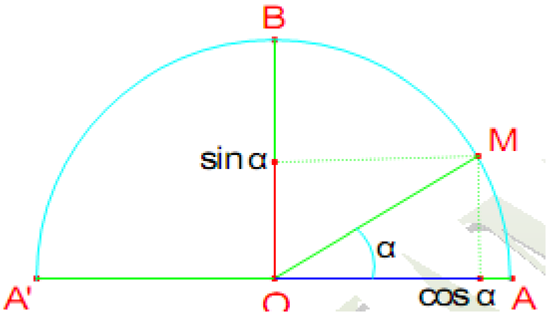
2ème Année 2015/2016	« Trigonométrie »	Lotfi BEN MALEK Tél. : 50 490 701

I – Définitions :

1 - Cosinus et Sinus :

Soit $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ un repère orthonormé du plan. Soit α un réel appartenant à $[0,\pi]$ et M l'unique point du demi cercle trigonométrique (C) tel que $\widehat{AOM}=\alpha$.

On appelle cosinus du réel α , l'abscisse du point M et on le note $cos\alpha$.
On appelle sinus du réel α , l'ordonné du point M et on le note $sin\alpha$.



2- Tangente et Cotangente :

- Soit α un réel appartenant à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

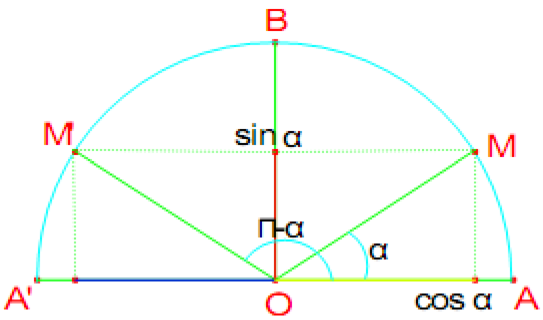
  On appelle tangente du réel α le réel noté $\tan\alpha$ et défini par $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

- Soit $\tan\alpha$ un réel appartenant à $]0,\pi[$.

  On appelle cotangente du réel α le réel noté $\cot\alpha$ et défini par $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

II – Angles supplémentaires :

- Pour tout $\alpha\in[0,\pi]$, on a $\cos(\pi-\alpha)$ =………………… et $\sin(\pi-\alpha)$ =…………………
- Pour tout $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, on a $\tan(\pi-\alpha)$ =………………… =………………………
- Pour tout $\alpha\in]0,\pi[$, on a $\cot(\pi-\alpha)$ =………………… =………………………

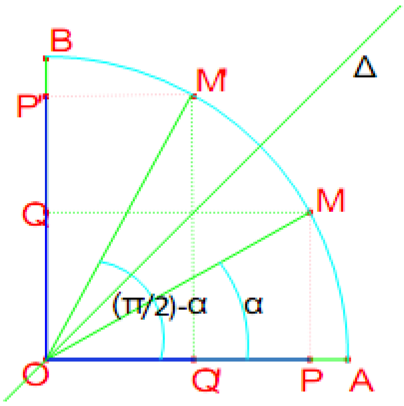


Calculer sans utiliser la calculatrice :

$$\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}+\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{11\pi}{12}$$

III- Angles complémentaires :



- Pour tout $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ....

  et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ....

- Pour tout $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ....

- Pour tout $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ ....

IV- Relations fondamentales :

Pour tout $\alpha \in [0,\pi]$, on a $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=$ ....

Pour tout $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, on a $1+\tan^2\alpha=$ ....

Pour tout $\alpha \in \left]0,\pi\right[$, on a $1+\cot^2\alpha=$ ....

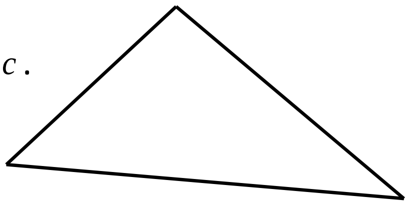
V- Rapports trigonométriques des angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\tan(x)$					
$\cot(x)$					

I - La loi du sinus et L'aire d'un triangle :

1 - La loi du sinus :

Soit ABC un triangle on pose On a $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

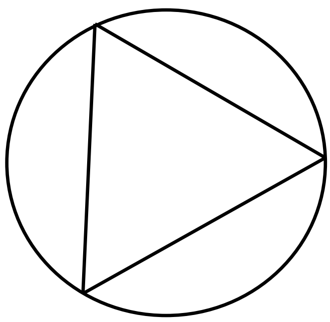
2 – Aire d'un triangle :

Soit ABC un triangle on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

S désigne l'aire du triangle ABC et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$



II- Théorème d'EL-Kashi :

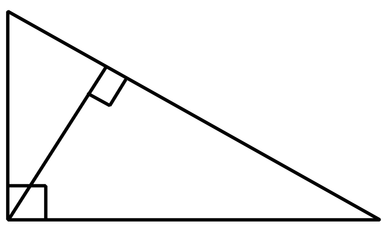
Soit ABC un triangle on pose $BC = a$ $AC = b$ et $AB = c$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \hat{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\cos \hat{C}$$

III - Relations métriques dans le triangle rectangle :

Soit ABC un triangle rectangle en A et soit H le pied de la hauteur issue de A, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$AH \times BC = AB \times AC$$
$$AH^2 = HB \times HC$$
$$AB^2 = BH \times BC$$
$$AC^2 = CH \times BC$$



EXERCICE N°1

On considère un triangle ABC tel que $B\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$ et $BC = \sqrt{3}$.

1) Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
2) On suppose que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$. Calculer AC.
3) Soit H le projeté orthogonal de C sur *(AB).* Montrer que $B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.
En déduire $sin\frac{\pi}{12}$, $cos\frac{\pi}{12}$, $sin\frac{5\pi}{12}$ et $cos\frac{11\pi}{12}$.

EXERCICE N°2

Soit ABC un triangle quelconque tel que: $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$ *et* $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ et AC = $4\sqrt{3}$.

1) Montrer que BC = $4\sqrt{2}$.
2 / Soit [CH] la hauteur issue de C.
a / Calculer AH et BH .
b/ Montrer que $\widehat{ACB} = \frac{5\pi}{12}$ puis calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$.

EXERCICE N°3

Pour tout x ∈ [0 , π] on donne $P(x) = -2\sin^3 x + 2\sin x - \cos^2 x$.
1/ Calculer P (0) et $P(\frac{\pi}{3})$.
2/ a) Montrer que P (π – x) = P (x) Pour tout x ∈ [0 , π] .
b) Déduire $P(\frac{2\pi}{3})$.
3/ Montrer que pour tout x ∈ [0 , π] on a: $P(x) = \cos^2 x \,.\, (2\sin x - 1)$.
4/ Résoudre dans [0, π] l'équation P(x) = 0.
5/ Calculer sans utiliser la calculatrice : $\cos^2(\frac{\pi}{16}) + \cos^2(\frac{7\pi}{16})$.