Définitions :

Points pondérés :

Etant donnés un point A du plan et un réel α , le couple (A,α) est appelé point pondéré
α est dit coefficient ou masse associé au point A.
$(E,\sqrt{2})$, $(C,-3)$, $(A,2)$, … sont des points pondérés.

Barycentre de deux points pondérés :

(A,α) et (B,β) sont deux points pondérés tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
G est dit le barycentre de (A,α) et (B,β) équivaut à $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
On dit aussi que G est le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs α et β .

Exemples :

- Soit I le milieu du segment [AB] équivaut à …………………………
  I est donc le barycentre de ………………………………………………………………………….
  I est appelé aussi isobarycentre de A et B.
- Soit [AB] un segment de longueur 5 cm et H le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,3)$.
  Ecrire $\overrightarrow{AH}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$, puis construire H.

Propriétés :

- Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).
  Ecrire $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ à l'aide de $\overrightarrow{BA}$.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  Que peut – on dire des points A, B et G ?
  ……………………………………………………………………………………………………
  Activités 3 et 6 page 95.
- Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).
  Soit k un réel non nul. Montrer que G est aussi barycentre des points pondérés $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$.
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
- Si $\alpha=0$ et $\beta\neq 0$ alors
  ……………………………………………………………………………………………………
  Si $\beta=0$ et $\alpha\neq 0$ alors
  ……………………………………………………………………………………………………
- Soit G le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β).
  M est un point quelconque du plan. Montrer que $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
  ……………………………………………………………………………………………………
  Activité 9 page 96.

Exercices 1, 2 et 3 page 101.

Coordonnées du barycentre de deux points dans repère cartésien :

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient deux points distincts A (x_A , y_A) et B (x_B, y_B) et deux réels α et β tels que α + β ≠ 0. Si G est le barycentre des points pondérés (A , α) et (B , β)
Exprimer $\overrightarrow{OG}$ à l'aide de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. En déduire les coordonnées de G en fonction de celles de A et B.

………

………

………

Barycentre de 3 points :

Activité 13 page 97.

Définition :

Soient A, B et C trois points du plan et α , β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
G est le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) si et seulement si $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Si $\alpha = \beta = \gamma$ alors G est dit l'isobarycentre des points A, B et C.

Propriétés :

Si G est le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ) alors :

- Pour tout point M du plan on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=$……………………………………………………
- $\overrightarrow{AG}=$………………$\overrightarrow{AB}+$………………$\overrightarrow{AC}$.

Exercice :

Soit ABC un triangle du plan. G est le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,2)$.
On se propose de construire G par deux méthodes différentes.
1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$; puis construire G.
2. Soit I le milieu de [BC].
   a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(I,4)$.
   b) Construire alors G.

Coordonnées du barycentre de trois points dans un repère cartésien :

Si G est le barycentre des points pondérés (A , α) , (B , β) et (C , γ) alors les cordonnées de G sont :

$$x_G = \frac{\alpha\, x_A + \beta\, x_B + \gamma\, x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\alpha\, y_A + \beta\, y_B + \gamma\, y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Avec : A (x_A , y_A) , B(x_B, y_B) et C(x_C , y_C) .

Applications :

Problème de concours : « activité 21 page 99 ».
Problème d'alignement : « activité 22 page 99 ».
Problème de recherche d'ensemble de points : « activité 23 page 100 ».

Exercice :

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A(2,-1) ; B(-1,1) et C(-1,4).

1) Placer les points A,B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Montre que les points A,B et C ne sont pas alignés.
3) Soit G le barycentre des points pondérés (A,-1) ; (B,3) et (C,-1).
   a- Exprimer $\overrightarrow{AG}$ à l'aide de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b- Construire le point G.
   c- Calculer les coordonnées du point G dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4) Déterminer l'ensemble ζ des points M du plan tels que $\left\|-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = 4$.