

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 50, \dots, 100, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\dots, -100, \dots, -50, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 50, \dots, 100, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

ID : l'ensemble des nombres décimaux.

\mathbb{Q} : l'ensemble des nombres rationnelles.

\mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels.

On a : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$

L'arithmétique est l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres.

La divisibilité dans \mathbb{N} :

Soient a et d deux entiers naturels, tels que $d \neq 0$.

On dit que d divise a , s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k.d$. L'entier k est appelé le quotient de a par d .

d est appelé un **diviseur** de a .

a est appelé un **multiple** de d .

Division euclidienne dans \mathbb{N} :

Soient a et b deux entiers naturels, tels que $b > 0$

Il existe un couple unique d'entiers naturels (q, r) tels que
$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q est appelé le **quotient**, r le **reste**, a le **dividende** et b le **diviseur** de la division euclidienne de a par b .

Le PGCD de deux entiers naturels :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le PGCD de a et b est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs aux deux entiers a et b . On note par $\text{PGCD}(a, b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple : Calculer $a \wedge b$ avec $a = 12$ et $b = 34$

$a = 2^2 \times 3$ et $b = 2 \times 17$

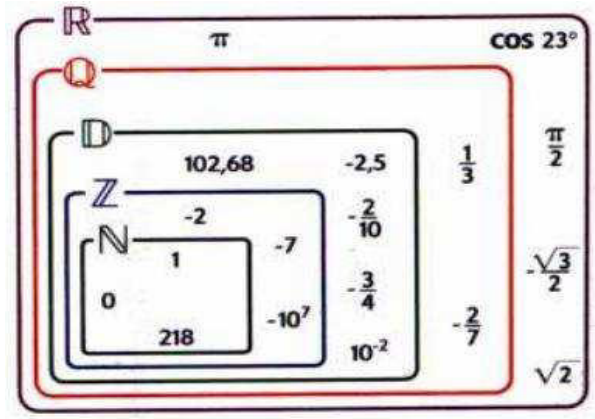
On a :

\times	1	2	4
1	1	2	4
3	3	6	12

Alors $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

De même on trouve $D_{34} = \{1, 2, 17, 34\}$; D'où $D_{12} \cap D_{34} = \{1, 2\}$ et par suite $a \wedge b = 2$

Point méthode : Pour déterminer le **PGCD** de deux entiers naturels, on les décompose en produit de facteurs premiers. Le **PGCD** est le produit des facteurs premiers **commun**, chacun deux affectés de son **plus petit exposant**.



Détermination du PGCD(a,b) en utilisant l'algorithme d'Euclide :

Soient a et b deux entiers tels que $a > b > 0$, on suppose que a n'est pas divisible par b . Le $PGCD(a,b)$ est le dernier reste non nul obtenu dans la suite des divisions successives de a par b .

Exemple : Calculer $a \wedge b$ avec $a = 2499$ et $b = 1730$

a	b	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
2499	1730	769	192	1	0
quotient	1	2	4	192	

Alors $a \wedge b = 1$ (on dit que a et b sont premiers entre eux).

Fraction irréductible :

On dit qu'une fraction est irréductible lorsqu'elle est simplifiée au maximum.

Le PPCM de deux entiers naturels :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls .

Le PPCM de a et b est le plus petit commun multiple de a et b . On note par : $PPCM(a,b)$ ou $a \vee b$.

Exemple : Calculer $a \vee b$ avec $a = 3465000$ et $b = 7586700$

On a : $a = \underline{2}^3 \times \underline{3}^2 \times \underline{5}^4 \times \underline{11} \times \underline{7}$ et $b = \underline{2}^2 \times \underline{3} \times \underline{5}^2 \times \underline{11}^3 \times \underline{19}$

Pour calculer $a \vee b$ on prend les termes communs avec le plus grand exposant et les termes non communs.

Ainsi $a \vee b = 2^3 \times 3^2 \times 5^4 \times 11^3 \times 7 \times 19 = 7966035000$

Point méthode : Pour déterminer le $PPCM$ de deux entiers naturels , on les décompose en produit de facteurs premiers . Le $PPCM$ est le produit de tous les facteurs premiers existant dans la décomposition de l'un ou de l'autre , chacun d'eux affecté de son plus grand exposant.

Propriété :

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on a : $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$

Notation scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$, ou a et n sont des entiers relatifs.

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ ou a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et n un entier relatif . L'écriture $a \times 10^n$ est appelée **notation scientifique** du nombre décimal .

Valeur approchée :

Soit p un entier , on dit que le nombre décimal a est une valeur approchée de b à 10^p près si : $a - 10^p \leq b \leq a + 10^p$

Arrondi et troncature :

Pour trouver l'arrondi d'un nombre , on conserve les chiffres jusqu'au rang indiqué. Ce dernier est alors l'arrondi si le chiffre suivant est 1,2,3 ou 4 si non on lui ajoute 1. Les troncatures et les arrondis sont des valeurs approchées des nombres.

Exemple :

	5,956 310 579	$\frac{22}{7} = 3,142\ 857\ 142\ 857\ldots$	$\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ldots$
Valeur exacte	5,956 310 579	$\frac{22}{7}$	π
Troncature à 2 chiffres	5,95	3,14	3,14
Troncature à 3 chiffres	5,956	3,142	3,141
Arrondi à l'unité	6	3	3
Arrondi à 10^{-2}	5,96	3,14	3,14
Arrondi à 10^{-3}	5,956	3,143	3,142

Critères de divisibilité :

- ☞ Un entier est divisible par 2 (respectivement par 5) ssi son chiffre d'unité est divisible par 2 (respectivement par 5).
- ☞ Un entier est divisible par 3 (respectivement par 9) ssi la somme des ses chiffres est divisible par 3 (respectivement par 9).
- ☞ Un entier est divisible par 4 (respectivement par 25) ssi le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25).
- ☞ Un entier est divisible par 8 ssi le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.



Exercice n° 01

1- Déterminer $PGCD(330, 378)$

- a) Par la méthode de décomposition en facteurs premiers.
- b) Par l'algorithme d'Euclide.

2-a) Déterminer $PPCM(378, 330)$

- b) Rendre la fraction $\frac{330}{378}$ irréductible.

Exercice n° 02

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls

- a) Si a et b sont premiers entre eux alors $PPCM(a, b) = a \times b$.
- b) Si $b = 3a$ alors $PGCD(a, b) = a$.
- c) Si $b = 3a + 1$ alors $PGCD(a, b) = 1$.

Exercice n° 03

Soit $N = 5 \times 6 \times \cdots \times 27 \times 28 \times 29$

- 1- Montrer que $N + 7$ est divisible par 7.
- 2- Montrer que $N + 29$ est divisible par 29.

Exercice n° 04

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

1- Vérifier que $n^2 + n - 1 = (n-1)(n+2) + 1$

2- a) Déterminer $PGCD(n^2 + n - 2, n - 1)$

b) En déduire $PPCM(n^2 + n - 2, n - 1)$

Exercice n° 05

Dans chaque cas comment faut-il choisir l'entier naturel n pour que :

❶ $\frac{5}{n-2} \in \mathbb{N}$; ❷ $\frac{3n+16}{n+3} \in \mathbb{N}$; ❸ n divise 36 et $PGCD(n, 6) = 6$

Exercice n° 06

Déterminer les entiers naturels a, b et c sachant que :

$$\frac{59}{3^2} = a + \frac{b}{3} + \frac{c}{3^2} \quad \text{avec } 0 \leq b < 3 \text{ et } 0 \leq c < 3$$

Exercice n° 07

Soit n un entier naturel.

1- Montrer que $n^2 - 1$ est divisible par 8 pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec n premier.

2- Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 08

Soit n un entier naturel.

1- a) Vérifier que $n^2 + n + 3 = n(n+1) + 3$

b) En déduire que $n^2 + n + 3$ est impair.

2- a) Montrer que $n^3 + 3n^2 + 2n = n(n+1)(n+2)$

b) Montrer que $n^3 + 3n^2 + 2n$ est divisible par 3.

Exercice n° 09

Déterminer les entiers naturels a et b sachant que : $a^2 - 4b^2 = 20$

Exercice n° 10

Montrer que quel que soit l'entier naturel n les fractions suivantes sont irréductibles :

$$\text{❶ } \frac{n}{2n+1} \quad ; \quad \text{❷ } \frac{2n+1}{3n+1} \quad ; \quad \text{❸ } \frac{3n-2}{n-1} \quad ; \quad \text{❹ } \frac{4n+3}{3n+2}$$

Exercice n° 11

Soit $A = 7^{n+1} - 7^n$; $n \in \mathbb{N}$

1- Montrer que A est divisible par 3.

2- Déterminer l'entier naturel n pour que $\frac{n+7}{n+2} \in \mathbb{N}$

Exercice n° 12

Soient m et n deux entiers naturels tels que $PGCD(m, n) = 24$ et $m \geq n$

1- Déterminer les facteurs premiers de m et n .

2- a) Sachant que $m \times n = 3456$, calculer $PPCM(m, n)$.

b) En déduire m et n .