Série d'exercices *** $1^{\text{ère}}$ Année

ACTIVITES ALGEBRIQUES

Lycée Secondaire Ali Zouaoui
" Hajeb Laayoun "

Identités remarquables :

Pour tous réels a et b, on a :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

1	Exposant **0**						
1	**1**	Exposant **1**					
1	**2**	**1**	Exposant **2**				
1	**3**	**3**	**1**	Exposant **3**			
1	**4**	**6**	**4**	**1**	Exposant **4**		
1	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**	Exposant **5**	
1	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	Exposant **6**

Exemple :

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= 1\,a^4\,b^0+4\,a^{4-1}\,b^{0+1}+6\,a^{3-1}\,b^{1+1}+4\,a^{2-1}\,b^{2+1}+1\,a^{1-1}\,b^{3+1}\\ &= a^4+4\,a^3\,b^1+6\,a^2\,b^2+4\,a^1\,b^3+a^0\,b^4\\ &= a^4+4\,a^3\,b+6\,a^2\,b^2+4\,a\,b^3+b^4\end{aligned}$$

Exercice N° 01 :

On donne quatre réels a , b , c et d tels que $a^2+b^2=1$ et $c^2+d^2=1$

Montrer que $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=1$

Exercice N° 02 :

Soient a et b deux réels strictement positifs

1- a) Montrer que $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$

b) En déduire que $(a+b)+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 4$

2- Montrer que $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geq 4$

Exercice N° 03 :

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1- Montrer que $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

2- On suppose que $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=7$

Calculer la valeur exacte de $a^3+\dfrac{1}{a^3}$

Exercice N° 04 :

1- Soient a , b et c trois réels positifs tel que : $3a^2=2\left(c^2-b^2\right)$

Comparer a , b et c .

2- Montrer que :

a) $\sqrt{4+\sqrt{13+\sqrt{5}}}\times\sqrt{3+\sqrt{5}}\times\sqrt{4-\sqrt{13+\sqrt{5}}}=2$

b) $\sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=2$

Exercice N° 05 :

Factoriser les expressions suivantes :

1- x^2+6x-5

2- $x^2+2x+1-(x+1)^3$

3- $4x^2+12x+9-(2x+3)(x+7)$

4- $\left(16x^2-49\right)+3(4x+7)^2$

5- $(2x+1)^3-(x-2)^3$

6- $27x^3-64+(3x-4)\left(2x^2-x-16\right)$

7- $abxy-by+2-2ax$

Exercice N° 06 :

1- Calculer $A=\left(2-\sqrt{2}\right)^3$

2- Factoriser $B=(x+1)^3-\left(20-14\sqrt{2}\right)$

Exercice N° 07 :

Soit $P(x)=x^6-1$

1- Montrer que $P(x)=(x-1)\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$

2- En déduire la valeur de $A=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}$

Exercice N° 08 :

Soient a , b et c trois réels positifs tel que : $abc=1$

Montrer que $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\leq 1$