

Chapitre 1**Calcul dans \mathbb{R}** **I – Les ensembles de Nombres**

\mathbb{N} : l'ensemble des entiers naturels	;	\mathbb{Z} : l'ensemble des entiers relatifs
\mathbb{D} : l'ensemble des décimaux	;	\mathbb{Q} : l'ensemble des nombres rationnels
\mathbb{R} : l'ensemble des nombres réels		

Exemples :

$$1) 2; \frac{8}{2}; \sqrt{16} \in \mathbb{N} \quad / \quad -2; 7; -\frac{18}{3} \in \mathbb{Z} \quad / \quad 2,3; -4,7; \frac{5}{40}; \frac{132}{10^3}; -\frac{43}{10^4}; \frac{\sqrt{\pi^2}}{\pi} \in \mathbb{D}$$

$$0; -7; 5,89; -4,54; \frac{56}{67}; -\frac{67}{\sqrt{81}}; \frac{43}{14^3} \in \mathbb{Q} \quad / \quad 12; -4; \frac{5}{30}; \pi; -\sqrt{23}; \frac{\sqrt{5}}{\pi^3} \in \mathbb{R}$$

$$2) \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad / \quad \{2; 2,4; -\frac{5}{40}; \sqrt{23}\} \subset \mathbb{R} \quad / \quad \{3^2; \frac{\sqrt{16}}{5}; \pi\} \not\subset \mathbb{Q}$$

II – Proportionnalité et Pourcentage

1 - Proportionnalité

On dit qu'un tableau est un tableau de proportionnalité si le rapport de chaque nombre de la 2^{ième} ligne par celui de la première est toujours le même. Ce rapport s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

2	5	3	10
6	15	9	30

Le Coefficient de proportionnalité est $\mathbf{3} = \frac{15}{5} = \frac{9}{3} \dots\dots$

On dit que 2 variables d'un tableau sont inversement proportionnels si leurs produit est un réel fixe non nul

Exemple :

2	4	$\frac{3}{4}$	1
8	4	$\frac{64}{3}$	16

Le Coefficient de proportionnalité est $\mathbf{16} = 2 \times 8 = \frac{3}{4} \times \frac{64}{3}$

2 – Pourcentage

Un fromage contient 45% de matière grasse. Sachant que ce fromage pèse 300 g, quelle est la masse de matière grasse contenue dans ce fromage.

Dire qu'il y a 45% de matière grasse signifie que dans 100g de fromage, il y a 45 g de matière grasse.

masse de matière grasse (en g)	45	
masse totale du fromage (en g)	100	300

Dans 300g de fromage, il y a 135g de matière grasse.

III – Les identités remarquables

Soit , b et c trois réels, on a les identités remarquables suivantes :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad ; \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad ; \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2) + 6abc$$

Exemples :

$$1) (2 + a\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times a\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}^2 = 4 + 4a\sqrt{3} + 3a^2$$

$$2) (1 - \sqrt{5})^3 = 1^3 - 3 \times 1^2 \times \sqrt{5} + 3 \times 1 \times \sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3 = 1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5} = 16 - 8\sqrt{5}$$

IV – Comparaison de réels – Encadrement

1 – Ordre et comparaison

Pour tout réel a , b , c et d on a :

$$a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c$$

$$a < b \text{ (si } c > 0 \text{ alors } a \cdot c < b \cdot c) \text{ et (si } c < 0 \text{ alors } a \cdot c > b \cdot c)$$

$$a < b \text{ et } c < d \text{ alors } a + c < b + d$$

Si a , b , c et d sont des réels positifs et tel qu'on a $a < b$ et $c < d$ alors $a \cdot c < b \cdot d$

$$a < b \text{ équivaut à } b - a \text{ est strictement positif. } (0 < b - a)$$

$$a > b \text{ équivaut à } b - a \text{ est strictement négatif } (0 < b - a)$$

$$\text{Si } 0 < a < b \text{ alors } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$\text{Si } a < b < 0 \text{ alors } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

2 – Comparaison de a ; a^2 ; \sqrt{a}

Soit a un réel

$$\text{Si } a \geq 1 ; \text{ alors on a : } a^2 \geq a ; a \geq \sqrt{a} \quad / \quad \text{Si } 0 \leq a \leq 1 ; \text{ alors on a : } a^2 \leq a ; a \leq \sqrt{a}$$

$$\text{Si } a \leq -1 ; \text{ alors on a : } a^2 \geq a \quad / \quad \text{Si } -1 \leq a \leq 0 \text{ alors on a : } a^2 \leq a$$

3 – Comparaison de a et $\frac{1}{a}$

Soit a un réel non nul

Si $a \geq 1$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$ / Si $a \leq -1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$

Si $0 < a \leq 1$; alors on a : $a \leq \frac{1}{a}$ / Si $-1 \leq a < 0$; alors on a : $a \geq \frac{1}{a}$

4 – Encadrement, Intervalle de \mathbb{R}

Soient a, b et x trois réels

Si $a < x < b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle ouvert $]a ; b[$ $x \in]a ; b[$

Si $a \leq x \leq b$ alors on dit que x appartient à l'intervalle fermé $[a ; b]$. $x \in [a ; b]$.

Si $x > a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $]a ; +\infty[$.

Si $x \leq a$ alors on dit que x appartient à l'intervalle $]-\infty ; a]$.

L'ensemble des réels positifs est l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on le note \mathbb{R}_+ .

L'ensemble des réels strictement positifs est l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on le note \mathbb{R}_+^* .

Exemples :

- 1) Comparons $\sqrt{2} - 1$ et $(\sqrt{2} - 1)^2$

Méthode 1 : on a $1 < 2$ et $\sqrt{2} < 2$ on tire $1 - 1 < \sqrt{2} - 1 < 2 - 1$ donc $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$

On conclut que $\sqrt{2} - 1 > (\sqrt{2} - 1)^2$

Méthode 2 : on utilise la différence

$\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} - 1)^2 = \sqrt{2} - 1 - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 3\sqrt{2} - 4$, on étudie le signe de $3\sqrt{2} - 4$

$(3\sqrt{2})^2 = 18$ et $4^2 = 16$ or $18 > 16$ donc $3\sqrt{2} > 4$ d'où $3\sqrt{2} - 4 > 0$ on conclut que

$\sqrt{2} - 1 > (\sqrt{2} - 1)^2$

- 2) Soit x un réel quelconque comparons $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$

Méthode 1 : x réel quelconque donc $x^2 \geq 0$ alors $1 + x^2 \geq 1$ alors $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ donc on

conclut que $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x^2}$

Méthode 2 : on compare les carrés des 2 expressions

On a $x^2 \geq 0$ alors $1 + x^2 \geq 1$ et donc $\frac{1}{1+x^2} > 0$

$\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}^2 = \frac{1}{1+x^2}$ et $(\frac{1}{1+x^2})^2 = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ alors $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2 - (1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{x^2}{1+x^2}$

or $x^2 \geq 0$ et $1 + x^2 > 0$ donc $\frac{1}{1+x^2} > 0$ et par la suite $\frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$ on conclut

$\frac{1}{1+x^2} \geq (\frac{1}{1+x^2})^2$ donc $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \sqrt{(\frac{1}{1+x^2})^2}$ soit alors $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \left| \frac{1}{1+x^2} \right|$ donc $\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} \geq \frac{1}{1+x^2}$

3) $\frac{23}{21} > \frac{86}{88}$ car $\frac{23}{21} > 1$ et $\frac{86}{88} < 1$

4) Encadrement d'un réel :

Soit a un réel tel que $-2 \leq a \leq 3$ déterminer un encadrement de $-3a + 5$

-3 est un réel négatif donc $(-3)x(-2) \geq (-3)a \geq 3x(-3)$ soit $-9 \leq -3a \leq 6$

et par la suite $-9 + 5 \leq -3a + 5 \leq 6 + 5$ soit $-4 \leq -3a + 5 \leq 11$

5) Soit x un réel strictement positif montrer l'inégalité suivante $x + \frac{1}{x} \geq 2$

On a $x > 0$ alors $(x - 1)^2 \geq 0$ alors $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ on tire $x^2 + 1 \geq 2x$ et comme $\frac{1}{x} > 0$ alors

$$\frac{x^2+1}{x} \geq \frac{2x}{x} \text{ donc } x + \frac{1}{x} \geq 2$$

6) Moyenne Arithmétique, Moyenne Géométrique

Soit a, b et c trois réels positifs montrer :

a/ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$: on a $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ donc $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$ on tire $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ et en

multipliant les deux membres de l'inégalité par $\frac{1}{2}$ on obtient $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

b/ $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ d'après le cas précédant on a $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ donc on peut

écrire $\frac{a+b}{2} \times \frac{b+c}{2} \times \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \times \sqrt{bc} \times \sqrt{ac}$ donc $\frac{1}{8}(a + b)(b + c)(c + a) \geq \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 \times \sqrt{c}^2$

soit alors $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8|a||b||c|$ donc $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

V – Les Radicaux

Soit a un réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a le seul nombre positif dont le carré est égal à a . La racine carrée de a est notée \sqrt{a}

Si a est positif alors on a $\sqrt{a} = a$ Si a est négatif alors on a $\sqrt{a^2} = |a|$ Tu Remarque bien

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad ; \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Exemples :

1) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$; $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{625} = 25$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

2) simplifier l'expressionsuivante : $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ on utilise le conjugué de $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

$$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{-\sqrt{18}-\sqrt{6}}{6-2} = \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

3) Déterminer le réel a dans l'expression suivante : $\sqrt{7 + \sqrt{a}} = 3$

On a $\left(\sqrt{7 + \sqrt{a}}\right)^2 = 3^2$ donc $7 + \sqrt{a} = 9$ alors $\sqrt{a} = 2$ donc $(\sqrt{a})^2 = 2^2$ on tire que

$$a = 4$$

4) Formule de Héron

L'aire A dont on connaît les trois cotés a, b et c est donnée par la formule suivante

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ; \text{ où } p \text{ désigne le demi-périmètre du triangle}$$

5) Développement – Factorisation

a / Développer et réduire

$$A = (a\sqrt{5} - b)(a + b\sqrt{5}) = a^2\sqrt{5} + 5ab - ab - b^2\sqrt{5} = a^2\sqrt{5} + 4ab - b^2\sqrt{5}$$

b / Factoriser

$$\begin{aligned} B &= (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3 \\ &= [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2] \\ &= 6y[4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2] \\ &= 6y[12x^2 + 9y^2] = 18y[4x^2 + 3y^2] \end{aligned}$$

VI – Valeur absolue

Pour tout nombre réel x , la **valeur absolue** de x (notée $|x|$) est définie par :

$$|x| = x, \text{ si } x > 0 ; |x| = -x, \text{ si } x < 0 ; |x| = 0, \text{ si } x = 0$$

Pour tout nombre réel x et y on a :

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y| ; \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right| \text{ pour } y \neq 0 ; |x + y| \leq |x| + |y| ; |x - y| \geq ||x| - |y||$$

$|x| \leq a$ signifie $-a \leq x \leq a$; $|x| \geq a$ signifie $x \leq -a$ et $x \geq a$ où a est strictement positif

Exemples :

1) Ecrire sans symbole $| \quad |$

$$\begin{aligned} |\sqrt{5} - 2| &= \sqrt{5} - 2 \text{ car } 5 > 4 ; |1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}| = 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3} \text{ car } (2\sqrt{2})^2 = \\ &8 \text{ et } (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3} \text{ or } 3 < 4 \text{ donc } \sqrt{3} < 2 \text{ donc } 2\sqrt{3} < 4 \text{ donc } 4 + 2\sqrt{3} < \\ &8 \text{ alors } 1 + \sqrt{3} < 2\sqrt{2} \text{ donc } 1 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

2) Déterminer le réel x

$$|x + 2| = 3 \text{ signifie } x + 2 = 3 \text{ ou } x + 2 = -3 \text{ donc on tire } x = 1 \text{ ou } x = -5$$

VII – Ordre de grandeur - Valeurs approchées

1 - Valeurs approchées

Soit n un entier. On dit que le nombre décimal a est une valeur approchée à 10^n près du réel $-a| \leq 10^n$

Si $a < b$ on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par défaut

Si $a > b$ on dit que a est une valeur approchée de b à 10^n près par excès

2 – Ecriture scientifique et ordre de grandeur

Si $a \cdot 10^n$ est l'écriture scientifique d'un nombre, l'ordre de grandeur de ce nombre est

$b \cdot 10^n$, où b est l'arrondi de a à l'unité

Exemples :

- 1) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près par défaut
 $10,419484076 \cong 10,41948$; $\frac{2006}{2005} \cong 1,00049$
- 2) 123 423 456 s'écrit $1,234 \times 10^8$ en notation scientifique et son ordre de grandeur est 1×10^8 / 0,000 123 s'écrit $1,23 \times 10^{-4}$ et son ordre de grandeur est 1×10^{-4}