Exercices niveau 1A

Equation.

On pose : $P(x) = x^2 - 9 - 2(x-3)^2$.

1°) Calculer $P(-1)$, $P\left(\frac{7}{2}\right)$ et $P\left(\sqrt{5}\right)$.

2°) Factoriser $P(x)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Vecteurs.

Soit un triangle ABC, avec AB = 2, AC = 5 et BC = 4 (en centimètres)
On note I le milieu de [BC], D le symétrique de A par rapport à B et on définit deux points E et F par :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

Partie A

1°) Faire une figure.

2°) Exprimer $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3°) Démontrer que les points E, I et F sont alignés.

Partie B

On se place maintenant dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1°) a) Donner les coordonnées des points A, B et C.

b) Déterminer, en justifiant, les coordonnées des points I, D, E et F définis précédemment.

2°) Déterminer une équation de la droite (EF) et démontrer que I appartient à (EF).

YOUSSEF BOULILA

3°) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ que peut on en conclure pour le quadrilatère BCDE ?

Géométrie plane.

Soit ABCD un parallélogramme, on note E et F les points définis par : $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

De plus, la parallèle à (BD) passant par E coupe (DC) en G.
On veut démontrer que les points B, F et G sont alignés, de deux façons différentes.
(*Faire une figure soignée*)

1°) Méthode vectorielle

a) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.
b) Exprimer $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
c) Conclure

2°) Méthode analytique

a) On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des points B, C, D, E et F dans ce repère.
b) Déterminer une équation de la droite (CD) et de la parallèle à (BD) passant par E.
c) En déduire les coordonnées du point G.
d) Vérifier que les points B, F et G sont alignés.

Vecteurs du plan

Soit un triangle ABC. On note I le milieu du segment $[AC]$ et on définit les points J et K par :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}.$$

1°) Faire une figure sur une feuille séparée.

2°) Exprimer que : $\overrightarrow{IJ}$ puis $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3°) Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Repère du plan

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points :

$A(-2\,;1)$, $B(4\,;4)$ et $C(2{,}5\,;-2)$.

1°) Calculer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

2°) G' est le symétrique de G par rapport au milieu de [AC].
Calculer les coordonnées du point G' et démontrer que G est le milieu de [BG'].

3°) La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en E ; calculer les coordonnées du point E.

4°) La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées en F ; calculer les coordonnées du point F.

5°) Démontrer que (EF) est parallèle à (AC) et que le point G est sur la droite (EF).

Equations/Inequations

On pose $P(x) = 4(x+2)^2 - (x-2)^2$.
1°) Factoriser $P(x)$.
2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
  a) $P(x) = 0$.
  b) $P(x) > 0$.

Géométrie sans coordonnées.

Soit un parallélogramme ABCD et les points O, I et E définis par :

$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

I milieu de [BC],

E symétrique de I par rapport à B.

1°) Faire une figure.

2°) Exprimer $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$. (Justifier)

3°) Exprimer $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et de $\overrightarrow{AB}$.
4°) En déduire que les points E, O et D sont alignés.

Equation.

On pose : $P(x) = 16x^2 - 4 - (x-1)(6x+3)$.

1°) Calculer $P(-1)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(\sqrt{2}\right)$.

2°) Factoriser $P(x)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Vecteurs.

Partie A

Soit un triangle ABC, avec AB = 4, BC = 8 et AC = 5 (en centimètres)

On note : A' le symétrique de A par rapport à B,

C' l'image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$,

I le point tel que : $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

1°) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2°) Déterminer la nature du quadrilatère AA'C'C.

3°) Exprimer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4°) Démontrer que les points A, I et C' sont alignés.

Partie B

On se place maintenant dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec A(0 ; 3), B(4 ; 4) et C(-2 ; -1)

1°) Refaire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2°) a) Déterminer les coordonnées des points A', C' et I définis comme dans la partie A.

b) En déduire une vérification de la nature du quadrilatère AA'C'C.

3°) a) Déterminer une équation de la droite (AI).

b) En déduire une vérification de l'alignement des points A, I et C'

Geometrie Plane

Soit ABC un triangle non aplati.

1°) Construire les points M, N et P définis par : $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$.

2°) Déterminer le réel x tel que N soit barycentre de (A ; 1) et (C ; x).

3°) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4°) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour les points M,
N et P ?

6°) Déterminer deux réels α et β tels que M soit le barycentre de (N ; α) et (P ; β).

Avec Coordonnees

Soient A(-3 ; -1), B(1 ; -2) et C(0 ; -7) trois points d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1°) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2°) Déterminer une équation de la droite (AC).

3°) Soit Δ la droite d'équation cartésienne : $x - 3y - 14 = 0$.
Démontrer que le point D appartient à la droite Δ.

4°) Déterminer les coordonnées du point I intersection de (AC) et Δ.

Triangle et parallélogramme.

Soient A(-1 ; -2), B(1 ; 4) et C(6 ; -1) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

1°) Déterminer les coordonnées du point D, tel que ABCD soit un parallélogramme.

2°) Soit E(-7 ; -3), les points E, A, C sont-ils alignés ?

3°) Déterminer les coordonnées du point I, milieu de [AB].

4°) Quelle est la nature du triangle ICD ?

Vecteurs.

Soit ABCD un parallélogramme.
On note I, J et K les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$.

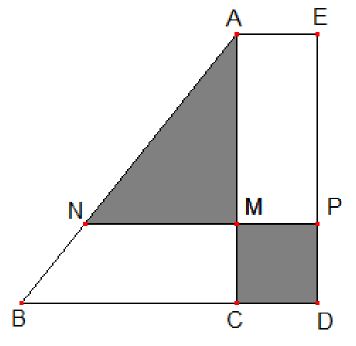
1°) Faire une figure.

2°) Démontrer que : $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

3°) Exprimer de même $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4°) En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Exercice



On considère un triangle ABC rectangle en C et un rectangle ACDE comme indiqué sur la figure.
On donne : BC = 8 cm, CD = 3 cm et AC = 10 cm.

Soit M un point du segment [AC].
La droite perpendiculaire en M à la droite (AC) coupe respectivement les droites (AB) et (DE) en N et P.

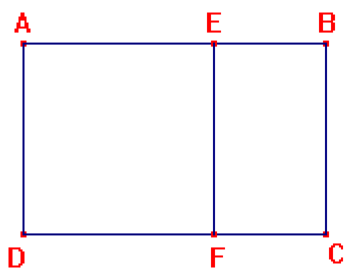
On note x la longueur AM.
Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la partie grisée, formée du rectangle MCDP et du triangle AMN.

1) Montrer que : $\mathcal{A}(x) = \dfrac{2}{5}x^2 - 3x + 30$
   A l'aide de la calculatrice, construire la courbe représentative de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle [0 ; 10].

2) Déterminer graphiquement, en justifiant, les positions du point M pour lesquelles :
   a) L'aire de la partie grisée est égale à 25 cm²
   b) L'aire $\mathcal{A}(x)$ est minimale.

3) Retrouver les résultats des questions 2) a) et 2) b) par le calcul.

Nombre d'or.



Un rectangle ABCD est dit « rectangle d'or » lorsqu'ayant tracé le carré intérieur AEFD, on a : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BC}{EB}$.
Les rapports « longueur sur largeur » sont donc les mêmes dans les deux rectangles. Ce rapport s'appelle le nombre d'or (noté Φ) ; il est supérieur à 1 et son inverse s'appelle la section dorée.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 - x - 1 = 0$.

2°) En prenant AB = x, avec $x > 1$, et BC = 1, montrer que Φ vérifie l'équation (E).

En déduire la valeur exacte de Φ.

3°) Calculer astucieusement les valeurs exactes de $\dfrac{1}{\Phi}$, $\Phi - \dfrac{1}{\Phi}$ puis $\dfrac{1}{\Phi - 1}$.

4°) EBCF est-il un rectangle d'or ?

Second degré.

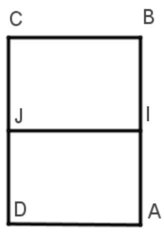
Pour tout réel x, on note : $P(x) = (2x - 1)(x + 2) + 4x - 2 - (2x - 1)^2$.

1°) a) Factoriser $P(x)$.
b) Développer et réduire $P(x)$.

2°) En utilisant l'expression la plus adaptée :
a) Calculer $P(3/2)$ et $P(-\sqrt{2})$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = -5$.
d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) > 2x - 1$.

Formats papier.

Les formats papier ont une propriété bien pratique :
Lorsque l'on coupe une feuille en deux à partir du milieu des longueurs, on obtient deux feuilles ayant les mêmes proportions que la feuille initiale.

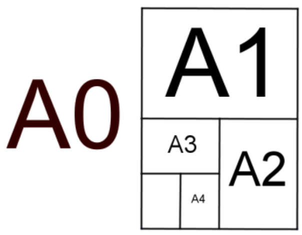


C'est-à-dire que : si la feuille est un rectangle ABCD où AB est une longueur et BC une largueur, on note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. On a alors : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{AI} = \dfrac{BC}{BI}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 = 2$.

2°) On note x le rapport constant : $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{AI} = \dfrac{BC}{BI} = x$ (Ce sont des longueurs donc : $x > 0$).
Exprimer AD et AI en fonction de AB et BC.
En déduire une équation vérifiée par x, puis la valeur exacte de x.

3°) Le format « A0 » correspond à une feuille de papier ayant une surface de 1 m^2.
Puis : le format « A1 » correspond à la moitié d'une feuille « A0 »,
le format « A2 » correspond à la moitié d'une feuille « A1 »,
le format « A3 » correspond à la moitié d'une feuille « A2 »,
le format « A4 » correspond à la moitié d'une feuille « A3 ».
Déterminer les dimensions d'une feuille « A0 », en centimètres à 1 mm près.
En déduire les dimensions d'une feuille « A4 », en centimètres à 1 mm près.



YOUSSEF BOULILA

Sans coordonnées.

Soit un parallélogramme ABCD, avec AB = 6, AC = 8 et BC = 4 (en centimètres)
On note E, F, G et I les points définis par :

$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

I milieu de [AB]

1°) Faire une figure.

2°) Démontrer que $\overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$

3°) Exprimer $\overrightarrow{IF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. (Erreur sur le sujet initial : « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. »)

4°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

Que peut-on en déduire pour les points I, E, F ?

5°) Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

6°) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires.

Que peut-on en déduire pour les points B, E, G ?

…/…

YOUSSEF BOULILA