LFC 2002/2003
Classe : 1e S **Devoir de MATHEMATIQUES** **Durée : 1h50**

EXERCICE N°1

On dispose de cinq boules numérotées de 1 à 5.
On les place au hasard dans six boites nommées A, B, C, D, E et F. Chaque boite peut recevoir jusqu'à 5 boules.
On note ACCBE l'événement : « la 1ere boule est dans la boite A, le 2e et la 3e dans la boite C, la 4e dans la boite B et la 5e dans la boite E »

1. Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. Calculer son cardinal.
2. Calculer la probabilité que toutes les boules soient dans des boites différentes.
3. a. Calculer la probabilité qu'aucune boule soit dans la boite A
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une boule dans la boite A
4. Calculer la probabilité que les boules numérotées 1 et 2 soient dans la même boite.
5. Calculer la probabilité que la somme des numéros des boules placées dans la boite A soit égale à 6.

EXERCICE N°2

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et la relation : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

1. Déterminer la fonction f telle que : $u_{n+1} = f(u_n)$ et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution α.
2. Montrez que f est strictement croissante sur $]-2 ; +\infty[$.
3. Placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, sur l'axe des abscisses du graphique joint en annexe, sur lequel est tracé la courbe représentative de f.
   Aucune justification n'est demandée mais on laissera les traits de construction.
4. Donner une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).
5. On pose :pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   Montrer que :pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{1}{3} + v_n$
6. a. Donner une expression de v_n en fonction de n.
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
7. Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre que l'on précisera.

EXERCICE N°3

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sou forme de fractions irréductibles.

1. Soit Ω l'univers associé à cette expérience.
   Montrer que card $\Omega = 120$
2. Soit les événements suivants :
   A : « les trois boules sont rouges »
   B : « les trois boules sont de la même couleur »
   C : « les trois boules sont chacune de couleur différente »

a. Montrer que $P(A) = \frac{1}{12}$

b. Calculer P(B) et P(C).

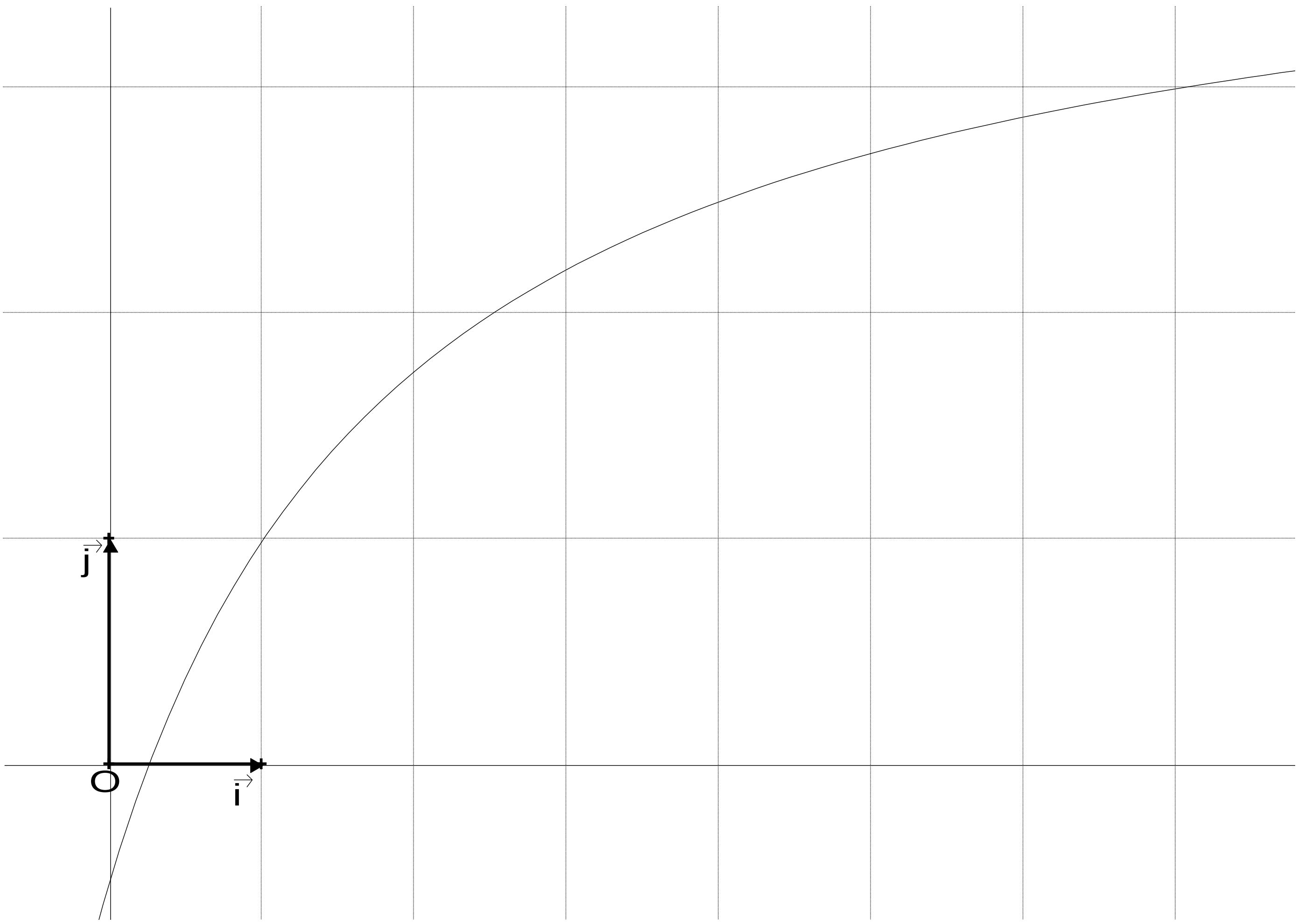
3. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
   Déterminez la loi de probabilité de X.
   Calculer son espérance.

<u>EXERCICE N°4</u>

On donne $P(\overline{A} \cap B) = 0,25$, $P(A \cap \overline{B}) = 0,42$ et $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,82$.
Calculer $P(A \cap B)$, P(A) et P(B).
Une représentation pourra être utile….

ANNEXE

<u>NOM :</u> **<u>Prénom :</u>**



CORRECTION.

EXERCICE N°1

1. card $\Omega = 6^5$
   En effet, chaque boule peut être placée dans n'importe quelle boîte soit 6 possibilités par boule.

2. On peut placer la 1ere boule dans n'importe quelle boîte soit 6 possibilités.
   Pour chaque boule soit dans une boîte différente il ne reste plus que 5 possibilités pour la 2e boule puis 4 pour la 3e boule, etc…
   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{6x5x4x3x2}{6^5} = \dfrac{5}{54}$

3. a. On a 5 possibilités par boule.
   Le probabilité cherchée est donc : $\dfrac{5^5}{6^5}$
   b. « il y a au moins une boule dans la boite A » est l'événement contraire de « in n'y a aucune boule dans la boite A »
      La probabilité cherchée est donc de : $1- \dfrac{5^5}{6^5}$

4. Les boules 1 et 2 sont dans la même boite soit : 6 possibilités
   Les 3 autres boules sont dispersés au hasard dans les 6 boites soit : 6^3 possibilités
   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{6x6^3}{6^5} = \dfrac{1}{6}$

5. La somme des numéros des boules placées dans la boite A est égale à 6 si
   - on a placé les boules numérotées 1,2 et 3.
     Il reste alors 2 boules à placer dans 5 boites soit 25 possibiltés.
   - on a placé les boules numérotées 1 et 5
     Il reste 3 boules à placer dans 5 boites soit 5^3 possibilités.
   - on a placé les boules numérotées 2 et 4.
     Il reste 3 boules à placer dans 5 boites soit 5^3 possibilités

   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{2x5^3 + 25}{6^5} = \dfrac{275}{6^5}$

EXERCICE N°2

1. Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ on a : $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$

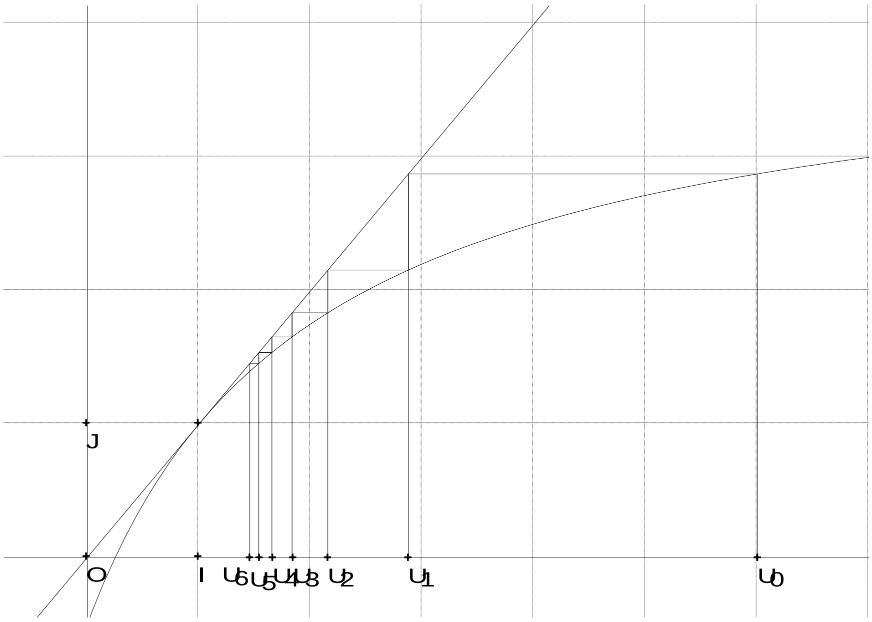
   Résolvons l'équation $f(x) = x$.
   Par équivalence successive on a :
   $$\frac{4x-1}{x+2} = x$$
   $$x^2 + 2x = 4x - 1$$
   $$(x-1)^2 = 0$$
   $$x = 1$$

2. f est dérivable sur $]-2 ; +\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle.

Pour tout x de]-2 ; + ∞[on a :

$$f'(x) = \frac{4(x + 2) - (4x - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{9}{(x + 2)^2}$$

Il est clair que pour tout x de]-2 ; + ∞[on a : $f'(x)>0$
Par conséquent f est strictement croissante sur]-2 ; + ∞[.
3.



4. Il semble que (u_n) converge vers 1.

5. Pour tout n de ℕ on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} = \frac{u_n - 1}{3u_n - 3} + \frac{3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} + v_n$$

6. a. On vient de montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$

   Par conséquent : pour tout n de ℕ on a : $v_n = v_0 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}n$

   b. On a, pour tout n de ℕ :
   $u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \dots\dots\dots = \frac{18 + 5n}{3+5n}$

7. On a : **Erreur !**$v_n = + \infty/$
   On en déduite que **Erreur !Erreur !** = 0 donc **Erreur !**$u_n = 1$

EXERCICE N°3

1. On tire 3 boules parmi 10 soit : 10x9x8 possibilités.

On les tire simultanément, on divise alors le résultat obtenu par 6 car chaque possibilité a été comptabilisé 6 fois.
Ainsi card Ω = 120

2. Nombre de possibilités de tirer 3 boules rouges : $\frac{5x4x3}{6} = 10$

   On a donc $P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

3. a. Un ajoute LA possibilité de tirer 3 jaunes
   $P(B) = \frac{10}{120} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120}$

   b. On a 5x3x2 possibilités de tirer 3 boules de couleurs différentes.
   $P(C) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

4. On a : $P(X = 1) = P(A) = \frac{11}{120}$
   $P(X = 3) = P(C) = \frac{30}{120}$ d'où $P(X=2) = 1- P(A) – P(C) = \frac{79}{120}$
   En effet, 1 ,2 et 3 sont les seules valeurs que peut prendre X.

   Calculons son espérance :
   $E(X) = \frac{11}{120} + 2x\frac{79}{120} + 3x\frac{30}{120} = \frac{259}{120}$

EXERCICE N°4

P(A ∩ B) = 1- P (**Erreur !**) = 1 – P(**Erreur !** ∪ **Erreur !**) = 0,18
$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0,6$
$P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B) = 0,43$