Chapitre 12

Généralités sur les fonctions

I – Définition

Une fonction définie sur un intervalle associe à chaque nombre de cet intervalle un nombre réel et un seul.
Notation: f: I——>R
x——>f(x)

soit $x_0 \in I, le\ réel\ y_0 f(x_0)\ est\ l'image\ de\ x_0\ par\ f,$
$on\ dit\ que\ x_0\ est\ un\ antécédant\ de\ y_0\ par\ f$

Exemples :

1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2 + 2x$
2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{x}{x^2-1}$
3) $h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

Déterminer les ensembles des définitions des fonctions f, g et h

1) $f\ est\ dite\ fonction\ polynôme\ est\ définie\ pour\ tout\ \mathbb{R}$
2) $g\ est\ dite\ fonction\ rationnelle\ don\ composée\ de\ deux\ fonctions$
$x \longmapsto x\ définie\ pour\ tout\ \mathbb{R}\ et\ x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}\ qui\ n'estdéfinie\ pour\ tout\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$
$car\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
3) On a $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ qui s'annule pour les valeurs $x = 1\ et\ x = -1 \notin [0, +\infty[$
On obtient le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$sig(1-x)$	$+$		$-$
$sig(1+x)$	$+$		$+$
$sig(1-x^2)$	$+$		$-$

On conclu donc que $h\ est\ définie\ pour\ tout\ x \in [0,1]$

II – Représentation graphique d'une fonction

Définition : Le plan est muni d'un repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble I. On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f l'ensemble des points M de coordonnées$(x, f(x))$, où x appartient à I

Vocabulaire : Si une fonction f, définie sur un ensemble I, a pour représentation graphique la courbe C, on dit que C a pour équation $y = f(x)$, avec $x \in I$

Exemples :

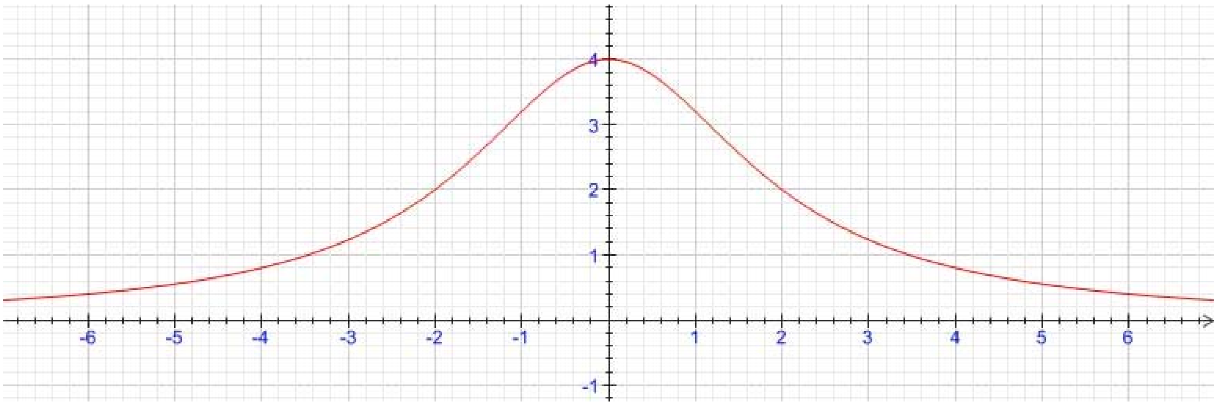
1) La courbe représentative C d'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ a pour équation : $y = x^2 - 2x + 3$. M est le point de C d'abscisse 1. Quelle est son ordonnée ?

$M(1, f(1))$ donc $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 4 - 2 = 2\ donc\ f(1) = 2$

2) Soit *f* la fonction définie par $f : x \longmapsto \frac{16}{x^2+4}$

Pour tracer sa représentation graphique, on calcule les images de quelques valeurs puis on place les points correspondants dans le repère. On relie ensuite ces points par une courbe.

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,4	0,55	0,8	1,23	2	3,2	4	3,2	2	1,23	0,8	0,55	0,4



III – Maximum et minimum

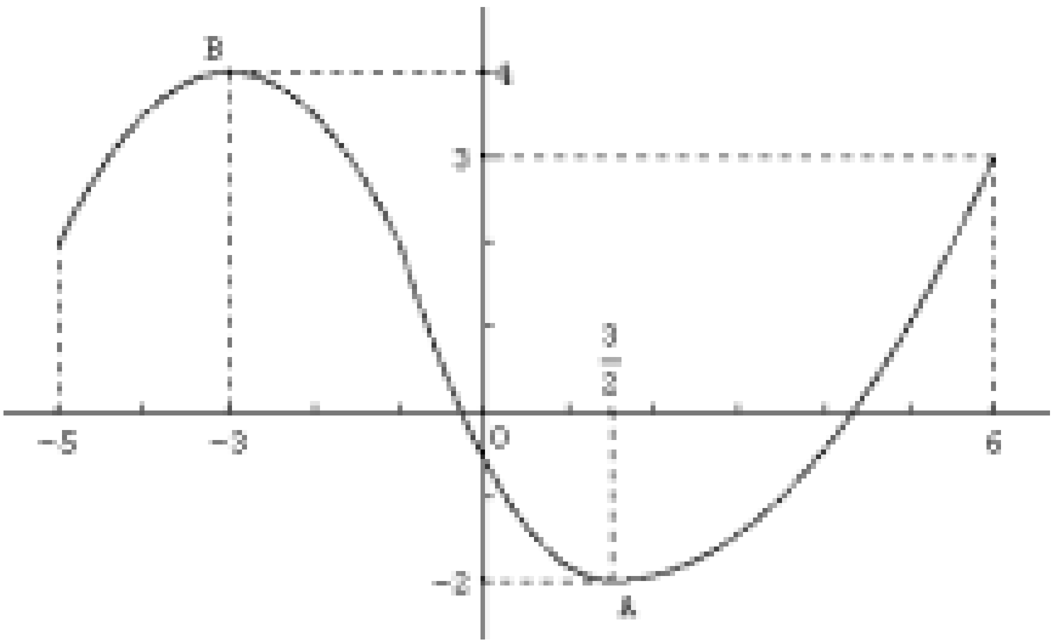
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- La fonction f admet un minimum an a sur l'intervalle I, lorsque : Pour tout réel x de I, $f(x) \geq f(a)$. Le réel f(a) est le minimum de f sur I.
- La fonction f admet un maximum an a sur l'intervalle I, lorsque : Pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(a)$. Le réel f(a) est le maximum de f sur I.

Exemple :

Le minimum sur l'intervalle [-5 ; 6] de la fonction *f* représentée ci-dessous est -2. Il est obtenu lorsque $x = \frac{3}{2}$. En effet, A est le point le plus « bas » de la courbe.

Le maximum sur l'intervalle [-5 ; 6] est 4. Il est obtenu lorsque x = -3. En effet, B est le point le plus « haut » de la courbe.



IV – Sens de variations d'une fonction

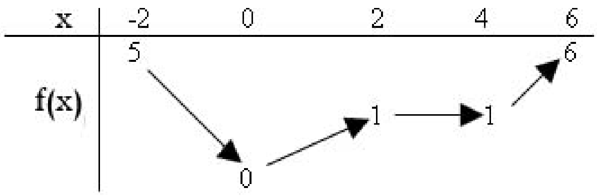
Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble E et I un intervalle inclus dans E.

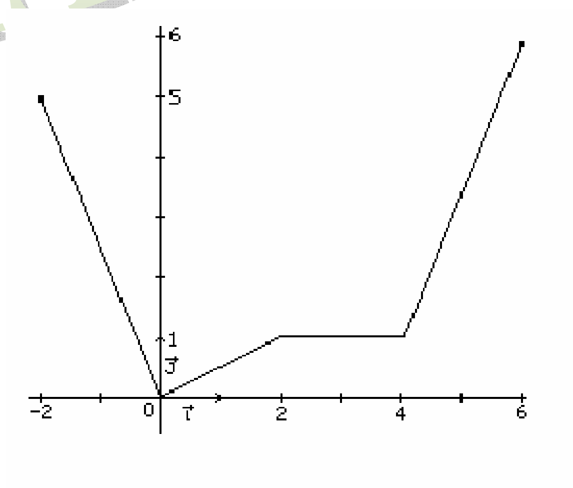
- La fonction f est consentante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b, f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b, f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est consentante sur l'intervalle I si, pour tous réels a et b de I, $f(a) \leq f(b)$.

Vocabulaire : Une fonction est dite monotone sur un intervalle I, Si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

Exemples :

- La fonction f définie sur [-2,6] par sa courbe
- Le sens de variation de f est tel que :
  - Décroissante sur [-2,0]
  - Croissante sur [0,2]
  - Constante sur [2,4]
  - Croissante sur [4,6]
- Le tableau de variation de f





V – Parité et symétrie

Définition : Soit f une fonction définie sur I.

- On dit que f est paire si, pour tout réel x de I, on a $-x \in I$ et $f(-x) = f(x)$
  Alors, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit que f est impaire si, pour tout réel x de I, on a $-x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$
  Alors, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemples :

Soient les trois fonctions f , g et h

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 - 4$ $\quad$ $x \longmapsto x^3$ $\quad$ $x \longmapsto x^3 - 3$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$ donc f est une fonction paire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. (voir fig 1)

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}, g(-x) = (-x)^3 = -x^3 \ = -g(x)$ donc g est une fonction impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère. (voir fig 2)
- On a pour tout $x \in \mathbb{R}, h(-x) = (-x)^3 - 3 = -x^3 - 3$ donc h est une fonction quelconque. (voir fig 3)

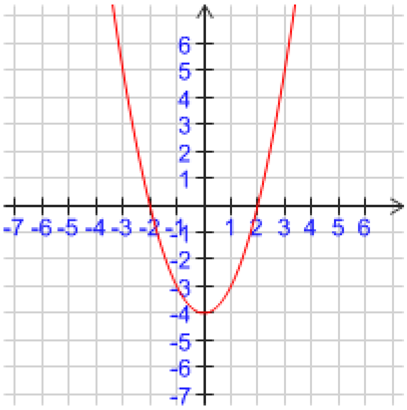


Fig 1

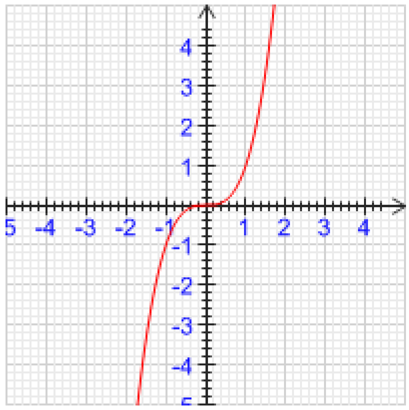


fig 2

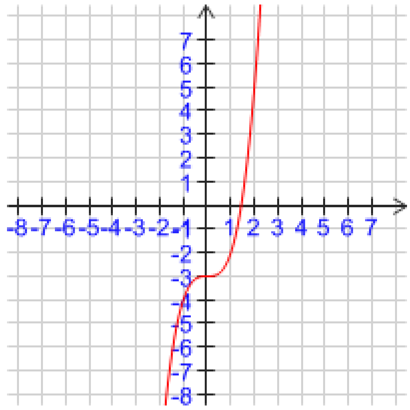


fig 3