I. Définitions et vocabulaire :

Définition :

Soient a_0, a_1, ……….. et a_n des réels.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.

Les réels a_0, a_1, ……….. et a_n sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

L'écriture $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ est dite la forme réduite et ordonnée du polynôme.

Vocabulaire :

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$.
L'entier est appelé le degré du polynôme.
On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.
a_0 s'appelle le terme constant.
$a_1 x$ s'appelle le terme du premier degré ou le terme en x.
$a_n x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n ou le terme du plus haut degré.
Chacun des termes a_0, $a_1 x$, …., $a_{n-1}x^{n-1}$ et $a_n x^n$ est appelé monôme.

Exercice :
Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes :

a) $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$

……

b) $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto 1 + \sqrt{3}\ t + \frac{2}{3}t^2 - 6t^3$

……

c) $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{3y^2 + 5y - 6}{y^2 + 1}$

……

d) $S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ z \mapsto -4z^5 + 6z^3 + \frac{1}{2}z - \sqrt{z}$

……

e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{2}$

……

Activité 8 page 41.

Opérations sur les fonctions polynômes :

Soit f et g deux polynômes et α un réel.
On appelle somme de f et g le polynôme f + g définie pour tout réel x par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
On appelle produit de f et g le polynôme f x g définie pour tout réel x par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
On appelle produit du polynôme f par α, le polynôme α f définie pour tout réel x par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
Activité 10 page 42.

Remarque :
d° (f + g) = d° (f) + d° (g).

II. Racines d'un polynôme – Factorisation d'un polynôme :

Définition :

On dit qu'un réel α est une racine ou un zéro d'un polynôme f si $f(\alpha)=0$.

Activité 12 page 42.

Théorème :

Soit P un polynôme de degré n supérieur à 1.

- Si α est une racine de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-1) tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$; $(n \geq 1)$.
- Si α et β sont deux racines de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-2) tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$; $(n \geq 2)$.
- Plus généralement, si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont k racines de P alors il existe un polynôme Q de degré (n-k) tel que pour tout réel x on a : $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$; $(n \geq k)$.

Activité 15 page 43.

Exercice n° 1 :

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

a) Calculer $P(2)$.

b) En déduire une factorisation de $P(x)$; puis résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

2. Soit $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$.

a) Vérifier que 1 et 2 sont deux racines du polynôme Q.

b) Ecrire $Q(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de degré 2.

3. On pose $f(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$.

a) Déterminer D le domaine de définition de f.

b) Montrer que pour tout réel $x \in D$, on a : $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{x+2}$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice n°2 :

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

1. Vérifier que 3 est une racine de l'équation : $P(x) = 0$
2. Trouver les réels a, b et c pour que $P = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.
3. Résoudre alors l'équation : $P(x) = 0$.
4. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0$.
5. Soit $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32$.

a) Factoriser Q sachant qu'il admet deux racines opposées.

b) Soit $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition de R(x) puis résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$.