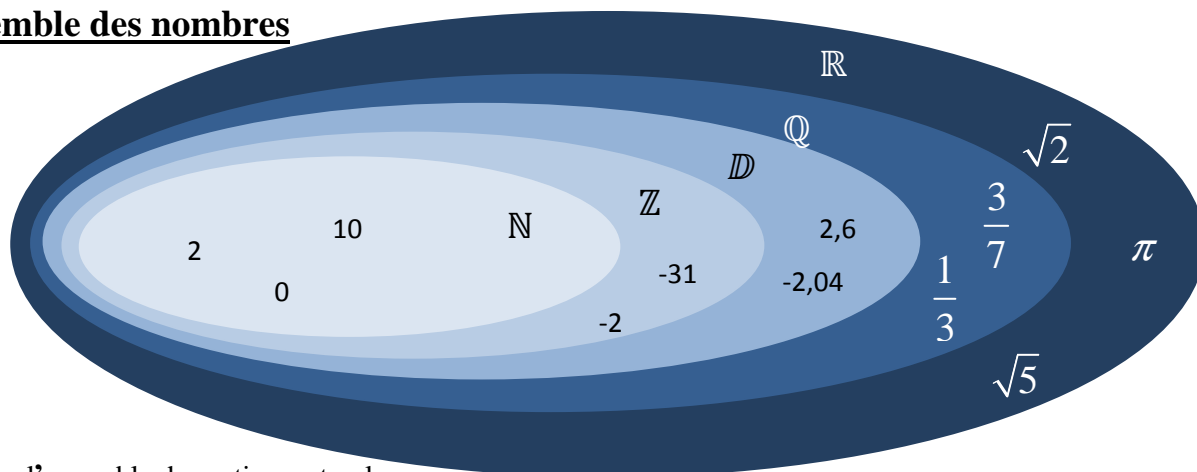


I) Les ensemble des nombres



IN désigne l'ensemble des entiers naturels.

Z désigne l'ensemble des entiers relatifs.

ID désigne l'ensemble des décimaux.

Q désigne l'ensemble des nombres rationnels.

IR désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice :

1) Ecrire si c'est possible les réels ci-dessous sous la forme : $a \cdot 10^n$ (avec $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$).

$$13 \quad ; \quad -30,0363636 \quad ; \quad \frac{18}{32} ; \sqrt{625} \quad ; \quad \frac{3,195}{35,5} \times 100 \quad ; \quad \frac{-893}{95} \quad \text{et} \quad \frac{18}{13}$$

2) Déterminer les ensembles suivants : $\mathbf{IN} \cap \mathbf{Q}$; $\mathbf{IN} \cup \mathbf{IR}$; $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_+$; $\mathbf{IR} \cap \mathbf{ID}$; $\mathbf{ID} \cup \mathbf{Z}$; $\mathbf{Z} \cup \mathbf{Q}$;

$$\mathbf{IR} \cap \mathbf{ID} \quad ; \quad \mathbf{Z}_+ \cap \mathbf{IR}$$

II) Calculs sur les quotients

Soient x, y, z et t des réels non nuls : $\frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{xt+yz}{yt}$; $\frac{x}{y} \times \frac{z}{t} = \frac{xz}{yt}$; $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{t}} = \frac{xt}{yz}$

Exercice :

1) Pour tout $x \in \mathbf{IR} \setminus \{-1 ; 0\}$, vérifier que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

2) Calculer donc les sommes S_1 et S_2 avec $S_1 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6}$ et $S_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ ($n \in \mathbf{IN}^*$).

III) Règles de calcul sur les puissances

Retenir

Par convention $x^0 = 1$ pour tout réel x non nul

$$x^1 = x;$$

Et pour tout entier $n; m$ et p : $x^n \cdot x^p = x^{n+p}$;

$$\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p} \quad \text{avec} \quad x \neq 0 \quad ;$$

$$(x^n)^p = x^{np} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad \text{avec} \quad y \neq 0$$

Exercice n°1:

Calculer A et B avec $A = \frac{6^{-3} + 6^{-3} + 6^{-3} + 6^{-3}}{3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3}}$; et $B = \frac{12^5 - 6^{10}}{6^4(2^5 - 6^5)}$

Exercice n°2:

Soit a un réel différent de 1.

- 1) Développer $(1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5)$.
- 2) En déduire la valeur du réel $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32})$.

IV) Les identités remarquables

Activité compléter

LES IDENTITES REMARQUABLES
$(a + b)^2 = \dots\dots\dots$
$(a - b)^2 = \dots\dots\dots$
$a^2 - b^2 = \dots\dots\dots$
$(a + b)^3 = \dots\dots\dots$
$(a - b)^3 = \dots\dots\dots$
$a^3 + b^3 = \dots\dots\dots$
$a^3 - b^3 = \dots\dots\dots$

Retenir

Soit a, b et c trois réels, on a les identités remarquables suivantes :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2) + 6abc$.

Exercice n°1

- 1) On considère les deux réels : $A = 17^6 - 1$ et $B = 17^6 + 17^4 - 2$.
 - a) Factoriser A puis en déduire une factorisation de B.
 - b) Montrer alors que A et B sont divisibles par 144.
- 2) Soit a un réel.
 - a) Développer $[a + \frac{1}{2}]^2 + \frac{3}{4}$.
 - b) En déduire que $(a^3 - 1)$ et $(a - 1)$ sont de même signe.
 - c) Les réels $(a^2 - 1)$ et $(a - 1)$ sont-ils de même signe ?

Exercice n°2 Factorisation

Factoriser les expressions suivantes : $F = (2a + 3b)^3 - (2a - 3b)^3$; $G = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$.

V) Comparaison de réels - Encadrement

- 1) Ordre et comparaison

Pour tout réel a, b, c et d on a : $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.
 $a < b$ (si $c > 0$ alors $a \cdot c < b \cdot c$) et (si $c < 0$ alors $a \cdot c > b \cdot c$).
 $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.
 Si a, b, c et d sont des réels positifs et tel qu'on a $a < b$ et $c < d$ alors $a \cdot c < b \cdot d$.
 $a < b$ équivaut à $(b - a)$ est strictement positif ($0 < b - a$).
 $a > b$ équivaut à $(b - a)$ est strictement négatif ($0 > b - a$).
 Si $0 < a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
 Si $a < b < 0$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2) **Comparaison de a ; $a^2\sqrt{a}$**

Soit a un réel
 Si $a \geq 1$ alors on a : $a^2 \geq a$; $a \geq \sqrt{a}$.
 Si $0 \leq a \leq 1$ alors on a : $a^2 \leq a$; $a \leq \sqrt{a}$.
 Si $a \leq -1$ alors on a : $a^2 \geq a$.
 Si $-1 \leq a \leq 0$ alors on a : $a^2 \leq a$.

3) **Comparaison de a et $\frac{1}{a}$**

Soit a un réel non nul
 Si $a \geq 1$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$; Si $a \leq -1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$
 Si $0 < a \leq 1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$; Si $-1 \leq a < 0$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$

4) **Encadrement, intervalles de \mathbb{R}**

Soient a ; b ; et x trois réels
 Si $a < x < b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle ouvert $]a; b[$ $x \in]a; b[$.
 Si $a \leq x \leq b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle fermé $[a; b]$ $x \in [a; b]$.
 Si $x > a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $]a; +\infty[$.
 Si $x \leq a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $] -\infty; a]$.
 L'ensemble des réels positifs est l'intervalle $[0; +\infty[$ on le note \mathbb{R}_+ .
 L'ensemble des réels strictement positifs est l'intervalle $]0; +\infty[$ on le note \mathbb{R}_+^* .

Exercice n°1

- 1) Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$ déterminer :
 a) un encadrement de $(-3a + 5)$ b) un encadrement de $\frac{2a+3}{-a+5}$
- 2) Soient a et b deux réels de \mathbb{R}_+^* , montrer les deux inégalités : $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exercice n°2

- Soient $A = (1+x)^2$ et $B = 1 + 2x$.
 1. Comparer A et B .
 2. Lequel est plus grand : $a = (1,000000000000003)^2$ ou $b = 1,000000000000006$.

Exercice n° 3

1. Soit x un réel comparer $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$
2. Soit x un réel strictement positif montrer l'inégalité suivante $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

VI) Les radicaux

Soit a un réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a le seul nombre positif dont le carré est égal à a . La racine carrée de a est notée \sqrt{a} . On donne $\sqrt{0} = 0$. Si a est positif alors on a $\sqrt{a^2} = a$. Si a est négatif alors on a $\sqrt{a^2} = |a|$. Soit x et y deux réels strictement positifs $\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{x \times y}$ et $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Remarque : $(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ s'appelle **l'expression conjuguée** de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

Exercice n°1 :

- 1) Déterminer le réel a dans l'expression suivante : $\sqrt{7 + \sqrt{a}} = 3$.
- 2) Ecrire le nombre suivant sans radicaux au dénominateur : $A = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

Exercice n°2

Soient $M = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ et $N = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

- 1) Calculer M^2 et N^2 . En déduire une écriture plus simple de chacun des réels M et N .
- 2) Soit $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vérifier que $a^2 + a - 1 = 0$ et que $\frac{1}{a} = a + 1$.
- 3) Montrer alors que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$.

VII) Valeur absolue

Pour tout nombre réel x , la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par:

$$|x| = x, \text{ si } x > 0 \quad ; |x| = -x, \text{ si } x < 0 \quad ; |x| = 0, \text{ si } x = 0.$$

Pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel y on a :

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|; \text{ pour } y \neq 0 \quad \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|; |x + y| \leq |x| + |y|; |x - y| \geq ||x| - |y||.$$

$|x| \leq a$ signifie $-a \leq x \leq a$; $|x| \geq a$ signifie ($x \leq -a$ ou $x \geq a$) où a est strictement positif.

Exercice n° 1

Déterminer x dans chacun des cas suivants : $|2x - 3| = 0$; $|3x + \sqrt{2}| = |x - 0,5|$; $|1 - x||1 + x| = 9$.

Exercice n° 2

Soit O et I points d'une droite D . Sur D on considère les points A , B , et M d'abscisses respectives 2 ; -3 et x dans le repère (O, I) .

- 1) Déterminer l'ensemble des points M de la droite D tel que : $|x - 2| + |x + 3| = 5$.
- 2) Existe-t-il des points du segment $[AB]$ vérifiant $|x - 2| + |x + 3| = 6$?
- 3)

VIII) Proportionnalité et pourcentage

Proportionnalité

Définition

Une proportion est une égalité de deux rapports. Soient a, b, c et d des réels non nuls.

* a et c sont respectivement proportionnels à b et d si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'appelle une **proportion**.

* Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ (avec $b + d \neq 0$).

* Si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ alors $\frac{x+y+z}{a+b+c} = k$ (avec $a + b + c \neq 0$).

* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

1- Pourcentage

<i>Situation</i>	<i>Application linéaire associée à x</i>	<i>Exemple - clé</i>
Prendre t % d'une quantité x	$x \rightarrow \frac{t}{100} x$	12 % de x c'est $0,12 \times x$
Augmenter une quantité x de t %	$x \rightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right) x$	Si x augmente de 12% , alors x devient $1,12 \times x$
Diminuer une quantité x de t %	$x \rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right) x$	Si x diminue de 12% , alors x devient $0,88 \times x$

Exercice

- Le prix d'un C.D baisse de 8 % la première année, puis de 6% la seconde. De quel pourcentage aura baissé le prix de ce C.D en deux ans ?
- Un objet coûte 120 D.T.déterminer son prix final après une baisse de 10 % puis une hausse de 8 % .

IX) Ordre de grandeur – Valeurs approchées

1- Valeurs approchées

Exemple : A l'aide d'une calculatrice on a $\sqrt{7} = 2,645751311.....$ $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$

$\sqrt{7} - 2,645 = 0,000751311.....$ et $\sqrt{7} - 2,646 = - 0,000248688.....$

On dit alors que 2,645 est une **valeur approchée** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près car $|\sqrt{7} - 2,645| < 10^{-3}$.

$\sqrt{7} \geq 2,645$ donc 2,645 est une **valeur approchée par défaut** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} .

$\sqrt{7} \leq 2,646$ donc 2,646 est une **valeur approchée par excès** de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} .

Définition :

Soit n un entier. On dit que le nombre décimal a est une **valeur approchée** à 10^n près du réel b si $|b - a| \leq 10^n$.

Si $a < b$, on dit que a est une **valeur approchée de b à 10^n près par défaut**.

Si $a > b$, on dit que a est une **valeur approchée de b à 10^n près par excès**.

Remarque

Lorsque $m \times 10^{-p} \leq a \leq (m + 1) \times 10^{-p}$ on dit que $m \times 10^{-p}$ est l'approximation décimale de a par défaut à 10^{-p} près et $(m + 1) \times 10^{-p}$ est l'approximation décimale de a par excès à 10^{-p} près.

2- Arrondi

Arrondir, par exemple, un nombre à 10^{-1} près c'est prendre la valeur approchée de ce nombre à 10^{-1} près :

- * Par défaut : si le chiffre des centaines est 0, 1 ; 2 ; 3 ; ou 4.
- * Par excès : si le chiffre des centaines est 5, 6 ; 7 ; 8 ; 9.

3- Ecriture scientifique

Exemples

<i>Réel</i>	3,245	-773,24	0,00251	954000
<i>Ecriture scientifique</i>	3,245	$-7,7324 \times 10^2$	$2,51 \times 10^{-3}$	$9,54 \times 10^5$

La notation scientifique d'un **décimal** est de la forme

$d \times 10^n$ ————— entier relatif ($n \in \mathbf{Z}$)
└───> Décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule

4- Ordre de grandeur d'un nombre

Exemple

$x = 2867,5$; l'ordre de grandeur de x est 3×10^3 (car sa notation scientifique est $2,8675 \times 10^3$).

Définition :

Si $d \times 10^n$ ($n \in \mathbf{Z}$) est l'écriture scientifique d'un nombre (d : décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule), l'**ordre de grandeur** de ce nombre est $a \times 10^n$ où a est l'**arrondi** de d à l'unité.