GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

I. Définition et représentation graphique

1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …
On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, …
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

Définitions : Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le terme d'indice n de cette suite .

Exercice1 page7

2) Générer une suite numérique par une formule explicite

Exemples :
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 2 \times 0 = 0$,
$u_1 = 2 \times 1 = 2$,
$u_2 = 2 \times 2 = 4$
$u_3 = 2 \times 3 = 6$

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$,
$v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$,
$v_2 =$
$v_3 =$

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Exercice1,3 page 18

3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :
- On définit la suite (u_n) par :

$u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15$,
$u_2 =$
- On définit la suite (v_n) par :

$v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$

Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3$,
$v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6$,
$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18$,
$v_3 = 4v_2 - 6$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.
- On définit la suite (w_n) par :
pour tout n de $\mathbb{N} - \{0\}$, $w_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$w_1 = 1$,
$w_2 = w_1 + 2 = 1 + 2 = 3$,
$w_3 = w_2 + 3 = 3 + 3 = 6$,
$w_4 = w_3 + 4 = 6 + 4 = 10$.

$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + (n+1) \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".
Exercice 3,4 page13

SUITES ARITHMETIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. ou encore $U_{n+1} - U_n = r$

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7-9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2+3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1}-u_n = 7-9(n+1)-7+9n = 7-9n-9-7+9n = -9$.

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.

(u_n) est une suite arithmétique de raison -9.

2) $v_{n+1}-v_n = (n+1)^2+3-n^2-3 = n^2+2n+1+3-n^2-3 = 2n+1$.

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

*RQ : si $v_2 - v_1 \neq v_1 - v_0$ alors la suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

La réciproque est fausse.

Exercice 14 page 19.

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration :

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.

En calculant les premiers termes :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

…

$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et

$u_9 = u_0 + 9r = 19$.

On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

Exercice 7,8,9,10 et 11 page 14

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante. $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < \ldots\ldots\ldots\ldots u_n < u_{n+1} < \ldots\ldots$
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

La S.A (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4.

*RQ : si les termes d'une suite ne sont pas ordonnés alors la suite n'est pas une suite arithmétique

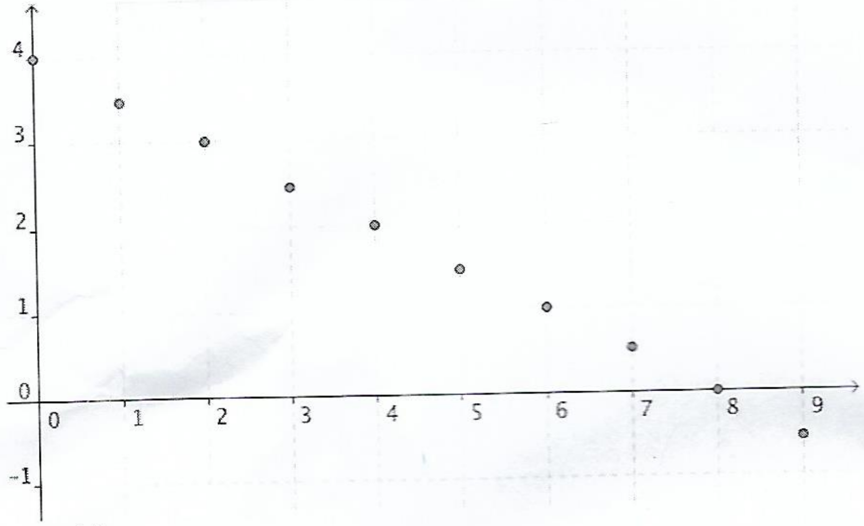
La réciproque est fausse.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

<u>Exemple :</u>

On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.



<u>Exercice 12 et 13 page 14</u>

RÉSUMÉS	(u_n) une **suite arithmétique** - **de raison** r - **de premier terme** u_0.	**Exemple :** $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.