FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES

I / Fonctions linéaires

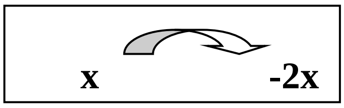
1°) Introduction aux fonctions

2°) Définition : Soit a un nombre relatif non nul ; on définit une fonction linéaire f, qui, à tout nombre x, associe le nombre ax.
On note $f : x \longmapsto ax$ et $f(x) = ax$

- f(x) s'appelle l'image de x ;
- a s'appelle le coefficient linéaire de la fonction f .

Une fonction linéaire traduit une situation de proportionnalité.

3°) Exemple : $f : x \longmapsto -2x$

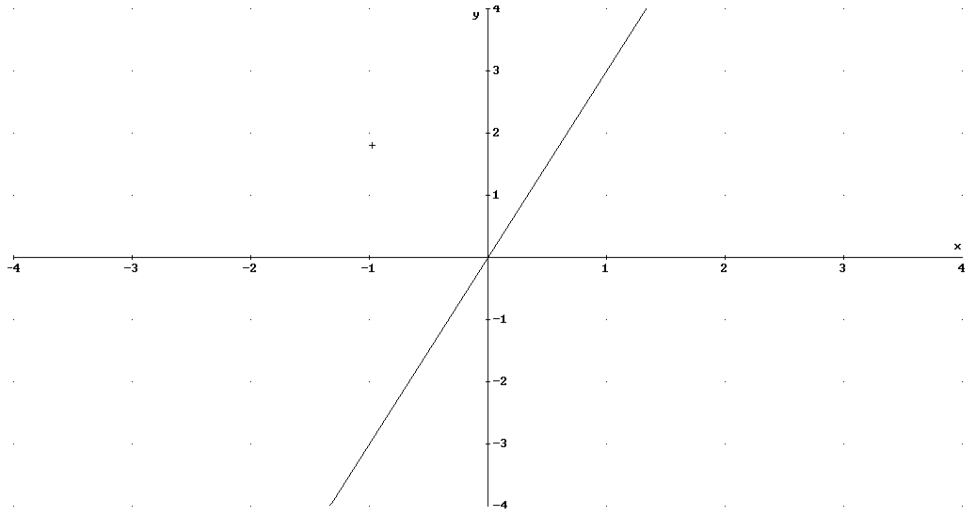


L'image de 3 se note : f(3) ; elle est égale à $f(3) = -2 \times 3 = -6$; -6 est l'image de 3 ;
on dit aussi que 3 est l'antécédent de –6.

4°) Propriété :

La représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$ est une droite passant par l'origine et d'équation $y = ax$.

Pour la construire, il suffit de connaître un point (abscisse x) et son image f(x) = y (ordonnée)
$\Rightarrow$ exemple oral avec g(x) = 3x



Réciproquement, toute droite passant par l'origine et non confondue avec l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

II / Fonction affine

1°) Définition : Etant donnés deux nombres a et b, on définit une fonction affine f, qui à tout x, associe le nombre ax + b.
l'image de x se note $f(x) = ax + b$;
On note $f : x \longmapsto ax + b$
a s'appelle le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Rmq : une fonction linéaire est une fonction affine particulière (b = 0) .

2°) Exemple :

$g : x \longmapsto 3x - 2$

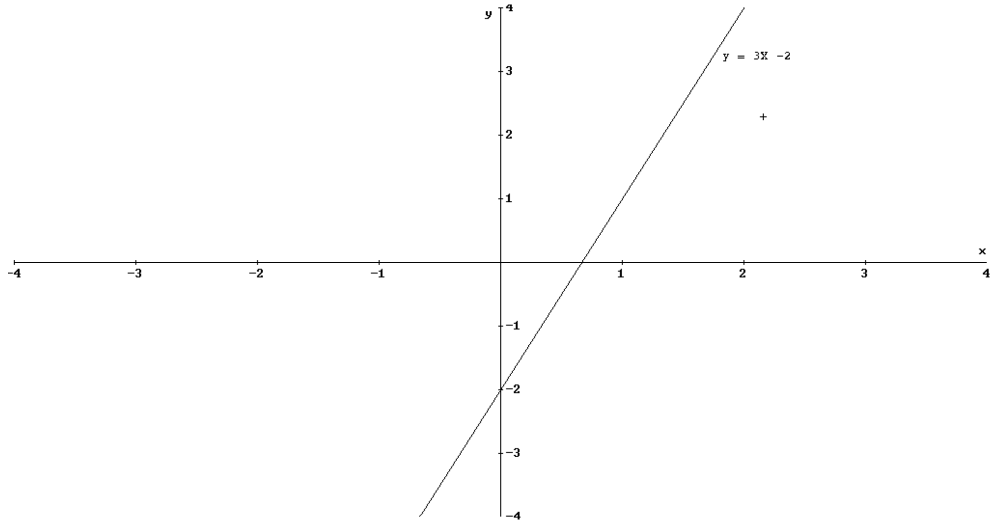
Image de 1 : $g(1) = 3 \times 1 - 2 = 1$
Image de (-2) : $g(-2) = -8$
Nombre ayant pour image 2 : il faut résoudre $3x - 2 = 2$ d'où $x = \dfrac{4}{3}$.

3°) Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est une droite d'équation $y = ax + b$

Pour la construire, il suffit de connaître deux points (abscisse x) et leur image f(x) = y (ordonnée)

$g : x \longmapsto 3x - 2$ A(1 ;1) et B(0 ;-2) par exemple



Pour savoir si un point appartient à une droite, il suffit de remplacer x et y par les coordonnées du point et de vérifier si l'égalité est vraie.
Ainsi si la droite a pour équation $y = 2x + 1$, le point R(1 ;3) appartient à cette droite car $2\times1 + 1 = 3$;
Le point S(-2 ;-5) non car $2\times(-2) + 1 \neq -5$

III / Détermination graphique d'une fonction affine

a) Calcul d'un coefficient directeur

Connaissant deux points $A(x_A ;y_A)$ et $B(x_B ;y_B)$ situés sur une droite, on peut déterminer le coefficient directeur de cette droite grâce à la formule :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$\Rightarrow$ faire la preuve de cette formule.

Exemple : R(1 ;3) et S(-2 ;-5)

$a = \frac{-5-3}{-2-1} = \frac{8}{3}$ donc (AB) est de la forme $y = \frac{8}{3}x + b$;

l'ordonnée à l'origine peut soit se lire graphiquement, soit se calculer en remplaçant x et y par les coordonnées d'un des deux points.

b) Intersection de deux représentations graphiques

Soit $f\ x \longmapsto -x + 5$ et $g : x \longmapsto 4x - 2$

Pour déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection, il suffit d'écrire l'égalité des images :

$f(x) = g(x)$ donc $-x + 5 = 4x - 2$ d'où $x = \frac{7}{5}$

Pour y, il suffit de remplacer : $y = -\frac{7}{5} + 5 = \frac{18}{5}$ $M\left(\frac{7}{5} ; \frac{18}{5}\right)$ est le point d'intersection.

IV / Pourcentages et fonctions

1°) Activité

2°) Propriétés :

Augmenter de x %, c'est multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$;

Diminuer de x %, c'est multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

Exemples :

- Augmenter de 8%, c'est multiplier par 1,08 ; multiplier par 0,77 c'est appliquer une baisse de 23%.

$\Rightarrow$ exercices d'application.