

Exercice 1

- 1) Montrer que : $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
- 2) Soit $A = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}$ Montrer que : $A=3$.

Exercice 2

Soient $E = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ et $F = 2 + \sqrt{27} - \sqrt{12}$.

- 1) Simplifier E et F puis montrer que E et F sont des inverses.
- 2) En déduire que $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 5+3\sqrt{3}$.

Exercice 3

On considère les réels suivants :

$$A = \sqrt{13+4\sqrt{3}} - \sqrt{13-4\sqrt{3}} \text{ et } B = \sqrt{12+2\sqrt{11}} - \sqrt{12-2\sqrt{11}}$$

Montrer que : $A=B$.

Exercice 4

Simplifier : $E = (5\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{50})^2$.

Exercice 5

- 1) Soient a et b deux réels strictement positifs, Montrer que : $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
- 2) Soient a et b deux réels strictement positifs, Montrer que : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Exercice 6

Soient $A = 5 + 2\sqrt{6}$ et $B = 5 - 2\sqrt{6}$.

- 1) Ecrire A sous la forme $(a+b)^2$ et B sous la forme $(a-b)^2$.
- 2) Ecrire sans radical au dénominateur le réel $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
- 3) En déduire que : $\frac{A}{B} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^4$

Exercice 7

Pour tout réel x, on considère l'expression : $A = 3|x-\sqrt{3}| - 2|-x+\sqrt{3}| - x - \sqrt{3} + 3$.

- 1) Calculer A pour $x = 1 - \sqrt{3}$ et $x = \pi$.
- 2) Simplifier A lorsque x est un réel négatif.

Exercice 8

On considère l'équation :

$$(E): x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}, x \neq 0.$$

- 1) Soit y une solution de (E), calculer $A = y^2 + \frac{1}{y^2}$.

2) a) Montrer que le réel $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est une solution de (E).

b) En déduire la valeur du réel $B = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

Exercice 9

Montrer que, si x et y sont deux réels appartenant à $] -1, 1[$, alors $\frac{x+y}{1+xy} \in] -1, 1[$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que : $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2) Comparer : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

3) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$?

Exercice 11

Soit un réel x vérifiant :

$$-3 < x < \frac{1}{2}.$$

1) Donner un encadrement de $x^2 - 1$.

2) Montrer que $x + 5 \neq 0$.

3) Soit $A = \frac{2x}{x+5}$.

a) Montrer que $A = 2 - \frac{10}{x+5}$

b) En déduire un encadrement de A .

Exercice 12

On donne $A = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^2}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer A pour $n=0, n=1$ et $n=2$.

2) Montrer que $A=192 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13

1) Calculer, pour tout $n \geq 2$: $A = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

2) Calculer $B = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)$.

3) Calculer $C = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.