

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE

N°1

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

⌚ Durée : 1 heure.

Date : 17 / 10 / 2006

EXERCICE 1 (5 points)

1. a- Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquelles l'expression $A = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ a un sens.

b- Démontrer que pour tout x de D, on a : $A = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$

2. a- Montrer que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ où k est un nombre entier non nul.

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

EXERCICE 2 (4 points)

1. Comparer $1 + \sqrt{5}$ et $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

2. a- Soient a et b deux réels positifs. Montrer que $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

b- En déduire que pour tous a, b et c réels positifs, on a : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

EXERCICE 3 (11 points)

Soit (o, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormal et A, B, C les points de coordonnées respectives (-2, 3), (7, 0), (2, -5)

1. Soit D le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) et H l'orthocentre du triangle ABC.

a- Le vecteur \vec{AC} est non nul, donc il existe un nombre k tel que $\vec{AD} = k \vec{AC}$.

Exprimer les coordonnées du point D en fonction de k.

b- Déterminer k, puis calculer les coordonnées du point D.

c- Utiliser, d'une part, l'alignement des points B, D, H et d'autre part, l'orthogonalité des vecteurs \vec{AB} et \vec{CH} pour calculer les coordonnées du point H.

2. Soit E le projeté orthogonal du point H sur la droite (BC) et F l'image du point H par la symétrie d'axe (BC). Calculer les coordonnées des points E et F.

3. On note (x, y) les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC.

a- Exprimer AI^2 , BI^2 et CI^2 en fonction de x et y.

b- Déterminer les coordonnées du point I.

4. Montrer que le point F est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE

N°2

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr Kamel HASSEN

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

 Durée : 1 heure.

Date : 14 / 11 / 2006

N.B :  il sera donné une grande importance à la rédaction et à la présentation de la copie 

EXERCICE 1

- a- Résoudre dans IR, l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$.
b- En déduire la résolution de l'équation : $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
- Soit l'équation (E) : $x^2 - \sqrt{3}x - 2 = 0$
a- Sans calculer le discriminant Δ , montrer que (E) admet deux racines distinctes x' et x'' .
b- Sans calculer les racines x' et x'' , calculer l'expression suivante : $F = x'^2 + x'x'' + x''^2$.

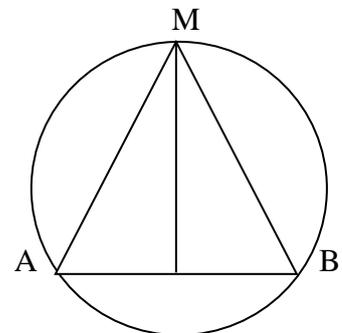
EXERCICE 2

Le cercle ζ est de centre O et de rayon 1.

On trace une corde [AB] de longueur $2a$ ($0 < a < 1$), puis on marque le point I, milieu de [AB], et le point M, comme indiqué sur la figure (le triangle MAB est donc isocèle en M).

On pose $x = MA = MB$.

- Montrer que $\left(\frac{x^2-2}{2}\right)^2 + a^2 = 1$ (E)
- Pour quelle valeur de a, $x = 2a$ est une racine de (E).
- On prend $a = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Résoudre l'équation (E).



EXERCICE 3

Soit ABC un triangle du plan. Le point A' milieu du côté [BC] et M un point variable de ce plan.

- a- Construire le point E barycentre de (A, 2) et (C, 1)
b- Soit le point I milieu du segment [AA']. Montrer que : $2\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.
c- En déduire que les points B, I et E sont alignés.
- Montrer que $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = -2\vec{AA}'$.
- Montrer que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ où le point G centre de gravité du triangle ABC.
- Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE SYNTHESE

N°1

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

⌚ Durée : 2 heures.

Date : 06 / 12 / 2006

EXERCICE 1

1. Soit P le polynôme défini par: $P(x) = x^2 - 5x + 4$.
 - a- Résoudre dans IR, l'équation $P(x) = 0$
 - b- Déterminer le signe de P(x).
 - c- Résoudre dans IR, l'inéquation $|P(x)| < x - 1$
2. Soit Q le polynôme défini par : $Q(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
 - a- Factoriser $x^3 - 8$ puis déduire que $Q(x) = (x - 2) P(x)$.
 - b- Déterminer le signe de Q(x).
 - c- Résoudre dans IR, l'inéquation $\sqrt{Q(x)} \geq x - 2$

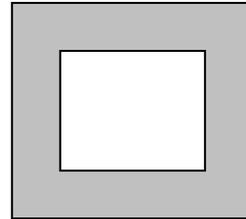
EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 1)(x + 2)}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Simplifier f(x).
3. Résoudre dans IR, l'inéquation $f(x) > 0$.

EXERCICE 3

Le grand carré est de côté 1.
 Trouver la largeur x (constante) de la bande grise,
 sachant qu'elle a la même aire que celle du carré intérieur.

EXERCICE 4

On considère un triangle ABC rectangle en A, $I = A * C$ et $J = A * B$.

- I/
 1. Construire le point E le barycentre de (A, 2) et (C, 1).
 2. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\| 2 \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \|$
- II/
 1. Peut-on trouver un réel x tel que le point G soit le barycentre des points pondérés (A, $x^2 - 2$), (B, $x - 3$) et (C, $x - 1$).
 2. On donne $x = 2$, alors G est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1)
 - a- Montre que G est le barycentre de (E, 3) et (B, -1).
 - b- Construire le point G.
 3. Montrer que les vecteurs \overrightarrow{GI} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.
 4. En déduire que AJIG est un parallélogramme.
 5. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\| 2 \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \|$

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE

N°3

☆☆☆☆

PROFESSEUR : M^r Kamel HASSEN

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

 Durée : 1 heure.

Date : 23 / 01 / 2007

EXERCICE 1

- a- Déterminer le reste de la division euclidienne par 11 de l'entier 2041920647.
b- Trouver les chiffres a et b pour que l'entier 51a72b soit divisible par 5 et 11.
- a- Démontrer que la somme de deux nombres **impairs** consécutifs est divisible par 4.
b- Montrer que si n est entier naturel **pair**, le nombre $n(n^2 + 4)$ est divisible par 8.
- Soit x un entier naturel non nul.
a- Montrer que x et x + 1 sont premiers entre eux.
b- En déduire le pgcd et le ppcm de x + 1 et 2x + 1.

EXERCICE 2

A et B sont deux points distincts du plan, G le barycentre de (A, 2) et (B, 3).

$$f : P \rightarrow P$$

Soit l'application

$$M \mapsto M' \text{ tel que } 4 \overrightarrow{MM'} = 2 \overrightarrow{MA} + \alpha \overrightarrow{MB}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

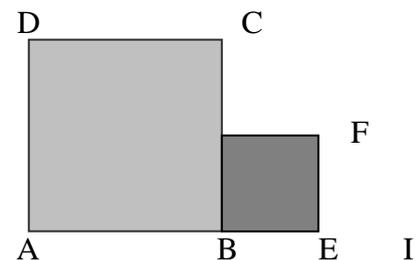
- Si $\alpha = -2$, Montrer que f est une translation de vecteur $\frac{-1}{2} \overrightarrow{AB}$
- Si $\alpha = 3$,
 - Montrer que G est invariant par f.
 - Montrer que f est l'homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

EXERCICE 3

La figure ci-contre représente un carré ABCD dont les côtés mesurent 4cm et un carré BEFG dont les côtés mesurent 2cm.

Les droites (CF) et (AB) se coupent en I.

- Déterminer le nombre k tel que $\overrightarrow{IB} = k \overrightarrow{IA}$
- Soit h l'homothétie de centre I et le rapport $\frac{1}{2}$
 - Montrer que $h(C) = F$ et $h(B) = E$.
 - Déterminer L l'image de G par l'homothétie h.
 - Exprimer \overrightarrow{BG} en fonction de \overrightarrow{AD}
 - Déterminer l'image de D par l'homothétie h.
- Montrer que les points I, L, G et D sont alignés.



LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE

N°4

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

 Durée : 1 heure.

Date : 13 / 02 / 2007

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + 2} \end{cases}$$

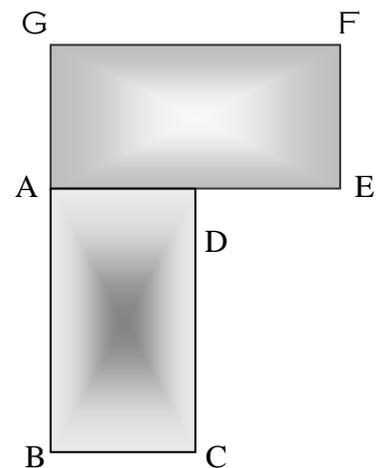
- Calculer U_1 et U_2 puis vérifier que (U_n) n'est pas une suite arithmétique.
- On pose $V_n = U_n^2$
 - Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 2.
 - Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n en fonction de n .
 - Calculer la somme $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ en fonction de n .
 - En déduire en fonction de n le produit : $P = 2^{V_0} 2^{V_1} 2^{V_2} \dots 2^{V_{n-1}}$
- Soit (W_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $W_n = 2^{V_n}$
 - Montrer que (W_n) est une suite géométrique de premier terme $W_0 = 2$ et de raison 4.
 - Exprimer en fonction de n la somme : $2^{V_2} + 2^{V_3} + 2^{V_4} + \dots + 2^{V_n}$

EXERCICE 2

La figure ci-contre représente deux rectangles ABCD et AEFG de mêmes dimensions et tels que les points D et O sont les milieux respectifs des segments [AE] et [AC].

Soit R la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Déterminer $R(B)$ et $R(D)$.
 - En déduire que les droites (BD) et (GE) sont perpendiculaires.
- Déterminer les images par R des droites (BC) et (DC).
 - En déduire que $R(C) = F$.
 - Préciser la nature du triangle ACF.
- Déterminer l'image de O par R .



LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE SYNTHÈSE

N°2

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

 Durée : 2 heures.

Date : 07 / 03 / 2007

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(\alpha) = -\sqrt{2} \cos^2(\alpha) - (1 + \sqrt{2}) \sin(\alpha) + 1 + \sqrt{2}$

1. Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2. a- Montrer que $f(\pi - \alpha) = f(\alpha)$

b- Montrer que: $f(\alpha) = \sqrt{2} \sin^2(\alpha) - (1 + \sqrt{2}) \sin(\alpha) + 1$

c- Résoudre dans $[0, \pi]$; $f(\alpha) = 0$

3. Montrer que, pour tout $\alpha \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$: $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 1} = 0$

4. Calculer (sans utiliser la calculatrice) : $\sin^2 \frac{\pi}{10} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{9\pi}{10} + \sin^2 \frac{3\pi}{5}$

EXERCICE 2

On considère la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 0 & ; & U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 10U_{n+1} - 9U_n \end{cases}$$

1. Calculer U_2 et U_3 .

2. Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 9$ et de premier terme $V_0 = 1$

b- Calculer en fonction de n la somme $S = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

c- En déduire l'expression de U_n en fonction de n .

3. On pose $W_n = U_{n+1} - 9U_n$

a- Montrer que (W_n) est une suite constante.

b- En déduire pour tout n de \mathbb{N} , $U_{n+1} = 1 + 9U_n$

EXERCICE 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I/ On considère B(-1, 2) et C(2, 1) deux points du plan

1. Montrer que la droite (BC) a pour équation cartésienne : $x + 3y - 5 = 0$
2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à (BC) passant par O.
3. Calculer la distance $d(O, (BC))$
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection de (D) avec (BC).
5. Montrer que OBC est un triangle isocèle et rectangle en O.
6. Déterminer une équation cartésienne du cercle (\mathcal{C}) circonscrit au triangle OBC.

II/ On considère Δ_m l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation : $(m + 2)x - (m + 1)y + m - 2 = 0$
où m étant un paramètre réel.

1. Montrer que pour tout réel m , (Δ_m) est une droite.
2. Montrer que toutes les droites (Δ_m) passent par un point fixe A(3, 4) quel que soit m .
3. Déterminer la valeur du réel m pour que (Δ_m) soit globalement invariante par la translation de vecteur \vec{j} .

III/ On considère C_k l'ensemble des points $M(x, y)$ tel que: $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0$
où k étant un paramètre réel.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, C_k est un cercle de centre $I_k(2k, 1)$ et de rayon $R_k = |2k - 1|$
2. Déterminer l'ensemble des centres I_k lorsque k décrit \mathbb{R} .
3. Montrer que tous les cercles (C_k) sont tangents entre eux en un point fixe.

LYCEE PILOTE MONASTIR

DEVOIR DE CONTROLE

N°5

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

 Durée : 1 heure.

Date : 20 / 04 / 2007

EXERCICE 1

I / Déterminer le domaine de définition de la fonction $h : x \mapsto \frac{x^2 - 3x}{1 - \sqrt{-x + 2}}$

II / On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

On désigne (C_f) la courbe représentative de f dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier le tableau de variation de f puis tracer (C_f) .
2. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ et (C_g) sa courbe représentative.
 - a- Tracer, à partir de (C_f) , la courbe (C_g) dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - b- En déduire le tableau de variation de la fonction g .
3. Soit (Δ) la droite d'équation : $y = x - 2$
 - a- Tracer (Δ) sur le graphique précédent.
 - b- Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_g) et de la droite (Δ) .
 - c- Résoudre graphiquement : $x - g(x) \leq 2$.
4. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = m$.

EXERCICE 2

Le tableau suivant donne les quantités de lait en poudre absorbées par 100 bébés de 2 mois en une journée.

consommations (en grammes)	[40, 50[[50, 60[[60, 70[[70, 80[[80, 90 [
Effectifs	5	15	40	25	15

1. Construire l'histogramme et le polygone des effectifs de la série.
2. Calculer le mode M_0
3. Donner le tableau des fréquences cumulées croissantes.
4. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
5. Déterminer la consommation médiane : M_e
6. Calculer la moyenne arithmétique \bar{X} et l'écart type σ
7. Donner le pourcentage de bébés dont la consommation de lait appartient à l'intervalle $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$.

LYCEE PILOTE MONASTIR

L. P. M

DEVOIR DE CONTROLE

N°6

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**

SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHEMATIQUES

 Durée : 1 heure.

Date : 05 / 05 / 2007

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 2x$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Vérifier que $f(x) = (x-1)^2 - 1$
- 2) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative (C_f) .
- 3) a- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et la droite Δ d'équation $y = x$.
b- Tracer dans le même repère la droite Δ .
- 4) Soit a un réel de l'intervalle $[0, 3]$, la droite d'équation $x = a$ coupe (C_f) en M et (Δ) en N .
a- Exprimer MN à l'aide de a .
b- Déterminer a pour que la distance MN soit maximale.
- 5) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x|x| - 2x$
a- Montrer que g est impaire.
b- Construire, à partir de (C_f) , la courbe (C_g) dans le même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
c- En déduire le tableau de variation de la fonction g .

EXERCICE 2

Soient $ABCD$ un tétraèdre, I un point de $[AC]$ distinct de A et C et J un point de $[BD]$ distinct de B et D .

- 1) a- Montrer que les droites (AC) et (BD) ne sont pas sécantes.
b- En déduire que I et J sont distincts.
c- Les droites (AI) et (CJ) sont-elles coplanaires ?
- 2) Soient K le milieu de $[AB]$, A' le milieu de $[CD]$ et G le centre de gravité du triangle ACD .
a- Montrer que les droites (KG) et (BA') sont sécantes.
b- En déduire que la droite (KG) perce le plan (BCD) en un point E que l'on construira.
- 3) Déterminer et construire la droite d'intersection de deux plans (KGD) et (DJA') .
- 4) Montrer que $BCED$ est un parallélogramme.

LYCEE PILOTE MONASTIR

L. P. M

DEVOIR DE SYNTHÈSE

N°3

☆☆☆☆

PROFESSEUR : Mr **Kamel HASSEN**SECTION : 2^{ème} année sciences

EPREUVE : MATHÉMATIQUES

 Durée : 2 heures.

Date : 30 / 05 / 2007

EXERCICE 1 (7 points)1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{x-2}$ a- Étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.b- Dresser le tableau de variation de f .c- Tracer ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{3x-3}{x-2}$ a- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, on a $g(x) = 3 + f(x)$.b- Déduire, à partir de la courbe ζ_f , le traçage de la courbe ζ_g de g dans le même repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .c- En déduire le tableau de variation de g .3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $h(x) = \frac{3x-3}{|x-2|}$ Déduire, à partir de la courbe ζ_g , le traçage de la courbe ζ_h de h dans le même repère (o, \vec{i}, \vec{j}) .EXERCICE 2 (3 points)On considère la fonction f_m définie sur \mathbb{R} par: $f_m(x) = -x^2 + 2(m+1)x + 2m$ où m est un paramètre réel.On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .1. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe.2. Donner en fonction de m les coordonnées du sommet S_m de C_m .3. Déterminer l'ensemble des points S_m lorsque m décrit \mathbb{R} .EXERCICE 3 (5 points)

Sur une portion d'autoroute, on effectue un contrôle de vitesse. Sur un échantillon de 200 automobiles, on a obtenu les résultats suivants :

Vitesse en Km. h ⁻¹] 80, 90]] 90, 100]] 100, 110]] 110, 120]] 120, 130]] 130, 140]
Effectifs	4	18	102	50	22	4

1. La vitesse est limitée à 110 Km.h⁻¹. Quel est le pourcentage d'automobilistes en infraction ?
2. Calculer les fréquences en pourcentage de chaque classe puis les fréquences cumulées croissantes.
3. Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Déterminer graphiquement les valeurs approchées de la médiane M_e et les quartiles Q_1 et Q_3 .
5. Construire le diagramme en boîte de la série.

EXERCICE 4 (5 points)

Soient ABCDEFGH un cube, I, J, K, L et O les milieux des arêtes [EF], [EA], [BC], [DC] et [DB].

1. Montrer que le triangle IFK est rectangle en F.
2. Montrer que (JO) et (BD) sont perpendiculaires.
3. a- En utilisant Le triangle ADF.
Montrer que (EB) et (DF) sont orthogonales.
b- En utilisant Le triangle FDC.
Montrer que (GB) et (DF) sont orthogonales.
c- En déduire que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BEG).
4. Déterminer l'axe du cercle circonscrit au triangle EBG.

