|  |  |
| --- | --- |
| [Mathématiques aux élèves](http://www.matheleve.com/)Site web : <http://www.matheleve.com/>Email :contact @matheleve.com | **Géométrie analytique** |
| **Exercices** |  2 ème  Sc et Inf |

**Exercice 1**

Démontrer que si les deux vecteurs  et  sont colinéaires alors leur déterminant est nul.

**Exercice 2**

Soit *ABC* un triangle quelconque. *A*’ le milieu de [*BC*], *G* le centre de gravité du triangle, *D* et *E* les points tels que  et . On note *I* le milieu de [*DE*].

1. a. Montrer que .

b. Exprimer  en fonction de  et .

c. Démontrer que les points *A*, *A*’ et *I* sont alignés.

2. Démontrer que le point *G* est le milieu de [*AI*].

3. Prouver que les droites (*BC*) et (*ED*) sont parallèles.

**Exercice 3**

Soit un triangle *ABC*.

1. Construire les points *D* et *E* vérifiant :  et .

2. Montrer que *.* Que peut-on en déduire géométriquement ?

3. Montrer que . Déduire de cette égalité et de la précédente que *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Soit *I* le milieu de [*AB*]. Justifier que . Qu’en déduire pour les droites (*AE*) et (*CI*) ?

**Exercice 4**

1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-dessous (o*n donnera des valeurs exactes, pas de justification*).

(d1) :

(d2) :

(d3) :

2. Les droites (d2) et (d3) sont elles parallèles ?

 Pourquoi ?

(d1)

(d2)

(d3)

**Exercice 5**

Le but de l’exercice est de construire un triangle *A*’*B*’*C*’ à l’intérieur d’un triangle *ABC* de sorte que

- *A*’ est le milieu de [*BC*’],

- *B*’ est le milieu de [*CA*’],

- *C*’ est le milieu de [*AB*’].



On choisit le repère  : les coordonnées de *A* sont donc (0 ; 0), celles de *B* (1 ; 0) et celles de *C* (0 ; 1). On pose les coordonnées de *A*’ : , celles de *B*’  et celles de *C*’ : .

1. a. Montrez que  puisque  et  .

b. Résoudre le système d’inconnues *a*, *b* et *c* : .

c. Résoudre un système similaire d’inconnues *a*’, *b*’ et *c*’.

2. A l’aide des résultats précédents montrez les relations suivantes :



3. Utilisez ces relations pour construire les points *A*’, *B*’ et *C*’ sur la figure jointe (les vecteurs de construction doivent apparaître).

4. Vérifiez que  à l’aide des relations du 2. Qu’en concluez-vous ? Ecrivez deux autres relations que vous pourriez obtenir de la même manière.

5. Curieusement les triangles *ABC* et *A*’*B*’*C*’ ont l’air semblables sur la figure. Qu’en pensez-vous ?

**Exercice 6**

Dans le repère orthonormé  on donne les points *A*(2 ; −4) et *B*(4 ; 2)

a. Tracez la droite (*AB*) et expliquez comment obtenir une équation de cette droite par simple lecture graphique.

b. Déterminez par le calcul une équation de la droite (*AB*).

c. Déterminez une équation de la droite (D) parallèle à (*AB*) et passant par le point *C*(0 ; 3).

d. Déterminez une équation de la médiane issue de *A* dans le triangle *ABC*.

**Exercice 7**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , on considère les points , ,  et .

1. Faire une figure et montrer que les points *B*, *C* et *H* sont alignés.

2.  a. Calculer les distances *AH*, *BH* et *AB*.

 b. Démontrer que le triangle *AHB* est rectangle en *H*.

3. Calculer l’aire du triangle *ABC*.

4. Soit (D) la droite qui passe par *A* et qui est parallèle à (*BC*).

 a. Déterminer le coefficient directeur de (*BC*) ou un vecteur directeur de (*BC*).

 b. Déterminer une équation de (D).

 c. Le point   appartient-il à (D) ?

 d. Quelle est l’aire du triangle *BCE* ?

**Exercice 8**

On définit trois droites de la manière suivante :

\* (D1) passe par *A*(−4 ; −1) et a pour coefficient directeur  ;

\* (D2) passe par *B*(0 ; 2) et *C*(3 ; 0) ;

\* (D3) est parallèle à l’axe (O*y*) et passe par *C*.

1. Représenter ces trois droites.

2. Ecrire une équation de chacune de ces droites.

3. Déterminer leur(s) point(s) d’intersection deux à deux. Sont-elles concourantes ?

**Exercice 9**

 *(Tous les résultats devront être justifiés par calcul !)*

Placer dans un repère orthonormal les points *A*(0 ; 1), *B*(4 ; 3) et *C*(−2 ; 5).

1. *A* est-il sur la médiatrice de [*BC*] ?

2. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?

3. Quelles doivent être les coordonnées de *D* pour que *ABDC* soit un carré ? Placer *D*.

4. Montrer que *I*, le milieu de [*AB*], appartient au cercle de centre *C* et de rayon 5. Placer *I*.

5. Soit les points *E*(2000 ; 1000) et *F*(2000 ; 1001). Lequel de ces deux points appartient à la droite (*AB*) ?

6. Soit *G*(3996 ; 2004) et *H*(3996 ; 2005). Laquelle des droites (*CG*) ou (*CH*) est parallèle à la droite (*AB*) ?

**Exercice 10**

Soit un repère orthonormé  dans lequel on place le carré *OCBA* où *A* a pour coordonnées (0 ; 4), *B*(4 ; 4) et *C*(4 ; 0).

1. *E* le milieu de [*BC*] et *F* le point tel que  ; montrer que les coordonnées de *E* sont (4 ; 2) et celles de .

2. Calculer les longueurs *AE*, *AF* et *FE* ; montrer que le triangle *AFE* est rectangle isocèle.

3. Soit (d) la droite passant par *O* et parallèle à (*AE*) et (d’) la droite (*BF*). Déterminer une équation de (d) et une équation de (d’) ; calculer les coordonnées de leur point d’intersection *I*. Tracer (d) et (d’) et contrôler graphiquement votre résultat.

4. On admet que *I* a pour coordonnées . Soit *G* le point d’ordonnée négative tel que le triangle *OFG* soit rectangle isocèle de sommet *F*. Placer *G* sur la figure ; déterminer les coordonnées de *G* et prouver que les points *A*, *I* et *G* sont alignés.

**Exercice 11**

Soit un repère orthonormal  du plan et trois points *A*, *B* et *C* définis ci-dessous.

1. La droite (*AB*) a pour équation *y* = *x* + 3 ; la droite (*AC*) a pour équation *x* + 2*y* + 6 = 0 ; les points *B* et *C* ont respectivement pour ordonnées 5 et –4.

*B*’ est le milieu de [*AC*].

Déterminez les coordonnées des points *A*, *B*, *C* et *B*’.

2. Donnez les équations réduites de (*AC*) et (*BC*). Représentez les droites (*AC*), (*BC*) et (*AB*).

3. Calculez les coordonnées du point *D* de sorte que *ABCD* soit un parallélogramme.

4. Déterminez une équation de la droite (d) parallèle à (*AB*) passant par *B*’ et les coordonnées des points d’intersection de (d) avec les axes.

5. Quel est le centre de gravité du triangle *ABC* ?

6. (d) et (*AD*) se coupent en *E*. (d) et (*BC*) se coupent en *F*. Donnez les coordonnées de *E* et *F*. Quelle est la nature du quadrilatère *ABFE* ?

7. Calculez les coordonnées de *G*, centre de gravité du triangle *ADC*, et déterminez le réel *k* tel que le point *G* appartienne à la droite (d’) d’équation : 3*x* – *y* + *k* = 0.

8. Représenter graphiquement, en précisant bien les bords, l’ensemble des points *M* dont les coordonnées sont solutions du système : .

**Exercice 1:Correction**

Prenons deux vecteurs  et  colinéaires. Par définition de la colinéarité, il existe un nombre réel *k* tel que .

On a donc : *x’* = *kx* et *y’*= *ky*. Calculons, le déterminant des vecteurs  et  :

.

**Exercice 2 : Correction**



1. a. Prenons le repère  où *A* a pour coordonnées (0 ; 0), *B*(1 ; 0) et *C*(0 ; 1). Des données de construction on tire que  et , soit  ou encore .

b. Les coordonnées de *A*’ sont  d’où .

c. Faisons le déterminant des vecteurs :  ; on pouvait également remarquer que .

2. Les coordonnées de *G* sont  d’où  et *G* est le milieu de [*AI*].

3.  donc les droites (*BC*) et (*ED*) sont parallèles.

**Exercice 3 : Correction**

1. facile !

2. .

On en déduit que *ABDC* est un parallélogramme.

3. .

On en déduit que  :  et  sont donc colinéaires, les points *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Comme *I* est le milieu de [*AB*], on a : .

D’où .

On en déduit que, comme = , alors . Si bien que  et  sont colinéaires. Les droites (*AE*) et (*CI*) sont parallèles.

**Exercice 4 :Correction**

1. (d1) : passe par (−5 ; 4) et (−1 ; 1), équation : .

(d2) : passe par (4 ; 4) et (0 ; 1), coeff. directeur , ordonnée à l’origine : 1, équation : .

(d3) : passe par (−5 ; −5) et (2 ; 0), coeff. directeur , , équation : .

2. Les droites (d2) et (d3) ne sont pas parallèles : elles n’ont pas le même coefficient directeur.

**Exercice 5 :Correction**



1. a. *A*’ est le milieu de [*BC*’] donc  ; *B*’ est le milieu de [*CA*’] donc , enfin *C*’ est le milieu de [*AB*’] donc .

b. .

c. .

2. Les coordonnées de *A*’ dans le repère  sont donc , soit écrit sous forme vectorielle : . De même les coordonnées de *B*’ sont  donc , enfin celles de *C*’ sont  d’où .

3.



4. . Ceci montre bien que *C*’ est le milieu de [*AB*’]. On a de même  et .

5. En fait ces triangles ne sont pas du tout semblables… sur la figure du début on voit bien que les angles sont différents !



**Exercice 6 : Correction**

a. L’ordonnée à l’origine est −10, le coefficient directeur est indiqué par les traits gras : .

b. .

c. Même coefficient directeur 3 : .

d. On cherche le milieu de [*BC*], soit .

Equation de la médiane (*AI*) :

.

**Exercice 7 : Correction**



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé , on considère les points , ,  et .

1. *B*, *C* et *H* sont alignés : .

2. a. , ,

.

b. Pythagore dans *AHB* : .

3. Le triangle *ABC* a pour base *BC* et pour hauteur *AH*. Il suffit donc de calculer *BC* :  d’où l’aire du triangle *ABC* : .

4. a. Le coefficient directeur de (*BC*) est  ; un vecteur directeur de (*BC*) est .

b. (D) passe par *A* et est parallèle à (*BC*) donc elle a même coefficient directeur ou même vecteur directeur :

\*  ou bien

\* .

c.   appartient à (D) : .

d. L’aire du triangle *BCE* est la même que celle du triangle *ABC*… (même base *BC* et même hauteur *AH*).

**Exercice 8 : Correction**

1.



2. (D1) :  et  ; on a donc 

(D2) :  ;

(D3) : *x* = 3.

3. (D2) et (D3) se coupent en *C* évidemment.

(D1) et (D3) se coupent en un point *U* : *x* = 3 et .

(D1) et (D2) se coupent en *B* : *B* est évidemment sur (D2), il est également sur (D1) car lorsque *x* = 0, .

Ces trois droites ne sont évidemment pas concourantes.

**Exercice 9 :Correction**

Pour le dessin, c’est facile !

On rappelle la formule de la distance entre deux points : .

1. La médiatrice de [*BC*] est l’ensemble des points équidistants des points *B* et *C*. Il suffit donc de vérifier si *AB* = *AC*.

  et .

Ainsi, *AB* = *AC* et donc le point *A* est bien sur la médiatrice de [*BC*].

2. D’après la question précédente, *ABC* est, au moins, un triangle isocèle. Serait-il, de plus, rectangle en *A* ?

Calculons . De même *AB*² + *AC*² = 20 +20 = 40. D’après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle *ABC* est rectangle en *A*. Par conséquent, *ABC* est un triangle isocèle rectangle en *A*.

3. Etant donné que *ABC* est un triangle isocèle et rectangle, il suffit de chercher les coordonnées de *D* pour que *ABDC* soit un parallélogramme. Or, *ABDC* est un parallélogramme si et seulement si  c’est-à-dire et donc , ce qui donne : .

Les coordonnées de *D* doivent être .

4. *I* est le milieu de [*AB*] ; ses coordonnées sont  et .

La distance *IC* mesure . *I* appartient bien au cercle de centre C et de rayon 5.

5.  : les vecteurs  et  ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points *A*, *E* et *C* ne sont pas alignés. Par conséquent, *E* n’appartient pas à la droite (*AB*).

 : les vecteurs  et  sont colinéaires, les points *A*, *F* et *C* sont alignés, *F* appartient à la droite (*AB*).

6.  : les vecteurs  et  sont colinéaires, les droites (*CG*) et (*AB*) sont parallèles.

 : les vecteurs  et  ne sont pas colinéaires, les droites (*CH*) et (*AB*) ne sont pas parallèles.

**Exercice 10 :Correction**

1. *E* le milieu de [*BC*] :  ; .

2.  ;  ;  ; donc  et .

3.  ;

 ;

.

4. G a évidemment pour coordonnées (−2, −2) ; on a alors *A*, *I*, *G* alignés :

.

**Exercice 11 : Correction**

1. *A* est à l’intersection de (*AB*) et (*AC*). Ses coordonnées (*xA*; *yA*) sont solutions du système  c’est-à-dire  .

En additionnant les deux lignes, on trouve : 3*y* + 3 = 0 et donc : *y* = −1. En reportant dans une équation, il vient *x* = −4.

*B* a pour ordonnée 5 et appartient à (*AB*) d’équation *y* = *x* + 3. Son abscisse vaut 2.

*C* a pour ordonnée – 4 et appartient à (*AC*) d’équation *x* + 2*y* + 6 = 0. On résout l’équation *x*+2(−4)+6 = 0 ce qui donne *x* = 2.

*B*’ est le milieu de [*AC*]. Ses coordonnées sont donc : = .

2. Le vecteur a pour coordonnées : , ce qui donne (6 ; −3).

*M*(*x* ; *y*) appartient à (*AC*) équivaut à  et  colinéaires ce qui équivaut encore à déterminant( ; ) = 0, c’est-à-dire  ou encore −3(*x* + 4)–6(*y* + 1) = 0.

Après simplification, l’équation *réduite* de (*AC*) est : .

Les points *B* et *C* ont la même abscisse 2. La droite (*BC*) est donc parallèle à l’axe des ordonnées, son équation réduite est *x* = 2.

3. Pour que *ABCD* soit un parallélogramme, il faut que . Appelons *xD* et *yD* l’abscisse et l’ordonnée du point *D*. Les coordonnées de  sont (6 ; 6) et celles de  sont (2−*xD* ; −4−*xD*). Les vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées sont égales : *xD* = −4 et *yD* = −10 ; conclusion *D*(−4 ; −10).

4. La droite (*AB*) a pour coefficient directeur 1. (d) est parallèle à (*AB*) et a donc le même coefficient directeur. Son équation réduite est donc de la forme *y* = *x* + *k*.

Or (d) passe par le point  ; on trouve, en remplaçant, . Une équation de (d) est donc :  .

Les point d’intersection avec les axes ont, soit une abscisse nulle, soit une ordonnée nulle.

Ces points ont donc pour coordonnées :  et .

5. Sur la figure, il semble que le centre de gravité du triangle *ABC* soit le point *O*. Pour le vérifier, montrons que *O* vérifie la relation vectorielle : , en utilisant les coordonnées.

 a pour coordonnées : (*xA* + *xB* + *xC*; *yA* + *yB* + *yC*). Or *xA*+ *xB* + *xC* = −4+2+2 = 0 et *yA* + *yB* + *yC* = −1+5−4 = 0. Donc la relation est vérifiée. Le centre de gravité de *ABC* est *O*.

6. Comme *ABCD* est un parallélogramme, (*AD*) et (*BC*) sont parallèles. D’après 2. l’équation réduite de (*AD*) est donc *x* = −4 (droite parallèle à l’axe des ordonnées).

Les coordonnées de *E* vérifient donc le système , soit *E*(−4 ; −11/2). Les coordonnées de *F* vérifient le système : *F*(2 ; 1/2).

Le vecteur a pour coordonnées : (2−(−4) ; (1/2)−(11/2)) = (6 ; 6). Les vecteurs et  sont donc égaux, *ABFE* est un parallélogramme .

7. Soit *G*(*xG*; *yG*) le centre de gravité de *ADC*. Alors . Avec les coordonnées, cela se traduit par : .

D’où, après résolution des deux équations : G (−2 ; −5). Comme *G* appartient à (d’), ses coordonnées vérifient l’équation 3*x* − *y* + *k* = 0, d’où: 3(−2) − (−5) + *k* = 0 et finalement :*k* = 1.

8. Voir le graphique (un des côtés est compris dans l’ensemble cherché).

