FONCTIONS POLYNOMES DE DEGRE 2

a) Définition :

Une fonction polynômes (ou trinôme) du second degré est une fonction qui a tout réel x associe $ax^2 + bx + c$ avec a,b,c des réels et $a \neq 0$.

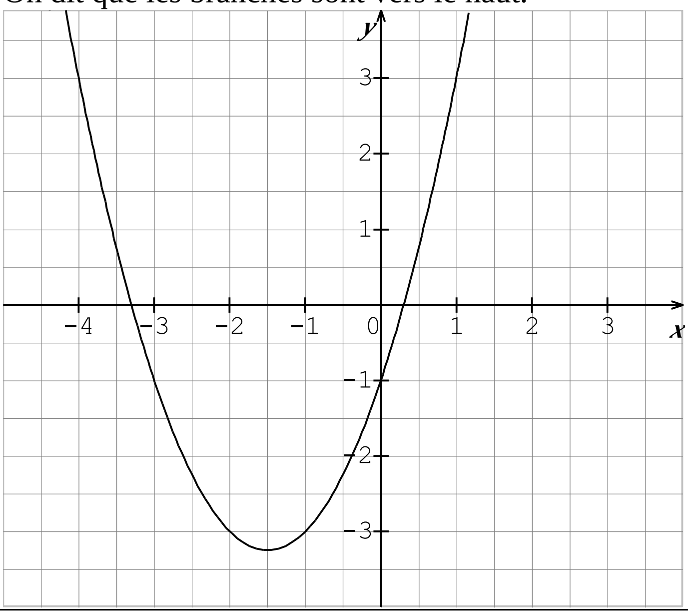
On la note : $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

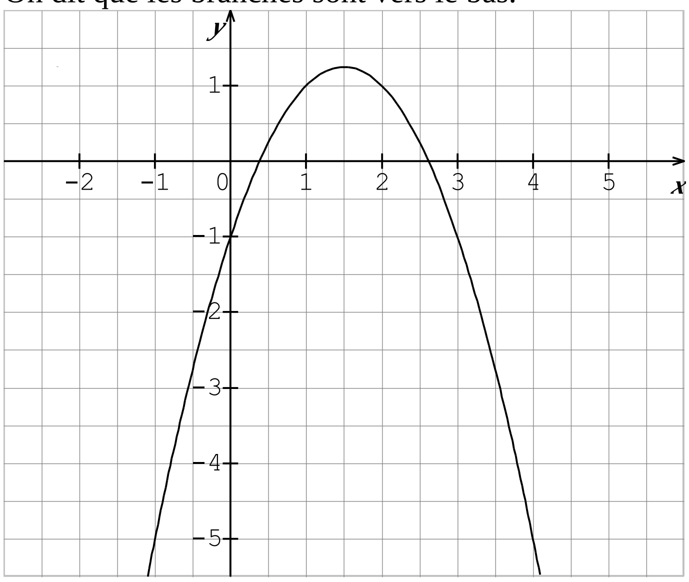
Elle est définie pour tous les réels x : Df = IR.

b) Courbe représentative :

La courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une **parabole** dont le sens dépend du signe de a.

<table>
<tr><th>Pour a > 0</th><th>Pour a < 0</th></tr>
<tr><td>Si a>0 , la fonction f est d'abord décroissante puis croissante.

On dit que les branches sont vers le haut.

</td>
<td>Si a<0 , la fonction f est d'abord décroissante puis croissante.

On dit que les branches sont vers le bas.

</td></tr>
</table>

Cette courbe admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées et 'équation : $x = -\frac{b}{2a}$.

Le sommet de cette courbe est le point de coordonnées : **$(-\frac{b}{2a}\ ;\ f(-\frac{b}{2a}))$.**

c) Extremum :

Pour a > 0	Pour a < 0
La fonction f admet un <u>minimum</u> en $-\frac{b}{2a}$ qui vaut $f(-\frac{b}{2a})$. C'est à dire que pour tout $x \in$IR, $f(x) \geq f(-\frac{b}{2a})$.	La fonction f admet un <u>MAXIMUM</u> en $-\frac{b}{2a}$qui vaut $f(-\frac{b}{2a})$. C'est à dire que pour tout $x \in$IR, $f(x) \leq f(-\frac{b}{2a})$.

<u>Exercice :</u> On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2 -2x + 1$.

a) Déterminer les antécédents de 1 par f.

b) Vérifier que $f(x) = 2 – (x + 1)^2$. En déduire que f admet un maximum dont on précisera la valeur.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty\ ;+\infty[$;TRacer la courbe représentative sur [–3 ; 1].

<u>FONCTIONS $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$</u> avec a ($\neq 0$) , α et β des réels fixés.

a) <u>Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré :</u>

<u>Développer :</u>

$a(x-\alpha)^2+\beta = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta = ax^2 + bx + ac$

On dit que $a(x-\alpha)^2+\beta$ est la **<u>forme canonique</u>** du polynôme $ax^2 + bx + ac$

$\left\{\begin{array}{l}\text{avec}\\ b = -2a\alpha\\ \text{et}\\ c = a\alpha^2 + \beta\end{array}\right.$

b) <u>Sens de variation :</u>

La fonction f est **définie sur IR** par l'enchaînement suivant : (en respectant les priorités de calculs)

$x \to (x-\alpha) \to (x-\alpha)^2 \to a(x-\alpha)^2 \to a(x-\alpha)^2+\beta$

Cet enchaînement nous permet de trouver le tableau de variation de f .

CAS où a > 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$x \mapsto x-\alpha$			
Explications			
$x \mapsto (x-\alpha)^2$			
Explications			
$x \mapsto a(x-\alpha)^2$			
Explications			
$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$			

CAS où a < 0

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$x \mapsto x-\alpha$			
Explications			
$x \mapsto (x-\alpha)^2$			
Explications			
$x \mapsto a(x-\alpha)^2$			
Explications			
$x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$			

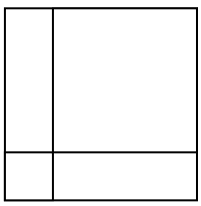
Propriété : **Variations de la fonction $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$**

Si a >0 alors la fonction f ……………… sur ………… et ……………. sur ……………….

Si a < 0 alors la fonction f ……………… sur ………… et ……………. sur ……………….

<u>Exercice :</u> On dispose d'un terrain carré de 8 hm de côté découpé en quatre parcelles.
On note $A(x)$ l'aire du domaine hachuré.

1. A quel intervalle appartient x ?
2. Montrer que $A(x) = 2(x-4)^2 + 32$
3. Quel est le minimum de cette aire ?



x

x

c) Représentation graphique de f :

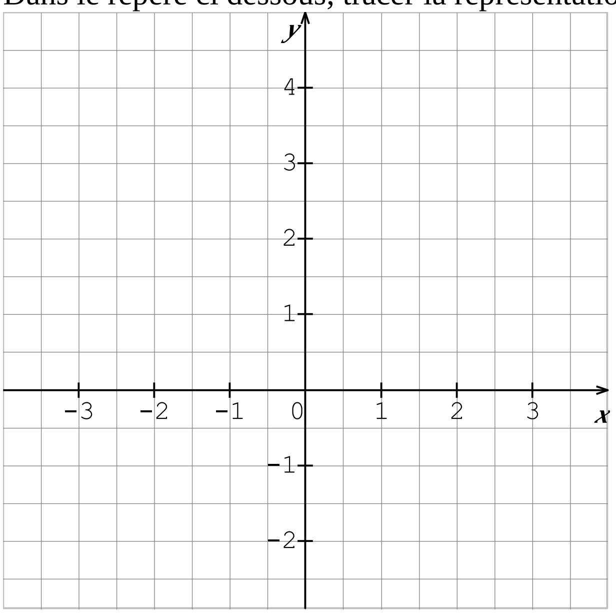
Activité : A l'aide de votre calculatrice tracer les courbes des fonctions suivantes.
Comment s'appelle ce type de courbe ?
Comparer à la parabole d'équation $y = x^2$, que remarquez-vous pour le sommet de la courbe ?
Et pour les variations de la fonction?

$f(x) = a\,x^2$	$F(x) = (x - \alpha)^2$	$f(x) = x^2 + \beta$
$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = 2x^2$ $f_3(x) = 0.5x^2$ $f_4(x) = -\,x^2$ $f_5(x) = -\,3x^2$	$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x - 1)^2$ $f_3(x) = (x - 3)^2$ $f_4(x) = (x + 1)^2$ $f_5(x) = (x + 2)^2$	$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 1$ $f_3(x) = x^2 + 3$ $f_4(x) = x^2 - 1$ $f_5(x) = x^2 - 2$

Définition :
Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto a(x- \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$, est une …………………………………. de sommet S (…………. ; ………..)

De plus si $a > 0$ alors ……………………………… ……………………………………………………	De plus si $a < 0$ alors ……………………………… ……………………………………………………

Exercice :
Dans le repère ci dessous, tracer la représentation graphique de f définie sur IR par $f(x) = 4 – (x –1)^2$



Etape 1 : Les coordonnées du sommet

Etape 2 : Calculer les coordonnées de quelques points.

x						
f(x) =y						