I. problèmes du premier degré :

Equations du premier degré :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

a) $3x + 2 + 5(4 - x) = 8 - 2x$.

b) $\frac{x}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{5x-2}{6}$.

c) $(2x - 1) - (2 + x) - 7 = 3 + 7x$.

Activités 1 et 2 page 18 :

Equations produits :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$(x + 1)(x - 1)(2x - 3) = 0$; $(5x - 2)(x + 7) + (5x - 2)^2 = 0$.

Equations fractionnaires :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$\frac{2x+5}{x-1} = \frac{x-1}{2x+5}$; $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1} = -\frac{4}{x^2-1}$.

Activités 3 et 4 page 18 :

Equations irrationnelles :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

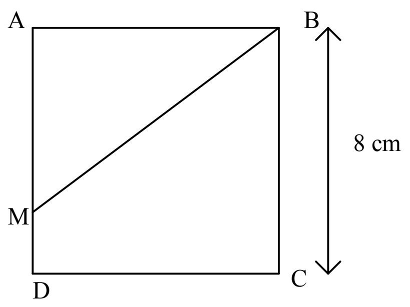
$\sqrt{x^2+4} = 2 - 3x$; $\sqrt{1-x} = \sqrt{2x+4}$; $\sqrt{(x-1)^2} = |3x+5|$.

Equations dépendant des valeurs absolues :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

$|5x+3| = |2x-1|$; $|3x+5| + |-x+2| = 7$.

Exercice :



ABCD un carré et M un point de [AD] différent de A et de D . Comment choisir M pour que l'aire du triangle AMB soit le quart de l'aire du trapèze BCDM ? (Le côté du carré mesure 8 cm).

Inéquations du premier degré :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $12+x<30-2x$

b) $\dfrac{(x-5)^2}{12}-\dfrac{(x-1)^2}{3}\leq -\dfrac{(x-3)(x-2)}{4}$.

Activité 6 page 18.

Inéquations produits :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $(x+3)(2x-4)>0$

b) $4x^2-4x+1-5(1-2x)\geq 1-4x^2$.

Inéquations fractionnaires :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x-5}{3-x}>0$

b) $\dfrac{1-3x}{2x-1}\leq 3$.

Inéquations irrationnelles :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $\sqrt{5x-4}\geq\sqrt{x+1}$

b) $\sqrt{x^2+5}\geq 1-x$.

Inéquations dépendant des valeurs absolues :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations suivantes :

a) $|3x-1|\geq 2$

b) $|3x+4|>|5x-2|$

Exercice :

Voici les tarifs affichés par deux agences de location de voitures (pour des véhicules identiques) :

Agence X : $\begin{cases}\text{28.800 dinars par jour}\\ +\\ \text{335 millimes le km}\end{cases}$ Agence Y : $\begin{cases}\text{28.200 dinars par jour}\\ +\\ \text{340 millimes le km}\end{cases}$

On se propose de déterminer le nombre de kilomètres qu'il faut parcourir par jour pour que l'agence X soit la plus avantageuse.

1. Désigner par x le nombre de kilomètres à parcourir par jour et traduire les hypothèses par une inéquation du premier degré d'inconnue x.
2. Résoudre cette inéquation.
3. Conclure.

II. problèmes du second degré :

Equations du second degré :

Définition :

On appelle équation du second degré à une inconnue toute équation de la forme : $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$

Résolution :

Exemples :

On se propose de trouver une méthode de résolution dans $\mathbb{R}$, des équations suivantes :

$x^2+6x-7=0$ et $3x^2+15x+25=0$.

$x^2+6x=(x+.....)^2-.......$ donc $x^2+6x-7=0$ équivaut à $(x+3)^2-16=0$.

Achever la résolution :

……………………………………………………………………………………………

………

$3x^2+15x+25=0$ équivaut à $3\left(x^2+5x+\frac{25}{3}\right)=0$ équivaut à ……………………………………………..

$x^2+5x+\frac{25}{3}=\left(x+\frac{.....}{.....}\right)^2-.......+\frac{25}{3}$ et par suite l'équation devient : ……………………………………….

Conclure :

………………………………………………………………………………………………

En général :

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{.....}{.....}x+\frac{.....}{.....}\right)$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{.....}{.....}\right)^2-\frac{.......}{.......}+\frac{c}{a}$ donc $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Notation et vocabulaire :

On note $\Delta=b^2-4ac$ et on l'appelle **discriminant** de l'équation, l'expression $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée la **forme canonique** de ax^2+bx+c.

L'équation est équivalente à : $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta<0$ alors
  ……………………………………………………………………………………………
- Si $\Delta=0$ alors
  ……………………………………………………………………………………………
- Si $\Delta>0$ alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, achever la résolution : ……………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

Théorème :

Une équation du second degré dans $\mathbb{R}$, du type $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$ admet au plus deux solutions, selon le signe de Δ.
Si $\Delta < 0$ alors ………………………………………………………………………………………
Si $\Delta = 0$ alors ………………………………………………………………………………………
Si $\Delta > 0$ alors
…………………………………………………………………………………………………

<u>Exercice 8 page 27.</u>
<u>Activité 16 page 21.</u>

<u>*Factorisation d'un trinôme du second degré :*</u>

On rappelle que $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$, où $\Delta = b^2-4ac$.

Factoriser lorsque c'est possible le trinôme ax^2+bx+c, dans chacun des cas suivants :
* $\Delta = 0$:
…………………………………………………………………………………………………
* $\Delta > 0$:
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
………
* $\Delta < 0$:
…………………………………………………………………………………………………

<u>Exercice :</u>
Factoriser chacune des expressions suivantes : $7x+x^2-30$; $3x^2-12x+12$; $2x(x+3)-5x-6$.

<u>*Somme et produit des racines :*</u>

Soit le trinôme ax^2+bx+c on suppose que le discriminant est positif ou nul, donc il existe deux racines x' et x''distinctes ou identiques. Calculer $x'+x''$ et $x'\cdot x''$.
…………………………………………………………………………………………………
….
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…….

<u>Exercice :</u>
On considère le trinôme du second degré P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=4x^2-\left(\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)x+3\sqrt{2}$.

a) Montrer que $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ est une racine de P.

b) Trouver l'autre racine (en valeurs exactes).

<u>Remarques :</u>
On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$.

- Si $a+b+c=0$. Vérifier que 1 est une solution puis trouver l'autre.

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- Si $a-b+c=0$. Vérifier que – 1 est une solution puis trouver l'autre.

………
………
…….

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : $3x^2-5x+2=0$; $x^2+5x-6=0$.

Signe des racines :

On considère l'équation $ax^2+bx+c=0$, on suppose qu'elle admet deux racines x' et x''. La connaissance des coefficients de l'équation permet de déterminer le signe des racines :

- Si a et c sont de signe contraire alors ……………………………………………………………………
- Si a et c sont de même signe alors ………………………………………………………………….

Recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit :

Exemple :

Trouver deux nombres x et y tels que $x+y=14$ et $xy=40$.

………
………
………
………

En général : Si $x+y=S$ et $xy=P$, où S et P sont deux réels donnés alors x et y, s'ils existent, sont les racines de l'équation $X^2-SX+P=0$.

Exercice 10 page 27.

Le discriminant réduit :

Activité 20 page 22 :

Théorème :

On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ et $b=2b'$.

Le réel $\Delta'=b'^2-ac=\frac{1}{4}\Delta$ est appelé discriminant réduit de l'équation et on a :

- Si $\Delta'<0$ alors l'équation n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta'=0$ alors l'équation admet une racine double $x'=x''=-\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta'>0$ alors l'équation admet deux racines distinctes $x'=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x''=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équation suivantes : $4x^2-28x+49=0$; $2x^2-2x+5=0$; $17x^2-20x+3=0$.

Inéquations du second degré :

Signe du trinôme ax^2+bx+c :

Etudions les trois cas : $\Delta<0$, $\Delta=0$ et $\Delta>0$.

- Si $\Delta<0$:

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$. La quantité entre parenthèses est une somme strictement positive

Donc ax^2+bx+c est du signe de a et ne s'annule jamais.

- Si $\Delta=0$:

$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Le trinôme est un carré parfait multiplié par a donc il est du signe de a sauf pour $x=-\frac{b}{2a}$ pour la quelle il est nul.

- Si $\Delta>0$:

$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$. Supposons que $x'<x''$, compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$x-x'$		0		
$x-x''$			0	
$(x-x')(x-x'')$		0	0	
$a(x-x')(x-x'')$		0	0	

Théorème :

Pour étudier le signe de ax^2+bx+c, il faut tout d'abord calculer $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta\le 0$ alors le trinôme garde un signe constant, le signe de a.
- Si $\Delta>0$ alors le trinôme admet deux racines distinctes x' et x'', $x'<x''$
  - * il est du signe de a à l'extérieur des racines soit $]-\infty,x'[\cup]x'',+\infty[$.
  - * il est du signe de $-a$ à l'intérieur des racines $]x',x''[$.

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations : $3x^2+2x+1<0$; $-2x^2-5x+1>0$; $-3x^2+7x-4\le 0$.