Ministère de l’éducation et de la formation
Direction régionale de l’enseignement de Monastir
C.R.E.F.O.C de Monastir

Formation continue des professeurs de l’enseignement secondaire

Thème : Congruences et divisibilité

Public ciblé : professeurs de l’enseignement secondaire (2°A)

Objectif : Consolider la formation fondamentale

Déroulement

I / Congruences et propriétés
II/ Critères de divisibilité
Atelier 1 :Critères de divisibilité par 2,3,4,5,7,9,11,25.
Atelier 2:Elaborer des situations d’apprentissage pour les élèves 2°A.S

Document réalisé par :

Slimane Hassayoune
(Inspecteur Principal)

Ridha Daldoul
(Formateur)

Jaleleddine Bouguerra
(conseillé pédagogique)

I Congruences

Théorème et définition

Etant donné un entier naturel n ,la relation $\mathcal{R}$ définie dans Z par :

Pour tout couple (x,y) de Z^2, x $\mathcal{R}$ y signifie $x-y \in n.Z$ est une relation d'équivalence dans Z.On la nomme congruence modulo n.

Notation

x $\mathcal{R}$ y est noté $x \equiv y\ [n]$

Propriétés

P1 Etant donné un entier naturel n non nul, pour tout couple (x,y) de Z^2,on a :

$x \equiv y\ [n] \Leftrightarrow$ x et y on le même reste dans la division euclidienne par n

P2 Tout entier relatif x est congru modulo n, $n \in N^*$ au reste de la division euclidienne de x par n.

P3 Etant donné un entier naturel n, pour tout couple (x,,x',y,y') de Z^4,on a :

$x \equiv y\ [n]$ et $x' \equiv y'\ [n] \Rightarrow x + x' \equiv y + y'\ [n]$

P4 Etant donné un entier naturel n, pour tout couple $(x_1,, x_2,.., x_p)$ de Z^p, $(y_1,, y_2,.., y_p)$ de Z^p on a :

$$x_1 \equiv y_1\ [n]\ ,\ x_2 \equiv y_2[n]\ ,\dots ,\ x_p \equiv y_p\ [n] \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} x_i \equiv \sum_{i=1}^{p} y_i\ [n]$$

P5 Etant donné un entier naturel n, pour tout couple (x,,x',y,y') de Z^4,on a :

$x \equiv y\ [n]$ et $x' \equiv y'\ [n] \Rightarrow x\ x' \equiv y\ y'\ [n]$

P6 Etant donné un entier naturel n, pour tout couple (x,,y,z) de Z^3,on a :

$x \equiv y\ [n] \Rightarrow x\ z \equiv y\ z\ [n]$

P7 Etant donné un entier naturel n, pour tout couple (x,,y) de Z^2,alors pour tout entier naturel non nul p,on a :

$x \equiv y\ [n] \Rightarrow x^p \equiv y^p\ [n]$

Exercices

1-Trouver le reste de la division euclidienne de 17^{1990} par 5 .

2-Trouver le reste de la division euclidienne de 1989^{402} par 11.

II Critères de divisibilité

Atelier 1 Critères de divisibilité par 2,3,4,5,7,9,11,25.

Remarque préliminaire :

Le nombre $35226= 3x10^4+5x10^3+2x10^2+2x10+6$

Plus généralement

Soit un entier $a= x_n.10^n+ x_{n-1}.10^{n-1}+\dots x_1.10+ x_0$ où $x_i \in \{0,1,2,\dots 9\}$

a est noté comme suit $a= \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}$

Divisibilité par 2

Soit $a= \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0} = x_n.10^n+ x_{n-1}.10^{n-1}+\dots x_1.10+ x_0$ où $x_i \in \{0,1,2,\dots 9\}$

d'après P2 on a $10 \equiv 0[2]$

d'après P7 on a : $10^p \equiv 0\ [2]$ où $p \in \{1,2,\dots n\}$

ainsi $x_p\, 10^p \equiv 0$ [2] où $p \in \{1,2,\ldots.n\}$
Comme
$x_0 \equiv x_0$ [2] , $x_1\, 10 \equiv 0$ [2], $x_2\, 10^2 \equiv 0$ [2] … , $x_n\, 10^n \equiv 0$ [2]
d'après P4 on a : $x_n.10^n + x_{n-1}.10^{n-1} + \ldots.\ x_1.10 + x_0 \equiv x_0$ [2]
d'où $a \equiv x_0$ [2]

Théorème :
Un entier naturel et le chiffre des unités de cet entier ont le même reste dans la division euclidienne par 2.

Divisibilité par 3,4,5,7,9,11,25
Déroulement
1-Former 7 équipes de base
2- L'équipe 1 montre et énonce le théorème de la divisibilité par3
L'équipe 2 montre et énonce le théorème de la divisibilité par4
L'équipe 3 montre et énonce le théorème de la divisibilité par5
L'équipe 4 montre et énonce le théorème de la divisibilité par7
L'équipe 5 montre et énonce le théorème de la divisibilité par9
L'équipe 6 montre et énonce le théorème de la divisibilité par11
L'équipe 7 montre et énonce le théorème de la divisibilité par25.
3- En plénière : Présentation des travaux de chacune des équipes
et regroupement des informations par le formateur.

EXERCICES

1-Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{x43y}$ soit divisible par 2 et par 9.
2-Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{3x2y}$ soit divisible par 3 et par 4.
3-En appliquant les critères usuels de divisibilité, prouver sans faire la division, que 359480 est divisible par 440.
4-Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{28xy5}$ soit divisible par 25 et par 11.
5-Déterminer les chiffres x et y pour que l'entier $\overline{93xy2}$ soit divisible par 9 et par 11.
6-Déterminer les chiffres x , y et z pour que l'entier $\overline{13xy45z}$ soit divisible par 8 , 9 et par 11.

Pose café de 20'

Atelier 2 :Elaborer des situations d'apprentissage pour les élèves 2°A.S
Déroulement

1-Former 6 équipes de base
2- En plénière : Présentation des travaux de chacune des équipes
et regroupement des informations par le formateur.