *si elle est localement lipschitzienne en la i-ième variable, et si de plus elle est continue sur Ω, elle est lipschitzienne en cette variable sur les compacts de Ω.* En effet, soit L un compact non vide de Ω. Choisissons sur $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ la norme $\|(V_1, \ldots, V_p)\| = \operatorname{Max}_{i=1}^{p} (\|V_i\|)$. Pour chaque $a \in \Omega$, soit B_a une boule fermée de centre a, de rayon r_a, contenue dans Ω, et soit γ_a réel $\geqslant 0$ tels que (1) soit vraie avec $U = B_a$ et $C = \gamma_a$. On a une partie finie I non vide de L telle que les boules $\left(\mathbf{B}\left(a, \frac{r_a}{2}\right)\right)_{a \in I}$ recouvrent L. D'autre part, f étant continue sur Ω, est bornée sur L, d'où $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $(\forall (x, y) \in L^2)\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant M$. Soit $\rho = \operatorname{Min}_{a \in I} \left(\frac{r_a}{2}\right)$ et $C = \operatorname{Max}\left(\frac{2M}{\rho}, \{\gamma_a\}_{a \in I}\right)$. Alors, pour tous $(V_j) \in \prod_{k \neq i} E_k$ et $(W, W') \in E_i^2$, (1) est vérifiée avec $U = L$, d'où l'assertion.

Un réel $C \geqslant 0$ qui vérifie (1) avec U (resp. avec L) sera appelé une *constante de Lipschitz de f sur U (resp. sur L) en la i-ième variable.*

Etude locale des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$

Lemme 1 (de Gronwall)

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. On donne $t_0 \in I$, un réel $b \geqslant 0$, et deux fonctions **continues** *u et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $(\forall t \in I)$ $u(t) \leqslant b + \left|\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right|$. Alors*

$$(2) \qquad (\forall t \in I) \quad u(t) \leqslant b \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right|\right).$$

Démonstration :

Le changement de variable $\tau = -\theta$ dans l'intégrale montre qu'il suffit d'établir (2) pour $t \geqslant t_0$. Pour $t \in I$ et $t \geqslant t_0$, posons

$$g(t) = \left(\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \times \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) ;$$

g est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$g'(t) = \left[u(t)\, v(t) - v(t) \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right] \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) \leqslant$$

$$\leqslant b v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) = -b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)\right).$$

Par le théorème des accroissements finis, il en résulte, si $t \geqslant t_0$ et $t \in I$,

$$g(t) - g(t_0) \leqslant b\left(1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right)\right).$$

Or $g(t_0) = 0$, d'où

$$\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leqslant b \left(\exp \left(\int_{t_0}^{t} v(t)\, \mathrm{d}\tau \right) - 1 \right).$$

Mais par hypothèse

$$u(t) - b \leqslant \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, v(\tau)\, \mathrm{d}\tau ,$$

d'où finalement $u(t) \leqslant b \exp \left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right)$. ■

Il se trouve que dans la plupart des applications physiques les équations différentielles que l'on rencontre dépendent d'un paramètre et peuvent se ramener au type $(\mathscr{E}_\lambda)$ $Y' = f(t, Y, \lambda)$, où la fonction inconnue Y est à valeurs dans E. Précisons cette notion : on donne deux K-ev E et Λ (que l'on munit de normes), un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$, et une application $f : \Omega \longrightarrow E$, $(t, X, \lambda) \mapsto f(t, X, \lambda)$ supposée **continue** sur Ω et **localement lipschitzienne en la seconde variable** X sur Ω. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, notons Ω_λ l'ensemble $\{(t, X) \in \mathbb{R} \times E \mid (t, X, \lambda) \in \Omega\}$: c'est un ouvert de $\mathbb{R} \times E$; l'ensemble S des $\lambda \in \Lambda$ tels que $\Omega_\lambda \neq \varnothing$ est un ouvert non vide de Λ (c'est la projection de Ω sur Λ parallèlement à $\mathbb{R} \times E$). Pour chaque $\lambda \in S$, on considère l'équation différentielle $(\mathscr{E}_\lambda)$ $Y' = f(t, Y, \lambda)$.

Soit $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega$. Nous appellerons **tonneau de confinement** (des équations $(\mathscr{E}_\lambda)$) au point (t_0, X_0, λ_0) un ensemble de la forme

$$T = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \tilde{\mathbf{B}}(Y_0, \beta) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma)$$

qui vérifie les conditions suivantes :

$$T \subset \Omega \ ; \quad \text{et si} \quad M = \operatorname*{Max}_{(t, X, \lambda) \in T} (\| f(t, X, \lambda) \|)$$

(d'où $M \in \mathbb{R}_+$ puisque T est compact et f continue sur T), on a : $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $M\alpha \leqslant \beta/3$. Un tonneau de confinement est donc en particulier un voisinage compact de (t_0, Y_0, λ_0) dans Ω. Il en existe au moins un pour chaque $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega$. Si T est un tel tonneau, la suite $(M, \alpha, \beta, \gamma)$ sera appelée la **caractéristique** de T.

Proposition X.2.1

Avec les notations et hypothèses ci-dessus (i.e. $f : \Omega \longrightarrow E$ continue sur Ω et localement lipschitzienne sur Ω en la seconde variable), soit $\lambda_0 \in S$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Supposons trouvées des solutions $\varphi : I \longrightarrow E$ et $\psi : J \longrightarrow E$ de l'équation $(\mathscr{E}_{\lambda_0})$ telles que $t_0 \in I \cap J$ et $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$. Alors $\varphi|_{I \cap J} = \psi|_{I \cap J}$. En particulier, si $I = J$, on a :

$$(\varphi(t_0) = \psi(t_0)) \Leftrightarrow (\varphi = \psi).$$

Démonstration :

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble $\{t \in I \cap J \mid \varphi(t) = \psi(t)\}$; $\mathcal{N}$ est non vide car $t_0 \in \mathcal{N}$. Comme φ et ψ sont continues, $\mathcal{N}$ est fermé relativement à $I \cap J$. Montrons que $\mathcal{N}$ est ouvert relativement à $I \cap J$; pour cela soit $\xi \in \mathcal{N}$ et $\zeta = \varphi(\xi) = \psi(\xi)$. Considérons un tonneau de confinement T des $(\mathscr{E}_\lambda)$ au point (ξ, ζ, λ_0) de caractéristique $(M, \alpha, \beta, \gamma)$. Soit $t \in I \cap J \cap [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$. Par la proposition X.1.2, on a : $\varphi(t) = \zeta + \displaystyle\int_\xi^t f(\tau, \varphi(\tau), \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau$ et $\psi(t) = \zeta + \displaystyle\int_\xi^t f(\tau, \psi(\tau), \lambda_0)\,\mathrm{d}\tau$, d'où par différence :

$$(3) \qquad \varphi(t) - \psi(t) = \int_\xi^t [f(\tau, \varphi(\tau), \lambda_0) - f(\tau, \psi(\tau), \lambda_0)]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Puisque φ et ψ sont continues, quitte s'il le faut à diminuer α, on peut supposer que $(\forall t \in I \cap J \cap [\xi - \alpha, \xi + \alpha])$, $(t, \varphi(t), \lambda_0) \in T$ et $(t, \psi(t), \lambda_0) \in T$. Soit C une constante de Lipschitz de f en la seconde variable sur T. De (3) on déduit, pour $t \in I \cap J \cap [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$, en posant $u(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$: $u(t) \leqslant \left|\displaystyle\int_\xi^t Cu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|$. Le lemme de Gronwall s'applique (avec $b = 0$ et $v(t) = \mathrm{Cte} = C$), d'où $u = 0$ sur $I \cap J \cap [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$. Cela prouve bien que $\mathcal{N}$ est ouvert relativement à $I \cap J$, qui est connexe, et en fin de compte que $\mathcal{N} = I \cap J$. ■

PROPOSITION X.2.2

Avec les notations et hypothèses de la proposition X.2.1, *soit* $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega$ *et* T *un tonneau de confinement des* $(\mathscr{E}_\lambda)$ *en* (t_0, Y_0, λ_0), *de caractéristique* $(M, \alpha, \beta, \gamma)$. *Soit* $J = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. *Alors :*

a) Pour chaque $(\xi, \zeta, \lambda) \in T$ *tel que* $|\xi - t_0| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ *et* $\|\zeta - Y_0\| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$, *l'équation* $(\mathscr{E}_\lambda)$ *possède une et une seule J-solution* φ *telle que* $\varphi(\xi) = \zeta$.

b) Notons $\varphi_{\xi,\zeta,\lambda}$ *la solution définie en a). On a :*

$$(\textit{graphe de } \varphi_{\xi,\zeta,\lambda}) \times \{\lambda\} \subset T\,,$$

et la famille de fonctions $(\varphi_{\xi,\zeta,\lambda})$ *converge uniformément vers* $\varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0}$ *quand* $\|\zeta - \varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0}(\xi)\| + \|\lambda - \lambda_0\|$ *tend vers zéro,* (ξ, ζ, λ) *restant dans* $\left[t_0 - \dfrac{\alpha}{2}, t_0 + \dfrac{\alpha}{2}\right] \times \tilde{\mathbf{B}}\left(Y_0, \dfrac{\beta}{2}\right) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma)$.

Démonstration :

Notons C une constante de Lipschitz de f en sa seconde variable sur T.

a) Fixons $(\xi, \zeta, \lambda) \in T$ tel que $|\xi - t_0| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $\|\xi - Y_0\| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$. Soit φ_0 la fonction constante : $J \longrightarrow E$ de valeur ζ. Supposons définie, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction continue $\varphi_n : J \longrightarrow E$ de façon que $(t, \varphi_n(t), \lambda) \in T$ pour tout $t \in J$. Posons alors, (ce qui a un sens puisque $T \subset \Omega$ et puisque la fonction $\tau \mapsto f(\tau$

continue sur J), $(\forall t \in J)$

$$(4) \qquad \varphi_{n+1}(t) = \zeta + \int_{\xi}^{t} f(\tau, \varphi_n(\tau), \lambda)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Alors

$$(\forall t \in J) \quad \|\varphi_{n+1}(t) - \zeta\| \leqslant \left|\int_{\xi}^{t} f(\tau, \varphi_n(\tau), \lambda)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant M|t - \xi| \leqslant \frac{3\,M\alpha}{2} \leqslant \frac{\beta}{2}\,,$$

donc

$$\|\varphi_{n+1}(t) - Y_0\| \leqslant \beta\,.$$

On définit ainsi une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues :

$$J \longrightarrow E \quad \text{telles que} \quad (\forall n) \quad (\text{graphe de } \varphi_n) \times \{\lambda\} \subset T\,.$$

Soit

$$H = \operatorname*{Max}_{t \in J}\,(\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|)$$

($H \in \mathbb{R}_+$ car $\varphi_1 - \varphi_0$ est continue sur le compact J). Supposons prouvé, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathscr{I}_n) \qquad (\forall t \in J) \quad \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant HC^n \frac{|t - \xi|^n}{n!}\,.$$

Fixons $t \in J$; on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+2}(t) - \varphi_{n+1}(t)\| &= \left\|\int_{\xi}^{t} (f(\tau, \varphi_{n+1}(\tau), \lambda) - f(\tau, \varphi_n(\tau), \lambda))\,\mathrm{d}\tau\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_{\xi}^{t} \|f(\tau, \varphi_{n+1}(\tau), \lambda) - f(\tau, \varphi_n(\tau), \lambda)\|\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant \left|\int_{\xi}^{t} C\,\|\varphi_{n+1}(\tau) - \varphi_n(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right| \\
&\leqslant C\left|\int_{\xi}^{t} HC^n \frac{|\tau - \xi|^n}{n!}\,\mathrm{d}\tau\right| = H\,\frac{C^{n+1}}{(n+1)!}\,|t - \xi|^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Comme $(\mathscr{I}_0)$ est vraie, on voit ainsi par récurrence sur n, que $(\mathscr{I}_n)$ *est vraie* $(\forall n \in \mathbb{N})$. En conséquence

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (\forall t \in J) \qquad \|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant H\,\frac{(2\,C\alpha)^n}{n!} = \rho_n\,.$$

Comme la série numérique $\sum \rho_n$ converge, la série de fonctions de t, $\sum (\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t))$ converge normalement, donc uniformément sur J. Donc la suite de fonctions (φ_n) converge uniformément sur J, vers une limite que nous noterons φ. Puisque $(\forall n)$ $\varphi_n(\xi) = \zeta$, et $(\text{graphe de } \varphi_n) \times \{\lambda\} \subset T$, on a : $\varphi(\xi) = \xi$, et $(\text{graphe de } \varphi) \times \{\lambda\} \subset T$. Puisque chaque φ_n est continue, la limite uniforme φ est continue. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in J$, on a :

$$\|f(t, \varphi(t), \lambda) - f(t, \varphi_n(t), \lambda)\| \leqslant C\,\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|$$

d'où l'on déduit que la suite de fonctions $t \mapsto f(t, \varphi_n(t), \lambda)$ converge uniformément sur J vers $t \mapsto f(t, \varphi(t), \lambda)$. Cette convergence uniforme entraîne

$$(\forall t \in J) \quad \int_\xi^t f(\tau, \varphi_n(\tau), \lambda)\, d\tau \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_\xi^t f(\tau, \varphi(\tau), \lambda)\, d\tau .$$

Le passage à la limite dans (4) montre donc

$$(\forall t \in J) \quad \varphi(t) = \zeta + \int_\xi^t f(\tau, \varphi(\tau), \lambda)\, d\tau .$$

La proposition X.1.2 montre donc que φ est *J-solution* de $(\mathscr{E}_\lambda)$ et qu'elle vérifie $\varphi(\xi) = \zeta$. On a prouvé de plus que (graphe de φ) $\times \{\lambda\} \subset T$. L'unicité de $\varphi \in \mathscr{S}_J(\mathscr{E}_\lambda)$ telle que $\varphi(\xi) = \zeta$ résulte alors de la proposition X.2.1.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f sur le compact T, on a un réel $\delta > 0$ tel que $\delta \leqslant \gamma$ et $(\forall (t, X, \lambda) \in T)$

$$(\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|f(t, X, \lambda) - f(t, X, \lambda_0)\| \leqslant \varepsilon) .$$

Donnons-nous $(\xi, \zeta, \lambda) \in T$ tel que $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \delta$, $\|\zeta - \varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0}(\xi)\| \leqslant \varepsilon$, $|\xi - t_0| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $\|\zeta - Y_0\| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$. Posons pour abréger $\psi = \varphi_{\xi, \zeta, \lambda}$, $\psi_0 = \varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0}$, $\zeta_0 = \psi_0(\xi)$. On a : $(\forall t \in J)$

$$\psi(t) = \zeta + \int_\xi^t f(\tau, \psi(t), \lambda)\, d\tau \text{ et } \psi_0(t) = \zeta_0 + \int_\xi^t f(\tau, \psi_0(\tau), \lambda_0)\, d\tau ,$$

d'où :

$$\psi(t) - \psi_0(t) = \zeta - \zeta_0 + \int_\xi^t [f(\tau, \psi(\tau), \lambda) - f(\tau, \psi_0(\tau), \lambda)]\, d\tau +$$
$$+ \int_\xi^t [f(x, \psi_0(\tau), \lambda) - f(\tau, \psi_0(\tau),, \lambda)]\, d\tau ,$$

ce qui entraîne :

$$\|\psi(t) - \psi_0(t)\| \leqslant \|\zeta - \zeta_0\| + \left|\int_\xi^t C\, \|\psi(\tau) - \psi_0(\tau)\|\, d\tau\right| + \left|\int_\xi^t \varepsilon\, d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon\, |t - \xi| + C \left|\int_\xi^t \|\psi(\tau) - \psi_0(\tau)\|\, d\tau\right| ,$$

soit en posant $u(t) = \|\psi(t) - \psi_0(t)\|$:

$$u(t) \leqslant \varepsilon(1 + 2\alpha) + \left|\int_\xi^t C u(\tau)\, d\tau\right| .$$

Le lemme de Gronwall s'applique (avec $b = \varepsilon(1 + 2\alpha)$ et $v = \text{Cte} = C$), d'où

$$(\forall t \in J) \quad u(t) \leqslant (1 + 2\alpha)\, \varepsilon \exp(C\, |t - \xi|) \leqslant (1 + 2\alpha)\, \varepsilon\, e^{2C\alpha} .$$

Cette inégalité prouve clairement la convergence uniforme recherc

Etude des solutions maximales de ($\mathscr{E}$)

THÉORÈME **X.2.1** *(de Cauchy-Lipschitz)*

> *Soit E un K-ev non nul, Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R} \times E$, et $g : \Omega \longrightarrow E$, $(t, X) \mapsto g(t, X)$ une application* **continue sur Ω** *et* **localement lipschitzienne en la variable X** *sur Ω. On considère l'équation différentielle ($\mathscr{E}$) $Y' = g(t, Y)$, où la fonction inconnue Y est à valeurs dans E.*
> *Les solutions maximales de ($\mathscr{E}$) sont définies sur des intervalles* **ouverts ;** *les graphes des solutions maximales forment une* **partition de Ω** *(ces graphes sont les* **courbes intégrales maximales** *de ($\mathscr{E}$)) ; et toute solution de ($\mathscr{E}$) est une restriction d'une, et d'une seule, solution maximale.*

Démonstration :

Remarquons d'abord que les propositions X.2.1 et X.2.2 s'appliquent (il suffit de prendre pour Λ le K-ev nul et de poser $f(t, X, 0_\Lambda) = g(t, X)$ pour $(t, X) \in \Omega$). Fixons $(t_0, Y_0) \in \Omega$. Soit $\mathscr{G}$ l'ensemble des couples (ψ, J), où J est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant t_0, et où ψ est une J-solution de ($\mathscr{E}$) telle que $\psi(t_0) = Y_0$. D'après la proposition X.2.2, $\mathscr{G}$ est non vide. Donc $I = \bigcup_{(\psi, J) \in \mathscr{G}} J$ est un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant t_0. Soit $t \in I$ et (ψ_1, J_1), (ψ_2, J_2) éléments de $\mathscr{G}$ tels que $t \in J_1 \cap J_2$. D'après la proposition X.2.1, $\psi_1|_{J_1 \cap J_2} = \psi_2|_{J_1 \cap J_2}$, d'où $\psi_1(t) = \psi_2(t)$. Donc la valeur $\psi(t)$ pour $(\psi, J) \in \mathscr{G}$ et $t \in J$ *ne dépend que de t* : notons-la $\varphi(t)$; on définit ainsi $\varphi : I \longrightarrow E$. Le graphe de φ est union de ceux des ψ pour $(\psi, J) \in \mathscr{G}$, tous contenus dans Ω, donc (graphe de φ) $\subset \Omega$. La continuité de chaque ψ (pour $(\psi, J) \in \mathscr{G}$) entraîne facilement celle de φ.

Soit $t \in I$, et soit $(\psi, J) \in \mathscr{G}$ tel que $t \in J$. Alors $\varphi|_J = \psi$. D'où

$$\varphi(t) = \psi(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau \qquad \text{(cf. proposition X.1.2)}$$
$$= Y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau .$$

La proposition X.1.2 montre alors que φ est solution de ($\mathscr{E}$) et $(\varphi, I) \in \mathscr{G}$. On a donc établi que toute ψ telle que $(\psi, J) \in \mathscr{G}$ est une restriction de φ. Il reste à prouver que l'intervalle I est *ouvert*. Supposons par exemple que I soit majoré et contienne son extrémité droite c (d'où $c \geqslant t_0$). La proposition X.2.2 entraîne que ($\mathscr{E}$) admet, pour un réel $\alpha > 0$ convenable, une solution $h : [c, c + \alpha] \longrightarrow E$ telle que $h(c) = \varphi(c)$. Soit alors $\Phi : I \cup [c, c + \alpha] \longrightarrow E$ telle que $\Phi|_I = \varphi$ et $\Phi|_{[c, c+\alpha]} = h$: cette fonction est continue et vérifie

$$\Phi(t) = \varphi(c) + \int_c^t f(\tau, \Phi(\tau))\, d\tau \quad \text{pour tout} \quad t \in I \cup [c, c + \alpha],$$

donc $(\Phi, I \cup [c, c + \alpha]) \in \mathscr{G}$, ce qui est absurde vu la définition de I. Donc I est ouvert à droite, et on voit de même que I est ouvert à gauche. ■

En conséquence, pour tout $(t_0, Y_0) \in \Omega$, il existe une *unique solution maximale* $\varphi : I \longrightarrow E$ de ($\mathscr{E}$) telle que $t_0 \in I$ et $\varphi(t_0) = Y_0$. L'intervalle I e

$\varphi : J \longrightarrow E$ est une autre solution de $(\mathscr{E})$ telle que $t_0 \in J$ et $\psi(t_0) = Y_0$, nécessairement $J \subset I$ et $\psi = \varphi|_J$.

Remarque 1 : Supposons que $g(t, X) = A(t) \cdot X + B(t)$ avec A et B *continues sur un intervalle ouvert* non vide I de $\mathbb{R}$ (A à valeurs dans $\mathrm{Hom}_K(E)$ et B à valeurs dans E) et que $\Omega = I \times E$. Alors on retrouve le théorème IX.5.1 sur les équations linéaires, mais en partie seulement, puisqu'on sait en outre que les solutions maximales de l'équation linéaire $Y' = A \cdot Y + B$ sont *toutes définies sur I,* ce qui est loin d'être le cas pour une équation non linéaire : par exemple pour l'équation scalaire $y' = 1 + y^2$, on a : $I = E = \mathbb{R}$, mais la solution nulle en 0 est $t \mapsto \mathrm{tg}\, t$, et le plus grand intervalle où cette solution est définie est $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, strictement inclus dans I.

Remarque 2 : L'hypothèse « g est *localement lipschitzienne* en X » dans le théorème X.2.1 est essentielle. Considérons par exemple l'équation scalaire $y' = 2|y|^{1/2}(1 + |y|)$, où l'inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ici $g : (t, X) \mapsto 2|X|^{1/2}(1 + |X|)$ est *continue* sur $\mathbb{R}^2$ (et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$), mais non lipschitzienne en X en les points $(t, 0)$. Cela suffit à mettre en défaut la plupart des conclusions du théorème X.2.1. Ici il est facile de trouver les solutions maximales de cette équation ; ce sont : 1) la fonction nulle $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; 2) pour $\alpha \in \mathbb{R}$, les fonctions $\varphi_\alpha : \left]-\infty, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto 0$ si $t \leq \alpha$, $t \mapsto \mathrm{tg}^2(t - \alpha)$ si $t \in \left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{2}\right[$ et les fonctions $\psi_\alpha : \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto -\mathrm{tg}^2(t - \alpha)$ si $t \in \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha\right[$, $t \mapsto 0$ si $t \geq \alpha$; 3) pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \leq \beta$, les fonctions $h_{\alpha,\beta} : \left]\alpha - \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto 0$ si $t \in [\alpha, \beta]$, $t \mapsto -\mathrm{tg}^2(t - \alpha)$ si $\alpha - \frac{\pi}{2} < t < \alpha$, $t \mapsto \mathrm{tg}^2(t - \beta)$ si $\beta < t < \beta + \frac{\pi}{2}$. On voit en particulier qu'*il y a une infinité de solutions maximales prenant la valeur* 0 *en* 0, et que leur intervalle de définition est tantôt $\mathbb{R}$, tantôt un intervalle ouvert borné, tantôt un intervalle ouvert non borné et $\neq \mathbb{R}$ (le lecteur est invité à dessiner les différents types de courbes intégrales maximales).

Revenons maintenant à la famille d'équations $(\mathscr{E}_\lambda)$ $Y' = f(t, Y, \lambda)$, avec $f : \Omega \longrightarrow E$ *continue sur* Ω *et localement lipschitzienne en la seconde variable sur* Ω. Pour $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega$ nous désignerons par $\varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0} : t \mapsto \Phi(t_0, Y_0, \lambda_0, t)$ l'unique solution maximale ψ de $(\mathscr{E}_{\lambda_0})$ telle que $\psi(t_0) = Y_0$, et par $I(t_0, Y_0, \lambda_0)$ son intervalle de définition.

PROPOSITION X.2.3

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, soit ψ_0 une solution maximale de $(\mathscr{E}_{\lambda_0})$ (où $\lambda_0 \in S$) et I son intervalle de définition. Donnons-nous un sous-intervalle compact $[a, b]$ de I $(a < b)$. Il existe alors des réels $\delta > 0$, $\sigma > 0$ tels que pour tout $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$ vérifiant $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \sigma$, $\xi \in [a, b]$ et $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leq \delta$, l'intervalle $I(\xi, \zeta, \lambda)$ contienne $[a, b]$. De plus lorsque $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| + \|\lambda - \lambda_0\|$ tend vers zéro (en respectant les conditions $\|\lambda - \lambda_0\| \leq \sigma$, $\xi \in [a, b]$ et $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leq \delta$) la famille des fonctions $(\varphi_{\xi,\zeta,\lambda})$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers

Démonstration :

En utilisant la proposition X.2.2 et la compacité de $[a, b]$, on construit [1] une subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ de $[a, b]$ $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b)$ telle que $(\forall k \in [\![0, N-1]\!])$ les propriétés suivantes soient satisfaites : 1) on a des réels $\delta_k > 0$ et $\sigma_k > 0$ tels que pour tous $\xi \in [a_k, a_{k+1}]$, $\lambda \in \Lambda$ et $\zeta \in E$ vérifiant $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \delta_k$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \sigma_k$, le point (ξ, ζ, λ) est dans Ω et $[a_k, a_{k+1}] \subset I(\xi, \zeta, \lambda)$.

2) Lorsque $\|\psi_0(\xi) - \zeta\| + \|\lambda - \lambda_0\|$ tend vers 0 en respectant les conditions du 1), la famille de fonctions $(\varphi_{\xi, \zeta, \psi})$ converge uniformément sur $[a_k, a_{k+1}]$ vers ψ_0.

On raisonne par récurrence sur N. Pour $N = 1$, il n'y a rien à prouver. Supposons $N \geqslant 2$ et la propriété vraie à l'ordre $N-1$, donc sur $[a_0, a_{N-1}]$. Désignons par δ' et σ' des réels > 0 tels que pour tout $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$ vérifiant $\xi \in [a_0, a_{N-1}]$, $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \delta'$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \sigma'$, l'intervalle $I(\xi, \zeta, \lambda)$ contienne $[a_0, a_{N-1}]$, et que lorsque $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| + \|\lambda - \lambda_0\|$ tend vers zéro sous ces conditions, la famille $(\varphi_{\xi, \zeta, \lambda})$ converge uniformément sur $[a_0, a_{N-1}]$ vers ψ_0.

Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon \leqslant \operatorname{Min}(\delta', \delta_{N-1})$. Soit η_1 tel que $0 < \eta_1 \leqslant \operatorname{Min}(\varepsilon, \sigma_{N-1})$ et que pour $\xi \in [a_{N-1}, a_N]$, $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \eta_1$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \eta_1$, on ait :

$$\sup_{t \in [a_{N-1}, a_N]} (\|\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}(t) - \psi_0(t)\|) \leqslant \varepsilon .$$

Soit η_2 dans $]0, \operatorname{Min}(\delta', \sigma', \eta_1)]$ tel que pour $\xi \in [a_0, a_{N-1}]$, $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \eta_2$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \eta_2$, on ait :

$$\sup_{t \in [a_0, a_{N-1}]} (\|\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}(t) - \psi_0(t)\|) \leqslant \eta_1 .$$

Fixons $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$ avec $\xi \in [a_0, a_{N-1}]$, $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \eta_2$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \eta_2$. Pour abréger, posons $\psi = \varphi_{\xi, \zeta, \lambda}$ et $X = \psi(a_{N-1})$. Alors $\|X - \psi_0(a_{N-1})\| \leqslant \eta_1$, et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \eta_1$, donc $\varphi_{a_{N-1}, X, \lambda}$ est définie sur $[a_{N-1}, a_N]$ et

$$\sup_{t \in [a_{N-1}, a_N]} (\|\psi_0(t) - \varphi_{a_{N-1}, X, \lambda}(t)\|) \leqslant \varepsilon .$$

Puisque ψ et $\varphi_{a_{N-1}, X, \lambda}$ sont deux solutions maximales de $(\mathscr{E}_\lambda)$ prenant la même valeur en a_{N-1}, elles sont égales. Donc $[a, b] = [a_0, a_N] \subset I(\xi, \zeta, \lambda)$ et de plus

$$\sup_{t \in [a, b]} \|\psi(t) - \psi_0(t)\| \leqslant \varepsilon .$$

---

[1] Pour $t \in [a, b]$, soit T_t un tonneau de confinement des $(\mathscr{E}_\lambda)$ au point $(t, \psi_0(t), \lambda_0)$, de caractéristique $(M_t, \alpha_t, \beta_t, \gamma_t)$. Par compacité de $[a, b]$, on a une partie finie $\mathscr{F}$ de $[a, b]$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{t \in \mathscr{F}} \left(\left] t - \frac{\alpha_t}{4}, t + \frac{\alpha_t}{4} \right[\right)$. Posons $\alpha = \operatorname{Min}_{t \in \mathscr{F}} (\alpha_t)$. La subdivision $(a_0, \ldots, a_N)$ telle que $a_k = a + k \frac{b-a}{N}$ pour $0 \leqslant k \leqslant N$, l'entier N étant choisi pour que $\frac{b-a}{N} \leqslant \frac{\alpha}{4}$, convient.

On verrait de même qu'on a $\eta_3 > 0$ tel que *pour* $\xi \in [a_{N-1}, a_N]$, $\|\zeta - \psi_0(\xi)\| \leqslant \eta_3$ et $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \eta_3$, on a $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$, $[a, b] \subset I(\xi, \zeta, \lambda)$ et

$$\sup_{t \in [a, b]} \|\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}(t) - \psi_0(t)\| \leqslant \varepsilon ,$$

ce qui achève assurément de prouver la proposition. ∎

COROLLAIRE 1

Soit $(t_0, Y_0, \lambda_0) \in \Omega$ et $\psi_0 = \varphi_{t_0, Y_0, \lambda_0}$. Fixons les réels a, $b (a < b)$ dans $I(t_0, Y_0, \lambda_0)$. Il existe un voisinage V de (t_0, Y_0, λ_0) dans Ω tel que pour tout $(\xi, \zeta, \lambda) \in V$, la solution $\varphi_{\xi, \zeta, \lambda} = \psi$ soit définie au moins sur $[a, b]$. De plus la famille $(\varphi_{\xi, \zeta, \lambda})_{(\xi, \zeta, \lambda) \in V}$ converge uniformément vers ψ_0 sur $[a, b]$ quand (ξ, ζ, λ) tend vers (t_0, Y_0, λ_0).

(C'est immédiat en appliquant la proposition X.2.3 avec $[a', b'] \subset I(t_0, Y_0, \lambda_0)$ tel que $a' < a$ et $b' > b$, ce qui est possible car $I(t_0, Y_0, \lambda_0)$ est ouvert.)

COROLLAIRE 2

L'ensemble $U = \{(\xi, \zeta, \lambda, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid t \in I(\xi, \zeta, \lambda)\}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times E \times \Lambda \times \mathbb{R}$, et sur cet ouvert, l'application $(\xi, \zeta, \lambda, t) \mapsto \Phi(\xi, \zeta, \lambda, t) = \varphi_{\xi, \zeta, \lambda}(t)$ est continue.

Démonstration :

Fixons $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0, t_0) \in U$, avec par exemple $\xi_0 < t_0$ (raisonnement analogue si $\xi_0 \geqslant t_0$). Choisissons $\xi_0' < \xi_0$ et $t_0' > t_0$ dans $I(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$. Le corollaire 1 montre que pour $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$ assez voisin de $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$, l'intervalle $I(\xi, \zeta, \lambda)$ contient $[\xi_0', t_0']$: il en résulte que U est voisinage de $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0, t_0)$ et donc que U est ouvert.

La continuité de Φ en $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0, t_0)$ résulte ensuite aisément de la proposition X.2.3 appliquée sur $[\xi_0', t_0']$, en tenant compte de la continuité en t_0 de $\varphi_{\xi_0, \zeta_0, \lambda_0}$. Sur U, Φ est donc continue. ∎

Application : Considérons l'équation $(\mathscr{E})$ $Y' = g(t, Y)$, avec les hypothèses du théorème X.2.1. Soit ω la projection de Ω sur $\mathbb{R}$, parallèlement à E. Pour $t \in \omega$ notons Ω_t l'ouvert $\{X \in E \mid (t, X) \in \Omega\}$ de E.

Pour $(\omega, \zeta) \in \Omega$, notons $\varphi_{\xi, \zeta}$ la solution maximale φ de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(\xi) = \zeta$, et soit $I(\xi, \zeta)$ son intervalle de définition. D'après ce qui précède, l'ensemble $U = \{(\xi, \zeta, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid t \in I(\xi, \zeta)\}$ est ouvert dans $\mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}$, et l'application $\Phi : U \longrightarrow E$, $(\xi, \zeta, t) \mapsto \varphi_{\xi, \zeta}(t)$ est continue.

Plaçons-nous alors dans le *cas particulier où tous les intervalles $I(\xi, \zeta)$ sont égaux entre eux* (donc égaux à ω), ce qui n'est pas rare (c'est vérifié par exemple si $(\mathscr{E})$ est une équation linéaire à coefficients continus).

On peut alors définir $\Phi_{t_1, t_2} : \Omega_{t_1} \longrightarrow \Omega_{t_2}$, $\xi \mapsto \Phi_{t_1, t_2}(\zeta) = \varphi_{t_1, \zeta}(t_2)$ pour tout $(t_1, t_2) \in \omega^2$. D'après ce qui précède, chaque Φ_{t_1, t_2} est continue. On a : $(\forall t \in \omega)$ $\Phi_{t, t} = \mathrm{Id}_{\Omega_t}$. De plus si $(t_1, t_2, t_3) \in \omega^3$, il est évident que $\Phi_{t_2, t_3} \circ \Phi_{t_1, t_2} = \Phi_{t_1, t_3}$ car $(\forall \zeta \in \Omega_{t_1})$, $\varphi_{t_1, \xi} = \varphi_{t_2, \varphi_{t_1, \zeta}(t_2)}$. En particulier, $\Phi_{t_2, t_1} \circ \Phi_{t_1, t_2} = \mathrm{Id}_{\Omega_{t_1}}$ et $\Phi_{t_1, t_2} \circ \Phi_{t_2, t_1} = \mathrm{Id}_{\Omega_{t_2}}$, donc Φ_{t_1, t_2} est un **homéomorphisme** de Ω_{t_1} sur Ω_{t_2}.

Comportement d'une solution maximale en une extrémité

Avec les hypothèses du théorème X.2.1, lorsque l'intervalle (ouvert) de définition d'une solution maximale possède une extrémité à distance finie, le comportement de la solution en cette extrémité n'est pas arbitraire :

THÉORÈME X.2.2

Avec les hypothèses du théorème X.2.1, soit φ une solution maximale de l'équation $(\mathscr{E})$ $Y' = g(t, Y)$ et I son intervalle de définition.
Supposons I majoré (resp. minoré) dans $\mathbb{R}$ et soit b sa borne supérieure (resp. a sa borne inférieure). Alors la fonction φ n'admet au point b (resp. a) aucune valeur d'adhérence Z telle que $(b, Z) \in \Omega$.

Démonstration :

Soit $\|\cdot\|$ une norme de E et Z une valeur d'adhérence de φ en b. Si (b, Z) est élément de Ω, on peut construire un tonneau de confinement T de $(\mathscr{E})$ au point (b, Z), de caractéristique (M, α, β). Il existe alors $\xi \in \left[b - \frac{\alpha}{2}, b\right[$ tel que $\zeta = \varphi(\xi)$ vérifie $\|\zeta - Z\| \leqslant \frac{\beta}{2}$. Par application de la proposition X.2.2 (sans paramètre) et du théorème X.2.1, on sait alors que la solution maximale $\varphi_{\xi,\zeta}$ de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi_{\xi,\zeta}(\xi) = \zeta$ est définie au moins sur $[b - \alpha, b + \alpha]$. Mais $\varphi_{\xi,\zeta}(\xi) = \zeta = \varphi(\xi)$, donc les deux solutions maximales φ et $\varphi_{\xi,\zeta}$ sont égales. Donc I contient $[b - \alpha, b + \alpha]$, ce qui est absurde. ■

Application aux équations scalaires

Compte tenu de l'étude menée au § X.1, les résultats relatifs à l'équation vectorielle $(\mathscr{E})$ se traduisent en autant de propriétés pour les équations différentielles scalaires du type :

$$(\mathscr{F}) \quad y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

où $F : \Omega \longrightarrow K$, $(t_1, X_1, \dots, X_n) \mapsto F(t, X_1, \dots, X_n)$ est donnée *continue* sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R} \times K^n$ $(n \geqslant 1)$ et *localement lipschitzienne sur Ω en le paquet de variables* $(X_1, \dots, X_n)$ et où l'inconnue y est à valeurs dans K. Contentons-nous de traduire le théorème X.2.1.

THÉORÈME X.2.3

*Avec les notations et hypothèses ci-dessus, pour tout point $(t_0, \underline{a}) = (t_0, (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})) \in \Omega$, il existe **une et une seule solution maximale** φ de $(\mathscr{F})$ définie en t_0 et telle que $\varphi^{(k)}(t_0) = a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Les solutions ψ de $(\mathscr{F})$ définies en t_0 et telles que $\psi^{(k)}(t_0) = a_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ sont exactement les restrictions de $\varphi_{t_0,\underline{a}}$ à des sous-intervalles contenant t_0 de l'intervalle I de définition de $\varphi_{t_0,\underline{a}}$. En outre l'intervalle I est **ouvert.***

Exercice 1 : Soit E un espace euclidien et $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $(\forall x \in E)$, le polynôme de Taylor $P_{2,\Phi,x}$ soit une forme quadratique *définie positive.* On considère l'équation différentielle $(\mathscr{G})$ $Y'(t) + \overrightarrow{\text{grad}\,\Phi}(Y(t)) = 0$, où l'inconnue Y est

Montrer que toute solution maximale de $(\mathscr{G})$ est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$. Une solution maximale de $(\mathscr{G})$ est-elle nécessairement définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Soit E un K-ev et $f : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$, $(t, X) \mapsto f(t, x)$ *continue*, et localement lipschitzienne en la seconde variable X. On suppose f *bornée*. Montrer que les solutions maximales de l'équation $Y' = f(t, Y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit a réel > 0 et $b \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle scalaire à inconnue y numérique suivante : $y'' + ay' + b \sin y = 0$. Montrer que ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit E un K-ev, muni de la norme $\|.\|$. On donne $f : \mathbb{R}_+ \times E \longrightarrow E$ continue et $\lambda : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue vérifiant les conditions :

1) les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|f(t, 0)\|\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda(t)\, dt$ convergent.

2) $(\forall (X, Y) \in E^2)$, $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$, $\|f(t, Y) - f(t, X)\| \leqslant \lambda(t) \|X - Y\|$.

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})\ X' = f(t, X)$ (X à valeurs dans E).

a) Montrer : $(\forall X_0 \in E)$, $(\mathscr{E})$ admet une et une seule $\mathbb{R}_+$-solution X telle que $X(0) = X_0$. Les autres solutions définies en 0 et y prenant la valeur X_0 sont-elles les restrictions de X ?

b) Soit X une $\mathbb{R}_+$-solution de $(\mathscr{E})$. Alors $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} X(t)$ existe.

c) Soit $G : E \longrightarrow E$, $X_0 \mapsto \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} (f_{X_0}(t))$, où f_{X_0} désigne la $\mathbb{R}_+$-solution de $(\mathscr{E})$ telle que $f_{X_0}(0) = X_0$. Montrer que G est bijective.

Exercice 5 : Soit E un K-ev, muni de la norme $\|.\|$. On munit $\mathrm{Hom}_K(E)$ de la norme $|||.|||$ associée.

a) On donne $a \in \mathbb{R}$ et $A : I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |||A(t)|||\, dt$ converge. Montrer que toute I-solution X de l'équation différentielle linéaire $(\mathscr{E})\ X'(t) = A(t) . X(t)$ (où X est à valeurs dans E) admet une limite quand $t \longrightarrow +\infty$.

Prouver que $f : \mathscr{S}_I(\mathscr{E}) \longrightarrow E$, $f \mapsto \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f(t)$ est un isomorphisme de K-ev. Si f_V est la I-solution de $(\mathscr{E})$ telle que $f_V(a) = V$ $(V \in E)$, soit $\Phi : E \longrightarrow E$, $V \mapsto \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} f_V(t)$. Exprimer $\det(\Phi)$ sous forme d'une intégrale.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 (a < b)$ et $I =]a, b[$. On donne $A : I \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ continue. On suppose A *bornée* sur I. Montrer que toute I-solution de $(\mathscr{E}_1)\ X' = A(t) . X$ (X à valeurs dans E) admet une limite en $a + 0$ et une en $b - 0$.

Exercice 6 : Soit E un K-ev, muni d'une norme $\|.\|$, $\mathrm{Hom}_K(E)$ étant muni de la norme $|||.|||$ associée. On donne $A \in \mathrm{Hom}_K(E)$ et $B : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(E)$ continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |||B(t)|||\, dt$ converge. On considère les équations différentielles $(\mathscr{E})\ Y' = A . Y$ et $(\mathscr{F})\ Y' = (A + B(t)) . Y$, où l'inconnue Y est à valeurs dans E. On suppose que toute $\mathbb{R}_+$-solution de $(\mathscr{E})$ est bornée. Prouver que toute $\mathbb{R}_+$-solution de $(\mathscr{F})$ est bornée.

Exercice 7 : Etudier l'équation différentielle scalaire $y' + |y| = 1$, où la fonction inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8 : (*le théorème de Liapounov*) [1] : E désigne un espace euclidien donné, de dimension $n \geqslant 2$.

---

[1] Alexandre Michailovitch *Liapounov* (1857-1919), mathématicien russe

1^re PARTIE

Soit $L \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$. On considère l'équation différentielle (1) $Y' = L \cdot Y$, où l'inconnue est à valeurs dans E.

a) On suppose que toutes les racines *dans* $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique $\chi_L(X)$ de L ont leur partie réelle strictement négative. Pour $\xi \in E$ donné, on note g_ξ la $\mathbb{R}$-solution de (1) telle que $g_\xi(0) = \xi$. Montrer que pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$(\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \xi \in E) \quad (\|\xi\| \leqslant M) \Rightarrow \|g_\xi(t)\| \leqslant A\,e^{-\alpha t}.$$

En particulier, toute solution de (1) tend vers 0 quand $t \mapsto +\infty$.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \|g_\xi(t)\|^2\,dt$ est convergente. Montrer que la fonction $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi \mapsto q(\xi) = \int_0^{+\infty} \|g_\xi(t)\|^2\,dt$ est une forme quadratique définie positive sur E.

c) Soit Ω un ouvert non vide de E, et $f : \Omega \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$. On lui associe l'équation différentielle (2) $Y' = f(Y)$ (Y à valeurs dans E). Pour $\xi \in \Omega$, on note φ_ξ la *solution maximale* de (2) telle que $\varphi_\xi(0) = \xi$. L'intervalle de définition de cette fonction sera noté I_ξ.

*c*1) On donne $\xi \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $t' \subseteq \mathbb{R}_+$ tels que $t + t' \in I_\xi$. Montrer qu'on peut définir $\varphi_{\varphi_\xi(t')}(t)$ et que c'est égal à $\varphi_\xi(t + t')$.

*c*2) Soit $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $x \in \Omega$, on note d_xF la différentielle de F en x et on pose : $\mathscr{L}_{F,f}(x) = d_xF \cdot f(x)$. Montrer : $\mathscr{L}_{F,f}(x) = \dfrac{d}{dt}(F(\varphi_x(t)))_{t=0}$.

Soit $\lambda : I_\xi \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \lambda(t) = F(\varphi_x(t))$. Montrer que λ est dérivable et que $(\forall t \in I_\xi)$ $\lambda'(t) = \mathscr{L}_{F,f}(\varphi_x(t))$.

*d*1) Soit Q une forme quadratique sur E. Pour $x \in E$, préciser d_xQ.

*d*2) Avec les notations et hypothèses du *b*), démontrer que, pour $\xi \in E$, $\mathscr{L}_{q,L}(\xi) = -\|\xi\|^2$. *Indication :* calculer $q(g_\xi(t))$ en utilisant *c*1). En déduire l'existence de $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathscr{L}_{q,L}(\xi) \leqslant -\beta q(\xi)$ pour tout $\xi \in E$.

e) Soit Ω un ouvert de E contenant 0_E et soit $f : \Omega \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0_E) = 0_E$. Soit $H = d_{0_E}f$; si $x \in \Omega$, on pose $R(x) = f(x) - H \cdot x$. Vérifier que $R(x) \in O(\|x\|^2)$.

Dans toute la suite de la 1^re partie, on suppose que les parties réelles des racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme caractéristique $\chi_H(X)$ sont < 0. On note S la forme quadratique définie à partir de H comme q à partir de L. Enfin on fixe $r > 0$ tel que la boule fermée $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant r\}$ soit incluse dans Ω.

*e*1) Montrer, si $x \in \Omega$: $d_xS \in O(\|x\|)$. En déduire $\mathscr{L}_{S,f}(x) \underset{x \to 0_E}{\sim} \mathscr{L}_{S,H}(x)$. En déduire l'existence de $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $\gamma \leqslant r$ et que $(\forall x \in E)$ $(\|x\| \leqslant \gamma) \Rightarrow \mathscr{L}_{S,f}(x) \leqslant -2\,\delta S(x)$; ci-dessous γ et δ sont ainsi choisis.

*e*2) Montrer qu'on peut choisir $\gamma' > 0$ et $\gamma_1 > 0$ tels que $(\forall E \in E)$ on ait : $S(x) < \gamma_1 \Rightarrow \|x\| < \gamma$ et $\|x\| \leqslant \gamma' \Rightarrow S(x) < \gamma_1$. Dans ce qui suit on choisit γ' et γ_1 ainsi :.

*e*3) Soit $\xi \in E$ tel que $\|\xi\| < \gamma'$. On reprend les notations du *c*) et on pose en outre : $\theta(t) = S(\varphi_\xi(t))$.

A) On veut prouver par l'absurde que $\mathbb{R}_+ \subset I_\xi$. Sinon, soit $c = \sup(I_\xi)$. Prouver qu'alors l'ensemble $\mathscr{E}$ des $t \in \mathbb{R}_+ \cap I_\xi$ tels que $\theta(t) > \gamma_1$ serait non vide (dans le cas contraire, φ_ξ serait prolongeable en *c*). Soit alors t' le plus petit $u \in \mathbb{R}_+ \cap I_\xi$ tel que $\theta(u) = \gamma_1$. En utilisant *e*1) prouver que pour $t \in [0, t']$ on a : $\theta'(t) \leqslant 0$ et aboutir à une contradiction.

B) Prouver que $\theta'(t) \leqslant -2\,\delta\,\theta(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. En déduire l'existence de $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\theta(t) \leqslant K\,e^{-2\delta t}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Plus précisément, montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\xi \in E$ vérifiant $\|\xi\| < \gamma'$, on ait $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $\|\varphi_\xi(t)\| \leqslant C\,e^{-\delta t}$.

2e PARTIE

Soit Ω un ouvert non vide de E et $f : \Omega \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^2$. Tout $a \in E$ tel que $f(a) = 0_E$ sera appelé *position d'équilibre* de l'équation différentielle $Y' = f(Y)$ (où Y est à valeurs dans E). L'équilibre est dit *stable* ssi il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait à la fois : 1) la boule $\tilde{\mathbf{B}}(a, \eta)$ est incluse dans Ω. 2) Pour tout $\xi \in \mathbf{B}(a, \eta)$, la solution maximale φ_ξ de $Y' = f(Y)$ telle que $\varphi_\xi(0) = \xi$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. 3) Pour tout $\xi \in \mathbf{B}(a, \eta)$, on a : $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \| \varphi_\xi(t) - a \| = 0$.

Faire une synthèse des résultats de la 1re partie en énonçant de façon précise une condition suffisante pour qu'un équilibre soit stable.

Exercice 9 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $f : E \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^1$. On munit E d'une norme $\| . \|$, et on suppose que $f(X) \underset{\|X\| \longrightarrow +\infty}{\in} O(\|X\|)$. On considère l'équation $(\mathscr{E})$ $Y' = f(Y)$, où Y est à valeurs dans E.

a) Soit $X_0 \in E$ et b réel > 0. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on pose : $\mu = 1 + \underset{\|X - X_0\| \leqslant b}{\operatorname{Max}} \|f(X)\|$.

Montrer que $(\mathscr{E})$ admet une solution X telle que $X(x_0) = X_0$ et définie sur $\left[x_0 - \dfrac{b}{\mu}, x_0 + \dfrac{b}{\mu}\right]$.

b) Prouver que les solutions maximales de $(\mathscr{E})$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

§ X.3 *TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES USUELLES* (1)

Dans ce § nous étudierons quelques types d'**équations différentielles scalaires d'ordre 1** pour lesquelles on arrive, au moyen de **quadratures** portant sur des fonctions connues, à trouver une famille plus ou moins large de solutions. Ce n'est que dans les cas les plus simples que les solutions ainsi trouvées permettent, grâce aux théorèmes fondamentaux du § X.2, la détermination de *toutes* les solutions. Ci-dessous la variable réelle sera notée x, et la fonction inconnue y sera recherchée *à valeurs réelles* (sauf pour les équations de Bernoulli et de Riccati).

Commençons par généraliser la méthode du *changement de variable*.

Transformation par difféomorphisme

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, à laquelle nous associons l'équation scalaire $(\mathscr{F})$ $F(x, y, y') = 0$. Considérons un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme $\Theta : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenu dans la projection ω de Ω sur $\mathbb{R}^2$ obtenue en abandonnant la troisième coordonnée : $\Theta : (u, v) \mapsto (x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v))$. Soit I un intervalle non trivial de

---

(1) Nous n'abordons pas dans ce cours la recherche de *solutions approchées* d'une équation différentielle d'ordre 1 scalaire (méthodes d'Euler et de Runge-Kutta), qui relève de l'analyse numérique et trouve sa place en informatique.

$\mathbb{R}$ et une fonction $I \longrightarrow U$, $t \mapsto (u(t), v(t))$ de classe $\mathscr{C}^1$ qui définit la courbe paramétrée $\mathscr{C} : t \mapsto (X = \varphi(u(t), v(t)),\ Y = \psi(u(t), v(t))$.

Pour que $\mathscr{C}$ soit le graphe d'une solution de $(\mathscr{F})$, il faut et il suffit que X' ne s'annule jamais sur I et que $(\forall t \in I)$ $\left(X(t), Y(t), \dfrac{Y'(t)}{X'(t)}\right) \in \Omega$ et vérifie $F\left(X(t), Y(t), \dfrac{Y'(t)}{X'(t)}\right) = 0$. Cela revient à dire que $t \mapsto (u(t), v(t))$ vérifie

$$F\left(\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{u'\dfrac{\partial \psi}{\partial u} + v'\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{u'\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + v'\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}\right) = 0\,.$$

Donc *toute courbe intégrale de l'équation différentielle*

$$(1) \qquad F\left(\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial u} + \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}\right) = 0\,,$$

à l'inconnue v, (sur laquelle $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{du}$ reste $\neq 0$) *est transformée par Θ en le graphe d'une solution de* $(\mathscr{F})$.

L'équation (1) s'appelle **transformée de $(\mathscr{F})$ par le difféomorphisme Θ.** Un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme souvent employé est celui qui définit les *coordonnées polaires :* $\Theta(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, en se plaçant sur un ouvert U où r reste $\neq 0$ et où Θ est injective.

Exemple 1 : Soit l'équation $(\mathscr{F})$ $(x + yy')^2 y^2 - (x^2 + y^2)(xy' - y)^2 = 0$ dont l'écriture même incite à *passer en coordonnées polaires.* Sa transformée est $r^4\left[\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 \sin^2\theta - r^2\right] = 0$ (avec la condition $\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \neq 0$). En intégrant chaque équation $\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta = \varepsilon r$ $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$ on trouve les solutions $\theta \mapsto C\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}$ $(C \in \mathbb{R})$ sur les intervalles $](2k-1)\pi, (2k\pi)\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\theta \mapsto C\,\mathrm{cotg}\,\dfrac{\theta}{2}$ $(C \in \mathbb{R})$ sur les intervalles $]2k\pi, (2k+2)\pi[$ $(k \in \mathbb{Z})$. En transformant les graphes de ces solutions non nulles par $(r, \theta) \mapsto (x, y)$, on trouve des arcs tous tracés sur l'une des courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $P_\lambda(x, y) = 0$, $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$, avec, après une élimination facile :

$$P_\lambda(x, y) = y^2(x^2 + y^2)^2 - 2\lambda^2(x^2 + y^2)(2x^2 + y^2) + \lambda^4 y^2\,.$$

Finalement *toutes les fonctions $y(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ définies im*

$P_\lambda(x, y(x)) = 0$ *sont solutions de l'équation proposée au départ.* De plus *la fonction nulle est aussi solution.*

Equations du type différentielle exacte

Il s'agit par définition d'une équation scalaire pouvant s'écrire

$$(2) \qquad \boxed{\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \times y' = 0}$$

où la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Il est alors facile d'obtenir *des solutions* de (2). Soit en effet $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ une fonction $x \mapsto y = \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ définie implicitement par la relation $H(x, y) = \lambda$. Alors la règle de la chaîne appliquée à la relation $(\forall x)\ H(x, \varphi(x)) - \lambda = 0$ donne $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\dfrac{\partial H}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0$, ce qui prouve que φ *est solution de* (2).

Un cas particulièrement simple est celui d'une équation de la forme

$$(3) \qquad \boxed{A(x) + B(y)\, y' = 0}\ ,$$

où A et B sont des fonctions *continues* respectivement sur des intervalles ouverts non vides I et J. Une telle équation est appelée une **équation à variables séparées.** Elle est bien de la forme (2), avec $H(x, y) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} A(u)\,\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} B(v)\,\mathrm{d}v$, où $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$. On en déduit que *toute fonction* $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$, *définie implicitement par une relation de la forme* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} A(u)\,\mathrm{d}u + \int_{y_0}^{y} B(v)\,\mathrm{d}v = \lambda$, et de *classe* $\mathscr{C}^1$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, *est solution de* (3).

Exemple 2 : Soit à étudier l'équation à variables séparées

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Solution : Elle est de la forme (3), avec $A(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = -B(t)$, fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$. Donc $(\forall \lambda \in\ ]-1, 1[)$, toute fonction $x \mapsto y = \varphi(x)$ définie implicitement par $\displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = -C + \int_\lambda^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}}$, $C \in \mathbb{R}$ est solution de (4). On notera Ω l'ouvert $]-1, 1[^2$ c

Etudions donc (4) *sur l'ouvert Ω.*

a) *Obtention de solutions maximales particulières de* (4).

Pour $C \in \mathbb{R}$, soit $g_C :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\operatorname{Arc}\sin x - C) = x\cos C - \sqrt{1-x^2}\sin C$. Le graphe G_C de g_C est un arc de la courbe (E_C) d'équation $F(x, y, C) = 0$, avec $F(x, y, C) = x^2 - 2xy\cos C + y^2 - \sin^2 C$.

Soit D_1, D_2, D_3, D_4 les droites d'équations respectives : $x = -1$; $x = +1$; $y = -1$; $y = +1$. Notons que $(E_C) = (E_{C'})$ ssi $C \pm C' \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Pour $\sin C \neq 0$, (E_C) est une ellipse, tangente en $U_C = (-1, -\cos C)$ à D_1 ; en $V_C = (1, \cos C)$ à D_2 ; en $P_C = (-\cos C, -1)$ à D_3 ; et en $Q_C = (\cos C, 1)$ à D_4. Alors G_C est la demi-ellipse ouverte de (E_C) limitée par U_C et V_C et qui passe par Q_C si $\sin C < 0$, par P_C si $\sin C > 0$.

Pour $\sin C = 0$, (E_C) est l'union des intersections avec Ω de la 1ère et de la 2ème bissectrice : si $\cos C = 1$, G_C est l'intersection Δ_0 de Ω et de la 1ère bissectrice, et si $\cos C = -1$, c'est l'intersection Δ_0' de Ω et de la 2ème bissectrice (voir fig. 1).

Soit J_C l'intervalle $]-1, \cos C[$ si $\sin C < 0$; $]-\cos C, 1[$ si $\sin C > 0$; et $]-1, 1[$ si $\sin C = 0$ et $\cos C = 1$. (On ne définit pas J_C si $\cos C = -1$). On vérifie que $f_C = g_C|_{J_C}$ est solution de (4). C'est une *solution maximale,* car le graphe de tout prolongement strict continu de f_C doit nécessairement contenir l'un des points U_C, V_C, P_C, Q_C si $\sin C \neq 0$, et $(1, 1)$ ou $(-1, -1)$ si $\sin C = 0$ et $\cos C = 1$, ce qui le fait sortir du domaine Ω. Donc *les fonctions* $(f_C)_{\cos C \neq -1}$ *sont des solutions maximales de* (4).

b) *Intégration rigoureuse de* (4).

Nous allons montrer que $C \mapsto f_C$ est une bijection de $I =]-\pi, \pi]$ sur l'ensemble des solutions maximales de (4). Il est clair que $C \mapsto f_C$ est injective sur I.

L'équation (4) s'écrit sur Ω : $y' = g(x, y)$, avec $g(u, v) = \sqrt{\dfrac{1-v^2}{1-u^2}}$; puisque g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre que *les graphes des solutions maximales de* (4) *sur Ω forment une partition de Ω.* Soit alors $(x_0, y_0) \in \Omega$; posons $C = \operatorname{Arc}\sin x_0 - \operatorname{Arc}\sin y_0$; on a : $C \in I$, et $x_0 \in J_C$; donc f_C est définie en x_0, et on vérifie que $f_C(x_0) = y_0$. Donc l'union des graphes des f_C est Ω ; d'après ce qui précède, cela achève de prouver que $C \mapsto f_C$, *définit une bijection de I sur l'ensemble des solutions maximales de* (4) *sur Ω.*

c) *Expression algébrique des* $(f_C)_{C \in I}$.

Soit T l'ensemble $(\{-1, 1\} \times [-1, 1]) \setminus \{(-1, 0), (-1, -1), (-1, 1)\}$. Pour $\rho = (\varepsilon, \lambda) \in T$, soit $I_\rho =]-\varepsilon\sqrt{1-\lambda^2}, 1[$ si $\lambda > 0$; $I_\rho =]-1, \varepsilon\sqrt{1-\lambda^2}[$ si $\lambda < 0$; $I_\rho =]-1, 1[$ si $\rho = (1, 0)$.

Soit $\varphi_\rho : I_\rho \longrightarrow]-1, 1[$, $x \mapsto \varepsilon x\sqrt{1-\lambda^2} - \lambda\sqrt{1-x^2}$.

Le lecteur déduira de *a*) et *b*) que $\rho \mapsto \varphi_\rho$ définit une bijection de T sur l'ensemble des solutions maximales de (4) sur Ω.

De plus, pour $(x_0, y_0) \in \Omega$, l'unique $\rho = (\varepsilon, \lambda) \in T$ tel que $\varphi_\rho(x_0) = y_0$ est donné par : $\lambda = x_0\sqrt{1-y_0^2} - y_0\sqrt{1-x_0^2}$, et $\varepsilon = \pm 1$ si $x_0 y_0 \geqslant 0$ ou $x_0^2 + y_0^2 \leqslant 1$, $\varepsilon = -1$ si $x_0 y_0 < 0$ et $x_0^2 + y_0^2 > 1$.

(Remarquons que $U = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$ vérifie :

$$\mathrm{d}U = \left[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right]\left[\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\right]).$$

Equation de Bernoulli

Il s'agit d'une équation différentielle de la forme

$$\text{(5)} \qquad \boxed{A(x)\,y' + B(x)\,y + C(x)\,y^{\lambda} = 0}\,,$$

où A, B, C sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues sur un intervalle non trivial I, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \neq 1$.

Si $\lambda \in \mathbb{Z}_-^*$, on cherche des solutions à valeurs dans K^* ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, à valeurs dans K ; si $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Obtention de solutions de (5)

Il suffit de prendre $z = y^{1-\lambda}$ comme nouvelle fonction inconnue, d'où $z' = (1-\lambda)\,y'\,y^{-\lambda}$, pour ramener l'équation (5), après division par y^{λ}, à une équation linéaire scalaire du 1er ordre :

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{1-\lambda}A(x)\,z' + B(x)\,z + C(x) = 0\,.$$

Cette équation (6) est appelée *résolvante linéaire de* (5), car toute solution g jamais nulle de (6) fournit la solution $f = g^{(1/1-\lambda)}$ de (5). On se souvient que l'intégration de (6) se ramène à des quadratures, celle de (5) aussi.

Exemple 3 : *Intégrer l'équation, où l'inconnue y est à valeurs réelles :*

$$\text{(7)} \qquad y' + y + xy^2 = 0\,.$$

Solution : Posant $z = \dfrac{1}{y}$, on est ramené à $z' - z = x$, qui admet les solutions maximales $\varphi_{\lambda} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda\ \mathrm{e}^x - 1 - x$.

Achevons maintenant l'*étude rigoureuse de* (7) à laquelle on peut appliquer le théorème X.2.1 ($y' = g(x,y)$, avec g de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2$). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, les variations de $\psi_{\lambda} = \dfrac{1}{\varphi_{\lambda}}$ sur son ensemble de définition sont consignées dans les tableaux suivants :

$\lambda \leqslant 0$

x	$-\infty$	$\alpha_{\lambda} \leqslant -1$	$+\infty$
ψ_{λ}	$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow 0$

$\lambda = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
ψ_{λ}	$0 \nearrow +\infty$	$\Vert$	-

$0 < \lambda < 1$

x	$-\infty$		α_λ		$-\operatorname{Log}\lambda$		β_λ		$+\infty$
ψ_λ	0	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\operatorname{Log}\lambda}$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	0

$\lambda > 1$

x	$-\infty$		$-\operatorname{Log}\lambda$		$+\infty$
ψ_λ	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\operatorname{Log}\lambda}$	$\searrow$	0

On en déduit les solutions maximales suivantes de (7) : si $\lambda \leqslant 0$: $f_\lambda = \psi_\lambda|_{]-\infty,\alpha_\lambda[}$ et $g_\lambda = \psi_\lambda|_{]\alpha_\lambda,+\infty[}$; si $0 < \lambda < 1$, $f_\lambda = \psi_\lambda|_{]-\infty,\alpha_\lambda[}$, $g_\lambda = \psi_\lambda|_{]\alpha_\lambda,\beta_\lambda[}$ et $h_\lambda = \psi_\lambda|_{]\beta_\lambda,+\infty[}$; si $\lambda = 1$, $f_1 = \psi_1|_{\mathbb{R}^*}$ et $h_1 = \psi_1|_{\mathbb{R}_+^*}$; enfin si $\lambda > 1$, $f_\lambda = \psi_\lambda$.
En outre la solution nulle $\mathcal{N}$ est évidemment solution maximale de (7). Montrons qu'*on a ainsi toutes les solutions maximales de* (7). Pour cela il suffit de voir que par tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe le graphe d'une des fonctions ci-dessus. C'est évident si $y_0 = 0$. Si $y_0 \neq 0$, l'équation en λ : $\dfrac{1}{y_0} = \lambda\, e^{x_0} - 1 - x_0$ admet une unique solution λ_0 pour laquelle $\varphi_{\lambda_0}(x_0) = \dfrac{1}{y_0} \neq 0$, d'où $\psi_{\lambda_0}(x_0) = y_0$, d'où l'assertion (cf. fig. 1).

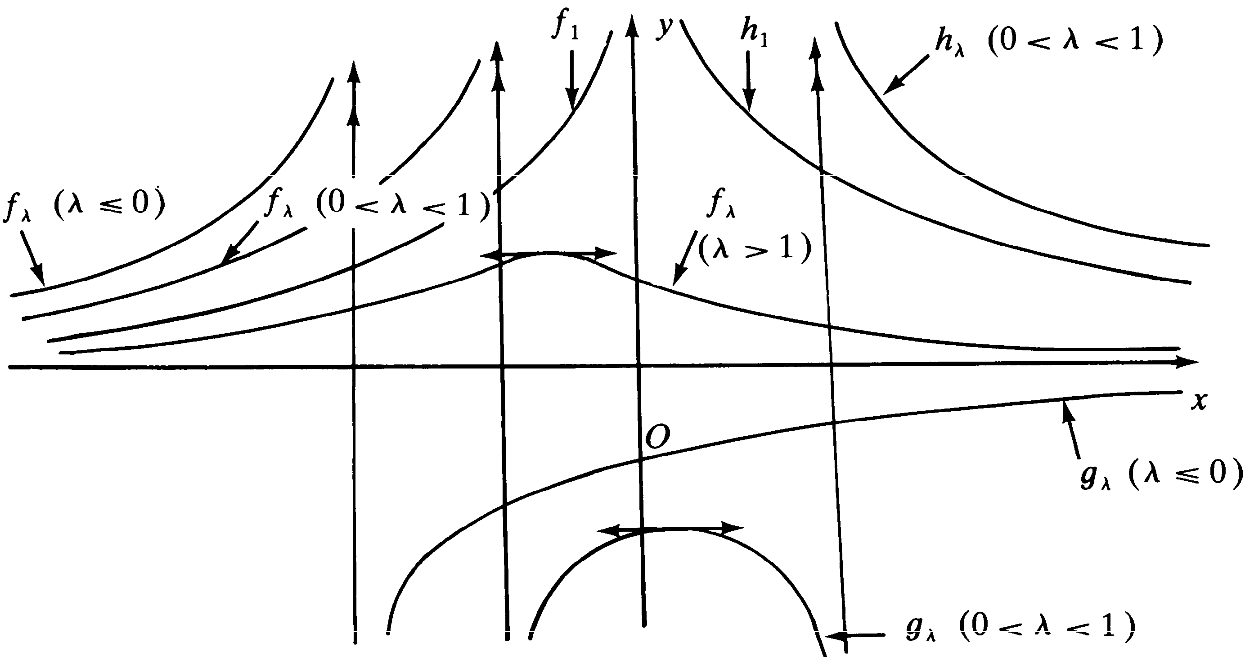


Fig. 1.

Equation de Riccati [1]

C'est par définition une équation différentielle scalaire du type :

$$\text{(8)} \qquad \boxed{a(x)\,y' + b(x)\,y + c(x)\,y^2 + d(x) = 0}\,,$$

où a, b, c, d sont données *continues :* $I \longrightarrow K$, I étant un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Obtention de solutions de (8)

a) Si on connaît une solution particulière $\varphi_0 : J \longrightarrow K$, le changement de fonction inconnue défini par $y = \varphi_0 + z$ ramène, sur J, l'équation (8) à une équation de Bernoulli à l'inconnue z qu'il suffit de linéariser.

b) Lorsque a, b, c, d sont de classe $\mathscr{C}^1$, et que la recherche empirique d'une solution particulière de (8) échoue, on peut procéder ainsi : on se place sur un intervalle où $a(x)\,c(x)$ reste $\neq 0$, et on opère le changement de fonction inconnue $y \rightsquigarrow v = \exp\left(\int \frac{c}{a}\, y \,\mathrm{d}x\right)$, ce qui conduit à l'équation en v :

$$\frac{a^2}{c}\, v'' + \left[\frac{ab}{c} + a\left(\frac{a}{c}\right)'\right] v' + \mathrm{d}v = 0\,,$$

équation qui est *linéaire et homogène* du second ordre en v, forme qui se prête à la recherche de solutions DSE_0 : si on en trouve une, on revient à y par $y = \frac{a}{c}\frac{z'}{z}$, d'où une solution de (8).

Remarque 1 : Réciproquement, soit une équation scalaire du type $Ay'' + By' + Cy = 0$ à coefficients continus. Les solutions y de cette équation qui ne s'annulent jamais peuvent être recherchées en posant $v = y'/y$, ce qui ramène à l'équation $Av' + Bv + Av^2 + C = 0$, qui est *de Riccati.*

Equations lacunaires du premier ordre

On désigne sous ce nom toute équation différentielle scalaire d'ordre 1 qui est de l'un des types (9) ou (10) ci-dessous :

$$\text{(9)} \qquad \boxed{f(y, y') = 0}$$

$$\text{(10)} \qquad \boxed{g(x, y') = 0}\,,$$

---

[1] Comte Jacopo Francesco *Riccati* (1676-1754), mathématicien italien.

où f (resp. g) est à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$; (9) est dite *lacunaire en x,* et (10) *lacunaire en y.*

Si φ est solution de (9) (resp. (10)), $\forall C \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \varphi(x + C)$ (resp. $x \mapsto \varphi(x) + C$) est solution de (9) (resp. (10)). C'est *l'invariance de l'ensemble des graphes des solutions par les translations de vecteur parallèle à Ox (resp. Oy) qui caractérise ce type d'équation.*

Obtention de solutions de (9)

On recherche d'abord les solutions constantes. Puis si $t \mapsto (X = \varphi(t), Y = \psi(t))$ est une représentation paramétrique d'un arc G de la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(X, Y) = 0$ sur lequel $\psi(t)\ \varphi'(t)$ reste $\neq 0$, *on cherche les courbes intégrales* $t \mapsto (x(t), y(t))$ *de* (9) *telles que* $y(t) = \varphi(t)$. Si une telle courbe existe, nécessairement

$$(\forall t) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \psi(t) = \frac{\varphi'(t)}{x'(t)},$$

ce qui, pour un $C \in \mathbb{R}$ convenable, donne :

$$x(t) = C + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}\,\mathrm{d}\tau .$$

Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et I_C l'image de

$$F_C : t \mapsto C + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(\tau)}{\psi(\tau)}\,\mathrm{d}\tau .$$

Alors la représentation paramétrique $x(t) = F_C(t)$, $y(t) = \varphi(t)$ a pour image le graphe d'une I_C-solution de (9), celle donnée par $x \mapsto (\varphi \circ F_C^{\langle -1 \rangle})(x)$. On procède *de même pour l'équation* (10), en paramétrant la courbe $g(X, Y) = 0$.

Exemple 4 : *Etudier l'équation scalaire, où y prend ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$(11) \qquad y'^3 - 3\,xy' + x^3 = 0 .$$

Solution : L'équation étant lacunaire en y, on paramètre la courbe (Γ) d'équation $X^3 - 3\,XY + Y^3 = 0$ en posant $t = Y/X$, d'où la représentation *(bijective) :* $\mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(X(t) = \dfrac{3\,t}{1 + t^3},\ Y(t) = \dfrac{3\,t^2}{1 + t^3}\right)$.

En posant

$$\boxed{x(t) = \frac{3\,t}{1 + t^3}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - 2\,t^3}{(1 + t^2)^2},$$

on est conduit à calculer

$$dy = Y(t)\,dx = \frac{3\,t^2(1-2\,t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt\ ,\ \text{d'où}\ \boxed{y(t) = C + \frac{1/2 + 2\,t^3}{(1+t^3)^2}}\quad (C \in \mathbb{R}),$$

ce qui donne des courbes intégrales, t variant dans $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$. Pour aller plus loin, considérons le polynôme $P_x(Z) = Z^3 - 3\,xZ + x^3 \in \mathbb{R}[Z]$. Son discriminant est $\Delta(x) = 27\,x^3(x^3-4)$, dont les zéros sont 0 et $2^{2/3}$. L'équation $P_x(Z) = 0$ définit exactement trois fonctions algébriques réelles maximales de classe $\mathscr{C}^1$ de la variable x dont les intervalles de définition sont respectivement $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ pour z_1, $J_2 =]-\infty, 2^{2/3}[$ pour z_2 et $]0, 2^{2/3}[$ pour z_3. Ce sont les intervalles maximaux où la fonction $t \mapsto x(t) = \dfrac{3\,t}{1+t^3}$ admet une réciproque de classe $\mathscr{C}^1$ (cf. fig. 2) que nous noterons respectivement ζ_1, ζ_2, ζ_3. Alors que le calcul direct des primitives de z_k $(k \in \{1, 2, 3\})$ serait voué à l'échec, on les obtient finalement sous forme paramétrée avec

$$x = \frac{3\,t}{1+t^3} \qquad y = C + \frac{\frac{1}{2} + 2\,t^3}{(1+t^3)^2}\,.$$

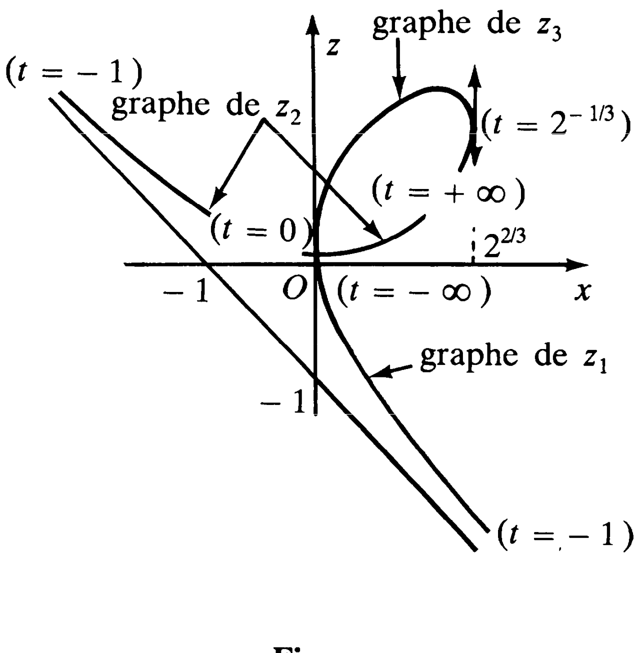


Fig.

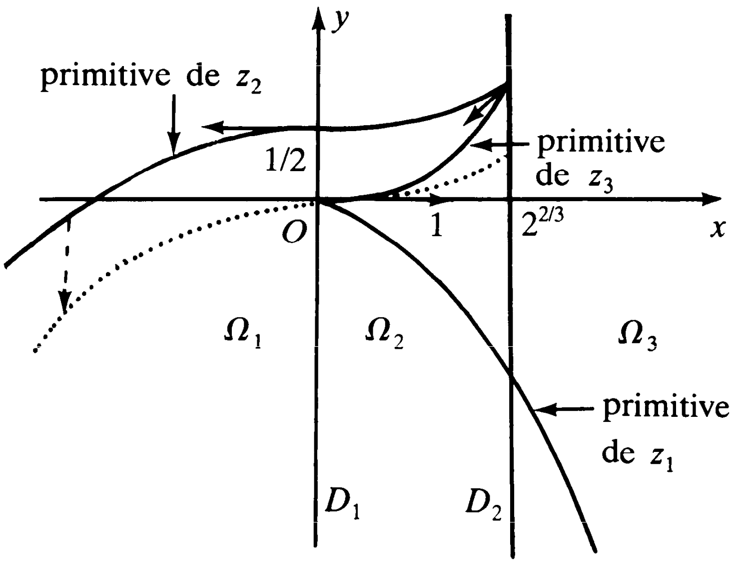


Fig. 3.

On peut présenter l'équation (11) sous un autre aspect : soit D_1 (resp. D_2) la droite d'équation $x = 0$ (resp. $x = 2^{2/3}$). On peut considérer les trois ouverts de $\mathbb{R}^2$: Ω_1 $(x < 0)$, la bande Ω_2 $(0 < x < 2^{2/3})$ et Ω_3 $(x > 2^{2/3})$. La résolution complète de (11) *dans* Ω_1 (resp. Ω_3) est facile car le polynôme $P_x(Z)$ y admet une seule racine réelle et (11) équivaut donc à (resp. $y' = z_1|_{]2^{2/3}, +\infty[}$), ce qui donne toutes les solutions maximales (translatées parallèlement à Oy de l'une d'elles).

Dans l'ouvert Ω_2 (11) se décompose en $(y' - z_1(x))\ (y' - z_2(x))\ (y' - z_3(x)) = 0$ et par chaque point de Ω_2 il passe 3 courbes intégrales maximales (cf. App. 2, Th. 2) : ce sont celles données par le calcul précédent et on les a toutes.

Etudions (11) *sur* $\mathbb{R}^2$: Le raccordement en un point de D_1 peut s'effectuer de 3 façons distinctes (cf. fig. 3). Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; si $x_0 \leq 2^{2/3}$, il passe par (x_0, y_0) les graphes de 3 solutions maximales de (11), une définie sur $\mathbb{R}$, les deux autres sur $]-\infty, 2^{2/3}]$. (Observer qu'ici on a des solutions maximales définies sur un intervalle non ouvert.) Si $x_0 > 2^{2/3}$, il passe par (x_0, y_0) le graphe d'une seule solution maximale, qui est définie sur $\mathbb{R}$, et dont le graphe est d'allure parabolique.

Equations scalaires du 1er ordre homogènes en (x, y)

On appelle ainsi toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme :

$$(12) \qquad \boxed{F\left(\frac{y}{x}, y'\right) = 0},$$

où F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

De façon précise, soit $f(x, y, y') = 0$ une équation scalaire du 1er ordre, f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ tel que $(\forall (u, v, w) \in \Omega)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{R}^*)$ $(\lambda u, \lambda v, w) \in \Omega$. Cette équation est dite *homogène en* (x, y) ssi

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}^*)\ (\forall (u, v, w) \in \Omega) \qquad f(u, v, w) = 0 \Rightarrow f(\lambda u, \lambda v, w) = 0 .$$

Alors (en divisant par x) on voit bien que l'étude de cette équation sur $\Omega \cap (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2)$ équivaut à celle de $f\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = 0$, de la forme (12).

Si φ est une solution de (12) sur un intervalle I de $\mathbb{R}^*$, alors $(\forall \lambda \in \mathbb{R}^*)$, la fonction $\psi_\lambda : \frac{1}{\lambda} I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\lambda} \varphi(\lambda x)$ vérifie $\frac{\psi_\lambda(x)}{x} = \frac{\varphi(\lambda x)}{\lambda x}$, $(\psi_\lambda)'(x) = \varphi'(\lambda x)$, donc est encore solution de (12). Donc *l'ensemble des graphes des solutions de* (12) *reste invariant dans toute homothétie de centre* 0 *dans* $\mathbb{R}^2$.

Obtention de solutions de (12)

a) On recherche en priorité les solutions linéaires $x \mapsto kx$, où k est racine de l'équation $F(k, k) = 0$.

b) En raison de l'invariance par homothéties de centre O signalée ci-dessus, il peut être judicieux de transformer (12) par un passage en coordonnées polaires (cf. exemple 1).

c) On peut aussi essayer de paramétrer la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $F(X, Y) = 0$. Soit une représentation $t \mapsto (X = u(t),\ Y = v(t))$ de classe $\mathscr{C}^1$ d'un arc de Γ, définie sur un intervalle I. On recherche alors les paramétrages $t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathscr{C}^1$ des graphes des solutions φ de (12) qui vérifient (sur un certain sous-intervalle J de I) : $(\forall t \in J)$ $x(t) \neq 0$, $y(t) = \varphi(x(t))$, $\dfrac{\varphi(x(t))}{x(t)} = u(t)$, $\varphi'(x(t)) = v(t)$ ce qu'on écrit plus simplement :

$$\text{(13)} \qquad \boxed{x \neq 0 \text{ sur } J\,;\quad \frac{y}{x} = u(t)\,;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v(t)}\,.$$

Si une telle solution φ existe, en dérivant $y(t) = x(t)\,u(t)$, on obtient $y'(t) = x'(t)\,u(t) + x(t)\,u'(t) = \varphi'(x(t))\,x'(t) = v(t)\,x'(t)$, d'où :

$$\text{(14)} \qquad \boxed{(v(t) - u(t))\,x'(t) = u'(t)\,x(t)}\,,$$

équation différentielle linéaire et homogène d'ordre 1 à l'inconnue $x(t)$, dont l'intégration se ramène à une quadrature.

Réciproquement, soit $t \mapsto x(t)$ une solution de (14) définie sur un intervalle où $x(t)\,x'(t)$ reste $\neq 0$. En remontant les calculs, on voit que la représentation $t \mapsto (x(t), y(t) = u(t)\,x(t))$ vérifie (13), donc que, en notant ζ la fonction réciproque de $t \mapsto x(t)$, $x \mapsto y(\zeta(x))$ est solution de (12). En résumé, *pour toute solution* $t \mapsto x(t)$ *de* (14) *telle que* $x(t)\,x'(t)$ *reste* $\neq 0$, $t \mapsto (x(t), y(t) = u(t)\,x(t))$ *représente paramétriquement le graphe d'une solution de* (12).

En abrégé, on écrit : $\mathrm{d}y = v(t)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x = xu'(t)\,\mathrm{d}t + u\,\mathrm{d}x$, d'où $\mathrm{d}x(v - u) = xu'(t)\,\mathrm{d}t$, d'où (14).

Si l'équation (12) peut être mise sous la forme $y' = G(y/x)$, on prend directement $t = \dfrac{y}{x}$ pour paramètre (*i.e.* $u(t) = t$ et $v(t) = G(t)$), d'où :

$$\text{(15)} \qquad \boxed{(G(t) - t)\,x'(t) = x(t)}\,.$$

Exemple 5 : *Etudier l'équation scalaire, l'inconnue y étant à valeurs dans* $\mathbb{R}$

$$\text{(16)} \qquad x^2 y'^3 + y^2 y' - y^2 = 0\,.$$

Solution : L'équation est homogène en (x, y). Pour $x \neq 0$, elle s'écrit : $F\left(\dfrac{y}{x}, y'\right) = 0$, avec $F(X, Y) = Y(X^2 + Y^2) - X^2$. La co d'équation $F(X, Y) = 0$ (on reconnaît une cissoïde) peut se paramétrer avec $t = X/Y$, d'où la représentation *bijective* de Γ: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \left(X = u(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2},\ Y = v(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$. On arrive ainsi à l'équation (14) qui s'écrit ici $\dfrac{t^2}{1+t^2}\left[(1-t)\,x'(t) - \dfrac{3+t^2}{1+t^2}x(t)\right] = 0$, soit :

$$(17) \qquad (1-t)\,x'(t) = \frac{3+t^2}{1+t^2}x(t)\,.$$

L'intégration de (17) est facile et donne comme solutions maximales les fonctions $f_{\lambda, I} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\lambda}{(1-t)^2}\sqrt{1+t^2}\exp(\operatorname{Arc\,tg} t)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, I étant $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$ (ou $\mathbb{R}$ pour la solution nulle $\mathcal{N}$).

Pour l'équation (16) on obtient donc d'abord les solutions linéaires, à savoir $\mathcal{N}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x$, et on a pour d'autres solutions la représentation paramétrique (pour $t \in I$) :

$$(18) \quad t \mapsto \left(x_\lambda(t) = \frac{\lambda}{(1-t)^2}\sqrt{1+t^2}\exp(\operatorname{Arc\,tg} t),\right.$$
$$\left. y_\lambda(t) = \frac{\lambda t^3}{(1-t)^2\sqrt{1+t^2}}\exp(\operatorname{Arc\,tg} t)\right).$$

Achevons l'étude rigoureuse de (16). Le polynôme $P_X(Y) = Y^3 + X^2 Y - X^2 \in \mathbb{R}[Y]$ possède, pour tout X, une unique racine réelle $H(X)$. La fonction $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire, continue, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, mais non lipschitzienne autour de O (cf. fig. 4). Le graphe de H est Γ.

Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, l'équation (16) peut donc se mettre sous la forme

$$y' = H(y/x)\,.$$

Cela conduit à distinguer dans le plan des (x, y) les quatre quadrants ouverts :

$$Q_1 = (\mathbb{R}_+^*)^2\,, \quad Q_2 = (\mathbb{R}_-^*) \times \mathbb{R}_+^*\,, \quad Q_3 = (\mathbb{R}_-^*)^2 \quad \text{et} \quad Q_4 = (\mathbb{R}_+^*) \times \mathbb{R}_-^*$$

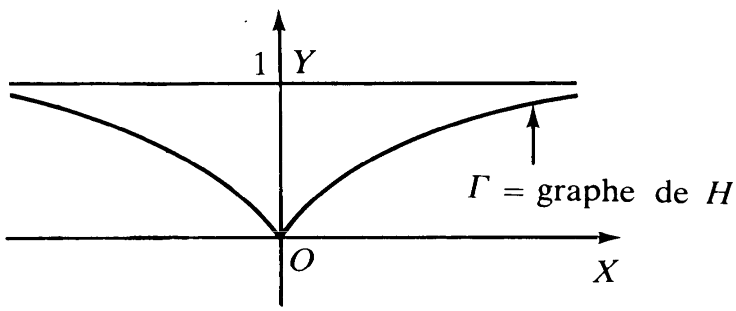


Fig. 4.

Sur chaque Q_k, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et le théorème X.2.1 s'applique. Par ailleurs le tracé des courbes (C_λ) définies par la représentation paramétrique (18) est facilité du fait que

$$\frac{y}{x} = \frac{t^3}{1+t^2} \qquad \text{et que} \qquad m = \frac{y'}{x'} = v(t) = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Voici le tableau de variation pour $\lambda > 0$:

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	λ	$\nearrow$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	0
y	$-\lambda e^{-\pi/2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	$\lambda\, e^{\pi/2}$
m	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Chaque courbe (C_λ) fournit donc, pour $\lambda > 0$, deux solutions maximales de (16) sur Q_1, l'une φ_λ définie sur $]0, +\infty[$ et croissant de $\lambda\, e^{\pi/2}$ à $+\infty$, l'autre ψ_λ définie sur $]\lambda, +\infty[$ et croissant de 0 à $+\infty$, ainsi qu'une solution maximale η_λ de (16) sur Q_4, définie sur $]0, \lambda[$ et croissant de $-\lambda\, e^{-\pi/2}$ à 0. Les branches infinies de φ_λ et ψ_λ dans la direction $y = x/2$ sont paraboliques. On obtient des résultats analogues pour $\lambda < 0$ (deux solutions maximales de (16) sur Q_3, une sur Q_2) par symétrie par rapport à 0.

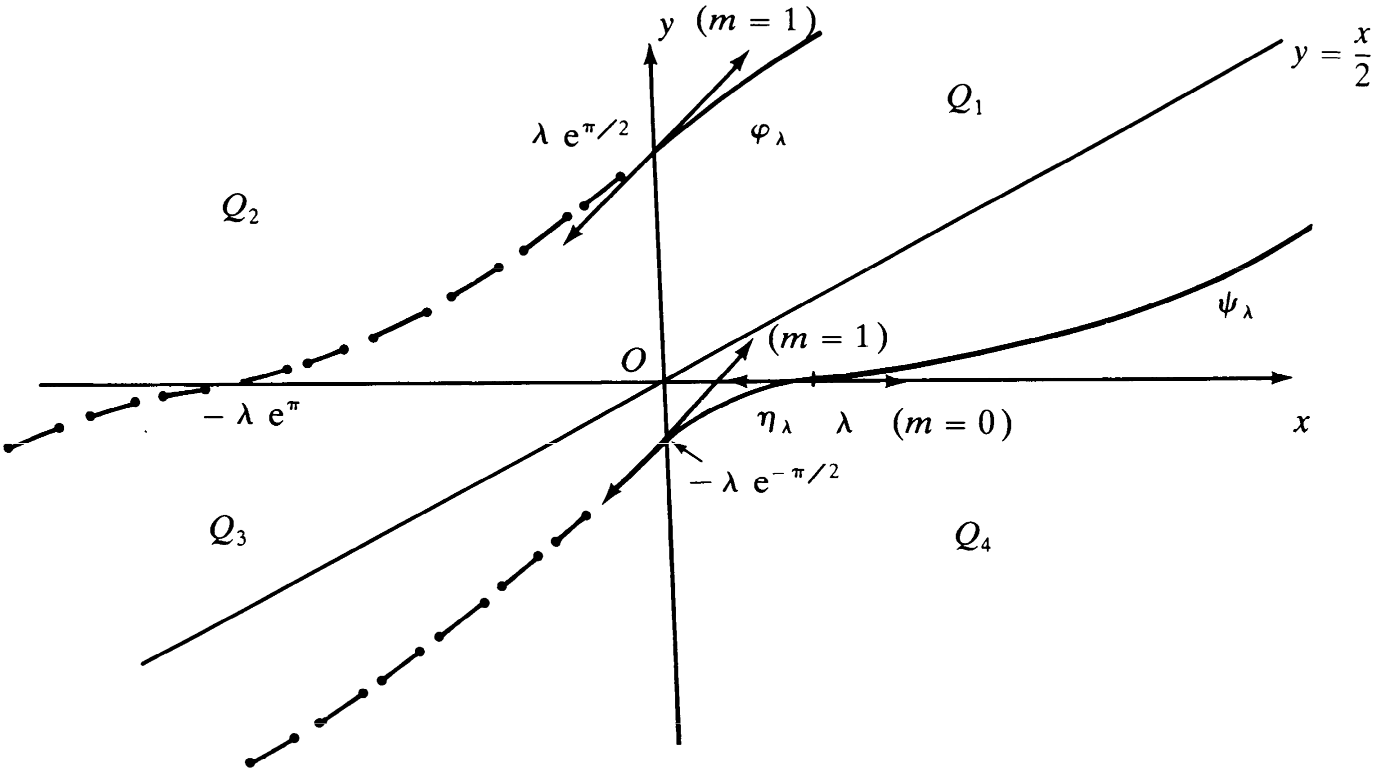


Fig. 5.

Il est clair qu'*on a ainsi obtenu* **toutes** *les solutions maximales de* (16) *sur* Q_1 avec la demi-droite $y = x/2$, les $(\varphi_\lambda)_{\lambda > 0}$ et les $(\psi_\lambda)_{\lambda > 0}$ car par chaque point de Q_1 passe un de ces graphes. De même *les solutions maximales de* (16) *sur* Q_4 *sont les* $(\eta_\lambda)_{\lambda > 0}$; et par homothétie de rapport < 0 on a les solutions maximales sur Q_2 et Q_3 (cf. fig. 5).

Mais on peut aller plus loin en cherchant par exemple toutes les solutions maximales de (16) *sur* $\mathbb{R}^2$. Il se pose alors un problème de raccordement à la traversée de Oy (ce qui ne peut se faire que d'une seule façon (avec la pente 1, sauf au point 0 où la pente est 1/2), et à la traversée de Ox (où, sauf en 0, le raccordement peut se faire d'une infinité de façons avec une pente nulle à cause de la présence de la solution nulle qui peut se raccorder sur un intervalle borné ou non. Au total, si Δ désigne la droite d'équation $y = x/2$, *par tout point de* $\Delta \setminus \{0\}$ *il passe exactement une courbe intégrale maximale, à savoir* Δ ; *par tout autre point de* $\mathbb{R}^2$ *il passe une infinité de graphes de solutions maximales de* (16).

(On notera que sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, la solution $y = 0$ apparaît comme *singulière* (cf. appendice 2) tandis que la solution $y = x/2$ ne l'est pas.)

Exercice 1 : Etudier *avec toute la rigueur possible* les équations différentielles scalaires suivantes où la fonction inconnue $y(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$:

a) $xy'(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2 y + y^3$ *b)* $(x + yy')^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2 + 2xyy')^2$

c) $y' + y + y^2 + 1 = 0$ *d)* $y'\sqrt{1 + x^2} - y - y^2 - 1 = 0$

e) $(y + y')^2 + (y - y')^3 = 0$ *f)* $x(x-1)y' - y(y-1) = 0$

g) $(1 - x^2)y'^2 = 1 - y^2$ *h)* $y^4 + 3x^4 + 4x^3 yy' = 0$

i) $2(xy' + y^2)(1 - x^2) + (3x^2 - 5)(y - 1) + 2(x^2 - 1) = 0$.

Exercice 2 : Intégrer les systèmes différentiels suivants, à inconnues numériques :

a) $\begin{cases} y'z' = 1 \\ yz = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ y'(t) = 2x(t)y(t) \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x'(t) = x^2 - y^2 \\ y'(t) = 2xy \\ z'(t) = -4xz. \end{cases}$

Exercice 3 : Intégrer avec toute la rigueur possible les équations différentielles suivantes, à inconnue numérique :

a) $y^4 + y'^4 + \lambda y^2 y' = 0$ *b)* $4y^2(y'^2 + 1) - (x + yy')^2 = 0$

c) $x^4 y'^4 + y^4 y' - y^4 = 0$ *d)* $y'^3 - y^2(y' - 1) = 0$

e) $xyy' - y^2 - (x + y)^2 e^{-y/x} = 0$ *f)* $(xy' - y)^2 - (x^2 - y^2) = 0$

g) $y' \sin 2x - 4y - 4y^2 \cos^2 x - 4 \sin^2 x = 0$

h) $y'\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos 2x\right) + 5 \operatorname{tg}^2 x - 2y \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} - y^2 = 0$

i) $y'^3 + 3yy' + y^2 = 0$.

Exercice 4 : On donne a et b réels $\neq 0$. Intégrer avec toute la rigueur possible l'équation différentielle suivante, où l'inconnue $y(x)$ est numérique :

$$(\mathcal{S}) \qquad axyy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)y' - xy = 0.$$

Indication : En dérivant $(\mathcal{S})$ et en éliminant $x^2 - ay^2 - b$, on aboutit à une

Exercice 5 : Etudier avec toute la rigueur possible les équations suivantes (y numérique).

$a)$ $x^2 + y^2 - 2\,xyy' = 0$ et $a')$ $(x^2 + y^2)\,y' + 2\,xy = 0$

$b)$ $x^2 y' - xy + y^2 = 0$ $c)$ $(\sqrt{xy} + 1)\,xy' + (\sqrt{xy} - 1)\,y = 0$

$d)$ $\sqrt{x}\,y' - y + (x - 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$ $e)$ $x^2 y' - y^2 - x^2 y + 2\,x^2 = 0$.

Exercice 6 : Soit l'équation à inconnue numérique $(\mathscr{E})$ $y' = x^2 + y^2$.

$a)$ Montrer qu'elle admet une unique solution maximale f telle que $f(0) = 0$ et qui soit DSE$_0$; on posera $T_{f,0}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$. On note (b_n) la suite telle que $\operatorname{tg} X = \sum_{n \geqslant 1} b_n X^n$. Montrer que $(\forall n \geqslant 1)$ $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

$b)$ Soit I l'intervalle de définition de f. Prouver : $(\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+^*)$, $f(x) > 0$; puis si $(x_1, x_2) \in I^2$ et $0 < x_1 < x_2$, alors $x_2 - x_1 \leqslant \dfrac{1}{f(x_1)} - \dfrac{1}{f(x_2)}$. En déduire que I est *majoré*.

$c)$ Soit $\omega = \sup\,(I)$. Prouver : $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} \omega}{\longrightarrow} +\infty$, et $f(x) \underset{x \overset{<}{\to} \omega}{\in} O\left(\dfrac{1}{\omega - x}\right)$. Est-il exact que $\omega = R_{\text{cv}}(T_{f,0})$?

Exercice 7 : Soit $G(X) = \sum_{n \geqslant 2} a_n X^n$ une série formelle à coefficients complexes et de rayon $R > 0$. On note g la somme de G dans son disque ouvert de convergence. Chercher les solutions DSE$_0$ de l'équation scalaire $2\,xy' - g(x) \times y - y^2 + 1 = 0$.

Exercice 8 : On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des graphes des solutions de $(\mathscr{E})$ $y' = F(x, y)$ qui sont définis sur des intervalles *compacts*. Montrer l'équivalence entre (I) et (II) :

(I) $(\forall \Gamma \in \mathscr{G})$ $(\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ tel que pour toute rotation Φ et $\mathbb{R}^2$ d'angle $\theta \in [-\alpha, \alpha]$, $\Phi(\Gamma) \in \mathscr{G}$.

(II) $y \dfrac{\partial F}{\partial x} - x \dfrac{\partial F}{\partial y} + F^2(x, y) + 1 = 0$ sur Ω.

***Exercice 9** (une équation de Riccati) :* On considère l'équation différentielle (1) $xy'(x) = x + y^2(x)$, x étant une variable réelle et la fonction inconnue $y(x)$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$a1)$ Montrer que (1) admet une unique solution maximale, notée Y, qui soit DSE$_0$. Si $Y = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, montrer : $(\forall n \geqslant 1)$ $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Qu'en déduit-on pour l'intervalle de définition de Y ?

$a2)$ Montrer que dans un voisinage de 0 que l'on précisera, on a :

$$Y(x) = \left(\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^2}\,nx^n\right) \Big/ \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\,x^n\right) .$$

Indication : changement de fonction inconnue défini par $y = -\dfrac{x}{z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ (à justifier).

$b)$ Tracer la parabole P_1, lieu des points où les graphes des solutions maximales de (1) ont une tangente parallèle à Ox, et le lieu des points d'inflexion de ces graphes, qui comprend une autre parabole P_2. Dans chaque région du plan délimitée par ces deux lieux, on indiquera les signes de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et de $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

$c)$ *Etude de* Y. Montrer que sur $\mathbb{R}_-$, $Y(x)$ est défini, $Y(x) \leqslant 0$, $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} > 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} \geqslant 0$. Trouver $\lim_{x \to -\infty} Y(x)$, ainsi que la partie principale de Y.

$d)$ Soit f la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \left[\sum_{n \geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n\right]^2$. Former l'équation différentielle

(2), à l'inconnue $w(x)$ transformée de (1) par le changement $y = Y + \dfrac{1}{wf(x)}$. Montrer que toute solution $w(x)$ de (2) admet une limite finie α quand $x \longrightarrow -\infty$. Etudier les deux familles de solutions de (1) correspondant, l'une aux valeurs > 0, l'autre aux valeurs < 0, de α. Dans chaque famille donner, pour $x < 0$, le domaine de définition, le nombre de zéros, et (éventuellement), le comportement quand $x \longrightarrow -\infty$.

e) Etude de la solution Y_0 de (1) *correspondant à* $\alpha = 0$. Montrer que sur $\mathbb{R}^*$, $Y_0(x)$ est défini, $Y_0(x) > -Y(x)$, $\dfrac{dY_0}{dx} < 0$, $\dfrac{d^2Y_0}{dx^2} < 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{Y_0(x)}{Y(x)} = -1$.

f) Montrer que, quand $x \longrightarrow -\infty$, tous les graphes des solutions de (1) sont asymptotes à P_2.

Indication : Poser $\eta = y - \varepsilon\sqrt{-x}$ ($\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ayant le signe de y au voisinage de $-\infty$). Montrer que η vérifie (3) : $2\varepsilon\sqrt{-x}\,\dfrac{d\eta}{dx} + 4g(x)\eta = 1$, avec $g(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 1$ et étudier le comportement des solutions de (3) quand $x \longrightarrow -\infty$.

Exercice 10 *(une équation d'Euler, traitée par les fonctions de Jacobi).*

PARTIE I

On fixe un réel $\rho \in]-\infty, 1[$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - \rho \sin^2 t}}$; pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on pose : $\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - \rho \sin^2 \varphi}$.

a) Montrer que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective, et que f et $g = f^{\langle -1 \rangle}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on posera $g(u) = \mathrm{Am}\,(u)$ (lire : « amplitude de u »).

b) On définit les trois fonctions (dites *elliptiques de Jacobi*) suivantes : $(\forall u \in \mathbb{R})$ $\mathrm{sn}\,(u) = \sin\,(\mathrm{Am}\,(u))$; $\mathrm{cn}\,(u) = \cos\,(\mathrm{Am}\,(u))$; $\mathrm{dn}\,(u) = \Delta(\mathrm{Am}\,(u)) = \sqrt{1 - \rho\,\mathrm{sn}^2\,(u)}$.
On posera $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$.

*b*1) Montrer que les fonctions sn, cn, dn sont de classe $\mathscr{C}^\infty$; calculer leurs dérivées en $u \in \mathbb{R}$ en fonction de $\mathrm{sn}\,(u)$, $\mathrm{cn}\,(u)$, $\mathrm{dn}\,(u)$.

*b*2) Etudier les variations de sn, cn, dn. Préciser leur parité. Montrer qu'elles sont périodiques (la période de sn et cn est $4K$, celle de dn, $2K$). Calculer $\mathrm{cn}\,(u + 2K)$, $\mathrm{sn}\,(u + 2K)$, $\mathrm{cn}\,K$ et $\mathrm{dn}\,K$. Préciser les zéros de sn et cn.

*b*3) Dans le cas particulier où $|\rho| < 1$, donner un DSE_0 de K par rapport à ρ ; Préciser son ensemble de validité réel et le comportement aux bornes.

c) Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $D(u, v) = 1 - \rho\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v$.

*c*1) Etablir les relations suivantes :

(1) $$\mathrm{sn}\,(u + v) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v + \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{D(u, v)}$$

(2) $$\mathrm{cn}\,(u + v) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{D(u, v)}$$

(3) $$\mathrm{dn}\,(u + v) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v - \rho\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{D(u, v)}$$

(4) $$\frac{\mathrm{dn}\,(u + v) - \mathrm{cn}\,(u + v)}{\mathrm{sn}\,(u + v)} = \frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,v - \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{sn}\,u - \mathrm{sn}\,v}.$$

Indication (pour (1)) : soit $E(u, v)$ le second membre de (1). Montrer que $\dfrac{\partial E}{\partial u} = h(u, v)$, où h est une fonction *symétrique* du couple (u, v). En déduire que $\dfrac{\partial E}{\partial u} = \dfrac{\partial E}{\partial v}$, puis $E = \psi(u + v)$ (ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$). Conclure en faisant $v = 0$.

PARTIE II

On fixe $\rho \in]-\infty, -1[$. On note P le polynôme $(1 - X^2)(1 - \rho X^2)$. Γ rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on note $\mathcal{Q}$ le carré ouvert $]-1,1[\times]-1,1[$, et $\bar{\mathcal{Q}}$ son adhérence.

a) Soit $(x,u)\in\mathbb{R}^2$. Démontrer :

$$(\mathcal{I}_1)\quad (x=\operatorname{sn}u \text{ et } u\in[-K,K])\Leftrightarrow\left(x\in[-1,1] \text{ et } u=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}\right)$$

$(\mathcal{I}_2)\quad (x=\operatorname{cn}u \text{ et } u\in[0,2K])\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(x\in[-1,1] \text{ et } u=K-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-\rho+\rho t^2)}}\right).$$

b) On considère l'équation différentielle $(E)\;\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{P(x)}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{P(y)}}$, où ε est fixé dans $\{-1,1\}$, et on l'étudie dans l'ouvert $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in\mathcal{Q}$.

*b*1) Soit $\sigma=\displaystyle\int_0^{y_0}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}-\varepsilon\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}$. Montrer qu'au voisinage de x_0, la solution maximale $y(x)$ de (E) telle que $y(x_0)=y_0$ est définie par

$$\int_0^{y(x)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}=\sigma+\varepsilon\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}.$$

*b*2) On pose $u=\displaystyle\int_0^{\varepsilon x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}},\ v=\int_0^{y(x)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{P(t)}}$. Utiliser $(\mathcal{I}_1)$, puis (1) pour $\operatorname{sn}(u+\sigma)$ pour montrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que, sur V, la solution maximale $y(x)$ telle que $y(x_0)=y_0$ est donnée par :

$$(5)\qquad y(x)=\frac{\operatorname{sn}\sigma\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\rho x^2}+(\operatorname{cn}\sigma\operatorname{dn}\sigma)\,\varepsilon x}{1-(\rho\operatorname{sn}^2\sigma)\,x^2}.$$

Définir alors l'intervalle de définition de cette solution maximale.

c) On prend $\varepsilon=-1$, d'où avec les notations précédentes : $-u+v=\sigma$. Utiliser (4) ; poser $C=\dfrac{\operatorname{dn}\sigma-\operatorname{cn}\sigma}{\operatorname{sn}\sigma}$. En déduire qu'on a : $F(x,y)=0$, où F est un polynôme à coefficients réels dépendant de C et de ρ, *symétrique* en (x,y), qu'on calculera explicitement, et *de degré* 4.

d) Programmer le tracé des courbes $F(x,y)=0$ lorsque C varie, pour ρ donné (l'utilisateur doit pouvoir choisir ρ et, une fois le choix de ρ fixé, observer la déformation des courbes lorsque C varie).

§ X.4 *AUTRES TECHNIQUES USUELLES*

Equations de Lagrange et de Clairaut [1]

Par définition, on appelle *équation de Lagrange* une équation différentielle scalaire du premier ordre de la forme

$$(1)\qquad \boxed{y=x\varphi(y')+\psi(y')}$$

[1] Alexis Claude *Clairaut* (1713-1765), mathématicien français au génie précoce qui fut élu à l'Académie des Sciences à l'âge de 18 ans.

où φ et ψ sont des fonctions données $I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ (I intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, la fonction inconnue y à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Un cas particulier remarquable est *l'équation de Clairaut :*

$$(2) \qquad \boxed{y = xy' + \psi(y')} \; .$$

Obtention de solutions de (1)

a) Les solutions affines $x \mapsto \lambda x + \mu$ sont données par les équations : $\lambda = \varphi(\lambda)$, $\mu = \psi(\lambda)$. Quand elles existent, elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

b) Cherchons des solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur le graphe desquelles $t = y'(x)$ soit paramètre admissible (i.e. telles que $y''(x)$ reste $\neq 0$). En paramétrant par $t \mapsto (x(t),\; y(x(t)))$ une telle solution, on a : $t = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x(t))$; $y(x(t)) = x\varphi(t) + \psi(t)$ d'après (1), d'où $y'(x)\,x'(t) = x'(t)\,\varphi(t) + x\varphi'(t) + \psi'(t)$, c.-à-d.

$$(3) \qquad (t - \varphi(t))\,x'(t) = x(t)\,\varphi'(t) + \psi'(t) \; .$$

L'équation (3) est *linéaire* scalaire d'ordre 1 en $x(t)$ et s'intègre donc par quadratures (le cas où $t = \varphi(t)$ étant étudié à part). Réciproquement *toute solution $t \mapsto x(t)$ de* (3) *telle que $x'(t)$ reste $\neq 0$ fournit une solution de* (1).

Obtention de solutions de (2)

a) On aperçoit tout de suite une infinité de solutions affines G_λ : $x \mapsto \lambda x + \psi(\lambda)$ $(\lambda \in I)$ définies sur $\mathbb{R}$.

b) D'autre part, puisque $(\forall t \in I)\; \varphi(t) = t$, l'équation (3) dégénère en $x(t) + \psi'(t) = 0$. Supposons ψ de classe $\mathscr{C}^2$ et considérons la représentation

$$(4) \quad J \longrightarrow \mathbb{R}^2,\; t \mapsto (x(t) = -\psi'(t),\, y(t) = tx(t) + \psi(t) = \psi(t) - t\psi'(t)).$$

Elle est de classe $\mathscr{C}^1$, et $x'(t) = -\psi''(t)$, $y'(t) = -t\psi''(t) = tx'(t)$. Donc *sur tout intervalle où $\psi''(t)$ reste $\neq 0$, cette représentation a pour image le graphe d'une solution de* (2) (puisqu'alors $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = t$ et $y = tx + \psi(t)$). Soit D_λ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = G_\lambda(x)$ $(\lambda \in I)$. Nous verrons au tome 4 (théorie des enveloppes de droites) que le *point caractéristique* $C(\lambda)$ de la famille des D_λ a ses coordonnées fournies précisément par (4) (avec $t = \lambda$). Donc *les arcs sans point d'inflexion de l'enveloppe des D_λ sont des graphes de solutions de* (2). Ces solutions sont dites *singulières* pour (2). En raccordant des solutions singulières à des restrictions de solutions affines, on obtient une grande variété de solutions de (2).

Exemple 1 : *Etudier l'équation de Lagrange :*

(5) $$y = xy'^2 + \frac{1}{1+y'^2}.$$

Solution : On pose $y' = t$, d'où $y = t^2 x + \dfrac{1}{1+t^2}$, et en différentiant : $dy = t\,dx = 2\,tx\,dt + t^2\,dx - \dfrac{2\,t\,dt}{(1+t^2)^2}$, ce qui mène à

(6) $$(1-t)\,x' = 2\,x - \frac{2}{(1+t^2)^2},$$

après simplification par t.

On trouve d'abord les solutions affines : $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$.

Sur $]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$, les solutions maximales de (6) sont données par

$$t \mapsto f_\lambda(t) = \frac{1}{(1-t)^2}\left[\lambda - \frac{1+t}{1+t^2} - \operatorname{Arc\,tg} t\right] \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Sur $\mathbb{R}$, l'équation (6) a une solution DSE_0 (en fait analytique réelle sur $\mathbb{R}$) dont la restriction à $]-\infty, 1[$ et à $]1, +\infty[$ est $f_{1+\frac{\pi}{4}}$ et telle que $g(1) = \dfrac{1}{4}$. On a donc des solutions de (5) en prenant les représentations paramétriques

$$x(t) = f_\lambda(t) \qquad (\text{ou } g(t) \text{ pour } \lambda = 1 + \frac{\pi}{4}),$$
$$y(t) = t^2 x(t) + \frac{1}{1+t^2}$$

sur des intervalles où $x'(t)$ reste $\neq 0$.

Si on s'intéresse au nombre de solutions maximales passant par un point donné du plan, on écrit (5) sous la forme $xy'^4 + (x-y)\,y'^2 + 1 - y = 0$, ce qui conduit à régionner le plan par les droites $x = 0$; $y = 1$, et la parabole d'équation $(x+y)^2 - 4\,x = 0$. Dans chacune des sept régions *ouvertes* obtenues, le théorème 1 de l'appendice 2 s'applique. La solution $x \mapsto 1$ apparaît comme *singulière* tandis que $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$ ne l'est pas.

Equations scalaires linéaires du second ordre où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée

Soit l'équation linéaire scalaire, où l'inconnue y est à valeurs dans K

(7) $$\boxed{ay'' + by' + cy + d = 0},$$

où les coefficients a, b, c, d sont quatre fonctions *continues*, et dont on suppose connaître une solution $\varphi_0 : J \longrightarrow K$ de l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$. Supposons que $a\varphi_0$ reste $\neq 0$ sur J et prenons pour nouvelle fonction inconnue $z = \dfrac{y}{\varphi_0}$, d'où on tire : $y = \varphi_0 z$, $y' = \varphi_0' z + \varphi_0 z'$, $y'' = \varphi_0 z + 2\,\varphi_0' z' + \varphi_0 z''$, ce qui conduit, après réduction, à l'équation

$$z'' + \left(2\,\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} + \frac{b}{a}\right) z' + \frac{d}{a\varphi_0} = 0\,. \tag{8}$$

L'équation (8) est linéaire scalaire *du premier ordre* en $v = z'$, ce qui signifie qu'on est capable, au-dessus de J, d'intégrer (7) par un nombre fini de quadratures.

Exemple 2 : Soit à résoudre l'équation $y'' - (x+1)\,y' + xy = \mathrm{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée admet la $\mathbb{R}$-solution évidente $\varphi_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x$. En posant $y = \mathrm{e}^x z$ on obtient : $z'' + (1-x)\,z' = 1$, soit, avec $z' = v : v' + (1-x)\,v = 1$, dont les $\mathbb{R}$-solutions sont

$$v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x-1)^2}\left[\lambda + \int_0^x \mathrm{e}^{-(t-1)^2/2}\,\mathrm{d}t\right] = z'(x)\,,$$

d'où finalement les $\mathbb{R}$-solutions

$$y(x) = \mathrm{e}^x\left[\mu + \int_0^x \left(\lambda + \int_0^t \mathrm{e}^{-(\tau-1)^2/2}\,\mathrm{d}\tau\right) \mathrm{e}^{(t-1)^2/2}\,\mathrm{d}t\right]$$

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ arbitraire.

Exemple 3 : Reprenons l'équation $xy'' + y' - y = 0$ (cf. exemple 2 du § IX.5). Nous lui avons trouvé la $\mathbb{R}$-solution $S : x \mapsto \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{1}{(n!)^2}\,x^n$, qui reste > 0 sur un intervalle $J = \,]-a, +\infty[$ $(a > 0)$. Posant $y = Sz$ sur J, on arrive à $xSz'' + (2\,xS' + S)\,z' = 0$, ce qui donne sur $J \cap \mathbb{R}_+^*$ ou $J \cap \mathbb{R}_-^*$ les solutions $z : x \mapsto \lambda + \mu \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{tS^2(t)}$, donc $y : x \mapsto S(x)\left[\lambda + \mu \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{tS^2(t)}\right]$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ arbitraire. Mais $\dfrac{1}{S^2(t)}$ est DSE_0, d'où pour $\alpha > 0$ $(\alpha < a)$ convenable, une série entière $U : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k\,t^k$, de rayon $\geqslant \alpha$ telle que $\dfrac{1}{S^2(t)} = U(t)$ sur $J \cap \,]-\alpha, \alpha[$. Mais alors

$$y(x) = S(x)\left[\lambda + \mu \int^x \left(\frac{u_0}{t} + \sum_{k \geqslant 1} u_{k+1}\,t^k\right) \mathrm{d}t\right] = u_0\,\mu S(x)\,\mathrm{Log}\,x + T(x)$$

(avec T série entière convergente). Ainsi s'éclaire la méthode suivie à l'exemple 2 du § IX.5 qui pouvait alors sembler artificielle.

Equation scalaire du second ordre lacunaire en x

C'est par définition une équation de la forme

$$(9) \qquad \boxed{g(y, y', y'') = 0}$$

où la variable x ne figure pas et où g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Obtention de solutions de (9)

On cherche d'abord les solutions constantes ; puis, celles où $t = y$ peut être pris pour paramètre, c'est-à-dire les solutions $y(x)$ telles que $y'(x)$ ne s'annule jamais. *On prend alors pour variable t, et pour nouvelle fonction inconnue* $u : t \mapsto y'(x(t))$. Par dérivation par rapport à t, on a : $\dfrac{\mathrm{d}(y(x(t)))}{\mathrm{d}t} = y'(x(t)) \times x'(t) = 1 = u(t) \times x'(t)$ (ce qui prouve que $x'(t)$ reste $\neq 0$), puis $u'(t) = y''(x(t)) \times x'(t) = \dfrac{y''(x(t))}{u(t)}$, d'où $y''(x(t)) = u(t)\, u'(t)$, et *ces* solutions sont donc *les* solutions de

$$(10) \qquad \boxed{g(t, u(t), u(t)\, u'(t)) = 0} \, ,$$

équation qui est *du premier ordre* en $u(t)$. A chacune des solutions de (10) jamais nulles $u(t)$ correspond une famille de solutions de (9) donnée par les formules (tirées de $y' = u(y)$) : $x - \lambda = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{u(y)}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraire). En fait ces solutions φ_λ sont données par leurs fonctions réciproques : si y_0 est fixé dans l'intervalle de définition de u, on a :

$$(\forall x) \quad \boxed{x = \lambda + \int_{y_0}^{\varphi_\lambda(x)} \frac{\mathrm{d}y}{u(y)}} \, .$$

Exemple 4 : *Intégrer l'équation suivante, à inconnue numérique*

$$(11) \qquad 2\,y'' - y'^2 - \mathrm{e}^{2y} = 0 \, .$$

Solution : Il n'y a pas de fonction constante vérifiant (11).

Ici il est intéressant de poser $y'^2 = v(y)$, ce qui conduit immédiatement à une équation linéaire en v qui s'intègre à vue :

$$(12) \qquad v' - v = \mathrm{e}^{2y} \, ,$$

dont les $\mathbb{R}$-solutions sont $v(y) = \lambda\, e^y + e^{2y}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ arbitraire). Dans $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \lambda\, e^y + e^{2y}$ on sépare les variables, ce qui donne, pour $\lambda \neq 0$:
$\varepsilon\, dx = \dfrac{dy}{\sqrt{\lambda\, e^y + e^{2y}}} = \dfrac{e^{-y}\, dy}{\sqrt{1 + \lambda\, e^{-y}}}$, d'où $\varepsilon(x - \mu) = \dfrac{-2}{\lambda}\sqrt{1 + \lambda\, e^{-y}}$,
avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ arbitraire. On trouve *des* $\mathbb{R}$-solutions de (11) en calculant y en fonction de x, ce qui donne :

$$f_{\lambda, \mu} : x \mapsto -\operatorname{Log} \frac{\lambda^2 (x - \mu)^2 - 4}{4\lambda} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

ainsi que les solutions $f_{0, \mu} : x \mapsto -\operatorname{Log} |x - \mu|$ obtenues pour $\lambda = 0$.

Etude rigoureuse de (11) : Les $f_{\lambda, \mu}$ sont évidemment maximales sur chacun de leurs intervalles de définition. Comme l'équation (11) peut s'écrire $y'' = F(x, y, y')$ avec $F(u, v, w) = \dfrac{1}{2}(e^{2v} + w^2)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, le théorème X.2.3 s'applique. Il existe donc une et une seule solution maximale φ vérifiant $\varphi(x_0) = z_0$ et $\varphi'(x_0) = z_1$ pour $(x_0, z_0, z_1) \in \mathbb{R}^3$. Or justement il existe un seul couple (λ, μ) vérifiant $f_{\lambda, \mu}(x_0) = z_0$ et $f'_{\lambda, \mu}(x_0) = z_1$ car la seconde équation, compte tenu de $y'^2 = \lambda\, e^y + e^{2y}$ détermine λ sans ambiguïté par $\lambda_0 = z_1^2 e^{-z_0} - e^{z_0}$, puis on obtient $\varepsilon(x_0 - \mu)$, ce qui semble donner deux valeurs de μ, mais comme ε doit avoir le signe de z_1 par définition, cela détermine $\mu_0 = x_0 + \dfrac{2 \operatorname{sgn}(z_1)}{\lambda_0}\sqrt{1 + \lambda_0 e^{-z_0}}$ (le cas $\lambda_0 = 0$ étant évident). En résumé, les différentes branches des $f_{\lambda, \mu}$ donnent *toutes les solutions maximales de* (11).

Equation linéaire d'Euler

On désigne sous ce nom les équations linéaires scalaires de la forme

$$(13) \qquad \boxed{x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = b(x)}\ ,$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des *constantes* données dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et où b est une fonction $I \longrightarrow K$ continue sur un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$.

Intégration de (13) sur $J = I \cap \mathbb{R}_+^*$ ou $J = I \cap \mathbb{R}_-^*$

Une méthode sûre consiste à opérer le changement de variable $x = (\operatorname{sgn}(x))\, e^t$ (*i.e.* prendre pour nouvelle variable $t = \operatorname{Log}|x|$). Posons $Y(t) = y(x(t))$.

PROPOSITION X.4.1

> *Pour toute fonction $y : J \longrightarrow K$ m fois dérivable, il existe des constantes (indépendantes de J) $A_{m,1}, A_{m,2}, \dots, A_{m,m} \in \mathbb{Z}$ telles que $x^m y^{(m)} = Y^{(m)} + A_{m,1} Y^{(m-1)} + \cdots + A_{m,m} Y$. Ces constantes sont définies par l'égalité de polynômes suivante dans $\mathbb{Q}[T]$:*
>
> (14) $\quad T(T-1)\dots(T-m+1) = T^m + A_{m,1} T^{m-1} + \cdots + A_{m,m}$.

Démonstration :

Pour $m = 1$ on a : $Y'(t) = y'(x(t)) \times x'(t)$. Or si $x = \varepsilon\, e^t$, $x'(t) = x$, d'où $Y'(t) = xy'(x)$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$, avec $n \geqslant 2$, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $A_{n-1,1}, \dots, A_{n-1,n-1}$ tels que :

$$x^{n-1} y^{(n-1)}(x) = Y^{(n-1)}(t) + A_{n-1,1} Y^{(n-2)}(t) + \cdots + A_{n-1,n-1} Y.$$

Par dérivation par rapport à t, il vient :

$$(n-1)x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + x^n y^{(n)}(x) = \\ = Y^{(n)}(t) + A_{n-1,1} Y^{(n-1)}(t) + \cdots + A_{n-1,n-1} Y'$$

soit

$$x^n y^{(n)}(x) = Y^{(n)}(t) + (A_{n-1,1} - (n-1))\, Y^{(n-1)}(t) + \\ + \sum_{k=2}^{n-1} (A_{n-1,k} - (n-1) A_{n-1,k-1})\, Y^{(n-k)}(t) - (n-1) A_{n-1,n-1} Y(t),$$

ce qui établit la propriété à l'ordre n. Pour préciser la valeur des constantes choisissons comme fonction particulière $y(x) = x^\lambda$, où $\lambda \in \mathbb{N}$. Cela donne $Y(t) = \varepsilon\, e^{\lambda t}$, avec $\varepsilon = \operatorname{sgn}(x^\lambda)$. Alors, pour $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$x^m y^{(m)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1)\, x^\lambda$$

et

$$Y^{(k)}(t) = \varepsilon \lambda^k e^{\lambda t} = \lambda^k x^\lambda;$$

après division par x^λ, l'égalité

$$x^m y^{(m)} = Y^{(m)} + A_{m,1} Y^{(m-1)} + \cdots + A_{m,m} Y$$

entraîne donc :

$$\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-m+1) = \lambda^m + A_{m,1}\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m,m}.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité polynomiale (14). ■

Grâce à cette proposition X.4.1, l'équation (13) peut se ra une équation à *coefficients constants* de la forme :

$$Y^{(n)} + c_1\, Y^{(n-1)} + \cdots + c_n\, Y(t) = b(\varepsilon\, \mathrm{e}^t)$$

($\varepsilon = 1$ si $J \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon = -1$ si $J \subset \mathbb{R}_-^*$), équation que l'on traite avec les méthodes vues au § IX.3.

Recherche de solutions du type de Fuchs [1]

On appelle *fonction du type de Fuchs* une fonction de la forme $\varphi :]0, a[\longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto x^\lambda S(x)$, où $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (cf. tome 2, § V.3) et S désignant une série entière *de valuation nulle* de rayon de convergence $\geqslant a$. Une telle fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, a[$. Si $S(x) = \sum\limits_{k \geqslant 0} a_k\, x^k$, on peut écrire $\varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{\lambda + k}$. Or

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lambda x^{\lambda - 1} S(x) + x^\lambda S'(x) \\ &= \lambda x^{\lambda - 1}\Big(\sum_{k \geqslant 0} a_k\, a^k\Big) + x^\lambda\Big(\sum_{k \geqslant 0} k a_k\, x^{k-1}\Big) \\ &= \sum_{k \geqslant 0} (\lambda + k)\, a_k\, x^{\lambda + k - 1} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(a_k\, x^{\lambda + k}), \end{aligned}$$

ce qui signifie que *la série représentant $\varphi(x)$ peut être dérivée terme à terme pour obtenir $\varphi'(x)$.*

Par récurrence, cette propriété s'étend à tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, ce qui permet d'étendre la *méthode d'identification* exposée au § II.3 pour rechercher des solutions du type de Fuchs de certaines équations différentielles, en prenant garde au fait que si le produit de deux fonctions de Fuchs quelconques en est une, la somme n'en est plus une en général.

Soit par exemple une équation différentielle *linéaire et homogène d'ordre* $n \geqslant 1$:

(15) $$S_0(x)\, y^{(n)} + S_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + S_n(x)\, y = 0\,,$$

où les $S_k :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{C}$ $(a > 0)$ sont sommes de séries entières convergentes sur au moins $]-a, a[$, avec $S_0 S_n \neq 0$ et $\operatorname{Min}\limits_{k=0}^{n} (\mathrm{val}\,(S_k)) = 0$. Soit $\varphi :]0, a[\longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \sum\limits_{k \geqslant 0} u_k\, x^{\lambda + k}$ une fonction du type de Fuchs, d'exposant caractéristique λ. La règle de dérivation de φ exposée ci-dessus et les règles

---

[1] Immanuel Lazarus *Fuchs* (1833-1902), mathématicien allemand, élève et successeur de Weierstrass.

d'addition et de multiplication de fonctions DSE_0 montrent que $S_0(x)\,\varphi^{(n)}+S_1(x)\,\varphi^{(n-1)}+\cdots+S_n(x)\,\varphi$ s'écrit sous la forme $x^{\lambda-n}\,T(x)$ $(-a<x<a)$ pour une certaine série entière T convergente au moins sur $]-a,a[$. Donc *la C.N.S. pour que φ soit $]-a,a[$-solution de* (15) *est : $T=0$ formellement.* Cela conduit à un système d'une infinité d'équations polynomiales vérifiées par λ et les (u_k) comme nous allons le voir sur un exemple. Seuls conviennent les λ tels que le rayon de $\sum u_k X^k$ soit >0.

Exemple 5 : *Soit $\rho\in\mathbb{C}^*$ de partie réelle $\geqslant 0$. Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation*

$$x^2y''+x(x+1)\,y'-\rho^2y=0 \tag{16}$$

où la fonction inconnue y est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Solution : a) *Cherchons d'abord les solutions du type de Fuchs de* (16) sur un demi-voisinage à droite de 0.

Analyse : Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ et $S=\sum_{n\geqslant 0}a_nX^n\in\mathbb{C}[X]$ *avec* $a_0\neq 0$, de rayon >0, tels que $\varphi_\lambda : x\mapsto x^\lambda\,S(x)$ vérifie (16). On a, pour $x>0$ et voisin de 0 :

$$x^\lambda\Big\{a_0(\lambda^2-\rho^2)+\sum_{n=1}^{\infty}\big[a_n(n+\lambda+\rho)(n+\lambda-\rho)+\\ +a_{n-1}(n+\lambda-1)\big]\Big\}=0\,,$$

ce qui entraîne $\lambda^2=\rho^2$ et

$$(\forall n\geqslant 1)\quad (n+\lambda+\rho)(n+\lambda-\rho)\,a_n=-\,(n+\lambda-1)\,a_{n-1}\,.$$

Si $2\rho\notin\mathbb{N}^*$, en prenant $\lambda=\varepsilon\rho\ (\varepsilon\in\{-1,1\})$ et posant $\Phi_\varepsilon(X)=\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n(\varepsilon)\,X^n$, S ne peut être que l'une des deux séries formelles $a_0\,\Phi_1$ ou $a_0\,\Phi_{-1}$, avec

$$\alpha_n(\varepsilon)=(-1)^n\,\frac{(n+\varepsilon\rho-1)(n+\varepsilon\rho-2)\ldots(\varepsilon\rho)}{n!\,(n+2\,\varepsilon\rho)(n+2\,\varepsilon\rho-1)\ldots(1+2\,\varepsilon\rho)}\,.$$

Si $\rho=\dfrac{p}{2}$, *$p\in\mathbb{N}^*$ et p impair,* alors $\lambda=\dfrac{p}{2}$ et $S=\Phi(X)=\sum_{n\geqslant 0}b_nX^n$, avec $b_0=1$ et si $n\geqslant 1$,

$$b_n=(-1)^n\,\frac{\left(n+\frac{p}{2}-1\right)\left(n+\frac{p}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{p}{2}\right)}{n!\,(n+p)(n+p-1)\ldots(1+p)}\,.$$

Si $\rho=q\in\mathbb{N}^*$, ou bien $\lambda=q$ et alors $S=\Psi(X)=\sum_{n}c_nX^n$, avec

$c_0 = 1$ et si $n \geqslant 1$,

$$c_n = (-1)^n \frac{(n+q-1)(n+q-2)\dots q}{n!(n+2q)(n+2q-1)\dots(1+2q)}$$

ou bien $\lambda = -q$ et alors, si P désigne le polynôme

$$1 + \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \frac{(k-q-1)\dots(-q)}{k!(k-2q)\dots(1-2q)},$$

nécessairement

$$S = \alpha P + \beta X^{2q} \Psi, \quad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2.$$

Synthèse : Chacune des séries formelles Φ_{-1}, Φ_1, Φ et Ψ trouvées ci-dessus est de rayon $+\infty$, comme le montre la relation de récurrence entre les a_n. Cela donne déjà les $\mathbb{R}_+^*$-solutions de (16) suivantes du type de Fuchs :

Si $2\rho \notin \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$x \mapsto Ax^{-\rho}\Phi_{-1}(x) \quad (A \in \mathbb{C}^*) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto Bx^{\rho}\Phi_1(x) \quad (B \in \mathbb{C}^*).$$

Si $\rho = \frac{p}{2}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ et impair), les fonctions

$$x \mapsto Ax^{p/2}\Phi(x), \qquad (A \in \mathbb{C}^*).$$

Si $\rho = q \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$x \mapsto Ax^{-q}P(x) + Bx^q \Psi(x), \qquad (A, B) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0, 0\}.$$

b) Il reste à achever l'intégration de (16) *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que les solutions constituent un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2 (cf. corollaire 1 du théorème IX.5.4).

• Dans le 1er et le 3e cas ci-dessus, on a trouvé deux $\mathbb{R}_+^*$-solutions *linéairement indépendantes* (comparer leur comportement en 0). Donc l'équation (16) est complètement intégrée sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Dans le cas où $\rho = \frac{p}{2}$ ($p \in \mathbb{N}^*$ et impair) on n'a obtenu qu'une droite vectorielle de $\mathbb{R}_+^*$-solutions, engendrée par $\mathscr{F} : x \mapsto x^{p/2}\Phi(x)$. En raisonnant comme dans l'exemple 3, on est conduit à chercher une solution du type $x \mapsto \mathscr{F}(x) \operatorname{Log} x + x^{-p/2}\mathscr{G}(x)$, où $\mathscr{G}$ est DSE_0. Un calcul élémentaire montre que la C.N.S. vérifiée par $\mathscr{G}$ est :

$$(17) \qquad x\mathscr{G}'' + (x - p + 1)\mathscr{G}'' - \frac{p}{2}\mathscr{G} = -x^{p/2}(2\mathscr{F}' + \mathscr{F}).$$

Au second membre, on obtient la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \gamma_n x^n$, avec $\gamma_n = 0$ si

$n < p - 1$, $\gamma_{p-1} = -p$ et si $n \geqslant p$, $\gamma_n = -b_{n-p} - (2n - p + 2)\, b_{n-p+1}$. En posant $G = \sum_{n \geqslant 0} u_n X^n$, l'identification donne la relation de récurrence

$$\left(n - \frac{p}{2}\right) u_n + (n+1)(n-p+1)\, u_{n+1} = \gamma_n\,,$$

d'où en commençant par $\quad u_{p-1} = \dfrac{-p}{\dfrac{p}{2} - 1}$,

$$u_{p-2} = \frac{-p(p-1)}{\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}-2\right)}\,, \ldots, u_0 = \frac{-p!\,(p-1)!}{\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{p}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{p}{2}-p\right)}\,,$$

et en posant $u_n = \lambda_n b_{n-p}$ pour $n \geqslant p$, compte tenu de la relation de récurrence entre les b_k, il vient $\lambda_{n+1} - \lambda_n = \dfrac{1}{n - \dfrac{p}{2}} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-p+1}$, ce qui permet le calcul des u_n pour $n \geqslant p$. On remarque que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\in} O(\operatorname{Log} n)$, ce qui prouve que la série formelle obtenue pour G a pour rayon de convergence $+\infty$. De plus $\operatorname{val}(G) = 0$, et comme $\mathscr{G}$ vérifie formellement (17), la fonction $\mathscr{H} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \mathscr{F}(x) \operatorname{Log} x + x^{-p/2}\mathscr{G}(x)$ est solution de (16). Il est clair que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{H}$ sont linéairement indépendantes (comparer leur comportement quand $x \underset{>}{\to} 0$). Donc *le* $\mathbb{C}$-ev *des* $\mathbb{R}_+^*$-*solutions de* (16) *est dans ce cas* Vect $(\mathscr{F}, \mathscr{H})$, ce qui achève l'étude proposée.

Exercice 1 : En effectuant le changement $y = z\mathscr{F}$ dans l'équation (16) de l'exemple 5 ci-dessus, montrer qu'au voisinage de 0, la fonction $\mathscr{H}$ trouvée en dernier lieu est de la forme $x \mapsto C\mathscr{F}(x) \displaystyle\int^x \frac{e^{-t}\,dt}{t^{p+1}\Phi^2(t)}$, avec $C \in \mathbb{C}^*$. En développant $\dfrac{e^{-t}}{\Phi^2(t)}$ en série entière sous la forme $1 + \sum_{k \geqslant 1} A_k t^k$, montrer que $\displaystyle\int^x \frac{e^{-t}\,dt}{t^{p+1}\Phi^2(t)} = x^{-p}\, U(x) + A_p \operatorname{Log} x$, où $U(x) = \dfrac{-1}{p} + \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k x^k$. En déduire une relation simple entre le terme constant u_0 de $\mathscr{G}$ et le *résidu* à l'origine de $\dfrac{e^{-t}}{t^{p+1}\Phi^2(t)}$ (i.e. le coefficient de $1/t$ dans son développement à l'origine).

Exercice 2 : Etudier les équations différentielles scalaires suivantes, où la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (sauf la dernière).

a) $y + x(e^{y'} - y') - e^{-y'} - 1 = 0$ *b*) $yy' + yy'' - e^{2x} y'^2 = 0$ $\left(\text{poser } u = \dfrac{y'}{y}\right)$

c) $y'' - \dfrac{2}{1+x^2} y = 0$ *d*) $(1+x^2)y'' - y' - x^2 y = 0$ (e^x est solution)

e) $y''(1-y^2) + yy'^2 = 0$ *f*) $y''^2 - y^2 = 0$

g) $y'' + |y| = 0$ *h*) $x^2 y'' + 2xy' + y = x^k \operatorname{Log} x$ $(k \in \mathbb{N})$

i) $x^2 y'' + xy - (\alpha^2 + \beta x) y = 0$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. (Si $\beta \neq 0$ on cherchera les solutions du type de Fuchs et on intégrera l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$).

Exercice 3 : Etudier avec toute la rigueur possible les équations scalaires :

a) $y'' - y'^3 + y'^2 \operatorname{cotg} y = 0$ *b*) $y'' = \cos\,(ax + by + c)\;(ab \neq 0)$

c) $x^{1/2} yy'' + \frac{1}{2} y'^2 - yy' = 0 \;\left(\text{poser } u = \frac{y'}{y}\right)$ *d*) $yy' - x - y'^2 e^{y'} = 0$

e) $x(1+x)y' + (1-x)y - (1+x)|y|^{1/2} = 0.$

Exercice 4 : Intégrer les équations différentielles scalaires suivantes, où l'inconnue est à valeurs dans K :

a) $(1 + \operatorname{ch} x)y'' - y' \operatorname{sh} x - y = 1$ *b*) $yy''(x^2 + y^2) + (y - xy')^2 = 0$

c) $(1 - \cos 4x)y'' + 2y' \sin 4x - 8y = 0$ ($y = \operatorname{tg} x$ est solution)

d) $x(1-x)y'' + [\lambda - (\lambda + 2)x]\,y' - \lambda y = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}^*$) (penser aux solutions de Fuchs).

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation différentielle scalaire :

$$(x^2 - 1)y'' - n(n+1)y = 0\,.$$

a) Quelles sont les solutions DSE_0 ? On notera P celle qui est polynomiale non nulle.

b) Montrer que les solutions non polynomiales, sur tout intervalle où $x^2 - 1 \neq 0$, sont de la forme $x \mapsto P(x) \operatorname{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + Q(x)$, avec Q polynomiale.

c) Achever l'étude complète de l'équation.

Exercice 6 : Soit l'équation scalaire à inconnue à valeurs dans $\mathbb{C}$: $xy'' - y' - xf(x)y = 0$ (f donnée continue sur un intervalle I). Trouver f pour que l'équation admette deux solutions φ et ψ telles que $\varphi\psi = 1$, et intégrer alors l'équation.

Exercice 7 : On donne $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : I = [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue minorée par k^2. On considère l'équation $(\mathscr{E})\; y'' - f(x)y = 0$, où y est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit φ la I-solution de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi(a) = 1$ et $\varphi'(a) = b \in\,]-k, 0[$.

a) Prouver : $(\forall l \in\,]-b, k[)\;\; \varphi(x) \geqslant \operatorname{ch}\,(l(x-a)) + \frac{b}{l} \operatorname{sh}\,(l(x-a)).$

b) Quelle est l'allure du graphe de φ. Montrer que φ admet un minimum ; est-il unique ? Soit $x_0 \in I$ en lequel φ est minimum ; prouver que $x_0 \in\,]a, g(l)[$, g étant à préciser, ainsi que ses variations.

Exercice 8 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}^*$ de classe $\mathscr{C}^2$.

a) Montrer qu'il existe une fonction f telle que, pour toute solution y de $(y - x)y'' + F(y') = 0$, la fonction $(y - x)\, f \circ y'$ soit constante.

b) En déduire une méthode pour intégrer l'équation $(y - x)y'' + (1 + y')(1 + y'^2) = 0$.

Exercice 9 : Soit $(a, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. On donne l'équation scalaire $(\mathscr{E})$ $x(x-a)y'' + \lambda y' + \mu y = 0$.

a) Solutions DSE_0 ? Pour quels (λ, μ) y a-t-il une solution polynomiale ?

b) Solutions du type de Fuchs ?

c) Trouver (λ, μ) pour que $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ vérifie $(\mathscr{E})$, et dans ce cas intégrer *complètement* $(\mathscr{E})$.

d) Avec les couples (λ, μ) trouvés en *c*), intégrer : $x(x-a)\,y'' + \lambda y' + \mu y = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 10 : Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle scalaire $(\mathscr{E})\; xy'' + (p + 1 - ax^2)\,y' + bxy = 0$.

a) Montrer que $(\mathscr{E})$ possède une et une seule solution f qui soit DSE_0 et telle que $f(0) = 1$.

b) On suppose remplie la condition $(\mathscr{C})$ suivante : $(\mathscr{C})$ $p = 0$, ou : p est pair > 0 et $(\forall i \in [\![2, p]\!])$, $a(i - p - 2) - b \neq 0$. Chercher les solutions du type de Fuchs de $(\mathscr{E})$ et intégrer $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $(\mathscr{E})$ admet-elle des solutions rationnelles ?

c) On suppose $p = 0$. Chercher les séries entières T telles que $x \mapsto f(x) \operatorname{Log} x + T(x)$ soit solution de $(\mathscr{E})$ au voisinage de 0 ($x > 0$). Intégrer $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) On suppose $p > 0$ et $(\mathscr{C})$ *non satisfaite*. Chercher les séries entières V telles que $x \mapsto f(x)\operatorname{Log} x + x^{-p} V(x)$ soit solution de $(\mathscr{E})$ pour $x > 0$ et voisin de 0. Intégrer $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en distinguant deux cas, selon que f est polynomiale ou non.

Exercice 11 *(Equation de Gauss) :* On considère l'équation différentielle $(\mathscr{G})$ $(t^3 - t)\, y'' + (3\,t^2 - 1)\, y' + ty = 0$, où t est une variable réelle et y la fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}$.

PARTIE I

a) Quelles sont les solutions DSE_0 ? Préciser l'intervalle le plus grand où sont définies ces solutions et expliciter les coefficients de ces séries entières.

b) Montrer que les séries trouvées au *a*) ont pour somme les multiples de la fonction $F :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - t^2 \sin^2 \theta}}$.

c) Montrer que si $t \mapsto f(t)$ est solution de $(\mathscr{G})$ sur $]0, 1[$, $t \mapsto f(\sqrt{1 - t^2})$ l'est aussi.

d) Etudier complètement $(\mathscr{G})$ sur chacun des intervalles $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]-1, 1[$.

PARTIE II

a) On pose $u = 1/t$ et $Y(u) = y(t)$. Former l'équation différentielle $(\mathscr{G}')$ vérifiée par $Y(u)$ ssi $(\mathscr{G})$ est vérifiée par $y(t)$. On mettra $(\mathscr{G}')$ sous la forme $A(u)\, Y''(u) + B(u)\, Y'(u) + Y(u) = 0$, où A et B sont des polynômes à préciser.

b) Montrer que si f est solution de $(\mathscr{G})$, alors $u \mapsto uf(u)$ est solution de $(\mathscr{G}')$.

c) Intégrer complètement $(\mathscr{G})$ sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$.

d) Soit $\Psi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta}}$. Montrer que ψ est dérivable et que c'est une $\mathbb{R}_+^*$-solution de $(\mathscr{G})$. Quelles sont toutes les $\mathbb{R}_+^*$-solutions de $(\mathscr{G})$? les $\mathbb{R}_-^*$-solutions ?

e) Intégrer l'équation $(\mathscr{G})$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]-1, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

PARTIE III

On s'intéresse au comportement de Ψ au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

a) Montrer que toute solution $\neq 0$ définie sur un voisinage de 0^+ peut se mettre sous la forme $t \mapsto \lambda F(t) \operatorname{Log} t + W(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et où W est une série formelle de rayon > 0.

b) On pose $y(t) = F(t)\operatorname{Log} t + \varphi(t)$, où φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, 1[$. Former l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ vérifiée par φ ssi y est solution de $(\mathscr{G})$. Ecrire $(\mathscr{E})$ sous la forme $(t^3 - t)\,\varphi'' + (3\,t^2 - 1)\,\varphi' + t\varphi = C(t)\,F(t) + D(t)\,F'(t)$, où C et D sont des polynômes simples à préciser.

*c*1) On note $F(t) = \sum\limits_{n \geq 0} a_{2n}\, t^{2n}$ $(|t| < 1)$. Soit (λ_n) une suite réelle. Ecrire la C.N.S. pour que $\varphi(t) = \sum\limits_{n \geq 0} a_{2n}\, \lambda_n\, t^{2n}$ soit une série entière convergente définissant une fonction solution de $(\mathscr{E})$.

*c*2) En déduire toutes les séries entières $W(t)$ convergentes qui définissent des solutions de $(\mathscr{E})$. Préciser le rayon de ces séries entières.

*c*3) Calculer la constante α et la série entière S_1 telles que

$$(\forall t \in\ ]0, 1[)\,, \quad \Psi(t) = \alpha F(t)\operatorname{Log} t + \tilde{S}_1(t)\,.$$

*c*4) Etudier la fonction Ψ au voisinage de $+\infty$.

PARTIE IV

a) Soit $\tau \in\ ]0, 1[$. Dans l'intégrale qui représente $F\left(\dfrac{2\tau}{1 + \tau^2}\right)$ justifier le changement de variable défini par $\sin\theta = \dfrac{(1 + \tau^2)\sin\xi}{1 + \tau^2 \sin^2 \xi}$ et l'utiliser pour démontrer

(1) $$F\left(\frac{2\tau}{1 + \tau^2}\right) = (1 + \tau^2)\, F(\tau^2).$$

b) Démontrer que la seule série entière S qui vérifie formellement l'équation

$$S\left(\frac{2X}{1+X^2}\right) = (1+X^2)\,S(X^2)\,, \tag{2}$$

et de terme constant égal à 1, est la série entière qui définit F.

§ X.5 *DEUX EXEMPLES CONCRETS*

Exemple 1 : l'équation de Newton

On appelle ainsi l'équation différentielle scalaire du second ordre (que l'on rencontre en Mécanique), où la fonction inconnue est numérique, du type :

$$\boxed{y'' = f(y)}\,, \tag{1}$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée *continue* sur l'intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$.

Faisons l'hypothèse supplémentaire que f est **localement lipschitzienne** sur I, ce qui permet d'appliquer le théorème X.2.3 sur l'ouvert $\mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$. On sait que les solutions maximales de (1) sont de classe $\mathscr{C}^2$ (cf. § X.1).

A) Les *solutions constantes* de (1) sont les $\mathbb{R}$-solutions $x \mapsto c$, où $c \in z = f^{-1}(0)$. Soit φ une solution maximale non constante de (1) ; d'après le théorème X.2.3, il est alors certain que pour tout $x_0 \in \varphi^{-1}(z)$, on a : $\varphi'(x_0) \neq 0$.

B) Soit $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R} \times I \times \mathbb{R}$, et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale de (1) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_0'$. D'après A), φ est non constante ssi $y_0' \neq 0$ *ou* $f(y_0) \neq 0$. Nous le supposons désormais. En multipliant (1) par φ', on voit que $\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\varphi'^2)\right](x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u$, d'où en introduisant la fonction $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto y_0'^2 + 2\int_{y_0}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$:

$$(\forall x \in J) \quad \boxed{\varphi'^2(x) = G(\varphi(x))}\,. \tag{2}$$

Du fait que $y_0' \neq 0$ ou $f(y_0) \neq 0$, il y a un demi-voisinage de y_0 privé de y_0 sur lequel G reste > 0. Comme G est continue, il y a donc un intervalle ouvert maximal *et un seul* $\Lambda \subset I$, contenant y_0 si $y_0' \neq 0$, et dont y_0 est une extrémité si $y_0' = 0$ (dans ce dernier cas l'unicité provient du fait que G change de signe en y_0) et où G reste > 0. Tout va dépendre de ce qui se passe aux extrémités de Λ.

Premier cas : $\Lambda = I$: Alors φ' ne s'annule pas sur J (cf. (2)), et y reste donc de signe constant strict. Posons $\varepsilon = +1$ si φ' reste $>$

φ' reste < 0. On a :

$$(\forall x \in J) \quad x - x_0 = \varepsilon \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}, \quad \text{donc} \quad \varphi(x) = P^{\langle -1 \rangle}(x - x_0),$$

où P est la fonction strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$:

$$I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad z \mapsto \varepsilon \int_{y_0}^{z} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}.$$

Deuxième cas : $\boldsymbol{\Lambda =]\gamma, \delta[}$, avec $\boldsymbol{\gamma \in I}$, $\boldsymbol{\delta \in I}$, $\boldsymbol{\gamma < \delta}$. Alors $G(\gamma) = G(\delta) = 0$. Dans ce cas $\varphi(J) \subset [\gamma, \delta]$. En effet, supposons que $\varphi(x_1) > \delta$. Comme $\varphi(x_0) \in [\gamma, \delta]$, on aurait un $\xi \in J$ tel que $\varphi(\xi) = \delta$. Or $G(\delta) = 0$ et G reste > 0 sur Λ. Comme φ est non constante, $G(z)$ serait < 0 pour $z > \delta$ et voisin de δ. Il y aurait donc des $x \in J$ tels que $G(\varphi(x)) < 0$, ce qui contredit (2). Montrons ensuite que $J = \mathbb{R}$. En effet, si par exemple J était majoré, soit $c = \sup(J)$ (d'où $c \notin J$). Comme G est continue sur I et que $[\gamma, \delta] \subset I$, $G([\gamma, \delta])$ est un compact de $\mathbb{R}$, et (2) montre que $\varphi'(x)$ reste donc dans un compact M de $\mathbb{R}$. Donc l'application $x \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x))$ prend ses valeurs dans le compact $[\gamma, \delta] \times M$ de $I \times \mathbb{R}$, donc elle admet en c au moins une valeur d'adhérence dans ce compact, ce qui est incompatible avec le théorème X.2.2. De même J n'est pas minoré. Donc $J = \mathbb{R}$.

Examinons maintenant les diverses possibilités :

a) Si $f(\gamma) = f(\delta) = 0$, les valeurs γ et δ ne pouvant être prises par φ d'après A), on a : $\varphi(\mathbb{R}) \subset]\gamma, \delta[$. Donc d'après (2) φ' ne s'annule jamais. On a de nouveau :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad x - x_0 = \operatorname{sgn}(y_0') \int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}},$$

ce qui oblige les intégrales $\displaystyle\int_{y_0}^{\delta} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ et $\displaystyle\int_{\gamma}^{y_0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ à diverger.

A cela près, la situation est analogue à celle du premier cas, c'est-à-dire une fonction φ strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Si $f(\gamma) = 0$ et $f(\delta) \neq 0$, la valeur γ étant exclue pour φ d'après A), on a : $\gamma(\mathbb{R}) \subset]\gamma, \delta[$. Nécessairement $f(\delta) = \dfrac{1}{2} G'(\delta) < 0$, ce qui montre que δ est pour $1/\sqrt{G}$ un « pôle d'ordre 1/2 » et que l'intégrale $\displaystyle\int_{y_0}^{\delta} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ est donc convergente. Cela implique que la valeur δ est bien prise par φ pour au moins un $\beta \in \mathbb{R}$ (sinon l'intégrale divergerait). En réalité β est unique car si $\beta_1 \neq \beta$ est tel que $\varphi(\beta_1) = \delta$, φ

entre β et β_1 un minimum $\mu < \delta$ (on sait que φ n'est constante sur aucun ouvert non vide de $\mathbb{R}$ à cause du théorème X.2.3). En ce point μ, on aurait $G(\mu) = 0$, ce qui est absurde. Donc $\varphi(x) < \delta$ pour $x \neq b$, d'où (2) implique que φ' reste $\neq 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$. Comme $f(\delta) = \varphi''(\beta) < 0$, on voit que φ' reste > 0 sur $]-\infty, \beta[$ et < 0 sur $]\beta, +\infty[$. On a :

$$(\forall x \in\ ]-\infty, \beta])\qquad x - \beta = \int_\delta^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}\,;$$
$$(\forall x > \beta)\qquad x - \beta = -\int_\delta^{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}\,.$$

Du fait que $J = \mathbb{R}$, ces relations entraînent $\varphi(\mathbb{R}) =]\gamma, \delta]$ et la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma^{\frac{1}{2}(\gamma+\delta)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$. De plus $\hat{\varphi} : x \mapsto \varphi(2\beta - x)$ vérifie l'équation différentielle (1), et $\hat{\varphi}(\beta) = \varphi(\beta)$, $\hat{\varphi}'(\beta) = -\varphi'(\beta) = 0 = \varphi'(\beta)$. Le théorème d'unicité X.2.3 permet de conclure $\varphi = \hat{\varphi}$, autrement dit : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi(2\beta - x) = \varphi(x)$ (symétrie du graphe de φ par rapport à $x = \beta$).

c) Si $f(\gamma) \neq 0$ et $f(\delta) = 0$ une étude analogue montre que $\varphi(\mathbb{R}) = [\gamma, \delta[$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ unique tel que $\varphi(\alpha) = \gamma$, que $\varphi'(x) < 0$ sur $]-\infty, \alpha[$ et $\varphi'(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$, que $\varphi(2\alpha - x) = \varphi(x)$ pour tout x, que l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ converge et que l'intégrale $\displaystyle\int^\delta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ diverge.

d) Si $f(\gamma) \neq 0$ et $f(\delta) \neq 0$, alors $f(\gamma) = \frac{1}{2}G'(\gamma) > 0$ et $f(\delta) = \frac{1}{2}G'(\delta) < 0$. Donc l'intégrale $S = \displaystyle\int_\gamma^\delta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ converge. Puisque $\varphi(\mathbb{R})$ est un sous-intervalle de $[\gamma, \delta]$, pour prouver que $\varphi(\mathbb{R}) = [\gamma, \delta]$ il suffit de prouver que $\gamma \in \varphi(\mathbb{R})$ et $\delta \in \varphi(\mathbb{R})$. Supposons par exemple $\delta \notin \varphi(\mathbb{R})$. Chacune des hypothèses $\gamma \in \varphi(\mathbb{R})$ (resp. $\gamma \notin \varphi(\mathbb{R})$) conduirait à une situation analogue à celle du *c*) (resp. du *a*)) ci-dessus, et l'intégrale S divergerait en δ (resp. en γ et δ), ce qui ne tient pas. Donc $\varphi(\mathbb{R}) = [\gamma, \delta]$. Notons $A = \varphi^{-1}(\gamma)$ et $B = \varphi^{-1}(\delta)$. Ce sont des parties fermées de $\mathbb{R}$. De plus elles sont *discrètes,* car si par exemple $\alpha \in A$, on a : $\varphi''(\alpha) = f(\gamma) > 0$, donc ($\varphi$ étant de classe $\mathscr{C}^2$) φ présente un minimum strict en α, d'où α est bien isolé dans A. L'ensemble $A \cup B$ n'est autre que $\varphi'^{-1}(0)$ (à cause de (2)). Puisque A et B sont fermés, non vides, discrets et disjoints dans $\mathbb{R}$, il est loisible de choisir $\alpha \in A$ et $\beta \in B$ tels que $]\alpha, \beta[\, \cap\, (A \cup B) = \varnothing$, où on suppose que $\alpha < \beta$ (si on est forcé de prendre $\alpha > \beta$, les modifications à ce qui suit sont mineures).

Puisque $\varphi(x) \in\ ]\gamma, \delta[$ pour $x \in\ ]\alpha, \beta[$, $\varphi'(x)$ reste $\neq$

(toujours à cause de (2)), et comme $\varphi(\alpha) = \gamma < \delta = \varphi(\beta)$, φ' reste > 0 sur $]\alpha, \beta[$. Soit $\widehat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(2\alpha - x)$. En raisonnant comme en b), on voit que $\widehat{\varphi} = \varphi$, d'où $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\varphi(2\alpha - x) = \varphi(x)$. De même $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\varphi(2\beta - x) = \varphi(x)$. On en déduit : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\varphi(2\beta - (2\alpha - x)) = \varphi(2\alpha - x) = \varphi(x)$. Donc si l'on pose $T = 2(\beta - \alpha)$, on voit que la fonction φ vérifie

$$(3) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \boxed{\varphi(x + T) = \varphi(x)} \; ,$$

autrement dit *la fonction φ est T-périodique.* Comme φ croît strictement sur $[\alpha, \beta]$ et par symétrie décroît sur $[\beta, 2\beta - \alpha]$, **T est même la période exacte de φ.** On a donc $A = \alpha + T\mathbb{Z}$, $B = \beta + T\mathbb{Z}$ et $A \cup B = \alpha + \frac{T}{2}\mathbb{Z}$. Chaque droite d'équation $x = \xi$, où $\xi \in \alpha + \frac{T}{2}\mathbb{Z}$, est axe de symétrie du graphe de φ.

Troisième et quatrième cas. Il reste à examiner les cas $\Lambda = I \cap]-\infty, \gamma[$, avec $\gamma \in I$, et $\Lambda =]\gamma, +\infty[\cap I$, avec $\gamma \in I$, mais ils n'entraînent pas de situation fondamentalement nouvelle. Disons brièvement ce qui arrive dans le troisième cas :

a) Si $f(\gamma) = 0$, alors $\varphi(J) = \Lambda$ et φ est strictement monotone sur J. On est dans une situation analogue au premier cas.

b) Si $f(\gamma) \neq 0$, alors $f(\gamma) < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int^{\gamma} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{G(t)}}$ converge, $\varphi(J) = I \cap]-\infty, \gamma]$. Il y a un unique $\alpha \in J$ tel que $\varphi(\alpha) = \gamma$ (α est l'unique zéro de φ') ; J est symétrique par rapport à α ; $(\forall x \in J)$ on a $\varphi(2\alpha - x) = \varphi(x)$; φ est strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha] \cap J$ et $[\alpha, +\infty[\cap J$.

Conclusion : Ce qui frappe dans l'étude précédente, c'est qu'il n'est pas nécessaire de connaître une expression « explicite » des solutions d'une équation différentielle pour en avoir les propriétés essentielles. Ici nous avons utilisé un minimum de renseignements sur la fonction f de l'équation $y'' = f(y)$ pour trouver les propriétés essentielles (sens de variation, symétries, périodicité) de la solution maximale φ de (1) telle que $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y'_0$, et cela en utilisant seulement les résultats généraux du § X.2, bien aidés cependant par la relation (2) : $\varphi'^2(x) = G(\varphi(x))$.

Exemple 2 : un système différentiel de Volterra [1]

Nous aurons besoin ici du cas particulier suivant du *théorème de relèvement* qui sera vu au tome 4 :

---

[1] Vito *Volterra* (1860-1940), mathématicien et physicien italien.

PROPOSITION X.5.1

> *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{U}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$).*
>
> a) *Il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $(\forall t \in I)$ $f(t) = \exp(\mathrm{i}\varphi(t))$.*
>
> b) *Si φ est choisie comme en* a), *l'ensemble des fonctions $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$* **continues** *telles que $(\forall t \in I)$ $f(t) = \exp(\mathrm{i}\psi(t))$ est l'ensemble des fonctions $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ où $(\forall m \in \mathbb{Z})$ $(\forall t \in I)$ $\varphi_m(t) = \varphi(t) + 2m\pi$.*
>
> c) *En conséquence, soit $t_0 \in I$ et soit $\theta_0 \in \arg(f(t_0))$: il y a une et une seule fonction $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(t) = \exp(\mathrm{i}\psi(t))$ pour tout $t \in I$ et que $\psi(t_0) = \theta_0$. Et cette fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

Démonstration :

Prouvons d'abord *b*). Il est clair que toutes les φ_m satisfont les conditions indiquées. Réciproquement si ψ vérifie $f(t) = \exp(\mathrm{i}\psi(t))$, alors $(\forall t \in I)$ $\exp(\mathrm{i}(\varphi(t) - \psi(t))) = 1$, donc $\varphi(t) - \psi(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mais $\varphi - \psi$ est continue et comme I est *connexe*, cela entraîne que $\varphi - \psi$ est constante. Donc $\psi = \varphi_m$ pour un $m \in \mathbb{Z}$.

Il reste à prouver l'existence d'au moins une $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que, pour $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \arg(f(t_0))$ donnés, on ait $\varphi(t_0) = \theta_0$ et $\exp(\mathrm{i}\varphi(t)) = f(t)$ pour tout $t \in I$. Or, soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \theta_0 - \mathrm{i}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^k$. Puisque $f(t)\,\bar{f}(t) = 1$ pour tout $t \in I$, par dérivation, on a $f'(t)\,\bar{f}(t) + \overline{f'(t)\,\bar{f}(t)} = 0$. Donc $f'(t)\,\bar{f}(t) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. Puisque $\dfrac{\mathrm{i}f'(t)}{f(t)} \in \mathbb{R}$, c'est que φ est à valeurs réelles. On a bien $\varphi(t_0) = \theta_0$. Enfin, soit $g(t) = \exp(\mathrm{i}\varphi(t))$: g est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$, et $g'(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}g(t)$, donc $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{f(t)}{g(t)}\right) = 0$, ce qui prouve que $\dfrac{f}{g}$ est constante, et comme $f(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = g(t_0)$, il s'ensuit que $g = f$. ■

Concrètement, cette proposition s'utilise ainsi : soit u et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k (k \geqslant 1)$ telles que $(\forall t \in I)$ $u^2(t) + v^2(t) = 1$. On a alors au moins une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $u(t) = \cos\varphi(t)$, $v(t) = \sin\varphi(t)$ pour tout $t \in I$. Une telle fonction φ étant trouvée, on les a toutes (par addition de $C \in 2\pi\mathbb{Z}$). Et si l'on impose à φ la condition $\varphi(t_0) = \theta_0$, où $\theta_0 \in \arg(u(t_0) + \mathrm{i}v(t_0))$, alors φ existe et est unique (il suffit de considérer la fonction $u + \mathrm{i}v$ pour prouver toutes ces assertions)

Donnons-nous maintenant des réels a, b, c, d strictement positifs, et considérons le système différentiel scalaire carré suivant :

$$(4) \qquad \boxed{x' = ax - bxy \; ; \quad y' = -cy + dxy},$$

où les fonctions inconnues x, y de la variable réelle t sont des *fonctions numériques à valeurs strictement positives*. Ce système se rencontre en Biologie quand on étudie la variation en fonction du temps t du nombre x d'individus d'une espèce vivante disposant d'une nourriture abondante et du nombre y d'individus d'une seconde espèce qui se nourrit exclusivement de la première, tout cela en l'absence d'autoconcurrence [1].

Nous voyons que les seconds membres de (4) sont indépendants de t et polynomiaux en (x, y). Donc sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, le théorème X.2.1 s'applique. En conséquence, pour chaque $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$, il y a une et une seule solution maximale (x, y) de (4), que nous noterons Φ_{t_0, x_0, y_0}, telle que $\Phi_{t_0, x_0, y_0}(x_0) = (x_0, y_0)$; et cette solution est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $J(t_0, x_0, y_0)$ son intervalle de définition, que nous savons *ouvert*. Il est clair que si $\Phi : t \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est solution, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Psi : t_0 + J \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \Phi(t - t_0)$ est aussi solution, ce qui ramène l'étude à la recherche des solutions maximales Φ_{0, x_0, y_0}, les autres s'en déduisant par translation sur t. On fixe donc $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et on étudie la solution maximale $\Phi_{0, x_0, y_0} = (x, y)$ de (4).

A) Pour que Φ_{0, x_0, y_0} soit *constante*, il faut et il suffit que $x_0 = \dfrac{c}{d}$ et $y_0 = \dfrac{a}{b}$ (elle est alors définie sur $\mathbb{R}$). Nous noterons Ω le point $\left(\dfrac{c}{d}, \dfrac{a}{b}\right)$ de $\mathbb{R}^2$, et $J = J_{0, x_0, y_0}$.

B) *Supposons* $(x_0, y_0) \neq \Omega$; alors Φ_{0, x_0, y_0} est non constante. En combinant les équations de (4) on voit que $dx' + by' = adx - cby = a(-c + dx) + c(a - by) = a\dfrac{y'}{y} + c\dfrac{x'}{x}$. On est donc conduit à considérer la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = dx + by - c \operatorname{Log} x - a \operatorname{Log} y$, $(\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, qui vérifie, quand on la compose avec une solution de (4), la propriété d'avoir une dérivée nulle, donc de *rester constante*, au moins sur un intervalle $V \subset J$, voisinage de 0. Il est plus pratique, en notant λ la valeur constante de $\exp(f(x(t), y(t)))$ sur V, d'utiliser la fonction $F = \exp(f) - \lambda : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto e^{du + bv} u^{-c} v^{-a} - \lambda$, de sorte que $(\forall t \in V)$, $(x(t), y(t)) \in \Gamma$, où Γ désigne la courbe de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ d'équation $F(u, v) = 0$.

---

[1] Bien que les conditions favorables à l'obtention d'un système aussi simple que (4) soient rarement réunies dans la Nature, cela peut donner quelques indications pour des populations à faible densité de proies et de prédateurs.

C) *Etude de la courbe Γ.* La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On a :

(5) $$\frac{\partial F}{\partial u} = u^{-c-1} v^{-a} e^{du+bu}(-c+du) ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = u^{-c} v^{-a-1} e^{du+bv}(-a+bv) .$$

Pour $u > 0$ fixé, voici le tableau de variations de $F_{[u]} : v \longrightarrow F(u, v)$ sur $\mathbb{R}_+^2$:

v	0			a/b			$+\infty$
$F'_{[u]} = \frac{\partial F}{\partial v}$	‖		$-$	0		$+$	
$F_{[u]}(v)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$\mu(u) = e^{du+a} u^{-c} \left(\frac{a}{b}\right)^{-a} - \lambda$	$\nearrow$		$+\infty$

Quant à $\mu(u)$, on l'étudie facilement grâce à la dérivée $\mu'(u) = \left(\frac{a}{b}\right)^{-a} u^{-c-1} e^{du+a}(-c+du)$

u	0			c/d			$+\infty$
$\mu'(u)$	‖		$-$	0		$+$	
$\mu(u)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	$\rho = e^{a+c} \left(\frac{c}{d}\right)^{-c} \left(\frac{a}{b}\right)^{-a} - \lambda$	$\nearrow$		$+\infty$

Pour $t \in V$, on a $x(t) > 0$, $y(t) > 0$. Il est impossible que $x'(t)$ et $y'(t)$ soient nuls, sinon on aurait d'après (4) $(x(t), y(t)) = \Omega$ et cela conduirait comme on l'a vu à une solution constante. Or $(\forall t \in V)$, $(x(t), y(t)) \in \Gamma$. Donc Γ a au moins deux points (le cas $\Phi =$ Cte étant exclu). Donc $\rho < 0$ (sinon ce serait incompatible avec les tableaux ci-dessus). Nous noterons ξ_1 et ξ_2 les deux zéros qui en résultent pour $\mu \left(0 < \xi_1 < \frac{c}{d} < \xi_2\right)$. La théorie des fonctions implicites (appliquée à F, compte tenu de (5)) montre alors que la courbe Γ est réunion des graphes de deux fonctions continues $U_1, U_2 : [\xi_1, \xi_2] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $U_1(\xi_1) = U_1(\xi_2) = \frac{a}{b}$ et $U_2(\xi_1) = U_2(\xi_2) = \frac{a}{b}$, telles que $U_1(u) < \frac{a}{b}$ pour $u \in \,]\xi_1, \xi_2[$ et $U_2(u) > \frac{a}{b}$ pour $u \in \,]\xi_1, \xi_2[$, ces deux fonctions étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\xi_1, \xi_2[$. De façon tout à fait symétrique, il existe deux réels $\zeta_1, \zeta_2 \left(0 < \zeta_1 < \frac{a}{b} < \zeta_2\right)$ et des fonctions $V_1, V_2 : [\zeta_1, \zeta_2] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continues sur $[\zeta_1, \zeta_2]$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\zeta_1, \zeta_2[$, égales à $\frac{c}{d}$ en ζ_1 et

$V_1 < \dfrac{c}{d}$ et $V_2 > \dfrac{c}{d}$ sur $]\zeta_1, \zeta_2[$ et que Γ soit l'union des graphes de V_1 et V_2 (cf. fig. 1).

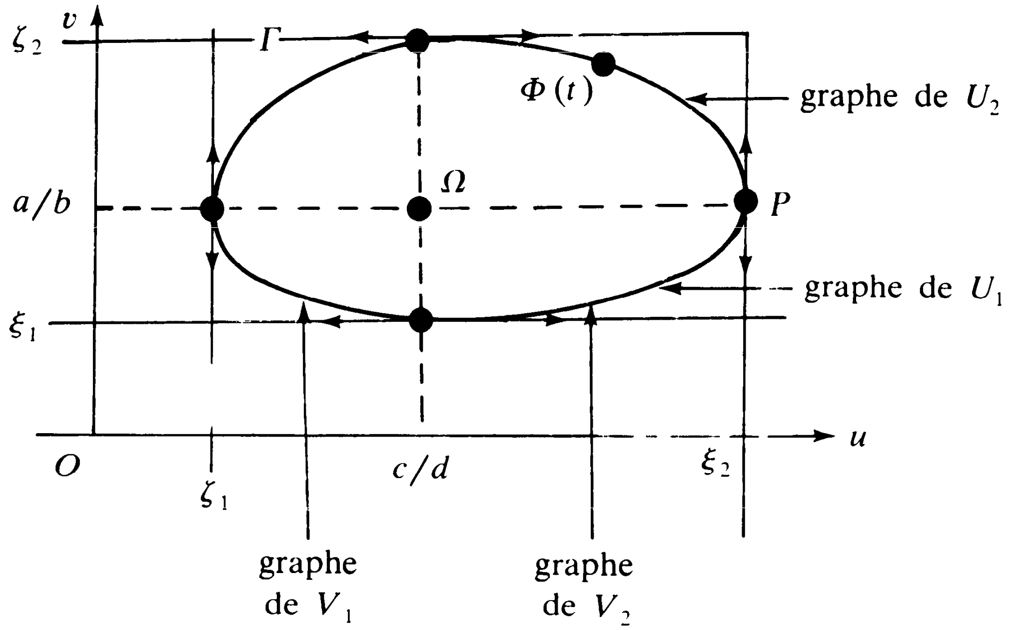


Fig. 1.

Notons au passage que $U_1\left(\dfrac{c}{d}\right) = \zeta_1$, que $U_2\left(\dfrac{c}{d}\right) = \zeta_2$, et symétriquement $V_1\left(\dfrac{a}{b}\right) = \xi_1$, $V_2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \xi_2$; $\zeta_1 = \text{Min}\ (U_1)$, $\zeta_2 = \text{Max}\ (U_2)$, $\xi_1 = \text{Min}\ (V_1)$, $\xi_2 = \text{Max}\ (V_2)$.

En conséquence, Γ est un *compact connexe* de $(\mathbb{R}_+^*)^2$, qui ne contient pas Ω. D'après (5), $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}, \dfrac{\partial F}{\partial v}\right)$ reste $\neq (0, 0)$ sur Γ, donc *Γ est une sous-variété de dimension* 1 *et de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}^2$.

D) *Etude de la trajectoire de* $\Phi = \Phi_{0, x_0, y_0}$. Par définition, c'est l'image $\Phi(\mathbb{R})$.

a) *Montrons d'abord que* $\Phi(\mathbb{R}) \subset \Gamma$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\Phi(J \cap \mathbb{R}_+) \not\subset (\mathbb{R}_+^*)^2$ (ou bien $\Phi(J \cap \mathbb{R}_-) \not\subset (\mathbb{R}_+^*)^2$, mais l'argument serait analogue). Soit alors $m = \text{Min}\ \{t \in \mathbb{R}_+ \cap J \mid \Phi(t) \notin (\mathbb{R}_+^*)^2\}$ nombre qui serait défini et > 0 (car Φ est continue et $\Phi(0) = (x_0, y_0) \in \Gamma$). Pour $t \in [0, m[$ on aurait $\Phi(t) \in \Gamma$ car $f'(t)$ serait nul sur tout l'intervalle $[0, m[$. D'après l'étude de Γ, cela entraînerait : $(\forall t \in [0, m[)\ x(t) \geqslant \xi_1 > 0$ et $y(t) \geqslant \zeta_1 > 0$. Comment concilier alors la continuité de Φ en m et l'hypothèse $\Phi(m) \notin (\mathbb{R}_+^*)^2$? Donc $\Phi(J) \subset \Gamma$.

b) *Montrons que* $J = \mathbb{R}$. Etant donné que Γ est compact, c'est une conséquence immédiate du théorème X.2.2 (une fonction à v compact y admet, en tout point où cela a un sens, au moins une valeur d'adhérence).

Montrons enfin que $\Phi(\mathbb{R}) = \Gamma$. Pour cela posons $\overrightarrow{W}(t) = \overrightarrow{\Omega\Phi}(t) = (X(t), Y(t)) = \left(x(t) - \frac{c}{d}, y(t) - \frac{a}{b}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$, et $r(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$. Comme $\Omega \notin \Gamma$, $r(t)$ reste > 0 : c'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après la proposition X.5.1, on a donc une fonction $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $(\forall t \in \mathbb{R})$ $X(t) = r(t) \cos \theta(t)$, $Y(t) = r(t) \sin \theta(t)$. Compte tenu de (4), on a

$$X' = \frac{-b}{d} Y(c + dX) \; ; \quad Y' = \frac{d}{b} X(a + bY) , \tag{6}$$

d'où

$$\begin{aligned} r^2 \theta'(t) = XY' - YX' = dX^2\left(\frac{a}{b} + Y\right) + bY^2\left(\frac{c}{d} + X\right) = \\ = dX^2 y + bY^2 x \geqslant dX^2 \zeta_1 + bY^2 \xi_1 \geqslant \sigma r^2 , \end{aligned}$$

en posant $\sigma = \operatorname{Min}(d\zeta_1, b\xi_1) > 0$. Comme $r > 0$, on en déduit que

$$\boxed{\theta'(t) \geqslant \sigma > 0} \; .$$

Il en résulte que $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *bijectif*, et que c'est même un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit alors $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(t_0) = 0$, d'où $\Phi(t_0) = P = \left(\xi_2, \frac{a}{b}\right)$, puis t_1 le réel tel que $\theta(t_1) = 2\pi$, d'où $t_1 > t_0$ et $\Phi(t_1) = P$.

En vertu de la remarque du début, la fonction $t \mapsto \Phi(t + t_1 - t_0)$ est une $\mathbb{R}$-solution de (4), mais comme elle prend la valeur $\Phi(t_0) = \Phi(t_1)$ en $t = t_0$, ce ne peut être que Φ. En conséquence, en posant $T = t_1 - t_0$, *la fonction* Φ *est* T*-périodique.*

Les variations simultanées de X et Y s'étudient simplement à l'aide de (6), et compte tenu de la bijectivité et de la croissance de $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, elles prouvent que $\Phi|_{[t_0, t_0 + T[}$ est une bijection de $[t_0, t_0 + T[$ sur Γ.

Donc : 1) T *est la période exacte de* Φ ; 2) *la trajectoire* $\Phi(\mathbb{R})$ *est* Γ.

E) Enfin on voit que cette trajectoire est décrite, d'un mouvement périodique, une infinité de fois, le vecteur $\overrightarrow{W}(t)$ tournant dans le sens direct, puisque $\theta'(t) > 0$ pour tout t.

Si l'on revient au problème concret, cela constitue la première loi biologique formulée par Volterra sous le nom de *loi du cycle périodique*. En intégrant $\frac{y'}{y} = -c - \mathrm{d}x$ sur une période, on obtient $\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{c}{d}$, abscisse de Ω : c'est la seconde loi de Volterra, celle de la *conservation des moyennes* (valable également pour y).

Exercice 1 : Etudier les graphes dans $\mathbb{R}^2$ des solutions maximales des équations de Newton suivantes :

a) $y'' = y^2 - 1$ *b*) $y'' = 2y(y^2 - 1)$

c) $y'' = y$ *d*) $y'' = 2y^2(3 - 4y)$

e) $y'' = 3[2y^{1/3} - 3y]$ (attention au fait que le second membre n'est pas localement lipschitzien sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2 : On reprend l'équation de Newton (1) du texte. Soit $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ la solution maximale telle que $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, et soit $G(t) = y_0'^2 + 2\int_{y_0}^{t} f(u)\,du \ (t \in I)$. On suppose $y_0' > 0$ et on garde la notation Λ pour l'intervalle ouvert défini dans le texte.

a) Dans le cas où $\Lambda =]\gamma, \delta[$, avec $\gamma \in I$, $\delta \in I$, $\gamma < \delta$ et $f(\gamma) f(\delta) < 0$, on pose $H(t) = \dfrac{G(t)}{(\delta - t)(t - \gamma)}$ pour $t \in]\gamma, \delta[$, $H(\gamma) = \dfrac{2f(\gamma)}{\delta - \gamma}$, $H(\delta) = \dfrac{-2f(\delta)}{\delta - \gamma}$. Vérifier que H est continue sur $[\gamma, \delta]$ et qu'elle y reste > 0. On pose alors $h(\tau) = H\left(\dfrac{\delta - \gamma}{2}\sin\tau + \dfrac{\delta + \gamma}{2}\right)$ pour $\tau \in \mathbb{R}$. Montrer que φ (qui, rappelons le, est définie sur $\mathbb{R}$) est donnée par la formule : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \varphi(x) = \dfrac{\delta - \gamma}{2}\sin(g(x)) + \dfrac{\delta + \gamma}{2}$, où g est la fonction réciproque de $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\theta \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}}$, et $\theta_0 = \operatorname{Arc\,sin}\left[\dfrac{2}{\delta - \gamma}\left(y_0 - \dfrac{\delta + \gamma}{2}\right)\right]$.

Prouver que la période de φ est $T = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}}$.

b) Dans les autres cas, obtenir des formules voisines en utilisant les fonctions ch ou sh.

Exercice 3 : Soit le système différentiel carré suivant où les fonctions inconnues x et y de la variable réelle t sont à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$(S) \qquad x' = y\ ;\quad y' = -x + (1 - x^2 - y^2)\,y\,.$$

On donne une solution maximale (φ, ψ) de (S) définie sur J. Soit $u = 1 - \varphi^2 - \psi^2$.

a) Montrer : $(\forall (t_0, t) \in J^2)\ u(t) = u(t_0)\exp\left(-2\displaystyle\int_{t_0}^{t} \psi^2(\tau)\,d\tau\right)$.

b) On suppose : $\exists t_0 \in J \mid u(t_0) > 0$. Montrer que $J = \mathbb{R}$.

c) Discuter l'existence d'un $T > 0$ tel que φ et ψ soient T-périodiques.

d) On suppose qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $0 < u(t_0) < 1$. Démontrer : $u(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; $(\forall t)\ 0 < u(t) < 1$; $u(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 1$; les zéros de φ (resp. ψ) forment une partie fermée discrète de $\mathbb{R}$ ni majorée ni minorée.

Indication : Poser $r(t) = \sqrt{(\varphi^2 + \psi^2)(t)}$. Considérer $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que $\varphi = r\cos\theta$, $\psi = r\sin\theta$, calculer $\theta'(t)$ et $r'(t)$ en fonction de $r(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$.

e) Entamer l'étude de (φ, ψ) lorsqu'il existe $t_0 \in J$ tel que $u(t_0) < 0$. A-t-on alors nécessairement $J = \mathbb{R}$?

Exercice 4 : Soit l'équation de Newton $y'' + \omega^2 y + 2\lambda y^3 = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrer que toute solution φ telle que $\varphi'(0) = 0$ est périodique.

Exercice 5 : Soit $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue telle qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$ $q(t) \geq m$. On considère l'équation scalaire à l'inconnue y numérique : $(\mathscr{E})\ y'' + qy = 0$.

a) Soit u une $\mathbb{R}_+$-solution non nulle de $(\mathscr{E})$. Prouver que $r = \sqrt{u^2 + u'^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et qu'il existe $\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $u = r\sin\theta$, $u' = r\cos\theta$.

b) Etudier la fonction θ. En déduire que u possède une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (quelques propriétés classiques des fonctions de Bessel) : Si

($\mathscr{B}_\nu$) l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante, que l'on étudie sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

($\mathscr{B}_\nu$) $$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0 .$$

On suppose connues les propriétés élémentaires de la fonction Γ (cf. tome 2, § VIII.4) et notamment : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ et $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})\quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

PARTIE I

a) On suppose $\nu \notin \mathbb{N}$. Montrer que ($\mathscr{B}_\nu$) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ deux solutions y_ν et $y_{-\nu}$ du type : $y_\nu(x) = x^\nu S_\nu(x)$, $y_{-\nu}(x) = x^{-\nu} S_{-\nu}(x)$ où S_ν et $S_{-\nu}$ sont deux séries entières de terme constant 1, de rayon $+\infty$, que l'on précisera avec soin. En déduire dans ce cas l'ensemble des solutions de ($\mathscr{B}_\nu$).

b) On suppose toujours $\nu \notin \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{x^{\nu+2r}}{2^{\nu+2r}\, r!\, \Gamma(\nu + r + 1)} \quad \text{et } J_{-\nu}(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \frac{x^{-\nu+2r}}{2^{-\nu+2r}\, r!\, \Gamma(-\nu + r + 1)} .$$

Démontrer les relations (1) $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x)$ et (2) $J_\nu'(x) = \dfrac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$.

Déduire de (2) que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si on note Φ l'opération qui, à toute fonction dérivable f, associe la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x} f'(x)$, et si l'on note $L_\nu(x) = x^{-\nu} J_\nu(x)$, on a :

(3) $$x^{-\nu-r} J_{\nu+r}(x) = (-1)^r \Phi^{\langle r \rangle}(L_\nu)(x).$$

c) Reconnaître les fonctions usuelles simples égales, sur $\mathbb{R}_+^*$, à $J_{1/2}$ et à $J_{-1/2}$. Soit U la série entière telle que $U(x^2) = \dfrac{\sin x}{x}$. A l'aide de (3), montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$J_{k+1/2}(x) = (-1)^k \frac{(2x)^{k+1/2}}{\sqrt{\pi}} U^{(k)}(x^2).$$

PARTIE II

On étudie l'équation ($\mathscr{B}_0$). On désigne par J_0 la série entière telle que

$$J_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{2^{2r}(r!)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} x^{2r} .$$

a) Trouver les solutions de ($\mathscr{B}_0$) sur $\mathbb{R}_+^*$ égales à la somme d'une série entière.

b) Montrer *a priori* qu'il existe une série entière T telle que la fonction $x \mapsto J_0 \operatorname{Log} x + T(x)$ soit solution de ($\mathscr{B}_0$) sur un intervalle de type $]0, A[$, $A > 0$.

c) Chercher par identification les séries entières satisfaisant la condition du *b*) : on formera d'abord une équation différentielle vérifiée par $T(x)$. On posera $T(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} s_n x^{2n}$ et on déterminera les (s_n). On en déduira les séries $T(x)$ qui conviennent, et leur rayon de convergence.

d) Quelles sont les solutions de ($\mathscr{B}_0$) sur $\mathbb{R}_+^*$?

PARTIE III

On suppose maintenant $\nu \in \mathbb{N}^*$. On note J_ν la série entière $\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{\nu+2r}}{2^{\nu+2r}\, r!\, (\nu+r)!}$ et on pose $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$. Préciser le rayon de J_ν.

a) Solutions de ($\mathscr{B}_\nu$) sur $\mathbb{R}_+^*$ égales à la somme d'une série entière ?

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. On pose $f(x) = J_\nu(\lambda x)$, $g(x) = J_\nu(\mu x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrer (4) $(\lambda^2 - \mu^2) \displaystyle\int_0^1 x f(x) g(x)\, \mathrm{d}x = J_\nu(\lambda) g'(1) - J_\nu(\mu) f'(1)$.

Indication : Penser aux équations différentielles vérifiées par f et g.

c) A l'aide de (4) démontrer par l'absurde que tout nombre complexe z tel que $J_\nu(z) = 0$ est dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'une étude analogue s'applique à la série entière J_0.

d) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle $(E)\ y''(t) + \varphi(t) y(t) = 0$, que l'on étudie sur $\mathbb{R}_+$.

$d1$) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution maximale non nulle de (E). Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $r(t) = \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}$. Prouver que $(\forall t)\, r(t) > 0$ et que r est de classe $\mathscr{C}^1$. Prouver l'existence de $\theta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*)$ $f(t) = r(t) \sin \theta(t)$ et $f'(t) = r(t) \cos \theta(t)$. Calculer $\theta'(t)$ en fonction de $\varphi(t)$, $\sin \theta(t)$, $\cos \theta(t)$. En déduire que θ est strictement croissante.

$d2$) On suppose l'existence de $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(t) \geqslant m$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que θ est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[\theta(0), +\infty[$ et que $\theta^{\langle -1 \rangle}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\theta(0), +\infty[$. En déduire que l'ensemble $\mathscr{N}$ des zéros de f est l'ensemble des valeurs d'une suite strictement croissante de limite $+\infty$.

$d3$) f ayant la même signification qu'en $d1$) et $d2$), on suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \varphi(t) = l$. Si $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite strictement croissante des zéros de f, donner un équivalent de z_k quand $k \longrightarrow +\infty$.

e) Soit $y(x)$ une solution non nulle de $(\mathscr{B}_\nu)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Former l'équation différentielle vérifiée par $Y(x) = x^{1/2} y(x)$. Ecrire cette équation sous la forme (E). Faire une synthèse de la partie III pour en déduire l'étude des zéros de la série entière J_ν dans $\mathbb{C}$.

PARTIE IV

On fixe $\nu \in \mathbb{N}^*$ et on pose $J_\nu(x) = x^\nu \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n}$.

a) Soit $T : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et soit $y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto J_\nu(x) \operatorname{Log} x + x^{-\nu} T(x)$. Montrer que, pour que y vérifie $(\mathscr{B}_\nu)$, il faut et il suffit que T vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre $(\mathscr{C})$ que l'on déterminera (le second membre de $(\mathscr{C})$ s'exprime simplement à l'aide de $J'_\nu(x)$).

b) Soit (s_n) une suite de complexes. Ecrire les C.N.S. portant sur les (s_n) pour que la série entière $\sum b_{2n-\nu} s_n x^{2n}$ vérifie formellement $(\mathscr{C})$. Sans chercher à expliciter s_n, mettre ces conditions sous la forme : $(\forall n \geqslant 1)$ $(n - \nu)\, s_n - (n + \nu)\, s_{n-1} = \gamma_n$. Discuter soigneusement la manière de déduire l'ensemble des suites (s_n) qui conviennent à partir de l'une d'elles.

c) On note (σ_n) celle des suites obtenues ci-dessus pour laquelle $s_\nu = 0$, et on pose $\tau(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{2n} \sigma_n x^{2n}$. Quel est le rayon de la série entière τ?

Quel est l'ensemble des solutions de $(\mathscr{B}_\nu)$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Quel est l'ensemble des solutions de $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Appendice 1

INTÉGRATION PAR COUCHES

Intégrales multiples à paramètres

Les théorèmes de continuité, de dérivation sous le signe $\int$, des intégrales dépendant de paramètres vues au tome 2, chapitre VIII, § 5, s'étendent sans difficulté aux intégrables multiples, pratiquement mot à mot pour les fonctions *bornées intégrables,* avec quelques aménagements mineurs pour les fonctions de $\mathscr{L}^1(A, K)$ où A est une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Indiquons seulement les résultats :

THÉORÈME 1

*Soit Λ un espace topologique et A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, puis $f : \Lambda \times A \longrightarrow K$, $(\lambda, x) \mapsto f(\lambda, x)$ et $g \in \mathscr{L}^1(A, \mathbb{R})$, g **positive,** telles que $(\forall (\lambda, x)) |f(\lambda, x)| \leqslant g(x)$ et $(\forall \lambda \in \Lambda)$ la fonction $f_{[\lambda]} : x \mapsto f(\lambda, x)$ soit dans $\mathscr{L}^1(A, K)$.*
*Si f est **séparément continue** en λ au point $\lambda_0 \in \Lambda$, alors $F : \lambda \mapsto \int_A f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ est **continue** en λ_0.*

THÉORÈME 2

*Soit Λ un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$ et A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, puis $f : \Lambda \times A \longrightarrow K$ et $h \in \mathscr{L}^1(A, \mathbb{R})$, h **positive,** telles que $(\forall \lambda \in \Lambda)$ $f_{[\lambda]} \in \mathscr{L}^1(A, K)$, que $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ existe sur $\Lambda \times A$ et que $(\forall (\lambda, x) \in \Lambda \times A)$ $\left| \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) \right| \leqslant h(x)$.*
Alors la fonction $F : \Lambda \longrightarrow K$, $\lambda \mapsto \int_A f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur Λ, et

$$(\forall \lambda)\ F'(\lambda) = \int_A \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\,\mathrm{d}x.$$

COROLLAIRE

Soit Λ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, A une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, puis $f : \Lambda \times A \longrightarrow K$, $h \in \mathscr{L}^1(A, \mathbb{R})$ telles que $(\forall \lambda \in \Lambda)$ $f_{[\lambda]} \in \mathscr{L}^1(A, K)$, que $(\forall \in A)$ la fonction $f^{[x]} : \Lambda \longrightarrow K$, $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ et que $(\forall i \in [\![1, p]\!])$ $(\forall (\lambda, x) \in \Lambda \times A)$ $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda, x) \right| \leqslant$ …

> $F : \Lambda \longrightarrow K,\quad \lambda \mapsto \int_A f(\lambda, x)\,\mathrm{d}x$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$, *et* $(\forall i \in [\![1, p]\!])$
> $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \displaystyle\int_A \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\lambda, x)\,\mathrm{d}x.$

Intégrale et surfaces de niveau

Considérons un domaine Δ non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ muni de sa structure euclidienne canonique, et une fonction $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ que nous supposerons pour simplifier de classe $\mathscr{C}^2$ et *sans point critique.* Notons Λ l'intervalle image $f(\Delta)$. Pour $\lambda \in \Lambda$, l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda = f^{-1}(\lambda)$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$, et Δ est l'union disjointe des $\mathscr{S}_\lambda$ (les $\mathscr{S}_\lambda$ sont les *hypersurfaces de niveau* de *f*). Pour $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Delta, K)$ proposons-nous de calculer $\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant ces hypersurfaces de niveau : c'est le problème de l'*intégration par couches,* si utilisé en Physique. Supposons pour cela qu'on ait un domaine $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\Theta : \mathscr{D} \longrightarrow \Delta$ possédant les propriétés suivantes :

1) la n-ième projection de $\mathscr{D}$ est Λ ;

2) $\forall \lambda \in \Lambda$, si $\mathscr{D}_\lambda$ est l'ouvert $\{t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t, \lambda) \in \mathscr{D}\}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\mathscr{D}_\lambda$ est un domaine de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $t \mapsto \Theta(t, \lambda)$ est une bijection de $\mathscr{D}_\lambda$ sur $\mathscr{S}_\lambda$ (autrement dit un plongement d'image $\mathscr{S}_\lambda$).

Alors, par changement de variable :

$$\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathscr{D}} \varphi(\Theta(t, \lambda))\,|(\mathrm{Jac}\,(\Theta))(t, \lambda)|\,\mathrm{d}(t, \lambda)$$

puis, par le théorème de Fubini :

$$(1) \qquad \int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Lambda \mathrm{d}\lambda \int_{\mathscr{D}_\lambda} \varphi(\Theta(t, \lambda))\,|(\mathrm{Jac}\,(\Theta))(t, \lambda)|\,\mathrm{d}t\,.$$

3) Supposons maintenant que φ *soit constante sur chaque* $\mathscr{S}_\lambda$ et notons $\Phi(\lambda)$ cette valeur constante. La formule (1) devient :

$$(2) \qquad \boxed{\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Lambda \Phi(\lambda)\,G(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \qquad \text{où} \quad (\forall \lambda \in \Lambda) \quad G(\lambda) = \int_{\mathscr{D}_\lambda} |\mathrm{Jac}\,\Theta(t, \lambda)|\,\mathrm{d}t}\,.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où Δ est *borné* (donc borné mesurable), et où G est *continue* (ce qui est certainement réalisé si, par exemple, $\mathscr{D}_\lambda$ ne dépend pas de λ). Soit $\lambda_0 \in \Lambda$. La fonction φ_{λ_0} telle que $\Phi(\lambda) = 1$ si $\lambda \leqslant \lambda_0$ et $\Phi(\lambda) = 0$ si $\lambda > \lambda_0$ est dans $\mathscr{L}^1(\Delta, \mathbb{R})$, et $\int_\Delta \varphi_{\lambda_0}(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^{\lambda_0} G(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ $(\alpha = \inf(\Lambda))$, mais aussi : $\int_\Delta \varphi_{\lambda_0}(x)\,\mathrm{d}x$ est *le volume n-dimensionnel de l'union des surfaces de niveau* $\mathscr{S}_\lambda$ *pour* $\lambda \leqslant \lambda_0$, volume que nous noterons $V(\lambda_0)$. Par continuité de G, on voit que V est dérivable et $V'(\lambda_0) = G(\lambda_0)$. Sous ces hypothèses, on arri première formule d'intégration par couches :

$$(3)\qquad \boxed{\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Lambda \Phi(\lambda)\,V'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \qquad \left(= \int_\Lambda \Phi(\lambda)\,\mathrm{d}V\right)}\,,$$

$V(\lambda)$ étant le volume n-dimensionnel « sous » l'hypersurface de niveau $\mathscr{S}_\lambda$ dans Δ. Pratiquement (3) s'applique **chaque fois que $V(\lambda)$ est de classe $\mathscr{C}^1$,** à condition d'être capable d'évaluer $V'(\lambda)$.

Partant de (1) il est aussi tentant d'essayer d'interpréter la fonction $L : \Lambda \longrightarrow K$, $\lambda \mapsto \int_{\mathscr{D}_\lambda} (\varphi \circ \Theta(t, \lambda))\,|\mathrm{Jac}\,\Theta(t, \lambda)|\,\mathrm{d}t$ comme une *intégrale d'hypersurface* sur $\mathscr{S}_\lambda$. Ce n'est malheureusement pas possible en général. En remarquant que $\mathrm{Jac}\,\Theta(t, \lambda)$ est le *produit mixte* $\left[\frac{\partial\Theta}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\Theta}{\partial t_{n-1}}, \frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right] = \left(\vec{N}(t, \lambda)\,\middle|\,\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\right)$, où $\vec{N}$ est la fonction *vecteur normal* du plongement $\mathscr{D}_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \Theta(t, \lambda)$ dont l'image est $\mathscr{S}_\lambda$, on voit que $|\mathrm{Jac}\,\Theta(t, \lambda)|\,\mathrm{d}t$ sera *l'élément d'aire* $(n-1)$-dimensionnelle de $\mathscr{S}_\lambda$ à la **condition suffisante** que

$$(\forall (t, \lambda)) \quad \frac{\partial\vec{\Theta}}{\partial\lambda} = \frac{1}{\|\vec{N}(t, \lambda)\|}\vec{N}(t, \lambda) = \frac{1}{H(t, \lambda)}\vec{N}(t, \lambda) = \vec{\nu}$$

(avec les notations du début du § VIII.6) car alors $\left(\vec{N}\,\middle|\,\frac{\partial\vec{\Theta}}{\partial\lambda}\right) = \|\vec{N}\|$ et $L(\lambda) = \int_{\mathscr{S}_\lambda} \varphi\,\mathrm{d}\mathscr{A}$.

L'équation de l'icônal

La question qui se pose alors est de savoir si, $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ étant donnée comme au début, on peut trouver un difféomorphisme $\Theta : \mathscr{D} \longrightarrow \Delta$ vérifiant, en plus des conditions 1) et 2) ci-dessus, la condition :

4) $(\forall (t, \lambda))\,\frac{\partial\vec{\Theta}}{\partial\lambda} = \vec{\nu}$.

Un tel difféomorphisme sera qualifié de ***f*-normal.**

THÉORÈME 3

Supposons que $(\forall x \in \Delta)$ $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x)\| = 1$, *c'est-à-dire que*

$$(4)\qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 1 \text{ sur } \Delta}\,.$$

Alors il existe, tout au moins localement, un difféomorphisme $\Theta : \mathscr{D} \longrightarrow \Delta$ f-normal. De plus, fixant l'une des hypersurfaces de niveau $\mathscr{S}_{\lambda_0}$, $f(x)$ est, à une constante additive près, la distance (comptée algébriquement) de x au pied de la normale issue de x à $\mathscr{S}_{\lambda_0}$ (normale qui est localement unique).

Brève esquisse de la preuve

On fixe $\lambda_0 \in \Lambda$. On cherche les lignes du champ de gradients $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ en les paramétrant par abscisse curviligne s (origine choisie sur $\mathscr{S}_{\lambda_0}$), ce qui donne l'équation différentielle

$$\text{(5)} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M)\,; \quad f(M(\lambda_0)) = \lambda_0\,,$$

la fonction inconnue $M(s)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Une version sophistiquée du théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. App. 3, Th. 2.2) donne alors *localement* des solutions de (5) sous forme d'un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme $\Theta : D \times \Lambda \longrightarrow U$, $(t, s) \mapsto M_t(s)$, où D est un domaine de $\mathbb{R}^{n-1}$, U un domaine inclus dans Δ, et où $t \mapsto M_t(\lambda_0)$ est un plongement de D dans $\mathbb{R}^n$ d'image $\mathscr{V}_0 \subset \mathscr{S}_{\lambda_0}$. On montre ensuite que chaque solution $s \mapsto M_t(s)$ de (5) est *affine :* en effet

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,(\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f\,\|^2)}(M(s)) = 0\,,$$

et comme $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\vec{M}_t}{\mathrm{d}s} \right\| = 1$, $M_t(s) = M_t(\lambda_0) + (s - s_0)\,\vec{\nu}(t)$, où $\vec{\nu}(t)$ est le vecteur unitaire normal en $\Theta(t, \lambda_0)$ à $\mathscr{S}_{\lambda_0}$. Donc les solutions de (5) sont *les normales à* $\mathscr{S}_{\lambda_0}$ en les points de $\mathscr{V}_0$. De plus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} f(M_t(\lambda)) = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_1(\lambda)) \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}\vec{M}_t}{\mathrm{d}\lambda} \right) = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_t(\lambda))\|^2 = 1\,,$$

donc $f(M_t(\lambda)) = \lambda + \mathrm{Cte}$, en faisant $\lambda = \lambda_0$ on trouve $\mathrm{Cte} = 0$, d'où $f(M_t(\lambda)) = \lambda$. Donc les hypersurfaces $t \mapsto \Theta(t, \lambda)$ sont les portions contenues dans U des $\mathscr{S}_\lambda$. Le reste des assertions est facile à établir. ■

En remontant les calculs, on voit que la réciproque du théorème 3 est vraie : si D est un domaine de $\mathbb{R}^{n-1}$ et Λ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ($\lambda_0 \in \Lambda$), puis si $\Theta : D \times \Lambda \longrightarrow U$ est un $\mathscr{C}^2$-difféomorphisme tel que, pour tout $t \in D$, la fonction $\lambda \mapsto \Theta(t, \lambda)$ soit une représentation de la normale en $\Theta(t, \lambda_0)$ à $\mathscr{V}_0$ image de $t \mapsto \Theta(t, \lambda_0)$, avec $\forall\,(t, \lambda) \left\| \dfrac{\partial \vec{\Theta}}{\partial \lambda} \right\| = 1$, alors la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ associant à tout $x \in U$ le réel λ du couple (t, λ) pour lequel $\Theta(t, \lambda) = x$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et solution de (4).

Revenant à (1), chaque fois que (4) est satisfaite (et sous réserve de prendre Δ assez petit), on a donc la *formule d'intégration par couches* suivante :

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Lambda \mathrm{d}\lambda \int_{\mathscr{S}_\lambda} \varphi\,\mathrm{d}\mathscr{A}_\lambda}$$

où $\mathrm{d}\mathscr{A}_\lambda$ désigne l'élément d'aire $(n-1)$-dimensionnelle sur $\mathscr{S}_\lambda$. En est constante sur chaque $\mathscr{S}_\lambda$, de valeur $\Phi(\lambda)$, on obtient :

(7) $$\boxed{\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Lambda \Phi(\lambda)\,S(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}$$

où $S(\lambda)$ est l'aire $(n-1)$-dimensionnelle de $\mathscr{S}_\lambda$.

L'équation (4) s'appelle **équation de l'icônal.** Ses solutions f sont les fonctions qui définissent les hypersurfaces de niveau **parallèles** à une hypersurface $\mathscr{V}_0$ donnée arbitrairement, c'est-à-dire les hypersurfaces déduites de $\mathscr{V}_0$ en reportant sur les normales orientées à $\mathscr{V}_0$ des longueurs algébriques constantes.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto r = \left(\sum_{i=1}^n x_1^2\right)^{1/2}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, sans point critique ; ses hypersurfaces de niveau sont les sphères $\mathscr{S}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r = \lambda\}$ $(\lambda > 0)$. On a : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x) = \dfrac{1}{r}\,x$ pour tout $x \in \Delta = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ce qui montre que f est solution de (4). Donc, pour $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Delta, K)$, on a :

$$\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\lambda \int_{\mathscr{S}_\lambda} \varphi\,\mathrm{d}\mathscr{A}_\lambda\,.$$

En particulier, si φ est constante sur chaque $\mathscr{S}_\lambda$, de valeur $\Phi(\lambda)$, on a :

(8) $$\int_\Delta \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Phi(\lambda) \int_{\mathscr{S}_\lambda} \mathrm{d}\mathscr{A}\,.$$

Soit par exemple, pour $\lambda > 0$ fixé, la fonction particulière $\varphi = \varphi_\lambda : x \mapsto 0$ si $r(x) > \lambda$, $x \mapsto 1$ si $r \leqslant \lambda$. Dans ce cas, $\int_\Delta \varphi_\lambda(x)\,\mathrm{d}x$ est le volume n-dimensionnel de la boule $\{x \in \mathbb{R}^n \mid r \leqslant \lambda\}$ (privé de son centre O). Or ce volume vaut $B_n\,\lambda^n$ (avec $B_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ comme on l'a vu dans l'exemple 2 du § VIII.3). Donc la formule (8) donne : $\lambda^n B_n = \int_0^\lambda S_n(\rho)\,\mathrm{d}\rho$ où $S_n(\rho) = \int_{\mathscr{S}_\rho} \mathrm{d}\mathscr{A}$ est l'aire $(n-1)$-dimensionnelle de $\mathscr{S}_\rho$, qui, par raison *d'homothétie,* vaut $\rho^{n-1} S_n(1)$. On obtient ainsi : $\lambda^n B_n = S_n(1) \int_0^\lambda \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho = \dfrac{\lambda^n}{n} S_n(1)$, ce qui donne en particulier *l'aire de la sphère unité :*

(9) $$\boxed{S_n(1) = nB_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}}\,.$$

Revenant maintenant à la forme générale (8) où φ désigne une fon sur chaque $\mathscr{S}_\lambda(\varphi(x) = \Phi(r(x)))$, on obtient enfin :

$$(10) \qquad \boxed{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = S_n(1) \int_0^{+\infty} \Phi(\lambda)\,\lambda^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda}\,.$$

Bien sûr, c'est exactement le même résultat qu'on aurait trouvé en appliquant directement la première formule d'intégration par couches

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Phi(\lambda)\,\mathrm{d}V$$

mais le fait d'avoir des hypersurfaces de niveau *parallèles* permet de précider que $\boxed{\mathrm{d}V = S_n(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda}$, ce qui est physiquement très intuitif, et donne cette relation très simple entre $V(\lambda)$ et $S_n(\lambda)$.

Exercice 1 : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique on considère l'ellipse E d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0, b > 0)$. A chaque point $M = (x, y)$, on associe $\lambda(x, y) = \lambda$ tel que $\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$. Calculer $\displaystyle\int_D f(\lambda)\,\mathrm{d}(x, y)$, D étant le domaine intérieur à l'ellipse, en la ramenant à une intégrale simple, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant supposée donnée.

Exercice 2 : Pour α réel > 0, indiquer la nature des intégrales $I = \displaystyle\int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 \geqslant 1} \frac{\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)}{\left(\sum_i x_i^2\right)^\alpha}$ et $J = \displaystyle\int_{0 < \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1} \frac{\mathrm{d}(x_1, \dots, x_n)}{\left(\sum_i x_i^2\right)^\alpha}$. Les calculer quand elles convergent.

Exercice 3 : Pour α réel > 0, étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1} \frac{\mathrm{d}(x_1 \dots, x_n)}{\left(1 - \sum_i x_i^2\right)^\alpha}$.

Exercice 4 : On donne λ réel > 2. Calculer en utilisant la formule (3) l'intégrale

$$I = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} \left(\frac{y}{x^2+y^2+1}\right)^\lambda \mathrm{d}(x, y)\,.$$

Exercice 5 : Soit $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique $(n \geqslant 1)$ dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

a) La fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $\|x\| \geqslant 1$, $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right)$ si $\|x\| < 1$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On notera $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$. Vérifier que $I > 0$.

b) Soit $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{I}\varphi(x)$ et, si $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_h(x) = \dfrac{1}{h^n}\psi\left(\dfrac{x}{h}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue à support compact, on pose $f_h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\psi_h(x-t)\,\mathrm{d}t$ pour $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f_h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

c) Prouver : $f_h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\,\psi_h(t)\,\mathrm{d}t$ et prouver que la famille $(f_h)_{h>0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^n$ quand $h \xrightarrow{>} 0$.

Appendice 2

SUR LES ÉQUATIONS $f(x, y, y') = 0$

Pour alléger l'exposé, bornons-nous à considérer une équation différentielle scalaire à inconnue *numérique* y de la variable réelle x :

$$(\mathscr{E}) \quad f(x, y, y') = 0 \, ,$$

où la fonction donnée f est numérique et de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un **domaine** Ω de $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathscr{V}$ l'ensemble $\{(u, v, w) \in \Omega \mid f(u, v, w) = 0\}$. Soit d'abord un point $(x_0, y_0, y_0') \in \mathscr{V}$. La théorie des fonctions implicites vue au § VI.1 entraîne l'existence d'un pavé ouvert $P \subset \Omega$, voisinage de (x_0, y_0, y_0'), de la forme $P = Q \times J$ (où Q est un pavé ouvert voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ et J un intervalle ouvert voisinage de y_0' dans $\mathbb{R}$) et d'une fonction $F : Q \longrightarrow J$ de classe $\mathscr{C}^k$ tels que $F(x_0, y_0) = y_0'$ et que $\mathscr{V} \cap P$ soit le graphe de F. Il en résulte que l'ensemble des solutions $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ($I =$ intervalle de définition de φ) telles que :

$$(1) \qquad (\forall x \in I) \quad (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in P$$

est égal à l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{R})$ $y' = F(x, y)$. Comme F est de classe $\mathscr{C}^k$, le théorème X.2.1 s'applique à l'équation $(\mathscr{R})$ résolue en y', ce qui donne une description précise des solutions de $(\mathscr{E})$ vérifiant la relation (1).

Si l'on désire des renseignement *globaux* sur les solutions de $(\mathscr{E})$ (par exemple, décrire les solutions maximales), on se heurte à deux difficultés : d'abord il faut essayer de raccorder entre elles les solutions « locales » définies ci-dessus au voisinage des points de $\mathscr{V}$ en lesquels $\dfrac{\partial f}{\partial w} \neq 0$. Ce problème peut être aisément résolu dans des cas suffisamment généraux (cf. ci-dessous). Ensuite, et c'est là un obstacle bien plus sérieux, la méthode ci-dessus ne peut pas s'appliquer en des points $(x_0, y_0, y_0') \in \mathscr{V}$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0, y_0') = 0$. Pour de tels points, la description des solutions φ telles que $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ reste voisin de (x_0, y_0, y_0') est fort délicate et ne peut être l'objet d'un théorème général simple. Or, en prolongeant autant que possible une solution locale φ, on court grand risque que, pour certaines valeurs x de la variable, le prolongement φ vérifie : $\dfrac{\partial f}{\partial w}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$: en de tels points, le prolongement à prendre, lorsque c'est possible, n'est plus unique en général, et ces possibilités de bifurcation compliquent beaucoup la situation.

Notons ω la projection de Ω sur $\mathbb{R}^2$ par la projection : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v, w) \mapsto (u, v)$. L'ensemble ω est un *domaine* de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1

Avec les notations qui précèdent, et f de classe $\mathscr{C}^k$ $(k \geq 1)$ sur Ω, supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que, pour tout $(x_0, y_0) \in \omega$, l'équation $f(x_0, y_0, z) = 0$ possède exactement p solutions en $z \in \mathbb{R}$, et supposons de plus que $(\forall (u, v, w) \in \mathscr{V})$, $\dfrac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \neq 0$. Alors $\mathscr{V}$ est la réunion disjointe des graphes Γ_j de p fonctions $F_1, \ldots, F_p : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$, et $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ sont les composantes connexes de $\mathscr{V}$.

Démonstration :

Pour chaque $(x, y) \in \omega$, désignons par $F_1(x, y)$, $F_2(x, y), \ldots, F_p(x, y)$ les réels z tels que $f(x, y, z) = 0$, ordonnés pour que $F_1(x, y) < \cdots < F_p(x, y)$. On définit ainsi p fonctions $F_j : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dont les graphes Γ_j sont disjoints. Il reste à voir que les F_j sont de classe $\mathscr{C}^k$. Fixons $(x_0, y_0) \in \omega$. Soit $z_j = F_j(x_0, y_0)$ pour $1 \leq j \leq p$. La théorie des fonctions implicites s'applique à chaque triplet (x_0, y_0, z_j) et fournit des pavés ouverts $P_j = Q_j \times J_j \subset \Omega$ voisinages de (x_0, y_0, z_j) et des fonctions $\Phi_j : Q_j \longrightarrow J_j$ de classe $\mathscr{C}^k$ telles que $\Phi_j(x_0, y_0) = z_j$ et dont les graphes $\mathscr{W}_j$ vérifient $\mathscr{W}_j = P_j \cap \mathscr{V}$. Par continuité des Φ_j en (x_0, y_0), du fait que $z_1 < \cdots < z_p$, nous pouvons choisir un pavé ouvert $Q \subset \bigcap_{j=1}^{p} Q_j$ centré en (x_0, y_0) tel que $(\forall (x, y) \in Q)\ \Phi_1(x, y) < \cdots < \Phi_p(x, y)$. Cela entraîne évidemment que $\Phi_j|_Q = F_j|_Q$ pour tout j, donc F_j, comme Φ_j, est bien de classe $\mathscr{C}^k$ sur Q.

Chaque Γ_j est connexe, comme image du domaine ω par l'application continue $(x, y) \mapsto (x, y, F_j(x, y))$. Par continuité de F_j, l'ensemble $U_j = \{(x, y, z) \in \omega \times \mathbb{R} \mid z \neq F_j(x, y)\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^3$, et comme $\Gamma_j = \mathscr{V} \cap \left(\bigcap_{i \neq j} U_i\right)$ on voit que chaque Γ_j est ouvert *dans* $\mathscr{V}$, donc les Γ_j sont les composantes connexes de $\mathscr{V}$. ■

Corollaire

Conservons les notations et hypothèses du théorème 1. *Alors l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est la réunion des ensembles de solutions des équations : (E_j) $y' = F_j(x, y)$. Plus précisément, chaque solution de $(\mathscr{E})$ est solution d'une et d'une seule des équations (E_j).*

Démonstration :

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de $(\mathscr{E})$. L'image $(\mathscr{C})$ de l'application $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x, \varphi(x), \varphi'(x))$ est connexe, car Φ est continue [1] et que l'intervalle I est connexe. De plus $\mathscr{C} \subset \mathscr{V}$. Donc $\mathscr{C}$ est contenue dans une et une seule des composantes connexes Γ_j de $\mathscr{V}$. Soit j_0 l'indice tel que $\mathscr{C} \subset \Gamma_{j_0}$. Alors $(\forall x \in J)$ $\varphi'(x) = F_{j_0}(x, \varphi(x))$. ■

Les équations (E_j) relèvent du théorème X.2.1. Les graphes des solutions

---

[1] Le fait que sous les hypothèses du théorème 1, toute solution de $(\mathscr{E})$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$, se déduit facilement du théorème de Darboux (cf. tome 2, exer

maximales de (E_j) forment donc une partition de ω. Soit $(x_0, y_0) \in \omega$. Notons φ_j la solution maximale de (E_j) dont le graphe contient (x_0, y_0). Les $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq p}$ sont distinctes, puisque leurs dérivées $z_j = \varphi_j'(x_0) = F_j(x_0, y_0)$ sont toutes distinctes. On peut même préciser que les graphes des φ_j ont en (x_0, y_0) *des tangentes toutes distinctes.* Donc :

THÉORÈME 2

> *Sous les hypothèses du théorème* 1, *pour chaque point* $(x_0, y_0) \in \omega$ *il y a* **exactement** p **solutions maximales de** $(\mathscr{E})$ *dont les graphes passent par* (x_0, y_0). *Les dérivées en* x_0 *de ces solutions sont les* p *racines de l'équation en* z : $\{z \in \mathbb{R} \mid f(x_0, y_0, z) = 0\}$. *De plus les solutions de* $(\mathscr{E})$ *sont les restrictions des solutions maximales.*

Le théorème 2 s'applique par exemple lorsque $f(u, v, w)$ est de la forme

$$(2) \quad f(u, v, w) = w^N + A_1(u, v)\, w^{N-1} + \cdots + A_{N-1}(u, v)\, w + A_N \quad (N \geq 1),$$

les $A_j(u, v)$ étant de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^2$, et que pour tout $(u, v) \in \omega$, le polynôme en w au second membre de (2) a exactement p racines réelles, *toutes simples,* pour un certain $p \in [\![1, N]\!]$ indépendant de (u, v).

Mais attention ! Si l'hypothèse « $(\forall (u, v, w) \in \mathscr{V})\ \dfrac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) \neq 0$ » du théorème 1 n'est pas satisfaite, le résultat tombe en défaut :

Exemple 1 : Soit l'équation scalaire $8\, y'^3 - 27\, y = 0$. Elle est du type $(\mathscr{E})$ avec $f(u, v, w) = 8\, w^3 - 27\, v$, polynomiale sur $\mathbb{R}^3$. Pour chaque $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a un et un seul $w \in \mathbb{R}$ tel que $f(u, v, w) = 0$, à savoir $w = \dfrac{3}{2} v^{1/3}$. Pour chaque réel λ, la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \leq \lambda$, $x \mapsto (x - \lambda)^{3/2}$ si $x > \lambda$, est solution maximale de l'équation. On a donc par exemple *une infinité* de solutions maximales φ *telles que* $\varphi(0) = 0$ et non pas une seule : ce sont les f_λ pour $\lambda \geq 0$ qui s'ajoutent à la solution nulle et aux solutions $g_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ si $x \leq \lambda$, $x \mapsto -(x - \lambda)^{3/2}$ si $x > \lambda$. En revanche, en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $y_0 \neq 0$ il passe une courbe intégrale maximale et une seule, (qui est d'ailleurs du type f_λ ou g_λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}$), bien que le théorème 2 ne puisse s'appliquer globalement ici.

Par une preuve rigoureusement analogue, on démontre :

THÉORÈME 3

> *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, Ω *un* domaine *de* $\mathbb{R}^{n+2}$, ω *la projection de* Ω *sur* $\mathbb{R}^{n+1} \times \{0\}$ *et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u, v_1, \ldots, v_n, w) \mapsto f(u, v_1, \ldots, v_n, w)$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^k (k \geq 1)$. *Notons* $\mathscr{V}$ *l'ensemble des zéros de* f *sur* Ω, *et supposons* $(\forall (u, v_1, \ldots, v_n, w) \in \mathscr{V})\ \dfrac{\partial f}{\partial w}(u, \ldots, w) \neq 0$. *Supposons de plus trouvé* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(\forall (u, v_1, \ldots, v_n) \in \omega)$, *l'équation en* $z : f(u, v_1, \ldots, v_n, z) = 0$ *possède exactement* p *racines réelles. Alors*
> (I) $\mathscr{V}$ *a* p *composantes connexes, qui sont les graphes de* p *fonctions* $F_1, \ldots, F_p : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $\mathscr{C}^k$.
> (II) *L'ensemble des solutions de l'équation scalaire à inconnue numérique* y : $(\mathscr{E})\ f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *est la réunion des ensemb*

des équations

$$(E_j) \quad y^{(n)} = F_j(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) .$$

(III) *en conséquence, pour chaque* $(x_0, z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \omega$ *il passe exactement* p *solutions maximales* φ *de* $(\mathscr{E})$ *telles que* $\varphi(x_0) = z_0$, $\varphi'(x_0) = z_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1}$. *Et les solutions de* $(\mathscr{E})$ *sont les restrictions de ses solutions maximales.*

Intégrales singulières

Nous avons vu que l'obstacle sérieux pour l'étude d'une équation de type $(\mathscr{E})$ $f(x, y, y') = 0$ non résolue en y' est constitué des $(u, v, w) \in \mathscr{V}$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial w}(u, v, w) = 0$. Cela justifie la définition :

DÉFINITION 1

On appelle **solution singulière** *(ou* **intégrale singulière***) de* $(\mathscr{E})$ *toute solution* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de* $(\mathscr{E})$ *telle que*

$$(\forall x \in I) \quad \frac{\partial f}{\partial w}(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 .$$

Dans l'exemple 1 ci-dessus, nous constations que la fonction nulle est intégrale singulière de l'équation $8\,y'^3 - 27\,y = 0$. Il n'est pas étonnant que par tout point du graphe de cette intégrale singulière il passe une infinité de graphes de solutions maximales de cette équation.

Signalons simplement que très souvent les intégrales singulières de $(\mathscr{E})$ apparaissent comme des *enveloppes* de courbes intégrales maximales non singulières de $(\mathscr{E})$.

Exercice 1 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et T un espace topologique *connexe*. On donne des fonctions $A_1, \ldots, A_N : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et on suppose que $(\forall \xi \in T)$ les racines *réelles* du polynôme $P_\xi(X) = X^N + A_1(\xi)X^{N-1} + \cdots + A_N(\xi)$ à coefficients réels sont *toutes simples*. Montrer que le nombre de ces racines réelles est indépendant de ξ.

Exercice 2 : Indiquer les solutions singulières des équations scalaires suivantes :

a) $(1 - x^2)\,y'^2 = 1 - y^2$
b) $4\,y^2(1 + y'^2) = (x + yy')^2$
c) $x^3 y'^3 + y^3 - xy^2 = 0$
d) $y^2 y'^2 - 2\,xyy' + 2\,y^2 - x^2 = 0$
e) $y'^2 + y^2 = y' + y$
f) $yy' - y'^2 = e^x$
g) $y''^2 - y^2 = 0$.

Appendice 3

DIFFÉRENTIABILITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE PAR RAPPORT AUX DONNÉES

Tous les $\mathbb{R}$-ev considérés ci-après sont de dimension finie.

§ 1 *LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX*

Replaçons-nous dans les conditions du § X.2, en donnant deux $\mathbb{R}$-ev E et Λ non nuls ([1]), un ouvert Ω non-vide de $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow E$, $(t, X, \lambda) \mapsto f(X, \lambda)$ de classe $\mathscr{C}^1$. La projection ω_3 de Ω sur Λ par $(t, X, \lambda) \mapsto \lambda$ est un ouvert de Λ. A ces données, nous associons la famille d'équations différentielles $(\mathscr{E}_\lambda)_{\lambda \in \omega_3}$ ci-après, à inconnue vectorielle Y prenant ses valeurs dans E, de la variable réelle t : $(\mathscr{E}_\lambda)\ Y' = f(t, Y, \lambda)$. Si $(\xi, \zeta, \lambda) \in \Omega$, l'unique solution maximale g de $(\mathscr{E}_\lambda)$ telle que $g(\xi) = \zeta$ sera notée $\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}$; son intervalle de définition sera noté $J(\xi, \zeta, \lambda)$. L'ensemble

$$\mathscr{D} = \{(t, \xi, \zeta, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in J(\xi, \zeta, \lambda)\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R} \times \Omega$ (cf. § X.2). Une conséquence fondamentale des résultats du § X.2 est que l'application $\Phi : D \longrightarrow E$, $(t, \xi, \zeta, \lambda) \mapsto \varphi_{q, \zeta, \lambda}(t)$ est **continue sur $\mathscr{D}$**, puisque f, étant supposée de classe $\mathscr{C}^1$, est *a fortiori* localement lipschitzienne en X. Mais en réalité, l'hypothèse « f est de classe $\mathscr{C}^1$ » entraîne bien mieux : à savoir que Φ est *aussi de classe* $\mathscr{C}^1$. C'est ce que nous allons voir ci-après et nous montrerons également comment peuvent être calculées les dérivées partielles de Φ.

Notons : $n = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, $p = \dim_{\mathbb{R}}(\Lambda)$; $\omega_1 =$ images de la projection $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, X, \lambda) \mapsto t$; $\omega_2 =$ image de la projection $\Omega \longrightarrow E$, $(t, X, \lambda) \mapsto X$; $\omega_2' =$ image

---

([1]) Si Λ est nul (c.-à-d. si l'équation $Y' = f(t, Y)$ est sans paramètre), les résultats qui vont suivre demeurent, moyennant quelques simplifications de détail évidentes.

de la projection $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \Lambda$, $(t, X, \lambda) \mapsto (t, \lambda)$, $\omega_3' =$ image de la projection $\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times E$, $(t, X, \lambda) \mapsto (t, X)$. Pour chaque $(t, \lambda) \in \omega_2'$, l'ensemble $\Omega_{[t,\cdot,\lambda]} = \{X \in E \mid (t, X, \lambda) \in \Omega\}$ est ouvert dans E, et l'application $X \mapsto f(t, X, \lambda)$ y est de classe $\mathscr{C}^1$. Sa différentielle en $X \in \Omega_{[t,\cdot,\lambda]}$ sera désignée par $L(t, X, \lambda)$. Soit $\mathscr{B} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ et $\mathscr{C} = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p)$ des bases respectives de E et de Λ fixées une fois pour toutes. Les coordonnées d'un vecteur générique X (resp. ζ) de E seront notées $(x_1, \ldots, x_n)$ (resp. $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$). Les coordonnées dans $\mathscr{C}$ d'un vecteur générique $\lambda \in \Lambda$ seront notées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. La matrice de $L(t, X, \lambda)$ dans $\mathscr{B}$ est $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, X, \lambda)\right]_{(i,j) \in ([\![1,n]\!])^2}$.

Si a et b sont dans $\mathbb{R}$, le segment d'extrémités a et b (que a soit $> b$ ou $< b$) sera noté $[\widetilde{a, b}]$.

Enfin remarquons que la projection de $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathbb{R}$ par chacune des projections $\mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times E \times \Lambda$, $(t, \xi, \zeta, \lambda) \mapsto (\xi, \zeta, \lambda)$ ou $(t, \xi, \zeta, \lambda) \mapsto (t, \zeta, \lambda)$ n'est autre que Ω.

Un lemme sur l'intégrale

Lemme 1

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathscr{V}$ un $\mathbb{R}$-ev, W un ouvert d'un $\mathbb{R}$-ev $\mathscr{W}$ et $F : I^2 \times W \times I \longrightarrow \mathscr{V}$ une application continue. L'application $G : I^2 \times W \longrightarrow \mathscr{V}$, $(u, v, w) \mapsto \displaystyle\int_u^v F(u, v, w, t)\,\mathrm{d}t$ est continue ; si F est de classe $\mathscr{C}^1$, G est de classe $\mathscr{C}^1$.

Démonstration :

Munissons $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ de normes notées $\|\cdot\|$. Commençons par prouver que G est continue. Fixons $(u_0, v_0, w_0) \in I^2 \times W$. Pour $(u, v, w) \in I^2 \times W$, on a $G(u, v, w) - G(u_0, v_0, w_0)$ qui est la somme de trois termes :

$$A(u, v, w) = \int_{u_0}^{v_0} [F(u, v, w, t) - F(u_0, v_0, w_0, t)]\,\mathrm{d}t\,;$$

$$B(u, v, w) = \int_u^{u_0} F(u, v, w, t)\,\mathrm{d}t$$

et
$$C(u, v, w) = \int_{v_0}^{v} F(u, v, w, t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir $\alpha > 0$ assez petit pour que $([u_0 - \alpha, v_0 + \alpha] \cap I)^2 \times \tilde{\mathbf{B}}(w_0, \alpha)$ soit un compact $\mathscr{K} \subset I^2 \times W$. Grâce à la continuité uniforme de F sur le compact $\mathscr{K} \times [u_0, v_0]$ de $I^2 \times W \times I$, on peut trouver η réel > 0 tel que $|u - u_0| \leqslant \eta$, $|v - v_0| < \eta$ et $\|w - w_0\| < \eta$ entraînent :

$$(\forall t \in [u_0, v_0])\,, \quad \|F(u, v, w, t) - F(u_0, v_0, w_0, t)\| \leqslant \varepsilon\,,$$

d'où $A(u, v, w) \xrightarrow[(u,v,w) \longrightarrow (u_0, v_0, w_0)]{} 0_E$. Ensuite, puisque F reste bornée au voisinage de (u_0, v_0, w_0, u_0) et au voisinage de (u_0, v_0, w_0, v_0), o

$B(u,v,w) \xrightarrow[(u,v,w)\to(u_0,v_0,w_0)]{} 0_E$ et que $C(u,v,w) \xrightarrow[(u,v,w)\to(u_0,v_0,w_0)]{} 0_E$. Au total, la continuité de G en (u_0, v_0, w_0) en résulte.

Soit maintenant F de classe $\mathscr{C}^1$. Fixons une base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de $\mathscr{W}$ dans laquelle $w_1, \ldots, w_n$ désignent les coordonnées génériques. Par dérivation sous l'intégrale, on a : $(\forall k \in [\![1, n]\!])$ $\dfrac{\partial G}{\partial w_k}$ existe, et :

$$(1) \qquad \frac{\partial G}{\partial w_k}(u,v,w) = \int_u^v \frac{\partial F}{\partial w_k}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

La première partie de la démonstration prouve de plus que $\dfrac{\partial G}{\partial w_k}$ est continue sur $I^2 \times W$.

On prouve ensuite que $H : I^4 \times W \longrightarrow E,\ (x,y,u,v,w) \mapsto \displaystyle\int_x^y F(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$. En effet, comme ci-dessus, on voit que $\dfrac{\partial H}{\partial u}$, $\dfrac{\partial H}{\partial v}$ et les $\dfrac{\partial H}{\partial w_k}$ existent et sont donnés au point (x,y,u,v,w) par :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \int_x^y \frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = \int_x^y \frac{\partial F}{\partial v}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial w_k} = \int_x^y \frac{\partial F}{\partial w_k}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

De plus, il est clair que $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -F(u,v,w,x)$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y} = F(u,v,w,y)$. La continuité de $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ est évidente ; celle des $\dfrac{\partial H}{\partial w_k}$, de $\dfrac{\partial H}{\partial u}$ et de $\dfrac{\partial H}{\partial v}$ résulte de la première partie de la preuve.

Comme $G(u,v,w) = H(u,v,u,v,w)$, il s'ensuit que G est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. La règle de la chaîne donne les dérivées partielles $\dfrac{\partial G}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}$:

$$(2) \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = -F(u,v,w,u) + \int_u^v \frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t$$

$$(3) \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = F(u,v,w,v) + \int_u^v \frac{\partial F}{\partial v}(u,v,w,t)\,\mathrm{d}t\,. \quad \blacksquare$$

Différentiabilité de Φ

Reprenons les notations du début, en munissant E et Λ de normes notées $\|.\|$ (le lecteur est prié de se reporter au § X.2 où est définie la notion de *tonneau de confinement*).

Lemme 2

Soit $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0) \in \Omega$ et T un tonneau de confinement des équations $(\mathscr{E}_\lambda)$ en ce point, la caractéristique de T étant $(M, \alpha, \beta$

$\left]\xi_0 - \frac{\alpha}{2}, \xi_0 + \frac{\alpha}{2}\right[^2 \times \mathbf{B}\left(\zeta_0, \frac{\beta}{2}\right) \times \mathbf{B}(\lambda_0, \gamma)$, *noté* U, *est un voisinage de* $(\xi_0, \xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$ *dans* $\mathscr{D}$, *et* $\Phi|_U$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$.

Démonstration :

L'inclusion $U \subset \mathscr{D}$ est conséquence immédiate de la proposition X.2.2 (en fait, on a même : Adh $(U) \subset \mathscr{D}$). Nous noterons C une constante de Lipschitz de f en sa seconde variable, et qui soit valable sur tout le tonneau T.

D'après la preuve même de la proposition X.2.2, on peut définir une suite de fonctions $(\Phi_n)_{n \geqslant 0}$ sur U par : $\Phi_0(t, \xi, \zeta, \lambda) = \zeta$, et :

$$(\forall (t, \xi, \zeta, \lambda) \in U)(\forall n \geqslant 0) \quad \Phi_{n+1}(t, \xi, \zeta, \lambda) = \int_\xi^t f(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda)\, \mathrm{d}\tau ,$$

et l'on sait que cette suite (Φ_n) converge simplement vers Φ sur U. En fait, toujours d'après cette preuve, on a :

$$(\forall n) \quad \|\Phi_{n+1}(t, \xi, \zeta, \lambda) - \Phi_n(t, \xi, \zeta, \lambda)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C^n}{n!} |t - \xi|^n \times \sup_{|\tau - t_0| \leqslant \frac{\alpha}{2}} \|\Phi_1(\tau, \xi, \zeta, \lambda) - \zeta\| .$$

Mais $\Phi_1(\tau, \xi, \zeta, \lambda) - \zeta = \displaystyle\int_\xi^\tau f(\theta, \zeta, \lambda)\, \mathrm{d}\theta$ est continue sur $]\xi_0 - \alpha, \xi_0 + \alpha[^2 \times \tilde{\mathbf{B}}(\zeta_0, \beta) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma)$, donc est majorée par un réel $A > 0$ sur le compact $\mathscr{K} = \left[\xi_0 - \frac{\alpha}{2}, \xi_0 + \frac{\alpha}{2}\right]^2 \times \tilde{\mathbf{B}}\left(\zeta_0, \frac{\beta}{2}\right) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma)$, c'est-à-dire sur Adh (U). Donc

$$(\forall n) \quad (\forall (t, \xi, \zeta, \lambda) \in U) \quad \|\Phi_{n+1}(t, \xi, \zeta, \lambda) - \Phi_n(t, \xi, \zeta, \lambda)\| \leqslant A \frac{C^n}{n!} \alpha^n .$$

La convergence de la série numérique $\sum A \dfrac{(C\alpha)^n}{n!}$ entraîne donc *la convergence uniforme de la suite de fonctions* (Φ_n) *vers* Φ *sur* U.

Par une récurrence évidente grâce à l'application du lemme 1, à partir de Φ_0 qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, chaque Φ_n est de classe $\mathscr{C}^1$, et on a sur U :

$$(4) \quad \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial t} = f(t, \Phi_n(t, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) ;$$

$$(5) \quad \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \xi} = - f(\xi, \Phi_n(\xi, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) + \int_\xi^t L(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \times$$
$$\times \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)\, \mathrm{d}\tau$$
$$= - f(\xi, \zeta, \lambda) + \int_\xi^t L(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)\, \mathrm{d}\tau$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \zeta_k} = \int_\xi^t L(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)\, d\tau \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \lambda_k} = \int_\xi^t \left[L(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi_n}{\partial \lambda_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \right] d\tau \quad (1 \leqslant k \leqslant p)\,.$$

Montrons que les suites de fonctions de (t, ξ, ζ, λ): $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}\right)$, $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi_k}\right)$, $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \lambda_k}\right)$ convergent uniformément sur U.

a) Soit la suite $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}\right)$. En se reportant à la preuve de la proposition X.2.2, on sait que $(t, \Phi_n(t, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \in T$ pour tout $(t, \xi, \zeta, \lambda) \in U$. Donc sur U, $(\forall n \geqslant 0)$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_{n+2}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial t} \right\| \leqslant C \,\| \Phi_{n+1}(t, \xi, \zeta, \lambda) - \Phi_n(t, \xi, \zeta, \lambda) \| \leqslant A \,\frac{C^n \alpha^n}{n!}\,,$$

d'où la convergence uniforme recherchée.

b) Soit la suite $\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta_k}\right)$. La fonction $(\tau, z, \lambda) \mapsto |\!|\!| L\,.\,(\tau, z, \lambda) |\!|\!|$ (où $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ est la norme associée à $\|\,.\,\|$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$) est continue sur le compact $\mathscr{K}$, donc y reste majorée par un réel $B > 0$. D'où :

$$(\forall n)(\forall (\tau, \xi, \zeta, \lambda) \in U) \quad |\!|\!| L(\tau, \Phi_n(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) |\!|\!| \leqslant B\,.$$

On déduit alors de (6) que sur U: $(\forall n)$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_{n+2}}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \zeta_k} \right\| \leqslant \left| \int_\xi^t B \left\| \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) - \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) \right\| d\tau \right|\,,$$

ce qui entraîne par le raisonnement habituel

$$\left\| \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \zeta_k}(t, \xi, \zeta, \lambda) - \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta_k}(t, \xi, \zeta, \lambda) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{B^n}{n!} \,|t - \xi|^n \times \sup_{\tau \in [\xi, t]} \left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) \right\|.$$

Mais $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta_k} = \vec{v}_k$ (k-ième vecteur de la base $\mathscr{B}$ de E) et $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) = \int_\xi^t L(\tau, \zeta, \lambda)\,.\,\vec{v}_k\, d\tau$ est continue sur $\mathscr{K}$ (cf. lemme 1), donc $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \zeta_k}$ reste bornée sur $\mathscr{K}$, donc sur U, par un réel $H > 0$, d'où sur U :

$$(\forall n) \quad \left\| \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial \zeta_k} \right\| \leqslant H \frac{B^n}{n!} \, |t - \xi|^n \leqslant H \frac{(B_\alpha)^n}{n!},$$

ce qui entraîne à nouveau la convergence uniforme voulue.

c) Pour les suites $\left(\dfrac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} \right)$ et $\left(\dfrac{\partial \Phi_n}{\partial \lambda_k} \right)$ qui sont encore à étudier, le raisonnement est tout à fait analogue.

En fin de compte, la suite (Φ_n) est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}_1$ telle que les suites de toutes leurs dérivées partielles convergent uniformément sur U. On en déduit aisément que la limite $\Phi|_U$ des Φ_n sur U est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$. ■

Nous pouvons maintenant prouver :

Théorème 1.1

La fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$.

Démonstration :

Soit $(t_0, \xi_0, \zeta_0, \lambda_0) \in \mathscr{D}$. Il s'agit de prouver que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de ce point. Raisonnons par exemple avec $t_0 > \xi_0$. Désignons par φ_0 la solution maximale $\varphi_{\xi_0, \zeta_0, \lambda_0}$. Puisque $\varphi_0([\xi_0, t_0])$ est compact, on a des réels β, γ, η tous > 0 tels que

$$\mathscr{K} = \bigcup_{\tau \in [\xi_0, t_0]} ([\tau - \eta, \tau + \eta] \times \tilde{\mathbf{B}}(\varphi_0(\tau), \beta) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma) \subset \Omega.$$

Sur le compact $\mathscr{K}$, soit M le maximum de $\|f\|$. Choisissons α réel > 0 tel que $\alpha < \eta$ et $M\alpha = \leqslant \beta/3$. Alors (cf. § X.2) chaque ensemble $T_\tau = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times \tilde{\mathbf{B}}(\varphi_0(t), \beta) \times \tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, \gamma)$ est un tonneau de confinement des $(\mathscr{E}_\lambda)$, de caractéristique $(M, \alpha, \beta, \gamma)$. De plus φ_0 est définie sur $[\xi_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Soit alors la subdivision $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ de $[\xi_0, t_0]$ telle que $\xi_k = \xi_0 + k \dfrac{t_0 - \xi_0}{N}$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$, l'entier $N \geqslant 1$ étant choisi pour que $\dfrac{t_0 - \xi_0}{N} \leqslant \dfrac{\alpha}{4}$. Nous allons voir par récurrence sur k que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $(\xi_k, \xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$. C'est vrai pour $k = 0$. Supposons que ce soit vrai pour l'entier k $(0 \leqslant k < N)$. D'après la proposition X.2.3, on a un voisinage ω de $(\xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$ tel que $\omega \subset T_{\xi_0}$ et tel que, pour tout $(\xi, \zeta, \lambda) \in \omega$, la fonction $\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}$ soit définie sur $I = [\xi_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et vérifie : $(\forall \tau \in I)$ $\|\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}(\tau) - \varphi_0(\tau)\| \leqslant \dfrac{\beta}{2}$. Pour $(\xi, \zeta, \lambda) \in \omega$ et $|t - \xi_{k+1}| < \dfrac{\alpha}{4}$, on a : $\Phi(t, \xi, \zeta, \lambda) = \Phi(t, \xi_k, \Phi(\xi_k, \xi, \zeta, \lambda), \lambda)$. A cause de l'hypothèse de récurrence, $(\xi, \zeta, \lambda) \mapsto \Phi(\xi_k, \xi, \zeta, \lambda)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ω. D'après le lemme 2, $\Phi(t, \xi_k, z, \lambda)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en (t, z, λ) pour $|t - \xi_{k+1}| < \dfrac{\alpha}{4}$, $\|z - \varphi_0(\xi_k)\| < \dfrac{\beta}{2}$ et $\|\lambda - \lambda_0| < \gamma$. Pour composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]\xi_{k+1} - \dfrac{\alpha}{4}, \xi_{k+1} + \dfrac{\alpha}{4}\right[$ ...

voisinage de $(\xi_{k+1}, \xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$. En faisant $k = N$, Φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $(t_0, \xi_0, \zeta_0, \lambda_0)$. ■

Calcul des dérivées partielles de Φ

D'après la proposition X.1.2, on a, pour tout $(t, \xi, \zeta, \lambda) \in \mathscr{D}$:

$$\Phi(t, \xi, \zeta, \lambda) = \zeta + \int_\xi^t f(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda)\, \mathrm{d}\tau . \tag{8}$$

Proposons-nous de déterminer les dérivées partielles de Φ par rapport aux variables t, ξ, ζ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ et λ_q $(1 \leqslant q \leqslant p)$.

On a d'abord de façon évidente :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \xi, \zeta, \lambda) = f(t, \Phi(t, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) , \tag{9}$$

ce qui n'est qu'une autre façon d'exprimer que $\varphi_{\xi, \zeta, \lambda}$ est solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$. Puis, par application répétée du lemme 1, les membres de gauche étant calculés en (t, ξ, ζ, λ) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -f(\tau, \zeta, \lambda) + \int_\xi^t L(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)\, \mathrm{d}\tau \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k} = \vec{v}_k + \int_\xi^t L(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)\, \mathrm{d}\tau \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_q} = \int_\xi^t \bigg[& L(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_q}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) + \\ & + \frac{\partial f}{\partial \lambda_q}(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda) \bigg] \mathrm{d}\tau \quad (1 \leqslant q \leqslant p) .\end{aligned} \tag{12}$$

Si nous abrégeons $L(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda)$ en $\mathbf{M}(\tau, \xi, \zeta, \lambda)$ et si nous posons $S_q(\tau, \xi, \zeta, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_q}(\tau, \Phi(\tau, \xi, \zeta, \lambda), \lambda)$ $(1 \leqslant q \leqslant p)$, les fonctions $\mathbf{M} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E)$ et $S_q : \mathscr{D} \longrightarrow E$ sont continues.

Se reportant au § IX.5, on voit que (10) signifie que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi}(t, \xi, \zeta, \lambda)$ *est la valeur en t de la solution maximale de l'équation différentielle linéaire*

$$Z'(\tau) = \mathbf{M}(\tau, \xi, \zeta, \lambda).Z(\tau) \tag{13}$$

qui vérifie $Z(\xi) = -f(\tau, \zeta, \lambda)$.

De même, (11) signifie que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k}(t, \xi, \zeta, \lambda)$ *est la valeur en t de la solution maximale de l'équation différentielle linéaire*

$$Z'(\tau) = \mathbf{M}(\tau, \xi, \zeta, \lambda).Z(\tau) \tag{14}$$

qui vérifie $Z(\xi) = \vec{v}_k$.

Enfin (12) signifie que $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_q}(t, \xi, \zeta, \lambda)$ *est la valeur en t de la solution maximale de l'équation différentielle linéaire*

$$(15) \qquad Z'(\tau) = \mathbf{M}(\tau, \xi, \zeta, \lambda) \,.\, Z(\tau) + S_q(\tau, \xi, \zeta, \lambda)$$

qui vérifie $Z(\xi) = 0_E$.

Les équations (13), (14) et (15) s'appellent **équations aux variations** des $(\mathscr{E}_\lambda)$. Elles relèvent toutes trois du théorème IX.5.1 et sont à paramètre, le paramètre étant ici (ξ, ζ, λ). (Donc même si on était parti d'une équation $(\mathscr{E})$ *sans paramètre,* les équations aux variations sont *à paramètres*).

Si f est supposée de classe $\mathscr{C}^m$ $(m \geqslant 2)$, en itérant le procédé qui vient d'être utilisé (le premier stade consistant à appliquer le théorème 1 aux équations aux variations, etc...) il n'est pas très difficile de voir que Φ est aussi de classe $\mathscr{C}^m$. En conséquence, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, Φ l'est aussi.

§ 2 *APPLICATION AUX CHAMPS DE VECTEURS*

Ici E désigne un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$, et ω un ouvert non vide de E. Par définition, un **champ de vecteurs** sur ω est une application $\vec{V} : \omega \longrightarrow E$. Si cette application est de classe $\mathscr{C}^m$ $(0 \leqslant m \leqslant +\infty)$, on dit que $\vec{V}$ est un *champ de vecteurs de classe* $\mathscr{C}^m$.

Fixons pour toute la suite un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe $\mathscr{C}^m$ $(m \geqslant 1)$ sur ω, et associons-lui l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \quad \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}(M(t))$$

dans laquelle $t \mapsto M(t)$ est la fonction inconnue de la variable réelle t, et prenant ses valeurs dans l'ouvert ω.

L'équation $(\mathscr{E})$ satisfait toutes les hypothèses du théorème X.2.1, car posant $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ et $(\forall (t, X) \in \Omega)$ $f(t, X) = V(X)$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^m$ sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E$.

L'espace des phases de $(\mathscr{E})$ est ici E.

DÉFINITION 2.1

On appelle ***lignes de champ*** *du champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe $\mathscr{C}^m$, défini ci-dessus, les* ***trajectoires*** *de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$. Les trajectoires des solutions maximales de $(\mathscr{E})$ sont appelées* ***lignes de champ maximales*** *de $\vec{V}$.*

On a vu que le second membre de $(\mathscr{E})$ est $f(t, X) = V(X)$, ce qui est une fonction *indépendante de t* (ce que les Mécaniciens expriment en disant que $(\mathscr{E})$ est « holonome »). Pour tirer parti de cette particularité, il est commode d'adopter la notation suivante : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $I - \{a\}$ (resp. $I + \{a\}$) pour $\{x - a\}_{x \in I}$ (resp. $\{x + a\}_{x \in I}$).

Considérons une solution $\varphi : I \longrightarrow E$ de $(\mathscr{E})$; il est clair que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction ${}_a\varphi : I + \{a\} \longrightarrow E$, $t \mapsto \varphi(t - a)$ est solution de

${}_a\varphi$ ont même trajectoire. De plus, puisque $(\forall a \in \mathbb{R})\ {}_{-a}({}_a\varphi) = \varphi$, pour que φ soit maximale, il faut et il suffit que ${}_a\varphi$ soit maximale.

Nous en déduisons d'abord :

Théorème 2.1

> a) *Sous les hypothèses de la définition* 2.1, *les* **lignes de champ maximales** *de l'équation* $(\mathscr{E})$ *forment une* **partition** *de* ω.
> b) *Les solutions maximales constantes de* $(\mathscr{E})$ *sont les fonctions* $\mathbb{R} \longrightarrow E$, $t \mapsto P$ *où* $P \in \omega$ *vérifie* $\vec{V}(P) = 0_E$.
> c) *Soit* $\varphi : I \longrightarrow E$ *une solution maximale non constante de* $(\mathscr{E})$. *Alors ou bien* φ *est une* **immersion** (*i.e.* *une injection telle que* $\varphi'(t)$ *reste* $\neq 0_E$), *ou bien :* $I = \mathbb{R}$, $\varphi'(t)$ *ne s'annule jamais et il y a un réel T tel que* φ *soit T-périodique et* $\varphi|_{[0,T[}$ *est injective.*

Démonstration :

a) On sait que les graphes des solutions maximales de $(\mathscr{E})$ constituent une partition de $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$, d'où l'on déduit que la réunion des trajectoires maximales de $(\mathscr{E})$ est ω. Soit $a \in \omega$ et deux solutions maximales $\varphi : I \longrightarrow E$ et $\psi : J \longrightarrow E$ de $(\mathscr{E})$ dont la trajectoire passe par A. On a donc : $\varphi(\alpha) = \psi(\beta) = A$ pour un $\alpha \in I$ et un $\beta \in J$. La fonction $g = {}_{\alpha-\beta}\psi : J + \{\alpha - \beta\} \longrightarrow E$ est une solution maximale de $(\mathscr{E})$, et $g(\alpha) = A$. Donc $g = \varphi$ et $I = \mathscr{S} + \{\alpha - \beta\}$. Puisque $\varphi = {}_{\alpha-\beta}\psi$, les trajectoires de φ et ψ sont bien les mêmes, d'où *a*).

b) Si $P \in \omega$ vérifie $\vec{V}(P) = 0_E$, toute fonction constante de valeur P sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est solution de $(\mathscr{E})$; et réciproquement, puisque la dérivée d'une fonction constante est nulle, la valeur P d'une fonction constante solution de $(\mathscr{E})$ vérifie nécessairement $\vec{V}(P) = 0_E$.

c) Remarquons d'abord que $\varphi'(t)$ *ne s'annule jamais* car si $\varphi'(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in I$, alors d'après le théorème X.2.1 φ serait constante de valeur $P_0 = \varphi(t_0)$.

Supposons φ *non injective,* et soit $t_0 \in I$, $t_0' \in I$ $(t_0 < t_0')$ tels que $\varphi(t_0) = \varphi(t_0')$. Puisque $\varphi'(t_0) \neq 0_E$, pour $t \in I$ *voisin de* t_0, on a sur ce voisinage $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$, ce qui par continuité de φ entraîne l'existence de $t_1 > 0$ tel que $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$ et $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ pour $t \in\ ]0, t_1[$.

Posons $T = t_1 - t_0$. Puisque $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T)$, le théorème X.2.1 montre immédiatement que ${}_T\varphi = \varphi$, d'où $I = I + \{T\}$, ce qui entraîne (puisque $t_0' - t_0 \geqslant T$) que $I = \mathbb{R}$, et que φ est T-périodique.

Prouvons enfin par l'absurde que $(\forall a \in \mathbb{R})\ \varphi|_{[a, a+T[}$ est injective : sinon on aurait α et β réels avec $0 < \beta - \alpha < T$ tels que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, mais alors φ serait τ périodique avec $\tau = \beta - \alpha$, ce qui impliquerait $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + \tau)$, en contradiction avec le fait que $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ pour $t \in\ ]t_0, t_1[$. ■

A cause du théorème 2.1, les lignes de champ maximales de $\vec{V}$ sont bien les éléments maximaux au sens de l'inclusion de l'ensemble des lignes de champ de $\vec{V}$. Les points $P \in \omega$ tels que $\vec{V}(P) = 0_E$ s'appellent les ***points fixes*** du champ $\vec{V}$. Ils forment un ensemble fermé $\mathscr{S} \subset \omega$, et d'après le théorème 2.1, *les lignes de champ maximales de* $\vec{V}$ *non réduites à un point constituent une partition de l'ouvert* $\omega \backslash \mathscr{S}$.

Pour finir, démontrons la propriété utilisée pour prouver le théorème 3 de l'appendice 1 : à cet effet, supposons le champ de vecteurs $\vec{V}$ de l'équation $(\mathscr{E})$ *de classe* $\mathscr{C}^m$ $(1 \leqslant m \leqslant +\infty)$ et *sans point fixe.* Reprenant les notations du § 1, pour $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R} \times \omega$, soit $\varphi_{\xi, \zeta}$ la solution maximale de $(\mathscr{E})$ telle que $\varphi_{\xi, \zeta}(\xi) = \zeta$. Si $\mathscr{D}$ désigne l'ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \omega$ formé des (t, ξ, ζ) tels que $\varphi_{\xi, \zeta}$ soit définie en t, posons $\Phi : \mathscr{D} \longrightarrow E$, $(t, \xi, \zeta) \mapsto \varphi_{\xi, \zeta}(t)$.

On sait (cf. § 1) que Φ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathscr{D}$. De plus l'étude qui précède prouve qu'on obtient toutes les lignes de champ de $\vec{V}$ en prenant les images des fonctions $\varphi_{O, \zeta}$ pour $\zeta \in \omega$.

Fixons $M_0 \in \omega$, posons $\vec{V}_0 = \vec{V}(M_0)$. Choisissons un voisinage W_1 de M_0 et un réel $\rho_1 > 0$ tels que, pour tout $\zeta \in W_1$, la solution $\varphi_{O, \zeta}$ soit définie sur l'intervalle $I_1 =]-\rho_1, \rho_1[$. L'existence de W_1 et de ρ_1 est assurée par l'étude menée au § X.2.

Considérons ensuite un pavé ouvert S_1 de centre O dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et un *plongement* $g : S_1 \longrightarrow W_1$ de classe $\mathscr{C}^m$ tel que $g(O) = M_0$ et que $\vec{V}_0$ n'appartienne pas à l'image de la différentielle $\mathrm{d}_0 g$, autrement dit, que $\vec{V}_0$ ne soit pas un vecteur tangent en M_0 à la sous-variété hypersurface image de g. (Observons qu'il existe au moins un tel plongement : il suffit de paramétrer localement autour de M_0 n'importe quel hyperplan affine passant par M_0 et non parallèle à $\vec{V}_0$).

Notons $\Psi(t, z) = \Phi(t, O, g(z))$ pour $z \in S_1$ et $t \in I_1$: l'application $\Psi : I_1 \times S_1 \longrightarrow E$ est donc de classe $\mathscr{C}^m$.

Théorème 2.2

Avec les notations et hypothèses ci-dessus, il existe un pavé ouvert $S \subset S_1$ de centre 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$, et un réel $\rho \in]0, \rho_1[$ tels que (en posant $I =]-\rho, \rho[$) $\Psi|_{I \times S}$ soit un $\mathscr{C}^m$-difféomorphisme de $I \times S$ sur un voisinage ouvert T de M_0 dans E.

Démonstration :

Notons $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ les coordonnées de $z \in S_1$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Pour $(t, z) \in I_1 \times S_1$, on a : $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t, z) = \varphi'_{0, g(z)}(t)$; donc $\dfrac{\partial Y}{\partial t}(0, 0) = V_i$.

Pour $z \in S_1$, on a : $\Phi(0, 0, g(z)) = \Psi(0, g(z)) = g(z)$, donc $(\forall i \in [\![1, n-1]\!])$ $\dfrac{\partial \Psi}{\partial z_1}(0, 0) = \dfrac{\partial g}{\partial z_i}(0)$. A cause des hypothèses sur g, les vecteurs $\vec{V}_0$, $\dfrac{\partial g}{\partial z_1}(0), \ldots, \dfrac{\partial g}{\partial z_{n-1}}(0)$ sont linéairement indépendants. Autrement dit, la différentielle $\mathrm{d}_{(0,0)}\Psi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E. Par le théorème d'inversion locale VI.2.1, on a donc un pavé ouvert $S \subset S_1$ de centre 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et un réel $\rho \in]0, \rho_1[$ tels que $\Psi|_{]-\rho, \rho[\times S}$ soit un $\mathscr{C}^m$-difféomorphisme de $]-\rho, \rho[\times S$ sur un voisinage T de M_0 dans E. ■

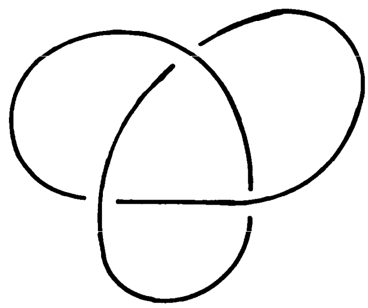
Exercice 1 : Soit φ une solution périodique non constante de l'équation $(\mathscr{E})$, avec $\vec{V}$ de classe $\mathscr{C}^m$ $(m \geqslant 1)$.

a) Démontrer que l'image Γ de φ est une sous-variété de dimension 1 et de classe $\mathscr{C}^m$ *compacte* de E.

b) Démontrer que Γ est homéomorphe à $\mathbb{U}$.

Indication : Soit T la plus petite période > 0 de φ ; associer à $\varphi(t)$ le point $e^{2i\pi(t/T)} \in \mathbb{U}$.

N.B. Attention ! si $n \geqslant 3$, le résultat de b) n'empêche nullement Γ d'être « nouée » (cf. fig. ci-dessous) :



Appendice 4

HOLOMORPHIE ET ANALYTICITÉ

Fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **holomorphe** ssi elle est **continûment $\mathbb{C}$-dérivable** dans Ω (voir § II.3).

Munissons $\mathbb{C}$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, soit $s_\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda z$; l'application $\lambda \mapsto s_\lambda$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur l'ensemble $\vec{\mathcal{S}}_+$ des *similitudes vectorielles directes* de $\mathbb{C}$ (voir tome 1, § VI.10).

Donnons-nous $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$; notons P et Q les parties réelle et imaginaire de f.

L'existence de la $\mathbb{C}$-dérivée de f en a signifie : $\exists \lambda \in \mathbb{C} \mid f(a+u) - f(a) - \lambda u \underset{u \longrightarrow 0}{\in} o(u)$, c'est-à-dire : $\exists s \in \vec{\mathcal{S}}_+ \mid f(a+u) - f(a) - s(u) \underset{u \longrightarrow 0}{\in} o(u)$. Autrement dit : *$f$ est différentiable en a* (en tant qu'à valeurs dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}_{(\mathbb{R})}$) *et* $\mathrm{d}_a f \in \vec{\mathcal{S}}_+$.

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ la variable générique de $\mathbb{C}$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $(1, \mathrm{i})$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}_{(\mathbb{R})}$). Supposons f différentiable en a, alors $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ existent en a ; Comme $(1, \mathrm{i})$ est une base orthonormée du $\mathbb{R}$-ev euclidien $\mathbb{C}$, et que $\mathrm{Mat}_{(1,\mathrm{i})}(\mathrm{d}_a f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a) \end{bmatrix}$ la CNS. pour que $\mathrm{d}_a f \in \vec{\mathcal{S}}_+$ est : $\dfrac{\partial P}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(a)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(a)$. Et si c'est le cas, il est clair que $\mathrm{d}_a f = s_\lambda$ avec $\lambda = \dfrac{\partial P}{\partial x}(a) + \mathrm{i}\dfrac{\partial Q}{\partial x}(a)$. Donc :

THÉORÈME 1

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$; pour que $f = P + \mathrm{i}Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ (P et Q numériques) soit holomorphe sur Ω, il faut et il suffit qu'ell

$\mathscr{C}^1$, *et qu'on ait sur* Ω *les identités suivantes, dites* **de Cauchy :**

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Remarque 1 : On peut prouver que si f est simplement $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω, alors elle y est holomorphe. Voir par exemple [5].

Equivalence holomorphie-analyticité

Nous avons vu au § III.2 que sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, toute fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est analytique y est holomorphe. La théorie des séries de Fourier va nous donner une preuve très facile de la réciproque.

THÉORÈME 2

Soit Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ***holomorphe.*** *Alors* f *est* ***analytique*** *sur* Ω*. De plus, pour* $a \in \Omega$*, le rayon de convergence* R_a *de la série de Taylor* $T_{f,a} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, X^n$ *est au moins égal à la distance euclidienne* δ_a *de* a *à* $\mathbb{C}\setminus\Omega$ *si* $\Omega \neq \mathbb{C}$*; il est infini si* $\Omega = \mathbb{C}$*, et l'on a* $(\forall z \in \mathbb{C})\ |z - a| < \delta_a \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$ *si* $\Omega \neq \mathbb{C}$ *; cette relation ayant lieu pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *si* $\Omega = \mathbb{C}$.

Démonstration :

Si $\Omega = \mathbb{C}$, nous poserons $\delta_a = +\infty$. Fixons $r_0 \in \,]0, \delta_a[$.

Pour $r \in \,]0, \delta_a[$, soit $\varphi_r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Par composition, φ_r est de classe $\mathscr{C}^1$; elle est de plus 2π-périodique. Le théorème IV.3.2 s'applique, d'où

$$(1) \qquad (\forall \theta \in \mathbb{R})\quad f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = c_0(\varphi_r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(\varphi_r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + c_{-n}(\varphi_r)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right),$$

avec $(\forall n \in \mathbb{Z})\quad c_n(\varphi_r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

Posons, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \,]0, \delta_a[: u_n(r) = c_n(\varphi_r)$. Par dérivation sous l'intégrale, on a : u_n est dérivable sur $]0, \delta_a[$, et :

$$(\forall r \in \,]0, \delta_a[)\quad u_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f'(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\ ;$$

mais $\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f'(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{r\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\varphi_r(\theta))$, d'où en intégrant par parties :

$$u_n'(r) = \frac{1}{2\pi r\mathrm{i}}\left\{[f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})]_0^{2\pi} + \mathrm{i}n\int_0^{2\pi} f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\right\} = \frac{n}{r}\,u_n(r)\,,$$

ce qui entraîne : $u_n(r) = a_n\, r^n$, avec $(\forall n)\ a_n = u_n(r_0)/r_0^n$.

D'autre part $|u_n(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta \leqslant \underset{|z-a| \leqslant r}{\mathrm{Max}}\ |f(z)|$, donc par continuité de f en a, $u_n(r)$ reste bornée au voisinage de $r = 0$.

évidemment : $a_n = 0$ pour $n \leqslant 0$. Finalement, (1) s'écrit :

$$(\forall r \in \,]0, \delta_a[, \forall \theta \in \mathbb{R}) \quad f(a + r\,e^{i\theta}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, r^n\, e^{in\theta}\,,$$

la convergence étant normale sur $\mathbb{R}$ (cf. théorème IV.3.2). Soit encore, en posant $z = a + r\,e^{i\theta}$:
$(\forall z \in \mathbb{C})(|z - a| < \delta_a) \Rightarrow$ la série $\sum a_n(z - a)^n$ converge, et :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n\,.$$

Compte tenu de la théorie élémentaire des séries entières (§ II.1 à II.3), cela entraîne toutes les assertions du théorème 2. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS L. V., *Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] ARNOLD V., *Equations différentielles ordinaires,* Editions Mir, Moscou, 1974.

[3] ARNOLD V., *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires,* Editions Mir, Moscou, 1980.

[4] CARTAN H., *Cours de calcul différentiel,* Hermann, Paris, 1977.

[5] CARTAN H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,* Hermann, Paris, 1961.

[6] CROUZEIX M., MIGNOT A. L., *Analyse numérique des équations différentielles,* Masson, Paris, 1984.

[7] DEHEUVELS P., *L'intégrale,* P.U.F., Collection « Mathématiques », Paris, 1980.

[8] DESCOMBES R., *Intégration,* Hermann, Paris, 1972.

[9] DIEUDONNÉ J., *Calcul infinitésimal,* Hermann, Paris, 1980.

[10] DIEUDONNÉ J., *Eléments d'analyse,* tomes 1 et 2, Gauthier-Villars, Paris, 1982-1984.

[11] GRAMAIN A., *Intégration,* Hermann, Paris, 1988.

[12] HARDY G. H., ROGOSINSKI W. W., *Fourier Series,* Cambridge University Press, Cambridge, 1965.

[13] INCE E. L., *Ordinary differential equations,* Dover, New York, 1956.

[14] KAMKE E., *Differential Gleichungen reeller Funktionen,* réédition Chelsea, 1947.

[15] KAMKE E., *Differential Gleichungen Lösungsmethoden und Lösungen,* tomes 1 et 2, réédition Chelsea, 1944.

[16] KOSTITZIN V. A., *Biologie mathématique,* Armand Colin, Paris, 1937.

[17] PONTRIAGUINE L., *Equations différentielles ordinaires,* Editions Mir, Moscou, 1976.

[18] SCHWARTZ L., *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique,* tomes 1 et 2, Hermann, Paris, 1981.

[19] TITCHMARCH E. C., *Theory of functions,* Oxford University Press, Oxford, 1939.

[20] VERLEY J. L., *Théorie élémentaire de l'intégration,* C.D.U., Paris, 1967.

[21] VOLTERRA V., *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie,* Gauthier-Villars, Paris, 1931.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Imprimé en France
Saisie MATHOR — Photocomposition PHOTOMAT
JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
Dépôt légal : 1re édition : Janvier 1989
N° 13022. Dépôt légal : Mai 1990

Ce volume 3 du *COURS DE MATHÉMATIQUES* fournit les compléments d'analyse indispensables tant aux concours d'entrée aux grandes écoles que pour entreprendre des études scientifiques à dominante mathématique.

Regroupant les notions de base sur les séries entières, les séries de Fourier, le calcul différentiel, les intégrales multiples et les équations différentielles, ce livre permet une assimilation progressive des concepts et incorpore au texte une vaste gamme d'exercices classés.

Sa lecture implique la connaissance des techniques introduites dans le cadre du tome précédent, notamment sur l'intégration des fonctions d'une variable réelle et sur les suites et les séries de fonction.

Les futurs élèves des grandes écoles, mais aussi les candidats à l'agrégation et les professeurs de lycées y trouveront, en petits caractères, tous les approfondissements désirables.

Ce cours de mathématiques se compose de 4 tomes :

1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie

Ce tome 3 propose 126 théorèmes avec leur démonstration, 103 exemples et 500 exercices, du plus simple au plus élaboré.

9 782040 165253
ISBN 2-04-016525-8