1 La forme canonique du trinôme

1.1 Le trinôme du second degré

Définition 1 : On appelle trinôme du second degré ou simplement trinôme, le polynôme $P(x)$, à coefficients réels, de la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Exemple : Les trois polynômes suivants sont des trinômes

$$P_1(x) = x^2 + 2x - 8$$
$$P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$$
$$P_3(x) = -x^2 + 4x - 5$$

1.2 Quelques exemples de formes canoniques

La forme canonique d'un trinôme est une forme à partir de laquelle on peut savoir si le trinôme peut se factoriser ou non. Cette forme est obtenue à partir d'une "*astuce*" qui consiste à rajouter un terme puis à l'ôter de façon à obtenir le début d'un carré parfait.

Exemple : Soit $P_1(x) = x^2 + 2x - 8$

Les deux premiers termes sont $x^2 + 2x$ qui est le début de $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. On ajoute 1 puis on le soustrait, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 - 8 \\ &= (x+1)^2 - 9 \qquad \text{forme canonique de } P_1(x) \\ &\text{on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :} \\ &= (x+1)^2 - 3^2 \\ &= (x+1-3)(x+1+3) \\ &= (x-2)(x+4) \end{aligned}$$

Exemple : Soit $P_2(x) = 2x^2 + 3x - 14$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici 2.

$$P_2(x) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 7\right)$$

$\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)$ est le début de $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 7\right) \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 7\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{121}{16}\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x) \end{aligned}$$

on peut, à partir de cette forme, factoriser. Cela donne :

$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2\right]$$
$$= 2\left(x+\frac{3}{4}-\frac{11}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}+\frac{11}{4}\right)$$
$$= 2(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right)$$

Exemple : Soit $P_3(x) = -x^2+4x-5$

On factorise par le coefficient devant x^2, c'est à dire ici -1.

$$P_1(x) = -\left(x^2-4x+5\right)$$

$\left(x^2-4x\right)$ est le début de $(x-2)^2 = x^2-4x+4$. Cela donne :

$$= -\left(x^2-4x+4-4+5\right)$$
$$= -\left[(x-2)^2-4+5\right]$$
$$= -\left[(x-2)^2+1\right] \qquad \text{forme canonique de } P_2(x)$$

On ne peut factoriser cette forme car somme de deux carrés

1.3 Forme canonique du trinôme

Soit un trinôme du second degré : $P(x) = ax^2+bx+c$

On factorise par $a \neq 0$, cela donne :

$$P(x) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$x^2+\frac{b}{a}x$ est le début de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$. Cela donne :

$$= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

Théorème 1 : La forme canonique d'un trinôme du second degré est de la forme :

$$P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

⚠ Dans un cas concret, on n'utilise pas cette formule un peu difficile à mémoriser, mais on retient l'astuce qui consiste à ajouter puis soustraire un terme comme nous l'avons vu dans les exemples précédents.

2 Racines du trinôme

2.1 Définition

Définition 2 : Les racines d'un trinômes ou "*zéros*" sont les solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Définition 3 : On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ devient en utilisant la forme canonique :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

Le nombre de racines du trinôme dépend du signe de Δ, d'où **discriminant**.

2.2 Le discriminant est positif

Comme le discriminant Δ est positif, la forme canonique se factorise en :

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On obtient alors deux solutions :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

Soit, en appelant x_1 et x_2 les deux solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

- On calcule Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-14) = 9 + 112 = 121 = 11^2$
- $\Delta > 0$, il existe deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 11}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 11}{4} = -\frac{7}{2}$$

- On conclut par : $S = \left\{-\frac{7}{2}\,;\, 2\right\}$

2.3 Le discriminant est nul

Comme le discriminant Δ est nul, la forme canonique correspond à un carré parfait. Elle se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

On obtient alors qu'une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3x^2-18x+27=0$

- On calcule Δ : $\Delta=b^2-4ac=18^2-4\times3\times27=324-324=0$
- $\Delta=0$, il n'existe qu'une seule solution x_0 : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{18}{6}=3$
- On conclut par : $S=\{3\}$

2.4 Le discriminant est négatif

Comme le discriminant Δ est négatif la forme canonique ne se factorise pas. Il n'y a donc aucune solution à l'équation du second degré.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-x^2+4x-5=0$

- On calcule Δ : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times(-5)=16-20=-4$
- $\Delta<0$, il n'y a pas de solution.
- On conclut par : $S=\varnothing$

2.5 Conclusion

Théorème 2 : Le nombre de racines du trinôme du second degré dépend du signe du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$ il existe deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta=0$ il n'existe qu'une racine (appelée racine double) :

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

- Si $\Delta<0$ il n'existe aucune racine réelle.

⚠ Lorsque l'on pourra factoriser le trinôme, on ne calculera pas le discriminant. On factorisera, puis on annulera chaque facteur.

Exemple : Déterminer les solutions des équations suivantes :

a) $4x^2-25=0$ b) $9x^2-6x+1=0$

3 Factorisation, somme et produit des racines

3.1 Factorisation du trinôme

Si le discriminant est positif. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

En remplaçant par les racines x_1 et x_2, nous avons alors : $a(x-x_1)(x-x_2)$

De même si le discriminant est nul. Nous avons vu que le trinôme se factorise en :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

En remplaçant par la racine $x_0=-\frac{b}{2a}$, nous avons alors : $a(x-x_0)^2$

Exemples :

a) Factoriser le trinôme suivant : $P(x)=2x^2+3x-14$

D'après le paragraphe précédent, les racines de ce trinôme sont : $-\frac{7}{2}$ et 2 , donc :

$$P(x)=2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-2)$$

Nous retrouvons la factorisation avec la forme canonique.

b) Factoriser le trinôme suivant : $Q(x) = 3x^2 - 18x + 27$

D'après le paragraphe précédent, l'unique racine de ce trinôme est 3 , donc :

$$Q(x) = 3(x-3)^2$$

⚠ La racine $x = 3$ est une racine double car on peut factoriser par $(x-3)^2$

Théorème 3 : Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet :

- deux racines x_1 et x_2, alors : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- admet une racine x_0 , alors : $P(x) = a(x - x_0)^2$
- n'admet pas de racine, il ne peut pas se factoriser.

3.2 Somme et produit des racines

Soit le trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$. Nous nous plaçons dans le cas où $\Delta > 0$.
Il y a donc deux racines x_1 et x_2. Le trinôme peut alors se factoriser en :

$$T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Développons le trinôme :

$$T(x) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2\right] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

On pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1x_2$, on a alors : $T(x) = ax^2 - aSx + aP$

En identifiant à : $T(x) = ax^2 + bx + c$, on obtient alors :

$$-aS = b \;\Rightarrow\; S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad aP = c \;\Rightarrow\; P = \frac{c}{a}$$

Exemple : Soit le trinôme $T(x) = 2x^2 + 3x - 14$

Nous savons que ce trinôme admet deux solutions $-\frac{7}{2}$ et 2, d'après notre résultat :

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} + 2 = -\frac{-7+4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{ce qui se vérifie} \quad -\frac{7}{2} \times 2 = -7$$

Théorème 4 : Si un trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines, alors la somme S et le produit P des racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{c}{a}$$

3.3 Application

Parfois, certaines équations admettent des solutions très simples que l'on appellent "*racines évidentes*". Lorsque l'on connaît une telle solution, le produit des racines permet alors de trouver la seconde.

Exemples :

1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 5x + 3 = 0$
   - $x_1 = 1$ est racine évidente car $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$
   - $P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{2}$

$$S = \left\{1\,;\,\frac{3}{2}\right\}$$

2) Résoudre l'équation : $5x^2 + 2x - 3 = 0$
   - $x_1 = -1$ est racine évidente car $5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 5 + 2 - 3 = 0$
   - $P = \frac{c}{a} = -\frac{3}{5}$ donc $x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{3}{5}$

$$S = \left\{-1\,;\,\frac{3}{5}\right\}$$

4 Signe du trinôme et inéquation du second degré

4.1 Le discriminant est positif

Si $\Delta > 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

En supposant que $x_1 \geqslant x_2$, dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$x - x_1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - x_2$		$-$	0	$+$		$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Conclusion : Le signe du trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

Exemple : Signe de $-3x^2 + 7x + 6$

Il n'y pas de racine immédiate, calculons alors de discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4(-3)(6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

Comme le discriminant est positif, le trinôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{-6} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-7 - 11}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

Comme le coefficient devant x^2 est négatif (-3), le trinôme est négatif à l'extérieur des racines et positif à l'intérieur.

Nous avons alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$-3x^2+7x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4.2 Le discriminant est nul ou négatif

Si $\Delta = 0$, le trinôme se factorise en : $P(x) = a(x - x_0)^2$

Comme $(x - x_0)^2$ est un carré, il est soit nul soit positif. Donc le trinôme est soit nul soit du signe de a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$a(x-x_0)^2$		**signe de** a	0	**signe de** a	

Si le discriminant est négatif, il n'a donc pas de racine. Il possède donc un signe constant. On montre alors qu'il est du signe de a.

4.3 Conclusion

Théorème 5 : Le signe du trinôme dépend du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, par rapport au racines,
  le trinôme est du signe de a à l'**extérieur** et du signe de $-a$ à l'**intérieur**.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme est soit nul, soit du signe de a.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.

5 Représentation de la fonction trinôme

Théorème 6 : La représentation de la fonction trinôme f est une parabole $\mathscr{P}$ dont les caractéristiques dépendent du signe du coefficient a et du signe du discriminant Δ.
Les coordonnées du sommet S de la parabole sont : $S\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Démonstration : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

7 Équation, inéquation se ramenant au second degré

7.1 Équation rationnelle

Soit à résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{2x-5} = \dfrac{9}{4}$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-2\,;\,\dfrac{5}{2}\right\}$
- En multipliant l'équation par le dénominateur commun $4(x+2)(2x-5)$

$$
\begin{aligned}
x \in D_f, \quad 4(2x-5) - 8(x+2) &= 9(x+2)(2x-5)\\
8x - 20 - 8x - 16 &= 18x^2 - 45x + 36x - 90\\
-18x^2 + 9x + 54 &= 0\\
(\div 9) \quad -2x^2 + x + 6 &= 0
\end{aligned}
$$

$x_1 = 2$ racine évidente car $-2 \times 2^2 + 2 + 6 = 0$

Le produit des racines $P = \dfrac{6}{-2} = -3$ donc on a $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{3}{2}$

Comme $2 \in D_f$ et $-\dfrac{3}{2} \in D_f$, on a alors : $S = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,2\right\}$

7.2 Inéquation rationnelle

Soit à résoudre l'inéquation : $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} \geqslant 0$

- On détermine d'abord l'ensemble de définition de l'inéquation :
  Il faut déterminer les racines de $x^2 + x - 2 = 0$
  $x_1 = 1$ est racine évidente car $1^2 + 1 - 2 = 0$
  Le produit des racines $P = -2$, donc $x_2 = -2$
  On conclut que l'ensemble de définition est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\,;\,1\}$
- Racines de $2x^2 + 5x + 3 = 0$
  $x_1 = -1$ est racine évidente car $2 \times (-1)^2 - 5 + 3 = 0$
  Le produit des racines $P = \dfrac{3}{2}$, donc $x_2 = -\dfrac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

La solution est donc : $S =]-\infty\,;-2[\,\cup \left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right] \cup\,]1\,;+\infty[$

7.3 Équation bicarrée

Définition 5 : On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

On effectue le changement de variable suivant : $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$
L'équation devient alors : $aX^2 + bX + c = 0$
On résout en X puis on revient à x en résolvant $x^2 = X$

Exemple : Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$
On calcule le discriminant : $\Delta = 25 + 4 \times 36 = 169 = 13^2$
Comme $\Delta > 0$, on a deux racines : $X_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9$ et $X_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4$
On ne retient que X_1, car c'est la seule racine positive.
On revient à x : $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ ou $x = -3$
L'ensemble solution est donc : $S = \{-3\,;\,3\}$

7.4 Somme et produit de deux inconnues

Soit le système suivant : $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$

Ce système est symétrique, car on peut intervertir x et y sans que cela ne change le système. Cela veut dire que si le couple (a, b) est solution alors le couple (b, a) l'est également.

Ce système revient à résoudre une équation du second degré où x et y seront les solutions de cette équation. S représente la somme des racines et P leur produit. On doit donc résoudre :

$$X^2 - SX + P = 0$$

Exemple : Soit à résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=65 \end{cases}$

x et y sont donc les racines de : $X^2 - 18X + 65 = 0$

On calcule le discriminant $\Delta = 18^2 - 4 \times 65 = 64 = 8^2$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines :

$$X_1 = \frac{18+8}{2} = 13 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{18-8}{2} = 5$$

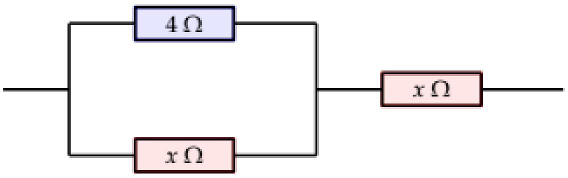
Les solutions du système sont donc : $S = \{(13,5) ; (5,13)\}$

⚠ On pourrait retrouver ce résultat graphiquement par l'intersection de la droite $y = 18 - x$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{65}{x}$

8 Quelques problèmes du second degré

8.1 Problème de résistance équivalente

Dans un circuit électrique, des résistances ont été montées comme l'indique la figure ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance x pour que la résistance équivalente de l'ensemble soit de 6 Ω.



On rappelle que la résistance équivalente dans un circuit

- en série est la somme des résistances : $R_{eq} = R_1 + R_2$
- en parallèle est telle que : $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Le circuit est composé de deux parties, une partie en parallèle et l'autre en série.

Dans la partie en parallèle : $\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{x+4}{4x}$

en prenant l'inverse : $R_{eq} = \dfrac{4x}{x+4}$

La résistance équivalente de l'ensemble est donc : $\dfrac{4x}{x+4} + x = 6$

en multipliant par $(x+4)$, on a :

$4x + x(x+4) = 6(x+4) \quad \Leftrightarrow \quad 4x + x^2 + 4x = 6x + 24 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 24 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 4 \times 24 = 100 = 10^2$

On obtient deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2+10}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-2-10}{2} = -6$

On ne retient que la solution positive. La valeur de la résistance est donc de $4\ \Omega$