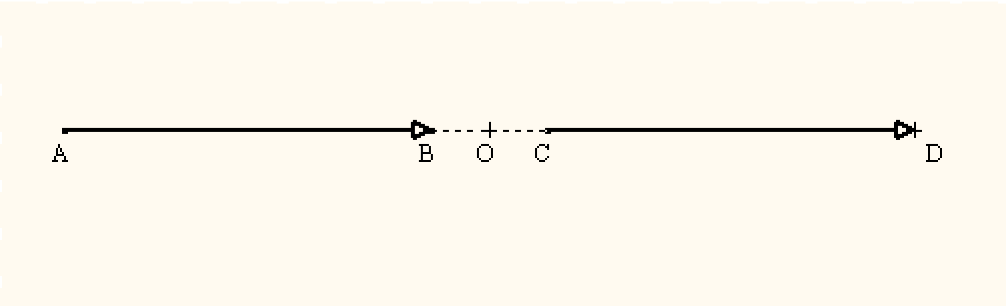
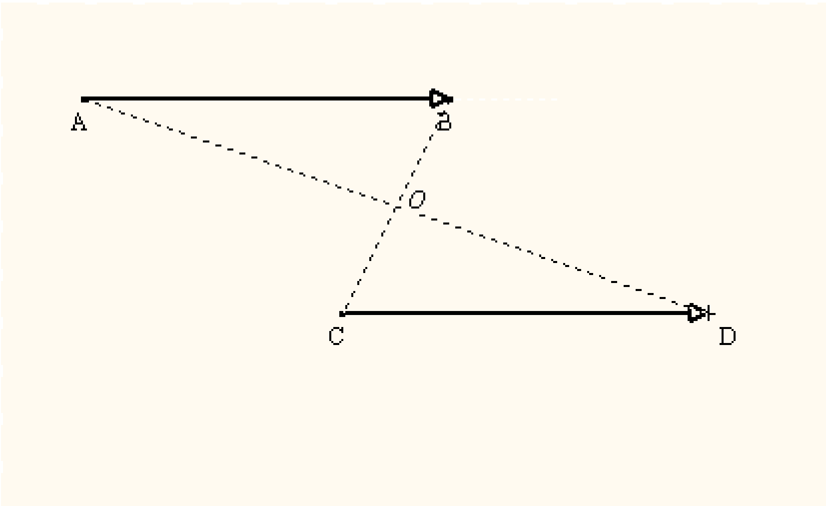
Rappel et compléments :

Définition :

Soient (A, B) et (C, D) deux bipoints du plan tels que les segments [AD] et [BC] ont ……………………..,
alors ces bipoints représentent un même objet mathématique appelé <u>vecteur</u> et noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$.
On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



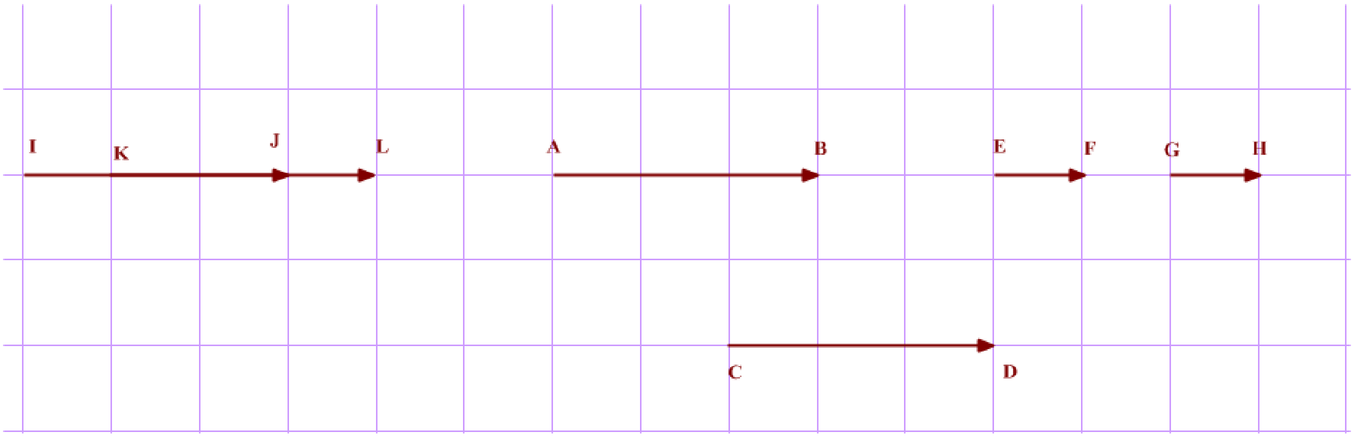


Les bipoints (A, A) et (B, B) représentent un même vecteur appelé …………………… et noté ………..

Egalité vectorielle :

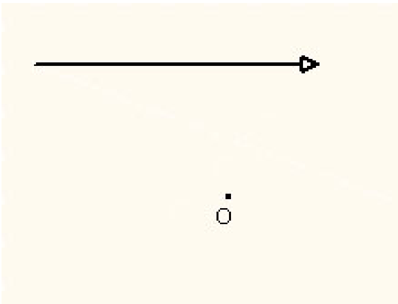
Soient A, B, C et D quatre points du plan.

- $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\right)$, si et seulement si, $\left(dir\,\overrightarrow{AB} = dir\,\overrightarrow{CD}\right.$, sens de $\overrightarrow{AB}$ = sens de $\overrightarrow{CD}$ et AB = CD $\left.\right)$
  Citer les vecteurs égaux sur la figure ci-dessous :
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………



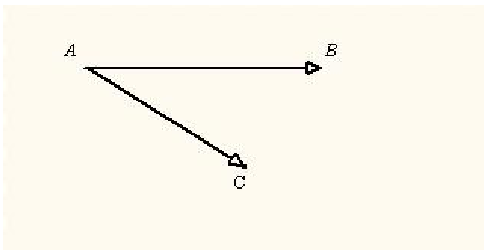
- $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\right)$ équivaut à $\overrightarrow{A....} = \overrightarrow{.....D}$ (permutation des lettres médianes).
- Si de plus A, B et C ne sont pas alignés alors $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}\right)$ équivaut à ABDC est …………………
- $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\right)$ équivaut à ………………………………………………………………………………
- $\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}\right)$ équivaut à ………………………………………………………………………………

- Etant donnés un vecteur $\vec{u}$ et un point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



Addition des vecteurs :

- Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tels que [BC] et [AD] aient même milieu.
  On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
  Construire $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ sur la figure ci – contre :



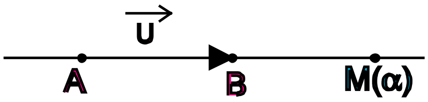
- Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = ...$, c'est la relation de ……………………
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $\vec{u} + \vec{v} = ...$; $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = ...$; $\vec{u} + \vec{0} = ...$;
  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{v} = ...$ appelé ………………… et on a : $-\overrightarrow{AB} = ...$

Exercice :

Soient M, N, P et Q quatre points du plan. Etablir chacune des égalités suivantes :
$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel :

- Soient un vecteur non nul $\vec{u}$, deux points A et B du plan tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et un réel α . On désigne par M le point de la droite (AB) d'abscisse α dans le repère (A , B).



Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel α est le vecteur $\vec{v}=\overrightarrow{AM}$. On note $\alpha\,.\,\vec{u}=\vec{v}$ ou $\alpha\,.\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$.
Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors pour tout réel α , $\alpha\,.\,\vec{0}=\vec{0}$. Lorsque $\alpha=0$ on a M = A et $0\,.\,\vec{u}=\vec{0}$.

- Soit (A, B) un bipoint tel que $A\neq B$. Construire C tel que $\overrightarrow{AC}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}$ lorsque $\alpha=4$; $\alpha=\frac{3}{4}$; $\alpha=-2$ et $\alpha=-\frac{3}{4}$.

- Pour tous réels α et β et vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
  $(\alpha+\beta)\,.\,\vec{u}=$ .... ; $\alpha\left(\beta\,\vec{u}\right)=$ .... ; $\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=$ .... ; $1\,.\,\vec{u}=$ .... ; $(-1)\cdot\vec{u}=$ ....
- $\Big($Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires$\Big)$ équivaut à $\Big($il existe un réel α tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ *ou* $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ $\Big)$

Exercice :

1. Simplifier les relations vectorielles suivantes :
$\vec{w}=2\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)+4\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)-9\vec{u}$; $\vec{w}=\frac{1}{2}\left(3\vec{u}-5\vec{v}\right)+5\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{3}{4}\vec{v}\right)-\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-6\vec{v}\right)$.
2. Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
   a) Marquer les points E et F tels que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère AECF ?
   c) Montrer que $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EO}$.

Vecteurs et configurations géométriques :

Milieu :

I est le milieu du segment [AB] équivaut à $\vec{IA} + \vec{IB} = $ ....ou $\vec{AI} = $ ....ou $\overrightarrow{AB} = $ ....

Exercices 3 et 7 page 90.

Parallélisme :

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont …………….....

Exercice 6 page 90.

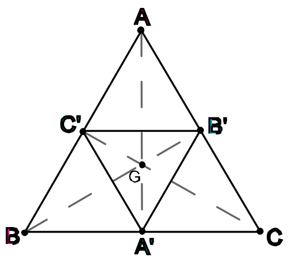
Alignement :

Trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont …………….....

Exercices 4 et 5 page 90.

Centre de gravité :

Soit ABC un triangle et G un point du plan. Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit le centre de gravité du triangle ABC est : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = $........



Exercice :

On considère un triangle ABC et M un point du plan tel que : $4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

b) Soit I le milieu de [BC], montrer que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires.

c) On désigne par G le point du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{MG}$ et par B' l'image de B par la symétrie de centre M. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB'} = \vec{0}$. Que peut – on conclure ?

Exercice 14 page 91.

Activité 43 page 81

Enoncé de THALES :

Soit ABC un triangle, M est un point de (AB) distinct de A. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

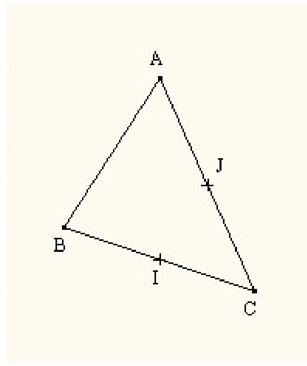
Si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.

Activité 44 page 81

Bases de l'ensemble des vecteurs du plan :

Définition :

On appelle base de l'ensemble des vecteurs tout couple de vecteurs non colinéaires.



Exemples

Citer de la figure ci contre des couples des vecteurs formant une base.

………
…………………………………………………

Le couple $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}\right)$ forme t – il une base de l'ensembles des vecteurs ? Pourquoi ?

……………………………………………………………………………………….

Composantes d'un vecteur dans une base :

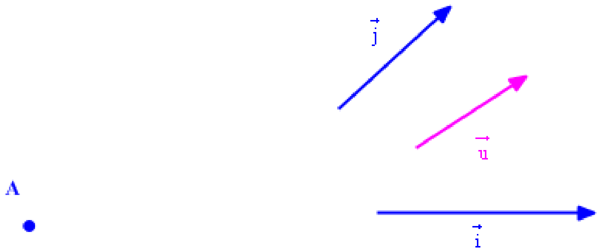
Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base du plan,

$\vec{u}$ un vecteur et A un point.

Construire les points B, C et M tels que :

$\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$

Soit M_1 le projeté du point M sur (AB) parallèlement à (AC) et M_2 le projeté de M sur (AC) parallèlement à (AB).



Ecrire $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$

…………………………………………………………
……..

En déduire qu'il existe deux réels x et y tels que :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

………
……
………

Définition

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple unique de réels (x, y) tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ce couple est appelé couple de composantes de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$.

Propriétés

- $\vec{0}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$; $\vec{i}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$; $\vec{j}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ alors $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ ……………………… ; $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 et 5 page 82.

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

$(\vec{i},\vec{j})$ une base ; $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Montrer que $xy' - x'y = 0$

……
……
…….

Propriété

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j})}$ sont colinéaires, si et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

Le réel $xy' - x'y$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. on note $dét(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Exercice 6 page 82.

Repères du plan :

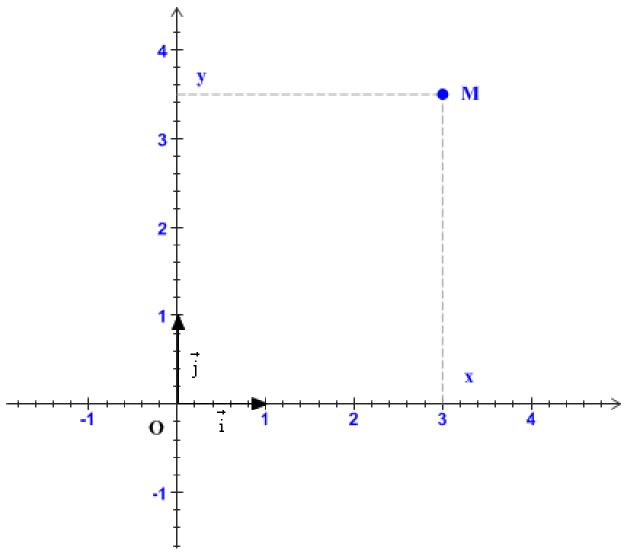
Définition :

Soit O un point du plan et $B = (\vec{i},\vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs.

Le triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ est appelé repère cartésien du plan.

A tout point M du plan, on associe un couple unique de réels (x,y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

(x,y) est le couple des coordonnées du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $M(x,y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$.



Composantes d'un vecteur défini par un bipoint :

Soient deux points $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ dans le plan muni d'un repère cartésien $R = (O,\vec{i},\vec{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour composantes $(x_N - x_M)$ et $(y_N - y_M)$ dans la base $B = (\vec{i},\vec{j})$. On note $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}_B$.

Activités 26 et 27 page 76.

Norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur du plan, on appelle norme de $\vec{u}$ la distance AB. On note $\|\vec{u}\| = AB$.

Si $\|\vec{u}\| = 1$ alors $\vec{u}$ est dit unitaire ou normé.

Propriétés

$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow$ …………… ; $\|\alpha\vec{u}\| =$ ………………… ; $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ ……. $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Repère orthonormé :

Un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est dit orthonormé lorsque $\begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Activité 31 page 77.

Distance de deux points dans un repère orthonormé :

Activité 32 page 78.

Propriétés

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $B = (\vec{i}, \vec{j})$.

* Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = $ ……………………..

* Si $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ alors $MN = $ ………………………………………….

Activité 33 page 78.

Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs :

Activité 34 page 78.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_B$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}_B$ deux vecteurs dans une base orthonormée. On a :

$$\left(\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}\right) \text{ équivaut à } \left(a\,a' + b\,b' = 0\right).$$

Exercice

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : A (-2, 1) ; B (3, 6) ; C (4, -1).

1. Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Quel est le centre I de ce parallélogramme ?
2. Montrer que (AC) $\perp$ (BD). Quelle est la nature du parallélogramme ABCD ?