Exercice 1

Démontrer que si les deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires alors leur déterminant est nul.

Exercice 2

Soit *ABC* un triangle quelconque. *A'* le milieu de [*BC*], *G* le centre de gravité du triangle, *D* et *E* les points tels que $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note *I* le milieu de [*DE*].

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Démontrer que les points *A*, *A'* et *I* sont alignés.

2. Démontrer que le point *G* est le milieu de [*AI*].

3. Prouver que les droites (*BC*) et (*ED*) sont parallèles.

Exercice 3

Soit un triangle *ABC*.

1. Construire les points *D* et *E* vérifiant : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?

3. Montrer que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Soit *I* le milieu de [*AB*]. Justifier que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (*AE*) et (*CI*) ?

Exercice 4

1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-dessous (o*n donnera des valeurs exactes, pas de justification*).

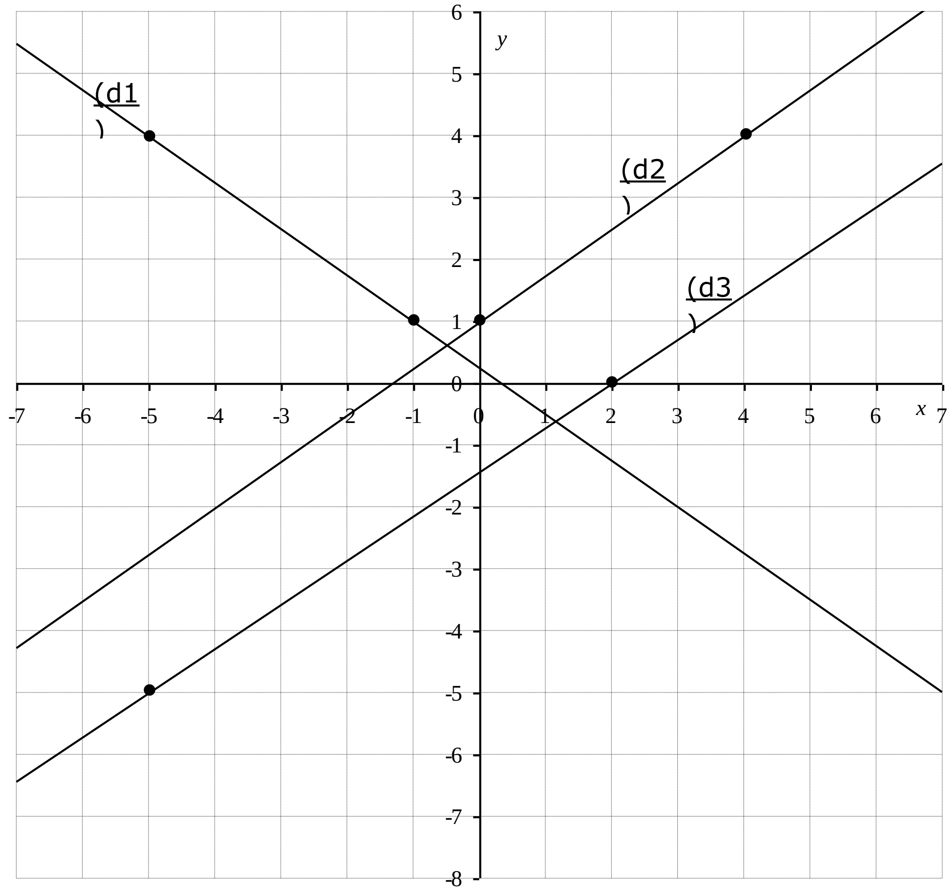
(d1) : ....

(d2) : ....

(d3) : ....

2. Les droites (d2) et (d3) sont elles parallèles ?

Pourquoi ?



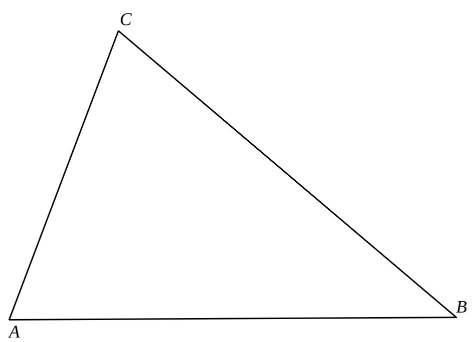
Exercice 5

Le but de l'exercice est de construire un triangle *A'B'C'* à l'intérieur d'un triangle *ABC* de sorte que

- *A'* est le milieu de [*BC'*],

- *B'* est le milieu de [*CA'*],

- *C'* est le milieu de [*AB'*].



On choisit le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$: les coordonnées de *A* sont donc (0 ; 0), celles de *B* (1 ; 0) et celles de *C* (0 ; 1). On pose les coordonnées de *A'* : $(a\,;a')$, celles de *B'* $(b\,;b')$ et celles de *C'* : $(c\,;c')$.

1. a. Montrez que $\begin{cases} c+1=2a \\ c'=2a' \end{cases}$ puisque $\begin{cases} a=2b \\ a'+1=2b' \end{cases}$ et $\begin{cases} b=2c \\ b'=2c' \end{cases}$.

b. Résoudre le système d'inconnues *a*, *b* et *c* : $\begin{cases} c+1=2a \\ a=2b \\ b=2c \end{cases}$.

c. Résoudre un système similaire d'inconnues *a*', *b*' et *c*'.

2. A l'aide des résultats précédents montrez les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AA'}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$

3. Utilisez ces relations pour construire les points *A*', *B*' et *C*' sur la figure jointe (les vecteurs de construction doivent apparaître).

4. Vérifiez que $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{C'B'}$ à l'aide des relations du 2. Qu'en concluez-vous ? Ecrivez deux autres relations que vous pourriez obtenir de la même manière.

5. Curieusement les triangles *ABC* et *A*'*B*'*C*' ont l'air semblables sur la figure. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6

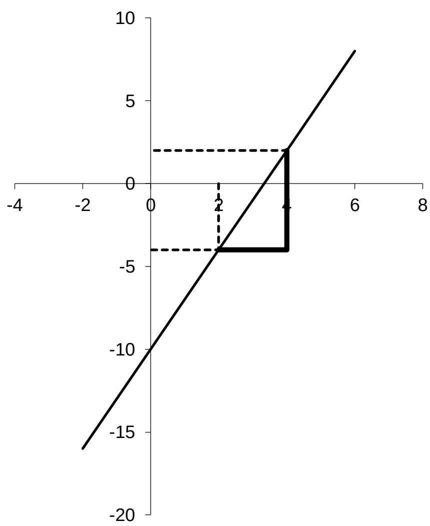
Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points *A*(2 ; −4) et *B*(4 ; 2)

a. Tracez la droite (*AB*) et expliquez comment obtenir une équation de cette droite par simple lecture graphique.

b. Déterminez par le calcul une équation de la droite (*AB*).

c. Déterminez une équation de la droite (D) parallèle à (*AB*) et passant par le point *C*(0 ; 3).

d. Déterminez une équation de la médiane issue de *A* dans le triangle *ABC*.



Exercice 7

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(4\,;-2)$, $B(-4\,;-1)$, $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points *B*, *C* et *H* sont alignés.

2. a. Calculer les distances *AH*, *BH* et *AB*.

   b. Démontrer que le triangle *AHB* est rectangle en *H*.

3. Calculer l'aire du triangle *ABC*.

4. Soit (D) la droite qui passe par *A* et qui est parallèle à (*BC*).

   a. Déterminer le coefficient directeur de (*BC*) ou un vecteur directeur de (*BC*).

   b. Déterminer une équation de (D).

   c. Le point $E\left(7\,;\dfrac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?

   d. Quelle est l'aire du triangle *BCE* ?

Exercice 8

On définit trois droites de la manière suivante :

* (D_1) passe par *A*(−4 ; −1) et a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$;

* (D_2) passe par *B*(0 ; 2) et *C*(3 ; 0) ;

* (D_3) est parallèle à l'axe (O*y*) et passe par *C*.

1. Représenter ces trois droites.

2. Ecrire une équation de chacune de ces droites.

3. Déterminer leur(s) point(s) d'intersection deux à deux. Sont-elles concourantes ?

Exercice 9

(Tous les résultats devront être justifiés par calcul !)

Placer dans un repère orthonormal les points *A*(0 ; 1), *B*(4 ; 3) et *C*(−2 ; 5).

1. *A* est-il sur la médiatrice de [*BC*] ?

2. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?

3. Quelles doivent être les coordonnées de *D* pour que *ABDC* soit un carré ? Placer *D*.

4. Montrer que *I*, le milieu de [*AB*], appartient au cercle de centre *C* et de rayon 5. Placer *I*.

5. Soit les points $E(2000 ; 1000)$ et $F(2000 ; 1001)$. Lequel de ces deux points appartient à la droite (AB) ?

6. Soit $G(3996 ; 2004)$ et $H(3996 ; 2005)$. Laquelle des droites (CG) ou (CH) est parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 10

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on place le carré *OCBA* où *A* a pour coordonnées (0 ; 4), *B*(4 ; 4) et *C*(4 ; 0).

1. *E* le milieu de $[BC]$ et *F* le point tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$; montrer que les coordonnées de *E* sont (4 ; 2) et celles de $F(-2 ; 0)$.

2. Calculer les longueurs *AE*, *AF* et *FE* ; montrer que le triangle *AFE* est rectangle isocèle.

3. Soit (d) la droite passant par *O* et parallèle à (AE) et (d’) la droite (BF). Déterminer une équation de (d) et une équation de (d’) ; calculer les coordonnées de leur point d’intersection *I*. Tracer (d) et (d’) et contrôler graphiquement votre résultat.

4. On admet que *I* a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{7} ; \frac{4}{7}\right)$. Soit *G* le point d’ordonnée négative tel que le triangle *OFG* soit rectangle isocèle de sommet *F*. Placer *G* sur la figure ; déterminer les coordonnées de *G* et prouver que les points *A*, *I* et *G* sont alignés.

Exercice 11

Soit un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan et trois points *A*, *B* et *C* définis ci-dessous.

1. La droite (AB) a pour équation $y = x + 3$; la droite (AC) a pour équation $x + 2y + 6 = 0$; les points *B* et *C* ont respectivement pour ordonnées 5 et –4.

B’ est le milieu de $[AC]$.

Déterminez les coordonnées des points *A*, *B*, *C* et *B’*.

2. Donnez les équations réduites de (AC) et (BC). Représentez les droites (AC), (BC) et (AB).

3. Calculez les coordonnées du point *D* de sorte que *ABCD* soit un parallélogramme.

4. Déterminez une équation de la droite (d) parallèle à (AB) passant par *B’* et les coordonnées des points d’intersection de (d) avec les axes.

5. Quel est le centre de gravité du triangle *ABC* ?

6. (d) et (AD) se coupent en *E*. (d) et (BC) se coupent en *F*. Donnez les coordonnées de *E* et *F*. Quelle est la nature du quadrilatère *ABFE* ?

7. Calculez les coordonnées de *G*, centre de gravité du triangle *ADC*, et déterminez le réel *k* tel que le point *G* appartienne à la droite (d’) d’équation : $3x - y + k = 0$.

8. Représenter graphiquement, en précisant bien les bords, l'ensemble des points *M* dont les coordonnées sont solutions du système : $\begin{cases} x-y+3>0 \\ x+2y+6\geq 0 \\ x-2>0 \end{cases}$.

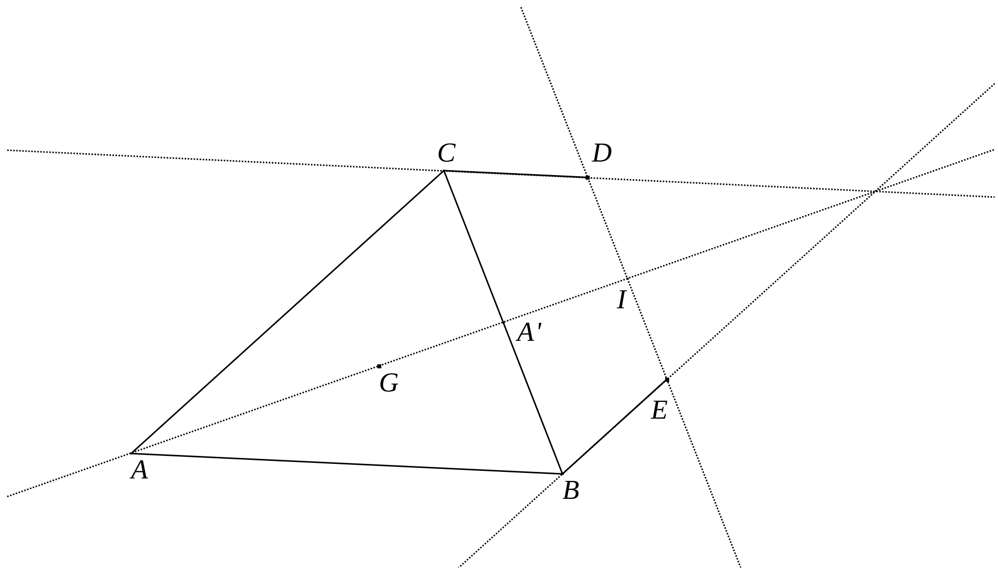
Exercice 1:Correction

Prenons deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ colinéaires. Par définition de la colinéarité, il existe un nombre réel *k* tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

On a donc : *x′* = *kx* et *y′*= *ky*. Calculons, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y=xky-kxy=kxy-kxy=0.$$

Exercice 2 : Correction



1. a. Prenons le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ où *A* a pour coordonnées (0 ; 0), *B*(1 ; 0) et *C*(0 ; 1). Des données de construction on tire que $E\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Les coordonnées de *A′* sont $A'\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c. Faisons le déterminant des vecteurs : $\det\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AI}\right)=\begin{vmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{vmatrix}=0$; on pouvait également remarquer que $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de *G* sont $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}$ et *G* est le milieu de [*AI*].

3. $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{ED}\right)=\begin{vmatrix} 0-1 & \frac{1}{3}-1 \\ 1-0 & 1-\frac{1}{3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$ donc les droites (*BC*) et (*ED*) sont parallèles.

Exercice 3 : Correction

1. facile !

2. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que *ABDC* est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Comme *I* est le milieu de [*AB*], on a : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{CI}$.

On en déduit que, comme $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$ = $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, alors $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{CI}$. Si bien que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (*AE*) et (*CI*) sont parallèles.

Exercice 4 :Correction

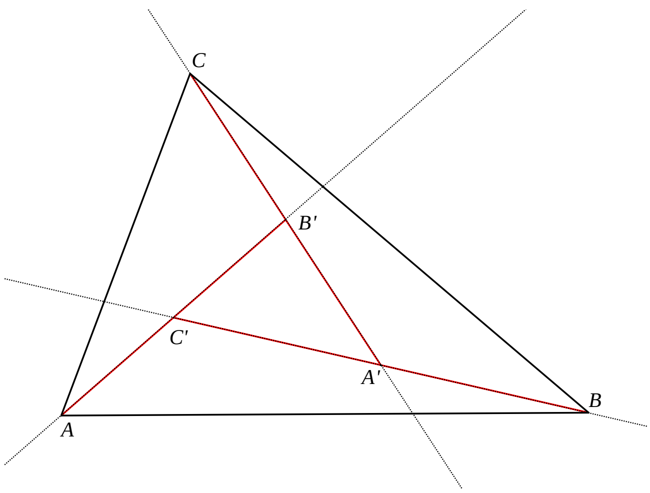
1. (d1) : passe par (−5 ; 4) et (−1 ; 1), équation : $\begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix}=-3x-15-4y+16=0 \Leftrightarrow 4y+3x-1=0$.

(d2) : passe par (4 ; 4) et (0 ; 1), coeff. directeur $\frac{3}{4}$, ordonnée à l'origine : 1, équation : $y=\frac{3}{4}x+1$.

(d3) : passe par (−5 ; −5) et (2 ; 0), coeff. directeur $\frac{5}{7}$, $0=\frac{5}{7}.2+p \Rightarrow p=-\frac{10}{7}$, équation : $y=\frac{5}{7}x-\frac{10}{7}$.

2. Les droites (d2) et (d3) ne sont pas parallèles : elles n'ont pas le même coefficient directeur.

Exercice 5 :Correction



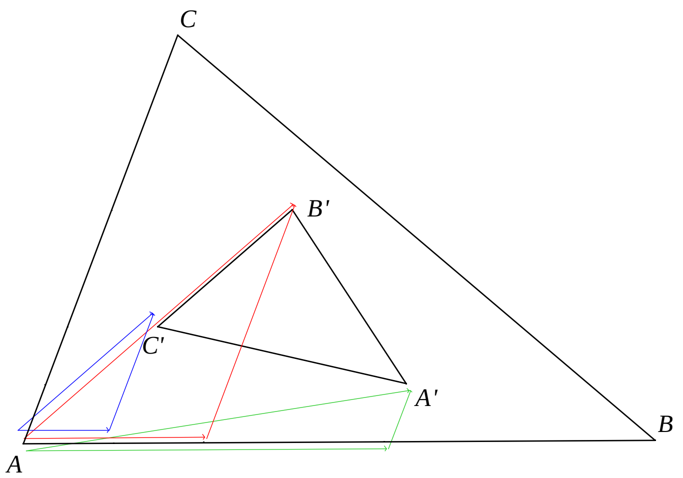
1. a. A' est le milieu de $[BC']$ donc $\begin{cases} \dfrac{1+c}{2}=a \\ \dfrac{0+c'}{2}=a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1=2a \\ c'=2a' \end{cases}$; B' est le milieu de $[CA']$ donc $\begin{cases} \dfrac{0+a}{2}=b \\ \dfrac{a'+1}{2}=b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ a'+1=2b' \end{cases}$, enfin C' est le milieu de $[AB']$ donc $\begin{cases} \dfrac{0+b}{2}=c \\ \dfrac{0+b'}{2}=c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2c \\ b'=2c' \end{cases}$.

b. $\begin{cases} c+1=2a \\ a=2b \\ b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1=4b=8c \\ a=2b \\ b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=7c \\ a=2b \\ b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1/7 \\ a=4/7 \\ b=2/7 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} c'=2a' \\ a'+1=2b' \\ b'=2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c'=2a' \\ a'+1=4c'=8a' \\ b'=2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c'=2/7 \\ a'=1/7 \\ b'=4/7 \end{cases}$.

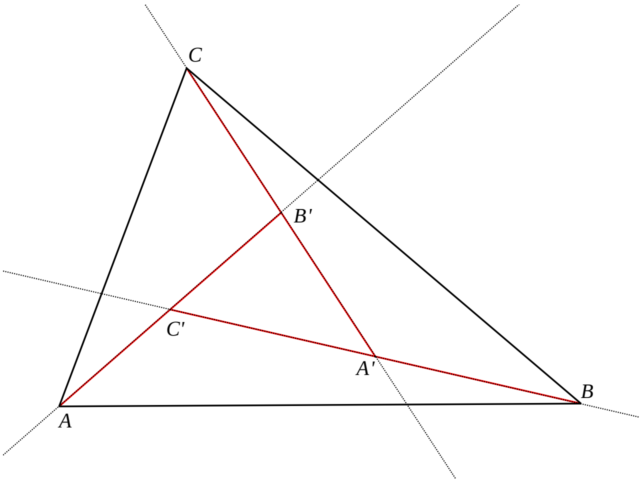
2. Les coordonnées de A' dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ sont donc $\left(\frac{4}{7};\frac{1}{7}\right)$, soit écrit sous forme vectorielle : $\overrightarrow{AA'}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$. De même les coordonnées de B' sont $\left(\frac{2}{7};\frac{4}{7}\right)$ donc $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, enfin celles de C' sont $\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right)$ d'où $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

3.



4. $\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$. Ceci montre bien que C' est le milieu de $[AB']$. On a de même $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{B'A'}$.

5. En fait ces triangles ne sont pas du tout semblables… sur la figure du début on voit bien que les angles sont différents !



Exercice 6 : Correction

a. L'ordonnée à l'origine est -10, le coefficient directeur est indiqué par les traits gras : $\frac{\textit{différence des } y}{\textit{différence des } x}=\frac{6}{2}=3$.

b. $\begin{vmatrix} x-2 & 4-2 \\ y+4 & 2-(-4) \end{vmatrix}=6(x-2)-2(y+4)=6x-2y-20=0 \Leftrightarrow 3x-y-10=0$.

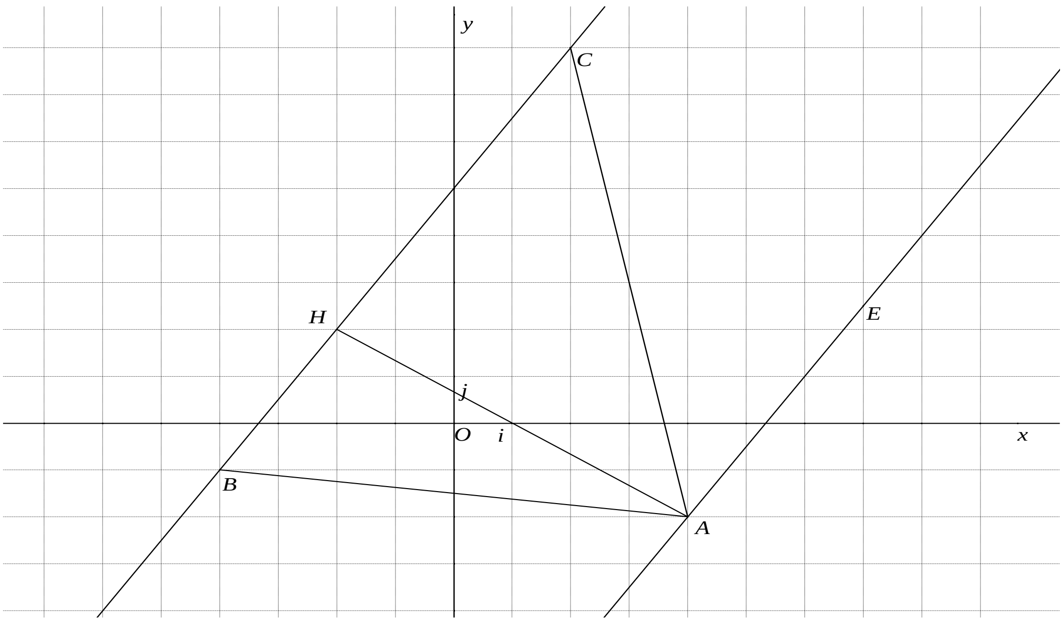
c. Même coefficient directeur 3 : $\begin{cases} y=3x+b \\ 3=3.0+b \end{cases} \Rightarrow y=3x+3$.

d. On cherche le milieu de $[BC]$, soit $I\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\right)=(2\,;\frac{5}{2})$.

Equation de la médiane (AI) :

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2-2 \\ y+4 & 5/2-(-4) \end{vmatrix}=\frac{13}{2}(x-2)-0(y+4)=\frac{13}{2}x-13=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Exercice 7 : Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(4\,;-2)$, $B(-4\,;-1)$, $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. *B*, *C* et *H* sont alignés : $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}\right)=\begin{vmatrix}2+4 & -2+4\\ 8+1 & 2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 9 & 3\end{vmatrix}=18-18=0$.

2. a. $AH=\sqrt{(-2-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$, $BH=\sqrt{(-2+4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$AB=\sqrt{(-4-4)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$.

b. Pythagore dans *AHB* : $AH^2+BH^2=52+13=65=AB^2$.

3. Le triangle *ABC* a pour base *BC* et pour hauteur *AH*. Il suffit donc de calculer *BC* :
$BC=\sqrt{(2+4)^2+(8+1)^2}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle *ABC* : $\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\sqrt{52}.\sqrt{117}=39$.

4. a. Le coefficient directeur de (*BC*) est $\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$; un vecteur directeur de (*BC*) est $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.

b. (D) passe par *A* et est parallèle à (*BC*) donc elle a même coefficient directeur ou même vecteur directeur :

* $y=mx+p\Leftrightarrow\begin{cases}m=3/2\\ -2=4\frac{3}{2}+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3/2\\ -8=p\end{cases}\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-8$ ou bien

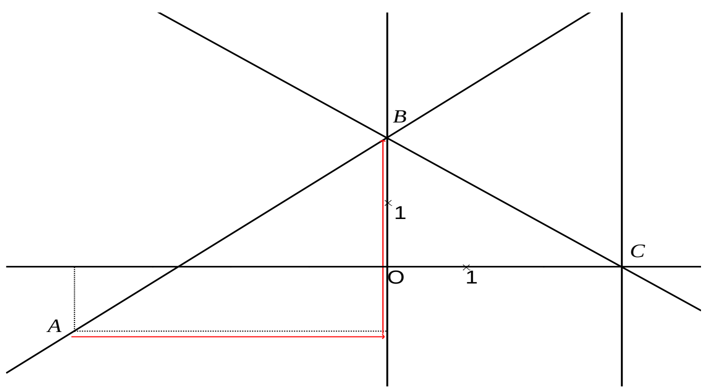
* $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix}x-4 & 6\\ y+2 & 9\end{vmatrix}=9(x-4)-6(y+2)=0\Leftrightarrow 9x-36-6y-12=0\Leftrightarrow 3x-2y-16=0$.

c. $E\left(7\,;\frac{5}{2}\right)$ appartient à (D) : $3.7-2.\frac{5}{2}-16=21-5-16=0$.

d. L'aire du triangle *BCE* est la même que celle du triangle *ABC*… (même base *BC* et même hauteur *AH*).

Exercice 8 : Correction

1.



2. (D_1) : $y=\frac{3}{4}x+b$ et $-1=\frac{3}{4}(-4)+b \Rightarrow b=-1+3=2$; on a donc $y=\frac{3}{4}x+2$

(D_2) : $\begin{vmatrix} x-0 & 3-0 \\ y-2 & 0-2 \end{vmatrix} = -2x-3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-6=0$;

(D_3) : $x = 3$.

3. (D_2) et (D_3) se coupent en C évidemment.

(D_1) et (D_3) se coupent en un point U : $x = 3$ et $y=\frac{3}{4}(3)+2=\frac{17}{4}$.

(D_1) et (D_2) se coupent en B : B est évidemment sur (D_2), il est également sur (D_1) car lorsque $x = 0$, $y=\frac{3}{4}0+2=2$.

Ces trois droites ne sont évidemment pas concourantes.

Exercice 9 :Correction

Pour le dessin, c'est facile !

On rappelle la formule de la distance entre deux points : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

1. La médiatrice de [BC] est l'ensemble des points équidistants des points B et C. Il suffit donc de vérifier si $AB = AC$.

$AB=\sqrt{(4-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{(-2-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Ainsi, $AB = AC$ et donc le point A est bien sur la médiatrice de [BC].

2. D'après la question précédente, ABC est, au moins, un triangle isocèle. Serait-il, de plus, rectangle en A ?

Calculons $BC^2=(-2-4)^2+(5-3)^2=36+4=40$. De même $AB^2 + AC^2 = 20 +20 = 40$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A. Par conséquent, ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

3. Etant donné que ABC est un triangle isocèle et rectangle, il suffit de chercher les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un parallélogramme. Or, $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_D-x_C=x_B-x_A \\ y_D-y_C=y_B-y_A \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x_D+2=4-0 \\ y_D-5=3-1 \end{cases}$, ce qui donne : $\begin{cases} x_D=2 \\ y_D=7 \end{cases}$.

Les coordonnées de D doivent être $(2;7)$.

4. I est le milieu de [AB] ; ses coordonnées sont $x_I=\frac{0+4}{2}=2$ et $y_I=\frac{1+3}{2}=2$.

La distance IC mesure $IC=\sqrt{(2+2)^2+(5-2)^2}=5$. I appartient bien au cercle de centre C et de rayon 5.

5. $\det\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}2000 & 4\\ 999 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points *A*, *E* et *C* ne sont pas alignés. Par conséquent, *E* n'appartient pas à la droite (*AB*).

$\det\left(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}2000 & 4\\ 1000 & 2\end{vmatrix}=4000-4000=0$: les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points *A*, *F* et *C* sont alignés, *F* appartient à la droite (*AB*).

6. $\det\left(\overrightarrow{CG}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}3998 & 4\\ 1999 & 2\end{vmatrix}=7996-7996=0$: les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, les droites (*CG*) et (*AB*) sont parallèles.

$\det\left(\overrightarrow{CH}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}3998 & 4\\ 2000 & 2\end{vmatrix}=7996-8000=-4\neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, les droites (*CH*) et (*AB*) ne sont pas parallèles.

Exercice 10 :Correction

1. *E* le milieu de [*BC*] : $\begin{cases}x_E=\dfrac{1}{2}(4+4)=4\\ y_E=\dfrac{1}{2}(4+0)=2\end{cases}$; $\overrightarrow{CF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_F-4\\ y_F-0\end{pmatrix}=\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix}0-4\\ 0-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-2\\ y_F=0\end{cases}$.

2. $AE=\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$; $AF=\sqrt{(-2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$; $FE=\sqrt{(4+2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}$; donc $AE=AF$ et $AE^2+AF^2=FE^2$.

3. $\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AE}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-0 & 4-0\\ y-0 & 2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 4\\ y & -2\end{vmatrix}=-2x-4y=0\Leftrightarrow x+2y=0$;

$\det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BF}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-4 & -2-4\\ y-4 & 0-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-4 & -6\\ y-4 & -4\end{vmatrix}=-4(x-4)+6(y-4)=0\Leftrightarrow -4x+6y-8=0$;

$\begin{cases}x+2y=0\\ -2x+3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\ 4y+3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8/7\\ y=4/7\end{cases}$.

4. G a évidemment pour coordonnées (−2, −2) ; on a alors *A*, *I*, *G* alignés :

$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-8/7-0 & -2-0\\ 4/7-4 & -2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8/7 & -2\\ -24/7 & -6\end{vmatrix}=\dfrac{48}{7}-\dfrac{48}{7}=0$.

Exercice 11 : Correction

1. *A* est à l'intersection de (*AB*) et (*AC*). Ses coordonnées (x_A ; y_A) sont solutions du système $\begin{cases}y=x+3\\ x+2y+6=0\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}-x+y-3=0\\ x+2y+6=0\end{cases}$.

En additionnant les deux lignes, on trouve : $3y+3=0$ et donc : $y=-1$. En reportant dans une équation, il vient $x=-4$.

B a pour ordonnée 5 et appartient à (*AB*) d'équation $y=x+3$. Son abscisse vaut 2.

C a pour ordonnée – 4 et appartient à (AC) d'équation $x + 2y + 6 = 0$. On résout l'équation $x+2(-4)+6 = 0$ ce qui donne $x = 2$.

B' est le milieu de [AC]. Ses coordonnées sont donc : $\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_c}{2}\right) = \left(-1; -\frac{5}{2}\right)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $(x_C - x_A; y_C - y_A)$, ce qui donne (6 ; −3).

$M(x ; y)$ appartient à (AC) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ce qui équivaut encore à déterminant($\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y+1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $-3(x + 4)-6(y + 1) = 0$.

Après simplification, l'équation *réduite* de (AC) est : $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

Les points B et C ont la même abscisse 2. La droite (BC) est donc parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est $x = 2$.

3. Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Appelons x_D et y_D l'abscisse et l'ordonnée du point D. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (6 ; 6) et celles de $\overrightarrow{DC}$ sont ($2-x_D$; $-4-x_D$). Les vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées sont égales : $x_D = -4$ et $y_D = -10$; conclusion $D(-4 ; -10)$.

4. La droite (AB) a pour coefficient directeur 1. (d) est parallèle à (AB) et a donc le même coefficient directeur. Son équation réduite est donc de la forme $y = x + k$.

Or (d) passe par le point $B'\left(-1; -\frac{5}{2}\right)$; on trouve, en remplaçant, $k = -\frac{3}{2}$. Une équation de (d) est donc : $y = x - \frac{3}{2}$.

Les point d'intersection avec les axes ont, soit une abscisse nulle, soit une ordonnée nulle.

Ces points ont donc pour coordonnées : $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

5. Sur la figure, il semble que le centre de gravité du triangle ABC soit le point O. Pour le vérifier, montrons que O vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, en utilisant les coordonnées.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées : ($x_A + x_B + x_C$; $y_A + y_B + y_C$). Or $x_A + x_B + x_C = -4+2+2 = 0$ et $y_A + y_B + y_C = -1+5-4 = 0$. Donc la relation est vérifiée. Le centre de gravité de ABC est O.

6. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (AD) et (BC) sont parallèles. D'après 2. l'équation réduite de (AD) est donc $x = -4$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

Les coordonnées de E vérifient donc le système $\begin{cases} x = -4 \\ y = x - 3/2 \end{cases}$, soit $E(-4 ; -11/2)$. Les coordonnées de F vérifient le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = x - 3/2 \end{cases}$: $F(2 ; 1/2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées : (2−(−4) ; (1/2)−(11/2)) = (6 ; 6). Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc égaux, $ABFE$ est un parallélogramme .

7. Soit $G(x_G\,;\,y_G)$ le centre de gravité de *ADC*. Alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Avec les coordonnées, cela se traduit par : $\begin{cases}(-4-x_G)+(-4-x_G)+(2-x_G)=0\\(-1-y_G)+(-10-y_G)+(-4-y_G)=0\end{cases}$.

D'où, après résolution des deux équations : G (−2 ; −5). Comme *G* appartient à (d'), ses coordonnées vérifient l'équation $3x - y + k = 0$, d'où: $3(-2) - (-5) + k = 0$ et finalement : $k = 1$.

8. Voir le graphique (un des côtés est compris dans l'ensemble cherché).