

Devoir de synthèse n°3 Année Scolaire 2000 - 2001 2^{ème} Année.

Exercice n° 1 :

On donne $f(x) = -(x-2)^2$ et $g(x) = \frac{2}{x-1}$

1/ Etudier f et g et tracer C_f et C_g dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

2/ On pose $h(x) = -x^2 + 4x - 2$

- Vérifier que $h(x) = f(x) + 2$ puis tracer C_h à partir de C_f et donner son tableau de variation.
 - On donne Δ la droite d'équation $y = x - 2$ Chercher les coordonnées des points d'intersection de C_f et Δ puis résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) - x + 2 \geq 0$.
- 3/ a) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_h .
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $h(x) \geq g(x)$.

4/ Soit la fonction k définie par :

$$\begin{cases} k(x) = g(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ k(x) = h(x) & \text{si } x \in]0, 2[\\ k(x) = g(x) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

- Construire C_k puis donner son tableau des variations.
- Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre des solutions de l'équation $k(x) = m$

Exercice n° 2 :

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne

$$\mathcal{C}_m = \{M(x, y) ; x^2 + y^2 + (2m+4)x + (2m-2)y + 6m - 1 = 0\}$$

- a) Montrer que \mathcal{C}_m est un cercle pour tout réel m dont-on précisera le centre I_m et le rayon R .
b) Montrer que I_m est un point de la droite $\mathcal{D} : x - y + 3 = 0$.
- a) On pose $m = 1$ et \mathcal{C}_1 le cercle obtenu pour $m = 1$. Donner les coordonnées du centre I_1 et son rayon R_1 .
b) On donne le point $A(-2, \sqrt{3})$. Vérifier que $A \in \mathcal{C}_1$ puis écrire une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{C}_1 en A .
- On donne la droite $\Delta_m : 3x - 4y + m - 1 = 0$. Déterminer m pour que Δ_m soit tangente à \mathcal{C}_1 .
- Soit $B(1, -2)$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $-\frac{3}{2}$. Ecrire une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'_1 = h(\mathcal{C}_1)$.

Exercice n° 3 :

1) Soit $x \in [0, \pi]$ et $f(x) = 3\cos x - 4\cos x \cdot \sin^2 x$.

- Calculer $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\frac{2\pi}{3})$ et $f(\frac{\pi}{2})$.
 - Montrer que $f(\pi - x) = -f(x)$.
 - Montrer que $f(x) = \cos x (4\cos^2 x - 1)$ puis résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
- 2) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $2\sin^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} = 0$.
En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$ $2\sin^2 x + (\sqrt{3} - 2)\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.