

Puissances :

Pour tous réels non nuls a et b et tous entiers relatifs m et n on a :

$$(a \times b)^n = \dots\dots\dots ; (a^n)^m = \dots\dots\dots ; a^n \times a^m = \dots\dots\dots ; \frac{a^n}{a^m} = \dots\dots\dots$$

Exercice :

1. Simplifier l'expression suivante : $E = \left[\frac{(2 \times 5)^2}{2^2 \times 5} \right]^4 \times \frac{(2^2 \times 5^5)^{-3}}{(2^2 \times 5^{-3})^2}$.

2. Soient a et b deux réels non nuls. Simplifier l'expression $A = \frac{(a^3 \times b^5)^{-2} \times a^5}{a^3 \times b^5}$.

Identités remarquables :

Pour tous réels a et b on a :

$$(a+b)^2 = \dots\dots\dots ; (a-b)^2 = \dots\dots\dots ; (a-b)(a+b) = \dots\dots\dots ; (a+b)^3 = \dots\dots\dots ;$$

$$(a-b)^3 = \dots\dots\dots ;$$

$$a^3 + b^3 = \dots\dots\dots \quad \text{et}$$

$$a^3 - b^3 = \dots\dots\dots$$

Exercice :

1. On considère les deux entiers $A = 17^6 - 1$ et $B = 17^6 + 17^4 - 2$.

a) Factoriser A puis en déduire une factorisation de B .

b) Montrer alors que A et B sont divisibles par 144.

2. Soit a un réel.

a) Développer $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire que $a^3 - 1$ et $a - 1$ sont de même signe.

c) Les réels $a^2 - 1$ et $a - 1$ sont-ils de même signe ?

Les radicaux :

- Pour tout réel positif a , l'équation $x^2 = a$ admet pour solutions les réels :
- Pour tous réels positifs a et b on a, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \dots\dots\dots$
 $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ s'appelle l'expression conjuguée de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

- Pour tous réels positifs a et b et tout entier n on a :

$$\sqrt{a \times b} = \dots\dots\dots ; \sqrt{\frac{a}{b}} = \dots\dots\dots \text{ (avec } b \neq 0 \text{)} ; \sqrt{a^n} = \dots\dots\dots ;$$

$$\text{et en particulier on a : } \sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$$

Exercice :

1. Soient $A = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ et $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

Calculer A^2 et B^2 . En déduire une écriture plus simple de chacun des réels A et B .

2. Soit $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

a) Vérifier que $a^2 + a - 1 = 0$ et que $\frac{1}{a} = a + 1$.

b) Montrer alors que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{5}$.

Valeur absolue :

On appelle valeur absolue d'un réel x le réel noté $|x|$ défini par $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Exercice :

1. Ecrire sans les valeurs absolues l'expression : $|x - 2| + |2x + 1|$

2. Déterminer x dans chacun des cas suivants :

$$|2x - 3| = 0 ; |3x + 4| = |2x + 6| ; |x - 2| = 5 ; |1 - x| |1 + x| = 9.$$

Encadrements d'un nombre réel :

Soit x un nombre réel. Réaliser un encadrement de x , c'est trouver deux nombres réels a et b tels

que $a \leq x \leq b$. Le nombre $b - a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement.

Exemples :

Encadrement	Amplitude
$1 \leq \sqrt{2} \leq 2$	
$1.414 \leq \sqrt{2} \leq 1.415$	
$3.14 \leq \pi \leq 3.15$	

Exercice : Sachant que $|x - 3| < 2 \times 10^{-3}$, donner un encadrement de x .

Comme le suggère cet exercice, on dit que 3 est une valeur approchée de x à 2×10^{-3} près.

On énonce, de façon plus générale la définition suivante :

Lorsque $|x - a| \leq \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près.

Lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut.

Lorsque $a - \varepsilon \leq x \leq a$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près par excès.

Exercice :

On donne : $1,732 \leq \sqrt{3} \leq 1,733$; $3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$.

1. a) Déterminer une valeur approchée décimale de $\sqrt{3}$, par défaut à 10^{-3} près .
b) Déterminer une valeur approchée décimale de $\sqrt{3}$, par excès à 10^{-3} près .
2. a) Déterminer une valeur approchée décimale de π , par défaut à 10^{-4} près .
b) Déterminer une valeur approchée décimale de π , par excès à 10^{-4} près .

Pourcentage :

Situation	Application linéaire associée à x	Exemple – clé
1 Prendre t % d'une quantité x	$x \mapsto \frac{t}{100}x$	12 % de x c'est 0,12x
2 Augmenter une quantité x de t %	$x \mapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$	Si x augmente de 12 %, alors x devient 1,12x
3 Diminuer une quantité x de t %	$x \mapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$	Si x diminue de 12 %, alors x devient 0,88x

Exemple :

Une voiture coûte 15000 dinars hors taxe. Calculer le prix toute taxe comprise de cette voiture sachant que le taux de T.V.A. (taxe sur la valeur ajoutée) est de 19,6 %.

Calculons le montant en dinars de la T.V.A. :

Nous devons donc calculer 19,6 % d'une quantité, comme dans la situation 1 :

.....

Le prix T.T.C. de cette voiture est donc

Mais on aurait pu trouver directement ce résultat à l'aide de la situation 2 :

On augmente le prix hors taxe de 19,6 %, ce qui donne :

.....

Exercice :

Le prix d'un C.D. baisse de 8 % la première année, puis de 6 % la seconde. De quel pourcentage aura baissé le prix de ce disque en deux ans ?

	Piège à éviter	Exemple
1	Une baisse de t % n'est pas compensée par une hausse de t %	Un objet à 100 dinars qui baisse de 10 % coûte 90 dinars, puis s'il augmente de 10 %, il coûte 99 dinars.
2	Une variation de t_1 % suivie d'une variation de t_2 % n'est pas égale à une variation de $(t_1 + t_2)$ %	Un objet à 100 dinars qui baisse de 10 % coûte 90 dinars. S'il baisse encore de 10 %, il coûte 81 dinars. Il n'a donc pas baissé de 20 % (il coûterait 80 dinars)