TRIGONOMETRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

I / Introduction

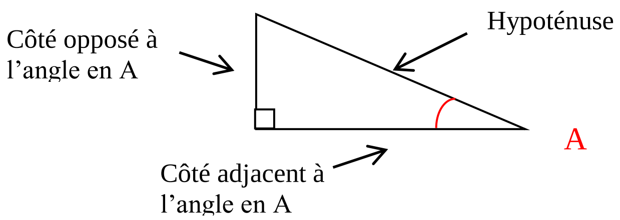
Le mot *trigonométrie* vient du grec et signifie « mesure du triangle ». Le cosinus, le sinus et la tangente sont trois rapports trigonométriques.

⇒ feuille d'activités

II / Définitions

1°)

- Étant donné un triangle ABC rectangle en B, considérons l'un de ses angles aigus, $\hat{A}$ par exemple. Le côté [BC] est appelé côté opposé à l'angle $\hat{A}$, le côté [AB] est appelé côté adjacent à l'angle $\hat{A}$.



- On définit alors les trois rapports suivants :

— cosinus (cos)

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

— sinus (sin)

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

— tangente (tan)

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}$$

- *Remarque* : pour calculer un de ces rapports, il faut exprimer les deux longueurs dans la même unité.
- *Exemple* : en appliquant ces définitions à l'angle $\hat{A}$ de la figure 1, on obtient :
  $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$; $\cos \hat{A} = \frac{AB}{AC}$; $\tan \hat{A} = \frac{BC}{AB}$.

Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont des nombres sans unités compris entre 0 et 1.

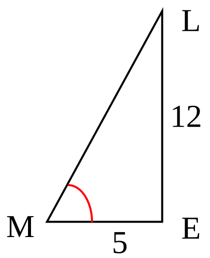
2°) Propriété

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au cosinus de l'autre angle.
Ou encore, puisque les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires : **si deux angles** (non nuls) **sont complémentaires**, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre,(et la tangente de l'un est égale à l'inverse de la tangente de l'autre) .
Par exemple, sin 67° = cos 23° car un angle de 67° et un angle de 23° sont complémentaires.

III / Exemples de calcul

1. Exemple 1

- *Énoncé* : l'unité de longueur étant le centimètre, soit LEM un triangle rectangle en E tel que EL = 12 et EM = 5. On veut calculer les valeurs exactes de $\sin\hat{M}$, $\cos\hat{M}$ et $\tan\hat{M}$.



- *Résolution* : pour calculer les valeurs exactes de $\sin\hat{M}$ et $\cos\hat{M}$, on doit calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle, à savoir ML. Ce triangle étant rectangle en E, on peut appliquer le théorème de Pythagore :

$LM^2 = EL^2 + EM^2$, soit $LM^2 = 12^2 + 5^2$, d'où $LM^2 = 169$, donc LM = $\sqrt{169}$ = 13.

Par définition, $\sin\hat{M} = \frac{EL}{LM}$, donc $\sin\hat{M} = \frac{12}{13}$.

De même, $\cos\hat{M} = \frac{EM}{LM}$, donc $\cos\hat{M} = \frac{5}{13}$.

Enfin, $\tan\hat{M} = \frac{EL}{EM}$, donc $\tan\hat{M} = \frac{12}{5}$.

- *Remarque* : avec une calculatrice, il est ensuite possible d'obtenir une valeur approchée de $\hat{M}$, par exemple à partir de $\sin\hat{M} = \frac{12}{13}$ en tapant : $12 / 13 = \text{INV SIN}$ ou bien $\text{SIN}^{-1}(12/13)\,\text{EXE}$.

2. Exemple 2

- *Énoncé* : soit PHR un triangle rectangle en P tel que HP = PR = 1 cm. Ce triangle étant isocèle et rectangle, on sait que $\hat{H} = \hat{R} = 45°$. On veut calculer les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente de ces angles de 45°.

- *Résolution* : par définition, $\cos\hat{H} = \frac{HP}{HR}$.

Calculons la valeur exacte de HR, en appliquant la propriété de Pythagore dans le triangle rectangle HPR :
$HR^2 = HP^2 + PR^2$, soit $HR^2 = 1^2 + 1^2$, donc $HR^2 = 2$, d'où $HR = \sqrt{2}$ cm.

On en déduit que $\cos\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après les propriétés précédentes citées dans le paragraphe 2, les deux angles $\hat{H}$ et $\hat{R}$ étant complémentaires et de mesure 45°, on en déduit que $\sin\hat{R} = \cos\hat{H}$ et donc que $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

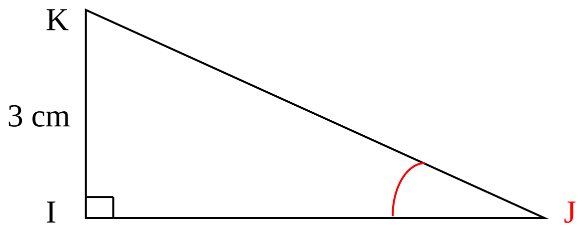
Par définition, $\tan\hat{H} = \frac{PR}{HP}$, donc $\tan\hat{H} = \frac{1}{1}$. On en déduit que $\tan 45° = 1$.

En résumé :

$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\tan 45° = 1$.

3. Exemple 3

- *Énoncé* : soit IJK un triangle rectangle en I tel que IK = 3 cm et $\hat{J}$ = 26°. On veut calculer KJ et IJ à 0,01 cm près.

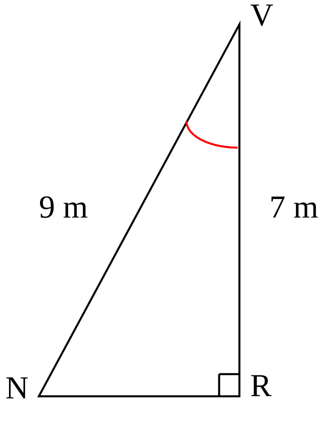


- *Résolution* : on connaît IK qui est la longueur du côté **opposé** à $\hat{J}$, et on cherche KJ qui est la longueur de l'**hypoténuse** du triangle ; on va donc utiliser le **sinus** de l'angle $\hat{J}$.

On écrit : sin $\hat{J} = \frac{\text{IK}}{\text{KJ}}$, soit sin 26° = $\frac{3}{\text{KJ}}$, et on en déduit que **KJ =** $\mathbf{\frac{3}{\sin 26°}}$. D'où, à l'aide d'une calculatrice, on a : KJ $\approx$ 6,84 cm.

Calculons IJ : on connaît IK qui est la longueur du côté **opposé** à $\hat{J}$, et on cherche IJ qui est la longueur du côté **adjacent** à $\hat{J}$; on va donc utiliser la **tangente** de l'angle $\hat{J}$.
On écrit : tan $\hat{J} = \frac{\text{IK}}{\text{IJ}}$, soit tan 26° = $\frac{3}{\text{IJ}}$, et on en déduit que **IJ =** $\mathbf{\frac{3}{\tan 26°}}$. D'où, à l'aide d'une calculatrice :
IJ $\approx$ 6,15 cm.

- *Énoncé* : soit NRV un triangle rectangle en R tel que RV = 7 m et NV = 9 m. On veut calculer la mesure de l'angle $\hat{V}$ arrondie à 0,1° près.



- *Résolution* : RV est la longueur du côté **adjacent** à l'angle $\hat{V}$, et NV est la longueur de l'**hypoténuse** du triangle ; on va donc utiliser le **cosinus** de l'angle $\hat{V}$. En effet, dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est égal au rapport $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

On écrit cos $\hat{V} = \frac{\text{RV}}{\text{NV}}$, soit **cos** $\hat{V} = \mathbf{\frac{7}{9}}$ et on en déduit, à l'aide d'une calculatrice, que $\hat{V}$ $\approx$38,9°.

IV / Relation entre sinus et cosinus

1°) Propriété

Soit ABC un triangle rectangle en A, alors :

$$(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = 1$$

(idem avec l'angle $\widehat{C}$)

⇒ faire la preuve en utilisant le théorème de Pythagore .

2°) $\overrightarrow{AB}$

- Soit $\widehat{B}$ un angle aigu tel que **$\cos \widehat{B} = \frac{1}{3}$;** on veut calculer la valeur exacte de sin $\widehat{B}$ et tan $\widehat{B}$.

$$(\sin \widehat{B})^2 + (\cos \widehat{B})^2 = 1 \text{ , donc } (\sin \widehat{B})^2 + \frac{1}{9} = 1$$

d'où $(\sin \widehat{B})^2 = \frac{8}{9}$, *soit* $(\sin \widehat{B}) = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$, *soit* $\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\widehat{B}$ étant aigu, on ne garde que la valeur positive $\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$$

- Partant de cos60° = $\frac{1}{2}$, on peut retrouver que sin60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

⇒ exercices